KHOA TOÁN CƠ - TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG HÀ NỘI

# Một số phương pháp chọn lọc

# GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP

GIÚP LUYỆN THI ĐẠI HỌC
VÀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

TẬP 1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHAN ĐỨC CHÍNH - PHẠM VĂN ĐIỀU - ĐỖ VĂN HÀ
PHAN VĂN HẠP - PHẠM VĂN HÙNG - PHẠM ĐĂNG LONG
NGUYỄN VĂN MẬU - ĐỖ THANH SƠN - LÊ ĐÌNH THỊNH

# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỌN LỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP

Tài liệu dùng cho học sinh chuẩn bị thi vào các trường đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi toán

TẬP I

(In lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

# LỜI TỰA

*(Cho lần in thứ tư)*

Sau ba lần in bộ sách "*Một số phương pháp chọn lọc để giải các bài toán sơ cấp*" chúng tôi đã nhận được nhiều thư từ khắp các miền của đất nước tỏ ý hài lòng về chất lượng của bộ sách và đóng góp nhiều ý kiến bổ ích đồng thời yêu cầu cho tái bản tiếp.

Để đáp ứng nguyện vọng đó, chúng tôi đã bổ sung và chỉnh lý theo tinh thần: một mặt giữ vững và nâng cao chất lượng các vấn đề đã có, mặt khác kết hợp đưa vào các phương pháp giải khác nhau của các bài toán. Các phần phương pháp tam thức bậc hai, lượng giác, hàm số và bất đẳng thức đều được sửa chữa với tinh thần đó. Riêng phần hình học chúng tôi bổ sung thêm chương các bài toán với phương pháp giải khác nhau.

Theo quy định mới của Cục Xuất bản và để đáp ứng yêu cầu bạn đọc có thể in với số lượng lớn, lần này khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội cùng liên kết với Nhà xuất bản Đại học và giáo dục chuyên nghiệp để xuất bản bộ sách.

Trong quá trình bổ sung và chỉnh lý chúng tôi đã được các đồng chí Nguyễn Thủy Thanh, Nguyễn Ngọc Thắng, Trần Hữu Phúc, Đỗ Lệnh Đạt nhiệt tình giúp đỡ. Nhân đây xin chân thành cảm ơn các đồng chí đó.

Chúng tôi cũng bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới Cục Xuất bản Bộ Thông Tin và tập thể cán bộ và công nhân viên chức Nhà máy in Tiến bộ đã tạo điều kiện để bộ sách sớm đến tay bạn đọc.

Chúng tôi chờ mong ý kiến của bạn đọc về nội dung của bộ sách.

Thư từ xin gửi về khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

*Hà Nội, ngày 1 tháng 1 năm 1988*

**Các tác giả**

# LỜI TỰA

*(Cho lần in thứ ba)*

Sau khi bộ sách "*Một số phương pháp chọn lọc để giải các bài toán sơ cấp*" gồm ba tập ra mắt bạn đọc, chúng tôi đã nhận được nhiều thư từ khắp các miền của đất nước tỏ ý hài lòng về chất lượng của bộ sách và đóng góp nhiều ý kiến bổ ích.

Trong lần xuất bản này, ngoài việc chỉnh lý một vài sai sót chúng tôi đã bổ sung một số điểm mới trong phần các phương pháp tam thức bậc hai, viết thêm chương phương pháp thể tích trong phần hình học, bổ sung và sửa chữa một số đề bài tập ở các chương và sau mỗi tập cho thêm hai đề toán để học sinh tự luyện có hướng dẫn cách giải.

Chúng tôi chân thành cảm ơn Cục Xuất bản Bộ Văn hóa, tập thể cán bộ và công nhân Nhà in Tiến bộ đã tạo mọi điều kiện để bộ sách sớm đến tay bạn đọc.

Chúng tôi chờ mong ý kiến của bạn đọc về nội dung của bộ sách. Thư từ xin gửi về khoa Toán – Cơ, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

*Hà Nội, ngày 25 tháng 11 năm 1984*

**Các tác giả**

# LỜI TỰA

*(Cho lần xuất bản thứ hai)*

Sau khi tập I và tập II của bộ sách: "*Một số phương pháp chọn lọc để giải các bài toán sơ cấp*" ra mắt bạn đọc, chúng tôi đã nhận được nhiều thư từ tỏ ý hoan nghênh cố gắng của tập thể các tác giả và các hiệu đính viên đã hoàn thành có chất lượng việc biên soạn bộ sách.

Mặt khác bạn đọc cũng cho chúng tôi ý kiến nhằm nâng cao hơn nữa chất lượng của bộ sách, và tỏ ý hy vọng bộ sách sẽ được tái bản.

Để đáp ứng các mong muốn tốt đẹp đó chúng tôi đã chỉnh lý lại các phần: phương pháp tam thức bậc hai, hàm số và đồ thị; chỉnh lý và có bổ sung phần hình học; viết lại một cách tương đối hoàn chỉnh các phần: lượng giác, đẳng thức và bất đẳng thức, phương trình, hệ phương trình và bất phương trình.

Sau nữa để thuận tiện cho việc sử dụng chúng tôi đã sắp xếp toàn bộ các phần đã nêu thành một bộ sách gồm ba tập:

Tập I gồm các phần: phương pháp tam thức bậc hai và lượng giác.

Tập II gồm các phần: hàm số và đồ thị; đẳng thức và bất đẳng thức.

Tập III gồm các phần: hình học, phương trình, hệ phương trình và bất phương trình.

Nhân đây chúng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Cục Xuất bản Bộ Văn hóa đã khuyến khích động viên chúng tôi trong quá trình chuẩn bị biên soạn và cho phép được tái bản bộ sách. Chúng tôi một lần nữa chân thành cảm ơn tập thể cán bộ và công nhân Nhà máy in Tiến bộ đã hết sức cố gắng để bộ sách sớm đến tay bạn đọc.

Chắc chắn bộ sách còn có nhiều thiếu sót, chúng tôi mong được bạn đọc cho ý kiến.

Thư từ xin gửi về Khoa Toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

*Ngày 1 tháng 12 năm 1983*

**Các tác giả**

# LỜI NÓI ĐẦU

*(Cho lần xuất bản thứ nhất)*

Để góp phần vào việc nâng cao chất lượng học tập môn toán ở các trường phổ thông trung học và ở các lớp chuyên toán, chúng tôi biên soạn bộ sách "Một số phương pháp chọn lọc để giải các bài toán sơ cấp".

Bộ sách nhằm phục vụ:

- Các học sinh đang chuẩn bị thi vào các trường đại học.
- Các học sinh muốn học tốt môn toán và học sinh giỏi toán.
- Các thầy, cô giáo dạy toán ở các trường phổ thông trung học.

Bộ sách chủ yếu nhằm đạt được việc giới thiệu với bạn đọc một số phương pháp chủ yếu, xuyên suốt trong việc giải một số bài toán sơ cấp thường gặp, nhất là trong các kỳ thi vào các trường đại học.

Bộ sách có thể gồm nhiều tập, trước mắt sẽ ra mắt bạn đọc hai tập.

Tập I gồm hai phần:

Phần thứ nhất đề cập đến các phương pháp tam thức bậc hai để giúp bạn đọc nắm và sử dụng tốt các phương pháp giải các bài toán dựa trên các lý luận về tam thức bậc hai.

Phần thứ hai dành riêng cho các phương pháp để giải một số bài toán về hình học bao gồm việc khảo sát các mặt cắt, các quỹ tích trong mặt phẳng và trong không gian, các bài toán cực trị, các bài toán về các đa diện nội và ngoại tiếp hình cầu và phép chiếu vuông góc.

Tập II gồm hai phần:

Phần thứ nhất trình bày các khái niệm cơ bản về hàm số, chỉ rõ cách vẽ đồ thị hàm số và nêu lên các phương pháp định hình, định tính và định lượng các hàm số sơ cấp.

Phần thứ hai nêu một cách vắn tắt cách giải các bài toán về bất đẳng thức, bất phương trình, các phương trình mũ, phương trình chứa lôgarít và các bài toán về lượng giác, v.v... chủ yếu để đáp ứng cho việc ôn thi đại học sắp tới. Việc trình bày có hệ thống các vấn đề ở phần này sẽ được tiến hành ở các tập sau.

Trong mỗi phần đều nêu tóm tắt các cơ sở lý luận, ví dụ và từ các ví dụ chọn lọc mà nêu lên phương pháp giải các bài toán. Sau đó có các bài tập có chỉ dẫn cách giải để bạn đọc có thể tự rèn luyện và nắm chắc các phương pháp đã trình bày. Các bài tập dành riêng cho học sinh giỏi có đánh dấu (*).

Để bạn đọc làm quen với các đề thi đại học, cuối mỗi tập có cho bốn đề thi hoàn chỉnh như các đề thi vào đại học và hướng dẫn cách giải. Để thuận lợi cho việc ôn thi, cuối tập II có bản hướng dẫn nội dung ôn thi môn toán (khối A và khối B) vào đại học của Bộ Đại học và trung học chuyên nghiệp.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các đồng chí trong Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp, các đồng chí ở Cục Xuất bản đã tạo điều kiện cho chúng tôi hoàn thành sớm các thủ tục xuất bản.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn cán bộ và công nhân Nhà máy in Tiến bộ đã nhanh chóng hoàn thành việc in ấn giúp cho cuốn sách kịp thời phục vụ bạn đọc.

Vì thời gian và khả năng hạn chế, chắc chắn còn nhiều thiếu sót trong cuốn sách, chúng tôi mong bạn đọc xa gần cho chúng tôi biết nhận xét về cuốn sách.

Thư từ và nhận xét xin gửi theo địa chỉ:

Khoa Toán, Trường Đại học Tổng hợp, Hà Nội.

**Các tác giả**

# PHẦN THỨ NHẤT
# PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI

## CHƯƠNG I
## PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### §1. Phương trình bậc hai

Phương trình bậc hai là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

*1. Cách giải:* Gọi $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

Nếu $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm;

Nếu $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép $x_o = -\dfrac{b}{2a}$;

Nếu $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Trường hợp b = 2b' thì có thể viết nghiệm gọn hơn:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{với} \quad \Delta' = b'^2 - ac.$$

Đặc biệt: Nếu $a + b + c = 0$, thì $x_1 = 1$ ; $x_2 = \dfrac{c}{a}$ ;

Nếu $a - b + c = 0$, thì $x_1 = -1$ ; $x_2 = -\dfrac{c}{a}$

*2. Định lý Viét: Giả sử $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Khi đó:* $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ; $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ .

*Ngược lại, nếu hai số x, y có tổng $S = x + y$ và tích $P = x.y$ thì x và y chính là nghiệm của phương trình:* $X^2 - SX + P = 0$.

*3. Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm:* Dựa vào hệ thức Viét ta có thể tính được các biểu thức đối xứng sau đây, với $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của (1):

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$,

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$.

Tổng quát, ta có hệ thức truy hồi:

$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$ với $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n > 2)$.

*4. Dấu của nghiệm số:* Dựa vào định lý Viét ta có:

Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu là:

$$\begin{cases} \Delta > 0. \\ \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu là:

$$\frac{c}{a} < 0.$$

Trong trường hợp hai nghiệm cùng dấu, muốn hai nghiệm cùng dương thì cần thêm điều kiện S > 0. Còn muốn hai nghiệm cùng âm thì cần thêm điều kiện S < 0.

*Ví dụ 1.* Cho phương trình $2x^2 + 2x + \cos\alpha = 0$ $(0 < \alpha < \pi)$.

a) Với những giá trị nào của $\alpha$ thì phương trình có nghiệm.

b) Gọi $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình. Hãy xác định $\alpha$ sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Trong trường hợp đó chứng minh rằng: $x_1^2 + x_2^2 < 1,9$.

*Giải:* a) Muốn phương trình có nghiệm ta phải có:

$\Delta' \geq 0$, tức là: $1 - 2\cos\alpha \geq 0$, tức là: $\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$

Từ đó: $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$ (do $0 < \alpha < \pi$).

Vậy với $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$, thì phương trình đã cho có nghiệm.

b) Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-2}{\cos\alpha}$.

Như vậy, ta cần phải có: $\frac{-2}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, hay là

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

hay là $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. Giá trị này thừa nhận được vì

$$\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} < \pi.$$

Lúc đó: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 =$

$$= 1 - \cos\alpha = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,9$ là hiển nhiên.

*Ví dụ 2.* Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn luôn có nghiệm.

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

c) Xác định m sao cho phương trình có hai nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

*Giải:* a) Ta có $\Delta' = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$

với mọi m. Vậy phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm.

b) Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2, & (1) \\ x_1 . x_2 = m - 3. & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra: $m = x_1 . x_2 + 3$.

Thế giá trị m vào (1) ta được: $(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 4$.

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

c) Muốn phương trình có hai nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối ta cần có

$$\begin{cases} x_1 . x_2 = m - 3 < 0 \\ x_1 + x_2 = 2(m - 1) = 0 \end{cases}$$

hay là $\begin{cases} m < 3, \\ m = 1. \end{cases}$

Vậy m = 1 là giá trị thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

*Ví dụ 3:* Gọi α, β là các nghiệm của phương trình

$$3x^2 + 7x + 4 = 0.$$

Không giải phương trình, hãy thành lập phương trình bậc hai với hệ số bằng số mà các nghiệm của nó là:

$$\frac{\alpha}{\beta - 1} \quad \text{và} \quad \frac{\beta}{\alpha - 1}$$

*Giải*: Theo định lý Viét: $\alpha + \beta = -\frac{7}{3}$ ; $\alpha.\beta = \frac{4}{3}$

(Chú ý rằng $\alpha \neq 1$ và $\beta \neq 1$). Ta có:

$$\frac{\alpha}{\beta - 1} + \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta) - 2\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{23}{21}.$$

$$\frac{\alpha}{\beta - 1} . \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{6}{21}.$$

Vậy $\frac{\alpha}{\beta - 1}$ và $\frac{\beta}{\alpha - 1}$ là các nghiệm của phương trình

$$21X^2 - 23X + 6 = 0$$

*Ví dụ 4.* Với những giá trị nào của a thì phương trình $x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$ có nghiệm và một nghiệm bằng bình phương của nghiệm kia.

*Giải:* Trước hết phải có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow |a| \leq \frac{15}{8}$

Theo định lý Viét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1.x_2 \quad = a^2 \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể coi $x_2 = {x_1}^2$ như vậy ta có:

$$\begin{cases} x_1 + {x_1}^2 = \frac{15}{4} & (1) \\ {x_1}^3 \quad = a^2. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{a^2}$. Thế vào (1) ta có:

$$\sqrt[3]{a^2} + (\sqrt[3]{a^2})^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{27}{8}}$$

Lúc đó, hiển nhiên rằng $|a| \leq \frac{15}{8}$. Vậy những giá trị a cần tìm là $a = \pm\sqrt{\frac{27}{8}}$.

*Ví dụ 5.* Chứng minh rằng hệ thức $(k+1)^2ac - kb^2 = 0$ $(k \neq 0)$ là điều kiện cần và đủ để tỉ số các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ bằng k. (Giả sử phương trình đã cho có nghiệm).

*Giải:* Xét biểu thức

$P = (x_1 - kx_2).(x_2 - kx_1) = x_1x_2 + k^2x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) =$

$$= \frac{c}{a} + k^2.\frac{c}{a} - k\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2.\frac{c}{a}\right] =$$

$$= \frac{ac + k^2ac - kb^2 + 2kac}{a^2} = \frac{(k+1)^2ac - k.b^2}{a^2}.$$

Như vậy, nếu $(k+1)^2ac - kb^2 = 0$, thì một trong hai thừa số của P phải bằng không và ngược lại. Đó chính là điều phải chứng minh.

*Ví dụ 6.* Giả sử hai phương trình: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ và $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ có ít nhất một nghiệm chung. Chứng minh rằng:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)^2 = (a_2b_1 - a_1b_2).(c_1b_2 - c_2b_1).$$

*Giải:* Giả sử hai phương trình có nghiệm chung $x_0$ tức là đồng thời có các đẳng thức:

$$a_1x_o^2 + b_1x_o + c_1 = 0, \tag{1}$$
$$a_2x_o^2 + b_2x_o + c_2 = 0. \tag{2}$$

Nhân (1) với $a_2$ và nhân (2) với $a_1$ rồi trừ đi nhau ta được:

$$(a_2b_1 - a_1b_2)x_o + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0 \tag{3}$$

Nhân (1) với $b_2$ và nhân (2) với $b_1$ rồi trừ đi nhau ta được:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_o^2 + (c_1b_2 - c_2b_1) = 0 \tag{4}$$

Từ (3), suy ra:

$$\begin{aligned}(a_2c_1 - a_1c_2)^2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2.x_o^2 = \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1) . [(a_1b_2 - a_2b_1)x_o^2] = \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1) . (c_2b_1 - c_1b_2) \qquad \text{(do 4)} \\ &= (a_2b_1 - a_1b_2) . (c_1b_2 - c_2b_1).\end{aligned}$$

Đó là điều phải chứng minh.

*Ví dụ 7.* Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có đúng một nghiệm dương. Gọi nghiệm đó là $x_1$. Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương. Gọi nghiệm đó là $x_2$, chứng minh rằng $x_1 + x_2 \geq 2$.

*Giải:* Từ giả thiết, dễ dàng suy ra phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương.

Do $x_1$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ nên $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$. Chia cả hai vế của đẳng thức trên cho $x_1^2 \neq 0$ ta được $a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$.

Như vậy $\frac{1}{x_1}$, chính là nghiệm của phương trình

$cx^2 + bx + a = 0$.

Do nghiệm $\dfrac{1}{x_1} > 0$ nên $\dfrac{1}{x_1} = x_2$. Từ đó

$$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2.$$

Bài toán được chứng minh xong.

*Ví dụ 8.* Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + px +$ $+ q = 0$ với p, q là các số nguyên, có các nghiệm hữu tỉ, thì các nghiệm đó là những số nguyên.

*Giải:* Nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Do các nghiệm là hữu tỷ nên $p^2 - 4q$ phải là số chính phương. Tức là $p^2 - 4q = k^2$ (*), với k là số nguyên nào đó.

Có hai khả năng xảy ra đối với p:

a) Giả sử p là số lẻ: khi đó, từ (*) suy ra k phải là số lẻ.

b) Giả sử p là số chẵn: khi đó, từ (*) suy ra k phải là số chẵn.

Vậy p và k cùng tính chẵn, lẻ. Từ đó, tử số của nghiệm $x_{1,2}$ là một số chẵn. Tức $x_{1,2}$ là những số nguyên.

*Ví dụ 9.* Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một cặp số (x,y) thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0. \qquad (1)$$

*Giải:* Trước hết, ta phải có $y \geq 0$.

Xem phương trình (1) là một phương trình bậc hai đối với x (y là tham số). Để phương trình đó có nghiệm ta phải có $\Delta' \geq 0$, hay là: $\Delta' = 4 - (y - 6\sqrt{y} + 13) =$

$$= -(\sqrt{y} - 3)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này chỉ thỏa mãn duy nhất tại một giá trị $\sqrt{y} = 3$ hay $y = 9$.

Với $y = 9$ suy ra $x = 2$.

Vậy, chỉ duy nhất một cặp số $x = 2$, $y = 9$ thỏa mãn phương trình đã cho.

*Ví dụ 10.* Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn luôn có: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

*Giải:* Có nhiều cách chứng minh bài toán này. Dưới đây xin trình bày một cách giải "độc đáo" dựa vào kiến thức phương trình bậc hai.

Xét $\Delta ABC$ bất kỳ. Đặt $\cos A + \cos B + \cos C = k$.

Từ đó

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right) = k.$$

hay là:

$$2\sin^2\frac{C}{2} - 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} + (k-1) = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\sin\frac{C}{2}$. Hiển nhiên rằng phương trình này có nghiệm. Tức là ta luôn luôn có:

$$\Delta' \ge 0,$$

hay là: $\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2(k-1) \ge 0$

hay là: $k \le \dfrac{2 + \cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2} \le \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Như vậy, ta chứng minh được:

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức có dấu bằng khi và chỉ khi A = BB = = C = 60° tức là khi $\Delta ABC$ đều (độc giả tự kiểm tra kết qquả này).

*Ví dụ 11.* Giả sử $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trìình $x^2 - 3x + m = 0$; $x_3$, $x_4$ là hai nghiệm của phương trìình $x^2 - 12x + n = 0$. Biết rằng $x_1, x_2, x_3, x_4$ lập thành một cácấp số nhân tăng. Hãy tính m và n.

*Giải:* Để các phương trình có nghiệm, trước hết ta phải có

$$\Delta_1 = 9 - 4m \ge 0,$$
$$\Delta_2 = 144 - 4n \ge 0$$

hay $m \le \frac{9}{4}$ và $n \le 36$.

Theo định lý Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & (1) \\ x_3 + x_4 = 12 & (2) \\ x_1 . x_2 = m & (3) \\ x_3 . x_4 = n. & (4) \end{cases}$$

Gọi công bội của cấp số là q ta có:

$$x_2 = x_1 q\ ;\ \ x_3 = x_1 q^2\ ;\ \ x_4 = x_1 q^3.$$

Từ (1) và (2): $\quad x_1 + x_1 q = 3, \qquad (5)$

$$x_1 q^2 + x_1 q^3 = 12 \qquad (6)$$

Lấy (6) chia cho (5) vế theo vế và rút gọn ta được:

$$(q + 1)(q^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad q = -1\ ;\ \ q = -2\ ;\ \ q = 2.$$

Do cấp số nhân là tăng nên chỉ lấy được giá trị $q = 2$.

Với $q = 2 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 8$.

Từ (3) và (4) $\Rightarrow m = 2, n = 32$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn.

Vậy $m = 2;\quad n = 32$.

*Ví dụ 12.* Cho hai phương trình:

$$x^2 + x + a = 0\ ;\quad x^2 + ax + 1 = 0.$$

a) Với những giá trị nào của a, thì hai phương trình có nghiệm chung?

b) Với những giá trị nào của a, thì hai phương trình tương đương?

*Giải:* a) Giả sử hai phương trình có nghiệm chung. Gọi nghiệm chung đó là $x = x_o$. Thế thì:

$$x_o^2 + x_o + a = 0, \qquad (1)$$

$$x_o^2 + ax_o + 1 = 0 \qquad (2)$$

Lấy đẳng thức (1) trừ đi đẳng thức (2) vế theo vế, ta được:

$$(1 - a)x_o + (a - 1) = 0, \text{ hay là } (1 - a)(x_o - 1) = 0.$$

Từ đó suy ra: $x_o = 1$, hoặc $a = 1$.

Như vậy, nếu hai phương trình có nghiệm chung, thì nghiệm chung đó phải bằng 1. Thay $x_o = 1$ vào đẳng thức (1), ta nhận được $a = -2$. Lúc đó hai phương trình có dạng:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

và hiển nhiên có một nghiệm chung là $x = 1$.

Với $a = 1$, thì hiển nhiên cả hai phương trình đều vô nghiệm. Vậy, chỉ với $a = -2$, thì hai phương trình đã cho có nghiệm chung.

b) Hai phương trình được gọi là tương đương nếu xảy ra một trong hai khả năng sau:

α) Mọi nghiệm của phương trình này đều là nghiệm của phương trình kia và ngược lại.

β) Cả hai phương trình đều vô nghiệm.

Rõ ràng rằng, theo lý luận ở câu a), các tập hợp nghiệm của hai phương trình đã cho không thể trùng nhau. Vậy trường hợp thứ nhất không thể xảy ra.

Ta xét tiếp khả năng thứ hai. Gọi $\Delta_1$, $\Delta_2$ lần lượt là biệt thức của phương trình (1) và phương trình (2).

Hai phương trình đều vô nghiệm, nếu:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 - 4a < 0, \\ \Delta_2 = a^2 - 4 < 0. \end{cases}$$

hay là: $\begin{cases} a > \dfrac{1}{4}, \\ -2 < a < 2, \end{cases}$

hay là: $\dfrac{1}{4} < a < 2.$

Vậy với $\dfrac{1}{4} < a < 2$, thì hai phương trình đã cho tương đương.

*Ví dụ 13.* Giả sử a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một và $c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và phương trình $x^2 + bx + ca = 0$ có đúng một nghiệm chung, thì nghiệm khác của các phương trình đó thỏa mãn phương trình: $x^2 + cx + ab = 0$.

*Giải:* Giả sử phương trình thứ nhất có các nghiệm là $x_o$, $x_1$; phương trình thứ hai có các nghiệm là $x_o$, $x_2$ ($x_o$ là nghiệm chung, $x_1 \neq x_2$). Khi đó:

$$x_o^2 + ax_o + bc = 0, \quad (1)$$
$$x_o^2 + bx_o + ca = 0. \quad (2)$$

Lấy (1) trừ đi (2) ta được: $(a - b)(x_o - c) = 0$. Từ đó: $x_o = c$ (do $a \neq b$).

Ngoài ra, theo định lý Viét: $\begin{cases} x_o x_1 = bc, \\ x_o x_2 = ca. \end{cases}$

Từ đó: $x_1 = b$ ; $x_2 = a$.

Vậy: $x_1 + x_2 = a + b$.

Mặt khác, cũng theo định lý Viét:

$$\begin{cases} x_o + x_1 = -a, & (3) \\ x_o + x_2 = -b. & (4) \end{cases}$$

Cộng (3) và (4) lại, ta được:

$$2x_o + (x_1 + x_2) = -a - b.$$

Từ đó suy ra: $a + b = -c$,

Như vậy: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -c \\ x_1.x_2 = ab. \end{cases}$

Từ đó suy ra $x_1$, $x_2$ chính là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + cx + ab = 0.$$

(Hiển nhiên rằng: $c^2 - 4ab > 0$. Thậy vậy: $c^2 - 4ab = (-a - b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 > 0$.

## BÀI TẬP

**1.** Lập phương trình bậc hai với hệ số nguyên nếu biết một nghiệm của nó là:

$$x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

**2.** Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình:

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

**3.** Cho hai phương trình: $x^2 + p_1x + q_1 = 0$,

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0.$$

Biết rằng $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Chứng minh rằng ít nhất một phương trình đã cho có nghiệm.

**4.** Với giá trị nào của k thì tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $4x^2 - 28x + k = 0$ bằng 22,5.

**5.** Với những giá trị nào của k thì phương trình:

$x^2 - |x| + k = 0$ có một nghiệm duy nhất.

**6.** Ba số a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a > 0$, $a^2 = bc$;

$$a + b + c = abc.$$

a) Chứng minh rằng: $a \geq \sqrt{3}$ ; $b > 0$, $c > 0$.

b) Chứng minh rằng: $b^2 + c^2 \geq 2a^2$.

**7.** Biết rằng $tg\alpha$ và $tg\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Hãy tính biểu thức:

$E = \sin^2(\alpha + \beta) + p\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + q\cos^2(\alpha + \beta)$ theo p và q (dự trữ A - 1971)(*).

**8.** Giả sử $\alpha$, $\beta$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm là:

$(\alpha + \beta)^2$ và $(\alpha - \beta)^2$.

**9.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình:

$$x^2 + 2mx + 4 = 0.$$

a) Hãy tính theo m các biểu thức sau đây:

$$M = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\,;\ N = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}.$$

b) Xác định m sao cho: $x_1^4 + x_2^4 \leq 32$.

---

(*) Trong cuốn sách này có dẫn ra một số câu hỏi trong các đề thi vào đại học các năm trước đây. Từ nay về sau, nếu viết (A - 1972) nghĩa là đề thi khối A năm 1972; nếu viết (dự trữ B - 1975) nghĩa là ở đề dự trữ khối B năm 1975.

c) Xác định m sao cho: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geq 3$.

**10.** Chứng minh rằng nếu các hệ số của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ liên hệ với nhau bởi hệ thức $2b^2 - 9ac = 0$, thì tỷ số các nghiệm của phương trình bằng 2.

**11.** Giả sử a + b + c và c là những số nguyên lẻ. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm nguyên.

**12.** Chứng minh rằng nếu các số hữu tỷ a, b, c thỏa mãn điều kiện: $|b| = |a + c|$, thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm hữu tỉ.

**13.** Tìm điều kiện để các phương trình: $x^2 + ax + bc = 0$; $x^2 + bx + ca = 0$; $x^2 + cx + ab = 0$ từng đôi một có nghiệm chung.

**14.** Cho a, b, c là ba số khác không, còn p, q là hai số tùy ý. Chứng minh rằng phương trình:

$$\frac{a^2}{x - p} + \frac{b^2}{x - q} = c$$

luôn luôn có nghiệm.

**15.** Chứng minh rằng nếu hai phương trình:

$x^2 - (3\alpha - 1)x + 2\alpha^2 - \alpha = 0$; $x^2 - (2\alpha + 5)x + \alpha^2 + 7\alpha = 0$ có nghiệm chung $x_o$, thì: $(\alpha - 12)x_o + 15\alpha = 0$.

**16.** Với những giá trị nào của k, hai phương trình sau đây có một nghiệm chung:

$$2x^2 + (3k + 1)x - 9 = 0;\quad 6x^2 + (7k - 1)x - 19 = 0.$$

**17.** Chứng minh rằng trong mọi $\Delta ABC$ ta luôn có:

a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$;

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

**18.** Tìm những cặp số x, y thỏa mãn các phương trình:

a) $x^2y^4 - 16xy^3 + 68y^2 - 4xy + x^2 = 0$

b) $x^2 - 6x\sin y + 9 = 0$ (dự trữ A - 1971).

**19.** (A - 1981) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tổng các bình phương các nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (3\sin a - \cos a)x - 4 - 4\cos 2a = 0$$

khi tham số a biến thiên.

**20*.** Cho hai phương trình $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + mx + n = 0.$$

Giả sử $\alpha$ là một nghiệm của phương trình thứ nhất, $\beta$ là một nghiệm của phương trình thứ hai. Chứng minh rằng $\alpha = k\beta$ khi và chỉ khi:

$$(q - k^2n)^2 + k(p - km)(knp - qm) = 0.$$

**21*.** Giả sử phương trình $ax^2 - bx + b = 0$ $(a.b > 0)$ có các nghiệm là $x_1$, $x_2$. Chứng minh rằng tồn tại các số $\alpha_k = \pm 1$ $(k = 1\ ;\ 2)$ sao cho:

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \alpha_1\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + \alpha_2\sqrt{\frac{b}{a}} = 0.$$

**22*.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số $N = n^2 + 5n + 16$ không chia hết cho 169.

**23*.** Chứng minh rằng nếu a, b, c, đều là những số nguyên lẻ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.

**24*.** Giả sử $p = \overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

**25*.** Giả sử $x_o$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Chứng minh rằng $|x_o| \leq 1 + \max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|; \left|\frac{c}{a}\right|\right\}$ $(a \neq 0)$.

b) Chứng minh rằng $|x_o| \leq \dfrac{2|ac| + b^2}{|ab|}$ $(ab \neq 0)$.

**26*.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $S_n = x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên và không chia hết cho 5.

**27*.** Giả sử m, n là những số tự nhiên và các nghiệm của phương trình $x^2 - m(n+1)x + m + n + 1 = 0$ cũng là những số tự nhiên. Chứng minh rằng: $m.n \leq 4$.

**28*.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2+px-1=0$ với p là số nguyên lẻ. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số $S_n = x_1{}^n + x_2{}^n$ và $S_{n+1} = x_1{}^{n+1} + x_2{}^{n+1}$ là những số nguyên, nguyên tố cùng nhau.

**29*.** Trong mọi cặp nghiệm của phương trình $x^2 - yx^2 - y + 8x + 7 = 0$, hãy tìm cặp nghiệm (x, y) mà y có giá trị lớn nhất.

## §2. Các bài toán quy về phương trình bậc hai

Trong chương trình phổ thông, chúng ta thường gặp các bài toán phải giải các phương trình hoặc hệ phương trình, mà các phương trình hoặc hệ phương trình đó thường được thể hiện dưới các hình thức:

- Phương trình bậc cao;
- Phương trình vô tỉ;
- Phương trình siêu việt;
- Phương trình lượng giác, v.v...

Trong phần thứ hai dưới đây và tập III, chúng tôi sẽ trình bày một cách đầy đủ và có hệ thống các phương pháp để giải các loại bài toán đó.

Trong chương trình này, chúng tôi chỉ nêu một vài thí dụ điển hình, có tính chất minh họa để bạn đọc thấy được vai trò của phương trình bậc hai.

Các phần bài tập về loại này nhưng khó hơn (có tham số) sẽ được trình bày trong §2 của chương II.

*1. Phương trình bậc cao*

Để giải một phương trình bậc ba, bậc bốn, ta có thể dùng phép thử trực tiếp để tìm ra một nghiệm đặc biệt, hoặc dùng phương pháp nhóm các số hạng để phân tích đa thức thành tích các thừa số bậc nhất hoặc bậc hai. Có những phương trình ta phải dùng ẩn số phụ để đưa về phương trình bậc thấp hơn.

Ta xét một số ví dụ minh họa.

*Ví dụ 1.* Giải phương trình

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

*Giải:* Ta có:

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 2(x^3 + 1) + 7(x^2 + 1) =$$
$$= 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + 7x(x + 1) =$$
$$= (x + 1)(2x^2 + 5x + 2).$$

Vậy phương trình đã cho có dạng:

$$(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0.$$

Với $x + 1 = 0$, ta có $x_1 = -1$.

Với $2x^2 + 5x + 2 = 0$, ta có $x_2 = -2$ ; $x_3 = -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm:

$$x_1 = -1 \text{ ; } x_2 = -2; x_3 = -\frac{1}{2}.$$

*Chú ý. Đối với phương trình bậc ba* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *ta cần biết hai tính chất sau:*

*1. Nếu $a + b + c + d = 0$, thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.*

*2. Nếu $a - b + c - d = 0$, thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.*

Nếu đã đoán nhận được một nghiệm thì ta có thể dễ dàng phân tích vế trái thành thừa số. Phương trình đã cho là một trường hợp riêng của dạng đã nêu ở trên.

*Ví dụ 2.* Cho phương trình:

$$x^3 - (m^2 - m + 7)x - (3m^2 - 3m - 6) = 0.$$

a) Xác định m sao cho phương trình có một nghiệm bằng -1.

b) Giải phương trình ứng với các giá trị m đã tìm được.

*Giải:* a) Muốn phương trình đã cho có nghiệm bằng -1, ta phải có $(-1)^3 - (m^2 - m + 7) . (-1) - (3m^2 - 3m - 6) = 0$, hay là $m^3 - m - 6 = 0$, từ đó:

$$m_1 = 3 ; \quad m_2 = -2.$$

Vậy với $m_1 = 3$ hoặc $m_2 = -2$, thì phương trình đã cho có nghiệm bằng -1.

b) Với $m_1 = 3$. Phương trình đã cho có dạng:

$$x^3 - 13x - 12 = 0. \qquad (*)$$

Ta có: $x^3 - 13x - 12 = x^3 - 12x - x - 12 =$

$$= x(x^2 - 1) - 12(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x - 12).$$

Với $x + 1 = 0$ ta được $x_1 = -1$.

Với $x^2 - x - 12 = 0$ ta được $x_2 = 4$ ; $x_3 = -3$.

Vậy phương trình (*) có ba nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$; $x_3 = -3$.

Với $m_2 = -2$, bạn đọc tự làm lấy!

*Ví dụ 3.* Giải phương trình:

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = 0.$$

*Giải:* Đối với phương trình này rất khó đoán nhận được một nghiệm đặc biệt! Trong trường hợp này ta phải khôn khéo nhóm các số hạng một cách thích hợp để phân tích đa thức thành tích các thừa số. Ta có:

$$x^4 + 12x^3 + 32x^2 - 8x - 4 = (x^4 + 12x^3 + 36x^2) -$$
$$- (4x^2 + 8x + 4) = (x^2 + 6x)^2 - (2x + 2)^2 =$$
$$= (x^2 + 8x + 2)(x^2 + 4x - 2).$$

Vậy phương trình đã cho có dạng:

$$(x^2 + 8x + 2) . (x^2 + 4x - 2) = 0.$$

Từ đó suy ra phương trình đã cho có các nghiệm:

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14}\ ;\quad x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}\ .$$

*Ví dụ 4.* Giải phương trình:

$$2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0.$$

*Giải:* Chú ý rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0.$$

Đặt $x + \dfrac{5}{x} = t$, suy ra $x^2 + \dfrac{25}{x^2} = t^2 - 10.$

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$2t^2 - 21t + 54 = 0.$$

Phương trình bậc hai này cho ta hai nghiệm $t_1 = 6$ và $t_2 = 4{,}5$.

Với $t_1 = 6$, ta có: $x + \frac{5}{x} = 6$,

hay là $x^2 - 6x + 5 = 0$, hay là $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.

Với $t_2 = 4{,}5$ ta có $x + \frac{5}{x} = 4{,}5$,

hay là $x^2 - 4{,}5x + 5 = 0$, hay là $x_3 = 2$; $x_4 = 2{,}5$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 5;\ x_3 = 2;\ x_4 = 2{,}5.$$

*Chú ý.* Phương trình đã cho là một trường hợp riêng của phương trình dạng:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k = 0\ (a \neq 0)$$

với $\frac{k}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$ ; $k \neq 0$. (Phương trình dạng này được gọi là phương trình hồi quy).

Cách giải các phương trình dạng tổng quát này hoàn toàn tương tự như cách giải phương trình đã cho.

Trong trường hợp đặc biệt: $\frac{k}{a} = 1$, tức là đối với những phương trình dạng:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$$

ta cũng có cách giải tương tự.

*Ví dụ 5.* Giải phương trình:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$$

*Giải:* Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = 3$$

hay là: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$.

Đặt $x^2 + 5x + 4 = t$ ta được phương trình $t(t + 2) = 3$.

hay là $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm: $t_1 = 1$ và $t_2 = -3$.

Với $t_1 = 1$, ta có $x^2 + 5x + 4 = 1$, hay là $x^2 + 5x + 3 = 0$, hay là: $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Với $t_2 = -3$, ta có $x^2 + 5x + 4 = -3$, hay là $x^2 + 5x + 7 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

*Chú ý. Phương trình đã cho là một trường hợp riêng của phương trình dạng:*

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$$

*với* $a + b = c + d$ *hoặc* $a + c = b + d$ *hoặc* $a + d = b + c$.

*Cách giải phương trình tổng quát này tương tự như cách giải phương trình đã cho.*

*Ví dụ 6.* Giải phương trình $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$.

*Giải*: Đặt $t = x + \dfrac{3 + 5}{2} = x + 4$.

Từ đó:

$$\begin{cases} x + 3 = t - 1 \\ x + 5 = t + 1 \end{cases}$$

Và phương trình đã cho có dạng: $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2$, hay là: $2t^4 + 12t^2 + 2 = 2$ hay là: $t^4 + 6t^2 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $t = 0$. Từ đó $x + 4 = 0$ hay $x = -4$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm kép $x = -4$.

*Chú ý. Dạng tổng quát của phương trình đã cho là:*

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c.$$

*Với phương trình này ta dùng phép đổi biến:*

$$t = x + \frac{a + b}{2},$$

*tức là*

$$\begin{cases} x + a = t + \dfrac{a - b}{2} \\ x + b = t - \dfrac{a - b}{2}. \end{cases}$$

*Như vậy, phương trình đã cho trở thành:*

$$2t^4 + 12\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{a - b}{2}\right)^4 - c = 0.$$

*Đây là phương trình trùng phương mà ta đã biết cách giải.*

*Ví dụ 7.* Giải phương trình

$$\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

*Giải:* Trước hết phải có: $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 \neq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Chia cả tử số và mẫu số của các phân thức ở vế trái cho $x \neq 0$ ta được phương trình tương đương

$$\frac{2}{2x + \dfrac{3}{x} - 5} + \frac{13}{2x + \dfrac{3}{x} + 1} = 6.$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$, ta được $\frac{2}{t - 5} + \frac{13}{t + 1} = 6$.

Từ đó $2t^2 - 13t + 11 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$ và $t_2 = 5,5$.

Với $t_1 = 1 \Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = 1$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $t_2 = 5,5 \Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = 5,5$. Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = 2$ ; $x_2 = \frac{3}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$x_1 = 2 ; \qquad x_2 = \frac{3}{4}.$$

*Chú ý*. Phương trình đã cho là một trường hợp riêng của phương trình dạng:

$$\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c.$$

Cách giải phương trình tổng quát này tương tự như cách giải phương trình đã cho.

Cuối cùng, để bạn đọc có thể nghiên cứu sâu thêm về phương trình bậc cao, chúng tôi sẽ đề cập thêm một số vấn đề nghiệm của một đa thức.

Giả sử f(x) là một đa thức bậc n:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Nếu tất cả a đều nguyên thì f(x) được gọi là đa thức với hệ số nguyên.

Số $\alpha$ được gọi là nghiệm của đa thức nếu $f(\alpha) = 0$.

Nghiệm của một đa thức có thể là một số hữu tỉ hay vô tỉ, tuy rằng không có một công thức để xác định nghiệm của một đa thức tổng quát, nhưng trong trường hợp đa thức với hệ số nguyên, ta có một phương pháp đơn giản để tìm cả các nghiệm hữu tỉ của đa thức ấy.

Phương pháp này dựa trên định lý sau:

*Định lý.* Giả sử $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ là đa thức với hệ số nguyên.

Nếu đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ c thì số c nhất thiết phải có dạng: $c = \frac{p}{q}$, trong đó p là một ước số (dương hay âm) của $a_n$ và q là một ước số của $a_o$.

Từ định lý trên ta suy ra phương pháp sau đây để tìm được tất cả các nghiệm hữu tỉ (nếu có) của đa thức $f(x) = a_o x^n + ... + a_{n-1} x + a_n$ với các hệ số nguyên.

*Bước 1.* a) Tìm tất cả các ước số p của số hạng tự do $a_n$.

b) Tìm tất cả các ước số q của số hạng $a_o$.

*Bước 2.* Lập tất cả các phân số dạng $\frac{p}{q}$ với p và q đã tìm được ở bước 1.

*Bước 3.* Tính các giá trị $f(\frac{p}{q})$ để xác minh $\frac{p}{q}$ có phải là nghiệm của đa thức hay không.

Làm như vậy sẽ phát hiện được tất cả các nghiệm hữu tỉ (nếu có) của đa thức f(x). Đặc biệt nếu ở bước 3 mà ta thấy rằng tất cả các giá trị của $f(\frac{p}{q})$ đều khác 0 thì ta kết luận rằng: hoặc đa thức không có nghiệm thực, hoặc nếu đa thức có nghiệm thực thì nghiệm ấy nhất thiết phải là số vô tỉ.

*Ví dụ 8.* Giải phương trình $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 0$.

*Giải:* Trước hết ta hãy thử xem phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ hay không. Ta áp dụng phương pháp tìm nghiệm hữu tỉ ở trên.

Số hạng tự do ( = 3) có tất cả các ước số là $\pm 1; \pm 3$.

Hệ số cao nhất ( = 3) có tất cả các ước số là $\pm 1; \pm 3$.

Vậy nghiệm hữu tỉ, nếu có, phải là một trong các số sau đây: $\pm 1; \pm \frac{1}{3}; \pm 3$.

Bằng cách thử lại, ta thấy rằng chỉ có $-\frac{1}{3}$ là nghiệm. Để tiếp tục giải phương trình, ta lấy đa thức ở vế trái chia cho $x + \frac{1}{3}$. Từ đó, phương trình đã cho có dạng:

$$(3x + 1)(x^2 - 5x + 3) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Cũng cần chú ý rằng, từ định lý trên ta còn suy ra

*Hệ quả.* Giả sử đa thức

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

có hệ số cao nhất bằng 1 và có các hệ số khác đều nguyên. Khi đó, nếu f(x) có nghiệm hữu tỉ c, thì số c nhất thiết phải là một nguyên và số nguyên ấy là ước số của $a_n$.

## BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$;

b) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$;

c) $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$;

d) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$;

e) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$

g) $(x + 4)^4 + (x + 6)^4 = 82$

h) $3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1)$;

i) $\dfrac{3x}{x^2 - 4x + 1} - \dfrac{2x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{8}{3}$;

k) $x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0$.

**2.** Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, x_3, x_4$ là các nghiệm của phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = \dfrac{c}{a} . \end{cases}$$

**3.** Các nghiệm của phương trình: $x^4 - 10x^2 + a^2 = 0$ lập thành một cấp số cộng. Hãy tính a.

**4.** Các hệ số a, b, c phải thỏa mãn hệ thức gì để các nghiệm của phương trình: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ lập thành cấp số nhân.

**5.** Xác định các số nguyên a, b sao cho phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ có một nghiệm $x = 1 + \sqrt{3}$.

**6*.** Hãy tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ có nghiệm.

**7*.** Giải phương trình $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$.

**8.** Với những giá trị nào của m thì phương trình:

$$x^3 - (2m + 1)x^2 + (3m + 1)x - (m + 1) = 0$$

có ba nghiệm dương phân biệt ?

*2. Các phương trình vô tỉ quy về phương trình bậc hai.*

*Ví dụ 1.* Giải phương trình $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{x - 1}$.

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$$\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay là } x \geq 1. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\sqrt{5x - 1} = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 2}.$$

Cả hai vế của phương trình đều không âm, bình phương cả hai vế ta được phương trình tương đương:

$$5x - 1 = 4x - 3 + 2\sqrt{(x - 1)(3x - 2)},$$

hay là: $x + 2 = 2\sqrt{(x - 1)(3x - 2)}$.

Với $x \geq 1$ thì cả hai vế của phương trình trên đều không âm, bình phương hai vế ta được phương trình tương đương:

$$(x + 2)^2 = 4(x - 1)(3x - 2),$$

hay là: $11x^2 - 24x + 4 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm: $x_1 = 2$ và $x_2 = \frac{2}{11}$.

Chỉ có nghiệm $x_1 = 2$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$.

*Chú ý. Khi giải phương trình vô tỉ, một phương pháp phổ biến thường dùng là biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tương đương bằng cách lũy thừa cả hai vế để giảm bớt căn thức (phương pháp hữu tỉ hóa).*

Cần chú ý điều kiện hạn chế của nghiệm để loại những nghiệm không thích hợp.

*Ví dụ 2.* (Dự trữ A - 1977). Giải phương trình:

$$2\sqrt[n]{(1+x)^2} + 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$$

(n là số nguyên dương cho trước).

*Giải:* a) Nếu n là số chẵn thì phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} (1+x)^2 = 0, \\ 1 - x^2 = 0, \\ (1-x)^2 = 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Vậy khi n chẵn phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Nếu n là số lẻ: Để ý rằng $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, nên chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[n]{(1-x)^2} \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$2\sqrt[n]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} + 3\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 0.$$

Đặt $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} = u$ ta được phương trình:

$$2u^2 + 3u + 1 = 0.$$

Phương trình này cho ta hai nghiệm $u_1 = -1$ và $u_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Với $u_1 = -1$, ta có: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} = -1$,

hay là: $\dfrac{1+x}{1-x} = (-1)^n = -1$ (do n lẻ),

hay là: $1 + x = -1 + x$ phương trình này vô nghiệm.

Với $u_2 = -\frac{1}{2}$, ta có: $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{2}$,

hay là $\frac{1+x}{1-x} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^n}$ (do n lẻ).

Từ đó suy ra $x = \frac{1+2^n}{1-2^n}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x = \frac{1+2^n}{1-2^n} \text{ với n là số lẻ.}$$

*Chú ý. Một phương pháp cũng thường được dùng để giải các phương trình vô tỉ là "phương pháp đặt ẩn số phụ". Có những phương trình có thể nhìn thấy cách đặt ẩn số phụ ngay, nhưng cũng có những phương trình phải qua một vài phép biến đổi mới đặt được (như ví dụ trên).*

Chú ý rằng với phương trình đã cho, nếu ta chia cả hai vế cho $\sqrt[n]{1-x^2} \neq 0$ thì ta được phương trình tương đương:

$$2\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}} + 3 = 0. \qquad (*)$$

Do $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}} = 1$ nên nếu ta đặt:

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} = u \text{ thì } \sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{u}.$$

Vậy phương trình (*) có dạng: $2u + \frac{1}{u} + 3 = 0$.

Từ đây dễ dàng suy ra nghiệm x.

BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$ ;

b) $3\sqrt{5x-1} - \sqrt{9x+7} = 2\sqrt{x+2}$ .

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30$ ;

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x$ ;

c) $\sqrt[n]{\dfrac{12-2x}{x-1}} + \sqrt[n]{\dfrac{x-1}{12-2x}} = \dfrac{5}{2}$ ;

d) $\sqrt[4]{(x-1)^2} - \sqrt[4]{(x+1)^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}$ .

**3.** Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[4]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2},$$

trong đó a là tham số.

*3. Các phương trình mũ quy về phương trình bậc hai.*

*Ví dụ 1.* Giải phương trình

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$$

*Giải:* Để ý rằng $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$

Nhân cả hai vế của phương trình đã cho với $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x$ ta được phương trình tương đương:

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{2x} - 4(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + 1 = 0.$$

Đặt $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = t$ ; $t > 0$ ta được phương trình:

$$t^2 - 4t + 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm là:

$$t_1 = 2 - \sqrt{3}\ ;\ t_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Với $t_1 = 2 - \sqrt{3}$, ta có: $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 2 - \sqrt{3}$.

hay là: $(2 - \sqrt{3})^{x/2} = (2 - \sqrt{3})^1$. Vậy $\dfrac{x}{2} = 1$

hay $x = 2$.

Với $t_2 = 2 + \sqrt{3}$, ta có: $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x =$

$$= 2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1},$$

hay là: $(2 - \sqrt{3})^{x/2} = (2 - \sqrt{3})^{-1}$. Vậy $\dfrac{x}{2} = -1,$

hay là $x = -2$.

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 2$ và $x_2 = -2$.

*Ví dụ 2.* Giải phương trình:

$$6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0.$$

*Giải:* Ta phải có $x \neq 0$. Vì $4^{1/x} \neq 0$, nên chia cả hai vế của phương trình cho $4^{1/x}$ ta được phương trình tương đương:

$$6 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{1/x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} + 6 = 0.$$

Đặt $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/x} = y > 0$ ta được phương trình:

$$6y^2 - 13y + 6 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm: $y_1 = \dfrac{3}{2}$ và $y_2 = \dfrac{2}{3}$

Với $y_1 = \dfrac{3}{2}$, ta có $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/x} = \dfrac{3}{2}$.

Từ đó $\dfrac{1}{x} = 1$ hay là $x = 1$.

Với $y_2 = \frac{2}{3}$, ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

Từ đó $\frac{1}{x} = -1$ hay là $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

*Chú ý. Trong ví dụ 1 và ví dụ 2 khi giải phương trình, chúng ta đã dùng phương pháp đặt ẩn số phụ. Đối với phương trình mũ, ngoài các phương pháp: đưa về lũy thừa cùng một cơ số hoặc lôgarit hóa, phương pháp này cũng rất hay được sử dụng.*

## BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $(x + 1)^{x^2 - 4x + 3} = 1$ ; b) $5^x.2^{(2x - 1)/(x + 1)} = 50$.

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $3.4^x + 2.9^x = 5.6^x$;

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = 2$;

c) $3^{4^x + 8} - 4.3^{2^x + 5} + 27 = 0$;

d) $2\left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right) + 3 = 0$.

**3.** Giải và biện luận phương trình:

$$9^{-|x - 2|} - 4.3^{-|x - 2|} - a = 0$$

trong đó a là tham số.

### *4. Các phương trình lôgarit quy về phương trình bậc hai*

*Ví dụ 1.* Giải phương trình

$$\lg(x + 10) + \frac{1}{2}\lg x^2 = 2 - \lg 4$$

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$x > -10; \qquad x \neq 0.$

Do $\frac{1}{2}\lg x^2 = \lg|x|$ nên phương trình đã cho có dạng:

$$\lg(x + 10) + \lg|x| + \lg 4 = \lg 10^2,$$

hay là: $\lg[4|x|.(x + 10)] = \lg 100,$

hay là: $4|x|(x + 10) = 100.$ (1)

Xét hai trường hợp:

a) Giả sử $x > 0$. Lúc đó phương trình (1) có dạng:

$$x^2 + 10x - 25 = 0.$$

Suy ra: $x_1 = -5 + 5\sqrt{2}$ ; $x_2 = -5 - 5\sqrt{2}$, nghiệm $x_1$ thừa nhận được; nghiệm $x_2 < 0$ bị loại.

b) Giả sử $-10 < x < 0$. Lúc đó phương trình (1) có dạng:

$$x^2 + 10x + 25 = 0,$$

suy ra $x = -5$. Nghiệm này thừa nhận được.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$x_1 = -5 + 5\sqrt{2}; \quad x_2 = -5.$$

*Ví dụ 2.* Giải phương trình: $\dfrac{1}{4 - \lg x} + \dfrac{2}{2 + \lg x} = 1.$

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$x > 0$; $4 - \lg x \neq 0$; $2 + \lg x \neq 0$ hay là $x > 0$;

$x \neq 10^4$; $x \neq 10^{-2}$

Quy đồng mẫu số phương trình đã cho ta được:

$$2 + \lg x + 2(4 - \lg x) = (4 - \lg x)(2 + \lg x),$$

hay là: $(\lg x)^2 - 3\lg x + 2 = 0.$

Đặt $\lg x = y$ ta được phương trình: $y^2 - 3y + 2 = 0.$

Phương trình này có hai nghiệm: $y_1 = 1$ ; $y_2 = 2.$

Với $y_1 = 1$, ta có: $\lg x = 1$ suy ra $x_1 = 10$.

Với $y_2 = 2$, ta có: $\lg x = 2$ suy ra $x_2 = 100$.

Cả hai nghiệm này đều chấp nhận được.

*Chú ý. Đối với phương trình lôgarit, các phương pháp thường dùng là: phương pháp đưa về lôgarit cùng một cơ số, phương pháp mũ hóa và phương pháp đặt ẩn số phụ.*

BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $\lg x + \lg(x + 15) = 2$ ; b) $\log_3 x + \log_x 9 = 3$.

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$;

b) $\log_{x/2} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$.

**3.** Giải và biện luận phương trình:

$\log_a x^2 + 2\log_a(x + 2) = 1$, trong đó a là tham số.

*5. Phương trình lượng giác quy về phương trình bậc hai.*

*Ví dụ 1.* Giải phương trình: $\sin x + 3\sin 2x = \sin 3x$.

*Giải:* Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$(\sin 3x - \sin x) - 3\sin 2x = 0$,

hay là: $2\cos 2x\sin x - 6\sin x\cos x = 0$,

hay là: $2\sin x(\cos 2x - 3\cos x) = 0$,

hay là: $2\sin x(2\cos^2 x - 3\cos x - 1) = 0$.

Như vậy:

a) Hoặc $\sin x = 0$ suy ra: $x = k\pi$ (k nguyên).

b) Hoặc $2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$ suy ra $\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

Rõ ràng rằng $\dfrac{3 + \sqrt{17}}{4} > 1$ và $-1 < \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4} < 0$, nên ta chỉ lấy $\cos x = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4}$.

Lúc đó $\cos x = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4} = \cos\alpha$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Vậy: $x = \pm\alpha + 2k\pi$ (k nguyên).

Tóm lại, nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = k\pi, \text{ và } x = \pm\alpha + 2k\pi \text{ với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

và $\quad \cos\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4}$.

*Chú ý. Có thể thay* $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

*Từ đó suy ra mọi phương trình có dạng*

$$a\sin 3x + b\sin 2x + c\sin x = 0$$

*đều có thể đưa về phương trình có dạng:*

$$\sin x(A\cos^2 x + B\cos x + C) = 0.$$

*Ví dụ 2.* Giải phương trình:

$$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x - 2 = 0.$$

*Giải:* Đặt $\sin x + \cos x = t$, suy ra $2\sin x.\cos x = t^2 - 1$ và $|t| \leq \sqrt{2}$.

Như vậy, phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = 1$ và $t_2 = -3$.

Rõ ràng rằng với $t_2 = -3$ thì phương trình đã cho vô nghiệm vì $\sin x + \cos x \geq -\sqrt{2} > -3$.

Với $t_1 = 1$, ta có $\sin x + \cos x = 1$, hay là: $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$, hay là: $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó, hoặc: $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ hay là: $x = 2k\pi$,

hoặc: $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ hay là: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = 2k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

*Chú ý. Đối với những phương trình có dạng:*

$$F(\sin x \pm \cos x\ ;\ \sin x\cos x) = 0$$

*ta đều có thể dùng phép đổi biến số để đưa về một phương trình đại số.*

*Nếu đặt* $\sin x + \cos x = t$ *thì* $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

*Nếu đặt* $\sin x - \cos x = t$ *thì* $\sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

*Đồng thời cần lưu ý rằng* $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$.

## BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$;

b) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

c) $\sin x + \cot g\,\frac{x}{2} = 2$.

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x - |\sin x + \cos x| + \frac{5}{4} = 0$;

b) $tg^2x + cotg^2x - \frac{5}{2}(tgx + cotgx) + 3 = 0$ ;

c) $\sin^2x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = \frac{5}{2}$ ;

d) $tgx + tg2x + tg3x + tg4x = 0$;

e) $4(\sin^4x + \cos^4x) - 4(\sin^6x + \cos^6x) - \sin^2 4x = 1$;

g) $\sin^3x + \cos^3x = \frac{1}{8}$ .

**3.** Cho phương trình: $\cos^2x + 6\sin x = 4m^2 - 2$.

a) Với những giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm.

b) Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$ .

*6. Các phương trình phức hợp quy về phương trình bậc hai.*

*Ví dụ 1.* Giải phương trình: $4^{tg^2x} + 2^{1/\cos^2x} - 80 = 0$.

*Giải:* Ta phải có $\cos x \neq 0$, hay là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Vì $\frac{1}{\cos^2x} = 1 + tg^2x$ nên phương trình đã cho có dạng:

$$2^{2tg^2x} + 2.2^{tg^2x} - 80 = 0.$$

Đặt $2^{tg^2x} = y \geq 1$ ta được phương trình:

$$y^2 + 2y - 80 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm: $y_1 = 8$; $y_2 = -10$. Hiển nhiên rằng nghiệm $y_2 < 1$ bị loại.

Với $y_1 = 8$ ta có $2^{tg^2x} = 8 = 2^3$.

Vậy $tg^2x = 3$, hay là $tgx = \pm\sqrt{3}$.

Từ đó: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ (k nguyên tùy ý).

Nghiệm này thỏa mãn điều kiện $\cos x \neq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

*Ví dụ 2.* Giải phương trình:

$$\log_3(3^x - 1) . \log_3(3^{x+1} - 3) = 6.$$

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$\begin{cases} 3^x - 1 > 0 \\ 3^{x+1} - 3 > 0 \end{cases}$ hay là $\begin{cases} 3^x > 1 \\ 3(3^x - 1) > 0 \end{cases}$ hay là $x > 0$.

Vì $\log_3(3^{x+1} - 3) = 1 + \log_3(3^x - 1)$, nên phương trình đã cho có dạng:

$$\log_3(3^x - 1). [1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$$

Đặt $\log_3(3^x - 1) = y$ ta được phương trình:

$$y^2 + y - 6 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $y_1 = 2$; $y_2 = -3$.

Với $y_1 = 2$, ta có $\log_3(3^x - 1) = 2 = \log_3 3^2$.

Vậy: $3^x - 1 = 9$; hay là $3^x = 10$, hay là $x = \log_3 10$.

($\log_3 10 > 0$ nên nghiệm này chấp nhận được).

Với $y_2 = -3$, ta có $\log_3(3^x - 1) = -3 = \log_3 3^{-3}$

Vậy $3^x - 1 = 3^{-3}$, hay là $3^x = 1 + \frac{1}{27} = \frac{28}{27}$,

hay là: $x = \log_3\left(\frac{28}{27}\right) = \log_3 28 - 3$.

($\log_3\left(\frac{28}{27}\right) > 0$ nên nghiệm này chấp nhận được).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1 = \log_3 10 \text{ và } x_2 = \log_3 28 - 3.$$

## BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos 2x} = 30;$

b) $(x^2 - 7x + 19)^{\log_3 x} = (5x - 8)^{\log_3 x};$

c) $(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^{\cos x} + (\sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^{\cos x} = \dfrac{5}{2};$

d) $2.x^{\lg x} + 3.x^{-\lg x} = 5.$

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $4^{\lg x + 1} - 6^{\lg x} - 2.3^{2\lg + 2} = 0;$

b) $\log_{\sin x}(1 - \cos 2x) = (\log_{\sin x} 2)^2;$

c) $a^{\log_{\sqrt{6}} x} - 5.x^{\log_6 a} + 6 = 0.$

### 7. *Một số hệ phương trình quy về bậc hai.*

*Ví dụ 1.* Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 6, & (1) \\ x^2 + y^2 = a, & (2) \end{cases}$$

Với những giá trị nào của a thì:

a) Hệ vô nghiệm; b) Hệ có một nghiệm duy nhất;

c) Hệ có hai nghiệm phân biệt.

*Giải:* Từ (1) ta có: $y = 6 - x$.

Thay giá trị y vào phương trình (2) ta được:

$$2x^2 - 12x + 36 - a = 0 \qquad (3)$$

Số nghiệm của hệ phương trình đã cho là số nghiệm của phương trình (3). Vậy:

a) Hệ đã cho vô nghiệm nếu (3) vô nghiệm, tức là nếu

$$\Delta' = 2a - 36 < 0 \text{ hay là } a < 18.$$

b) Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất, nếu (3) có một nghiệm duy nhất, tức là nếu:

$\Delta' = 2a - 36 = 0$, tức là $a = 18$.

Lúc đó dễ thấy nghiệm của hệ là $x = y = 3$.

c) Hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt nếu (3) có hai nghiệm phân biệt, tức là nếu:

$\Delta' = 2a - 36 > 0$, tức là: $a > 18$.

Tóm lại: $a < 18$ : hệ vô nghiệm; $a = 18$ : hệ có một nghiệm duy nhất; $a > 18$ : hệ có 2 nghiệm phân biệt.

*Ví dụ 2.* Giải hệ:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 & (1) \\ xy = 27 & (2) \end{cases}$$

*Giải:* Lập phương hai vế phương trình (1) ta được:

$$(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = 4^3,$$

hay là $x + y + 3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 64$,

hay là $x + y = 28$

Như vậy ta có:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$$

Vậy x và y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 28t + 27 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm: $t_1 = 1$ ; $t_2 = 27$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 27 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2 = 27 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

## BÀI TẬP

**1.** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = bx + ay \\ y^2 = ax + by. \end{cases}$$

a) Giải hệ khi $a = 3;\ b = 4$.

b) Giải và biện luận hệ đã cho.

**2.** (A - 1980). Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x^3 - y^3 = b^3 \quad \text{với } b \geq 0. \end{cases}$$

**3.** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3} \\ x.y = 9\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 + y^3 + 10 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$

**4.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

**5.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$$

**6.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} a^x + a^y = \dfrac{1}{2} \quad (a > 0), \\ x + y = b^2 + 1. \end{cases}$$

Với những giá trị nào của a và b thì:

a) Hệ có ít nhất một nghiệm;

b) Hệ có một nghiệm duy nhất;

c) Hệ có nghiệm với mọi b.

**7.** (A.B.D - 1984). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ x^3 - y^3 = m(x - y). \end{cases}$$

a) Giải hệ khi m = 3.

b) Giải và biện luận hệ đã cho.

*8. Một số phương trình có ẩn số ở mẫu số.*

*Ví dụ 1.* Giải phương trình:

$$\frac{x}{m(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3 - m^2}{m(x+1)(x+2)}. \qquad (1)$$

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases} \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng:

$$x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0 \qquad (2)$$

Nghiệm của phương trình (1) là nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện (*).

Phương trình (2) có hai nghiệm:

$$x_1 = m + 1 \ ; \quad x_2 = m - 3.$$

Để các nghiệm này là nghiệm của phương trình (1), ta phải loại các giá trị của m để $x = -1$; $x = -2$ và $m \neq 0$.

$x_1 = m + 1 = -2$ với $m = -3$; khi đó $x_2 = -6$.
$x_1 = m + 1 = -1$ với $m = -2$; khi đó $x_2 = -5$.
$x_2 = m - 3 = -2$ với $m = 1$; khi đó $x_1 = 2$.
$x_2 = m - 3 = -1$ với $m = 2$; khi đó $x_1 = 3$.

Như vậy:

Với $m \neq 0$; $m \neq -3$; $m \neq \pm 2$; $m \neq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = m + 1 ; \quad x_2 = m - 3.$$

Với m = -3, thì x = -6 là nghiệm.

Với m = -2, thì x = -5 là nghiệm.

Với m = 1, thì x = 2 là nghiệm.

Với m = 2, thì x = 3 là nghiệm.

Với m = 0, thì phương trình vô nghĩa.

*Ví dụ 2.* Giải phương trình:

$$\frac{x}{b+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3b-4}{(b+1)(x-2)} \qquad (1)$$

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghĩa:

$$\begin{cases} b \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases} \qquad (*)$$

Phương trình đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0. \qquad (2)$$

Nghiệm của phương trình (1) là nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện (*). Nghiệm của phương trình (2) là:

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}$$

Với điều kiện: $b^2 + 3b - 4 \geq 0$ hay $b \leq -4$ hoặc $b \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện (*) để nghiệm của phương trình (2) là nghiệm của phương trình (1) ta phải có:

$$\begin{cases} b \leq -4 \,;\; b \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Các nghiệm của phương trình (2) ở dưới dạng căn thức, nên nếu thay giá trị x = 2 vào biểu thức nghiệm để tính các giá trị của b đôi khi sẽ dẫn đến việc tính toán phức tạp. Vì vậy, để cho đơn giản, ở đây ta sẽ thay trực tiếp $x = 2$ vào phương trình (2).

Phương trình (2) có nghiệm $x = 2$, khi $b = -8$. Lúc đó, nghiệm kia của phương trình là $x = \dfrac{-3b + 4}{2} = 14$.

Vậy: Với $b \leq -4$ ; $b \geq 1$ ; $b \neq -8$, phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 + 3b - 4}.$$

Với $b = -8$, phương trình đã cho có nghiệm $x = 14$.

*Ví dụ 3.* Giải phương trình:

$$\frac{b}{x - a} + \frac{a}{x - b} = 2. \qquad (1)$$

*Giải:* Điều kiện để phương trình có nghĩa:

$$\begin{cases} x \neq a, \\ x \neq b. \end{cases} \qquad (*)$$

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$2x^2 - 3(a + b)x + (a + b)^2 = 0. \qquad (2)$$

Nghiệm của phương trình (1) là nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện (*).

Phương trình (2) có các nghiệm là:

$$x_1 = a + b\ ; \quad x_2 = \frac{a + b}{2}.$$

Căn cứ vào điều kiện (*), ta có kết luận về nghiệm của phương trình đã cho như sau:

Nếu $a \neq 0$; $b \neq 0$, $a \neq b$, thì $\begin{cases} x_1 = a + b \\ x_2 = \dfrac{a + b}{2} \end{cases}$

Nếu $a = 0$, $b \neq 0$, thì $x = \dfrac{b}{2}$.

Nếu $b = 0$; $a \neq 0$ thì $x = \dfrac{a}{2}$.

Nếu $a = b = 0$, thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a = b \neq 0$, thì $x = 2a$.

Nếu $a = -b \neq 0$, thì $x_1 = x_2 = 0$.

## BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x^2 - x - 6} = 1$ ;

b) $\dfrac{6 - x}{x - 5} = 6 + \dfrac{1}{x - 5}$ ;

c) $x^2 + \left(\dfrac{x}{x - 1}\right)^2 = 1$ ;

d) $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$ ;

e) $\dfrac{1}{x + 6} + \dfrac{1}{x + 7} - \dfrac{1}{x + 9} - \dfrac{1}{x + 10} = \dfrac{21}{20}$

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{a + x}{ax^2} = \dfrac{1}{x(a - 1)} + \dfrac{1}{a(a - 1)}$ ;

b) $\dfrac{ax^2}{x - 1} - 2a = a^2 + 1$ ;

c) $x + \dfrac{1}{x} = 2\left(\dfrac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right)$ ;

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{x^2} = \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.

## §3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau

*Bài toán 1.* Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm dương $x_1$, $x_2$, chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có 2 nghiệm dương.

Gọi các nghiệm đó là $x_3$ và $x_4$, chứng minh:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4.$$

*Giải: Cách 1.*

Do phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ dương nên có các điều kiện.

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Chú ý là $-\frac{b}{a} > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ nên $\left(-\frac{b}{a}\right) : \left(\frac{c}{a}\right) = -\frac{b}{c} > 0$

nên suy ra các điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{c} > 0 \\ x_3x_4 = \dfrac{a}{c} > 0. \end{cases}$$

Điều này suy ra các nghiệm $x_3$, $x_4$ của phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ tồn tại và là các nghiệm dương.

Do các nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4$ là dương, nên ta áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cô-si của các cặp số dương:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) \geq$$
$$\geq 2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_3x_4} = 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4}) \geq$$
$$\geq 4\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} = 4\sqrt[4]{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}} = 4.$$

Vậy $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$.

*Cách 2.* Nhận xét rằng, từ định lý Viét

$$x_3 + x_4 = -\frac{b}{c} = \frac{-b/a}{c/a} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

nên suy ra $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

$$= \left(\sqrt{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2 + 4 \geq 4.$$

*Cách 3.* Gọi $x_1$ là nghiệm dương của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, tức là ta có $ax_1{}^2 + bx_1 + c = 0$

Do $x_1 > 0$, chia 2 vế cho $x_1{}^2$ ta được:

$$a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 = 0,$$

nghĩa là $\frac{1}{x_1}$ là nghiệm của phương trình $cx^2 + bx + a = 0$.

Tương tự $x_2$ là nghiệm dương của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì $\frac{1}{x^2}$ là nghiệm dương của phương trình

$cx^2 + bx + a = 0.$

Việc chứng minh $x_1+x_2+x_3+x_4 = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 4$

làm tương tự cách 2 và cách 1.

*Bài toán 2.* Tìm các hệ số p và q của phương trình

$$x^2 + px + q = 0$$

sao cho các nghiệm của nó thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35. \end{cases} \quad (*)$$

*Giải: Cách 1.* Từ điều kiện (*) suy ra

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 5 \\ (x_2 + 5)^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 5 \\ x_2^2 + 5x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$\begin{cases} x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_2 = -3 \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Theo định lý Viét

$$p = x_1 + x_2 = \begin{cases} -2 + 3 = 1 \\ -3 + 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -1 \end{cases}$$

$$\text{và } q = x_1 . x_2 = \begin{cases} (-2) . 3 = -6 \\ (-3) . 2 = -6 \end{cases} \Rightarrow q = -6.$$

Tóm lại: $p = \pm 1$, $q = -6$, thử lại $p^2 - 4q = 25 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm.

*Cách 2.* Theo định lý Viét các nghiệm của phương trình thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1x_2 = q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q \\ x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ \qquad = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] \end{cases}$$

Với giả thiết (*) ta có:

$$\begin{cases} p^2 - 4q = (x_1 - x_2)^2 = 25 \\ x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = [p^2 - q] = 35 \end{cases}$$

suy ra hệ: $\begin{cases} p^2 - 4q = 25 \\ p^2 - q = 7 \end{cases}$

Từ 2 phương trình suy ra: $-3q = 18 \Rightarrow q = -6$.

Suy ra: $p^2 = 1$.

Vậy: $p = \pm 1$ ; $q = -6$.

*Bài toán 3.* Hãy xác định m để 2 phương trình:

$$x^2 - mx + 2m + 1 = 0,$$

$$mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0$$

có nghiệm chung.

*Giải:*

*Cách 1.* Gọi $x_o$ là nghiệm chung của 2 phương trình, khi đó:

$$\begin{cases} x_o^2 - mx_o + (2m + m) = 0 & (1) \\ mx_o^2 - (2m + 1)x_o - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Chú ý. Phương trình (2) cho phép ta kết luận $x_o \neq 0$. Nhân $x_o$ vào (1) rồi cộng với (2) ta được $x_o^3 - 1 = 0 \Rightarrow x_o = 1$.

Thay $x_o = 1$ vào (1) và (2) ta được:

$$\begin{cases} 1^2 - m + 2m + 1 = 0 \\ m - (2m + 1) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ -m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2.$$

Vậy mới $m = -2$, hai phương trình đã cho có nghiệm chung.

*Cách 2.* Từ các phương trình (1) và (2) rút ra:

$$m = \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \frac{x + 1}{x(x - 2)} \qquad (3)$$

Giải (3) suy ra $x = 1$, thay lại vào (3) suy ra $m = -2$.

*Cách 3.* Đặt $y_o = x_o^2$ thay vào (1) - (2), ta có thể coi đó là hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn sau:

$$\begin{cases} y_o - mx_o = -(2m + 1) \\ my_o - (2m + 1)x_o = 1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được:

$$y_o = \begin{vmatrix} -(2m+1) & -m \\ 1 & -(2m+1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -(2m+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4m^2 + 5m + 1}{m^2 - 2m - 1},$$

$$x_o = \begin{vmatrix} 1 & -(2m+1) \\ m & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -(2m+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2m^2 + m + 1}{m^2 - 2m - 1}$$

Điều kiện $y_o = x_o^2 \Rightarrow \left(\frac{2m^2 + m + 1}{m^2 - 2m - 1}\right)^2 = \left(\frac{4m^2 + 5m + 1}{m^2 - 2m - 1}\right).$

Biến đổi ta có:

$(2m^2 + m + 1)^2 = (m^2 - 2m - 1)(4m^2 + 5m + 1)$

$\Leftrightarrow 7m^3 + 18m^2 + 9m + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m + 2)(7m^2 + 4m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = -2$

(phương trình $7m^2 + 4m + 1 = 0$ vô nghiệm).

*Chú ý.* Thay $m = -2$ vào (1) và (2) có 2 phương trình

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0$$

đều nhận $x = 1$ là nghiệm.

*Bài toán 4.* Giả sử a, b, c là 3 cạnh của tam giác, chứng minh rằng phương trình

$$(b^2 + c^2 - a^2)x^2 - 4bcx + b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

luôn có nghiệm.

*Giải: Cách 1.* Nếu $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 0$.

Nếu $b^2 + c^2 - a^2 \neq 0$, xét

$\Delta' = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = [2bc - b^2 - c^2 + a^2][2bc + b^2 + c^2 - a^2] = [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] = (a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) > 0.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

*Cách 2.* Theo định lý hàm cosin: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$.

Phương trình có dạng $2bc\cos A\, x^2 - 4bcx + 2bc\cos A = 0$ $\Leftrightarrow \cos A \,.\, x^2 - 2x + \cos A = 0$.

Nếu $\cos A = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

Nếu $\cos A \neq 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A > 0$. Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm.

*Cách 3.* Xét tam thức

$$f(x) = (b^2 + c^2 - a^2)x^2 - 4bcx + b^2 + c^2 - a^2$$

ta có $f(1) = 2(b - c - a)(b - c + a) < 0$,

$f(-1) = 2(b + c - a)(b + c + a) > 0$.

Vậy f(x) có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng (-1, 1).

*Bài toán 5*: Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$. Chứng minh rằng, ít nhất một trong 2 phương trình

$$a\sin x + b\cos x + c = 0, \quad (1)$$

$$a\,\mathrm{tg}x + b\,\mathrm{cotg}x + 2c = 0 \quad (2)$$

có nghiệm.

*Giải: Cách 1.* Phương trình (2) có thể biến đổi:

$$at^2 + 2ct + b = 0\ ;\ t = \mathrm{tg}x;\ \ x \neq \frac{k\pi}{2}.$$

Phương trình này sẽ vô nghiệm khi:

(i) $a = c = 0$; $b \neq 0$ suy ra (1) có nghiệm $\cos x = 0$.

(ii) $a \neq 0$; $\Delta' = c^2 - ab < 0$ hay $ab > c^2 > 0$ ta sẽ chứng minh phương trình (1) có nghiệm.

Dùng công thức $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ ; $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ với $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ phương trình (1) có dạng

$$a\frac{2t}{1 + t^2} + b\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (c - b)t^2 + 2at + (c + b) = 0. \quad (1')$$

Nếu $c = b \Rightarrow t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{b}{a}$ luôn có nghiệm;

$c \neq b \Rightarrow \Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) = a^2 + b^2 - c^2 > 2ab - c^2 > 0$ do điều kiện (i) $ab > c^2 > 0$. Vậy (1') có nghiệm hay (1) có nghiệm.

Tóm lại, nếu phương trình (2) vô nghiệm, ta chứng minh được phương trình (1) có nghiệm.

Vậy: cặp phương trình (1), (2) luôn luôn có ít nhất 1 phương trình có nghiệm.

*Cách 2.* Do điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$ nên ta biến đổi (1)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x+\varphi) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (3)$$

với φ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Do (1) $\Leftrightarrow$(3) nên: α) Nếu (3) có nghiệm: $\left|\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$

$\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$ thì (1) có nghiệm.

β) Nếu (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow c^2 > a^2 + b^2$.

Ta sẽ chứng minh (2) có nghiệm.

Chú ý nếu $a = 0$, do giả thiết $a^2 + b^2 \neq 0$ nên $b \neq 0$, khi đó (2) có dạng $\cot gx = -\dfrac{2c}{b}$ luôn có nghiệm. $a \neq 0$, biến đổi (2) $\Leftrightarrow a tg^2x + 2ctgx + b = 0$. (4)

Phương trình (4) có $\Delta' = c^2 - ab > a^2 + b^2 - ab =$

$$= \frac{3}{4}a^2 + \left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 > 0.$$

Vậy (4) có nghiệm $\Leftrightarrow$(2) có nghiệm.

***Bài toán 6.*** Cho hàm số

$$y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1).$$

Xác định m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại 2 điểm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad (2)$$

*Giải: Cách 1.* Xét

$$y' = 3x^2 + 4(m - 1)x + (m^2 - 4m + 1). \qquad (3)$$

Từ điều kiện (2) suy ra $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left[\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{2}\right] = 0.$$

a) $x_1 + x_2 = 0$. Do điều kiện $x_1$, $x_2$ là các điểm cực trị của hàm số (1), nên là nghiệm của $y' = 0$ cho bởi (3).

Theo định lý Viét $x_1 + x_2 = \dfrac{4(m - 1)}{3} = 0 \Rightarrow m = 1$.

Với m = 1, hàm số có dạng

$$y = x^3 - 2x - 4, \quad y' = 3x^2 - 2$$

$\Rightarrow$ cực trị của hàm số đạt tại $x_{1,2} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) $x_1 + x_2 \neq 0 \Rightarrow x_1x_2 = 2$. Tương tự trên, theo định lý Viét ta có:

$$x_1x_2 = 2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3} \Rightarrow m^2 - 4m - 5 = 0$$

Giải được m = -1, m = 5.

Thử trực tiếp:

* $m = -1$: $y = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$,

$y' = 3x^2 - 8x + 6 \Rightarrow$ không có cực trị.

* $m = 5$: $y = x^3 + 8x^2 + 6x - 52$,

$y' = 3x^2 + 16x + 6 \Rightarrow$ thỏa mãn điều kiện (2).

Vậy m = 1 và m = 5 là 2 giá trị cần tìm.

*Cách 2.* Biến đổi điều kiện (2) và do $x_1$, $x_2$ là nghiệm của y' cho bởi (3) nên

$$(2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(m - 1)\left[\frac{3}{m^2 - 4m + 1} - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(m - 1)(m^2 - 4m - 5)}{3(m^2 - 4m + 1)} = 0 \Rightarrow m_1 = 1,\ m_2 = -1,\ m_3 = 5.$$

Kết hợp điều kiện y' = 0 có 2 nghiệm, hay

$$\Delta' = 4(m - 1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1)$$
$$= m^2 + 4m + 1 > 0$$

hay: $m < -2 - \sqrt{5}$; $-2 + \sqrt{5} < m$.

Vậy chỉ có m = 1 và m = 5 thỏa mãn.

*Bài toán 7.* Cho hàm số $y = \dfrac{qx^2+px+pq}{px+q}$, p, q tham số.

Hãy xác định p, q sao cho hàm số đạt cực trị tại các điểm x = 0 và x = 4.

*Giải: Cách 1.* Tính $y' = \dfrac{pqx^2 + 2q^2x + pq - p^2q}{(px + q)^2}$

với điều kiện $x \neq -\dfrac{q}{p}$.

Do $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ là cực trị của hàm số đã cho, nên chúng là nghiệm của y' = 0. Theo định lý Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 = -\dfrac{2q^2}{pq} = -\dfrac{2q}{p} \\ x_1x_2 = 0 = \dfrac{pq - p^2q}{pq} = 1 - p \end{cases}$$

Suy ra hệ :

$$\begin{cases} 1 - p = 0 \\ -\dfrac{2q}{p} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \end{cases}$$

Kiểm tra trực tiếp p = 1, q = -2 ta có hàm số:

$$y = \frac{-2x^2 + x - 2}{x - 2} \quad ; \quad y' = \frac{-2x^2 + 8x}{(x-2)^2}$$

có 2 nghiệm x = 0, x = 4.

*Cách 2*. Từ giả thiết x = 0, x = 4 là điểm cực trị của hàm số đã cho nên chúng là nghiệm của y' = 0 hay:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{pq - p^2q}{q^2} = 0 \Rightarrow p = 1,$$

$$y'(4) = 0 \Rightarrow \frac{16pq + 8q^2 + pq - qp^2}{(4p+q)^2} = 0$$

Do p = 1 nên $8q^2 + 16q = 0$ và do $q \neq 0$ nên q = -2.

Vậy p = 1, q = -2 là những giá trị cần tìm.

***Bài toán 8.*** Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x + p}{x - 4}$. tìm các giá trị của p để hàm số có cực đại M và cực tiểu m thỏa mãn hệ thức |M - m| = 8.

*Giải*: *Cách 1*. Tìm $y' = -\dfrac{x^2 - 8x + (p + 12)}{(x-4)^2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu nên phương trình y' = 0 có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Cụ thể $x_1$, $x_2$ là nghiệm phương trình $x^2 - 8x + p + 12 = 0$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1x_2 = p + 12. \end{cases}$

Lập bảng xét dấu:

| $x$ | | $x_1$ | | $4$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $\|\|$ | $\nearrow$ | $M$ | $\searrow$ |

nên $M = y(x_2)$; $m = y(x_1)$.

Theo giả thiết:

$$8 = |M - m| = \left| \frac{-x_2^2 + 3x_2 + p}{x_2 - 4} - \frac{-x_1^2 + 3x_1 + p}{x_1 - 4} \right|$$

$$= \left| \frac{(x_1 - 4)(-x_2^2 + 3x_2 + p) - (x_2 - 4)(-x_1^2 + 3x_1 + p)}{x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16} \right|$$

$$= \frac{|(x_1 - x_2)\,[x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 12 + p]|}{|x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16|}$$

$$= \frac{|x_1 - x_2|\ |p + 12 - 32 + p + 12|}{|p + 12 - 32 + 16|}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)\ |2p - 8|}{|p - 4|} = 2(x_2 - x_1)$$

do ta coi $x_2 > x_1$. Suy ra $x_2 - x_1 = 4$, và kết hợp lại ta được hệ:

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ x_2 + x_1 = 8. \end{cases}$$

Giải ra được $x_2 = 6$, $x_1 = 2$.

Do điều kiện $x_1x_2 = p + 12$ suy ra $p = 0$.

*Cách 2.* Biến đổi

$$y = \frac{-x^2 + 3x + p}{x - 4} = -x - 1 + \frac{p - 4}{x - 4}$$

suy ra việc tính:

$$|M - m| = |y(x_2) - y(x_1)| = \left|x_1 - x_2 + \frac{p - 4}{x_2 - 4} - \frac{p - 4}{x_1 - 4}\right|$$

$$= \left|(x_1 - x_2) + \frac{(p - 4)(x_1 - x_2)}{x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16}\right| =$$

$$= |x_1 - x_2| \cdot \left|1 + \frac{p - 4}{p + 12 - 32 + 16}\right| =$$

$= 2(x_2 - x_1)$ (do giả định là $x_2 > x_1$).

Do giả thiết $8 = |M - m|$ nên $2(x_2 - x_1) = 8$ hay $x_2 - x_1 = 4$.

Ta có hệ $\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ x_2 + x_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6, \\ x_1 = 2, \end{cases}$

suy ra $p + 12 = x_1x_2 = 6 \cdot 2 = 12$. Vậy $p = 0$.

*Bài toán 9.* Tìm m để phương trình: $x^2 - 4mx + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 \geq 0$ ; $x_2 \geq m$.

*Giải: Cách 1.* Theo định lý Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1x_2 = 1. \end{cases}$$

Do $x_1 \geq 0$, từ $x_1x_2 = 1 > 0 \Rightarrow x_1 > 0$, $x_2 > 0$ nên lại từ $4m = x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow m > 0$.

Suy ra $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2m > 0$ do $m > 0$.

Khảo sát đồ thị hàm số $x^2 - 4mx + 1$ ta có so sánh

$$m < x_1, x_2$$

và điều kiện có nghiệm của phương trình suy ra:

$$\Delta' = 4m^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow m \leq -1/2 \text{ và } 1/2 \leq m.$$

Kết hợp, ta có $m \geq \frac{1}{2}$.

*Cách 2*. Phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu bài, nên ta được hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 \geq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} & ; & \frac{1}{2} \leq m \\ x_1 \geq 0 & ; & x_2 \geq m. \end{cases}$$

Từ $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq m \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - m \geq 0 \Rightarrow 4m - m \geq 0 \Rightarrow m \geq 0.$

Các điều kiện $1/2 \leq m$ và $0 \leq m$ cho phép kết luận

$$m \geq \frac{1}{2}$$

*Bài toán 10*. Giải phương trình:

$x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b)x - (a^2 - b) = 0$ biết rằng phương trình có nghiệm không phụ thuộc vào a, b.

*Giải: Cách 1.* Phân tích đa thức vế trái của phương trình ra thừa số:

$$(x^3 - x^2) - 2a(x^2 - x) + (a^2 - b)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 1)[x^2 - 2ax + a^2 - b] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 - 2ax + a^2 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x^2 - 2ax + a^2 - b = 0. \ (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có $\Delta' = a^2 - (a^2 - b) = b$.

*Kết luận.*

Nếu $b < 0$, phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.

Nếu $b \geq 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_{2,3} = a \pm \sqrt{b}$.

*Cách 2.* Do phương trình đã cho có nghiệm không phụ thuộc a, b chứng tỏ hàm số:

$y = x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b)x - (a^2 - b)$ có ít nhất 1 điểm cố định $(x_o, y_o)$ $\forall$ a, b, ở đây cụ thể $y_o = 0$

$$\Rightarrow a^2(x_o - 1) - 2a(x_o^2 - x_o) + x_o^3 - x_o^2 - bx_o + b = 0 \ \forall a.$$

Bằng phương pháp hệ số bất định suy ra:

$$\begin{cases} x_o - 1 = 0 \\ x_o^2 - x_o = 0 \\ x_3^3 - x_o^2 - bx_o + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = 1 \\ x_o = 1 \text{ hoặc } x_o = 1 \\ x_o = 1 \text{ hoặc } x_o^2 = b \end{cases}$$

Do 3 phương trình đã cho phải tương thích, nên ta có $x_o = 1$ là nghiệm không phụ thuộc vào a, b của phương trình đã cho.

Bằng phép chia đa thức $f(x) = x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - - b)x - a^2 + b$ cho đa thức $x - 1$ ta được phương trình:

$$x^2 - 2ax + a^2 - b = 0.$$

Trở lại phương pháp cách 1.

*Chú ý.* Vì phương trình đã cho có dạng phương trình bậc 3 đủ:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

nên ta nhận xét, tổng các hệ số

$$a + b + c + d = 1 - (2a + 1) + (a^2 + 2a - b) - (a^2 - b) = 0$$

nên kết luận được ngay phương trình có một nghiệm $x = 1$.

*Bài toán 11.* Giải phương trình bậc 4

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0$$

biết rằng phương trình có 2 nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

*Giải: Cách 1.* Phân tích đa thức vế trái:

$$(x^4 - 4) - (4x^3 - 8x) + (3x^2 - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 2)(x^2 + 2) - 4x(x^2 - 2) + 3(x^2 - 2) = 0$$

$\Rightarrow$ * $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ ;

* $x^2 + 2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$, phương trình có $\Delta' = -1 < 0$ nên vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

*Cách 2.* Gọi 2 nghiệm trái dấu của phương trình là $x_{1,2} = \pm x_o$ $(x_o > 0)$ ta có cặp đẳng thức:

$$x_o^4 - 4x_o^3 + 3x_o^2 + 8x_o - 10 = 0,$$

$$x_o^4 + 4x_o^3 + 3x_o^2 - 8x_o - 10 = 0.$$

Từ 2 đẳng thức ta được:

$$8x_o^3 - 16x_o = 0 \Rightarrow x_o = 0;\ x_o^2 = 2 \Rightarrow x_o = \pm\sqrt{2}.$$

Dễ thử lại $x_o = 0$ không phải nghiệm phương trình đã cho và $x = \pm\sqrt{2}$ là nghiệm phải tìm của phương trình đã cho.

*Cách 3.* Dùng phương pháp hệ số bất định.

Nếu phương trình đã cho có 2 nghiệm đối dấu $x = \pm a$

thì đa thức $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10$ có thể phân tích ra thừa số dạng

$$f(x) = (x - a)(x + a)(x^2 + bx + c)$$
$$= x^4 + bx^3 + (c - a^2)x^2 - a^2bx - a^2c.$$

Đồng nhất hệ số của f(x) ở 2 biểu thức ta có:

$$\begin{cases} b = -4 \\ c - a^2 = 3 \\ -a^2b = 8 \\ -a^2c = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c - a^2 = 3 \\ a^2 = 2 \\ -a^2c = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a^2 = 2 \\ c = 5. \end{cases}$$

Vậy $f(x) = x^2 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 - 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

*Bài toán 12.* Giải các phương trình

$$x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$$

biết chúng có nghiệm chung.

*Giải: Cách 1.* Gọi $x_0$ là nghiệm chung của 2 phương trình, dễ thấy $x_0 \neq 0$, ta có

$$x_0^4 - x_0^3 - 22x_0^2 + 16x_0 + 96 = 0, \quad (1)$$
$$x_0^3 - 2x_0^2 - 3x_0 + 10 = 0. \quad (2)$$

Lấy đẳng thức thứ nhất trừ đẳng thức sau, sau khi đã nhân nó với $x_0$, ta được $x_0^3 - 19x_0^2 + 6x_0 + 96 = 0$ (3)

Lại lấy (2) - (3) ta được

$$17x_0^2 - 9x_0 - 86 = 0.$$

Giải phương trình này, ta được $x_0 = -2$ và $x_0 = \frac{43}{17}$.

Kiểm tra lại $x_0 = -2$ là nghiệm chung của 2 phương trình đã cho.

Thực hiện phép chia đa thức ta có:

(i) Phương trình (2): $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

có 1 nghiệm $x = -2$.

(ii) Phương trình (1): $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 2)(x^3 - 3x^2 - 16x + 48) = 0$$

$\Rightarrow$ hoặc $x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

hoặc $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$

$\Rightarrow x^2(x - 3) - 16(x - 3) = 0$, tức là $(x - 3)(x^2 - 16) = 0$.

Vậy (1) có 4 nghiệm:

$$x_1 = -2; \; x_2 = 3; \; x_{3,4} = \pm 4.$$

*Cách 2.* Phân tích ra thừa số các vế trái của 2 phương trình đã cho:

Phương trình (2): $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 8x + 5x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 5(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 0.$

Suy ra phương trình (2) có 1 nghiệm duy nhất $x = -2$. Theo giả thiết, $x = -2$ sẽ là nghiệm của phương trình (1):

$$x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^4 + 2x^3 - 3x^3 - 6x^3 - 16x^2 - 32x + 48x + 96 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3(x + 2) - 3x^2(x + 2) - 16x(x + 2) + 48(x + 2) = 0.$

Ta quay về cách 1.

*Bài toán 13.* Xác định m để phương trình

$$x^3 - \left(\frac{1}{2} + 2m\right) x^2 + (2m^2 - 2m + 2)x - m^2 + \frac{3}{2} m - 1 = 0$$

có 3 nghiệm dương phân biệt.

*Giải: Cách 1.* Phân tích đa thức vế trái của phương trình ra thừa số:

$(x^3 - \frac{1}{2}x^2) - (2mx^2 - mx) + [(2m^2 - 3m + 2)x - m^2 +$

$+ \frac{3}{2}m - 1] = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2(2x - 1) - mx(2x - 1) +$

$+ (m^2 - \frac{3}{2}m + 1)(2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)[\frac{1}{2}x^2 - mx + m^2 - \frac{3}{2}m + 1] = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x^2 - mx + m^2 - \frac{3}{2}m + 1 = 0. \qquad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có 1 nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$ ; để phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt ta cần có phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\neq \frac{1}{2}$, tức là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - mx + m^2 - \frac{3}{2}m + 1$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 4.\frac{1}{2}(m^2 - \frac{3}{2}m + 1) > 0 \\ x_1 + x_2 = 2m > 0 \\ x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}m + m^2 - \frac{3}{2}m + 1 \neq 0 \Rightarrow m^2 - 2m + \frac{5}{4} \neq 0 \\ -m^2 + 3m - 2 > 0 \Rightarrow 1 < m < 2 \\ m > 0. \end{cases}$$

Vậy $1 < m < 2$ là điều kiện cần tìm.

*Cách 2.* Xét hàm số bậc ba:

$$y = x^3 - (\frac{1}{2} + 2m)x^2 = (2m^2 - 2m + 2)x - m^2 + \frac{3}{2}m - 1.$$

Để tìm nghiệm đặc biệt của hàm số ta xét xem họ hàm có đi qua điểm cố định dạng $(x_o, 0)$ hay không. Muốn vậy xét đa thức theo m tại điểm $(x_o, 0)$:

$$m^2(2x - 1) - m(2x^2 + 2x - \frac{3}{2}) +$$

$$+ x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$$ và đồng nhất hệ số của m bằng 0 ta có

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0 \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2}\,;\, x_2 = -\frac{3}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $(x_o, 0) = (\frac{1}{2}; 0)$ là điểm cố định của họ đồ thị hàm đã cho hay phương trình đang xét có nghiệm đặc biệt $x_1 = \frac{1}{2}$.

Trở lại cách làm 1.

*Bài toán 14.* Cho phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

Hãy tìm các điều kiện liên hệ giữa a, b, c để phương trình có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

*Giải: Cách 1.* Gọi 3 nghiệm phân biệt của (1) là $x_1 < x_2 < x_3$.

Do giả thiết ba số $x_1, x_2, x_3$ lập thành cấp số cộng, ta có điều kiện $x_1 + x_3 = 2x_2$. (2)

Vì (1) có 3 nghiệm phân biệt, nên đa thức vế trái có phân tích:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Đồng nhất các hệ số của $x^0 = 1, x^1, x^2$ ta có định lý Viét với phương trình bậc 3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a & (3) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b & (4) \\ x_1x_2x_3 = -c. & (5) \end{cases}$$

Kết hợp (2) và (3) ta được $x_2 = -\frac{a}{3}$. Thay $x_2 = -\frac{a}{3}$ là nghiệm của (1) ta được hệ thức:

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0 \qquad (6)$$

Từ (3), (4), (5) và $x_2 = -\dfrac{a}{3}$ ta có:

$$(3) \Rightarrow\ x_1 + x_3 = -a + \frac{a}{3} = -\frac{2a}{3};$$

$$(4) \Rightarrow\ x_1x_3 + x_2(x_1 + x_3) = b$$

$$\Rightarrow\ x_1x_3 = b - 2x_2{}^2 = b - \frac{2a^2}{9};$$

$$(5) \Rightarrow\ x_1x_3 = -\frac{c}{x^2} = -\frac{c}{-\frac{a}{3}} = \frac{3c}{a}$$

Tóm lại:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -\dfrac{2a}{3} \\ x_1x_3 = b - \dfrac{2a^2}{9} = \dfrac{3c}{a} \quad \text{(do (6))}. \end{cases}$$

$x_1$, $x_3$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 + \frac{2a}{3}X + \frac{2a^2}{9} - b = 0.$$

Phương trình phải có nghiệm hay:

$$\Delta' = \frac{a^2}{9} - b + \frac{2a^2}{9} = \frac{a^2}{3} - b = \frac{1}{3}(a^2 - 3b) > 0.$$

Tóm lại: a, b, c phải thỏa mãn 2 điều kiện

$$\begin{cases} 2a^3 - 9ab + 27c = 0, \\ a^2 - 3b > 0. \end{cases}$$

*Cách 2.* Do điều kiện $x_1$, $x_2$, $x_3$ lập thành cấp số cộng, nên làm phép dời trục tọa độ đến điểm gốc $(x_2, 0)$

các điểm nghiệm $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$ sẽ đối xứng qua $(x_2, 0)$.

Mặt khác hàm số bậc ba $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm nên sẽ có cực đại, cực tiểu.

Vậy điểm $(x_2, 0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hay đó chính là điểm uốn.

Nên $y''(x_2) = 0 \Leftrightarrow 6x_2 + 2a = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{a}{3}$.

Từ điều kiện có cực đại và cực tiểu suy ra

$$y' = 3x^2 + 2ax + b = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt}$$

$$\Rightarrow \Delta' = a^2 - 3b > 0.$$

Điều kiện $x_2$ cũng là nghiệm: $y(x_2) = y(-\dfrac{a}{3}) = 0$

suy ra

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

*Tóm lại* a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 2a^3 - 9ab + 27c = 0. \\ a^2 - 3b > 0. \end{cases}$

*Bài toán 15.* Cho phương trình

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1. \qquad (1)$$

Tìm điều kiện a và b để phương trình có nghiệm.

*Giải: Cách 1.* Biến đổi phương trình đã cho thành

$$a^2(x - 1) + b^2x = x(x - 1) \text{ với điều kiện } x \neq 0,$$

$$x \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2 = 0. \qquad (2)$$

Ta xét $\Delta = (a^2 + b^2 + 1) - 4a^2 =$

$$= (a^2 + b^2 - 2a)(a^2 + b^2 + 1 + 2a)$$

$$= [(a - 1)^2 + b^2]\,[(a + 1)^2 + b^2] > 0 \;\forall\, a, b.$$

Do đó, phương trình (2) có nghiệm với $\forall$ a, b.

Mặt khác, (2) $\Leftrightarrow$ (1) với điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq 1$, nên:

$x \neq 0 \Rightarrow$ điều kiện $0 - (a^2 + b^2 + 1).\ 0 + a^2 \neq 0 \ \Rightarrow a \neq 0$,

$x \neq 1 \Rightarrow$ điều kiện $1 - (a^2 + b^2 + 1).\ 1 + a^2 \neq 0 \ \Rightarrow b \neq 0$.

Vậy với $a \neq 0$, $b \neq 0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm.

Trường hợp $a = 0$, $b \neq 0$ phương trình (1) có nghiệm $x = b^2 + 1$;

$a \neq 0$, $b = 0$ phương trình (1) có nghiệm $x = a^2$.

Kết luận: Để phương trình (1) có nghiệm, điều kiện là $a^2 + b^2 \neq 0$.

*Cách 2.* Xét tam thức vế trái của (2)

$$f(x) = x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2.$$

Dễ kiểm tra $f(0) = a^2 \geq 0$,

$$f(1) = -b^2 \leq 0.$$

Điều kiện để (1) có nghiệm là ta có tam thức f(x) có ít nhất 1 nghiệm khác 0 và khác 1, do đó cần điều kiện:

$$f(0) > f(1) \ \Leftrightarrow \ a^2 + b^2 > 0.$$

*Bài toán 16.* Cho 2 phương trình

$$f(x) = x^2 - 2px + n = 0, \qquad (1)$$

$$g(x) = x^2 - 2mx + n = 0. \qquad (2)$$

Tìm điều kiện cần và đủ để mỗi phương trình có 1 nghiệm nằm xen giữa 2 nghiệm của phương trình kia.

*Giải.* Nhận xét rằng nếu $n = 0$ suy ra f(x) có hai nghiệm 0 và 2p và g(x) có hai nghiệm 0 và 2m. Điều kiện giả thiết không thỏa mãn. Vậy chỉ xét $n \neq 0$.

Mặt khác, để f và g có hai nghiệm, phải có các điều kiện

$$\Delta'_f = p^2 - n > 0 \text{ và } \Delta'_g = m^2 - n > 0.$$

*Cách 1. Điều kiện cần.* Không giảm tổng quát, do f(x) và g(x) có vai trò như nhau, giả thiết rằng 2 nghiệm của f là $x_1 < x_2$, hai nghiệm của g(x) là $x_3 < x_4$ và sắp xếp như sau:

$$x_1 < x_3 < x_2 < x_4 . \qquad (3)$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc 2, ta có:

$$\begin{cases} g(x_1) > 0 \Leftrightarrow g(x_1) = x_1^2 - 2mx_1 + n = x_1^2 - 2px_1 + \\ \qquad\qquad + n + 2px_1 - 2mx_1 = 2(p - m)x_1 > 0 \\ g(x_2) < 0 \Leftrightarrow g(x_2) = 2(p - m)x_2 < 0 \\ f(x_3) < 0 \\ f(x_4) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x_1)\, g(x_2) < 0 \Leftrightarrow 4(p - m)^2x_1x_2 < 0. \qquad (4)$$

Theo định lý Viét: $x_1x_2 = n$ nên (4) $\Leftrightarrow 4n(p - m)^2 < 0$ $\Rightarrow n < 0$.

Vậy $n < 0$ là điều kiện cần để 2 hàm số f(x) và g(x) có nghiệm xen kẽ nhau trên trục số.

*Điều kiện đủ.* Với $n < 0$ suy ra $\Delta'_f = p^2 - n > 0$; $\Delta'_g = m^2 - n > 0$, vậy f(x) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$.

$$\text{Xét } g(x_1) = x_1^2 - 2mx_1 + n = x_1^2 - 2px_1 + n + \\ + 2px_1 - 2mx_1 = 2x_1(p - m),$$

$$g(x_2) = x_2^2 - 2mx_2 + n = x_2^2 - 2px_2 + n + \\ + 2px_2 - 2mx_2 = 2x_2(p - m)$$

$$\Rightarrow g(x_1).g(x_2) = 4\, x_1x_2(p - m)^2 = 4n(p - m)^2 < 0 \text{ do } n < 0.$$

Vậy hai số $x_1, x_2$ có một số nằm giữa hai nghiệm của g và một số nằm ngoài hai nghiệm đó.

Tương tự xét $f(x_3).f(x_4) = 4n(p - m)^2 < 0$ có kết luận tương tự.

*Kết luận.* $n < 0$ là điều kiện cần và đủ để 2 phương trình đã cho có nghiệm nằm giữa nghiệm của phương trình kia.

*Cách 2.* Điều kiện cần. Không giảm tổng quát ta giả thiết có (3), tức là: $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$.

Suy ra $\begin{cases} (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) < 0 & (5) \\ (x_1 - x_4)(x_2 - x_4) > 0 & (6) \end{cases}$

Chú ý điều kiện Viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2p \\ x_1x_2 = n \end{cases}$

Biến đổi (5) $\Leftrightarrow x_3^2 - (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 < 0$

$\Leftrightarrow x_3^2 - 2px_3 + n < 0$

$\Leftrightarrow 2mx_3 - 2px_3 < 0.$

Suy ra: $2x_3(m - p) < 0$ (5')

Tương tự: (6) $\Rightarrow 2x_4(m-p) > 0$ (6')

$\Rightarrow 4x_3x_4(m - p)^2 < 0.$

hay $n < 0$.

*Điều kiện đủ.* Do $n < 0 \Rightarrow \Delta_f', \Delta_g' > 0$ nên các phương trình (1), (2) có 2 nghiệm $x_1, x_2; x_3, x_4$. Theo Viét:

$$x_1x_2 = x_3x_4 = n < 0,$$

suy ra $x_1, x_2$ trái dấu hay $x_1 < 0 < x_2$.

Tương tự: $x_3 < 0 < x_4$.

Không giảm tổng quát ta xét 2 khả năng sắp xếp $x_1, x_2, x_3, x_4$ như sau:

i) $x_1 < x_3 < 0 < x_2 < x_4$ ;

ii) $x_1 < x_3 < 0 < x_4 < x_2$.

* Điều kiện i) xảy ra $\Rightarrow$ điều kiện đủ được chứng minh.

* Điều kiện ii) xảy ra, suy ra:

$\begin{cases} |x_1| > |x_3| \\ x_2 > x_4 \end{cases} \Rightarrow |x_1|x_2 = -n > |x_3|x_4 = -n \Rightarrow$ mâu thuẫn.

*Kết luận.* $n < 0$ là điều kiện cần và đủ để 2 phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm. Đồng thời, mỗi phương trình có một nghiệm nằm giữa hai nghiệm của phương trình kia.

## CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

### CHƯƠNG I

**§1.**

**1.** Chú ý rằng $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = -4 + \sqrt{15}$.

Từ đó suy ra phương trình cần lập là:

$$x^2 + 8x + 1 = 0.$$

**2.** Ta có $\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 =$

$= (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) =$

$= [(b + c)^2 - a^2].[(b - a)^2 - a^2] =$

$= (b + c + a)(b + c - a)\ (b - c + a)\ (b - c - a) < 0.$

**3.** Ta có $\Delta_1 = p_1{}^2 - 4q_1$; $\Delta_2 = p_2{}^2 - 4q_2$.

Từ đó: $\Delta_1 + \Delta_2 = p_1{}^2 + p_2{}^2 - 4(q_1 + q_2) = (p_1 - p_2)^2 \geq 0.$

Vậy trong $\Delta_1$ và $\Delta_2$, phải có ít nhất một số không âm.

**4.** Không tồn tại k thỏa mãn đầu bài (chú ý rằng để phương trình có nghiệm ta phải có: $k \leq 49$).

**5.** Không tồn tại k để phương trình có nghiệm duy nhất (xem cách giải ở phần "hàm số". Tập II).

**6.** Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} bc = a^2 \\ b + c = a^2 - a. \end{cases}$

Vậy b, c chính là nghiệm của phương trình

$$x^2 - (a^2 - a)x + a^2 = 0 \qquad (*)$$

Do phương trình (*) có nghiệm, ta suy ra các kết quả cần chứng minh.

**7.** $E = q$.

**8.** $x^2 - 2(p^2 - 2q)x + (p^4 - 4p^2q) = 0$.

**9.** a) $M = \sqrt{4 - 2m}$ ;   $N = \sqrt{\sqrt{4 - 2m} + 2\sqrt[4]{4}}$ , trong đó có m là những giá trị làm cho phương trình có hai nghiệm không âm.

b) $m = 2$ hoặc $m = -2$.

c) $|m| \geq \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

**10.** Xem ví dụ 5 (trường hợp $k = 2$).

**12.** Từ giả thiết suy ra $\Delta = b^2 - 4ac = (a - c)^2$.

Từ đó $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm (a - c)}{2a}$ là số hữu tỉ.

**13.** Phải có đồng thời: $c \neq 0$; $a \neq b$; $a + b + c \neq 0$.

**14.** Điều kiện để phương trình có nghĩa: $x \neq p$; $x \neq q$.

Ta xét hai trường hợp:

α) Giả sử $p = q$. Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$\frac{a^2 + b^2}{x - p} = c.$$

Phương trình này có nghiệm $x = p + \dfrac{a^2 + b^2}{c} \neq p$.

β) Giả sử $p \neq q$. Khi đó phương trình đã cho có dạng: $c(x - p)(x - q) - a^2(x - q) - b^2(x - p) = 0$ (1). Rõ ràng rằng phương trình (1) không thể có nghiệm $x = p$ hoặc $x = q$ (do $p \neq q$). Bởi vậy, phương trình đã cho có nghiệm nếu phương trình (1) có nghiệm. Phương trình (1) tương đương với

$$cx^2 - (a^2 + b^2 + cp + cq)x + (a^2q + b^2p + cpq) = 0 \qquad (2)$$

Ta chỉ cần chứng minh (2) có biệt thức $\Delta > 0$ là đủ:

Ta có:

$\Delta = [a^2 + b^2 + c(p + q)]^2 - 4c(a^2q + b^2p + cpq) = (a^2 + b^2)^2 +$

$+ 2c(p + q)(a^2 + b^2) + c^2(p + q)^2 - 4ca^2q - 4cb^2p - 4c^2pq$

$= (a^2 + b^2)^2 + 2cpa^2 - 2cpb^2 - 2cqa^2 + 2cqb^2 + c^2(p^2 + q^2 - 2pq)$

$= (a^2 + b^2)^2 + 2a^2c(p - q) - 2cb^2(p - q) + c^2(p - q)^2$

$= (a^2 + b^2)^2 + 2c(p - q)(a^2 - b^2) + c^2(p - q)^2$

$= (a^2 - b^2)^2 + 2c(p - q)(a^2 - b^2) + c^2(p - q)^2 + 4a^2b^2$

$= [(a^2 - b^2) + c(p - q)]^2 + 4a^2b^2 > 0.$

Vậy phương trình (2) có nghiệm. Từ đó suy ra phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm.

(Chú ý: Nếu đã biết định lý đảo về dấu của tam thức, thì bài toán này độc giả có thể giải bằng một cách khác ngắn gọn hơn).

**15.** Viết lại phương trình thứ nhất dưới dạng:

$(x - \alpha)(x - 2\alpha + 1) = 0$. Từ đó suy ra $x_0 = \alpha$ hoặc $x_0 = 2\alpha - 1$.

**16.** $k = 2$ và $k = \dfrac{2}{3}$.

**17.** Dùng phương pháp tương tự như ví dụ 10.

**18.** Coi các phương trình đã cho là phương trình bậc hai đối với x.

a) Phương trình có ba nghiệm:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = -2. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

**19.** Giá trị lớn nhất bằng 18.

Giá trị nhỏ nhất bằng 8.

**21.** Từ giả thiết suy ra $x_1, x_2 > 0$. Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \dfrac{b}{a}. \end{cases}$

Từ đó $\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}} = \dfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Vậy ta cần chọn $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -1$.

**22.** Giả sử ngược lại, tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + 5n + 16$ chia hết cho 169, tức là ta có $n^2 + 5n + 16 = 169k$ (n, k là những số tự nhiên).

Từ đó suy ra phương trình $n^2 + 5n + (16 - 169k) = 0$ có nghiệm nguyên dương. Ta có:

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{13(52k - 3)}}{2}$$

Để n nguyên ta cần phải có $13(52k - 3) = m^2$. Suy ra cần phải có $52k - 3$ là bội số của 13. Song điều này không thể có.

**23.** Đặt $a = 2p + 1$; $b = 2n + 1$; $c = 2q + 1$. Suy ra:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8[\frac{n(n+1)}{2} - 2pq - p - q - 1] + 5$$

Vậy $\Delta$ không phải là số chính phương (một số chính phương lẻ không thể có dạng $8k + 5$).

**24.** Ta chứng minh $\Delta = b^2 - 4ac$ không phải số chính phương.

Giả sử $b^2 - 4ac = k^2$ với k là số nguyên không âm. Từ đó $4a.\overline{abc} = (20a + b + k).(20a + b - k)$, như vậy số nguyên tố $\overline{abc}$ là ước số của $(20a + b + k)$ hoặc là ước số của $(20a + b - k)$. Điều này không thể xảy ra vì $(20a + b + k) < abc$ và $20a + b - k < abc$.

**25.** a) $|x_o| \leq 1$ thì hiển nhiên đúng. Giả sử $|x_o| > 1$.

Ta có: $bx_o + c = -ax_o^2$ suy ra: $-x_o^2 = \frac{b}{a}x_o + \frac{c}{a}$.

Ta có: $|x_o|^2 = |\frac{b}{a}x_o + \frac{c}{a}| \leq |\frac{b}{a}x_o| + |\frac{c}{a}| \leq$

$\leq M(|x_o| + 1)$ (với $M = \max\{|\frac{b}{a}|; |\frac{c}{a}|\}$).

Ta có: $M(|x_o| + 1) = M . \frac{|x_o|^2 - 1}{|x_o| - 1} < M \frac{|x_o|^2}{|x_o| - 1}$.

Từ đó suy ra $|x_o| \leq 1 + M$.

**27.** Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m(n+1), \\ x_1.x_2 = m + n + 1. \end{cases}$

Từ đó suy ra: $n(m - 1) + (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2$.

Đẳng thức trên chỉ xảy ra nếu:

$\begin{cases} n(m - 1) = 1 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1, \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n(m - 1) = 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2, \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} n(m-1)=2. \\ (x_1-1)(x_2-1)=0. \end{cases}$

Trong cả ba trường hợp đều suy ra: $mn \le 4$.

**29.** Viết lại phương trình dưới dạng:

$(1-y)x^2+8x+(7-y)=0$. Nếu $(x, y)$ là nghiệm của phương trình trên thì ta phải có $\Delta' \ge 0$. Từ đó $-1 \le y \le 9$.

Vậy cặp nghiệm cần tìm là: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 9. \end{cases}$

**§2.** *1. Phương trình bậc cao.*

**3.** $a = \pm 3$. **6.** $8c \ge (a-b)^4$ . 7 . $x = 2$; $x = 4$.

*2. Phương trình vô tỉ.*

**1.** a) $x_1 = 4$; $x_2 = 11$; b) $x = 2$.

**2.** a) Đặt $\sqrt{2x^2+3x+9} = t$ suy ra: $x_1 = 3$; $x_2 = -\dfrac{9}{2}$.

b) Phương trình có dạng: $(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2 + (\sqrt{x}+\sqrt{x+7}) - 42 = 0$. Suy ra nghiệm của phương trình là:

$x = \left(\dfrac{29}{12}\right)^2$. c) $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{97}{17}$. d) $x = -\dfrac{17}{15}$.

**3.** Nếu $a = 0$: phương trình có một nghiệm $x = 0$. Nếu $a \ne 0$: phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = 0 \text{ và } x_2 = \frac{63a}{65}.$$

*3. Phương trình mũ.*

**1.** a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; b) $x_1 = 2$; $x_2 = -(1+\log_5 2)$.

**2.** a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; b) $x = 0$ (để ý rằng $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1$;

c) $x_1 = -\dfrac{3}{2}$; $x_2 = -1$; d) $x = \log_7(3 \pm \sqrt{3})$.

**3.** Với $-3 \le a < 0$ phương trình có nghiệm $x = \pm \log_2(2-\sqrt{4+a}) + 2$.

*4. Phương trình lôgarit.*

**1.** a) $x = 5$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

**2.** a) $x = 3$; b) $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**3.** Với $0 < a < t$ phương trình có ba nghiệm:

$$x_1 = -1 - \sqrt{1 - \sqrt{a}}; \quad x_2 = -1 - \sqrt{1 - \sqrt{a}};$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}$$

Với $a > 1$ phương trình chỉ có một nghiệm

$$x = -1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}.$$

*5. Phương trình lượng giác.*

**2.** a) Đặt $\sin x + \cos x = t$. Lúc đó phương trình có dạng

$$t^2 - |t| + \frac{1}{4} = 0 \text{ hay là } (|t| - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

b) Đặt $tgx + cotgx = t$ suy ra: $tg^2x + cotg^2x = t^2 - 2$.

c) Đưa phương trình đã cho về dạng:

$$\cos 4x(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0.$$

d) Đưa phương trình đã cho về dạng:

$$\sin 5x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0.$$

e) Đưa phương trình đã cho về dạng: $2\cos^2 4x - \cos 4x - 3 = 0$.

g) Đưa phương trình đã cho về dạng:

$$\sin^4 2x - 8\sin^2 2x + 7 = 0.$$

**3.** a) Phương trình có nghiệm nếu: $|m| \leq \sqrt{2}$.

*6. Phương trình phức hợp.*

**1.** a) Chú ý rằng: $81^{\cos^2 x} = 81^{1 - \sin^2 x} = \frac{81}{81^{\sin^2 x}}$.

b) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 9$.

c) Chú ý rằng $(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}})(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) = 1$.

$$\pm\sqrt{\lg\frac{3}{2}}.$$

d) $x_{1,2} = 10$; $x_3 = 1$.

2. a) $x = 0{,}01$; b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

*7. Hệ phương trình.*

**3.** a) $(x = 1; y = 27)$ và $(x = 27; y = 1)$.

b) $(x = 1; y = 9)$ và $(x = 9; y = 1)$.

c) Hệ vô nghiệm.

**4.** Đặt $x = ky$, suy ra $10k^2 + 3k - 4 = 0$.

Từ đó

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

**5.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3, \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$

**6.** a) $a^{b^2+1} \leq 1/16$; b) $a^{b^2+1} = 1/16$; c) $0 < a \leq 1/16$.

*8. Phương trình có ẩn số ở mẫu số.*

**1.** a) Nghiệm là mọi $x \neq -2$, mọi $x \neq 3$.

b) Phương trình vô nghiệm.

c) Cộng cả hai vế của phương trình với $2x(\dfrac{x}{x-1})$ ta được phương trình bậc hai.

$$y^2 - 3y - 1 = 0 \text{ với } y = \frac{x^2}{x-1}.$$

d) Đặt $x^2 - 4x + 10 = y$.

e) Chú ý rằng: $\dfrac{1}{x+6} - \dfrac{1}{x+10} = \dfrac{4}{x^2 + 16x + 60}$,

$$\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+9} = \frac{2}{x^2 + 16x + 63}$$

Từ đó, đặt $x^2 + 16x + 61,5 = y$.

**2.** a) Khi $a = 0$ hoặc $a = 1$ phương trình vô nghiệm; khi $a \neq 0$ và $a \neq 1$; $x_1 = -a$; $x_2 = a - 1$.

b) Khi $a = 0$ phương trình vô nghiệm.

Khi $a \neq 0$ phương trình có nghiệm

$$x_1 = a + 1; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{a}.$$

c) Với $m \neq n$ và $m \neq -n$ phương trình có nghiệm

$$x_1 = \frac{m+n}{m-n}\ ; \qquad x_2 = \frac{m-n}{m+n}.$$

d) Khi $a = 0$ hoặc $b = 0$ phương trình vô nghiệm; nếu $a > 0$ và $b > 0$ thì phương trình có nghiệm

$$x_{1,2} = \pm a\sqrt{b}\ ; \quad x_{1,2} = \pm b\sqrt{a}.$$

# CHƯƠNG II

## TAM THỨC BẬC HAI

Tam thức bậc hai là một biểu thức có dạng:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

Trong chương I chúng ta đã xét bài toán tìm nghiệm của tam thức đó. Trong phần này, các bài toán chủ yếu được đặt ra là khảo sát dấu của tam thức khi x thay đổi và các vấn đề liên quan.

### §1. Định lý thuận về dấu của tam thức bậc hai

**Định lý:** *Cho tam thức* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

*Nếu* $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$ với mọi x;

*Nếu* $\Delta = 0$ thì $af(x) \geq 0$ với mọi x

$$(af(x) = 0 \textit{ chỉ khi } x = -\frac{b}{2a});$$

*Nếu* $\Delta > 0$ thì tam thức có nghiệm phân biệt

$x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ và $\begin{cases} af(x) > 0 \textit{ nếu } x < x_1; x > x_2 \\ af(x) < 0 \textit{ nếu } x_1 < x < x_2. \end{cases}$

Để giải được các bài toán trong phần này, các em học sinh phải biết được cách giải các bất phương trình bậc hai, cách giải một số hệ bất phương trình đơn giản và cuối cùng là cần phải biết được hình dáng đồ thị của một hàm số bậc hai tùy theo dấu của hệ số a.

*Ví dụ 1.* Cho tam thức $f(x) = x^2 - 8x + m + 10$. Tùy theo các giá trị của m hãy xác định dấu của tam thức đã cho.

*Giải:* Tam thức có hệ số $a = 1 > 0$ và có biệt số $\Delta' = 6 - m$. Vậy:

1) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 6$: $f(x) > 0 \;\; \forall x$.

2) Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 6$: $f(x) \geq 0 \;\; \forall x$

(dấu bằng xảy ra khi $x = 4$).

3) Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 6$: Khi đó tam thức đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ ($x_1 < x_2$) và:

$f(x) > 0$ khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$;

$f(x) < 0$ khi $x_1 < x < x_2$.

*Ví dụ 2.* Cho tam thức

$$f(x) = (a + 1)x^2 - 2(a - 1)x + 3a - 3.$$

a) Với những giá trị nào của a thì $f(x) < 0$ với mọi x?

b) Với những giá trị nào của a thì $f(x) \geq 0$ với mọi x?

*Giải:* Khi $a + 1 = 0$ hay $a = -1$ ta có: $f(x) = 4x - 6$.

Như vậy $f(x) < 0$ chỉ khi $x < \frac{3}{2}$. Vậy với $a = -1$ ta không thể có $f(x) < 0$ với mọi x. Lý luận tương tự, với $a = -1$ ta cũng không thể có $f(x) \geq 0$ với mọi x.

Dưới đây ta chỉ xét trường hợp $a \neq -1$.

a) Muốn $f(x) < 0$ với mọi x ta cần phải có:

$$\begin{cases} a + 1 < 0 \\ \Delta' < 0, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a + 1 < 0 \\ 2(a - 1)(a + 2) > 0, \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} a < -1 \\ a < -2, \;\; \text{hoặc } a > 1, \end{cases} \quad \text{hay} \quad a < -2.$$

Vậy với $a < -2$ thì $f(x) < 0$ với mọi x.

b) Muốn $f(x) > 0$ với mọi x ta cần phải có:

$$\begin{cases} a + 1 > 0 \\ \Delta' \leq 0, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a + 1 > 0, \\ 2(a - 1)(a + 2) \geq 0, \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} a > -1 \\ a \leq -2, \;\; \text{hoặc } a \geq 1, \end{cases} \quad \text{hay } a \geq 1.$$

Vậy với $a \geq 1$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi x.

*Ví dụ 3.* Với những giá trị nào của m thì bất phương trình $(m + 1)x^2 - 2mx - (m - 3) < 0$ có nghiệm?

*Giải:* Nếu $m + 1 < 0$ hay $m < -1$ thì hiển nhiên, bất phương trình đã cho có nghiệm (vì lúc đó tam thức ở vế trái luôn luôn âm hoặc chỉ dương trên một khoảng hữu hạn).

Nếu $m = -1$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$2x + 4 < 0$ và hiển nhiên nó có nghiệm.

Cuối cùng, xét trường hợp $m > -1$, khi đó để bất phương trình có nghiệm, tam thức ở vế trái phải có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\Delta' = 2m^2 - 2m - 3 > 0 \text{ hay (do } m > -1)$$

$$-1 < m < \frac{1 - \sqrt{7}}{2}, \quad m > \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

Kết hợp các kết quả trên; với $m < \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$ hoặc $m > \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán bằng cách tìm điều kiện để bất phương trình vô nghiệm. Tức tìm điều kiện để $(m + 1)x^2 - 2mx - (m - 3) \geq 0$ với mọi x. Những giá trị m còn lại sẽ làm cho bất phương trình có nghiệm.

*Ví dụ 4.* Cho bất phương trình: $x^2 + 6x + 7 + m \leq 0$.

Với những giá trị nào của m thì: a) Bất phương trình vô nghiệm? b) Bất phương trình có đúng một nghiệm? c) Bất phương trình có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1?

*Giải:* a) Muốn bất phương trình đã cho vô nghiệm ta phải có:

$\Delta' < 0$ hay là $\Delta' = 2 - m < 0$ hay $m > 2$.

b) Muốn bất phương trình đã cho có đúng một nghiệm ta phải có $\Delta' = 0$ hay là $m = 2$. Lúc đó bất phương trình đã cho có dạng: $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ và có nghiệm là $x = -3$.

c) Muốn bất phương trình đã cho có nghiệm là một đoạn trên trục có độ dài bằng 1 thì tam thức ở vế trái của bất phương trình phải có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$ và $|x_1 - x_2| = 1$.

Ta có: $|x_1 - x_2| = 1$ hay $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1$, hay $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$, hay $36 - 4(7 + m) = 1$,

hay $m = \dfrac{7}{4}$.

Thử lại với $m = \dfrac{7}{4}$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt và thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$. Vậy $m = \dfrac{7}{4}$ là giá trị cần tìm.

*Ví dụ 5.* Giả sử $u > 0$ là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2px - q^2 > 0$ và v là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2qx - p^2 < 0$. Chứng minh rằng $u + v > p + q$.

*Giải:* Tam thức $f(x) = x^2 - 2px - q^2$ có hai nghiệm:

$$x_1 = p - \sqrt{p^2 + q^2}\,; \quad x_2 = p + \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Dễ thấy: $p - \sqrt{p^2 + q^2} \leq 0 \leq p + \sqrt{p^2 + q^2}$.

Vì vậy: $u > p + \sqrt{p^2 + q^2}$. (1)

Tương tự, tam thức $g(x) = x^2 - 2qx - p^2$ có hai nghiệm:

$$x_1' = q - \sqrt{p^2 + q^2}\,; \quad x_2' = q + \sqrt{p^2 + q^2},$$

và cũng do: $q - \sqrt{p^2 + q^2} < q + \sqrt{p^2 + q^2}$, nên $q - \sqrt{p^2 + q^2} < v < q + \sqrt{p^2 + q^2}$.

Nói riêng: $v > q - \sqrt{p^2 + q^2}$. (2)

Cộng (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

*Ví dụ 6* (A - 75). Với những giá trị nào của a thì hệ bất phương trình sau đây vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 & (1) \\ a^2x + 1 > 3 + (3a - 2)x & (2) \end{cases}$$

*Giải.:* Bất phương trình $x^2 + 7x - 8 < 0$ có nghiệm là $-8 < x < 1$. Bất phương trình (2) có thể viết dưới dạng:

$$(a^2 - 3a + 2).x > 2 \qquad (3)$$

1) Nếu $a^2 - 3a + 2 = 0$ tức là $a = 1$ và $a = 2$, thì bất phương trình (3) có dạng $0.x > 2$ nên vô nghiệm.

Vậy khi $a = 1$, $a = 2$ hệ đã cho vô nghiệm.

2) Nếu $a^2 - 3a + 2 > 0$, tức là: $a < 1$ hoặc $a > 2$.

Lúc đó, nghiệm của bất phương trình (3) là:

$$x > \frac{2}{a^2 - 3a + 2}.$$

Muốn hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm ta phải có:

$$\frac{2}{a^2 - 3a + 2} \geq 1$$

hay: $a^2 - 3a \leq 0$, tức là $0 \leq a \leq 3$.

Vậy trong trường hợp này ta phải có:

$0 \leq a < 1$ hoặc $2 < a \leq 3$.

3) Nếu $a^2 - 3a + 2 < 0$,tức là $1 < a < 2$, thì nghiệm của bất phương trình (3) là:

$$x < \frac{2}{a^2 - 3a + 2}.$$

Muốn hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm, ta phải có:

$$\frac{2}{a^2 - 3a + 2} \le -8$$

hay $4a^2 - 12a + 9 \ge 0$, hay $(2a - 3)^2 \ge 0$, điều này luôn luôn đúng.

Kết hợp cả ba trường hợp trên ta thấy rằng hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm nếu $0 \le a \le 3$.

*Ví dụ 7.* Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 \le 0, & (1) \\ x^2 - m(m+1)x + m^3 \le 0. & (2) \end{cases}$$

a) Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình có nghiệm?

b) Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

*Giải:* a) Nghiệm của bất phương trình (1) là $-2 \le x \le \frac{1}{2}$,

nghiệm của bất phương trình (2) là:

$m \le x \le m^2$ nếu $m \le m^2$,

$m^2 \le x \le m$ nếu $m^2 \le m$.

Ta xét hai khả năng sau đây:

1) $m \le m^2$. Điều này xảy ra khi $m \le 0$ hoặc $m \ge 1$.

* Nếu $m \le 0$ thì hai đoạn $[-2; \frac{1}{2}]$ và $[m; m^2]$ hiển nhiên có phần chung (chẳng hạn là điểm 0). Vậy trong trường hợp này hệ đã cho có nghiệm.

* Nếu $m \ge 1$ thì hai đoạn $[-2; \frac{1}{2}]$ và $[m; m^2]$ không có phần chung. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

2) $m^2 \le m$. Điều này xảy ra khi $0 \le m \le 1$. Khi đó để các đoạn $[-2; \frac{1}{2}]$ và $[m^2; m]$ có phần chung, ta phải có:

$m^2 \le \frac{1}{2}$ hay là (do $m \ge 0$): $0 \le m \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Kết hợp cả hai trường hợp trên ta thấy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm nếu: $m \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán bằng phương pháp khác bằng cách tìm điều kiện để hệ đã cho vô nghiệm (Xem ví dụ 10). Những giá trị m còn lại sẽ làm cho hệ có nghiệm.

b) Căn cứ theo các kết quả ở câu a), ta thấy rằng muốn hệ đã cho có một nghiệm duy nhất thì đoạn $[m; m^2]$ (nếu $m \le m^2$) hay đoạn $[m^2; m]$ (nếu $m^2 \le m$) chỉ có duy nhất một điểm chung với đoạn $[-2; \frac{1}{2}]$.

Ta xét các khả năng sau:

1) Nếu $m = m^2$ tức là nếu $m = 0$ hay $m = 1$. Lúc đó bất phương trình (2) chỉ có một nghiệm duy nhất $x_o = m$.

Muốn hệ có nghiệm duy nhất thì $-2 \le x_o \le \frac{1}{2}$ (lúc đó nghiệm của hệ là $x_o = m$). Rõ ràng chỉ có giá trị $m = 0$ thỏa mãn. Vậy khi $m = 0$ hệ có một nghiệm duy nhất (nghiệm đó là $x = 0$).

2) Nếu $m \ne m^2$. Lúc đó cần phân biệt hai trường hợp:

a) Nếu $m < m^2$: tức là nếu $m < 0$ hoặc $m > 1$. Khi đó đoạn $[m; m^2]$ có một điểm chung duy nhất với đoạn

$[-2; \frac{1}{2}]$ khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$ (không thể xảy ra khả năng $m^2 = -2$).

Song giá trị này không thỏa mãn điều kiện a).

b) Nếu $m^2 < m$, tức là nếu $0 < m < 1$, khi đó đoạn $[m^2; m]$ có một điểm chung duy nhất với đoạn $[-2; \frac{1}{2}]$ khi và chỉ khi $m^2 = \frac{1}{2}$ (không thể xảy ra khả năng $m = -2$). $m^2 = \frac{1}{2}$ khi $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Song chỉ có một giá trị $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa mãn điều kiện b). Vậy khi $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hệ đã cho có một nghiệm duy nhất (nghiệm đó là: $x = \frac{1}{2}$).

Tóm lại: hệ đã cho có một nghiệm duy nhất nếu $m = 0$ hoặc $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

*Ví dụ 8.* Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0, \\ bx^2 + cx + a > 0, \\ cx^2 + ax + b > 0. \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm.

*Giải:* Điều kiện cần: Giả sử hệ bất phương trình đã cho có nghiệm. Gọi một nghiệm nào đó là $x = x_o$ thế thì:

$$\begin{cases} ax_o^2 + bx_o + c > 0, \\ bx_o^2 + cx_o + a > 0, \\ cx_o^2 + ax_o + b > 0. \end{cases}$$

Cộng ba bất đẳng thức lại ta được:

$$(a + b + c)(x_0^2 + x_0 + 1) > 0$$

vì $x^2 + x + 1 > 0$ với $\forall x$, suy ra $a + b + c > 0$.

Ta chứng minh rằng $a + b + c > 0$ cũng là điều kiện đủ. Thật vậy, với $a + b + c > 0$ thì hệ hiển nhiên có nghiệm, chẳng hạn đó là $x = 1$. Vậy $a + b + c > 0$ là điều kiện cần và đủ để hệ bất phương trình có nghiệm.

*Ví dụ 9.* Giải các bất phương trình sau:

a) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ ;

b) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 2} > \sqrt{x - 3}$ ;

c) $(x^2 + x + 1)^x < 1$ ;

d) $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ ;

e) [A - B - D/1981] $\dfrac{3x + 7}{x^2 - x - 2} \geq -5$.

*Giải:* a) Bất phương trình đã cho tương đương với $3x - 3 > 0$ và $3 - 3x < x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$,
hay là tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x > 1 & (1) \\ x^2 - 5x < 0 & (2) \\ x^2 + x - 6 > 0. & (3) \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình (2) là: $0 < x < 5$,
nghiệm của bất phương trình (3) là: $x < -3$ hoặc $x > 2$.

Vậy nghiệm của hệ và cũng là nghiệm của bất phương trình đã cho là $2 < x < 5$.

b) Với $x \geq 3$ (1), bất phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x - 1} > \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3}$.

Cả hai vế của bất phương trình đều không âm nên bình phương lên, ta được bất phương trình tương đương:

$$x - 1 > 2x - 5 + 2\sqrt{(x - 2)(x - 3)}.$$

hay là: $4 - x > 2\sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Vế phải không âm, nên ta phải có $4 - x > 0$, tức là $x < 4$ (2). Kết hợp với (1) ta phải có: $3 \le x < 4$. Bình phương hai vế của bất phương trình trên và rút gọn ta được bất phương trình: $3x^2 - 12x + 8 < 0$. Bất phương trình này có nghiệm là:

$$2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < x < 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Dễ thấy: $2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} < 3 < 2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} < 4.$

Vậy kết hợp với điều kiện $3 \le x \le 4$ ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$3 \le x < 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

c) Ta nhận thấy rằng những x thỏa mãn $x^2 + x + 1 = 1$ không phải là nghiệm của bất phương trình. Vì $x^2+x+1>0$ $\forall x$ nên chỉ cần xét hai trường hợp:

α) Giả sử $x^2 + x + 1 < 1$, tức $-1 < x < 0$. (1)

Bất phương trình đã cho có thể viết dưới dạng:

$$(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0.$$

Bất phương trình này có nghiệm là $x > 0$. Kết hợp với (1) suy ra trong trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

β) Giả sử $x^2 + x + 1 > 1$, tức $x < -1$ hoặc $x > 0$. (2)

Lúc đó từ $(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0$ suy ra $x < 0$. Kết hợp với (2) suy ra trong trường hợp này nghiệm của bất phương trình là $x < -1$. Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x < -1$.

d) Bất phương trình đã cho có thể viết dưới dạng:

$$\log_x(5x^2 - 8x + 3) > \log_x x^2. \quad (1)$$

Ta xét hai khả năng sau:

$\alpha$) Nếu $0 < x < 1$. Khi đó bất phương trình (1) tương đương với hệ
$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0, \\ 5x^2 - 8x + 3 < x^2. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Nghiệm của hệ (I) là: $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5}$.

$\beta$) Nếu $x > 1$. Khi đó bất phương trình (1) tương đương với hệ:
$$\begin{cases} x > 1, \\ 5x^2 - 8x + 3 > 0, \\ 5x^2 - 8x + 3 > x^2. \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Nghiệm của hệ (II) là: $x > \frac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:
$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \text{ hoặc } x > \frac{3}{2}.$$

e) Trước hết phải có
$$x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \text{ và } x \neq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với:
$$\frac{3x + 7}{x^2 - x - 2} + 5 \geq 0,$$
hay là
$$\frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{3}{5}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x^2 - 2x - 3$ | | + | \|\| | + | 0 | - | 0 | + | \| | + | |
| $x^2 - x - 2$ | | + | 0 | - | \| | - | \| | - | 0 | + | |
| Vế trái | | + | \|\| | - | 0 | + | 0 | - | \|\| | + | |

Căn cứ vào bảng trên, nghiệm của bất phương trình là:

$$x < -1, \quad -\frac{3}{5} \le x \le 1, \quad x > 2.$$

*Ví dụ 10.* Tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + y \ge 25 \\ y \le 2x + 18 \\ y \ge x^2 + 4x. \end{cases}$$

Giải: Hệ đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} y \ge 25 - x & (1) \\ y \le 2x + 18 & (2) \\ y \ge x^2 + 4x & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $25 - x \le 2x + 18$

$$\text{hay là } x \ge \frac{7}{3}. \qquad (4)$$

Từ (2) và (3) suy ra $x^2 + 4x \le 2x + 18$

hay là: $-1 - \sqrt{19} \le x \le -1 + \sqrt{19}$ (5)

$$\text{Từ (4) và (5)} \Rightarrow \frac{7}{3} \le x \le -1 + \sqrt{19} \qquad (6)$$

Để ý rằng $-1 + \sqrt{19} < 4$, do đó chỉ có duy nhất một giá trị nguyên $x = 3$ thỏa mãn (6). Thay $x = 3$ vào hệ đã cho, ta tìm được ba nghiệm:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 22, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 23, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 24. \end{cases}$$

*Ví dụ 11.* Cho phương trình:

$$2x^2 + 2(m + 2)x + m^2 + 4m + 3 = 0.$$

a) Với những giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm.

b) Trong trường hợp phương trình có nghiệm, gọi các nghiệm là $x_1$, $x_2$. Chứng minh rằng:

$$|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

*Giải:* a) Muốn phương trình có nghiệm ta phải có:

$$\Delta' = -m^2 - 4m - 2 \ge 0$$

hay là: $m^2 + 4m + 2 \le 0$ (1)

hay là: $-2 - \sqrt{2} \le m \le -2 + \sqrt{2}$. (2)

b) Theo định lý Viét ta có:

$$x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = -m - 2 + \frac{3}{2}(m^2 + 4m + 3) =$$

$$= \frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2}.$$

Như vậy ta cần phải chứng minh:

$$\left|\frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2}\right| \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2},$$

với những m thỏa mãn điều kiện (2).

Ta có $\frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(m^2 + 4m + 2) - m - \frac{1}{2} \le$

$$\le -m - \frac{1}{2} \text{ (do } m^2 + 4m + 2 \le 0).$$

Từ (2) suy ra $-m \le 2 + \sqrt{2}$. Vậy:

$$\frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2} \le -m - \frac{1}{2} \le 2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Mặt khác $\frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(m^2 + 4m + 4) -$

$-m - \frac{7}{2} \ge -m - \frac{7}{2}$ (do $m^2 + 4m + 4 \ge 0$).

Từ (2) suy ra $-m \ge 2 - \sqrt{2}$. Vậy:

$$\frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2} \ge -m - \frac{7}{2} \ge 2 - \sqrt{2} - \frac{7}{2} =$$

$$= -\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right).$$

Như vậy, ta đã chứng minh được:

$$-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \le \frac{3}{2}m^2 + 5m + \frac{5}{2} \le \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

*Ví dụ 12.* Cho b > c > d. Chứng minh rằng với mọi a ta luôn có:

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd).$$

*Giải:* Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với bất đẳng thức:

$$(a + b + c + d)^2 - 8(ac + bd) > 0.$$

Ta viết vế trái của bất đẳng thức này dưới dạng một tam thức bậc hai theo biến số a:

$$f(a) = a^2 + 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd.$$

Tam thức f(a) có biệt thức:

$$\begin{aligned}\Delta' &= (b - 3c + d)^2 - (b + c + d)^2 + 8bd = \\ &= -4c(2b - 2c + 2d) + 8bd = \\ &= 8(bd - bc + c^2 - cd) = 8[b(d - c) - c(d - c)] = \\ &= 8\,(b - c)\,(d - c).\end{aligned}$$

Theo giả thiết thì $\Delta' < 0$, vậy $f(a) > 0$ với $\forall a$.

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

*Ví dụ 13.* (A - 1981) Tìm m để biểu thức

$$9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + myz$$

luôn luôn dương với mọi x, y, z không đồng thời bằng không.

*Giải:* Viết lại biểu thức đã cho dưới dạng một tam thức bậc hai đối với x:

$$f(x) = 9x^2 + 6(z - 2y)x + (20y^2 + 4z^2 + myz).$$

Để có $f(x) > 0$ với $\forall x$, ta phải có:

$\Delta' < 0$ hay là $16y^2 + (m + 4)zy + 3z^2 > 0$ với $\forall y$, z không đồng thời bằng không.

Để có $f(y) = 16y^2 = (m + 4)zy + 3z^2 > 0$ với $\forall y$ ta phải có $\Delta = z^2(m^2 + 8m - 176) < 0$ (*)

* Nếu $z \neq 0$: thì bất phương trình (*) tương đương với $m^2 + 8m - 176 < 0$ hay là $-4 - 8\sqrt{3} < m < -4 + 8\sqrt{3}$.

* Nếu $z = 0$: Lúc đó, trong biểu thức đầu tiên chỉ còn lại $9x^2 - 12xy + 20y^2 = (3x - 2y)^2 + 16y^2 > 0$ với mọi x, y không đồng thời bằng 0.

Vậy các giá trị phải tìm của m là:

$$-4 - 8\sqrt{3} < m < -4 + 8\sqrt{3}.$$

*Ví dụ 14.* Giả sử x và y liên hệ với nhau bởi hệ thức.

$$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = x + y + 1.$$

*Giải:* Hệ thức đã cho có thể viết lại như sau:

$$(x + y + 1)^2 + 5(x + y + 1) + 4 = -y^2. \qquad (*)$$

Như vậy với $\forall x,y$ ta luôn có:

$$(x + y + 1)^2 + 5(x + y + 1) + 4 \le 0$$

tức là: $S^2 + 5S + 4 \le 0$ hay $-4 \le S \le -1$.

Vậy với $\forall x,y$: $-4 \le x + y + 1 \le -1$.

Ta có $x + y + 1 = -1$ khi $x + y = -2$. So sánh với hệ thức (*) ta được $-y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$.

Vậy $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2$ và $y = 0$.

Tương tự, $x + y + 1 = -4$ khi $x + y = -5$. So sánh với hệ thức (*) ta được $-y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$.

Vậy $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5$ và $y = 0$.

*Kết luận:* Giá trị lớn nhất của S là $-1$ và giá trị nhỏ nhất của S là $-4$.

*Ví dụ 15.* Với những giá trị nào của m thì

$$\log_{\frac{m+1}{m+2}}(x^2 + 3) > 1 \text{ với mọi } x.$$

*Giải:* Trước hết ta phải có:

$$\begin{cases} \dfrac{m+1}{m+2} > 0 \\ \dfrac{m+1}{m+2} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m < -2 \text{ hoặc } m > -1. \qquad (*)$$

Ta cần tìm m sao cho:

$$\log_{\frac{m+1}{m+2}}(x^2+3) > \log_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{m+1}{m+2}\right) \ \forall x$$

Điều này tương đương với:

$$\left(\frac{m+1}{m+2} - 1\right)\left[x^2 + 3 - \frac{m+1}{m+2}\right] > 0 \ \forall x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(m+2)^2}[(m+2)x^2 + (2m+5)] > 0 \ \forall x$$

$$\Leftrightarrow (m+2)x^2 + (2m+5) < 0 \ \forall x$$

$$\Leftrightarrow m < -\frac{5}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được những giá trị cần tìm là $m < -\frac{5}{2}$.

*Ví dụ 16.* Cho 2n số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) \geq$$
$$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

(Bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski).

*Giải:* Nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, khi đó hiển nhiên bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Giả sử tồn tại ít nhất một $a_1 \neq 0$. Khi đó

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0.$$

Ta có: $(a_1x + b_1)^2 \geq 0$ với $\forall x$,

$(a_2x + b_2)^2 \geq 0$ với $\forall x$,

....

$(a_nx + b_n)^2 \geq 0$ với $\forall x$

hay là: $a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2 \geq 0$ với $\forall x$,

$$a_2^2x^2 + 2a_2b_2x + b_2^2 \geq 0 \text{ với } \forall x$$

.......

$$a_n^2x^2 + 2a_nb_nx + b_n^2 \geq 0 \text{ với } \forall x$$

Cộng n bất đẳng thức lại ta được:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+a_2b_2+ ... +a_nb_n)x +$$
$$+ (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq 0 \text{ với } \forall x$$

Từ $f(x) = Ax^2 + Bx + C \geq 0$, với $\forall x$ và $A > 0$ suy ra ta phải có: $\Delta \leq 0$. Tức là:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) . (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq$$
$$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \ ... \ = \dfrac{a_n}{b_n}$ (bạn đọc tự kiểm tra lấy điều này).

## BÀI TẬP

**1.** Cho tam thức:

$$f(x) = (3 - k)x^2 - 2(2k - 5)x - 2k + 5.$$

a) Với những giá trị nào của k thì $f(x) > 0$ với $\forall x$?

b) Với những giá trị nào của k thì f(x) có thể viết được dưới dạng bình phương của một nhị thức?

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ mà không phụ thuộc k.

**2.** Với những giá trị nào của m thì:

$$1 \leq \frac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6 \text{ với } \forall x.$$

**3.** Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 + (x+1)^2 \le \dfrac{15}{x^2 + x + 1}$ , (dự trữ A - 1972);

b) $x^2 + mx + 1 > 0$ (m là tham số);

c) $2x(x-1) + 1 > \sqrt{x^2 - x + 1}$ ;

d) $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$;

e) $(x^2 + x + 1)^{x^3 - \frac{x}{2}} < 1$;

g) $(\log_x 3)^2 - 2m(\log_x 3) + 1 \le 0$ (m là tham số);

h) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \le 0$.

**4.** Với những giá trị nào của m thì hệ

$\begin{cases} x \ge y^2 + 2m \\ y \ge x^2 + 2m \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất.

**5.** Trong tất cả các cặp số dương (x,y) thỏa mãn:

$\log_{x^2+y^2}(x + y) \ge 1.$

Hãy tìm cặp số với y lớn nhất.

**6.** Chứng minh rằng: ∀x, y, ta luôn có:

a) $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \ge 0$;

b) $x^2y^4 - 4xy^3 + 2(x^2 + 2)y^2 + 4xy + x^2 \ge 0$;

**7.** Cho $0 \le x \le \pi$. Chứng minh rằng:

a) $\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{4}\sin 4x \ge 0$;

b) $\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x \ge 0$.

**8.** Với những giá trị nào của k thì:

$a^2 + kab + b^2 \ge 0$ với mọi a, b?

**9.** Giả sử x, y, z là ba số thỏa mãn:

$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8. \end{cases}$ Chứng minh rằng $1 \le x \le \dfrac{7}{3}$

**10.** Với những giá trị nào của m thì cả hai nghiệm của phương trình:

$2x^2 - (3m + 1)x + m^2 + m = 0$ đều thỏa mãn bất phương trình: $x^2 - mx - 3m - 1 \geq 0$ ?

**11.** Giải và biện luận hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - (k + 2)x + 2k \leq 0, \\ x^2 - (k + 3)x + 3k \geq 0. \end{cases}$$

**12.** Chứng minh rằng với mọi m hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - (2m + 1)x + 2m \leq 0 \\ x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m \leq 0 \end{cases}$$ luôn luôn có nghiệm.

**13.** Tìm điều kiện cần và đủ để hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} a\sin^2x + b\cos^2x + c \geq 0 \\ a\cos^2x + b\sin^2x + c \geq 0 \end{cases}$$ có nghiệm.

**14.** Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2x + m \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6m \leq 0 \end{cases}$$ có một nghiệm duy nhất?

**15.** Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + m \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 - 4m \leq 0 \end{cases}$$

có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1?

**16.** Với giá trị nào của a thì hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1, \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất? Tìm nghiệm đó.

**17.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}.$$

**18.** Giải phương trình: $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11.$

**19.** Với những giá trị nào của m thì:

$$\log_{\frac{1}{m+1}} [x^2 + 2|m|] > 0 \text{ với } \forall x?$$

**20.** Giả sử x, y liên hệ với nhau bởi hệ thức:

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = x^2 + y^2.$$

**21*.** Giả sử $|a| + |b| + |c| > 17$. Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0, 1]$ sao cho: $|ax_o^2 + bx_o + c| > 1$.

**22*.** Biết rằng $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ với $\forall x$ thuộc đoạn $[-1, 1]$. Chứng minh rằng:

$$|cx^2 + bx + a| \leq 2 \text{ với } \forall x \in [-1, 1].$$

**23*.** Tìm a, b, c sao cho: $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ và $\frac{8}{3} a^2 + 2b^2$ là lớn nhất.

**24*.** Giả sử $m_k = \frac{1^k}{2} + \frac{2^k}{3} + \frac{3^k}{4} + ... + \frac{100^k}{101}$,

với k = 1, 2, 3... Chứng minh rằng $m_k^2 \leq m_{k+1} \cdot m_{k-1}$.

**25*.** Cho n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$. Gọi $m = \min\limits_j \{x_j\}$

$M = \max\limits_j \{x_i\}$

Chứng minh rằng: $(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{n^2 . (m + M)^2}{4mM}$.

**26*.** Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - px - q$ với p, q là các số nguyên dương. Gọi $f_n$ là số các tam thức bậc hai có dạng trên có nghiệm dương nhỏ hơn n. Hãy tính $f_{1988}$.

**27*.** Giả sử $|ax^2 + bx + c| \leq k$ với mọi x thuộc đoạn

$[-1,1]$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \le 5k^2$. Đồng thời, chứng minh rằng không thể thay 5 bằng số nhỏ hơn.

**28.** [A-B-D-1987] Tìm khoảng xác định của hàm số

$$y = \sqrt{(x^2 + x - 12) \cdot \log_{1/2}(x + 2)}.$$

**29.** Giả sử $\dfrac{4}{x^2 + ax - 3a + 1} \neq -2\ \forall x$. Chứng minh rằng $a > -13$.

## §2. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau

*Bài toán 1.* Với giá trị nào của a, thì hai nghiệm $x_1$, $x_2$ của phương trình

$$2x^2 + 6x + a = 0 \qquad (1)$$

thỏa mãn điều kiện

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 2 \qquad (2)$$

*Giải:*

*Cách 1.* Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm là

$$\Delta' = 9 - 2a \ge 0 \Leftrightarrow a \le \frac{9}{2}. \qquad (3)$$

Xét (2): điều kiện $x_1x_2 = \dfrac{a}{2} \neq 0$.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 2 \Leftrightarrow \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} < 0 \Rightarrow x_1x_2 < 0.$$

Vậy $a < 0$ là điều kiện cần tìm với a để (1) có 2 nghiệm thỏa mãn (2).

*Cách 2.* Để (1) có 2 nghiệm, luôn cần có điều kiện (3)

Theo định lý Viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1x_2 = \dfrac{a}{2}. \end{cases}$

Biến đổi (2):

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} < 2 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - a}{a/2} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2(9 - 2a)}{a} < 0. \qquad (4)$$

Giải (4): $a < 0$ và $\frac{9}{2} < a$.

Kết hợp (3) được điều cần tìm: $a < 0$.

*Cách 3.* Nhận xét rằng 2 số $\frac{x_1}{x_2}$ và $\frac{x_2}{x_1}$ cùng dấu. Theo bất đẳng thức Côsi

$$\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \left|\frac{x_2}{x_1}\right| \geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_1}} = 2.$$

Vậy nếu $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1} > 0$ thì $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$ không thỏa mãn (2).

Suy ra $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1} < 0 \Rightarrow a = 2x_1x_2 < 0$

*Bài toán 2.* Cho tam thức bậc 2:

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx - (m - 3). \qquad (1)$$

a) Với giá trị nào của m thì $f(x) < 0\ \forall x$.

b) Với giá trị nào của m thì bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm.

*Giải:*

*Cách 1.* a) Nếu f(x) là nhị thức, tức là hệ số $m + 1 = 0$ thì $f(x) < 0\ \forall x$ không thỏa mãn.

Vậy điều kiện $f(x) < 0$ với $\forall x$ tương đương với hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} m + 1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + (m + 1)(m - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ 2m^2 - 2m - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{7}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Nhận xét rằng: $-1 < \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$. Thực vậy

$$-1 < \frac{1-\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow -2 < 1 - \sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{7} < 3 \Leftrightarrow 7 < 9.$$

Nên hệ điều kiện (2) là không tương thích.

Vậy không có m để $f(x) < 0\ \forall x$.

b) Căn cứ vào kết quả của câu a) ta thấy để $f(x) < 0$ có nghiệm thì cần và đủ là

hoặc $\begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (3)

hoặc $m + 1 = 0$ (4)

Từ (3) ta có:

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, \quad m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$$

Từ (4) ta có $m = -1$.

Kết hợp lại: $m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$, $m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

*Cách 2.* a) Khảo sát dáng điệu đồ thị hàm số f(x) là tam thức bậc 2, muốn $f(x) < 0$ với $\forall x$, thì đồ thị hàm số phải luôn luôn nằm phía dưới trục hoành.

Do đó có điều kiện:

$$\begin{cases} m + 1 < 0 \\ f_{max} = -\dfrac{\Delta}{4(m+1)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Từ đó, trở lại cách 1.

b) Ta giải bài toán đối của bài toán đặt ra là: Tìm m để $f(x) \geq 0\ \forall x$. Điều kiện này tương đương với

$$\begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} \leq m \leq \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{7}}{2}.$$

Vậy điều kiện cần và đủ để $f(x) < 0$ là $m < \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} < m$.

*Cách 3.* b) Xét các khả năng sau:

i) $m + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = 2x + 4$ là nhị thức nên bất phương trình $f(x) < 0$ luôn có nghiệm. Cụ thể là: $x < -2$.

ii) $m + 1 > 0$ đồ thị của tam thức $f(x)$ là parabôn có chiều lõm quay lên trên. Muốn $f(x) < 0$ có nghiệm cần có $f_{min} < 0$ hay tam thức có 2 nghiệm. Do đó có điều kiện $\Delta > 0$. Trở lại cách giải 1.

iii) $m + 1 < 0$. Theo câu a) điều kiện $m + 1 < 0$ sẽ suy ra $\Delta_f = 2m^2 - 2m - 3 > 0$. Ta được kết quả như cách làm thứ nhất.

*Kết luận.*

a) Không tồn tại m để tam thức $f(x) < 0\ \forall x$.

b) Với điều kiện $m < \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} < m$ thì bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm.

*Bài toán 3.* Cho hàm số

$$y = \frac{a^2 - 1}{3} x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 1.$$

Tìm a để hàm số luôn đồng biến với mọi x.

*Giải:*

*Cách 1.* Xét $y' = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 = f(x)$.

Để hàm số y luôn luôn đồng biến $\forall x$, ta cần $y' \geq 0\ \forall x$.
Suy ra:

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ \Delta' = (a-1)^2 - 2(a^2-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \text{ và } 1 < a \\ (a-1)(-a-3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \ ; \ 1 < a \\ a \leq -3 \ ; \ 1 \leq a. \end{cases}$$

Kết hợp, ta có điều kiện của a:

$$a \leq -3 \quad \text{và} \quad 1 < a.$$

Chú ý với $a = 1$ ta có hàm số là: $y = 2x + 1$ ; $y' = 2 > 0$.

Vậy: điều kiện là $a \leq -3$ và $1 \leq a$.

*Cách 2.* Để $y' \geq 0\ \forall x$ ta cần điều kiện hệ số $a^2 - 1 > 0$, khi đó parabôn có chiều lõm quay lên trên, suy ra $y'_{min} \geq 0$ hay phương trình $y' = 0$ vô nghiệm. Vậy có điều kiện: $\Delta \leq 0$. Quá trình tiếp theo được làm như ở cách 1.

*Bài toán 4.* Chứng minh rằng với mọi x ta có

$$\frac{1}{7} \leq \frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \leq 7.$$

*Giải:*

*Cách 1:* Đặt $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1}$ (*) ta phải chứng minh $\forall x$ thì $y \in \left[\dfrac{1}{7} ;\ 7\right]$.

Đẳng thức (*) tương đương với sự kiện là phương trình $4(1 - y)x^2 + 3(1 + y)x + 1 - y = 0$ luôn có nghiệm.

i) $1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$ ta có $x = 0$, $y \in \left[\dfrac{1}{7} ,\ 7\right]$ đúng.

ii) $1 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$. Để có phương trình có nghiệm, ta có điều kiện $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = 9(1 + y)^2 - 16(1 - y)^2 \geq 0$.

$\Leftrightarrow -7y^2 + 50y - 7 \geq 0$ suy ra $\frac{1}{7} \leq y \leq 7$.

*Cách 2.* Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \geq \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \leq 7 \end{cases}$$ (Chú ý là $4x^2 - 3x + 1 > 0\ \forall x$ do $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7(4x^2 + 3x + 1) \geq 4x^2 - 3x + 1 \\ 4x^2 + 3x + 1 \leq 7(4x^2 - 3x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x^2 + 24x + 6 \geq 0 \\ 24x^2 - 24x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 1)^2 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 \geq 0 \end{cases}$$ hiển nhiên đúng.

Các dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

*Chú ý:* Để chứng minh cặp bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh một bất đẳng thức. Chẳng hạn, chứng minh

$$\frac{1}{7} \leq \frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1}$$

sau đó bằng phép đổi biến $t = -x$ sẽ suy ra bất đẳng thức còn lại.

*Bài toán 5.* Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} mx + m + 1 > 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0. & (2) \end{cases}$$

Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm.

*Giải:*

*Cách 1.* Giải (2) ta tìm được nghiệm $2 \leq x \leq 3$. (3)

Xét (1).

*) $m = 0$ thì (1) thỏa mãn $\forall x$, vì khi đó (1) là: $1 > 0$. Vậy: $m = 0$, hệ (1), (2) có nghiệm $2 \le x \le 3$.

*) $m > 0$ thì (1) có nghiệm $x \ge -\dfrac{m+1}{m}$. (4)

Nhận xét rằng $-\dfrac{m+1}{m} = -1 - \dfrac{1}{m} < -1$ do điều kiện $m > 0$, nên luôn có

$$-\frac{m+1}{m} < -1 < 2 < 3.$$

Vậy với $m > 0$ nghiệm của (1) - (2) là $2 \le x \le 3$.

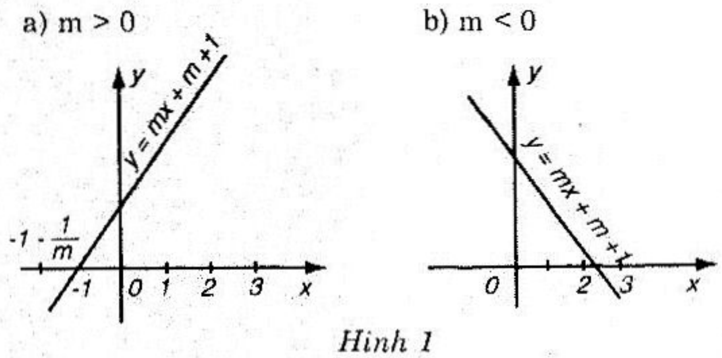
*) Nếu $m < 0$, thì (1) có nghiệm là

$$x < -\frac{m+1}{m} = -1 - \frac{1}{m}. \qquad (5)$$

Lý luận như trên, để hệ (1) - (2) có nghiệm, các khoảng nghiệm (3)-(5) kết hợp được với nhau. Điều kiện này tương đương với $2 < -1 - \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow 3 < -\dfrac{1}{m} \Leftrightarrow 0 > m > -\dfrac{1}{3}$.

Điều kiện này phù hợp với điều kiện $m < 0$ và trong trường hợp này hệ có nghiệm $2 \le x \le -1 - \dfrac{1}{m}$.

*Kết luận.* $m > -\dfrac{1}{3}$ hệ (1) - (2) có nghiệm.




*Hình 1*

*Cách 2.* Giải (2) ta được nghiệm $2 \le x \le 3$. (3)

Khảo sát đồ thị $y = mx + m + 1$ - vế trái của (1).

Nhận xét rằng, hàm y là hàm bậc nhất và đồ thị có dạng như trong hai trường hợp sau (Hình 1):

Ta thấy: a) Miền nghiệm (3) luôn thuộc miền nghiệm của (1) khi $m > 0$: $(-1 - \frac{1}{m}, +\infty)$.

b) Điều kiện để miền nghiệm (3) của (2) giao với miền nghiệm của (1), ít nhất điểm $x = 2$ thuộc nghiệm của (1) hay:

$$2.m + m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

*Kết luận.* $m > -\frac{1}{3}$ hệ (1) - (2) có nghiệm.

*Cách 3.* Phương pháp gián tiếp. Ta tìm m để hệ (1) - (2) vô nghiệm. Từ đó suy ra những m còn lại thì hệ có nghiệm.

Nhận xét như ở cách 2, ta thấy $m > 0$ hệ luôn có nghiệm.

Xét $m < 0$, ta thấy để hệ vô nghiệm điểm $x = 2$ không thỏa mãn (1) hay: $2.m + m + 1 \le 0 \Rightarrow m \le -\frac{1}{3}$.

Vậy: $m \le -\frac{1}{3}$ làm hệ (1) - (2) vô nghiệm; hay

$m > -\frac{1}{3}$ thì hệ đã cho có nghiệm.

*Bài toán 6.* Với giá trị nào của m thì

$$1 + \log_5(x^2 + 1) \ge \log_5(mx^2 + 4x + m) \ \forall x? \quad (1)$$

*Giải:*

*Cách 1.* Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \ \forall x \\ mx^2 + 4x + m > 0 \ \forall x. \end{cases}$ (2)

tương đương với $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = 4 - m^2 < 0 \Rightarrow m < -2,\ 2 < m. \end{cases}$

Kết hợp ta có điều kiện đầu tiên với m:

$$2 < m. \qquad (3)$$

Trước khi khử lôgarit ta biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \log_5(x^2 + 1) - \log_5(mx^2 + 4x + m) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 \frac{5(x^2 + 1)}{mx^2 + 4x + m} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x^2 + 1)}{mx^2 + 4x + m} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5(x^2 + 1)}{mx^2 + 4x + m} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5 - m)x^2 - 4x + (5 - m)}{mx^2 + 4x + m} \geq 0. \qquad (4)$$

Với điều kiện (2), (4) tương đương với

$$(5 - m)x^2 - 4x + (5 - m) \geq 0\ \forall x.$$

Suy ra $\begin{cases} 5 - m > 0 \\ \Delta' = 4 - (5 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \leq 3;\ 7 \leq m. \end{cases}$ (5)

Kết hợp (3) và (5) có điều kiện cho m:

$$2 < m \leq 3.$$

*Cách 2.* Làm như cách 1 đến điều kiện (3): $2 < m$ và biến đổi bất phương trình về dạng

$$5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq m + \frac{4x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow 5 - \frac{4x}{x^2 + 1} \geq m\ \forall x.$$

Khảo sát giá trị bé nhất của hàm số:

$$y = 5 - \frac{4x}{x^2 + 1} \Rightarrow y_{min} = 3.$$

Suy ra điều kiện:

$2 < m \leq 3.$

*Chú ý.* Dễ dàng thấy $2x \leq x^2 + 1\ \forall x \Rightarrow \dfrac{4x}{x^2+1} \leq 2.$

*Bài toán 7.* Xác định a để bất phương trình

$\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2) > 1$ nghiệm đúng $\forall x$. (1)

*Giải:*

*Cách 1.* Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{1}{a+1} > 0 \\ \dfrac{1}{a+1} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a \neq 0. \end{cases}$ (2)

Để khử lôga ta xét:

a) $0 < \dfrac{1}{a+1} < 1 \Leftrightarrow a > 0$:

(1) $\Leftrightarrow x^2 + 2 < \dfrac{1}{a+1}$ : bất phương trình này vô nghiệm vì vế trái $\geq 2$; vế phải $< 1$.

b) $1 < \dfrac{1}{a+1} \Leftrightarrow -1 < a < 0.$ (2')

(1) $\Leftrightarrow x^2 + 2 > \dfrac{1}{a+1}\ \forall x.$

Do $x^2 + 2 \geq 2\ \forall x$ nên suy ra $2 > \dfrac{1}{a+1} \Rightarrow a > -\dfrac{1}{2}$.

*Kết luận:* $-\dfrac{1}{2} < a < 0$ : bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x$.

*Cách 2.* Chú ý rằng hàm $y = \log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2)$ có đối số $x^2 + 2 \geq 2$ và bất phương trình (1): $\log_{\frac{1}{a+1}}(x^2+2) > 1$.

nên hàm số y đồng biến suy ra ngay điều kiện cơ sở $\frac{1}{a+1} > 1$.

*Cách 3.* Biến đổi (1) về dạng

$$\log_{\frac{1}{a+1}} \left[ \frac{x^2 + 2}{1/(a+1)} \right] > 0. \qquad (1')$$

Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số lôgarit ta có:

$$(1') \Leftrightarrow \left( \frac{1}{a+1} - 1 \right) [(a+1) - (x^2+2) - 1] > 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2) \left[ \frac{1}{a+1} - 1 \right] \left[ (a+1) - \frac{1}{x^2+2} \right] > 0. \qquad (3)$$

Biện luận (3) ta cũng được kết luận trên. Chú ý $\frac{1}{x^2+2} \le \frac{1}{2}$, $\forall x$.

*Bài toán 8.* Tìm tất cả x thỏa mãn $0{,}5 < x < 2{,}5$ (2) và nghiệm đúng bất phương trình

$$\log_{3x - x^2} (3a - ax) < 1 \qquad (1)$$

với mọi a thỏa mãn $0 < a < 2$ (3)

*Giải:*

*Cách 1.* Trước hết để ý rằng với x thỏa mãn (2) thì $3x - x^2 \ge 1{,}25 > 1$. Sau nữa từ (2) và (3) suy ra $3a - ax > 0$. Như vậy hàm số ở vế trái (1) luôn được xác định với các điều kiện (2) và (3).

Giải (1). Do nhận xét trên, với x thỏa mãn (2) ta có $3x - x^2 > 1$ nên (1) suy ra

$$3a - ax < 3x - x^2$$

$$\Leftrightarrow (3 - x)(a - x) < 0 \qquad (4)$$

Do (2): $3 - x > 0 \Rightarrow (4) \Leftrightarrow a - x < 0 \Leftrightarrow a < x$. (5)

Từ a thỏa mãn (3) để (5) nghiệm đúng với $\forall a$ ta suy ra: $2 \leq x < 2{,}5$.

Vậy: Với $2 \leq x < 2{,}5$ bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi a thỏa mãn (3).

*Cách 2*. Biến đổi (1):

$$\log_{3x - x^2}(3a - ax) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{3x - x^2}\frac{3a - ax}{3x - x^2} < 0 \qquad (1')$$

Xét tính chất của hàm số lôgarit, (1') tương đương với

$$(3x - x^2 - 1)\left(\frac{3a - ax}{3x - x^2} - 1\right) < 0$$

Kết hợp với các điều kiện (2) - (3) suy ra kết quả cần tìm.

*Bài toán 9*. Giải bất phương trình

$$|x|^{x^2 - x - 2} < 1. \qquad (1)$$

*Giải: Cách 1*. Xét các trường hợp:

* $|x| = 1 \Rightarrow$ (1) có dạng $1 < 1$ vô nghiệm.

* $|x| > 1 \Rightarrow x < -1$ và $1 < x$. (2)

Từ (1) - (2) suy ra

$$x^2 - x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 2. \qquad (3)$$

Kết hợp (2) - (3) ta được nghiệm

$$1 < x < 2. \qquad (4)$$

$$* \begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Từ (1) - (5) suy ra

$$x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow -1 < x \text{ và } 2 < x. \qquad (6)$$

Kết hợp (5) - (6) ta có trường hợp $|x| < 1$ suy ra (1) vô nghiệm.

* $x = 0 \Rightarrow$ vế trái của (1) vô nghĩa.

Kết luận: (1) có nghiệm là $1 < x < 2$.

*Cách 2.* Từ tính chất đồng biến và nghịch biến của hàm số mũ:

$$(1) \Leftrightarrow (|x| - 1)(x^2 - x - 2) < 0 \qquad (1')$$

Giải (1') bằng cách lập bảng

| x | | -1 | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert - 1$ | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | \| | + |
| $x^2 - x - 2$ | + | 0 | - | \| | - | \| | - | 0 | + |
| VT | + | 0 | + | \| | + | 0 | - | 0 | + |

Suy ra nghiệm: $1 < x < 2$.

*Bài toán 10.* Giải các bất phương trình:

a) $|2x^2 - 2x| > x$;

b) $|2x^2 - 2x| \leq x$.

*Giải: Cách 1.* Xét

$$|2x^2 - 2x| = \begin{cases} 2x^2 - 2x \text{ với } x \leq 0 \text{ và } 1 \leq x \\ -2x^2 + 2x \text{ với } 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) * Với $x < 0$ bất phương trình luôn nghiệm đúng.

* Với $x \geq 1$ ta có bất phương trình

$$2x^2 - 2x > x$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x > 0.$$

Suy ra nghiệm $\frac{3}{2} < x$.

* Với $0 < x < 1$: $-2x^2 + 2x > x \Rightarrow 2x^2 - x < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$.

* Với $x = 0$: bất phương trình vô nghiệm.

Kết hợp, bất phương trình có nghiệm:

$$x < 0\,,\quad 0 < x < \frac{1}{2}\ \text{ và }\ \frac{3}{2} < x.$$

b) Do bất phương trình a) và b) là 2 bất phương trình ngược nhau. Từ nghiệm của a) suy ngay ra nghiệm của b):

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\ \text{ và }\ x = 0.$$

*Cách 2.* a) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2 > x \\ 2x^2 - 2x \le -x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \ \text{ và }\ \dfrac{3}{2} < x \\ 0 < x < \dfrac{1}{2}\,. \end{array}\right.$$

Kết luận: Nghiệm của a) là:

$$x < 0\ ;\ 0 < x < \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2} < x.$$

Nghiệm của b) là: $x = 0$ và $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$.

b) Bất phương trình b) suy ra điều kiện $x \ge 0$ và

$$-x \le 2x^2 - 2x \le x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x \ge 0 \\ 2x^2 - 3x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \le 0 : \text{loại } x < 0\ ;\ \dfrac{1}{2} \le x\ ; \\ 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp: được nghiệm của b) là:

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\ \text{ và }\ x = 0.$$

Phủ định b) sẽ suy ra nghiệm của a).

*Cách 3.* Chú ý rằng $|2x^2 - 2x| = |x|\ |2x - 2|$

Suy ra $|x|\ |2x - 2| > x$. Từ đó lý luận các trường hợp để phá giá trị tuyệt đối.

*Bài toán 11.* Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} \le x - 2;$ (1)

b) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2.$ (2)

*Giải: Cách 1.* Điều kiện của căn thức:

$x^2 - 3x - 10 \ge 0 \Rightarrow x \le -2 ;\ 5 \le x.$ (3)

a) Nếu $x - 2 \le 0 \Rightarrow x \le 2$ ta có (1) vô nghiệm. Do (3) xét $x \ge 5$:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 \le (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \le 14.$

Kết luận: Nghiệm của (1) là $5 \le x \le 14$.

b) *Giải* (2). * Nếu $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$ (2) thỏa mãn.

Vậy cùng với (3) ta có $x \le -2$ là một khoảng nghiệm của (2).

* Nếu $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$, do (3)

(2) $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 > (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x > 14.$

*Cách 2.* Nhận xét như ở bài toán 10, ta được ngay kết luận về nghiệm của (2). Trên cơ sở nghiệm của (1) nghiệm của (2) là:

$x \le -2$ và $14 < x$.

*Bài toán 12.* Xác định m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình

$$mx^2 - |m + 1|\, x + 3\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right| \ge 0 \qquad (1)$$

thỏa mãn bất phương trình

$$\frac{1}{\sin mx} < 2 \qquad (2)$$

*Giải:* Xét điều kiện (2): $\sin mx \ne 0$; $mx \ne k\pi$, $k \in Z$.

*Giải (2).*

$$\begin{cases}\sin mx < 0 \\ \sin mx > \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi + 2k_1\pi < mx < 2\pi + 2k_1\pi \\ \dfrac{\pi}{6} + 2k_2\pi < mx < \dfrac{5\pi}{6} + 2k_2\pi.\end{cases} \quad (3)$$

Do (2) ta luôn có điều kiện $m \neq 0$.

Nếu $m > 0$ thì nghiệm của (1) sẽ hoặc là đúng $\forall x$ (trong trường hợp $\Delta \leq 0$) hoặc là 2 khoảng nghiệm $(-\infty, x_1]$ và $[x_2, +\infty)$ - trong trường hợp $\Delta > 0$ nên điều kiện: $\forall$ nghiệm của (1) là nghiệm của (2) không thỏa mãn.

Vậy: bài toán chỉ còn xét trường hợp $m < 0$.

*Cách 1*. Do $m < 0$ nhân 2 vế của (1) với m và đặt $t = mx$, ta có

$$t^2 - |m + 1|t + 3m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right) \leq 0; \quad (1')$$

$$\Delta = (m + 1)^2 - 12m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right) = (2m - 1)^2.$$

a) Nếu $m < -1$: $|m + 1| = -(m + 1)$;

(1') có nghiệm $\dfrac{m - 2}{2} \leq t \leq -\dfrac{3m}{2}$. $\quad$ (4)

b) Nếu $m \geq -1$ thì (1') có nghiệm:

$$\frac{3m}{2} \leq t \leq \frac{2 - m}{2}. \quad (5)$$

Ta thấy rằng: nghiệm của (1) là khoảng (4) hoặc (5) tùy theo m, luôn là khoảng có 2 đầu mút trái dấu. Còn nghiệm của (2) là các khoảng cho bởi (3), là các khoảng có đầu mút cùng dấu (dương hay âm tùy theo việc chọn $k_1$ hoặc $k_2$).

Vậy: Nghiệm của (1) không phải tất cả đều là nghiệm của (2). Hay: không tồn tại m thỏa mãn bài toán đã cho.

*Cách 2.* Xét trong từng trường hợp cụ thể:

a) $m \le -1$: (1) $\Leftrightarrow mx^2 + (m+1)x + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow (mx)^2 + (m+1)(mx) + 3m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right) \le 0$. (1')

Giải (1') theo ẩn $t = mx$ rồi kết hợp với (3).

b) Tương tự a), xét $0 > m \ge -1$ :

(1) $\Leftrightarrow mx^2 - (m+1)x + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right) \ge 0$, $t = mx$

$\Leftrightarrow t^2 - (m+1)t + 3m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m\right) \le 0$. (1")

Giải (1") rồi kết hợp với (3).

*Bài toán 13.* Giải và biện luận bất phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \ge \frac{a}{\sqrt{x}} . \qquad (1)$$

*Giải: Cách 1.* Điều kiện $x > 0$ và $x \ne 1$.

(1) $\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \ge \frac{a}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2x - a(x-1)}{x(x-1)} \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(2x - ax + a) \ge 0$. (2)

* $a = 2$: (2) $\Leftrightarrow 2(x-1) \ge 0 \Rightarrow$ nghiệm $x > 1$.

* $a \ne 2$: Vế trái của (2) có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{a}{a-2}$

So sánh 1 và $\frac{a}{a-2}$: $\frac{a}{a-2} - 1 =$

$= \frac{2}{a-2}$ → $a > 2$: $\frac{a}{a-2} > 1$

→ $a < 2$: $\frac{a}{a-2} < 1$.

*Kết luận:* i) $a > 2: \ 1 < x < \dfrac{a}{a-2}$;

ii) $0 \leq a < 2: \ 1 < x$;

iii) $a < 0: \ 0 < x \leq \dfrac{a}{a-2}$ và $1 < x$;

iv) $a = 2: \ \forall x > 1$ là nghiệm.

*Cách 2.* Nhận xét tam thức vế trái của (2) có 2 nghiệm

$x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{a}{a-2}$ và hệ số của $x^2$ là $2 - a$.

Ta xét bảng sau; theo định lý về dấu của tam thức bậc 2:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a; | 2 - a; | $x_2 = \dfrac{a}{a-2}$; $x_1 = 1$; | nghiệm của (2) |
| $a < 0$; | $2 - a > 0$; | $0 < x_2 < x_1$; | $0 < x < \dfrac{a}{a-2}$ và $1 < x$ |
| $0 \leq a \leq 2$; | $2 - a \geq 0$; | $x_2 < 0 < x_1$; | $1 < x$ |
| $2 < a$; | $2 - a < 0$; | $x_1 = 1 < x_2$; | $1 < x < \dfrac{a}{a-2}$ |

## §3. Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai

*Định lý đảo:* Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Nếu có số $\alpha$ sao cho $a.f(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ và $x_1 < \alpha < x_2$.

Từ định lý trên, ta thấy rằng nếu cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ và số $\alpha$ thì có thể xảy ra các khả năng sau:

1) Nếu $af(\alpha) < 0$ : Lúc đó ta đã biết rằng tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ và $x_1 < \alpha < x_2$.

2) Nếu $af(\alpha) = 0$ : Do $a \neq 0$ nên $f(\alpha) = 0$, tức $\alpha$ trùng với một nghiệm của tam thức.

3) Nếu $af(\alpha) > 0$ : Khi đó ta cần phải quan tâm đến biệt số $\Delta$ của tam thức.

Nếu $\Delta < 0$ : tam thức vô nghiệm, nên việc so sánh số $\alpha$ với các nghiệm của tam thức là vô nghĩa.

Nếu $\Delta \geq 0$ : tam thức có nghiệm và số $\alpha$ nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Nếu $\dfrac{S}{2} - \alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \alpha > 0$ thì $\alpha < x_1 \leq x_2$.

Nếu $\dfrac{S}{2} - \alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \alpha < 0$ thì $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Như vậy, với số $\alpha$ cho trước ta có thể giải quyết bài toán so sánh các nghiệm của một tam thức với số $\alpha$.

Ta hãy xét một số ví dụ minh họa:

*Ví dụ 1.* So sánh các số 1 và 2 với các nghiệm của tam thức $f(x) = x^2 - x - 1$.

*Giải:* Ta có $af(1) = -1 < 0$. Vậy tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và $x_1 < 1 < x_2$.

Ta lại có $af(2) = 1 > 0$; nên số 2 nằm ngoài khoảng hai nghiệm của tam thức. Tóm lại ta có:

$$x_1 < 1 < x_2 < 2.$$

*Ví dụ 2.* Tùy theo các giá trị của tham số m, hãy so sánh số 3 với các nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2(m + 1)x + 5m + 1 = 0.$$

*Giải:* Xét tam thức $f(x) = x^2 - 2(m + 1)x + 5m + 1$. Ở đây, ta cần phải tính

$$\Delta' ;\ af(3) ;\ \frac{S}{2} - 3.$$

Ta có: $\Delta' = m(m - 3)$ ;

$$af(3) = -m + 4 ;$$

$$\frac{S}{2} - 3 = m - 2$$

Kết quả so sánh được tóm tắt trong bảng sau:

| M | $\Delta$ | af(3) | $\frac{S}{2} - 3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | | | |
| | + | + | - | $x_1 < x_2 < 3$ |
| 0 | 0 | | | $x_1 = x_2 < 3$ |
| | - | + | - | |
| 2 | | | 0 | Vô nghiệm |
| | - | + | + | |
| 3 | 0 | | | $3 < x_1 = x_2$ |
| | + | + | + | $3 < x_1 < x_2$ |
| 4 | | 0 | | $3 = x_1 < x_2$ |
| $+\infty$ | + | - | + | $x_1 < 3 < x_3$ |

*Hình 2*

*Ví dụ 3.* Cho phương trình

$$\sin^2 x + m.\sin x - m + 1 = 0.$$

a) Với những giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm?

b) Giải và biện luận phương trình đã cho.

*Giải:* Đặt $\sin x = t \Rightarrow -1 \le t \le 1$. Như vậy, bài toán dẫn đến việc so sánh các nghiệm của tam thức

$$f(t) = t^2 + mt - m + 1$$

với các số -1 và 1.

Ta có $\Delta = m^2 + 4m - 4$ ;

$$af(-1) = -2m + 2;$$

$$af(1) = 2;$$

$$\frac{S}{2} + 1 = \frac{-m + 2}{2};$$

$$\frac{S}{2} - 1 = \frac{-m - 2}{2}.$$

Kết quả so sánh được tóm tắt trong bảng sau:

| m | $\Delta$ | af(-1) | af(1) | $\frac{S}{2}+1$ | $\frac{S}{2}-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | | | | | | |
| | + | + | + | + | + | $1<t_1<t_2$ |
| $-2-\sqrt{8}$ | 0 | | | | | $1<t_1=t_2$ |
| | - | + | + | + | + | |
| -2 | | | | | 0 | Vô nghiệm |
| | - | + | + | + | - | |
| $-2+\sqrt{8}$ | 0 | | | | | $-1<t_1=t_2$ |
| | + | + | + | + | - | $-1<t_1<t_2<1$ |
| 1 | | 0 | | | | $-1=t_1<t_2<1$ |
| | + | - | + | + | - | $t_1<-1<t_2<1$ |
| 2 | | | | | | $t_1<-1<t_2<1$ |
| | + | - | + | - | - | $t_1<-1<t_2<1$ |
| $+\infty$ | | | | | | |

*Hình 3*

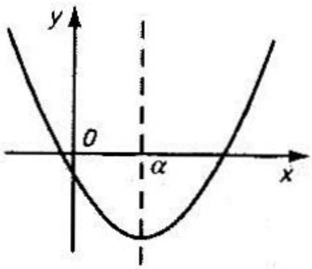
a) Căn cứ vào bảng tóm tắt trên, phương trình đã cho có nghiệm nếu $m \geq -2 + \sqrt{8}$ .

b) Việc giải và biện luận phương trình đã cho cũng được trình bày chi tiết ở bảng trên. Tùy theo giá trị của m, bạn đọc tiếp tục suy ra nghiệm cụ thể của phương trình.

*Chú ý.* Việc lập bảng như đã xét trong các ví dụ trên là phương pháp ưu việt và có giá trị tổng quát, vì nó đã đề cập đến đầy đủ mọi trường hợp. Tuy nhiên, có những bài toán, ta không cần phải lập một bảng đầy đủ như thế mà chỉ cần quan tâm đến những đòi hỏi cụ thể được đặt ra.

**Chúng ta cần nhớ năm định lý sau đây:**

*1. Điều kiện để số α nằm trong khoảng 2 nghiệm của tam thức (hình 4):*

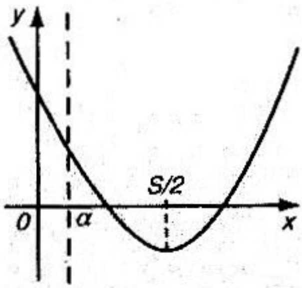



$af(\alpha) < 0$

*Hình 4*

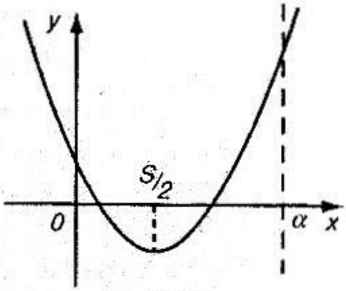
*2. Điều kiện để cả 2 nghiệm của tam thức lớn hơn α* (hình 5):

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha. \end{cases}$$




*Hình 5*

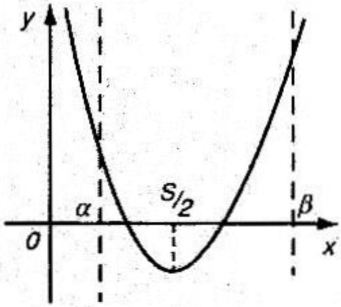
*3. Điều kiện để cả 2 nghiệm của tam thức nhỏ hơn α* (hình 6):




$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha\ . \end{cases}$$

*Hình 6*

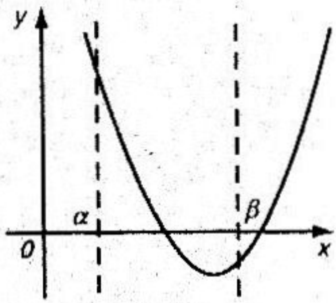
**4.** *Điều kiện để cả hai nghiệm của tam thức nằm trong khoảng* $(\alpha, \beta)$ (hình 7):




$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta. \end{cases}$$

*Hình 7*

**5.** *Điều kiện để trong khoảng* $(\alpha, \beta)$ *tam thức có đúng một nghiệm (còn nghiệm kia nằm ngoài)* (hình 8):




$$f(\alpha)\, f(\beta) < 0.$$

*Hình 8*

Chúng ta hãy xét tiếp một số ví dụ ứng dụng:

*Ví dụ 4.* Cho tam thức:

$$f(x) = x^2 - 6mx + (2 - 2m + 9m^2).$$

a) Với những giá trị nào của m thì tam thức có hai nghiệm và số 4 nằm trong khoảng hai nghiệm.

b) Với những giá trị nào của m thì cả hai nghiệm của tam thức đều lớn hơn 3.

*Giải:* a) Ta cần phải có $af(4) < 0$.

Từ đó suy ra $\dfrac{13 - \sqrt{7}}{9} < m < \dfrac{13 + \sqrt{7}}{9}$.

b) Ta cần phải có

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(3) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 3. \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} 2m - 2 \geq 0 \\ 9m^2 - 20m + 11 > 0 \\ 3m > 3. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là $m > \dfrac{11}{9}$.

Vậy với $m > \dfrac{11}{9}$ thì cả hai nghiệm của tam thức đều lớn hơn 3.

*Ví dụ 5.* Với những giá trị nào của m thì cả hai nghiệm của phương trình: $x^2 - mx + 2 = 0$ đều thuộc khoảng $(0,3)$?

*Giải:* Xét tam thức: $f(x) = x^2 - mx + 2$.

Muốn cả hai nghiệm của tam thức thuộc khoảng $(0,3)$ ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(0) > 0 \\ af(3) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 3 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} m^2 - 8 \geq 0 \\ 2 > 0 \\ 11 - 3m > 0 \\ 0 < \dfrac{m}{2} < 3 \end{cases}$$

$$\text{hay là}\quad \begin{cases} m \le -2\sqrt{2} \text{ hoặc } m \ge 2\sqrt{2} \\ m < \dfrac{11}{3} \\ 0 < m < 6 \end{cases}$$

hay là : $-2\sqrt{2} \le m < \dfrac{11}{3}$.

*Ví dụ 6.* Với những giá trị nào của m thì phương trình $mx^2 + (m - 1)x + 3 = 0$ có hai nghiệm, đồng thời một nghiệm lớn hơn 1, còn nghiệm kia nhỏ hơn $-2$?

*Giải:* Xét tam thức:

$$f(x) = mx^2 + (m - 1)x + 3,$$

với $m \neq 0$

Từ điều kiện của bài toán suy ra số 1 và số -2 phải nằm trong khoảng hai nghiệm của tam thức. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} af(1) < 0 \\ af(-2) < 0 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} m(2m + 2) < 0 \\ m(2m + 5) < 0 \end{cases}$$

$$\text{hay là} \begin{cases} -1 < m < 0, \\ -\dfrac{5}{2} < m < 0 \end{cases}$$

hay là $-1 < m < 0$.

*Ví dụ 7.* Với những giá trị nào của m thì phương trình $9^x - (m - 1)3^x + 2m = 0$ có một nghiệm duy nhất.

*Giải:* Đặt $3^x = u$, $u > 0$ và $9^x = u^2$. Xét tam thức $f(u) = u^2 - (m - 1)u + 2m$. Phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất nếu tam thức có một nghiệm dương duy nhất.

Có ba trường hợp có thể xảy ra:

1) Tam thức có một nghiệm kép dương. Trong trường hợp này, trước hết phải có:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 5 - \sqrt{24}$ hoặc $m = 5 + \sqrt{24}$.

Với $m = 5 - \sqrt{24}$ thì tam thức có nghiệm kép âm;

Với $m = 5 + \sqrt{24}$ thì tam thức có nghiệm kép dương.

Vậy $m = 5 + \sqrt{24}$ là một giá trị phải tìm.

2) Tam thức có một nghiệm dương và một nghiệm âm.

Điều này tương đương với

$$af(0) < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

3) Tam thức có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Trong trường hợp này, trước hết ta phải có

$$f(0) = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Nhưng lúc đó $f(u) = u^2 + u$ không có nghiệm dương. Vậy khả năng này không thể xảy ra.

Tóm lại, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất nếu:

$$m = 5 + \sqrt{24} \text{ hoặc } m < 0.$$

*Ví dụ 8*. Với những giá trị nào của m thì các phương trình

$$m^2 - (m + 1)x + m = 0,$$

$$x^2 + mx + m - 3 = 0$$

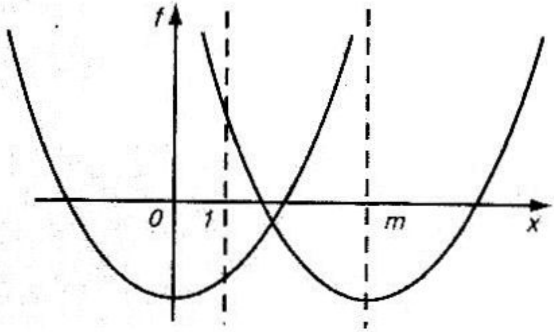
đều có hai nghiệm phân biệt và nghiệm của phương trình này xen kẽ với các nghiệm của phương trình kia.

*Giải:* Dễ thấy phương trình thứ nhất có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = m$ ($m \neq 1$). Trong phương trình thứ hai, gọi:

$$f(x) = x^2 + mx + m - 3.$$

Khi đó muốn thỏa mãn yêu cầu của bài toán ta chỉ cần có

$$f(1).f(m) < 0.$$




*Hình 9*

Từ đó ta suy ra $m < \frac{3}{2}$ $(m \neq 1)$.

*Ví dụ 9.* Với những giá trị nào của m thì phương trình $\log_2(1 - x - x^2) = m - 1 + m^2.\log_{(1-x-x^2)}2$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $0 < x < \frac{1}{2}$ ?

*Giải:* Ta phải có

$$\begin{cases} 1 - x - x^2 > 0 \\ 1 - x - x^2 \neq 1 \end{cases} \text{ hay là } \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \neq 0 \qquad\qquad x \neq -1. \end{cases}$$

Hiển nhiên rằng $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Đặt $\log_2(1 - x - x^2) = t$. Phương trình đã cho có dạng $t = m - 1 + \frac{m^2}{t}$ hay là $t^2 - (m - 1)t - m^2 = 0$. Dễ thấy khi $0 < x < \frac{1}{2}$ thì $-2 < t < 0$. Phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn $0 < x < \frac{1}{2}$ nếu tam thức

$f(t) = t^2 - (m - 1)t - m^2$ có nghiệm thuộc khoảng (-2,0).

Ta xét ba khả năng sau:

1) Cả hai nghiệm của tam thức đều thuộc khoảng (-2,0). Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(0) > 0 \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 0, \end{cases} \qquad \text{hệ này vô nghiệm.}$$

2) Tam thức có đúng một nghiệm thuộc khoảng (-2,0). Điều này tương đương với $f(-2)f(0) < 0$ hay là $(-m^2 + 2m + 2)(-m^2) < 0$ hay là $1 - \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{3}$ $(m \neq 1)$.

3) Tam thức có một nghiệm bằng 0 hoặc có một nghiệm bằng -2 còn nghiệm kia thuộc khoảng (-2,0).

Với $f(0) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Lúc đó $f(t) = t^2 + t$ có thêm nghiệm $t = -1$, hiển nhiên nghiệm này thuộc (-2,0).

Với $f(-2) = 0 \Rightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}$.

Trường hợp này, để ý rằng tam thức có hai nghiệm trái dấu, bởi vậy nghiệm còn lại không thể thuộc khoảng (-2,0).

Tóm lại, kết hợp các kết quả trên, những giá trị m phải tìm là

$$1 - \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{3}.$$

*Nhận xét.* Muốn tìm điều kiện để tam thức có nghiệm thuộc khoảng $(\alpha, \beta)$. Ta cần phải xét ba trường hợp sau:

1) Cả hai nghiệm tam thức đều thuộc $(\alpha, \beta)$.

2) Tam thức có đúng một nghiệm thuộc $(\alpha, \beta)$.

3) Tam thức có một nghiệm bằng $\alpha$ hoặc có một nghiệm bằng $\beta$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $(\alpha, \beta)$.

*Ví dụ 10.* [A - 1976]. Với những giá trị nào của m thì phương trình

$$\cos 2x + \sin^2 x + m.\cos x + 1 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

*Giải:* Phương trình đã cho có dạng

$$\cos^2 x + m\cos x + 1 = 0.$$

Đặt $\cos x = t \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$.

Phương trình đã cho có nghiệm nếu tam thức $f(t) = t^2 + mt + 1$ có nghiệm và thỏa mãn $|t| \leq 1$.

Trước hết, ta tìm những giá trị của m để tam thức có nghiệm $t = 1$ hoặc $t = -1$.

Ta có $f(1) = 0$ khi $2 + m = 0$, tức $m = -2$, vậy với $m = -2$ phương trình đã cho có nghiệm.

$f(-1) = 0$ khi $2 - m = 0$, tức $m = 2$. Phương trình đã cho cũng có nghiệm.

Bây giờ ta xét khi nào thì tam thức có nghiệm thuộc khoảng $(-1,1)$. Có hai khả năng sau đây:

1) Cả hai nghiệm của tam thức thuộc khoảng $(-1,1)$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} < 1, \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} m^2 - 4 \geq 0 \\ 2 + m > 0 \\ 2 - m > 0 \\ -1 < \dfrac{-m}{2} < 1 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình này vô nghiệm.

2) Tam thức có đúng một nghiệm thuộc $(-1,1)$. Điều này tương đương với: $f(-1).f(1) < 0$ hay là

$$(2 + m)(2 - m) < 0 \text{ hay là } |m| > 2.$$

Căn cứ vào các kết quả trên, phương trình đã cho có nghiệm nếu $|m| \geq 2$.

Nhận xét: *Muốn tìm điều kiện để tam thức có nghiệm* *thuộc đoạn $[\alpha,\beta]$, trước hết, xét trường hợp tam thức có nghiệm là $\alpha$ hoặc $\beta$. Tức $f(\alpha) = 0; f(\beta) = 0$.*

*Sau đó, xét trường hợp tam thức có nghiệm trong khoảng $(\alpha,\beta)$. Trong trường hợp này ta xét hai khả năng:*

*1) Có hai nghiệm thuộc khoảng $(\alpha,\beta)$.*

*2) Chỉ một nghiệm thuộc khoảng $(\alpha,\beta)$.*

*Kết hợp các trường hợp trên ta được kết quả cần tìm.*

*Lý luận này cũng được áp dụng tương tự đối với việc tìm điều kiện để tam thức có nghiệm thuộc miền $(-\infty,\alpha]$ hoặc thuộc miền $[\alpha, +\infty]$.*

*Ví dụ 11.* Với những giá trị nào của m thì phương trình:

$$x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

*Giải:* Rõ ràng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$x^2 + mx + 2m + \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

hay là: $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + m(x + \frac{1}{x}) + 2m = 0.$ (1)

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, ta dễ suy ra $|t| \geq 2$ và $x^2 + \frac{1}{x^2} =$
$= t^2 - 2.$

Như vậy, phương trình (1) có dạng:

$$t^2 + mt + 2m - 2 = 0. \qquad (2)$$

Phương trình đã cho có nghiệm nếu phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 2$. (Bạn đọc hãy chứng minh rằng phương trình $x + \frac{1}{x} = t$, với $|t| \geq 2$ luôn có nghiệm $x \neq 0$).

Xét tam thức: $f(t) = t^2 + mt + 2m - 2.$

Để tìm điều kiện tam thức có nghiệm thỏa mãn $|t| \geq 2$ ta phải xét khá nhiều trường hợp.

Ở đây, nếu sử dụng phương pháp "gián tiếp" thì kết quả rất đơn giản.

Thật vậy, ta sẽ tìm điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm (những giá trị còn lại của m sẽ làm cho phương trình đã cho có nghiệm).

Phương trình đã cho vô nghiệm nếu phương trình (2) vô nghiệm hoặc cả hai nghiệm của nó đều nằm trong khoảng (-2,2).

a) Nếu $\Delta = m^2 - 8m + 8 < 0$

tức là $4 - 2\sqrt{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}$ (3)

thì phương trình (2) vô nghiệm. Từ đó suy ra phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

b) Muốn cả hai nghiệm của phương trình (2) đều nằm trong khoảng (-2,2) ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ af(-2) > 0 \\ f(2) > 0, \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} m^2 - 8m + 8 \geq 0, \\ 2 > 0, \\ 4m + 2 > 0, \\ -2 < \dfrac{m}{2} < 2, \end{cases}$$

$$\text{hay là: } \begin{cases} m \leq 4 - 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m \geq 4 + 2\sqrt{2}, \\ 2 > 0, \\ m > -\dfrac{1}{2}, \\ -4 < m < 4. \end{cases}$$

$$\text{hay là: } -\frac{1}{2} < m \leq 4 - 2\sqrt{2}. \qquad (4)$$

Tổng hợp (3) và (4), suy ra với $-\frac{1}{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy, phương trình đã cho có nghiệm nếu

$$m \leq -\frac{1}{2} \text{ hoặc } m \geq 4 + 2\sqrt{2}.$$

*Ví dụ 12.* Chứng minh rằng với mọi m phương trình

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m \text{ luôn luôn có nghiệm.}$$

*Giải:* Để phương trình có nghĩa, ta phải có $\sin x\cos x \neq 0$. (1) Với điều kiện ấy, phương trình đã cho tương đương với: $\sin x + \cos x = m\sin x\cos x$.

Đặt $\sin x + \cos x = t$,

ta dễ suy ra $\begin{cases} \sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2} \\ |t| \leq \sqrt{2}\ ;\ t \neq \pm 1. \end{cases}$

Như vậy, phương trình trở thành

$$t = \frac{m}{2}(t^2 - 1)$$

hay $\quad mt^2 - 2t - m = 0.$ (2)

1) Nếu $m = 0$, khi đó phương trình (2) trở thành $t = \sin x + \cos x = 0$, tức là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, nghiệm này thỏa mãn điều kiện đã đặt ra.

2) Nếu $m \neq 0$, ta sẽ chứng minh rằng phương trình (2) có ít nhất một nghiệm t với $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$ (vì điều kiện (1) chính là $t^2 - 1 \neq 0$).

Thật vậy, phương trình (2) có biệt số: $\Delta' = 1 + m^2 > 0$ nên nó luôn luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1$, $t_2$. Theo định lý Viét ta có: $t_1.t_2 = -1$.

Vì $|t \, . \, t_2| = 1$ nên trong các nghiệm $t_1$, $t_2$ phải có ít nhất một nghiệm có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chẳng hạn đó là $t_1$. Như vậy $|t_1| \leq 1 < \sqrt{2}$. Hiển nhiên rằng phương trình (2) không thể có nghiệm là $t = \pm 1$.

Vậy với $\forall m$ phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm.

*Ví dụ 13.* Cho hai phương trình :

$$\cos 2x + a\cos x + 2 = 0, \qquad (1)$$

$$\cos 2x + b\cos x + 2 = 0, \qquad (2)$$

Biết rằng mỗi phương trình đều có 4 nghiệm phân biệt được thuộc đoạn $[0, 2\pi]$. Chứng minh rằng phương trình: $\cos 2x + (a + b)\cos x + 5 = 0$ vô nghiệm.

*Giải:* Do $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ nên các phương trình (1) và (2) có thể viết lại dưới dạng :

$$2\cos^2 x + a\cos x + 1 = 0,$$

$$2\cos^2 x + b\cos x + 1 = 0.$$

Từ giả thiết suy ra tam thức $f_1(t) = 2t^2 + at + 1$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1, 1)$ tam thức $f_2(t) = 2t^2 + bt + 1$ cũng có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1, 1)$, (với $t = \cos x$).

Như vậy ta có :

$$\begin{cases} f_1(-1) > 0 \\ f_1(1) > 0 \end{cases} \text{ hay là } \begin{cases} 3 - a > 0 \\ 3 + a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(-1) > 0 \\ f_2(1) > 0 \end{cases} \text{ hay là } \begin{cases} 3 - b > 0 \\ 3 + b > 0 \end{cases}$$

Xét phương trình : $\cos 2x + (a + b)\cos x + 5 = 0$, (3)

hay: $2\cos^2 x + (a + b)\cos x + 4$.

Xét tam thức : $f(t) = 2t^2 + (a + b)t + 4$. (4)

Ta có : $f(-1) = 6 - a - b = (3 - a) + (3 - b) > 0$. (5)

$$f(1) = 6 + a + b = (a + 3) + (b + 3) > 0. \qquad (6)$$

Như vậy, nếu gọi $\Delta$ là biệt số của tam thức (4) thì :

a) Nếu $\Delta < 0$ thì hiển nhiên phương trình (3) vô nghiệm.

b) Nếu $\Delta \geq 0$, khi đó do (5) và (6) thì số $-1$ và số 1 nằm ngoài khoảng hai nghiệm của tam thức (4). Lúc đó, có và chỉ có một trong ba khả năng sau:

$$-1 < t_1 \leq t_2 < 1; \; t_1 \leq t_2 < -1; \; 1 < t_1 \leq t_2.$$

Song, theo hệ thức Viét thì $t_1 . t_2 = 2$ cho nên không thể xảy ra khả năng thứ nhất. Với hai khả năng còn lại thì nghiệm của (4) đều không thuộc đoạn $[-1,1]$, tức phương trình (3) vô nghiệm.

*Ví dụ 11.* Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $|a| > |b| + |c|$ thì trong khoảng $(-1,1)$ tam thức có hai nghiệm hoặc không có nghiệm nào.

b) Nếu $|b| > |a| + |c|$ thì trong khoảng $(-1,1)$ tam thức có đúng một nghiệm.

c) Nếu $|c| > |a| + |b|$ thì tam thức không có nghiệm trong khoảng $(-1,1)$.

*Giải:* a) Từ giả thiết $|a| > |b| + |c|$ ta suy ra: $|a| - |c| > |b| \geq 0$. Bình phương hai vế ta được:

$$a^2 + c^2 - 2|ac| > b^2.$$

Do $A \geq -|A|$ nên: $b^2 < a^2 + c^2 - 2|ac| \leq a^2 + c^2 + 2ac = (a + c)^2$. Từ đó $(a + c)^2 - b^2 > 0$ hay là: $(a + b + c)(a - b + c) > 0$ hay là $f(1).f(-1) > 0$. Vậy, trong khoảng $(-1,1)$ tam thức có hai nghiệm hoặc không có nghiệm nào.

b) Từ $|b| > |a| + |c|$ suy ra:

$$b^2 > a^2 + c^2 + 2|ac| \geq a^2 + c^2 + 2ac = (a + c)^2.$$

Như vậy: $(a + c)^2 - b^2 < 0$, hay là $(a + b + c)(a - b + c) < 0$, hay là $f(1)f(-1) < 0$. Vậy trong khoảng $(-1,1)$

tam thức có đúng một nghiệm

c) Từ $|c| > |a| + |b|$, suy ra: $|c| - |a| > |b| \geq 0$. Bình phương hai vế ta được: $c^2 + a^2 - 2|ac| > b^2$.

Tương tự phần (a) suy ra: $(a + c)^2 - b^2 > 0$, hay là $f(1)f(-1) > 0$. Như vậy trong khoảng $(-1,1)$ tam thức có hai nghiệm hoặc không có nghiệm nào. Mặt khác, nếu $\Delta \geq 0$, thì tam thức có hai nghiệm $x_1, x_2$. Theo định lý Viét ta có:

$|x_1 . x_2| = \dfrac{|c|}{|a|} > 1$, như vậy trong $|x_1| . |x_2|$ phải có ít nhất một thừa số lớn hơn 1. Chẳng hạn nếu $|x_1| > 1$. Khi đó cả hai nghiệm đều nằm ngoài khoảng $(-1,1)$.

Vậy tam thức không có nghiệm trong khoảng $(-1,1)$.

*Ví dụ 15.* Cho phương trình

$$x^4 + (1 - 2m)x^2 + m^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Với những giá trị nào của m thì:

a) Phương trình vô nghiệm?

b) Phương trình có đúng một nghiệm?

c) Phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

d) Phương trình có đúng ba nghiệm phân biệt?

e) Phương trình có đúng bốn nghiệm phân biệt?

*Giải:* Đặt $x^2 = y \geq 0$. Phương trình (1) có dạng:

$$f(y) = y^2 + (1 - 2m)y + m^2 - 1 = 0. \qquad (2)$$

Số nghiệm của phương trình (1) tùy thuộc vào số nghiệm không âm của phương trình (2). Phương trình (2) có biệt thức $\Delta = -4m + 5$.

a) Phương trình (1) vô nghiệm nếu phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có cả hai nghiệm đều âm.

α) Phương trình (2) vô nghiệm nếu

$\Delta = -4m + 5 < 0$ hay là $m > \frac{5}{4}$.

β)Phương trình (2) có hai nghiệm đều âm nếu:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(0) > 0 \\ \frac{S}{2} < 0, \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} -4m + 5 \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ \frac{2m-1}{2} < 0 \end{cases}$$

hay là $m < -1$.

Vậy với $m > \frac{5}{4}$ hoặc $m < -1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Phương trình (1) có đúng một nghiệm nếu phương trình (2) có một nghiệm kép $y = 0$ hoặc phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm.

α) Phương trình (2) có nghiệm kép $y = 0$ nếu:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} -4m + 5 = 0 \\ m^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

điều này không thể xảy ra.

β) Phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm nếu :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{S}{2} < 0 \end{cases}$$ hệ này cho ta nghiệm = -1.

Vậy với $m = -1$ phương trình đã cho có đúng một nghiệm.

c) Phương trình (1) có đúng hai nghiệm nếu phương trình (2) có một nghiệm kép dương hoặc phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu.

α) Phương trình (2) có một kép dương nếu

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = \frac{5}{4}$$

β) Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu nếu: af(0)<0 hay là $m^2 - 1 < 0$ hay là $-1 < m < 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm nếu

$m = \dfrac{5}{4}$ hoặc $-1 < m < 1$.

d) Phương trình (1) có đúng ba nghiệm nếu phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Tức là ta phải có: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 1.$

Vậy với m = 1 phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

e) Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm nếu phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt. Tức là ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(0) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0, \end{cases}$$ hệ này có nghiệm $1 < m < \dfrac{5}{4}$.

Vậy với $1 < m < \dfrac{5}{4}$ phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt.

## BÀI TẬP

**1.** Với những giá trị nào của a thì phương trình
$$\sqrt{x - a}\,[x^2 + (1 + 2a^2)x + 2a^2] = 0$$
có hai nghiệm phân biệt? Hãy chỉ rõ các nghiệm đó.

**2.** Với những giá trị nào của m thì phương trình
$$\lg(x^2 + 2mx) - \lg(8x - 6m - 3) = 0$$
có một nghiệm duy nhất ?

**3.** Cho những phương trình
$$(k + 1)x^2 - (8k + 1)x + 6k = 0.$$

a) Chứng minh rằng với mọi $k \neq 0$ phương trình có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0,1)$.

b) Với những giá trị nào của k thì nghiệm lớn của phương trình thuộc khoảng $(0,1)$?

**4.** Với những giá trị nào của m thì phương trình
$$m.4^x - (2m + 1)2^x + m + 4 = 0$$
có hai nghiệm trái dấu?

**5.** Biết rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc khoảng $(\alpha,\beta)$ $(\alpha < \beta)$.

Chứng minh rằng $\begin{cases} (a\alpha^2 + b\alpha + c)(2a\alpha + b) < 0, \\ (a\beta^2 + b\beta + c)(2a\beta + b) > 0. \end{cases}$

**6.** Với những giá trị nào của m thì các phương trình
$$3x^2 + 4mx + m^2 = 0,$$
$$m^2x^2 + 4mx + 3 = 0$$
đều có hai nghiệm phân biệt và nghiệm của phương trình này xen kẽ với các nghiệm của phương trình kia?

**7.** Với những giá trị nào của m thì phương trình $m^2x^2 + mx - 2 = 0$ có một nghiệm có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1 và nghiệm kia có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1?

**8.** Với những giá trị nào của m thì phương trình:

$$m.9^x + 4(m - 1)3^x + m = 0 \text{ có nghiệm ?}$$

**9.** Với những giá trị nào của m thì phương trình:

$$x^2 + (x + 1)^2 = \frac{m}{x^2 + x + 1} \text{ có nghiệm ?}$$

**10.** Với những giá trị nào của a thì phương trình:

$$(1 + a).\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 - 3a\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) + 4a = 0$$

có nghiệm?

**11.** Với những giá trị nào của a thì phương trình:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (1 - 3a).\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3a = 0 \text{ có nghiệm?}$$

**12.** Với những giá trị nào của a thì phương trình:

$x + \sqrt{1 - x^2} = a$ có nghiệm?

**13.** Với những giá trị nào của m thì phương trình:

$x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1 = 0$ có:

a) Hai nghiệm phân biệt? b) Bốn nghiệm phân biệt?

**14.** Với những giá trị nào của a thì phương trình: $ax^4 - (a - 3)x^2 + 3a = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, đồng thời một nghiệm nhỏ hơn -2 còn ba nghiệm kia lớn hơn -1?

**15.** Với những giá trị nào của m thì các phương trình sau có nghiệm:

a) $\cos^4x - 2\sin^2x + m^2 = 0$ ;

b) $\sin^4x + \cos^4x + m.\sin x \cos x = 0$ ;

c) $2^{\sin^2x} + 2^{\cos^2x} = m$;

d) $\cot g x = m\sin x$?

**16.** Với những giá trị nào của a thì cả hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ đều nằm trong khoảng hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2(a + 1)x + a(a - 1) = 0 \text{ ?}$$

**17.** Giả sử a, b, c là những số khác không. Chứng minh rằng với mọi p, q phương trình:

$$\frac{a^2}{x - p} + \frac{b^2}{x - q} = c$$

luôn luôn có nghiệm.

**18.** Cho 4 số $a < b < c < d$. Chứng minh rằng phương trình :

$(x - a)(x - c) + m(x - b)(x - d) = 0$ luôn có nghiệm với $\forall$ m.

**19.** Với những giá trị nào của m thì phương trình:

$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = m$ có nghiệm?

**20.** [B - 1972] Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ x^2 - y + m = 0. \end{cases}$$

**21.** Giải và biện luận phương trình:

$$(2x^2 - x)^2 + (2m^2 - m)(2x^2 - x) - 2m^3 = 0.$$

**22.** Giả sử $x_1 \neq 0$ là nghiệm của phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ và $x_2 \neq 0$ là nghiệm của phương trình: $-ax^2 + bx + c = 0$ $(x_1 < x_2)$. Chứng minh rằng phương trình $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ có đúng một nghiệm nằm trong $(x_1, x_2)$.

**23*.** Giả sử $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0,1)$.

**24*.** Chứng minh rằng nếu các số a, b, c thỏa mãn hệ thức:

$\frac{a}{m + 2} + \frac{b}{m + 1} + \frac{c}{m} = 0$ với $m > 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0,1)$.

**25*.** Giả sử $|b| > |a| + 1$. Chứng minh rằng phương trình $1 + a\cos x + b\cos 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0,\pi)$.

**26*.** Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm và tam thức $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ có nghiệm; đồng thời khoảng các nghiệm của tam thức chứa khoảng $(0,2)$. Chứng minh rằng phương trình $a\varphi(0)x^2 + b\varphi(1)x + c\varphi(2) = 0$ có nghiệm.

**27*.** (Thi học sinh giỏi lớp 10 toàn miền Bắc 1963). Cho hai số a, b thỏa mãn: $a \geq b > 0$ và $a + b = 1$.

a) Chứng minh rằng nếu m và n là những số nguyên dương và $m < n$ thì $a^m - a^n \geq b^m - b^n > 0$.

b) Với số nguyên dương n, ta lập tam thức $f_n(x) = x^2 - b^n x - a^n$. Chứng tỏ rằng tam thức $f_n(x)$có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-1,1)$.

## §4. Dấu của tam thức trên một miền

Ta đã biết rằng muốn tam thức bậc hai $f(x) = ax^2+bx+c$ luôn luôn dương với mọi x cần phải có

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Tương tự, muốn $f(x) < 0$ với mọi x ta phải có:

$$\begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Song trong thực tế có nhiều bài toán chỉ đòi hỏi điều kiện $f(x) > 0$ (hoặc $f(x) < 0$) trên một đoạn $[\alpha,\beta]$ nào đó hoặc trên một miền $(-\infty,\alpha]$; $[\beta, +\infty)$ nào đó. Rõ ràng yêu cầu này "yếu" hơn so với yêu cầu ở trên nhiều. Bởi vì có những tam thức f(x) không thể luôn luôn dương với mọi x nhưng có thể luôn luôn dương với mọi x thuộc một đoạn $[\alpha,\beta]$ nào đó. Các bài toán thi tuyển sinh đại học trong các năm 76, 77, 78, 82 là những bài toán điển hình về loại này. Để giải các bài toán đó phương pháp chủ yếu là ứng dụng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai trong việc so sánh các nghiệm của một tam thức với các số α, β.

*Ví dụ 1.* Cho tam thức $f(x) = x^2 - (3m + 1)x + m$.

a) Với những giá trị nào của m thì $f(x) > 0$ với mọi x?

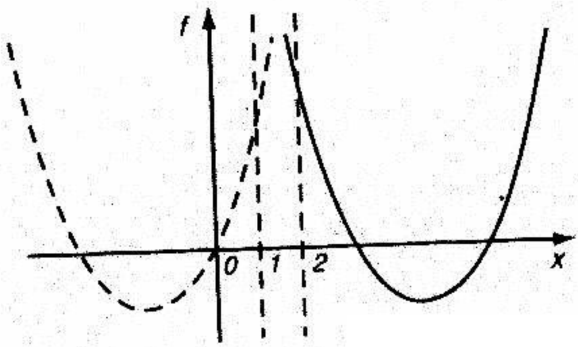
b) Với những giá trị nào của m thì $f(x) > 0$ với mọi x trên đoạn [1, 2]?

*Giải:* a) Biệt số của tam thức $\Delta = 9m^2 + 2m + 1 > 0$ với mọi giá trị của m. Do đó f(x) không thể dương với mọi x. Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu của đầu bài.

b) Để ý rằng tam thức luôn có hai nghiệm phân biệt cho nên muốn $f(x) > 0$ với mọi x thuộc đoạn [1,2] thì cả hai nghiệm của tam thức phải nhỏ hơn 1 hoặc cả hai nghiệm phải lớn hơn 2 *(Hình 10)*.

Điều kiện để cả hai nghiệm cùng nhỏ hơn 1 là:

$$\begin{cases} af(1) > 0, \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \text{ hay là } \begin{cases} m < 0, \\ m < \dfrac{1}{3}, \end{cases} \text{ hay là } m < 0.$$




*Hình 10*

Điều kiện để cả hai nghiệm cùng lớn hơn 2 là:

$$\begin{cases} af(2) > 0, \\ \dfrac{S}{2} > 2 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} m < \dfrac{2}{5}, \\ m > 1. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Vậy với $m < 0$ thì $f(x) > 0$, với mọi x thuộc đoạn [1,2].

Bạn đọc hãy so sánh hai kết quả trên!

*Ví dụ 2:* [A - 1978] Với những giá trị nào của m thì

$$\cos 2x + m\cos x + 4 \geq 0, \text{ với mọi } x?$$

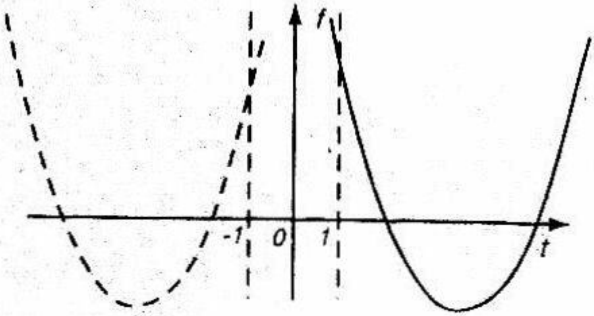
*Giải :* Thay $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Ta phải tìm m để:

$$2\cos^2 x + m\cos x + 3 \geq 0, \text{ với mọi } x.$$

Hay là $f(t) = 2t^2 + mt + 3 \geq 0$ ($t = \cos x$), với mọi t thuộc đoạn $[-1,1]$. Ta có biệt số của tam thức $\Delta = m^2 - 24$. Ta phân bài toán thành hai trường hợp:

a) Nếu $\Delta \leq 0$, tức là $|m| \leq \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, thì $f(t) \geq 0$ với mọi t. Từ đó suy ra $f(t) \geq 0$ cũng với mọi t trên đoạn $[-1,1]$. Vậy $|m| \leq 2\sqrt{6}$ (1) thỏa mãn yêu cầu của đầu bài.

b) $\Delta > 0$, tức là $|m| > 2\sqrt{6}$, thì f(t) có hai nghiệm phân biệt. Muốn thỏa mãn yêu cầu của bài toán thì cả hai nghiệm của tam thức phải cùng nhỏ hơn hoặc bằng -1 hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 1 *(Hình 11)*.




*Hình 11*

Điều kiện để cả hai nghiệm cùng nhỏ hơn hoặc bằng -1:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} < -1. \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} |m| > 2\sqrt{6} \\ m \leq 5 \\ m > 4 \end{cases}$$

hay $2\sqrt{6} < m \leq 5$. (2)

Điều kiện để cả hai nghiệm cùng lớn hơn hoặc bằng 1:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} |m| > 2\sqrt{6} \\ m \geq -5 \\ m < -4, \end{cases}$$

hay $-5 \leq m < -2\sqrt{6}$. (3)

Các kết quả (1), (2) và (3) đều thỏa mãn điều kiện của đầu bài. Nói tóm lại ta phải có $|m| \leq 5$ thì

$$\cos 2x + m\cos x + 4 \geq 0 \text{ với mọi x.}$$

*Ví dụ 3*. Với những giá trị nào của m thì

$$\frac{1}{3}\sin 3x + m\sin 2x + \sin x \geq 0$$

với mọi x trong khoảng $[0,\pi]$ ?

*Giải*: Ta có :

$$\frac{1}{3}\sin 3x + m\sin 2x + \sin x = \frac{1}{3}(3\sin x - 4\sin^3 x) +$$

$$+ 2m\sin x\cos x + \sin x = -\frac{4}{3}\sin^3 x + 2m\sin x\cos x +$$

$$+ 2\sin x = \sin x\,[-\frac{4}{3}\sin^2 x + 2m\cos x + 2] =$$

$$= \sin x\,[\frac{4}{3}\cos^2 x + 2m\cos x + \frac{2}{3}].$$

Do $\sin x \geq 0$, với mọi x thuộc đoạn $[0, \pi]$ nên ta chỉ cần tìm m sao cho

$$\frac{4}{3}\cos^2 x + 2m\cos x + \frac{2}{3} \geq 0,$$

với mọi x thuộc đoạn $[0, \pi]$.

Hay $2\cos^2 x + 3m\cos x + 1 \geq 0$, với mọi x thuộc đoạn $[0,\pi]$.

Hay $f(t) = 2t^2 + 3mt + 1 \geq 0$ với mọi t thuộc đoạn $[-1,1]$.

Đến đây lý luận tương tự như trong ví dụ 2, ta có kết quả: $|m| \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Tuy nhiên đối với đặc điểm của bài toán này ta có thể lý luận gọn hơn bằng cách nhận xét rằng: khi tam thức f(t) có nghiệm $t_1$ và $t_2$, theo định lý Viét, ta có $t_1 . t_2 = \frac{1}{2} < 1$ nên không thể xảy ra trường hợp cả hai nghiệm cùng lớn hơn hoặc bằng 1, hoặc cả hai nghiệm cùng nhỏ hơn hoặc bằng $-1$.

*Ví dụ 4.* Với những giá trị nào của m thì một nghiệm bất kỳ của bất phương trình $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ (1) đều lớn hơn một nghiệm bất kỳ của bất phương trình

$$3x^2 - 2(m + 1)x - (2m^2 - 3m + 2) \leq 0 ? \qquad (2)$$

*Giải :* Bất phương trình (1) có nghiệm là

$$2 \leq x \leq 3.$$

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2(m + 1)x - (2m^2 - 3m + 2)$, tam thức này có $\Delta' = 7(m^2 - m + 1) > 0\ \forall m$. Vậy tam thức luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ ($x_1 < x_2$) và nghiệm của bất phương trình (2) là $x_1 < x < x_2$. Muốn thỏa mãn yêu cầu của bài toán thì ta cần phải có: $x_1 < x_2 < 2$.

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2m^2 - m + 6) > 0 \\ \dfrac{\quad}{3} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 < m < \frac{3}{2}.$$

Vậy những giá trị m cần tìm là:

$$-2 < m < \frac{3}{2} \quad .$$

*Ví dụ 5.* Với những giá trị nào của m thì

$$f(x) = mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$$

với mọi giá trị của $x > 0$?

*Giải:* Ở đây hệ số của $x^2$ có chứa tham số m, nên ta cần phân biệt các trường hợp về dấu của nó:

a) Nếu $m < 0$, thì tam thức f(x) luôn luôn âm hoặc chỉ có thể dương trong một khoảng hữu hạn mà thôi, đó là khoảng giữa 2 nghiệm, nếu có, của tam thức. Do đó trường hợp này không thể thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

b) Nếu $m = 0$, thì tam thức có dạng

$$f(x) = -4x + 1.$$

f(x) chỉ > 0 với mọi $x < \frac{1}{4}$ , do đó f(x) không thể dương với mọi $x > 0$. Vậy $m = 0$ cũng bị loại.

c) Nếu $m > 0$, ta xét biệt số của tam thức:

$$\Delta' = -3m^2 - m + 4.$$

Lúc này dấu của f(x) còn phụ thuộc vào dấu của $\Delta'$.

Nếu $\Delta' < 0$, tức là $m > 1$ (chú ý rằng $m > 0$, thì $f(x) > 0$

với mọi x, nên $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Vậy $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Nếu $\Delta' \geq 0$, tức là $0 < m \leq 1$ (chú ý rằng ta đang có $m > 0$) thì tam thức có 2 nghiệm. Muốn thỏa mãn yêu cầu của bài toán thì cả hai nghiệm của tam thức phải không dương. Tức là ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} \leq 0, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ m(3m+1) \geq 0, \\ \dfrac{2}{m} \leq 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Tóm lại, với $m > 1$, thì $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

*Ví dụ 6*: Với những giá trị nào của m thì bất kỳ một giá trị x nào cũng đều là nghiệm của ít nhất một trong hai bất phương trình

$$x^2 - 4 < 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0\ ? \qquad (2)$$

*Giải:* Nghiệm của bất phương trình (1) là $-2 < x < 2$. Muốn thỏa mãn yêu cầu của bài toán thì những x mà $|x| \geq 2$ phải là nghiệm của (2). Tức $f(x) = x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0$ với mọi x thỏa mãn $|x| \geq 2$.

Tam thức f(x) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3m - 2$. Vậy điều kiện trên tương đương với nghiệm $x_2 = 3m - 2$ phải nhỏ hơn 2 và lớn hơn -2. Tức là phải có $-2 < 3m - 2 < 2$ hay $0 < m < \dfrac{4}{3}$.

Vậy những giá trị m phải tìm là $0 < m < \dfrac{4}{3}$.

*Ví dụ 7*. [AB - 1982] a) Giải bất phương trình:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12. \qquad (1)$$

b) Tìm tham số m để mọi nghiệm của bất phương trình (1) đều là nghiệm của bất phương trình:

$$(m - 2)^2x^2 - 3(m - 6)x - m - 1 < 0. \qquad (2)$$

*Giải:* a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ tương đương với:

$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 12 > 0$, điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = t$; $t > 0$. Ta có

$$t^2 + t - 12 > 0.$$

Giải ra ta được $t < -4$; $t > 3$.

Do $t > 0$ nên nghiệm của bất phương trình là $t > 3$

hay $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

Vì cơ số $\frac{1}{3} < 1$, nên bất phương trình tương đương với $\frac{1}{x} < -1$,

hay $\frac{1}{x} + 1 < 0$,

hay $\frac{x+1}{x} < 0$, hay $-1 < x < 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $-1 < x < 0$.

b) Xét các trường hợp khác nhau của hệ số của $x^2$ trong bất phương trình (2).

Nếu $m - 2 = 0$ hay $m = 2$, thì (2) có dạng $12x - 3 < 0$ và có nghiệm là $x < \frac{1}{4}$. Khi đó rõ ràng nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) và $m = 2$ là một trong những giá trị phải tìm.

Nếu $m - 2 \neq 0$ hay $m \neq 2$, thì hệ số a của bất phương trình (2) dương. Vậy, muốn mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) (tức là khoảng $(-1,0)$ phải nằm trong khoảng nghiệm của bất phương trình (2)) điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} m^2 - 2m - 15 \leq 0, \\ -m - 1 \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq m \leq 5 \\ m \geq -1, \end{cases} \quad \text{hay} \quad -1 \leq m \leq 5,$$

(chú ý rằng lúc này $m \neq 2$).

Vậy với mọi m mà $-1 \leq m \leq 5$, thì nghiệm của bất phương trình (1) cũng là nghiệm của bất phương trình (2), (vì theo chứng minh trên $m = 2$ cũng là một giá trị phải tìm).

*Ví dụ 8.* a) Với những giá trị nào của a thì mọi nghiệm của bất phương trình

$$ax^2 - x + 1 - a < 0 \qquad (1)$$

đều thỏa mãn bất phương trình $0 < x < 1$. (2)

b) Với những giá trị nào của a thì mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1).

*Giải*: Giả sử $a = 0$, lúc đó bất phương trình (1) có dạng $-x + 1 < 0$ và nghiệm của nó là $x > 1$. Rõ ràng rằng nghiệm đó không thể thỏa mãn bất phương trình (2).

Giả sử $a < 0$. Xét tam thức $f(x) = ax^2 - x + 1 - a$. Chú ý rằng khi $a < 0$ thì tam thức f(x) có biệt số:

$\Delta = (1 - 2a)^2 > 0$ nên tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$. Từ đó suy ra nghiệm của bất phương trình (1) trong trường hợp này là các khoảng $(-\infty, x_1)$; $(x_2, +\infty)$. Vậy, nghiệm của bất phương trình (1) không thể thỏa mãn bất phương trình (2).

Giả sử $a > 0$, lúc đó (1) chỉ có nghiệm khi $\Delta > 0$; đó là khoảng $(x_1, x_2)$. Muốn mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) thì $x_1$ và $x_2$ đều phải thuộc [0,1], tức là phải có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0, \\ af(0) \geq 0, \\ af(1) \geq 0, \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 - 4a + 1 > 0 \\ a(1 - a) \geq 0 \\ a.0 \geq 0, \\ 0 < \dfrac{1}{2a} < 1. \end{cases}$$

Giải ra ta có $\frac{1}{2} < a \leq 1$. Đó là các giá trị phải tìm.

*Chú ý.* Khi $a > 0$: Có thể giải bằng cách nhận xét rằng tam thức f(x) luôn có một nghiệm $x_1 = 1$, với mọi giá trị của $a > 0$. Do đó, muốn thỏa mãn đòi hỏi của bài toán thì nghiệm còn lại $x_2 = \frac{1 - a}{a}$ phải thỏa mãn điều kiện

$$0 \leq \frac{1 - a}{a} < 1$$

hay $\frac{1}{2} < a \leq 1$.

b) Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tìm a để $f(x) = ax^2 - x + 1 - a < 0$ với mọi x thuộc (0,1).

* Nếu $a = 0$, thì $f(x) = -x + 1 < 0$, khi $x > 1$.

Khi đó không thể thỏa mãn được bất phương trình $f(x) < 0$ với mọi x thuộc (0,1).

* Nếu $a > 0$, thì khi đó muốn thỏa mãn yêu cầu trên, ta phải có $x_2 = \frac{1-a}{a} \leq 0$ (do f(x) luôn có một nghiệm $x_1 = 1$). Từ đó suy ra $a \geq 1$ (chú ý rằng $a > 0$).

* Nếu $a < 0$ thì khi đó muốn thỏa mãn yêu cầu trên ta phải có $x_2 = \frac{1-a}{a} > 1$ hay là: $0 < a < \frac{1}{2}$. Như vậy không có giá trị $a < 0$ nào thỏa mãn.

Tóm lại: Với $a \geq 1$, thì mọi nghiệm của (2) đều là nghiệm của (1).

## BÀI TẬP

**1.** Với những giá trị nào của m thì

$$\cos^2 x + 2m\cos x + m + 2 \geq 0$$

với mọi giá trị của x?

**2.** Tìm tất cả các giá trị của m để

$$m\cos 2x + 2\cos x + 1 > 0, \text{ với mọi giá trị của x.}$$

**3.** Cho bất phương trình: $2 + \sin^2 x \geq m\cos x$.

a) Giải bất phương trình khi $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Với những giá trị m nào thì bất phương trình được nghiệm đúng với mọi x?

**4.** Tìm a để: $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0$, với mọi x thuộc đoạn [2, 3].

**5.** Với những giá trị nào của a thì

$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$ khi x thuộc đoạn [1,2]?

**6.** Tìm các giá trị của m để $(x^2 + x - 1).(x^2 + x + m) \geq 0$ với bất kỳ giá trị nào của x.

**7.** Với những giá trị nào của m thì

$$\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2 + 2m\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) + m + 2 \geq 0 \text{ với mọi } x?$$

**8.** Tìm m để với mọi x thuộc đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ ta luôn có $\sin 3x + m\sin 2x + 3\sin x \geq 0$.

**9.** Với những m nào thì bất kỳ một giá trị x nào cũng đều là nghiệm của ít nhất một trong hai bất phương trình

$$x^2 - 6mx + 5m^2 + 8m - 4 > 0,$$

$$x^2 - 4mx + 4m^2 - m \geq 0?$$

**10.** Với những giá trị nào của k thì

$$\left|\frac{\sin^2 x - k\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}\right| < 3 \text{ với mọi } x?$$

**11.** Tìm tất cả các giá trị a, b sao cho

$$|\cos 2x + a\cos x + b - 1| \leq 1 \text{ với mọi } x.$$

**12.** Cho bất phương trình

$$(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 3 > 0.$$

a) Với những giá trị nào của a thì bất phương trình được nghiệm đúng với mọi $x < 1$?

b) Với những giá trị nào của a thì bất phương trình thỏa mãn với ít nhất một giá trị của $x < 1$?

**13.** a) Giải bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$.

b) Với những giá trị nào của a thì mọi nghiệm của bất phương trình trên cũng là nghiệm của bất phương trình $ax^2 - (3a + 1)x + 3 > 0$?

**14.** Cho hai bất phương trình:

$$x^2 - a(a^2 + 1)x + a^2 < 0, \quad (1)$$

và $$x^2 + 4x + 3 > 0. \quad (2)$$

a) Với những giá trị nào của a thì mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)?

b) Với những giá trị nào của a thì mọi nghiệm của (2) cũng là nghiệm của (1)?

**15.** a) Giải bất phương trình $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$. (1)

b) Với những giá trị nào của m thì mỗi nghiệm của bất phương trình (1) cũng là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - m^4 + 1 \geq 0$?

**16.** Với giá trị nào của m thì bất phương trình

$4^x - m.2^x - m + 3 \leq 0$ có ít nhất 1 nghiệm?

**17.** Với những giá trị nào của m thì bất phương trình

$\cos^2x + 2m\cos x + 1 \leq 0$ có nghiệm?

**18*.** Với những giá trị nào của m thì

$x^3 + (m + 1)x^2 - 4x - 4(m + 1) \geq 0$ với mọi $x > 0$?

**19*.** Với những giá trị của α và x thì bất phương trình $\log_2x + \log_x2 + 2\cos\alpha \leq 0$ được nghiệm đúng ?

**20*.** Xác định các giá trị của x sao cho:

$x^2 + 2x(\sin\alpha + \cos\alpha) + 1 \geq 0$ với mọi α.

**21*.** Với những giá trị nào của a thì giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x^2 + |x - a|$ lớn hơn 1?

**22*.** Với những giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = |x^2 - 4x + 3| + mx$ lớn hơn 1?

**23*.** Với những giá trị nào của a thì giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x^2 + 2|x + a - 1| + (a + 1)^2$ nhỏ hơn 3?

**24.** Chứng minh rằng nếu $a\cos 2x + b\cos x + 1 \geq 0$ với mọi x thì ta có $|a| + |b| \leq 2$.

## §15. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số

Trong phần này, chúng ta ứng dụng tính chất định tính và định hình của tam thức bậc hai để nghiên cứu giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một số hàm số.

*Ví dụ 1.* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$F(x) = \cos 2x + \cos x.$$

*Giải:* Ta có $F(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

Đặt $\cos x = t$, ta được:

$$f(t) = 2t^2 + t - 1;\ |t| \leq 1.$$

Hoành độ đỉnh của parabol $t_o = -\dfrac{1}{4}$, thuộc đoạn $[-1, 1]$ (hình 12).

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

$$f_{min} = f(t_o) = f(-\frac{1}{4}) = -\frac{9}{8}.$$

Ta có $f(-1) = 0$;

$f(1) = 2$.

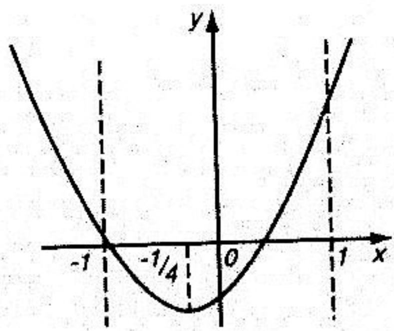
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là:

$f_{max} = \max\{f(-1), f(1)\} = 2$.

Tóm lại: Giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

$$f_{min} = -\frac{9}{8}$$

đạt được khi $\cos x = -\dfrac{1}{4}$.




*Hình 12*

Giá trị lớn nhất của hàm số là $f_{max} = 2$ đạt được khi $\cos x = 1$.

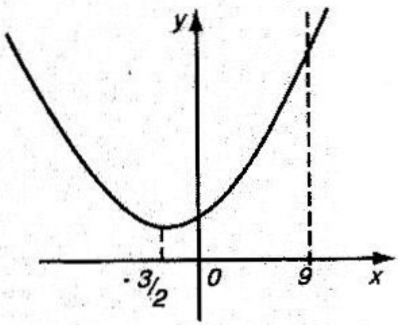
*Ví dụ 2.* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$F(x) = x^4 + 3x^2 + 2 \text{ với } -2 \le x \le 3$$

*Giải* : Đặt $x^2 = t$. Khi đó ta có hàm số:

$$f(t) = t^2 + 3t + 2,\ 0 \le t \le 9.$$

Hoành độ đỉnh của parabol $t_o = -\dfrac{3}{2}$, nằm về bên trái đoạn [0,9] (không nằm trong đoạn đang xét).




*Hình 13*

Ta có: $f(0) = 2$; $f(9) = 110$ (hình 13). Vậy: Giá trị nhỏ nhất của hàm số là:

$f_{min} = \min\{f(0); f(9)\} = 2$, đạt được khi $t = 0$, tức khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là:

$f_{max} = \max\{f(0); f(9)\} = 110$, đạt được khi $t = 9$, tức khi $x = 3$.

***Chú ý.*** *Với hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ xét trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Muốn tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, ta cần phân biệt hai trường hợp:*

*1) Nếu hoành độ đỉnh của parabol $x_o = -\dfrac{b}{2a}$ thuộc $[\alpha, \beta]$, thì* $f_{min} = f(x_o)$; $f_{max} = \max\{f(\alpha); f(\beta)\}$.

*2) Nếu hoành độ đỉnh của parabol $x_o = -\dfrac{b}{2a}$*

*không thuộc $[\alpha, \beta]$ thì* $f_{min} = \min \{f(\alpha), f(\beta)\}$, $f_{max} = \max \{f(\alpha), f(\beta)\}$.

*Với $a < 0$, chúng ta cũng xét tương tự.*

*Ví dụ 3.* Giả sử $a \geq b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $F(x) = a\sin^4x + b\cos^4x$.

*Giải : Ta có :* $\sin^4x = (1 - \cos^2x)^2 = \cos^4x - 2\cos^2x + 1$. Vậy $F(x) = (a + b)\cos^4x - 2a\cos^2x + a$.

Đặt $\cos^2x = t$, ta được :

$$f(t) = (a + b)t^2 - 2at + a \; ; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ta có hoành độ đỉnh parabol $t_o = \dfrac{a}{a+b}$, thuộc đoạn $[0,1]$.

Vậy $f_{min} = f(t_o) = \dfrac{ab}{a+b}$

Ta có : $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Vậy $f_{max} = \max \{f(0), f(1)\} = a$.

Vậy $\begin{cases} f_{min} = \dfrac{ab}{a+b}, \text{ đạt được khi } \cos^2x = \dfrac{a}{a+b}, \\ f_{max} = a, \text{ đạt được khi } \cos x = 0. \end{cases}$

*Ví dụ 4.* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$F(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

*Giải:* $F(x) = (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3) =$
$= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)$.

Đặt $x^2 - 5x + 4 = t$, ta có $t \geq -\dfrac{9}{4}$.

Hoành độ đỉnh của parabol $t_o = -1 > -\dfrac{9}{4}$.

Vậy $f_{min} = f(-1) = -1$,

đạt được khi $x^2 - 5x + 4 = -1$, tức khi $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Trong trường hợp này hàm số không có giá trị lớn nhất (vì khi $t \to +\infty$, thì $f(t) \to +\infty$).

*Ví dụ 5.* Giả sử $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2(m - 2)x - 3m + 10 = 0$. Xác định m sao cho biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ là nhỏ nhất.

*Giải*: Trước hết ta hãy tìm điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm. Ta phải có: $\Delta' \geq 0$ hay là $m^2 - m - 6 \geq 0$, hay là $m \leq -2$ hoặc $m \geq 3$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m - 2)^2 - 2(10 - 3m) = 4m^2 - 10m - 4$.

Xét $f(m) = 4m^2 - 10m - 4$; $m \leq -2$ hoặc $m \geq 3$.

Ta có hoành độ đỉnh của parabol $m_o = \frac{5}{4}$, không thuộc vào miền đang xét.

Vậy $f_{min} = \min\{f(-2), f(3)\} = \min\{32, 2\} = 2$.

Vậy khi $m = 3$, thì $x_1^2 + x_2^2$ là nhỏ nhất.

*Ví dụ 6.* Giả sử $x, y \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$p(x,y) = 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10.$$

*Giải:* Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, khi đó

$|t| \geq 2$ và $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$.

Biểu thức đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$P(t) = 3t^2 - 8t + 4; \quad |t| \geq 2.$$

Hoành độ đỉnh của parabol $t_o = \frac{8}{6}$, không thuộc miền đang xét. Vậy:

$$P_{min} = \min\{P(-2), P(2)\} = \min\{32,0\} = 0.$$

Vậy p(x,y) nhỏ nhất bằng 0 khi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$, tức là khi $x = y$.

*Ví dụ 7.* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin^4x + \cos^4x + a\sin x\cos x$, trong đó a là tham số.

*Giải:* Ta có

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Vậy, hàm số đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y = -\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{a}{2}\sin 2x + 1.$$

Đặt $\sin 2x = t$, ta được:

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{a}{2}t + 1; \quad |t| \leq 1.$$

Hoành độ đỉnh của parabol là $t_o = \frac{a}{2}$. Ta phân biệt hai trường hợp sau đây:

1) Nếu $-1 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, tức là $|a| \leq 2$, thì:

$$f_{max} = f(\frac{a}{2}) = \frac{a^2 + 8}{8};$$

$$f_{min} = \min\{f(-1), f(1)\} = \min\{\frac{1 + a}{2}, \frac{1 - a}{2}\} =$$

$$= \frac{1 - |a|}{2}.$$

2) Nếu $\frac{a}{2} < -1$ hoặc $\frac{a}{2} > 1$, tức là $|a| > 2$, thì:

$$f_{max} = \max\{(-1), f(1)\} = \max\left\{\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1+|a|}{2},$$

$$f_{min} = \min\{f(-1), f(1)\} = \min\left\{\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1-|a|}{2}.$$

Tóm lại:

$$\text{Giá trị lớn nhất} = \begin{cases} \dfrac{a^2+8}{8} & \text{nếu } |a| \le 2, \\ \dfrac{1+|a|}{2} & \text{nếu } |a| > 2. \end{cases}$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất} = \frac{1-|a|}{2}.$$

*Ví dụ 8.* Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = |x-3| + |x+5|.$$

*Giải:* Ta có

$$|x-3| + |x+5| = |-x+3| + |x+5| \ge$$

$$\ge |-x+3+x+5| = 8.$$

Vậy $y \ge 8$. Dấu bằng xảy ra khi $(-x+3)$ và $(x+5)$ cùng dấu, tức là khi $(-x+3)(x+5) \ge 0$, hay là $-5 \le x \le 3$.

Vậy $y_{min} = 8$ khi $-5 \le x \le 3$.

*Chú ý.* Ta có $|A+B| \le |A| + |B|$ (*). Thực vậy: Bất đẳng thức (*) tương đương với:

$$A^2 + B^2 + 2AB \le A^2 + B^2 + 2|AB|$$

hay là: $2AB \le 2|AB|$. Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Từ đó ta cũng suy ra bất đẳng thức có dấu bằng khi và chỉ khi $AB \geq 0$, hay là A và B cùng dấu.

*Ví dụ 9.* a) Tìm trị số lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$.

b) Xác định p và q sao cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 và có giá trị lớn nhất bằng 9.

*Giải:* a) Hàm số đã cho xác định với mọi x. Xét một giá trị $y_o$ nào đó thuộc miền giá trị của hàm số đã cho. Khi đó phải tồn tại một giá trị x sao cho:

$$y_o = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1},$$

hay là: $y_o(x^2 + 1) = x^2 - 8x + 7$

hay là: $(y_o - 1)x^2 + 8x + (y_o - 7) = 0.$ (*)

Nếu $y_o - 1 = 0$, tức $y_o = 1$, thì $x = \dfrac{3}{4}$

Nếu $y_o - 1 \neq 0$, thì hiển nhiên rằng phương trình bậc hai (*) phải có nghiệm. Tức là ta phải có $\Delta' \geq 0$,

hay là $\Delta' = -y_o^2 + 8y_o + 9 \geq 0$,

hay là $-1 \leq y_o \leq 9$.

Ta nhận thấy $y_o = -1$ khi $x = 2$;

$y_o = 9$ khi $x = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $y_{min} = -1$ khi $x = 2$;

$y_{max} = 9$ khi $x = -\dfrac{1}{2}$.

b) Giả sử hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1 và có giá trị lớn nhất bằng 9. Khi đó

$$-1 \leq \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1} \leq 9 \text{ với } \forall x$$

đồng thời tồn tại các giá trị x để xảy ra các dấu bằng.

Từ đó $\begin{cases} x^2 + px + q \leq 9x^2 + 9 & \forall x, \\ x^2 + px + q \geq -x^2 - 1 \end{cases}$

hay là $\begin{cases} 8x^2 - px + 9 - q \geq 0 & \forall x. \\ 2x^2 + px + q + 1 \geq 0 \end{cases}$

Gọi $\Delta_1$, $\Delta_2$ là biệt thức của tam thức ở vế trái của hệ bất phương trình trên. Hiển nhiên rằng ta phải có

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 32(9 - q) = 0, \\ p^2 - 8(q + 1) = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm

$$\begin{cases} p = 8 \\ q = 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} p = -8 \\ q = 7. \end{cases}$$

Vậy với hai cặp số trên thì hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng -1 và có giá trị lớn nhất bằng 9.

## BÀI TẬP

**1.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = (\sin x + 1).(\cos x + 1)$;

b) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + \sin x\cos x$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$.

**2.** a) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = (2 + \sin x)(6 - \sin x).$$

b) Giải phương trình $\frac{1}{15}(2 + \sin x)(6 - \sin x) = 3^{|y|}$

**3.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 5;$

b) $f(x) = \left(\frac{1 + x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3\left(\frac{1 + x}{\sqrt{x}}\right) + 1.$

**4.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = (\cos x - 1)(\cos x - 2)(\cos x - 3)(\cos x - 4).$$

**5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin x} \qquad (0 < x < \pi).$$

**6.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{\sin x} - \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} \qquad (0 < x < \pi).$$

**7.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x;$

b) $f(x) = (\sin x + a)(\cos x + a)$; trong đó a là tham số.

**8.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4mx + 5m^2 + 2m - 3 = 0.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2).$$

**9*.** Giả sử $x, y \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$p(x,y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

**10*.** Giả sử x, y là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$$

Xác định a để tích x.y là nhỏ nhất.

**11*.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình:

$$x^2 + px + \frac{1}{p^2} = 0 \quad (p \neq 0).$$

Xác định p sao cho $x_1^4 + x_2^4$ là nhỏ nhất.

**12*.** Trong số các nghiệm của phương trình

$$4\sin x\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$$

hãy tìm nghiệm làm cho $f(x) = -x^2 - 6x + 1$ có giá trị lớn nhất.

**13*.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = |x^2 - 1| + |x^2 - 4| + |x + 1| + |x + 2|.$$

**14*.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |x - a| + |x - b| \text{ với } a > b.$$

**15*.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{12x(x - a)}{x^2 + 36} \quad \text{với } a \neq 0 \text{ cho trước.}$$

Với giá trị nguyên nào của a thì giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là những số nguyên.

**16*.** Với những giá trị nào của m thì

$$\sin^4x + \cos^4x + \sin x\cos x \geq m \text{ với mọi } x.$$

**17.** Với những giá trị nào của m thì các phương trình sau có nghiệm:

a) $4(\sin^4x + \cos^4x) - 4(\sin^6x + \cos^6x) - \sin^2 4x = m$;

b) $m\cos 2x + m\cos x + 1 = 0$.

**18.** Hãy xác định $\alpha$ để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = |-2x^2 + x + \alpha| \text{ trên đoạn } [-1, 1] \text{ là nhỏ nhất.}$$

**19*.** Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ và hàm số $g(x) = a(x^2 - x)^2 + b(x^2 - x) + c$. Hãy xác định a, b, c sao cho các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn [0,1] của f(x) trùng với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của g(x) trên đoạn đó.

## §6. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau

*Bài toán 1.* Chứng minh rằng, phương trình sau:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0 \quad (1)$$

luôn có nghiệm với mọi a, b, c.

*Giải: Cách 1.* Do tính hoán vị vòng quanh của a, b, c ta có thể giả thiết $a \le b \le c \Rightarrow (b - a)(b - c) \le 0$. (2)

Xét $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$

$$= 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca).$$

Xét $3.f(b) = 3(b - c)(b - a) \le 0$ do (2)

Theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc 2 phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn:

$$x_1 \le b \le x_2$$

*Cách 2.* Tính trực tiếp biệt thức của f(x):

$$\Delta' = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 +$$

$$+ (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

suy ra $\Delta' \ge 0$ hay phương trình (1) có nghiệm.

*Cách 3.* Thử trực tiếp

$$f(a).f(b).f(c) = -(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 \le 0$$

chứng tỏ 3 số f(a), f(b), f(c) có 2 số trái dấu. Hàm f(x) liên tục và có 2 giá trị trái dấu nên có nghiệm.

*Bài toán 2.* Cho hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} + (m - 2)x^2 + (5m + 4)x + m^2 + 1. \quad (1)$$

Xác định m để hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu tại $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$. (2)

*Giải:*

*Cách 1.* Tính $y' = x^2 + 2(m - 2)x + 5m + 4$. (3)

Để hàm số y có cực đại, cực tiểu thỏa mãn (2) thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (2).

Theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc 2 và điều kiện (2) ta cần có:

$y'(-1) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2(m - 2) + 5m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -3.$

Vậy với $m < -3$, hàm số (1) có cực đại, cực tiểu thỏa mãn (2).

*Cách 2.* Giải trực tiếp phương trình $y' = 0$, tìm cực đại, cực tiểu hàm số. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nếu $\Delta' = (m - 2)^2 - (5m + 4) = m(m - 9) > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $9 < m$. (3)

Tính nghiệm và áp dụng điều kiện (2) ta có hệ bất phương trình theo m:

$$-m + 2 - \sqrt{m^2 - 9m} < -1 < -m + 2 + \sqrt{m^2 - 9m}.$$

Giải hệ bất phương trình này và điều kiện (3) ta cũng được kết luận phải tìm.

***Bài toán 3.*** Với giá trị nào của a thì 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2 + x + a = 0 \text{ đều lớn hơn a?} \qquad (1)$$

*Giải : Cách 1.* Điều kiện để (1) có 2 nghiệm kép hoặc phân biệt là

$$\Delta = 1 - 4a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$$

Gọi 2 nghiệm của (1) là $x_1$, $x_2$, để có điều kiện

$a < x_1 < x_2$ ta có hệ sau :

$$\begin{cases} a < \dfrac{S}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ f(a) = a^2 + 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1/2 \\ a < -2 \text{ hoặc } 0 < a. \end{cases}$$

Kết luận : điều kiện đối với a là : $a < -2$.

*Cách 2.* Xét hệ điều kiện sau

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 - a > 0 \\ x_2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{4} \\ (x_1 - a)(x_2 - a) > 0 \\ \min(x_1, x_2) > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{4} \\ x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + \\ + a^2 > 0 \\ x_1 - a + x_2 - a > 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 \quad = a \end{cases}$

suy ra hệ điều kiện tương đương với hệ :

$$\begin{cases} a < \dfrac{1}{4} \\ a^2 + 2a > 0 \\ -1 - 2a > 0. \end{cases}$$

Giải hệ được $a < -2$.

*Cách 3.* Tính trực tiếp các nghiệm $x_1$, $x_2$ của (1) rồi đưa về hệ bất phương trình theo a :

$$a < \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

Giải hệ bất phương trình được $a < -2$.

***Bài toán 4.*** Tìm m để phương trình

$$(m - 3)\log^2_{1/2}(x - 4) - (2m+1)\log_{1/2}(x-4) + m + 2 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn

$$4 < x_1 < x_2 < 6. \qquad (2)$$

***Giải :***

*Cách 1.* Đặt $t = \log_{1/2}(x - 4)$, điều kiện $x > 4$. Do tính nghịch biến của hàm lôga$_{1/2}$ có cơ số a = 1/2 < 1 nên điều kiện (2) $\Leftrightarrow$ $-1 < t_1 < t_2 < +\infty$. (2')

Suy ra (1) có dạng:

$$(m - 3)t^2 - (2m + 1)t + m + 2 = 0. \qquad (1')$$

Để (1') có hai nghiệm $t_1$, $t_2$ thỏa mãn (2') ta cần các điều kiện

$$\begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 4(m-3)(m+2) > 0 \\ af(-1) = (m-3)[(m-3).1^2 + (2m+1).1 + m + 2] > 0 \\ -1 < \dfrac{t_1 + t_2}{2} = \dfrac{S}{2} = \dfrac{2m+1}{2(m-3)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 25 > 0 \\ 4m(m-3) > 0 \\ \dfrac{2m+1}{2(m-3)} > -1 \end{cases}$$

Giải hệ được: $-\dfrac{25}{8} < m < 0$ và $3 < m$.

*Cách 2:* Giải trực tiếp phương trình (1') và kết hợp (2') ta được:

a) $\begin{cases} \Delta = 8m + 25 > 0 \\ m > 3 \\ -1 < \dfrac{2m + 1 - \sqrt{8m+25}}{2(m-3)} \end{cases}$ hoặc:

b) $\begin{cases} \Delta = 8m + 25 > 0 \\ m < 3 \\ -1 < \dfrac{2m + 1 + \sqrt{8m+25}}{2(m-3)} \end{cases}$

Giải a) và b) suy ra

$$-\frac{25}{8} < m < 0 \text{ và } 3 < m.$$

*Bài toán 5.* Tìm các giá trị m để phương trình:

$$x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5 = 0 \qquad (1)$$

có 4 nghiệm phân biệt.

*Giải :*

*Cách 1.* Phương trình (1) là phương trình trùng phương. Muốn có 4 nghiệm phân biệt, thì phương trình:

$$f(t) = t^2 + 2(m - 2)t + m^2 - 5m + 5 = 0 \qquad (1')$$

có 2 nghiệm dương $t_1, t_2$ : $0 < t_1 < t_2$.

Suy ra có hệ điều kiện

$$\begin{cases} \Delta' = (m-2)^2 - (m^2 - 5m + 5) > 0 \\ f(0) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} = -(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m^2 - 5m + 5 > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} < m \\ m < 2 \end{cases}$$

Kết hợp ta được $1 < m < \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ ;

*Cách 2.* Áp dụng định lý Viét

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 . t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m^2 - 5m + 5 > 0 \\ -2(m - 2) > 0. \end{cases}$$

Giải hệ được kết quả như trên.

*Bài toán 6.* Với giá trị nào của m thì phương trình

$$\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 + 2m\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) + m = 0 \qquad (1)$$

có nghiệm ?

*Giải:*

*Cách 1*. Đặt $t = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ có điều kiện : $0 \le t < 1$. (2)

Để phương trình (1) có nghiệm theo x, phương trình

$$f(t) = t^2 + 2mt + m = 0 \quad (1')$$

phải có nghiệm thỏa mãn (2).

Xảy ra các khả năng sau, với $t_1$ , $t_2$ là nghiệm (1'):

a) $t_1 \le 0 \le t_2 < 1$;

b) $0 \le t_1 \le t_2 < 1$;

c) $0 \le t_1 \le 1 < t_2$.

Suy ra:

a) $\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ 1 + 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \le 0$;

b) $\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(1) > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 1 \\ \Delta' \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m > -\frac{1}{3} \\ 0 < -m < 1 \\ m^2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m > -\frac{1}{3} \\ 0 > m > -1 \\ m \le 0, 1 \le m. \end{cases}$

Khả năng b) bị loại vì các điều kiện mâu thuẫn nhau.

c) $\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ 1 + 3m \le 0 : \end{cases}$ loại.

***Kết luận***. Điều kiện: $-\frac{1}{3} < m \le 0$.

*Cách 2*. Ta tìm điều kiện của m để phương trình (1') với các điều kiện (2) là vô nghiệm.

a) $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

b) $\Delta \geq 0$ phương trình có 2 nghiệm $t_1 \geq t_2$.

$b_1$) Phương trình (1') với điều kiên (2) sẽ vô nghiệm.

$$t_1 \leq t_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) > 0 \\ -\dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Rightarrow m > 0$$

$b_2$) Tương tự: $t_1 < 0 < 1 \leq t_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{3}.$$

$$b_3)\ 1 \leq t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ 1 \leq \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3m \geq 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ m \leq -1 \end{cases}$$

loại.

*Tóm lại.* Với $m \leq -\frac{1}{3}$ và $0 < m$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy: điều kiện để (1) có nghiệm là

$$-\frac{1}{3} < m \leq 0.$$

*Bài toán 7.* Với giá trị nào của m thì phương trình

$$4(\cos^4x + \sin^4x) - 4(\cos^6x + \sin^6x) - \sin^2 4x = m \qquad (1)$$

có nghiệm?

*Giải. Cách 1.* Biến đổi lượng giác

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos4x) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x;$$

$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x - \sin^2x\cos^2x + \cos^4x)$

$= (\sin^4x + \cos^4x) - \sin^2x\cos^2x$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x - \frac{1}{4}\sin^22x$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos^4x - \frac{1}{8}(1 - \cos4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos4x.$

Suy ra (1) được biến đổi:

$$4(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x) - 4(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos4x) - (1 - \cos^24x) = m$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^24x - \frac{1}{2}\cos4x - \frac{1}{2} = m \qquad (1')$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^24x - \frac{1}{2}\cos4x - \frac{1}{2} - m = 0 \qquad (1'')$$

Điều kiện để (1) có nghiệm là phương trình
(đặt $t = \cos4x$)

$f(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} - m = 0$ có nghiệm trong khoảng $[-1,1]$.

a) Có 1 nghiệm trong đoạn, 1 nghiệm ngoài:

$$f(-1).f(1) \le 0 \Leftrightarrow -m(1-m) \le 0 \Rightarrow 0 \le m \le 1.$$

b) Cả hai nghiệm thuộc (0,1) suy ra

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 16m \ge 0 \\ 1 - m > 0 \\ -m > 0 \\ -1 < -\frac{1}{4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \frac{9}{16} \\ 1 > m \\ m < 0. \end{cases}$$

Kết hợp: $-\frac{9}{16} \le m < 0$.

*Kết luận*: $-\frac{9}{16} \le m \le 1$ thì phương trình (1) có nghiệm.

*Cách 2*. Xét từ (1').

Đặt $g(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của g(t) trên [-1,1] so sánh với m:

$$\min_{-1 \le t \le 1} g(t) \le m \le \max_{-1 \le t \le 1} g(t)$$

Từ đó giải ra điều kiện của m.

*Bài toán 8*. Chứng minh rằng phương trình

$$\sin^2 x = m\cos x \qquad (1)$$

có nghiệm với ∀ m.

*Giải. Cách 1.* Biến đổi phương trình đã cho:

$(1) \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = m\cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + m\cos x - 1 = 0.$

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1,1]$, ta có

$$f(t) = t^2 + mt - 1 = 0. \qquad (1')$$

Nhận xét: $f(-1).f(1) = -m^2 \le 0$.

Suy ra phương trình (1') có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn [-1,1].

*Cách 2*. Giải (1')

$$t_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \quad ; \quad t_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}.$$

Để chứng minh (1) có nghiệm ta cần chứng minh

$$-1 \leq \frac{-m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} \leq 1. \qquad (2)$$

$$-1 \leq \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \leq 1 \qquad (3)$$

Với $\forall m$ luôn là nghiệm của (2) hoặc của (3). Việc giải cụ thể, chúng tôi dành cho bạn đọc như một bài tập.

*Cách 3.* Phương trình (1') có hệ số $c = -1 < 0$ nên luôn có nghiệm.

Theo định lý Viét $t_1t_2 = -1$ nên tồn tại ít nhất một nghiệm có giá trị tuyệt đối bé hơn hoặc bằng 1.

Vậy: (1) luôn có nghiệm với $\forall m$.

*Bài toán 9.* Cho hàm số $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x}$. Tìm a để hàm số xác định với $\forall x$.

*Giải: Cách 1.* Để hàm số xác định ta cần

$$\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geq 0 \quad \forall x. \qquad (1)$$

Trước hết, biến đổi

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

suy ra

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{2}a\sin 2x \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x - 2a\sin 2x - 4 \leq 0 \quad \forall x. \qquad (2)$$

Đặt $t = \sin 2x$, $\forall x : t \in [-1,1]$.

Để xác định a cho (1) nghiệm đúng $\forall x$, ta cần xác định a để:

$$f(t) = 3t^2 - 2at - 4 \le 0 \quad t \in [-1,1] \qquad (3)$$

Nhận xét vế trái của (3) là tam thức bậc 2 luôn có 2 nghiệm do a.c = −12 < 0 nên gọi $t_1$, $t_2$ là nghiệm ta cần điều kiện

$$t_1 \le -1 < 1 \le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(-1) \le 0 \\ af(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.(2a - 1) \le 0 \\ 3.(-2a - 1) \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \ -1/2 \le a \le 1/2.$

Vậy với $-1/2 \le a \le 1/2$, thì hàm số đã cho xác định với $\forall x$.

*Cách 2.* Biến đổi (2): (2) $\Leftrightarrow -2a\sin 2x \le 4 - 3\sin^2 2x$. (4)

Nhận xét: Vế phải luôn $\ge 1 \Rightarrow$ $\min VP = \min(4 - 3\sin^2 x) = 1$ và vế trái có giá trị lớn nhất $\max VT = 2|a|$.

Vậy khi $2|a| \le 1$ thì (4) đúng $\forall x \Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (1) đúng $\forall x$, chú ý rằng với $|a| = 1/2$ có thể chọn x tương ứng để xảy ra dấu bằng (=) ở (4). Vậy điều kiện $|a| \le 1/2$ là điều kiện cần tìm.

*Cách 3.* Có thể giải bài toán bằng cách tìm max của hàm số $f(t) = 3t^2 - 2at - 4$ trên đoạn [−1,1] rồi cho $\max f(t) \le 0$ để tìm điều kiện đối với a: $-1 \le t \le 1$.

Vì hệ số của $t^2$ là 3 > 0 nên

$$\max_{-1 \le t \le 1} f(t) = \max\{f(-1), f(1)\} = \max\{2a - 1, -2a - 1\}$$

Từ đó $\displaystyle \max_{-1 \le t \le 1} f(t) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 \le 0 \\ -2a - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}.$

Vậy, hàm số đã cho xác định với mọi x khi $-\dfrac{1}{2} \le a \le \dfrac{1}{2}$.

***Bài toán 10.*** với giá trị nào của m thì

$$(x + 2)(x + 4)(x^2 + 6x + 10) \ge m \text{ với } \forall x \qquad (1).$$

*Giải:*

Biến đổi: $(x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8 = (x + 3)^2 - 1 \geq -1$ $\forall x$. Khi đó đặt $t = x^2 + 6x + 8$, (1) có dạng

$$t(t + 2) \geq m \text{ với } \forall t \geq -1 . \qquad (1')$$

*Cách 1.* (1') $\Leftrightarrow t^2 + 2t - m \geq 0 \ \ \forall t \geq -1$ (2)

* $\Delta = 1 + m \leq 0 \Rightarrow m \leq -1$, (2) đúng $\forall t$.

* $\Delta > 0$: $m > -1 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t - m$ có 2 nghiệm $t_1, t_2$ để (2) đúng $\forall t \geq -1$ ta có

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ f(-1) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = -1 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 - m \geq 0. \end{cases}$$

Hệ này không thỏa mãn với m nào cả.

Vậy: $\forall m \leq -1$ ta có (1) đúng $\forall x$.

*Cách 2.* Biến đổi (1'): $(t + 1)^2 \geq m + 1$. (3)

Để (3) đúng $\forall t$, do vế trái $\geq 0 \Rightarrow 0 \geq m + 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

*Cách 3.* Vế trái của (2) là tam thức bậc 2 có đỉnh tại điểm $(-1, -m-1)$, hệ số $a = 1 > 0$ nên để (2) nghiệm đúng $\forall t \geq -1$ $\Rightarrow$ điều kiện: $-m - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq m$.

*Cách 4.* Trong trường hợp $\Delta > 0$ ta tính nghiệm

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + m} .$$

Ta xét $t_1 < t_2 \leq -1$ hay $-1 + \sqrt{1 + m} \leq -1$.

*Bài toán 11.* Tìm a để

$$4^{|\cos x|} + 2(2a + 1).2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0 \ \forall x. \qquad (1)$$

*Giải:*

*Cách 1.* Đặt $t = 2^{|\cos x|}$, do $0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow t \in [1,2]$.

Bài toán trở thành tìm a để:

$$f(t) = t^2 + 2(2a + 1)t + 4a^2 - 3 < 0 \ \ t \in [1,2].$$

* $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (2a + 1)^2 - (4a^2 - 3) = 4a + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$ $\forall a \leq -1$. Với $a < -1$; $f(t) \geq 0 \ \forall t$ không thỏa mãn.

* Xét $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a > -1$, f(t) có 2 nghiệm. Để $f(t) < 0$ $\forall t \in [1,2]$ ta có điều kiện $t_1 < 1 < 2 < t_2$ nên

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 4a < 0 \\ 4a^2 + 8a + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0 \\ \text{vô nghiệm.} \end{cases}$$

Chú ý: $4a^2 + 8a + 5 > 0$ $\forall a$ vì $\Delta' = 16 - 20 = -4 < 0$.

Vậy: Không tồn tại a để (1) nghiệm đúng $\forall x$.

*Cách 2.* Tìm giá trị lớn nhất của f(t) với điều kiện $t \in [1,2]$, rồi giải bất phương trình.

$$\max_{1 \le t \le 2} f(t) < 0.$$

*Bài toán 12.* Tìm tất cả các giá trị của $\alpha$ sao cho

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (1 - 3\sin\alpha)(x + \frac{1}{x}) + 3\sin\alpha > 0$$

$$\forall x \neq 0. \qquad (1)$$

*Giải: Cách 1.* Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, do x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu, nên ta chứng minh được rằng: $|t| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$.

$\Rightarrow t \leq -2$ hoặc $2 \leq t$.

Khi đó $t^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ suy ra (1) có dạng

$t^2 - 2 + (1 - 3\sin\alpha)t + 3\sin\alpha > 0$ được nghiệm đúng $\forall t$ thỏa mãn (2)

$\Leftrightarrow t^2 + (1 - 3\sin\alpha)t + 3\sin\alpha - 2 > 0$ $\forall t \leq -2$ và $2 \leq t$.

Xét $\Delta = (1 - 3\sin\alpha)^2 - 4(3\sin\alpha - 2) = 9(\sin\alpha - 1)^2 \geq 0$

Vậy $f(t) = t^2 + (1 - 3\sin\alpha)t + 3\sin\alpha - 2$ có 2 nghiệm $t_1, t_2$. Để $f(t) > 0$ $\forall t \leq -2$ và $t \geq 2$ ta cần có:

$-2 < t_1 < t_2 < 2$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ -2 < \dfrac{t_1 + t_2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\sin\alpha > 0, \\ -3\sin\alpha + 4 > 0 \\ -2 < \dfrac{3\sin\alpha - 1}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sin\alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \ 2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi.$$

*Cách 2*. Nhận xét f(t) có các hệ số a, b, c thỏa mãn:

$$a + b + c = 1 + (1 - 3\sin\alpha) + 3\sin\alpha - 2 = 0$$

nên f(t) có 2 nghiệm: $t_1 = 1$, $t_2 = 3\sin\alpha - 2$

Do $-2 < t_1 = 1 < 2$ nên cần có điều kiện

$$-2 < t_2 = 3\sin\alpha - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < 3\sin\alpha < 4$$

suy ra $\sin\alpha > 0 \Rightarrow 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi$.

*Bài toán 13*. Tìm tất cả các giá trị m để bất kỳ x nào đều là nghiệm của ít nhất một trong hai bất phương trình sau:

$$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4. \qquad (1)$$

$$x^2 - (2m+3)x + 4m + 2 > 0. \qquad (2)$$

*Cách 1*. Giải (1).

Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Do $\sqrt{3} > 1$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\frac{x+1}{x-1} > \log_3 4 = \log_{\sqrt{3}} 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} > 0 \Rightarrow 1 < x < 3. \qquad (3)$$

Do điều kiện $\forall x$ là nghiệm của (1) hoặc (2), và (3) là nghiệm của (1) ta thấy có 2 khả năng sau:

a) $\forall x$ là nghiệm của (2);

b) $\forall x \notin (1,3) \Leftrightarrow x \le 1$ và $3 \le x$ (4) là nghiệm của (2).

Giải a: Điều kiện $\Delta < 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 - 4(4m+2) < 0$

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 \ge 0. \text{ Vậy:}$$

a) không xảy ra.

b) Do $\Delta = (2m+1)^2 \ge 0$ nên tam thức vế trái của (2) luôn có 2 nghiệm $x_1, x_2$.

Để $\forall x$ thỏa mãn (4) là nghiệm của (2) ta có:

$$1 < x_1 < x_2 < 3$$

Suy ra $\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \\ 1 < \dfrac{S}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ -2m + 2 > 0 \\ 1 < \dfrac{2m+3}{2} < 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 > m \\ -\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Kết hợp $0 < m < 1$.

*Cách 2*. Tính nghiệm của tam thức

$f(x) = x^2 - (2m+3)x + 4m + 2$ ta có $x_1 = 2$; $x_2 = 2m + 1$.

Do đó $1 < x_1 = 2 < 3$ nên cần thêm điều kiện

$$1 < 2m + 1 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

***Bài toán 14***. Tìm m để phương trình

$$\log_2(1 + x + x^2) = m^2\log_{1+x+x^2} 2 + m - 2$$

có nghiệm dương bé hơn $\dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$.

*Giải: Cách 1*. Điều kiện : $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ x^2 + x + 1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \iff x \neq 0, x \neq -1. \\ x \neq 0,\ x \neq -1. \end{cases}$$

Đặt $y = x^2 + x + 1$, nhận xét rằng:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1;\ x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \Rightarrow y = 4$$

và y có đồ thị parabol, đỉnh có hoành độ $x = -\frac{1}{2}$ nên từ $x > 0$ hàm y luôn đồng biến.

Do đó: nếu $0 < x < \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \iff 1 < y < 4$.

Đặt $t = \log_2 y = \log_2(x^2 + x + 1)$ thì:

$\log_{x^2+x+1} 2 = \frac{1}{\log_2 y} = \frac{1}{t}$ và khi $1 < y < 4$ thì $0 < t < 2$.

Biến đổi phương trình theo t:

$$t = \frac{m^2}{t} + m - 2 \iff f(t) = t^2 - (m - 2)t - m^2 = 0.$$

Để phương trình đã cho có nghiệm dương thỏa mãn đầu bài, cần phương trình $f(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm dương thỏa mãn: $0 < t < 2$. Có 2 khả năng:

a) f chỉ có 1 nghiệm thuộc $(0,2) \Rightarrow f(0).f(2) < 0$;

b) f có 2 nghiệm dương thuộc $(0,2)$;

$$0 < t_1 < t_2 < 2 \Rightarrow \begin{cases} f(0) > 0 \\ f(2) > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 2 \\ \Delta > 0. \end{cases}$$

Trường hợp a) :

$$f(0).f(2) < 0 \iff m^2(m^2 + 2m - 8) < 0$$
$$\iff -4 < m < 2, m \neq 0.$$

Trường hợp b):

$$\begin{cases} \Delta = 5m^2 - 4m + 4 > 0 \\ f(2) = -m^2 - 2m - 8 > 0 \\ f(0) = -m^2 > 0 \\ 0 < \dfrac{m-2}{2} < 2. \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, chú ý $f(0) = -m^2 < 0$.

Vậy: m cần tìm là $-4 < m < 0$ ; $0 < m < 2$.

*Cách 2.* Giải phương trình $f(t) = 0$

* Chú ý: $m = 0 : f(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = -2$ loại.

* Do $\Delta = 5m^2 - 4m + 4 > 0\ \forall m$ nên $f(t) = 0$ luôn có 2 nghiệm.

Do $t_1t_2 = -m^2 < 0$ nên phương trình có 2 nghiệm trái dấu. Xét nghiệm dương:

$$t_2 = \frac{(m-2) + \sqrt{5m^2 - 4m + 4}}{2} \in (0, 2)$$

$$\Rightarrow \frac{m - 2 + \sqrt{5m^2 - 4m + 4}}{2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 4m + 4} < 6 - m.$$

Điều kiện: $m < 6 \Rightarrow 5m^2 - 4m + 4 < (6 - m)^2 =$

$$= m^2 - 12 + 36 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 2.$$

*Kết hợp:* $-4 < m < 2$ và $m \neq 0$.

***Bài toán 15.*** Với giá trị nào của m, thì

$$f(x) = m9^x + 4(m-1).3^x + m - 1 > 0\ \forall x. \qquad (1)$$

*Giải: Cách 1.* Đặt $t = 3^x > 0\ \ \forall x$.

Suy ra cần tìm điều kiện để

$$g(t) = m.t^2 + 4(m-1)t + m - 1 > 0\ \ \forall t > 0. \qquad (2)$$

Nếu m = 0: g(t) = -4t - 1 > 0 khi t < -1/4 loại. $m \neq 0 \Rightarrow$ g(t) là tam thức bậc 2. Để g(t) thỏa mãn (2) - ta thấy m không thể âm vì nếu m < 0 thì khoảng nghiệm t để g(t) > 0 là khoảng hữu hạn.

Vậy: chỉ xét m > 0.

Có hai khả năng:

a) $\begin{cases} \Delta' < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow g(t) > 0 \ \forall t;$

b) $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 < t_2 < 0. \end{cases}$

Trường hợp a: $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = 4(m-1)^2 - m(m-1) = \\ \quad = (m-1)(3m-4) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 < m < \dfrac{4}{3}. \end{cases} \qquad \text{Kết hợp: } 1 < m < \frac{4}{3}.$$

Trường hợp b:

$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = (m-1)(3m-4) \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{-2(m-1)}{m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 1; \ \dfrac{4}{3} \leq m \\ m \geq 1 \\ m < 0 \text{ và } 1 \leq m \end{cases}$$

Kết hợp: $m \geq \dfrac{4}{3}$ và $m = 1$.

*Kết luận:* $m \geq 1$ là những giá trị cần tìm.

*Cách 2.* Làm tương tự cách 1, trong trường hợp b) chỉ cần xét nghiệm lớn của g(t): $t_2 \leq 0$. Chú ý $m > 0$ nên có

$$\frac{-2(m-1) + \sqrt{3m^2 - 7m + 4}}{m} \leq 0.$$

Từ đó giải ra m.

*Bài toán 16.* Với giá trị nào của a thì cả 2 nghiệm của phương trình:

$$a^2x^2 - ax - 2 = 0 \qquad (1)$$

nằm ngoài đoạn [-1,1] (2)

*Giải: Cách 1.* Nhận xét rằng $a = 0$, phương trình vô nghiệm. Xét $a \neq 0$; lại do tích các hệ số "a" và "c" của phương trình là $-2a^2 < 0$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ trái dấu: $x_1.x_2 = -\frac{2}{a^2}$ ; $x_1 < x_2$. Để 2 nghiệm thỏa mãn (2), ta có:

$$x_1 < -1 < 1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = a^2(-1)^2 - a(-1) - 2 < 0 \\ f(1) = a^2 - a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 1 \\ -1 < a < 2. \end{cases}$$

Kết hợp: $-1 < a < 1$ và $a \neq 0$.

*Cách 2.* Nhận xét rằng $t = ax$ thì (1) có dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \text{ có nghiệm } t_1 = -1, t_2 = 2,$$

suy ra: $x_1 = -\frac{1}{a}$ ; $x_2 = \frac{2}{a}$.

Điều kiện (2) suy ra $|x_1|, |x_2| > 1 \Rightarrow \frac{2}{|a|} > \frac{1}{|a|} > 1$

$\Rightarrow 1 > |a| \Rightarrow -1 < a < 1$ và $a \neq 0$.

*Bài toán 17.* Cho hàm số

$$f(x,y) = [m\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin y + \cos y) + m^2 + 1]x^2 + 4mx + 1. \quad (1)$$

Xác định m sao cho $f(x,y) > 0 \ \forall x,y$.

*Giải:* Xét biểu thức

$$m\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin y + \cos y) + m^2 + 1 = m^2 + m\sin(\frac{\pi}{4} + y) + 1.$$

Do $|\sin(y + \frac{\pi}{4})| \leq 1 \ \forall y$ nên dễ thấy:

$$m^2 + m\sin(y + \frac{\pi}{4}) + 1 > 0 \ \forall y.$$

Vậy: nếu coi f(x,y) là tam thức bậc 2 theo x thì tam thức đó có hệ số $a = m^2 + m\sin(y + \frac{\pi}{4}) + 1 > 0 \ \forall y$.

*Cách 1.* Để $f(x,y) > 0 \ \forall x,y$ cần có

$$\Delta' = 4m^2 - [m^2 + m\sin(y + \frac{\pi}{4}) + 1] < 0 \ \forall y$$

hay $3m^2 - m\sin(y + \frac{\pi}{4}) - 1 < 0 \ \forall y. \quad (2)$

Do $\sin(y + \frac{\pi}{4}) \in [-1,1]$ nên (2) suy ra:

$$\begin{cases} 3m^2 - m - 1 < 0 \\ 3m^2 + m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{13}}{6} < m < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

hay $|m| < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$.

*Cách 2.* Đặt $t = \sin(y + \frac{\pi}{4})$ và xét

$$f(x,y) = \phi(x,t) = (m^2 + mt + 1)x^2 + 4x + 1$$

$= mx^2t + (m^2x^2 + x^2 + 4x + 1)$ như hàm bậc nhất của t.

Điều kiện $f(x,y) > 0\ \forall x,y \Rightarrow \varphi(x,t) > 0\ \forall x,\ \forall t \in [-1,1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x, 1) > 0 \\ \varphi(x, -1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + m + 1)x^2 + 4mx + 1 > 0\ \forall x \\ (m^2 - m + 1)x^2 + 4mx + 1 > 0\ \forall x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = (2m)^2 - (m^2 + m + 1) = 3m^2 - m - 1 < 0 \\ \Delta_2 = (2m)^2 - (m^2 - m + 1) = 3m^2 + m - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |m| < \frac{\sqrt{13} - 1}{6}.$$

## CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

### CHƯƠNG II

**§1.**

**1.** a) $2 < k < 2,5$; b) $k = 2$; $k = 2,5$; c) $(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 0$.

**2.** $0 < m \leq 5$.

**4.** $m = \frac{1}{8}$.

**5.** Cặp (x,y) với y lớn nhất là cặp $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$.

**6.** Coi vế trái là một tam thức đối với x. Hãy chứng minh $\Delta \leq 0$.

**8.** $|k| \leq 2$.

**9.** Giả sử x, y, z là ba số thỏa mãn hệ đã cho. Khi đó:

$$\begin{cases} y + z = 5 - x. \\ y.z = 8 - x(y + z) = x^2 - 5x + 8. \end{cases}$$

Vậy y và z là các nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (5 - x)t + (x^2 - 5x + 8) = 0.$$

Phương trình này có nghiệm, tức là ta phải có:

$$\Delta \geq 0 \text{ hay là: } \Delta = -3x^2 + 10x - 7 \geq 0.$$

từ đó $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

**10.** $-6 - \sqrt{33} \leq m \leq -\frac{1}{3}$.

**11.** Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-2)(x-k) \leq 0, \\ (x-3)(x-k) \geq 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ tùy theo các giá trị của k.

**12.** Hệ bất phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2m) \leq 0, \\ (x-m)(x-m-2) \leq 0. \end{cases}$$

Với các trường hợp: $m = \frac{1}{2}$; $m < \frac{1}{2}$; $m > \frac{1}{2}$ các đoạn nghiệm của hai bất phương trình trên đều có phần chung. Suy ra hệ luôn luôn có nghiệm.

**13.** Điều kiện cần và đủ là: $a + b + 2c \geq 0$.

**14.** $m = 0$ và $m = 1$.

**15.** $m = 1$ và $m = \frac{7}{4}$.

**16.** Hệ có nghiệm duy nhất khi $a = -1$ hoặc $a = 3$. Với $a = -1$ nghiệm là: $x = 0$; $y = -1$. Với $a = 3$ nghiệm là: $x = -2$; $y = 1$.

**17.** Giá trị lớn nhất là: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Giá trị nhỏ nhất là: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

**18.** Ta phải có $x - 2 \geq 0$ và $4 - x \geq 0$, tức là phải có $4 \geq x \geq 2$.

Ta có vế phải: $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$ (có dấu bằng khi $x = 3$).

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{x-2} \leq \frac{(x-2)+1}{2}, \quad \sqrt{4-x} \leq \frac{(4-x)+1}{2}.$$

Từ đó $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$. Bất đẳng thức có dấu bằng khi $x - 2 = 1$

và $4 - x = 1$, tức là khi $x = 3$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

**19.** $-1 < m < -\frac{1}{2}$.

**20.** Từ giả thiết suy ra: $(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2$.

Từ đó $S^2 - 3S + 1 \le 0$ suy ra: $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \le S \le \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

**21.** Giả sử ngược lại, tức là với mọi $x_o$ thuộc $[0,1]$ ta đều có: $|ax_o^2 + bx_o + c| \le 1$.

Bằng cách chọn $x_o = 0$; $x_o = \frac{1}{2}$; $x_o = 1$.

Ta suy ra: $|a| + |b| + |c| < 17$, vô lý.

**22.** Cho $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$. Theo giả thiết ta có:

$|c| \le 1$; $|a + b + c| \le 1$; $|a - b + c| \le 1$.

Gọi $f(x) = bx + a + c$. Ta có:

$|f(-1)| = |a + c - b| \le 1$,

$|f(1)| = |a + b + c| \le 1$.

Do $f(x)$ là hàm bậc nhất, suy ra $|f(x)| \le 1$ với mọi x thuộc đoạn $[-1,1]$. Từ đó suy ra:

$|cx^2 + bx + a| = |c(x^2 - 1) + bx + a + c| \le 1 + 1 = 2$ với mọi x thuộc đoạn $[-1,1]$.

**23.** $(a = -2; b = 0; c = 1)$ hoặc $(a = 2; b = 0; c = -1)$.

Lúc đó: $\max\left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2\right) = \frac{32}{3}$.

**26.** $f_{1988} = (1988 - 1)\left(\frac{1988^2}{2} - 1\right)$.

**§3. 1.** $a < -1$; $-\frac{1}{2} < a < 0$.

**2.** $m = 1$; $-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{22}$.

**3.** a) Hãy chứng tỏ $f(0).f(1) < 0$.

b) $-1 < k < 0$.

**4.** $m < -4$.

**6.** $-3 < m < -1$; $1 < m < 3$ và $m \neq \pm\sqrt{3}$.

**7.** $-2 < m < -1$ hoặc $1 < m < 2$.

**8.** $0 < m < \frac{2}{3}$ (chú ý rằng $3^x > 0$ với mọi x).

**9.** $m \geq \frac{3}{8}$ (chú ý rằng $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ với mọi x).

**10.** $0 \geq a > -\frac{1}{2}$ (chú ý rằng $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$ với mọi x).

**11.** $a \geq \frac{4}{3}$ hoặc $a \leq 0$ (chú ý rằng $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$ với mọi $x \neq 0$).

**12.** $-1 \leq a \leq \sqrt{2}$.

**13.** Xem cách giải ví dụ 10.

**14.** Đặt $x^2 = t$. Ta phải tìm a để phương trình:

$$at^2 - (a - 3)t + 3a = 0$$

có hai nghiệm phân biệt $t_1$, $t_2$ đồng thời: $0 < t_1 < 1$ ; $t_2 > 4$.

Từ đó suy ra: $-\frac{4}{5} < a < 0$.

**15.** a) $|m| \leq \sqrt{2}$. b) $|m| \geq 1$. c) $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$.

d) Phương trình có nghiệm với mọi m.

**16.** Phương trình thứ nhất có nghiệm là $x_1 = 1 - a$; $x_2 = 1 + a$. Gọi vế trái của phương trình thứ hai là f(x). Ta phải có:

$$\begin{cases} f(x_1) < 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases} \quad \text{Từ đó suy ra } -\frac{1}{4} < a < 1.$$

**18.** Nếu $m = -1$, phương trình đã cho có dạng:

$$[(b + d) - (a + c)]x = bd - ac.$$

Theo giả thiết thì $b + d > a + c$ nên phương trình có nghiệm.

Nếu $m \neq -1$. Lúc đó gọi vế trái của phương trình là f(x) thì $f(b)f(d) < 0$.

**19.** Phương trình đã cho có dạng:

$(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = m.$

Đặt $t = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 10t + (9 - m) = 0$. (*) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có ít nhất một nghiệm $t \geq 0$. Từ đó suy ra

$m \geq -16.$

**22.** Gọi $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$. Ta có:

$$f(x_1) = \frac{a}{2}x_1^2 + bx_1 + c =$$

$$\left[(ax_1^2 + bx_1 + c) - \frac{a}{2}x_1^2\right] = -\frac{a}{2}x_1^2.$$

$$f(x_2) = \frac{a}{2}x_2^2 + bx_2 + c =$$

$$= \left[(-ax_2^2 + bx_2 + c) + \frac{3a}{2}x_2^2\right] = \frac{3a}{2}x_2^2$$

Từ đó $f(x_1)f(x_2) = -\frac{3a^2}{4}x_1^2.x_2^2 < 0$ với $a \neq 0$ (nếu $a = 0$ thì $x_1 = x_2$).

**23.** Xem cách giải trong mục "Hàm số liên tục" của phần hàm số (Tập II).

**24.** Trong trường hợp $a \neq 0$, hãy xét các giá trị $f(0)$; $f(1)$ và $f\left(\frac{m}{m+1}\right)$ với $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**25.** Ta phải chứng minh tam thức $f(t) = 2bt^2 + at + (1 - b)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1, 1)$.

1. $\Delta = a^2 - 8b(1 - b) = a^2 + 8(b^2 - b)$.

Do $|b| > |a| + 1$ suy ra $|b| > 1$, suy ra $b < -1$ hoặc $b > 1$. Từ đó suy ra $\Delta > 0$. (1)

2. Ta có $Af(-1) = 2b(b - a + 1)(A = 2b)$ :

* Nếu $b > 0$, thì từ giả thiết ta có $b > |a| + 1 \geq a + 1$ suy ra $b - a > 1$, suy ra $Af(-1) > 0$.

* Nếu $b < 0$, thì từ giả thiết ta có $-b > |a| + 1$ suy ra $b + |a| + 1 < 0$.

Ta có $b - a + 1 \leq b + |a| + 1 < 0$, suy ra: $Af(-1) > 0$

Tóm lại: $Af(-1) > 0$. (2)

3. $Af(1) = 2b(b + a + 1)$. Cũng xét hai khả năng $b > 0$ và $b < 0$ ta suy ra $Af(1) > 0$. (3)

4. Từ $|b| > |a| + 1 > |a|$ suy ra: $1 > \left|\frac{a}{b}\right| > \left|\frac{a}{4b}\right|$.

Từ đó $\left|\frac{S}{2}\right| = \left|-\frac{a}{4b}\right| < 1$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra điều phải chứng minh.

**26.** Từ giả thiết ta có: $\varphi(0).\varphi(2) > 0$.

1) Nếu $ac < 0$, suy ra $\Delta > 0$.

2) Nếu $ac > 0$ thì $\Delta = b^2\varphi^2(1) - 4ac\varphi(0).\varphi(2) = \varphi^2(1)[b^2 - 4ac] + 4ac[\varphi^2(1) - \varphi(0)\varphi(2)]$.

Do: $b^2 - 4ac \geq 0$; $ac > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$[\varphi^2(1) - \varphi(0).\varphi(2)] \geq 0$.

Ta có: $\varphi(1) = \alpha + \beta + \gamma$; $\varphi(0) = \gamma$, $\varphi(2) = 4\alpha + 2\beta + \gamma$.

$\varphi^2(1) - \varphi(0).\varphi(2) = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - \gamma(4\alpha + 2\beta + \gamma) =$

$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\gamma =$

$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\varphi(0) > 0$.

($\alpha.\varphi(0) < 0$ do số 0 nằm trong khoảng hai nghiệm của tam thức).

Như vậy: $\Delta > 0$.

**§4. 1.** $-1 \leq m \leq 3$.

**2.** Không tồn tại m thỏa mãn đầu bài.

**3.** a) Nghiệm là mọi x (hãy chú ý kết quả ở câu b).

b) $|m| \leq 2$.

**4.** $a < -\frac{1}{3}$ hoặc $a > 3$.

**5.** $\frac{1}{2} < a < 1$.

**6.** $m = -1$.

**7.** $-1 \leq m \leq 3$ (chú ý rằng $-1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$ với mọi x).

**8.** $m \geq -2\sqrt{2}$

**10.** $-5 < k < 1$.

**11.** $a = 0; b = 1$.

**12.** a) Không tồn tại a. b) $a > \frac{3}{4}$.

**13.** b) $a \leq \frac{1}{2}$.

**14.** a) $a > -1$ hoặc $a < -3$. b) Không tồn tại a.

**15.** a) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5}$ hoặc $x > \frac{3}{2}$. b) $|a| \leq \frac{\sqrt{10}}{5}$.

**16.** $m \geq 2$.

**18.** Ta có $x^3 + (m + 1)x^2 - 4x - 4(m + 1) =$

$= (x + 2)(x - 2)(x + m + 1)$.

Khi $x > 0$ ta có $x + 2 > 0$, nên ta cần tìm m sao cho khi $x > 0$ thì $(x - 2)(x + m + 1) \geq 0$.

Từ đó suy ra: $-m - 1 = 2$ hay là $m = -3$.

**19.** $(x = 2; \alpha = \pi + 2k\pi)$ hoặc $(0 < x < 1; \alpha$ tùy ý).

**20.** Đặt $\sin\alpha + \cos\alpha = t$; ta phải tìm x sao cho:

$f(t) = 2xt + x^2 + 1 \geq 0$ với mọi t thuộc đoạn $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Điều này tương đương với $f(-\sqrt{2}) \geq 0$ và $f(\sqrt{2}) \geq 0$. Từ đó suy ra:

$$|x| \geq 1 + \sqrt{2} \text{ hoặc } |x| \leq \sqrt{2} - 1.$$

**21.** $|a| > \frac{5}{4}$.

**22.** $1 < m < 4 + 2\sqrt{2}$.

**23.** $-1 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**§5. 1.** a) Giá trị nhỏ nhất bằng 0, giá trị lớn nhất bằng $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$

b) Nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$; lớn nhất bằng $\frac{13}{12}$

c) Nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$ ; lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$ .

**2.** a) Nhỏ nhất bằng 7; lớn nhất bằng 15.

b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $y = 0$.

**3.** a) Nhỏ nhất bằng 5; lớn nhất không có.

b) Nhỏ nhất bằng 11; lớn nhất không có.

**4.** Nhỏ nhất bằng 0; lớn nhất bằng 120.

**5.** Nhỏ nhất bằng 0.

**6.** Lớn nhất bằng -2.

**7.** Xem cách giải ví dụ 7.

**8.** Nhỏ nhất bằng -4.

**9.** Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t$, khi đó $|t| \geq 2$.

Biểu thức đã cho có dạng:

$P(t) = [(t^2 - 2)^2 - 2] - (t^2 - 2) + t = (t^2 - 2)(t^2 - 3) + t - 2.$

Do $|t| \geq 2$ suy ra $t^2 \geq 4$ nên $t^2 - 3 \geq 1$. Từ đó

$P(t) \geq (t^2 - 2) + t - 2 = t^2 + t - 4.$

Dễ thấy $f(t) = t^2 + t - 4$ có giá trị nhỏ nhất bằng -2 (đạt được khi $t = -2$).

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là -2 (đạt được khi $x = -y$).

**10.** $a = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$ (chú ý rằng trước hết phải tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm).

**11.** $|p| = \sqrt{2}$.

**12.** Nghiệm của phương trình lượng giác $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ , với

$x = -\frac{11\pi}{12}$ (khi $k = -2$) thì $f(x)$ có giá trị lớn nhất.

**13.** Giá trị nhỏ nhất bằng 4 (đạt được khi $-2 \leq x \leq -1$).

**14.** Giá trị nhỏ nhất bằng a - b.

**15.** Nhỏ nhất bằng $6 - \sqrt{a^2 + 36}$; lớn nhất bằng $6 + \sqrt{a^2 + 36}$.

Khi a = 8 hoặc a = -8 thì giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là những số nguyên.

**16.** $m \leq 0$ (m phải nhỏ hơn hoặc bằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4x + \cos^4x + \sin x\cos x$).

**17.** a) Biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$2\cos^2 4x - \cos 4x - 1 = 2m.$$

Hàm số $y = 2\cos^2 4x - \cos 4x - 1$ có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị

nhỏ nhất bằng $-\frac{9}{8}$. Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có:

$$-\frac{9}{8} \leq 2m \leq 2 \quad \text{hay} \quad -\frac{9}{16} \leq m \leq 1.$$

b) Với m = 0, phương trình vô nghiệm, vậy ta chỉ xét $m \neq 0$. Viết lại phương trình dưới dạng: $2\cos^2x + \cos x - 1 = -\frac{1}{m}$. Tương tự câu a)

$$\Rightarrow m \leq -\frac{1}{2} \quad \text{hoặc} \quad m \geq \frac{8}{9}.$$

**18.** $\alpha = \frac{23}{16}$.

**19.** a = 0; b = 0; c tùy ý.

# PHẦN THỨ HAI
# LƯỢNG GIÁC

## CHƯƠNG I
## BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

### I. CÁC CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Trong lượng giác có 3 công thức cơ bản:

1) $\mathbf{sin^2x + cos^2x = 1}$ $\forall x$.

2) Một trong 4 công thức cộng cung:

$\mathbf{sin(a \pm b) = sina\ cosb \pm sinb\ cosa;}$

$\mathbf{cos(a \pm b) = cosa\ cosb \mp sina\ sinb.}$

3) $\mathbf{tgx = \dfrac{sinx}{cosx}}$ .

Các công thức khác đều suy được từ 3 công thức này.

Chẳng hạn, trong công thức 2) nếu ta cho a = b = x, và chú ý công thức 1) ta được:

4) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$;

5) $\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x - 1 = 1 - 2\sin^2x$.

Từ 5) ta nhận được hai công thức hạ bậc hay dùng khi đi thi đại học là:

6) $\sin^2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ , $\cos^2x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Nếu trong 2) ta cho a = 2x, b = x và chú ý các công thức 4) và 5) ta được hai công thức cần nhớ là:

7) $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Từ các công thức 4), 5) và chú ý 1) ta được

8) $\sin 2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$ , $\cos 2x = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$

và chú ý công thức 3) ta được

9) $\mathrm{tg}2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$.

Cũng từ 2), cộng vế với vế của $\cos(a \pm b)$ và vế với vế của $\sin(a \pm b)$ ta được nhóm công thức biến đổi tích thành tổng sau đây:

10) $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$;

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$;

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a - b) + \sin(a + b)]$.

Nếu trong công thức 2) ta đặt $a + b = x$, $a - b = y$ thì $a = \dfrac{x + y}{2}$ , $b = \dfrac{x - y}{2}$ và ta được nhóm công thức biến đổi tổng thành tích sau đây:

11) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$;

$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$;

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Khi biến đổi lượng giác các biểu thức liên quan đến các góc của một tam giác, cần nhớ ba định lý sau đây:

12) Định lý hàm sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, trong đó a, b, c là các cạnh tam giác, A, B, C là các góc của tam giác, R là bán kính vòng tròn ngoại tiếp.

13) Định lý hàm côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

14) Định lý hàm tang:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B-C}{2}};$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\mathrm{tg}\frac{C+A}{2}}{\mathrm{tg}\frac{C-A}{2}}$$

và các công thức tính diện tích tam giác:

15) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B =$

$\frac{abc}{4R} = pr$, trong đó a, b, c, A, B, C, R ký hiệu như 12), S - diện tích, p - nửa chu vi, r - bán kính vòng tròn nội tiếp tam giác.

## II. BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Biến đổi lượng giác là chuyển một biểu thức lượng giác ở dạng này về một biểu thức ở dạng khác bằng các phép tính tương đương. Tùy thuộc mục tiêu của bài toán, ta chọn các phương pháp thích hợp để đi đến mục tiêu nhanh hơn.

### §1. Đẳng thức

*Ví dụ 1.* Không dùng bảng số, hãy tính biểu thức

$$A = tg110^o + cotg20^o.$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $A = \frac{\sin110^o}{\cos110^o} + \frac{\cos20^o}{\sin20^o} =$

$$= \frac{\sin110^o\sin20^o + \cos110^o\cos20^o}{\cos110^o.\sin20^o} = \frac{\cos90^o}{\cos110^o.\sin20^o} = 0.$$

*Cách 2.* Vì $110^o = 90^o + 20^o$, nên $tg110^o = -cotg20^o$ (hai góc có hiệu bằng $90^o$). Vậy:

$$tg110^o + cotg20^o = -cotg20^o + cotg20^o = 0.$$

*Ví dụ 2.* Tính $\sin15^o$ và $\cos15^o$.

*Giải: Cách 1.* $\sin15^o = \sin(45^o - 30^o) = \sin45^o\cos30^o -$

$$- \cos45^o\sin30^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} .$$

Tương tự $\cos15^o = \cos(45^o - 30^o) = \cos45^o\cos30^o +$

$$+ \sin45^o\sin30^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

hoặc $\cos 15^o = \sqrt{1 - \sin^2 15^o} = \sqrt{1 - \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

*Chú ý.* Cũng có thể tính $\sin 15^o$, $\cos 15^o$ theo sin và cos của hiệu $60^o$ và $45^o$.

*Cách 2.* Theo công thức $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x =$

$= \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ và chú ý $\sin 15^o > 0$, $\cos 15^o > 0$ ta được

$$\sin^2 15^o = \frac{1 - \cos 30^o}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 15^o = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Tương tự $\cos^2 15^o = \dfrac{1 + \cos 30^o}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 15^o = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

*Cách 3.* Biết rằng nếu đa giác đều n cạnh nội tiếp trong vòng tròn lượng giác (bán kính R = 1, tâm trùng với gốc tọa độ) thì $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{a_n}{2}$, trong đó $a_n$ là cạnh đa giác đều n cạnh, và $\cos\dfrac{\pi}{n} = I_n = \sqrt{1 - \dfrac{a_n^2}{4}}$, $I_n$ là trung đoạn.

Lấy n = 12, ta có $a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $I_{12} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$, do vậy

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15^o = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \cos 15^o = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

*Ví dụ 3.* Tính sin2x, nếu $5tg^2x - 12tgx + 5 = 0$,

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

*Giải: Cách 1.* tgx là nghiệm của phương trình bậc 2:

$$5tg^2x - 12tgx + 5 = 0 \Rightarrow tgx = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{5}.$$

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên tgx > 1, vậy $tgx = \frac{6 + \sqrt{11}}{5}$.

Vì $\sin 2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2x}$, nên $\sin 2x = \dfrac{2\,\dfrac{6 + \sqrt{11}}{5}}{1 + \left(\dfrac{6 + \sqrt{11}}{5}\right)^2} = \dfrac{5}{6}$

*Cách 2.* Vì $\sin 2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2x}$, mà từ $5tg^2x - 12tgx +$ $+ 5 = 0$ suy ra $\dfrac{5}{6} = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2x}$ nên suy ra $\sin 2x = \dfrac{5}{6}$.

*Ví dụ 4.* Tính biểu thức

$$S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} \qquad (1)$$

*Giải: Cách 1.* $S = (\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}) - \cos\frac{2\pi}{7} =$

$$= 2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} =$$

$$= \frac{2(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7})\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} - \cos\frac{2\pi}{7} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} - \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} - \cos\frac{2\pi}{7}$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} - \cos\frac{2\pi}{7}$$ (vì $\frac{3\pi}{7}$ và $\frac{4\pi}{7}$ bù nhau, nên $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}$).

Theo công thức $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$, ta được

$$S = \frac{-4\sin^3\frac{\pi}{7} + 3\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} - \cos\frac{2\pi}{7} =$$

$$= -2\sin^2\frac{\pi}{7} + \frac{3}{2} - \cos\frac{2\pi}{7} = -1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \frac{3}{2} -$$

$$- \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

*Cách 2.* Nhân 2 vế của (1) với $2\cos\frac{\pi}{14}$, và áp dụng công thức đổi tích thành tổng, ta được:

$$2\cos\frac{\pi}{14}.S = 2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} - 2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} +$$

$$+ 2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} -$$

$$- \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{14}$$

(vì $\cos\frac{7\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$).

Từ đó ta có $S = \frac{1}{2}$.

*Chú ý:* Để tính tổng $S = \cos a - \cos(a + x) + \cos(a + 2x) - ... +$ $+ (-1)^n\cos(a + nx)$, ta nhân 2 vế với $2\cos\frac{x}{2}$, nếu $\cos\frac{x}{2} \neq 0$.

*Ví dụ 5.* Tính tgx.tgy, nếu $\frac{\cos(x + y)}{\cos(x - y)} = \frac{1}{2}$.

*Giải: Cách 1.* Ta có

$$\frac{\cos(x + y)}{\cos(x - y)} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\cos x\cos y + \sin x\sin y} = \frac{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y} =$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - 2\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = 1 + \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y \Rightarrow \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = \frac{1}{3}.$$

*Cách 2.* Ta có $\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = \frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y} =$

$$\frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)} =$$

$$\frac{1-\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}}{1+\dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}}=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

*Ví dụ 6.* Rút gọn biểu thức

$$A = \sin 3x\sin^3 x + \cos 3x\cos^3 x.$$

*Giải:* Ta tìm cách hạ bậc lũy thừa của sinx, cosx trong A.

*Cách 1.* $A = \sin 3x\sin x.\sin^2 x + \cos 3x\cos x.\cos^2 x =$

$$= \sin 3x\sin x\frac{1-\cos 2x}{2} + \cos 3x\cos x\frac{1+\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 3x\sin x + \cos 3x\cos x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2x(\cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\cos 4x = \frac{1}{2}\cos 2x(1+\cos 4x) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x.2\cos^2 2x = \cos^3 2x.$$

*Cách 2.* Từ các công thức $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$ và $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ suy ra $\sin^3 x =$

$$= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x),\quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x),$$ do đó

$$A = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\sin 3x + \frac{1}{4}(3\cos x +$$

$$+ \cos 3x)\cos 3x = \frac{3}{4}(\sin x\sin 3x + \cos x\cos 3x) +$$

$+\frac{1}{4}(\cos^2 3x - \sin^2 3x) = \frac{3}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 6x =$

$= \frac{3}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}(4\cos^3 2x - 3\cos 2x) = \cos^3 2x.$

*Cách 3.* $A = \sin 3x \sin x \sin^2 x + \cos 3x \cos x \cos^2 x =$

$= \sin 3x \sin x(1 - \cos^2 x) + \cos 3x \cos x(1 - \sin^2 x) =$

$= (\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x) - \sin x \cos x(\sin 3x \cos x +$

$+ \cos 3x \sin x) = \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \sin 4x =$

$= \cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x = \cos 2x(1 - \sin^2 2x) = \cos^3 2x.$

*Ví dụ 7.* 1) Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left(1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}\right)$$

2) Tìm giá trị của A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left(1 + \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) =$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \cdot \frac{2(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{2(1 - \cos^2 x)}{\sin x \sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

*Cách 2.* $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left(1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}\right) =$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x}\left(1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right) =$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \cdot \frac{2}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin x}.$$

2) Vì $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, nên $\sin x > 0$ và

$$\sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $A = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

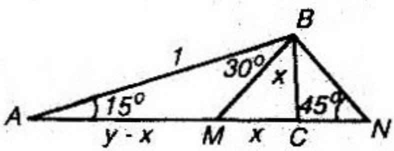
*Ví dụ 8.* Chứng minh rằng

$$A = \frac{\cos 15^o + \sin 15^o}{\cos 15^o - \sin 15^o} = \sqrt{3}.$$

*Giải: Cách 1.* $A = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 15^o + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 15^o}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 15^o - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 15^o} =$

$$= \frac{\sin 45^o \cos 15^o + \cos 45^o \sin 15^o}{\cos 45^o \cos 15^o - \sin 45^o \sin 15^o} = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \text{tg}60^o = \sqrt{3}.$$

*Cách 2.* Xét tam giác vuông ABC có AB = 1, $A = 15^o$, khi đó x = BC= $\sin 15^o$, y = AC = $\cos 15^o$. Lấy trên AC điểm M để CM = x, trên phần kéo dài AC điểm N để CN = x, khi đó AN = y + x, AM = y - x. Áp dụng định lý hàm sin cho các




*Hình 14*

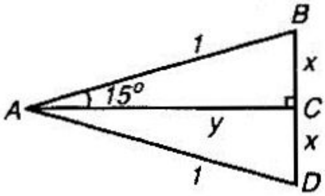
tam giác ABM và ABN ta được:

$$\frac{y-x}{1}=\frac{\sin 30^o}{\sin 135^o}=\frac{\sin 30^o}{\sin 45^o}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y-x=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{y+x}{1}=\frac{\sin 120^o}{\sin 45^o}=\frac{\sin 60^o}{\sin 45^o}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y+x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Từ đó

$$A=\frac{y+x}{y-x}=\sqrt{3}.$$




*Hình 15*

*Cách 3.* Dựng tam giác ACD đối xứng với tam giác ABC qua cạnh AC, khi đó S(ABD) = xy =

$$=\frac{1}{2}\sin 30^o=\frac{1}{4}.$$

Vậy $x^2+y^2=1$, $xy=\frac{1}{4}$. Từ đó $(x+y)^2=x^2+y^2+$

$$+2xy=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\ (y-x)^2=$$

$$=x^2+y^2-2xy=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow y-x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bởi vậy $A=\frac{y+x}{y-x}=\sqrt{3}$

*Ví dụ 9.* (Đề thi đại học A - B - D/1985). Các góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}.$$

Chứng minh rằng $\cos B+\cos C=1$.

*Giải: Cách 1.* Vì $0^o < A < 180^o$, nên $\sin A > 0$, do đó từ

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2\sin A\cos A}$$

suy ra

$$(\sin B + \sin C)\cos A = \frac{1}{2}(\sin 2B + \sin 2C) =$$

$$= \sin(B + C)\sin(B - C).$$

Vì $A + B + C = 180^o$ nên $\cos A = -\cos(B + C)$ do đó ta có $-(\sin B + \sin C)\cos(B + C) = \sin(B + C)\cos(B - C)$

hay $$-2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos(B + C) =$$

$$= 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos(B - C).$$

Vì $\sin\frac{B+C}{2} > 0$ suy ra

$$-\cos\frac{B-C}{2}\cos(B + C) = \cos\frac{B+C}{2}\cos(B - C) \Leftrightarrow$$

$$-\cos\frac{B-C}{2}\left(2\cos^2\frac{B+C}{2} - 1\right) =$$

$$= \cos\frac{B+C}{2}\left(2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) \qquad (*)$$

hay

$$2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\right).$$

$$-\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1\right)=0.$$

Vì $\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}>0$

$$\left(\text{do } 0^o<\frac{B}{2},\ \frac{C}{2}<90^o\right)$$

nên $2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1=0$

hay $\cos B+\cos C=1$.

*Cách 2.* Đặt $x=\cos\frac{B+C}{2}>0$, $y=\cos\frac{B-C}{2}$, từ (*) ta được $2xy^2+(2x^2-1)y-x=0$.

Do $x>0$, ta có $\Delta=(2x^2-1)^2+8x^2=(2x^2+1)^2$, do đó

$$y=\frac{-(2x^2-1)\pm(2x^2+1)}{4x}.$$

Vậy, hoặc $y=\frac{1}{2x}\Rightarrow xy=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos B+\cos C=1;$$

hoặc $y=-x\Rightarrow \cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=0$ vô lý, vì $0^o<\frac{B}{2}.\frac{C}{2}<90^o$.

Vậy $\cos B+\cos C=1$.

*Cách 3.* Cộng vào hai vế hệ thức đã cho với 1, ta được

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}$$

Theo định lý hàm sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$,

$\sin C = \frac{c}{2R}$ và do đó $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} =$

$= \frac{a + b + c}{2R\sin A} = \frac{p}{R\sin A}$, trong đó $p = \frac{a + b + c}{2}$ là nửa chu vi.

Ta lại có $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = (\sin 2A + \sin 2B) -$
$- (\sin 2(A + B + C) - \sin 2C) = 2\sin(A + B)\cos(A - B) -$
$- 2\cos(A + B + 2C)\sin(A + B) =$
$= 2\sin(A + B)[\cos(A - B) - \cos(A + B + 2C)] =$
$=4\sin(A + B)\sin(A + C)\sin(B + C) =$
$= 4\sin A\sin B\sin C =$

$4 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{2S}{R^2}$, trong đó S là diện tích tam giác. Từ hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{p}{R\sin A} = \frac{2S}{R^2\sin 2A}$$

và từ đó suy ra $\cos A = \frac{r}{R}$.

Lại vì $\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + \cos B + \cos C - 1 + 1 =$
$= (\cos A + \cos B) + [\cos(A + B + C) + \cos C] + 1 =$

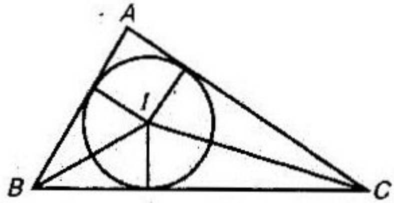
$$= 2\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} + 2\cos\frac{A + B + 2C}{2}\cos\frac{A + B}{2} + 1 =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B+2C}{2}\right] + 1 =$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} + 1 =$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1.$$

Mặt khác, nếu gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC, thì áp dụng định lý hàm sin vào tam giác BIC ta được




*Hình 16*

$$\frac{\sin\frac{C}{2}}{IB} = \frac{\sin\widehat{BIC}}{a} = \frac{\sin\left(180^o - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)}{a} =$$

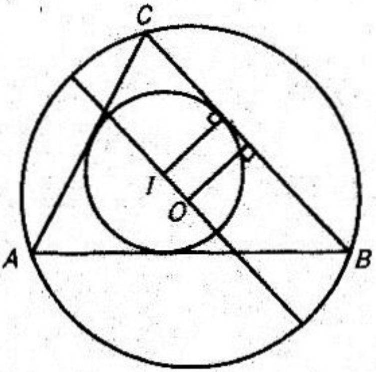
$$= \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{a} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{a}.$$

Vì $IB = \dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, nên $\dfrac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{r} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{a} =$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}}{2R\sin A} = \frac{1}{4R\sin\frac{A}{2}} \Rightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{R}.$$

Vậy $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$. Vì $\cos A = \frac{r}{R}$

suy ra $\cos B + \cos C = 1$.




*Hình 17*

*Cách 4.* Hệ thức đã cho có nghĩa là đường thẳng đi qua tâm I của vòng tròn nội tiếp và tâm O của vòng tròn ngoại tiếp song song với cạnh BC.

Từ đó $\cos A = \frac{r}{R}$.

Nhưng $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, suy ra $\cos B + \cos C = 1$.

*Ví dụ 10.* (Đề thi đại học khối A - B - D/1987).

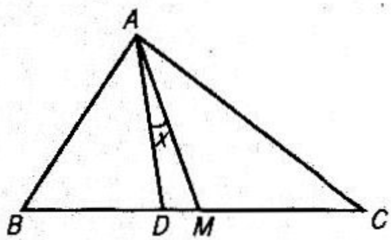
Trong tam giác ABC ta có B > C, AM và AD theo thứ tự là đường trung tuyến và đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}\widehat{DAM} = \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2}$$

*Giải:*

*Cách 1.* Đặt $x = \widehat{DAM}$. Lần lượt áp dụng định lý hàm sin vào các tam giác BAM, CAM ta được

$$\frac{BM}{MA} = \frac{\sin(\frac{A}{2} + x)}{\sin B},$$




*Hình 18*

$$\frac{CM}{MA} = \frac{\sin(\frac{A}{2} - x)}{\sin C}$$ . Vì BM = CM, nên suy ra

$$\frac{\sin(\frac{A}{2} + x)}{\sin B} = \frac{\sin(\frac{A}{2} - x)}{\sin C} \Rightarrow$$

$$\sin x \cos\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) = \cos x \sin\frac{A}{2}(\sin B - \sin C)$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B - C}{2}.$$

*Cách 2.* Ta có S(ABM) = S(CAM) = $\frac{1}{2}$ S(ABC) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}c.AM\sin(\frac{A}{2} + x) = \frac{1}{2}b.AM\sin(\frac{A}{2} - x) \Rightarrow$$

$$c(\sin\frac{A}{2}\cos x + \cos\frac{A}{2}\sin x) = b(\sin\frac{A}{2}\cos x - \cos\frac{A}{2}\sin x)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\cos x(b - c) = \cos\frac{A}{2}\sin x(b + c) \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,.\,\frac{b - c}{b + c} = \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,.\,\frac{\mathrm{tg}\frac{B - C}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B + C}{2}} =$$

$$= \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,.\,\frac{\mathrm{tg}\frac{B - C}{2}}{\mathrm{cotg}\frac{A}{2}} = \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B - C}{2}$$

(Vì theo định lý hàm tang: $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}}$ và vì $\dfrac{B+C}{2}$

và $\dfrac{A}{2}$ phụ nhau, nên $\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}$).

*Ví dụ 11.* 1) A, B, C là ba góc của một tam giác.

Chứng minh rằng $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} +$

$$+ \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

2) Tìm mối liên hệ giữa ba góc A, B, C, nếu chúng thỏa mãn hệ thức trong phần 1).

*Giải:* 1) *Cách 1.* Ta có $\dfrac{A}{2} + (\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}) = 90^o$, do đó

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}) = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}} \Rightarrow$$

$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = 1 - \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$ hay

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

*Cách 2.* Với a, b, c tùy ý ta có

$\cos(a + b + c) = \cos(a + b)\cos c - \sin(a + b)\sin c =$

$\cos a\cos b\cos c - \sin a\sin b\cos c - \sin a\cos b\sin c - \cos a\sin b\sin c.$

Chia cả hai vế cho cosacosbcosc (với giả thiết $\neq 0$),

ta được $\dfrac{\cos(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c} = 1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b - \operatorname{tg}b \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}c \operatorname{tg}a$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}b \operatorname{tg}c + \operatorname{tg}c \operatorname{tg}a =$$

$$1 - \frac{\cos(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}\ . \qquad (*)$$

Như vậy, khi A, B, C là 3 góc của một tam giác thì $\cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} \neq 0$ và $\cos(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}) =$

$= \cos 90^o = 0$, nên

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

2) Nếu thỏa mãn hệ thức ở phần 1) thì từ (*) suy ra $\cos(A/2 + B/2 + C/2) = 0 \Rightarrow A + B + C = (2k + 1)\pi$, k nguyên.

*Ví dụ 12.* Trong tam giác ABC, AC = b, AB = c, BC = a, AD là phân giác trong của góc A, có độ dài là d. Chứng minh rằng

1) $d = \dfrac{2bc}{b + c} \cos\dfrac{A}{2}$ ;

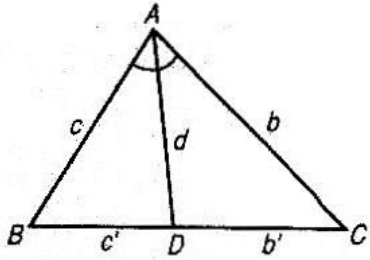
2) $d = \dfrac{\sqrt{bc(a + b + c)(b + c - a)}}{b + c}$ .

*Giải: Cách 1.* Ký hiệu BD = c', DC = b'. Theo tính chất của đường phân giác trong và tính chất tỷ lệ thức ta có:

$$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} =$$

$$\frac{b' + c'}{b + c} = \frac{a}{b + c}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{ac}{b + c}.$$




Áp dụng định lý hàm sin cho tam giác ABD ta được

*Hình 19*

$$\frac{d}{\sin B} = \frac{c'}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{ac}{(b + c)\sin\frac{A}{2}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{ac\sin B}{(b + c)\sin\frac{A}{2}}$$

Theo định lý hàm sin trong tam giác ABC ta có

$$a = 2R\sin A, \quad \sin B = \frac{b}{2R} \Rightarrow$$

$$d = \frac{2R\sin A.c.\frac{b}{2R}}{(b + c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b + c}\cos\frac{A}{2}.$$

*Cách 2.* Ta có:

S(ABC) = S(ABD) + S(ACD).

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cd\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bd\sin\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(b + c)d\sin\frac{A}{2}\ 2bc \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = d(b + c) \Rightarrow$$

$$d = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

*Cách 3.* Ký hiệu $\overrightarrow{AB}$ là véc tơ AB, gốc A, ngọn B. Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Vì $\overrightarrow{BD} = \frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$, nên $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b}\overrightarrow{AC} - \frac{c}{b}\overrightarrow{AD}$, tức là $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, do đó, nếu ký hiệu độ dài véctơ $\overrightarrow{AB}$ là $|\overrightarrow{AB}|$ ta được

$$d^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \left(\frac{b}{b+c}\right)^2|\overrightarrow{AB}|^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2|\overrightarrow{AC}|^2 +$$

$$+ 2\frac{bc}{(b+c)^2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2b^2c^2}{(b+c)^2} + 2\frac{bc}{(b+c)^2}.b.c.\cos A =$$

$$= \frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}(1+\cos A) = 4\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2},$$

trong đó ký hiệu $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là tích vô hướng của các véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, theo định nghĩa $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = |AB|.|AC|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Vậy $d = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

2) *Cách 1.* Trước hết, ta chứng minh rằng

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}.$$

Theo định lý hàm cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{A}{2} =$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc}.$$

Vì $0^o < \frac{A}{2} < 90^o$, nên $\cos \frac{A}{2} > 0$ và

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{bc}.$$

Vậy $d = \sqrt{\frac{bc(a + b + c)(b + c - a)}{b + c}}$.

*Cách 2.* Áp dụng định lý hàm côsin vào các tam giác ABD và ACD ta được

$$c'^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos \frac{A}{2} \Rightarrow c'^2b = c^2b + d^2b - 2bcd\cos \frac{A}{2},$$

$$b'^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos \frac{A}{2} \Rightarrow b'^2c = b^2c + d^2c - 2bcd\cos \frac{A}{2}.$$

Trừ hai đẳng thức cuối cho nhau ta được:

$$c'^2b - b'^2c = bc(c - b) + d^2(b - c) \Rightarrow$$

$$d^2 = \frac{c'^2b - b'^2c - bc(b - c)}{b - c}.$$

Theo cách 1 phần 1) ta có $c' = \frac{ac}{b + c}$, $b' = \frac{ab}{b + c}$.

Thay vào biểu thức $d^2$ và rút gọn ta được

$$d^2 = bc\frac{(b + c)^2 - a^2}{(b + c)^2} = bc\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{(b + c)^2}.$$

và $$d = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$$

*Ví dụ 13.* (Ứng dụng ví dụ 12).

1) Trong tam giác ABC, AB = c, AC = b, độ dài đường phân giác trong của góc A là d. Chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là:

$$\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2) (Đề thi đại học khối A/1977). Cho hình chóp tứ giác đều PABCD, đỉnh P. Một mặt phẳng cắt các cạnh bên của hình chóp PA, PB, PC, PD lần lượt tại M, N, Q, R. Đặt PM = m, PN = n, PQ = q, QR = r. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r}$$

*Giải:*

1) *Cách 1.* Từ công thức (1) trong ví dụ 12 ta có:

$$d = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{A}{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (*)$$

*Cần.* Nếu tam giác ABC vuông tại A thì A = 1v ⇒

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

*Đủ.* Nếu $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ thì từ (*) $\Rightarrow 2\cos\frac{A}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vì $0^o < \frac{A}{2} < 90^o \Rightarrow \frac{A}{2} = 45^o \Rightarrow A = 90^o$

*Cách 2.* Từ công thức (2) trong ví dụ 12 ta có:

$$d = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}}$$

*Đủ*. Nếu $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} \Rightarrow$

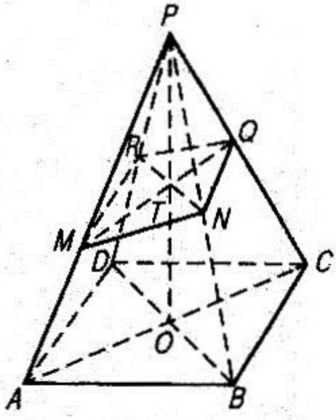
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(b+c)^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{bc}} \Leftrightarrow 2bc = (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$\Rightarrow$ theo định lý Pitago, tam giác ABC vuông tại A.

*Cần*. Nếu A = 1v, thì $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow bc[(b+c)^2 - a^2] =$
$= 2(bc)^2$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{b+c}{bc} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2) *Cách 1.* Gọi T là giao điểm của các đường chéo của tứ giác MNQR, nó phải nằm trên giao tuyến của các mặt phẳng (PAC) và (PBD), tức là trên đường PO. Vì PABCD là hình chóp tứ giác đều, nên $\widehat{MPT} = \widehat{NPT} = \widehat{QPT} = \widehat{RPT}$, gọi giá trị chung của các góc ấy là x. Đặt PT = d. Vì PT là phân giác của tam giác MPQ và của tam giác NPR, nên theo ví dụ 12 phần 1) ta có:



*Hình 20*

$$d = \frac{2mq}{m+q}\cos x = \frac{2nr}{n+r}\cos x \Rightarrow \frac{m+q}{mq} = \frac{n+r}{nr}$$

hay $\frac{1}{m} + \frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r}$

*Cách 2.* V(PMNQR) = V(MNRP) + V(QNRP) =

= V(NMQP) + V(RMQP).

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(h_M + h_Q)\, S(PNR) = \frac{1}{3}(h_N + h_R)\, S(PMQ), \quad (*)$$

trong đó $h_M$, $h_Q$ là khoảng cách từ M và Q đến (PNR) và $h_N$, $h_R$ là khoảng cách từ N và R đến (PMQ). Vì hình chóp tứ giác PABCD đều, nên chân các đường vuông góc hạ từ M, N, Q, R đều nằm trên PO, do vậy $h_M$ = msinx,

$h_N$ = nsinx, $h_Q$ = qsinx, $h_R$ = rsinx và $\frac{1}{2}$ S(PNR) =

nrsin2x, S(PMQ) = mqsin2x. Thay vào (*) ta được

$$\frac{1}{6}(m + q)\sin x.nr\sin 2x = \frac{1}{6}(n + r)\sin x.mq\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{m + q}{mq} = \frac{n + r}{nr} \text{ hay } \frac{1}{m} + \frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r}.$$

*Ví dụ 14.* Chứng minh rằng cần và đủ để tam giác ABC đều là:

$$a + b + c = 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C). \quad (1)$$

*Giải: Cách 1.* Như đã biết có cách chứng minh như sau:

a = 2RsinA = 2Rsin(B + C) = 2RsinBcosC +

+ 2RsinCcosB = bcosC + ccosB.

Tương tự:

b = a cosC + c cosA,

c = b cosA + a cosB.

Thay vào vế trái (1), chuyển vế phải sang vế trái và nhóm các số hạng chung ta được:

$$(a - b)(\cos B - \cos A) + (b - c)(\cos C - \cos B) + \\ + (c - a)(\cos A - \cos C) = 0. \qquad (*)$$

***Đủ.*** Vì trong một tam giác, đối diện với cạnh lớn là góc lớn, và vì hàm cos là hàm nghịch biến, nên suy ra:

$$(a - b)(\cos B - \cos A) \geq 0,\ (b - c)(\cos C - \cos B) \geq 0, \\ (c - a)(\cos A - \cos C) \geq 0.$$

Từ (*) ta có tổng 3 số không âm bằng 0, nên mỗi số hạng phải bằng 0. Từ đó suy ra $a = b = c \Rightarrow$ tam giác ABC đều.

*Cần.* Nếu tam giác ABC đều, ta có $a = b = c \Rightarrow$ mỗi số hạng của (*) bằng 0, do vậy (*) đúng.

*Cách 2. Cần.* Nếu tam giác ABC đều thì $a = b = c$, $A = B = C = 60^o \Rightarrow \cos A = \cos B = \cos C = \frac{1}{2}$, đẳng thức đã cho trở thành $3a = 3a$ đúng.

***Đủ.*** Theo định lý hàm sin ta có $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Thay vào 2 vế của đẳng thức (1) ta được

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

Ta có $\sin A + \sin B + \sin C = (\sin A + \sin B) -$

$$- [\sin(A + B + C) - \sin C) = 2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2} -$$

$$- 2\cos\frac{A + B + 2C}{2}\sin\frac{A + B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A + B}{2}\left[\cos\frac{A - B}{2} - \cos\frac{A + B + 2C}{2}\right] =$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\ \sin\frac{A+C}{2}\ \sin\frac{B+C}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Tương tự (xem ví dụ 9, cách 3) ta có

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C =$$

$$= 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Vì $0^o < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < 90^o$, nên $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0$

và ta được $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$.

Lại vì $0^o < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < 90^o \Rightarrow \sin\frac{A}{2} > 0,\ \sin\frac{B}{2} > 0,$ $\sin\frac{C}{2} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta được:

$$\frac{1}{2} = \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}} \le$$

$$\le \frac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3} \le \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức Côsi đạt dấu =. Từ đó suy ra:

$$\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2}$$

Vì $0^o < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < 90^o$, nên suy ra $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$

hay A = B = C. Ta còn phải chứng minh $\sin\frac{A}{2} +$

$+ \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$. Ta có $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} +$

$$+ \sin\frac{C}{2} + \sin 30^o = 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} +$$

$$+ 2\sin\frac{C+60^o}{4}\cos\frac{C-60^o}{4} \le 2(\sin\frac{A+B}{4} +$$

$$+ \sin\frac{C+60^o}{4}) = 4\sin\frac{A+B+C+60^o}{8} \times$$

$$\times \cos\frac{A+B-C-60^o}{8} \le 4\sin 30^o.$$

Vậy $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le 3\sin 30^o = \frac{3}{2}$.

*Nhận xét.* Từ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow A = B = C$, ta cũng có thể làm như sau:

$$(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2})\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2})\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 = 0.$$

Từ đây: *Cách1.* Hoặc xem đây là phương trình bậc hai theo $\sin\frac{C}{2}$.

Vì phương trình có nghiệm, nên suy ra:

$$\Delta' = 4\cos^2\frac{A-B}{2} - 4 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \cos^2\frac{A-B}{2} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2\frac{A-B}{2} = 1 \Rightarrow A = B.\Delta' = 0 \Rightarrow \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{C}{2} = 30^o \Rightarrow C = 60^o. \text{ Vậy } A = B = C = 60^o.$$

*Cách 2.* Hoặc biến đổi về dạng tổng hai số không âm:

$$4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 = 4\sin^2\frac{C}{2} -$$

$$- 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} - \cos^2\frac{A-B}{2} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2})^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^o. \end{cases}$$

Vậy $A = B = C = 60^o$.

*Ví dụ 15.* Chứng minh rằng, với mọi x ta đều có:

1) $y = \sin^4x + \cos^4x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} +$

$+ \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$

2) $y = \sin^6x + \cos^6x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4} +$

$+ \frac{3}{4}\cos^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

Từ đó suy ra rằng:

1) $y_{max} = 1, \quad y_{min} = \frac{1}{2}$,

2) $y_{max} = 1, \quad y_{min} = \frac{1}{4}$;

trong đó ký hiệu $y_{max}$ là giá trị lớn nhất của biểu thức y, còn $y_{min}$ là giá trị bé nhất của biểu thức y.

*Chú ý.* Bạn đọc nên lưu ý các đẳng thức trong ví dụ 15 và các hằng đẳng thức đại số dùng để chứng minh các đẳng thức này, vì chúng rất hay được dùng khi thi đại học.

*Giải.* 1) *Cách 1.* Theo công thức hạ bậc

$$\sin^2x = \frac{1 - \cos2x}{2}, \quad \cos^2x = \frac{1 + \cos2x}{2} \quad \text{ta có:}$$

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x)^2 + (\cos^2x)^2 = (\frac{1 - \cos2x}{2})^2 +$$

$$+ (\frac{1 + \cos2x}{2})^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^22x) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^22x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \sin^22x) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^22x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x.$$

*Cách 2.* Theo công thức $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ ta có $(\sin^2x)^2 + (\cos^2x)^2 = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x =$

$$= 1 - \frac{1}{2}(4\sin^2x\cos^2x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^22x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

2) *Cách 1.* Theo công thức hạ bậc như cách 1 phần 1) ta có

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 +$$

$$+ \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 - \sin^2 2x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

*Cách 2.* Theo công thức $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}(4\sin^2 x\cos^2 x) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} =$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Từ kết quả trên, ta suy ra rằng

1) $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x$. Vì $0 \le \cos^2 2x \le 1$, nên

$y_{max} = 1$, khi $\cos^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow \cos 4x = 1 \Rightarrow$

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}, \text{ k nguyên.}$$

$y_{min} = \frac{1}{2}$, khi $\cos^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, k nguyên

2) $y = \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x$. Vì $0 \le \cos^2 2x \le 1$,

nên $y_{max} = 1$ khi $\cos^2 2x = 1 \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$, k nguyên.

$y_{min} = \frac{1}{4}$ khi $\cos^2 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, k nguyên

*Nhận xét.* Ta cũng có thể sử dụng tính tuần hoàn của hàm lượng giác, đưa bài toán về việc xét $y_{max}$ và $y_{min}$ trên $[0, 2\pi]$, rồi dùng công cụ đạo hàm, nhưng cách này cồng kềnh và khó hơn.

*Ví dụ 16.* Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số

$$y = \cos x(1 + 2\cos 2x)$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $y = \cos x + 2\cos x\cos 2x$

$= \cos x + \cos x + \cos 3x = 2\cos x + \cos 3x.$

Hiển nhiên là $|y| \le 3$ và chú ý là $y = 3$ khi $x = 0$, $y = -3$ khi $x = \pi$ suy ra $y_{max} = 3$ khi $x = 0$; $y_{min} = -3$ khi $x = \pi$.

*Cách 2.* (Phương pháp đại số hóa). Ta có

$y = \cos x(4\cos^2 x - 1)$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow -1 \le t \le 1$, khi đó

$$y = 4t^3 - t \Rightarrow y' = 12t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow t = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Lập bảng biến thiên:

| $t$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-3$ | ↗ | $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ M | ↘ | $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ m | ↗ | $3$ |

Vậy $y_{max} = 3$ khi $t = 1 \Rightarrow x = 0$, và $y_{min} = -3$ khi $t = -1$ $\Rightarrow x = \pi$.

*Chú ý:* 1) Để tính M và m của y ta tiến hành như sau:

Tại M và m thì $y' = 0$ khi $t^2 = \frac{1}{12}$, $y = t(4t^2 - 1) = -\frac{2}{3}t$

$$\Rightarrow M = -\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}},\ m = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

2) Ta cũng có thể nhận xét hàm tuần hoàn và đưa bài toán về đoạn $0 \le x \le 2\pi$ và áp dụng công cụ đạo hàm cho hàm lượng giác,

nhưng cách này cồng kềnh và phức tạp hơn (Bạn đọc tự làm và chứng tỏ điều đó).

*Ví dụ 17.* Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số

$$y = \sin^2x \cos x + \cos^2x \sin x$$

*Giải: Cách 1.* (Biến đổi vế phải). Ta có

$$y = \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \cos(x - \frac{\pi}{4}).$$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$ ; $2x = 2t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2x = \sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos 2t$, do đó

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t \cos t = \frac{\sqrt{2}}{4} (\cos t + \cos 3t)$. Vì vậy hoàn toàn

như cách 1, Ví dụ 16, ta có $y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $t = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{4}, y_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ khi } t = \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}.$$

*Cách 2.* (Phương pháp đại số hóa: Nếu trong biểu thức lượng giác có sinx + cosx và sinx thì đặt sinx + cosx = t). Ta có y = sinx cosx + (sinx + cosx). Đặt

$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \Rightarrow$

$t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1 \Rightarrow$ và $y = \frac{1}{2}(t^2 - 1)t$

$= \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t \Rightarrow y' = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Lập bảng biến thiên:

| t | $-\sqrt{2}$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | - | 0 | + | |
| y | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ↗ | M $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ | ↘ | m $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

Vậy $y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $t = \sqrt{2} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$;

$y_{min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $t = -\sqrt{2} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$.

*Cách 3.* Vì sinx và cosx là hàm tuần hoàn, chu kỳ $2\pi$, nên ta xét bài toán trên đoạn $0 \le x \le 2\pi$ là đủ. Ta có $y' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - 2\cos x\sin^2 x + \cos^3 x =$

$= (\cos x - \sin x)(1 + \frac{3}{2}\sin 2x) = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4}$ và $\sin 2x = -\frac{2}{3}$. Ta tìm $y_{max}$ và $y_{min}$ tại các điểm $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ và tại các điểm x, mà $\sin 2x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$, $x = 2\pi$ là đủ.

Ta có $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y(\sin 2x = -\frac{2}{3}) =$

$$= \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad y(0) = 0, \qquad y(2\pi) = 0$$

$$\Rightarrow y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Ví dụ 18.* Cho $\alpha$ là một góc cố định. Tìm giá trị bé nhất của $y = tg^2(x + \alpha) + tg^2(x - \alpha)$.

*Giải: Cách 1.* Theo công thức $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$ và $tga \pm tgb = \dfrac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$ ta có

$$[tg(x + \alpha) - tg(x - \alpha)]^2 = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)},$$

$$[tg(x + \alpha) - tg(x - \alpha)]^2 = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)}.$$

Cộng hai đẳng thức này ta được

$$2[tg^2(x + \alpha) + tg^2(x - \alpha)] = \frac{\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha}{\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)} =$$

$$= \frac{4(\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha)}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2} \Rightarrow tg^2(x + \alpha) + tg^2(x - \alpha) =$$

$$= \frac{2(\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha)}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2}.$$

Để phân thức đạt giá trị bé nhất thì tử số phải đạt giá trị bé nhất, đồng thời mẫu số đạt giá trị lớn nhất. Tử số đạt giá trị bé nhất khi $\sin^2 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \pm 1$. Vậy thì:

Nếu $\cos 2\alpha \geq 0$ thì mẫu số sẽ lớn nhất khi $\sin 2x = 1$

$$\text{và } y_{min} = \frac{2\sin^2 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)^2} = 2tg^2\alpha.$$

Nếu $\cos 2\alpha < 0$ thì mẫu số sẽ lớn nhất khi $\sin 2x = -1$

và $y_{min} = \dfrac{2\sin^2 2\alpha}{(-1 + \cos 2\alpha)^2} = 2\cot g^2\alpha$.

*Cách 2.* Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm ta được:

$$y = tg^2(x + \alpha) + tg^2(x - \alpha) \geq 2|tg(x + \alpha)tg(x - \alpha)| =$$

$$= 2\frac{|\cos 2\alpha - \cos 2x|}{|\cos 2\alpha + \cos 2x|}.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $tg^2(x + \alpha) =$

$= tg^2(x - \alpha) \Rightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$. Vậy:

Nếu $\cos 2\alpha \geq 0$ thì $y_{min} = \dfrac{2|\cos 2\alpha - 1|}{|\cos 2\alpha + 1|} =$

$= 2|tg^2\alpha| = 2tg^2\alpha$.

Nếu $\cos 2\alpha < 0$ thì $y_{min} = \dfrac{2|\cos 2\alpha + 1|}{|\cos 2\alpha - 1|} =$

$= 2|\cot g^2\alpha| = 2\cot g^2\alpha$.

*Ví dụ 19.* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \sqrt{a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x} +$$
$$+ \sqrt{a\cos^2x + b\sin x\cos x + c\sin^2x},$$

trong đó a, b, c là 3 số để có biểu thức trong các căn có nghĩa.

*Giải: Cách1.* Theo bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski ta có: $y \leq \sqrt{2}\ \times$

$$\times\ \sqrt{(a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x) + (a\cos^2x+b\sin x\cos x+c\sin^2x)}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{a + c + b\sin 2x} \leq \sqrt{2}\sqrt{a + c + |b|}.$$

Dấu = đạt được khi $\sqrt{a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x} =$

$= \sqrt{a\cos^2x + b\sin x\cos x + c\sin^2x}$

$\Leftrightarrow a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x =$

$= a\cos^2x + b\sin x\cos x + c\sin^2x \Leftrightarrow (a - b)\cos2x = 0 \Leftrightarrow$

$\cos2x = 0 \Leftrightarrow |\sin2x| = 1$. Vậy $y_{max} = \sqrt{2}\sqrt{a + c + |b|}$.

*Cách 2.* (Bạn đọc nên lưu ý: Nếu $y \geq 0$ thì y và $y^2$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất đồng thời).

Vì $y \geq 0$, nên y và $y^2$ đạt giá trị lớn nhất đồng thời. Ta có

$y^2 = a + c + b\sin2x +$

$+ 2\sqrt{(a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x)(a\cos^2x + b\sin x\cos x + c\sin^2x)}$.

$y^2$ sẽ đạt giá trị lớn nhất nếu đồng thời $b\sin2x$ và biểu thức trong căn đạt giá trị lớn nhất. Vì biểu thức trong căn là (bạn đọc tự tính theo công thức hạ bậc):

$$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b}{2}\sin2x\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2\cos^2 2x,$$

nên nó lớn nhất khi $b\sin2x$ lớn nhất, $\cos^2 2x$ bé nhất. Vậy $y^2$ và do đó y lớn nhất khi $b\sin2x = |b| \Rightarrow \sin2x = \pm1 \Rightarrow \cos2x = 0$.

khi đó $y_{max} = \sqrt{2}\sqrt{a + c + |b|}$.

*Ví dụ 20.* 1) Cho $A = \cos(x - a)$, $B = \sin(x - b)$.

Chứng minh rằng $y = A^2 - 2AB\sin(a - b) + B^2$ không phụ thuộc vào x.

2) Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn hệ thức $\cos^2(x - a) - 2\sin a\sin x\cos(x - a) + \sin^2x = \cos^2a$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* $y = \cos^2(x - a) - 2\cos(x - a)(\sin(x - b) \times$

$\times \sin(a - b)) + \sin^2(x - b) = \cos^2(x - a) - \cos(x - a) \times$

$\times [\cos(x - a) - \cos(x + a - 2b)] + \sin^2(x - b) =$

$= \cos(x + a - 2b)\cos(x - a) + \sin^2(x - b) =$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2(a - b) + \cos 2(x - b)] + \frac{1 - \cos 2(x - b)}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos 2(a - b)}{2} = \cos^2(a - b).$$

Vậy y không phụ thuộc x.

*Cách 2.* Xem y là hàm số của x. Để không phụ thuộc x thì đạo hàm y' của y theo đối số x phải bằng 0. Ta có

$y' = -2\cos(x - a)\sin(x - a) - 2\sin(a - b)[-\sin(x - a)\sin(x - b) +$

$+ \cos(x - a)\cos(x - b)] + 2\sin(x - b)\cos(x - b) =$

$= -\sin 2(x - a) - 2\sin(a - b)\cos(2x - a - b) + \sin 2(x - b) =$

$= -\sin 2(x - a) - \sin 2(a - x) - \sin 2(x - b) + \sin 2(x - b) = 0.$

Vậy y không phụ thuộc x.

2) Biểu thức vế trái là giá trị của y khi b = 0. Vậy theo cách 1, câu 1) thì biểu thức trở thành $\cos^2 a = \cos^2 a$.

Vậy $\forall x$ biểu thức đều thỏa mãn.

*Ví dụ 21.* Biến đổi thành tích các thừa số biểu thức sau đây:

$$A = \sin a + \sin b + \sin(a + b).$$

*Giải: Cách 1.* $A = 2\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2} +$

$$+ 2\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a + b}{2} = 2\sin\frac{a + b}{2}\left(\cos\frac{a - b}{2} +\right.$$

$$\left.+ \cos\frac{a + b}{2}\right) = 4\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}.$$

*Cách 2.* $A = \sin a + \sin b + \sin a\cos b + \sin b\cos a =$

$$= \sin a(1 + \cos b) + \sin b(1 + \cos a) =$$

$$= 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2} + 4\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}(\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}) =$$

$$= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

*Ví dụ 22.* A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy biến đổi biểu thức $\cos A + \cos B - \cos C + 1$ thành tích các thừa số.

*Giải:*

*Cách 1.* Ta có $\cos A + \cos B - \cos C + 1 =$

$= (\cos A + \cos B) + \cos(A + B) + 1$ (vì $A + B + C = 180^o$)

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos^2\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}) =$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (\text{vì } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^o).$$

*Cách 2.* Vì $A + B + C = 180^o$, nên $1 = -\cos(A + B + C)$

và ta có $\cos A + \cos B + \cos C + 1 =$

$= (\cos A + \cos B) - (\cos(A + B + C) + \cos C) =$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B+2C}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

*Ví dụ 23.* Biến đổi biểu thức sau đây về dạng thuận tiện lấy lôgarit: $A = tg30^o + tg40^o + tg50^o + tg60^o$.

*Giải: Cách 1.* $A = (tg30^o + tg60^o) + (tg40^o + tg50^o) =$

$$= \frac{\sin 90^o}{\cos 30^o \cos 60^o} + \frac{\sin 90^o}{\cos 40^o \cos 50^o} = \frac{4}{\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{1}{\sin 50^o \cos 50^o} = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos 10^o} =$$

$$= \frac{4\left(\cos 10^o + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos 10^o} = \frac{4(\cos 10^o + \cos 30^o)}{\sqrt{3}\cos 10^o} =$$

$$= \frac{8\cos 20^o \cos 10^o}{\sqrt{3}\cos 10^o} = \frac{8\cos 20^o}{\sqrt{3}}.$$

*Cách 2.* Theo công thức $tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$

ta có $A = (tg30^o + tg40^o) + (tg50^o + tg60^o) =$

$$= \frac{\sin 70^o}{\cos 30^o \cos 40^o} + \frac{\sin 110^o}{\cos 50^o \cos 60^o} =$$

$$= \frac{\sin 70^o}{\cos 30^o \cos 40^o} + \frac{\sin 70^o}{\sin 30^o \sin 40^o} =$$

$$= \frac{4\sin70^\circ(\sin30^\circ\sin40^\circ + \cos30^\circ\cos40^\circ)}{4\sin30^\circ\cos30^\circ\sin40^\circ\cos40^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin70^\circ\cos10^\circ}{\sin60^\circ\sin80^\circ} = \frac{4\sin70^\circ\cos10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos10^\circ} = \frac{8\cos20^\circ}{\sqrt{3}}.$$

*Ví dụ 24.* Biến đổi biểu thức sau đây về dạng thuận tiện lấy lôgarit: $A = \sin47^\circ + \sin61^\circ - \cos79^\circ - \cos65^\circ$.

*Giải: Cách 1.* Vì $61 - 47 = 79 - 65 = 14$, nên ta viết

$A = (\sin47^\circ + \sin61^\circ) - (\cos79^\circ + \cos65^\circ) =$

$2\sin54^\circ\cos7^\circ - 2\cos72^\circ\cos7^\circ = 2\cos7^\circ(\sin54^\circ - \sin18^\circ) =$

$$= 4\cos7^\circ\cos36^\circ\sin18^\circ = \frac{4\cos7^\circ\sin18^\circ\cos18^\circ\cos36^\circ}{\cos18^\circ} =$$

$$= \frac{\cos7^\circ\sin72^\circ}{\cos18^\circ} = \frac{\cos7^\circ\cos18^\circ}{\cos18^\circ} = \cos7^\circ.$$

*Cách 2.* $A = \sin47^\circ + \sin61^\circ - \sin11^\circ - \sin25^\circ =$

$= (\sin47^\circ - \sin25^\circ) + (\sin61^\circ - \sin11^\circ) =$

$= 2\cos36^\circ\sin11^\circ + 2\cos36^\circ\sin25^\circ = 2\cos36^\circ \times$

$\times (\sin11^\circ + \sin25^\circ) = 4\cos36^\circ\sin18^\circ\cos7^\circ = \cos7^\circ.$

*Ví dụ 25.* A, B, C là 3 góc của một tam giác. Hãy biến đổi biểu thức $tgA + tgB + tgC$ về dạng thuận tiện lấy lôgarít.

*Giải: Cách 1.* Vì $A + B + C = 180^\circ$, nên $\sin(A + B) =$ $= \sin C$, $\cos(A + B) = -\cos C$. Do vậy $tgA + tgB + tgC =$

$$= \frac{\sin(A + B)}{\cos A\cos B} + tgC = \frac{\sin C}{\cos A\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} =$$

$$= \frac{\sin C(\cos C + \cos A\cos B)}{\cos A\cos B\cos C} = tgC\,\frac{\cos C + \cos A\cos B}{\cos A\cos B} =$$

$$= tgC\frac{-\cos(A+B)+\cos A\cos B}{\cos A\cos B} =$$

$$= tgC\frac{-\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A\cos B}{\cos A\cos B} =$$

$= tgAtgBtgC.$

*Cách 2.* $tgA + tgB + tgC = tgA + tgB - tg(A + B) =$

$$= tgA + tgB - \frac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} =$$

$$= \frac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB}(1 - tgAtgB - 1) = tgAtgBtgC.$$

*Cách 3.* Vì $A + B + C = 180^o$, nên $tg(A + B) =$

$$= tg(180^o - C) \Leftrightarrow \frac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} = -tgC \text{ hay } tgA + tgB =$$

$= -tgC + tgAtgBtgC \Rightarrow tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC.$

*Ví dụ 26.* $\alpha$ và $\beta$ là các giá trị khác nhau của x, thỏa mãn hệ thức $a\cos x + b\sin x = c$,

đồng thời $a^2 + b^2 > 0$ và $\alpha - \beta \neq 2k\pi$.

1) Tính $\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$ theo a, b, c.

2) Chứng minh rằng a) $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$;

b) $tg\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Vì $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$.

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ nên từ $a\cos x + b\sin x = c \Rightarrow$

$\Rightarrow a(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) - c = -2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a - c) - 2a\sin^2\frac{x}{2} = -2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Bình phương hai vế ta được $(a - c)^2 - 4a(a - c)\sin^2\frac{x}{2} + 4a^2\sin^4\frac{x}{2} =$

$= 4b^2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} =$

$= 4b^2(\sin^2\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}) \Rightarrow 4(a^2 + b^2)\sin^4\frac{x}{2}$ -

$-4[a(a - c) + b^2]\sin^2\frac{x}{2} + (a - c)^2 = 0.$

Vì $\alpha$ và $\beta$ là hai giá trị của x, nên chúng là nghiệm của phương trình cuối và do đó

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{(a - c)^2}{4(a^2 + b^2)}.$$

*Cách 2.* Viết lại hệ thức dưới dạng

$$a\cos x - c = -b\sin x.$$

Bình phương hai vế ta được $a^2\cos^2x - 2ac\cos x + c^2 = b^2\sin^2x$ hay $(a^2 + b^2)\cos^2x - 2ac\cos x + c^2 - b^2$. (*)

Vì theo đầu bài các giá trị $x = \alpha$ và $x = \beta$ thỏa mãn hệ thức (*) nên nếu xem (*) là phương trình bậc hai (do $a^2 + b^2 > 0$) thì $\cos\alpha$ và $\cos\beta$ sẽ là nghiệm của phương trình. Theo công thức Viét ta có:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2ac}{a^2 + b^2}\ ;\quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Ta lại có $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\dfrac{1-\cos\beta}{2} =$

$= \dfrac{1}{4}[1-(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos\alpha\cos\beta] = \dfrac{1}{4}[1-\dfrac{2ac}{a^2+b^2}+$

$+\dfrac{c^2-b^2}{a^2+b^2}] = \dfrac{(a-c)^2}{4(a^2+b^2)}$.

*Nhận xét.* Ở câu 1) của bài này ta không quan tâm đến điều kiện để phương trình (*) có nghiệm, mà cũng không quan tâm đến việc bình phương 2 vế có tương đương hay không.

2) *Cách 1.* Theo đầu bài $\alpha$ và $\beta$ là các giá trị của x nên

$$a\cos\alpha + b\cos\alpha = c,$$
$$a\cos\beta + b\sin\beta = c.$$

Cộng và trừ vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c, \quad (1)$$

$$-a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0. \quad (2)$$

Do $\alpha-\beta \neq 2k\pi \Rightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{2} \neq k\pi \Rightarrow \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$ nên

từ (2) suy ra $a\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = b\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. (3)

Để xác định ta xem $a \neq 0$ (bạn đọc tự xét trường hợp $a = 0$), khi đó ta sẽ chứng minh được rằng $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$.

Thật vậy, nếu trái lại ta có $\alpha+\beta = (2k+1)\pi$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\alpha = c \\ -a\cos\alpha + b\sin\alpha = c \end{cases} \Rightarrow \quad 2a\cos\alpha = 0.$$

Vì $a \neq 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + l\pi \Rightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - (\alpha + \beta) =$

$= 2(l - k)\pi$ trái với giả thiết.

b) Từ (3) suy ra $\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}$.

a) Từ (1) suy ra

$$\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c^2}{\left(a\cos\frac{\alpha + \beta}{2} + b\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{c^2}{\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2}\left(a + b\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} =$$

$$= c^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \frac{1}{\left(a + b\frac{b}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2c^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha + \beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2c^2}{(a^2 + b^2)^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

*Cách 2.* a) $\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2} =$

$$= \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{2}.$$

Từ cách 2 câu 1) ta có $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. Để tính $\sin\alpha\sin\beta$ ta viết $a\cos x + b\sin x = c$ dưới dạng $b\sin x - c =$ $= -a\cos x$; sau khi bình phương hai vế và đổi $\cos^2 x$ sang $\sin^2 x$ ta được:

$$(a^2 + b^2)\sin^2 x - 2bc\sin x + c^2 - a^2 = 0.$$

từ đó $\quad \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}$.

Vậy

$$\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right]$$

$$= \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

b) $$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{1 - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}}{1 + \dfrac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \dfrac{c^2 - a^2}{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

*Ví dụ 27.* Cho A, B, C là ba góc của một tam giác và $\mathrm{tg}B = 2$, $\mathrm{tg}C = 3$. Tính góc A.

*Giải: Cách 1.* Vì A, B, C là ba góc của một tam giác, nên theo ví dụ 25 ta có $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C$

hay tgA + 5 = 6tgA $\Rightarrow$ tgA = 1. Vì $0^o < A < 180^o$, nên suy ra $A = 45^o$.

*Cách 2.* Ta có $tg(B + C) = \dfrac{tgB + tgC}{1 - tgBtgC} = \dfrac{5}{1 - 6} =$

$= -1 = -tgA \Rightarrow tg\,A = 1$. Vì $0^o < A < 180^o \Rightarrow A = 45^o$.

*Ví dụ 28.* 1) Chứng minh rằng, nếu trong tam giác ABC ta có $\sin\dfrac{A}{2} = \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ thì $tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}$ và ngược lại.

2) Tìm hệ thức giữa các cạnh của tam giác ấy.

*Giải: 1) Cách 1.* Vì $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = 90^o$, nên

$\sin\dfrac{A}{2} = \cos(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}) = \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} -$

$- \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} =$

$= 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$. Vì $0^o < \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2} < 90^o$, nên suy ra

$tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Ngược lại, nếu $tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} =$

$= \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} -$

$- \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \cos(\dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}) = \sin\dfrac{A}{2}$.

*Cách 2.* $\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos(\frac{B}{2}+\frac{C}{2})}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= 1 - \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ngược lại, nếu $\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 1$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 1 - \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\cos(\frac{B}{2}+\frac{C}{2})}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Vì $0^o < \frac{B}{2}$ , $\frac{C}{2} < 90^o \Rightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0$ và

$\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ .

2) *Cách 1.* $\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} =$

$= 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \sin A = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\times$

$\times\sin(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}) = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} +$

$+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}) = \sin^2\frac{B}{2}\sin C + \sin^2\frac{C}{2}\sin B =$

$= \frac{1-\cos B}{2}\sin C + \frac{1-\cos C}{2}\sin B.$

Theo định lý hàm sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$ , $\sin B = \frac{b}{2R}$ ,

$\sin C = \frac{c}{2R}$ ; theo định lý hàm cosin ta có:

$$1-\cos B = 1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{b^2-(a-c)^2}{2ac} ;$$

$$1-\cos C = 1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} .$$

Bởi vậy

$$\frac{a}{2R} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{2ac}\cdot\frac{c}{2R} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{b}{2R}$$

hay

$$2a = \frac{b^2 - (a-c)^2 + c^2 - (a-b)^2}{2a} = \frac{-2a^2 + 2a(b+c)}{2a} =$$

$= -a + b + c.$

Từ đó $3a = b + c.$

*Cách 2.* Vì $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 + 2ac - b^2}{2ac} =$$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac} = \frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac} = \frac{p(p-b)}{ac}$$

và vì $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{4ac} =$$

$$= \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{4ac} = \frac{(p-a)(p-c)}{ac},$$

nên $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \dfrac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$

Tương tự ta có $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$

Bởi vậy từ $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p-a}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p - 2a = p$

$$\Rightarrow p = 2a \Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = 2a \Rightarrow b + c = 3a.$$

*Ví dụ 29.* 1) Cho tam giác ABC, BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng, nếu A = 2C thì $a^2 = bc + c^2$ và ngược lại.

2) Gọi D là chân đường phân giác của góc A. Chứng minh rằng đối với tam giác ABD ta cũng có hệ thức như tam giác ABC.

*Giải:* 1) Vì A = 2C $\Rightarrow$ sinA = 2sinCcosC, nhưng

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \ \sin C = \frac{c}{2R}, \ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2b = c(a^2 + b^2 - c^2) \Rightarrow a^2(b - c) = c(b - c)(b + c)$. Nếu $b \neq c \Rightarrow a^2 = c(b + c) = bc + c^2$. Khi b = c thì tam giác ABC vuông cân, $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 = 2c^2 = bc + c^2$ cũng đúng. Ngược lại, nếu $a^2 = bc+c^2$, thì vì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (định lý hàm côsin) $\Rightarrow 2c\cos A = b - c \Rightarrow 2\sin C\cos A = \sin B - \sin C \Rightarrow \sin C = \sin(A + C) - 2\sin C\cos A = \sin(A - C) \Rightarrow$ A = 2C.

*Cách 2.* Vì A = 2C $\Rightarrow$ B = 180° - 3C. Theo định lý hàm sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{2\sin C\cos C} = \frac{b}{\sin 3C} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow$$

$$a = 2c\cos C; \ b = \frac{c\sin 3C}{\sin C} = c(-4\sin^2 C + 3) \Rightarrow$$

$$a^2 - bc = 4c^2\cos^2 C + 4c^2\sin^2 C - 3c^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = bc + c^2.$$

Ngược lại, nếu $a^2 = bc + c^2 \Rightarrow$ theo định lý hàm sin ta có $\sin^2 A = \sin B\sin C + \sin^2 C \Rightarrow$

$\sin^2A - \sin^2C = \sin(A + C)\sin C \Rightarrow \dfrac{1 - \cos 2A}{2} -$

$- \dfrac{1 - \cos 2C}{2} = \sin(A + C)\sin C \Rightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 2C - \cos 2A) =$

$= \sin(A + C)\sin C \Rightarrow \sin(A + C)\sin(A - C) =$

$= \sin(A + C)\sin C$. Vì $0^o < A + C < 180^o \Rightarrow$

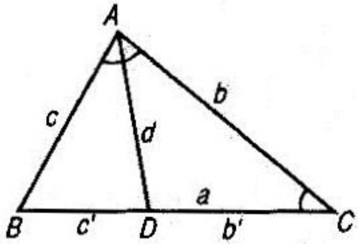
$\Rightarrow \sin(A + C) > 0 \Rightarrow \sin(A - C) = \sin C \Rightarrow A = 2C$.

2) Vì $\widehat{ADB} = 2C = A$, nên $\Delta ADB \sim \Delta CAB \Rightarrow$

$= \dfrac{AD}{CA} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{DB}{AB} = k$

hay

$\dfrac{d}{b} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{c} = k \Rightarrow$




Hình 21

$a = \dfrac{c}{k}$, $b = \dfrac{d}{k}$, $c = \dfrac{c'}{k}$. Thay các giá trị a, b, c vào biểu thức $a^2 = bc + c^2$ ta được $\dfrac{c^2}{k^2} = \dfrac{d}{k} \cdot \dfrac{c'}{k} + \dfrac{c'^2}{k^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = dc' + c'^2$.

*Nhận xét.* Bài này có thể giải theo 2 cách ở câu 1).

*Ví dụ 30.* 1) A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2B + \sin^2C - 2\sin B\sin C\cos A = \sin^2A$;

b) $\cos^2B + \cos^2C + 2\cos B\cos C\cos A = \sin^2A$.

2) Nếu A, B, C thỏa mãn các hệ thức ở câu 1) thì chúng

liên hệ với nhau thế nào?

*Giải: Cách 1.* a) Ta chứng minh rằng $\sin^2B + \sin^2C - \sin^2A - 2\sin B\sin C\cos A = X = 0$.

Ta có: $X = \dfrac{1 - \cos 2B}{2} + \dfrac{1 - \cos 2C}{2} - \sin^2A -$

$$- 2\sin B\sin C\sin A =$$

$$= 1 - \sin^2A - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) - 2\sin B\sin C\cos A =$$

$$= \cos^2A - \cos(B + C)\cos(B - C) - 2\sin B\sin C\cos A =$$

$$= \cos A(\cos A - 2\sin B\sin C) - \cos(B + C)\cos(B - C) =$$

$$= \cos(B + C)[\cos(B + C) + 2\sin B\sin C] -$$

$$- \cos(B + C)\cos(B - C) =$$

$$= \cos(B + C)[\cos B\cos C + \sin B\sin C] -$$

$$- \cos(B + C)\cos(B - C) =$$

$$= \cos(B + C)\cos(B - C) - \cos(B + C)\cos(B - C) = 0.$$

b) Ta chứng minh rằng $Y = \cos^2B + \cos^2C - \sin^2A + 2\cos B\cos C\cos A = 0$. Ta có:

$$Y = \frac{1 + \cos 2B}{2} + \frac{1 + \cos 2C}{2} - \sin^2A + 2\cos B\cos C\cos A =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + 1 - \sin^2A + 2\cos B\cos C\cos A =$$

$$= \cos(B + C)\cos(B - C) + \cos^2A + 2\cos B\cos C\cos A =$$

$$= \cos(B + C)\cos(B - C) + \cos A(\cos A + 2\cos B\cos C) =$$

$$= \cos(B + C)\cos(B - C) + \cos A[-\cos(B + C) +$$

$+ 2\cos B\cos C] = \cos(B + C)\cos(B - C) +$

$+ \cos A\,[-\cos B\cos C + \sin B\sin C + 2\cos B\cos C] =$

$= \cos(B + C)\cos(B - C) - \cos(B + C)\cos(B - C) = 0.$

*Cách 2.* a) Vì $\sin(B + C) = \sin A \Rightarrow \sin B\cos C +$

$+ \sin C\cos B = \sin A$. Bình phương hai vế ta được

$\sin^2 B\cos^2 C + \sin^2 C\cos^2 B + 2\sin B\cos C\sin C\cos B = \sin^2 A$

$\Rightarrow \sin^2 B(1 - \sin^2 C) + \sin^2 C(1 - \sin^2 B) +$

$+ 2\sin B\cos C\sin C\cos B = \sin^2 A \Rightarrow \sin^2 B + \sin^2 C +$

$+ 2\sin B\sin C(\cos B\cos C - \sin B\sin C) = \sin^2 A \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos(B + C) = \sin^2 A \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A = \sin^2 A.$

*Nhận xét.* Ta cũng có thể xuất phát từ $\cos(B + C) = -\cos A \Rightarrow$ $\cos B\cos C = \sin B\sin C - \cos A$. Bình phương hai vế ta được $\cos^2 B\cos^2 C = \sin^2 B\sin^2 C + \cos^2 A - 2\sin B\sin C\cos A \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C) = 1 - \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 B\sin^2 C =$

$= \sin^2 B\sin^2 C + \cos^2 A - 2\sin B\sin C\cos A \Rightarrow 1 - \cos^2 A =$

$= \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ hay

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A.$

b) Vì $\cos(B + C) = -\cos A \Rightarrow \cos B\cos C + \cos A =$

$= \sin B\sin C \Rightarrow$ bình phương hai vế ta được $\cos^2 B\cos^2 C +$

$+ \cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C = \sin^2 B\sin^2 C =$

$= (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) = 1 - \cos^2 B - \cos^2 C +$

$+ \cos^2 B\cos^2 C \Rightarrow \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos B\cos C\cos A =$

$= 1 - \cos^2 A = \sin^2 A.$

*Nhận xét.* Ta cũng có thể xuất phát từ $\sin(B + C) = \sin A \Rightarrow$ $\sin B\cos C + \sin C\cos B = \sin A$. Bình phương hai vế ta được:

$\sin^2B\cos^2C + \sin^2C\cos^2B + 2\sin B\sin C\cos B\cos C = \sin^2A \Rightarrow$

$(1 - \cos^2B)\cos^2C + (1 - \cos^2C)\cos^2B + 2\sin B\sin C\cos B\cos C =$

$= \sin^2A \Rightarrow \cos^2C + \cos^2B - 2\cos B\cos C(\cos B\cos C - \sin B\sin C) =$

$- \sin^2A \Rightarrow \cos^2B + \cos^2C - 2\cos B\cos C\cos(B + C) = \sin^2A \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2B + \cos^2C + 2\cos B\cos C\cos A = \sin^2A.$

*Cách 3.* (Chung cho cả hai câu a) và b)). Ký hiệu

$$X = \sin^2B + \sin^2C - 2\sin B\sin C\cos A - \sin^2A\ ;$$

$$Y = \cos^2B + \cos^2C + 2\cos B\cos C\cos A - \sin^2A$$

$\Rightarrow X + Y = 2 + 2\cos A(\cos B\cos C - \sin B\sin C) - 2\sin^2A$

$= 2[\cos^2A + \cos A\cos(B + C)]$

$= 2[\cos^2A - \cos^2A] = 0,$

$Y - X = (\cos^2B - \sin^2B) + (\cos^2C - \sin^2C) +$

$+ 2\cos(B - C)\cos A = \cos 2B + \cos 2C + 2\cos(B - C)\cos A =$

$= 2\cos(B - C)[\cos(B + C) + \cos A] =$

$= 2\cos(B - C)[-\cos A + \cos A] = 0.$

Vậy : $Y + X = 0,\ Y - X = 0 \Rightarrow X = Y = 0.$

2) a) *Cách 1.* Ta có $0 = \sin^2B + \sin^2C - 2\sin B\sin C\cos A -$

$- \sin^2A = (\sin^2B - \sin^2A) + \sin^2C - 2\sin B\sin C\cos A =$

$= \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2B - 1 + \cos 2A) + \sin^2C - \sin C[\sin(B - A) +$

$+ \sin(B + A)] = - \sin(A + B)\sin(A - B) + \sin^2C +$

$+ \sin C\sin(A - B) - \sin C\sin(A + B) =$

$= - \sin(A + B)[\sin(A - B) + \sin C] + \sin C[\sin(A - B) +$

$+ \sin C] = \sin(A - B) + \sin C]\ [\sin C - \sin(A - B)] =$

$$= 4\sin\frac{A - B + C}{2}\cos\frac{A - B - C}{2}\cos\frac{C + A + B}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{C - A - B}{2}.$$ Do vậy :

Hoặc: $\sin\dfrac{A - B + C}{2} = 0 \Rightarrow A - B + C = 2k\pi$, k nguyên.

Hoặc: $\cos\dfrac{A - B - C}{2} = 0 \Rightarrow A - B - C = (2l + 1)\pi$, l nguyên.

Hoặc: $\sin\dfrac{A + B + C}{2} = 0 \Rightarrow A + B + C = (2m + 1)\pi$, m nguyên.

Hoặc: $\sin\dfrac{C - A - B}{2} = 0 \Rightarrow C - A - B = 2n\pi$, n nguyên.

*Cách 2.* Ta có : $0 = \dfrac{1 - \cos2B}{2} + \dfrac{1 - \cos2C}{2} -$

$$- 2\sin B\sin C\cos A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A -$$

$$- \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2C) - 2\sin B\sin C\cos A =$$

$$= \cos^2 A - \cos(B + C)\cos(B - C) - 2\sin B\sin C\cos A =$$

$$= \cos^2 A - \cos(B + C)\cos(B - C) - [\cos(B - C) -$$

$$- \cos(B + C)]\cos A = \cos A[\cos A - \cos(B - C)] +$$

$$+ [\cos A - \cos(B - C)]\cos(B + C) =$$

$$= [\cos A - \cos(B - C)][\cos A + \cos(B + C)] =$$

$$= -4\sin\frac{A + B - C}{2}\sin\frac{A - B + C}{2}\cos\frac{A + B + C}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{A - B - C}{2} = 4\sin\frac{A - B + C}{2}\cos\frac{A - B - C}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{A + B + C}{2}\sin\frac{C - A - B}{2}$$

và ta quay về các quan hệ ở cách 1.

*Cách 3.* Ta có $1 - \cos^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \times \sin C\cos A \Rightarrow 1 - \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 B\sin^2 C = \cos^2 A + \sin^2 B\sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A \Rightarrow (1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C) = (\sin B\sin C - \cos A) \Rightarrow \cos^2 B\cos^2 C = (\sin B\sin C - \cos A)^2 \Rightarrow \sin B\sin C - \cos A = \pm \cos B\cos C \Rightarrow$ hoặc $\sin B\sin C - \cos A = \cos B\cos C \Rightarrow \cos B\cos C - \sin B\sin C = -\cos A \Rightarrow \cos(B + C) = -\cos A \Rightarrow \cos(B + C) + \cos A = 0$,
hoặc: $\sin B\sin C - \cos A = -\cos B\cos C \Rightarrow \cos B\cos C + \sin B\sin C - \cos A = 0 \Rightarrow \cos(B - C) - \cos A = 0$.

Và ta quay lại các hệ thức trong cách 2.

b) Câu này cũng có nhiều cách giải ứng với các phép biến đổi lượng giác khác nhau, chẳng hạn có các cách như câu (a). Dưới đây là cách giải tương ứng (cách 1 câu a). Các cách giải khác bạn đọc làm tương tự.

$$0 = \cos^2 B - \sin^2 A + \cos^2 C + 2\cos B\cos C\cos A =$$
$$= \frac{1 + \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2A}{2} + \cos^2 C + 2\cos B\cos C\cos A =$$
$$= \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2B] + \cos^2 C + 2\cos B\cos C\cos A =$$
$$= \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C + [\cos(A - B) + \cos(A + B)]\cos C = \cos(A + B)[\cos(A - B) + \cos C] + \cos C[\cos(A - B) + \cos C] = [\cos(A + B) + \cos C] \times$$
$$\times [\cos(A - B) + \cos C] = 4\cos\frac{A + B + C}{2}\cos\frac{A + B - C}{2} \times \cos\frac{A - B + C}{2}\cos\frac{A - B - C}{2} = 0.$$

Từ đó hoặc: $\cos\frac{A + B + C}{2} = 0 \Rightarrow A + B + C = (2k + 1)\pi$,

k nguyên:

hoặc: $\cos\dfrac{A+B-C}{2} = 0 \Rightarrow A+B-C = (2l+1)\pi$, l nguyên;

hoặc: $\cos\dfrac{A-B+C}{2} = 0 \Rightarrow A-B+C = (2m+1)\pi$, m nguyên;

hoặc: $\cos\dfrac{A-B-C}{2} = 0 \Rightarrow A-B-C = (2n+1)\pi$, n nguyên.

## BÀI TẬP

**1.** Không dùng bảng số, hãy tính các biểu thức

1) $tg20^o tg40^o tg60^o tg80^o$;

2) $\dfrac{1}{2\sin10^o} - 2\sin70^o$;

3) $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16}$;

4) $tg^2\dfrac{\pi}{12} + tg^2\dfrac{3\pi}{12} + tg^2\dfrac{5\pi}{12}$;

5) $tg9^o - tg27^o - tg63^o + tg81^o$;

6) $\cos^6\dfrac{\pi}{16} + \cos^6\dfrac{3\pi}{16} + \cos^6\dfrac{5\pi}{16} + \cos^6\dfrac{7\pi}{16}$;

**2.** Tính:

1) $\sin 180^o$ và $\cos18^o$; 2) $\sin 36^o$ và $\cos36^o$; 3) $\sin9^o$ và $\cos9^o$.

**3.** 1) Tính tg2x, nếu $3tg^2x - 8tgx - 3 = 0$ và $\dfrac{\pi}{8} < x < \dfrac{3\pi}{8}$.

2) Tính $\sin^4x + \cos^4x$, nếu $\sin2x = \dfrac{1}{7}$.

3) Tính $\cos(60^o - x)$, nếu $tgx = \dfrac{3}{4}$ và $180^o < x < 270^o$.

4) Tính $\sin x + \cos\dfrac{x}{2}$, nếu $\cos x = -\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

**4.** Tính biểu thức:

1) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

2) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$;

3) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{13\pi}{5} + \sin\frac{23\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$.

**5.** 1) Cho $\sin2a + \sin2b = 2\sin2(a + b)$, $a + b \neq k\pi$, tính tga tgb.

2) Cho $\sin a - \cos a = \frac{3}{5}$, tính sin2a.

3) Cho $\text{tg}a = \frac{2}{3}$, tính $\sin(2a + \frac{5\pi}{4})$.

**6.** Rút gọn biểu thức

1) $\sin3x\cos^3x + \cos3x\sin^3x$;

2) $\cos3x\cos^3x - \sin3x\sin^3x$.

3) $\cos(x + \frac{\pi}{4})\sqrt{\sin^2x(1 + \text{cotg}x) + \cos^2x(1 + \text{tg}x)}$,

$$x \neq k\frac{\pi}{2},\ \text{k nguyên};$$

4) $$\frac{4\sin(4x - \frac{\pi}{2})}{\text{cotg}^2(2x - \frac{3\pi}{2}) - \text{tg}^2(2x + \frac{3\pi}{2})}.$$

**7.** Chứng minh rằng

1) $$\frac{\sin75^\circ - \cos75^\circ}{\sin75^\circ + \cos75^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

2) $$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$ x là góc nhọn;

3) $$\frac{\sin x + \cos x}{\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}} = \sin x\cos x,$$ x là góc nhọn.

**8.** 1) (A - B - D/1983). Trong tam giác ABC, đặt BC = a, h là đường cao hạ từ đỉnh A. Chứng minh rằng

$$a\sin B\sin C = h\sin(B + C).$$

2) Trong tam giác ABC, đường cao CE cắt đường cao AD tại trung điểm H của AD. Chứng minh rằng tgBtgC = 2.

3) Trong tam giác vuông ABC, A = 1v. Ký hiệu y là góc tạo bởi đường trung tuyến xuất phát từ góc B và cạnh huyền BC. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}y = \frac{\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}^2B + 2}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của y và giá trị B tương ứng.

4) Trong tam giác ABC, a = BC, b = AC, c = AB thỏa mãn hệ thức b + c = 2a. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

5) Trong tam giác vuông ABC cho cạnh huyền BC = a và tích hai đường phân giác trong của góc B và C là $m^2$. Chứng minh rằng $$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{m^2}{4a^2}.$$

**9.** 1) Trong tam giác ABC, AH là đường cao. Gọi y là góc tạo bởi AH và đường thẳng xuất phát từ A và đi qua tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng $$\mathrm{tg}\frac{y}{2} = \mathrm{tg}\frac{B - C}{2}.$$

2) Trong tam giác ABC, AM là trung tuyến. Cho BC = a, $\widehat{BAM} = \beta$, $\widehat{CAM} = \gamma$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}\frac{B - C}{2} = \mathrm{cotg}^2\frac{\beta + \gamma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

3) Chóp tam giác vuông ABC, A = 1v; gọi góc giữa đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền là y. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}\frac{B - C}{2}.$$

**10.** 1) a) A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$.

b) Nếu 3 góc A, B, C thỏa mãn hệ thức ở câu a) thì chúng liên hệ với nhau như thế nào?

2) a) Chứng minh rằng, nếu A, B, C là 3 góc của một tam giác thì $\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C + \operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A = 1$.

b) Nếu 3 góc A, B, C thỏa mãn hệ thức trên thì chúng liên hệ với nhau như thế nào?

3) Chứng minh rằng, nếu

a) A, B, C là 3 góc tùy ý thì

i) $$\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2} \times$$
$$\times \sin\frac{C+A}{2} + \sin(A+B+C);$$

ii) $$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2} \times$$
$$\times \cos\frac{C+A}{2} - \cos(A+B+C).$$

b) A, B, C là 3 góc của một tam giác thì

i) $$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

ii) $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

**11.** Trong tam giác ABC, đường cao AH = h, phân giác trong AD = d, trung tuyến AM = m, phân giác ngoài AD' = d'. Chứng minh rằng

a) $h = \dfrac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ ; b) $d = \dfrac{a\sin B\ \sin C}{\sin A\cos\dfrac{B - C}{2}}$ ;

c) $d' = \dfrac{a\sin B\sin C}{\sin A\ \sin\dfrac{B - C}{2}}$ ; d) $m^2 = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - \dfrac{1}{2}a^2)$.

**12.** Trong tam giác ABC, cho BC = a, r là bán kính vòng tròn nội tiếp, $r_a$ là bán kính vòng tròn bằng tiếp cạnh a. Chứng minh rằng

a) $r = (p - a)\text{tg}\dfrac{A}{2} = a\dfrac{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$, p là nửa chu vi;

b) $r_a = p\text{tg}\dfrac{A}{2} = (p - b)\text{cotg}\dfrac{C}{2} = (p - c)\text{cotg}\dfrac{B}{2} =$

$$= a\dfrac{\cos\dfrac{B}{2}\ \cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}.$$

**13.** Trong tam giác ABC, ký hiệu p là nửa chu vi. Chứng minh rằng

a) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p - a)}{bc}}$, $\cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p - b)}{ac}}$,

$\cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p - c)}{ab}}$ ;

b) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - b)(p - c)}{bc}}$, $\sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - a)(p - c)}{ac}}$;

$\sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - a)(p - b)}{ab}}$ ;

c) $\text{tg}\,\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ , $\text{tg}\,\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ ,

$\text{tg}\,\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ .

**14.** 1) Trong tam giác ABC, ký hiệu AB = c, AC = b, phân giác trong AD là d. Chứng minh rằng cần và đủ để tam giác ABC có góc A = 120° là

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2) Tìm thêm một cách giải cho ví dụ 10.

3) Tìm thêm một trong cách giải cho ví dụ 13, 2).

4) Tìm thêm một cách giải cho bài tập 12, a).

**15.** 1) Chứng minh rằng cần và đủ để tam giác ABC vuông là một trong các điều kiện sau đây thỏa mãn

a) $\sin^2 A + \sin^2 B = 1 + \cos^2 C$.

b) (Đề thi đại học A/1974) $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ ,

(góc A = 1v).

c) $\dfrac{\sin B + \cos C}{\cos B + \cos C} = \text{tg}B$.

d) $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$.

e) $\sin 2B = \dfrac{2bc}{a^2}$ .

g) $\sin B\,\text{tg}B = \dfrac{b^2}{ac}$ .

h) $\text{cotg}\,\dfrac{B}{2} = \dfrac{a+c}{b}$ .

i) $S = p(p-a)$. k) $c = c\cos 2B + b\sin 2B$.

2) Chứng minh rằng cần và đủ để tam giác ABC cân là thỏa mãn một trong các hệ thức:

a) $a = 2b\cos C$. b) $\sin A = 2\sin B\cos C$.

c) $a\,tgA + b\,tgB = (a + b)\,tg\dfrac{A + B}{2}$.

d) $\sin C = 2\sin A\sin B\,tg\dfrac{C}{2}$.

e) $(p - b)\cot g\dfrac{C}{2} = p\,tg\dfrac{B}{2}$.

g) $a + b = tg\dfrac{C}{2}\,(a\,tgA + b\,tgB)$.

3) Đề thi đại học A - B - D/1981). Chứng minh rằng, nếu

$$\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^2}{b + c - a} = a^3 \\ a = 2b\cos C \end{cases}$$

thì tam giác ABC là đều.

4) Chứng minh rằng nếu $\begin{cases} \sin B\sin C = \dfrac{3}{4} \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$

thì tam giác ABC là đều.

5) Chứng minh rằng cần và đủ để tam giác ABC đều là

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{1}{8}.$$

6) Chứng minh rằng cần và đủ để tam giác ABC có góc $C = 120^o$ là

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$

7) Chứng minh rằng, nếu $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$ thì tam giác ABC có một góc bằng $120^o$.

8) Chứng minh rằng, cần và đủ để tam giác ABC

a) có ít nhất một góc bằng $60^o$ là

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0;$$

b) có ít nhất một góc bằng $60^o$ là

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3};$$

c) là vuông, nếu $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$;

d) là vuông, nếu $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$.

9) Cho tam giác ABC nội tiếp trong vòng tròn bán kính $R = 1$. Chứng minh rằng tam giác ấy nhọn, vuông, tù, nếu $a^2 + b^2 + c^2 >$ , = hoặc $< 8$ tương ứng.

**16.** 1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của x ta đều có:

a) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x$;

b) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{15}{16}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 6x$;

c) $\cos^8 x - \sin^8 x = \frac{7}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 6x$.

2) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các biểu thức trên.

**17.** Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số:

a) $y = \cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x$;

b) $y = \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x$;

c) $y = \sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x$;

d) $y = \sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x + c} + \sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}$.

**18.** Chứng minh rằng các biểu thức sau đây không phụ thuộc x:

1) (Dự trữ A/1981) $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{3} - x) +$

$+ \cos^2(\frac{\pi}{3} + x) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - x) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} + x) - 2\sin^2 x$.

2) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(\frac{2\pi}{3} + x) + \cos^2(\frac{2\pi}{3} - x)$.

3) $f(x) = \sin^2 x + \sin^2(\frac{2\pi}{3} + x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3} - x)$.

4) $f(x) = \cos^2(x - a) + \cos^2 x - 2\cos a \cos x \cos(a - x)$.

5) $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + \sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4\cos^2(x - \frac{\pi}{2})}$

**19.** Biến đổi các biểu thức sau đây thành tích các thừa số:

1) $1 + \sin x + \cos x$; 2) $\cos x + \cos y + \sin(x + y)$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$; 4) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

**20.** A, B, C là 3 góc của một tam giác. Hãy biến đổi các biểu thức sau đây về dạng thuận tiện lấy lôgarit:

1) $\sin A - \sin B - \sin C$; 2) $\cos A + \cos B + \cos C - 1$;

3) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$; 4) $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C$.

**21.** Biến đổi các biểu thức sau đây về dạng thuận tiện lấy lôgarit:

1) $2\cos 20^\circ \sin 80^\circ - 2\sin 60^\circ + \cos 50^\circ$;

2) $\cos 40^\circ + \cos 50^\circ + \cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ$;

3) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ + \sin 60^\circ + \sin 70^\circ$;

4) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ$.

**22.** A, B, C là 3 góc của một tam giác. Hãy biến đổi biểu thức $\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ về dạng thuận tiện lấy lôgarit.

**23.** Cho $tg^4 x + \operatorname{cotg}^4 x = b$, $tg^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = a$.

Chứng minh rằng $b + 2 = a^2$.

**24.** Cho $\cos(x - \alpha) = a$, $\sin(x - \beta) = b$.

Chứng minh rằng $\cos^2(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2ab\sin(\alpha - \beta)$.

**25.** A, B, C là góc 3 nhọn của một tam giác.

1) Chứng minh rằng $\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} =$

$$= \text{cotg}\frac{A}{2}\,.\,\text{cotg}\frac{B}{2}\,.\,\text{cotg}\frac{C}{2}\,.$$

2) Cho $\text{tg}A = \sqrt{3}$, $\text{tg}B = 2\sqrt{2}$. Hãy tính $\text{cotg}\frac{C}{2}$.

**26.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có:

1) $\sin\frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{a}\cos\frac{A}{2}$;

2) $\cos\frac{B - C}{2} = \frac{b + c}{a}\sin\frac{A}{2}$;

3) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$;

4) $\text{tg}\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{p - c}{p}$;

5) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

**27.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có

1) $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$,

2) $S = p^2\text{tg}\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{B}{2}\,\text{tg}\frac{C}{2}$,

3) $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

**28.** Trong tam giác ABC, trung tuyến AM bằng cạnh AB. Chứng minh rằng:

1) $\text{tg}B = 3\text{tg}C$; 2) $\sin A = 2\sin(B - C)$.

**29.** (Đề thi đại học A-B-D/1986). Cho tam giác ABC, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Chứng minh rằng tam giác ABC là cân, nếu

$$a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Điều ngược lại có đúng hay không?

**30.** 1) Chứng minh rằng, nếu $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ thì

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 1 - 2\sin A\sin B\sin C.$$

2) Nếu A, B, C thỏa mãn hệ thức trên, thì chúng có mối liên hệ gì?

**31.** Chứng minh rằng, nếu $m\sin(a + b) = \cos(a - b)$, trong đó $a - b \neq k\pi$ và $|m| \neq 1$ thì biểu thức

$$M = \frac{1}{1 - m\sin 2a} + \frac{1}{1 - m\sin 2b}$$

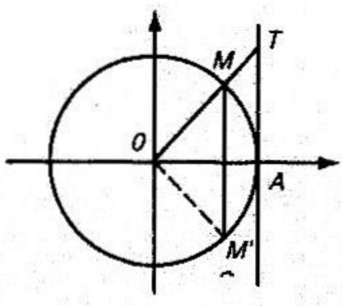
không phụ thuộc vào a và b.

**32.** Trong tam giác ABC góc $B = A + x$, góc $C = A + 2x$, trong đó $x > 0$. Chứng minh rằng $c - a = 2R\sin x$, trong đó c là độ dài AB, a là độ dài cạnh BC, R là bán kính vòng tròn ngoại tiếp.

## §2. Bất đẳng thức

*Ví dụ 1.* Chứng minh rằng a) $\sin x < x < \text{tg}x$ khi $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; b) $\sin 2x < 2\sin x$ khi $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

*Giải: a) Cách 1.* Xét $x = \overset{\frown}{AM}$ $\Rightarrow \overset{\frown}{AM'} = x$ ; $\sin x = MH$ $\Rightarrow$ $2\sin x = MM'$, $2x = \overset{\frown}{MAM'}$. Đoạn thẳng MM' bé hơn đường cong $\overset{\frown}{MAM'} \Rightarrow 2\sin x < 2x \Rightarrow \sin x < x$.




Hình 22

Ta có diện tích tam giác OAT lớn hơn diện tích quạt tròn OAM .

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.1.AT = \frac{1}{2}\text{tg}x > \frac{1}{2}.x \Rightarrow x < \text{tg}x.$$

Vậy $\sin x < x < \text{tg}x$.

*Cách 2.* Đặt $y = x - \sin x \Rightarrow y' = 1 - \cos x > 0 \Rightarrow$ y đồng biến $\Rightarrow y(x) > y(0) = 0 \Rightarrow x - \sin x > 0 \Rightarrow x > \sin x$.

Đặt g = tgx - x vì g(x) được xác định tại mọi điểm trong khoảng $[0, \frac{\pi}{2}]$ nên với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ta có $g' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \Rightarrow$ g đồng biến $\Rightarrow g(x) > g(0) = 0$

$\Rightarrow tgx - x > 0 \Rightarrow tgx > x$. Vậy $\sin x < x < tgx$.

b) *Cách 1.* Vì $0 < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos x < 1$. Nhân 2 vế với $2\sin x > 0$ ta được $2\sin x\cos x < 2\sin x$ hay $\sin 2x < 2\sin x$.

*Cách 2.* Đặt $y = 2\sin x - \sin 2x \Rightarrow y' = 2\cos x - 2\cos 2x =$
$= 2(\cos x - \cos 2x) = 2(\cos x - 2\cos^2 x + 1) = 2(\cos x - \cos^2 x + 1 -$
$- \cos^2 x) = 2[\cos x(1 - \cos x) + \sin^2 x] > 0 \Rightarrow$ y đồng biến. Vậy $y(x) > y(0) = 0 \Rightarrow 2\sin x - \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x < 2\sin x$.

*Ví dụ 2.* Chứng minh rằng, nếu $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ thì

1) $1 \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$ ; 2) $\cos x + x\sin x \ge 1$.

*Giải.* Khi $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x \ge 0$, $\cos x \ge 0$,

và vì $0 \le \sin x \le 1$, $0 \le \cos x \le 1$, nên $\sqrt{\sin x} \ge \sin x \ge \sin^2 x$ và $\sqrt{\cos x} \ge \cos x \ge \cos^2 x$ nên

1) *Cách 1.*

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x \ge 1$. Vì $\sin x + \cos x \ge 0$ nên lấy căn 2 vế ta được $\sin x + \cos x \ge 1$.

Theo bất đẳng thức Côsin-Bunhiacôpski ta có $\sin x +$
$+ \cos x \le \sqrt{2}\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{2}$.

*Cách 2.* Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

Vì $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_{max} = \sqrt{2}$ khi

$x = \frac{\pi}{4}$, $y_{min} = \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ khi $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $\qquad 1 \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$.

2) *Cách 1.* Vì $\cos x \ge \cos^2 x$, $x \ge \sin x$ (theo ví dụ 1) $\Rightarrow$ $x\sin x \ge \sin^2 x$. vậy $\cos x + x\sin x \ge \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

*Cách 2.* Đặt $y = \cos x + x\sin x \Rightarrow y' = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x \ge 0$ (vì $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow$ y đồng biến $\Rightarrow y(x) \ge y(0) = 1 \Rightarrow \cos x + x\sin x \ge 1$.

*Ví dụ 3.* Chứng minh rằng:

a) Nếu $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ thì $\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y$.

b) Nếu $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ thì

$\frac{\cos x + \cos y}{2} \le \cos\frac{x+y}{2}$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y$.

*Giải:* a) Ta có $\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Ta phải chứng minh rằng $\sin\frac{x+y}{2} - \frac{\sin x + \sin y}{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x+y}{2}\left(1 - \cos\frac{x-y}{2}\right) \ge 0$. Điều này đúng, vì

$1 - \cos\frac{x-y}{2} \ge 0$, và vì $0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi$, nên $\sin\frac{x+y}{2} \ge 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ hoặc $\cos\frac{x-y}{2} = 1$, tức là hoặc $\frac{x+y}{2} = 0$, hoặc $\frac{x+y}{2} = \pi$ hoặc $\frac{x-y}{2} = 0$; Trong trường hợp đầu suy ra $x = y = 0$, trường hợp thứ hai $x = y = \pi$, trường hợp thứ ba $x = y$. Vậy trong mọi trường hợp đều có $x = y$.

b) Ta phải chứng minh rằng $\cos\frac{x+y}{2} - \frac{\cos x + \cos y}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2}\left(1 - \cos\frac{x-y}{2}\right) \geq 0$. Điều này đúng vì

$1 - \cos\frac{x-y}{2} \geq 0$ và vì $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, nên

$\cos\frac{x-y}{2} \geq 0$ . Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos\frac{x+y}{2} = 0$,

hoặc $\cos\frac{x-y}{2} = 1$, tức là hoặc $\frac{x+y}{2} = -\frac{\pi}{2}$,

hoặc $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2}$, hoặc $\frac{x-y}{2} = 0$. Trong mọi trường hợp đều suy ra $x = y$.

*Nhận xét.* Có thể sử dụng kết quả câu a) để giải câu b) và ngược lại

*Ví dụ 4.* Chứng minh rằng

1) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, với mọi giá trị của x;

2) $\sin x > x - \frac{x^3}{4}$, với x trong khoảng $(0,\pi)$.

*Giải: Cách 1.* 1) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$.

Ta có $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, mà theo thí dụ 1 phần này ta có $\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{4} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{x^2}{2}$.

2) Ta có $\sin x = 2\text{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\text{tg}\frac{x}{2}(1 - \sin^2\frac{x}{2})$.

Theo ví dụ 1 phần này ta có $\text{tg}\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ và $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$, do đó $\sin x > x(1 - \frac{x^2}{4}) = x - \frac{x^3}{4}$.

*Cách 2.* 1) Đặt $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y' = -\sin x + x \ge 0$ (theo ví dụ 1 phần này) $\Rightarrow$ y đồng biến khi

$x \ge 0 \Rightarrow y(0) \Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$ khi $x \ge 0$.

Vì y(x) là hàm chẵn nên suy ra $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$ khi $x \le 0$.

2) Đặt $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{4} \Rightarrow g' = \cos x - 1 + \frac{3}{4}x^2 > 0$, khi $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{4}$.

Thật ra trong cách 2 này ta chứng minh được bất đẳng thức đúng khi $x > 0$.

*Ví dụ 5.* Chứng minh rằng với mọi giá trị của x ta đều có $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \ge -7$.

*Giải: Cách 1.*

Ta có $4\cos 8x + 8\cos 4x = 8\cos^2 4x + 8\cos 4x - 4$.

Đặt $\cos 4x = t$, $-1 \le t \le 1 \Rightarrow y = 8t^2 + 8t - 4$ là một parabôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh $t = -\dfrac{1}{2}$, $y = -\Delta'/a = -6$, nên $y_{min} = -6 \Rightarrow y \ge y_{min} = -6 \Rightarrow 4\cos 8x + 8\cos 4x \ge -6 \Rightarrow$ $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \ge -7$ (vì $\cos x \ge -1$).

*Cách 2.* $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x + 7 = 8\cos^2 4x + 8\cos 4x + 2 + \cos x + 1 = 2(4\cos^2 4x + 4\cos 4x + 1) + (1 + \cos x) = 2(2\cos 4x + 1)^2 + (1 + \cos x) \ge 0 \Rightarrow 4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \ge -7$.

***Ví dụ 6.*** Chứng minh rằng

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \le 1.$$

*Giải: Cách 1.* Theo bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpsky ta có $|\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z| \le \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \times \sqrt{\sin^2 y \sin^2 z + \cos^2 y \cos^2 z} \le \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1$ (vì $\sin^2 z \le 1$ và $\cos^2 z \le 1$).

*Cách 2.* Xét các véctơ $\vec{a} = (\sin x \sin y, \cos x \cos y)$, $\vec{b} = (\sin z, \cos z)$, khi đó $|\vec{b}| = \sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z} = 1$, $|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y} \le \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1$ $\Rightarrow |\vec{a}\,\vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}| \le 1$.

***Ví dụ 7.*** Chứng minh rằng, nếu $0 < x \le y \le \pi$ thì

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{\sin y}{y}.$$

*Giải: Cách 1.* Nếu $x \ge \dfrac{\pi}{2}$, thì từ giả thiết, suy ra $\dfrac{\pi}{2} \le x \le y \le \pi$, vậy $\sin x \ge \sin y \ge 0$, do đó

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{\sin y}{x} \ge \frac{\sin y}{y}.$$

Do vậy ta chỉ cần xét trường hợp $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, khi đó $\cos x > 0$.

Đặt $h = y - x$, thì $0 \le h < \pi$. Nếu $h = 0$ thì bài toán hiển nhiên.

Vì vậy ta giả thiết $h > 0 \Rightarrow \sin\frac{h}{2} > 0$ và $\sin(x + h) -$

$- \sin x = 2\cos(x + \frac{h}{2})\sin\frac{h}{2} \le 2\sin\frac{h}{2}\cos x \le$

$\le 2\frac{h}{2}\cos x = h\cos x \Rightarrow \sin(x + h) \le \sin x + h\cos x.$

Vì vậy $\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{xy}(y\sin x + x\sin y) =$

$\frac{1}{xy}[(x + h)\sin x - x\sin(x + h)] \ge \frac{1}{xy}[x + h)\sin x -$

$-x(\sin x + h\cos x)] = \frac{h}{xy}(\sin x - x\cos x) = \frac{h\cos x}{xy}(\mathrm{tg}x - x) > 0,$

vì theo thí dụ 1 phần này $\mathrm{tg}x > x$ khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

*Cách 2.* Gọi $f(x) = \frac{\sin x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \ge$

$\ge \frac{\cos x.x - x}{x^2} = \frac{1}{x}(\cos x - 1) \le 0 \Rightarrow f'(x)$ là hàm nghịch biến $\Rightarrow$ khi $0 < x \le y \le \pi$ thì $f(x) \ge f(y) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \ge \frac{\sin y}{y}$.

*Ví dụ 8.* Chứng minh rằng với mọi giá trị x ta đều có:

$$4\sin 3x + 5 \ge 4\cos 2x + 5\sin x.$$

*Giải.* Theo các công thức $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$-16\sin^3 x + 8\sin^2 x + 7\sin x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$(1 - \sin x)(4\sin x + 1)^2 \le 0 \text{ hiển nhiên đúng.}$$

*Nhận xét.* Ta cũng có thể giải bằng đạo hàm. Ký hiệu $t = \sin x \;\; -1 \le t \le 1 \Rightarrow y = -16t^3 + 8t^2 + 7t + 1$ và chứng tỏ rằng $y \geq y_{min} \geq 0$.

*Ví dụ 9.* Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3},$$

trong đó a, b, c, S lần lượt là chiều dài của ba cạnh và diện tích của tam giác. Khi nào xảy ra dấu bằng?

*Giải: Cách 1.* Theo định lý hàm cosin $a^2 = b^2 + c^2 -$ $- 2bc\cos A$ và công thức diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) - 2bc\cos A \geq$ $\geq 2bc\sqrt{3}\sin A$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc(\cos A + \sqrt{3}\sin A) \geq 0$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos(A - 60^o) \geq 0$.

Ký hiệu $y = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A - 60^o) \geq 0 \Leftrightarrow y_{min} \geq 0 \Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = c$ và $\cos(A - 60^o) = 1 \Rightarrow b = c$, $A = 60^o \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

*Cách 2.* Theo công thức Hêrông ta có

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $(p - a)(p - b)(p - c) \leq$

$$\leq \left[\frac{p - a + p - b + p - c}{3}\right]^3 = \frac{p^3}{27} \Rightarrow S^2 \leq \frac{p^4}{27} \Rightarrow$$

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a + b + c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2ca}{4.3\sqrt{3}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta được

$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad 2ac \leq a^2 + c^2, 2bc \leq b^2 + c^2.$$

Và do đó

$$S \le \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4.3\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4.\ \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}.$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi trong các bất đẳng thức Côsi đạt dấu = ; $\Rightarrow a = b = c$ và $\Delta ABC$ là tam giác đều.

*Ví dụ 10.* Chứng minh rằng khi $a > 2$ ta có

$$\sin\frac{\pi}{a} > \frac{3}{\sqrt{a^2 + 9}}.$$

*Giải: Cách 1.* Vì $a > 2 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{a} < \frac{\pi}{2}$, nên

$\mathrm{tg}\frac{\pi}{a} > \frac{\pi}{a} > \frac{3}{a}$. Vì $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$, nên $\cos^2\frac{\pi}{a} <$

$< \frac{1}{1 + (\frac{3}{a})^2}$. Khi đó $\sin^2\frac{\pi}{a} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{2} >$

$> 1 - \frac{1}{1 + (\frac{3}{a})^2} = \frac{9}{a^2 + 9} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} > \frac{3}{\sqrt{a^2 + 9}}$.

*Cách 2.* Trước hết ta chứng minh $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$, khi $x \ge 0$.

Thật vậy, gọi $y(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \Rightarrow$

$y' = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, nên theo ví dụ 4, 1) phần này

$y' \ge 0$, do đó y đồng biến, do vậy khi $x \ge 0$ ta có

$y(x) \ge y(0) = 0 \Rightarrow \sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$.

Khi $a > 2$ ta có $0 < \frac{\pi}{a} < \frac{\pi}{2}$, nên ta sẽ chứng minh rằng $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} > \max \frac{3}{\sqrt{a^2+9}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Muốn vậy ta sẽ chứng minh rằng $\sin x \geq g_{max}$, trong đó

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} .$$

Ta có $g' = 1 - \frac{x^2}{2} = 0$ khi $x^2 = 2$, tức là $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ tại các điểm cực trị ta có $g(x) = x(1 - \frac{x^2}{6}) = \frac{2}{3}x$ và

$$g_{max} = \max[g(0), g(\frac{\pi}{2}), g(\pm\sqrt{2})] = \max[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} - \frac{\pi^3}{8},$$

$$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}] = \frac{2\sqrt{2}}{3} > \frac{3}{\sqrt{13}}, \text{ vì } \frac{8}{9} > \frac{9}{13} .$$

Vậy $\sin x > \frac{3}{\sqrt{a^2+9}}$ .

*Ví dụ 11.* Chứng minh rằng, nếu a là góc nhọn thì

$$(1 + \frac{1}{\sin a})(1 + \frac{1}{\cos a}) > 5.$$

*Giải: Cách 1.* Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ , nên $\sin a > 0$, $\cos a > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta được

$$1 + \frac{1}{\sin a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin a}} \quad ; \quad 1 + \frac{1}{\cos a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos a}}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right) \geq \frac{4}{\sqrt{\sin a \cos a}} \geq$$

$$\geq \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sin^2 a + \cos^2 a)}} = 4\sqrt{2} > 5.$$

Ở đây ta đã sử dụng $\sqrt{\sin a \cos a} \leq \sqrt{\dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{2}}$

(trung bình nhân 2 số bé hơn hoặc bằng trung bình bình phương)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sin a \cos a}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sin^2 a + \cos^2 a)}}.$$

*Cách 2.* Ta có $\left(1 + \dfrac{1}{\sin a}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos a}\right) = 1 + \dfrac{1}{\sin a} +$ $+ \dfrac{1}{\cos a} + \dfrac{2}{\sin 2a} \geq 5$. Dấu = không xảy ra, vì sina và cosa không thể đồng thời bằng 1.

*Cách 3.* Ta chứng minh kết quả mạnh hơn:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Đặt $x = \dfrac{1}{\sin a}$, $y = \dfrac{1}{\cos a}$. Vì $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x + y}{2} \leq \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a} = 2\,\frac{\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a}}{2} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin a} \cdot \frac{1}{\cos a}} = \frac{2}{\sqrt{\sin a \cos a}} \geq \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sin^2 a + \cos^2 a)}} = 2\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi sina = cosa $\Rightarrow$ a = 45°.

Do đó $\left(1 + \frac{1}{\sin a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right) = 1 + \frac{2}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a} \geq$

$\geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

*Ví dụ 12.* Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ABC ta đều có $h_a \leq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

*Giải: Cách 1.* Đối với mọi tam giác ABC ta đều có $S = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}bc\sin A$, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$.

Từ đó

$$h_a = \frac{bc\sin A}{a} = \frac{bc\sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}}.$$

Vì $b^2 + c^2 \geq 2bc$, nên

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} \geq \sqrt{2bc(1 - \cos A)} = \sqrt{2bc.2\sin^2\frac{A}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}.$$

Từ đó $h_a \leq \dfrac{bc\sin A}{2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}} = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

*Cách 2.* Gọi $d_a$ là đường phân giác xuất phát từ A, khi đó $h_a \leq d_a$. Theo ví dụ 12, 1) phần §1 chương này ta có

$$d_a = \frac{2bc}{b + c}\cos\frac{A}{2} \leq \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{2\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}.$$

Vậy $h_a \leq d_a \leq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$. Dấu đẳng thức đạt được khi $b = c$.

*Ví dụ 13.* Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ta đều có:

1) $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$.

*Giải: Cách 1.* 1) Ta có $(\sin A + \sin B) + (\sin C +$

$$+ \sin\frac{\pi}{3}) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \le 2(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}) \le$$

$$4\sin\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}\cos\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4} \le 4\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2) Trong một tam giác có ít nhất một góc $\le \dfrac{\pi}{3}$.

Giả sử đó là góc C. Khi đó ta có $\cos A + \cos B + \cos C +$

$$+ \cos\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \le 2(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}) \le$$

$$\le 4\cos\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4} = 4\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

*Cách 2.* Ta chứng minh *bổ đề* sau: Giả sử f(x) là hàm số xác định trên khoảng (a, b) có tính chất

$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ với mọi điểm $x_1, x_2$ thuộc khoảng (a, b) và dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2$, khi đó, nếu $x_1, x_2, x_3$ là những điểm thuộc khoảng (a, b) thì $f(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3$.

*Nhận xét.* Bổ đề trên đúng cho tập điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc khoảng (a, b): $f(\frac{x_1 + x_2 + .... + x_n}{n}) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

*Chứng minh bổ đề.* Ta có $f(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}) =$

$$= f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2}(x_3 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3})}{2}\right) \ge \frac{1}{2} f(\frac{x_1 + x_2}{2}) +$$

$$+ \frac{1}{2} f(\frac{1}{2}(x_3 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3})) \ge \frac{1}{4}[f(x_1) + f(x_2)] +$$

$$+ \frac{1}{4}[f(x_3) + f(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3})] = \frac{1}{4}[f(x_1) + f(x_2) +$$

$$+ f(x_3)] + \frac{1}{4} f(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}) \Rightarrow f(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}) \ge$$

$$\ge \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi

$$x_1 = x_2,\ x_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

*Chứng minh bài toán.* Theo ví dụ 3 phần này, hàm sin và hàm côsin thỏa mãn điều kiện của bổ đề, bởi vậy:

1) $\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\dfrac{A+B+C}{3} =$

$= 3\sin\dfrac{\pi}{3} = 3\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

2) $\cos A + \cos B + \cos C \le 3\cos\dfrac{A+B+C}{3} =$

$= 3\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$ .

*Cách 3.* 1) Theo bài tập 10. b) i) > 1, ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Ta lại có $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \le \left[\dfrac{\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}}{3}\right]^3$

(bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương). Theo bộ đề trong cách 2 ta có :

$\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \le 3\cos\dfrac{A+B+C}{6} = 3\cos\dfrac{\pi}{6} =$

$= 3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , do vậy $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \le \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 =$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ và $\sin A + \sin B + \sin C \le 4.\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2) Theo bài tập 10, b), ii) §1 ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Áp dụng bất thức Côsin cho 3 số dương sin(A/2), sin(B/2), sin(C/2) và bổ đề trong cách 2 trên đây ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \left[\frac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}\right]^3 \le$$

$$\le \left(3.\frac{\sin\frac{A+B+C}{6}}{3}\right)^3 = \sin^3\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + 4\,.\,\frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

*Ví dụ 14.* Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ta đều có:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

*Giải :*

*Cách 1.* Theo ví dụ 1 (mục 1) trong §1) ta có :

$$1 = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \ge$$

$\ge 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$ (bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương) $\Rightarrow$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \le \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ tam giác ABC là tam giác đều.

*Cách 2.* Trước hết ta chứng minh bổ đề:

Nếu $x + y \le \frac{\pi}{2}$ thì $tgx.tgy \le tg^2 \frac{x+y}{2}$.

Thật vậy, trước hết ta nhận xét rằng, chỉ cần chứng minh rằng cho $x > 0$, $y > 0$ là đủ. Do $0 < x + y \le \frac{\pi}{2}$, nên $\cos(x + y) \ge 0$, và do $\cos(x - y) \le 1$, nên $\cos(x + y) \ge$ $\ge \cos(x - y)\cos(x + y)$. Vì vậy

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)] \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x - y)\cos(x + y)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(x - y)[1 + \cos(x + y)] = \cos(x - y)] \times$$

$$\times \cos^2\frac{x+y}{2} = [\cos x\cos y + \sin x\sin y]\cos^2\frac{x+y}{2} \Rightarrow$$

$$(1 - \cos^2\frac{x+y}{2})\cos x\cos y \ge \cos^2\frac{x+y}{2}\sin x\sin y$$

hay $\quad \sin^2\frac{x+y}{2}\cos x\cos y \ge \cos^2\frac{x+y}{2}\sin x\sin y.$

Vì các thừa số đều dương, nên suy ra

$$tg^2\frac{x+y}{2} \ge tgx.tgy.$$

Ta chứng minh bài toán. Gọi C là góc bé nhất $\Rightarrow$ $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ và do $C \le \frac{\pi}{3}$, nên $\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3}$, vì vậy áp dụng bổ đề trên ta có:

$$tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2} \le tg^2\frac{A+B}{2},\ tg\frac{C}{2}\,tg\frac{\pi}{6} \le tg^2(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}).$$

Các vế của các bất đẳng thức trên đều dương, nêu suy ra

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \le \operatorname{tg}\frac{A+B}{4}\operatorname{tg}^2\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right).$$

Lại vì $\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$, nên áp dụng bổ đề ta có

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right) \le \operatorname{tg}^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right] =$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}.$$

Do vậy

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \le \operatorname{tg}^4\frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \le$$

$$\le \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $A = B = C$, tức là tam giác ABC đều.

*Nhận xét:* Cách 1 trên đây có thể giải gọn hơn bằng cách sử dụng hệ quả bất đẳng thức Côsi như sau: Vì ba số dương

$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ có tổng không đổi bằng 1,

nên tích của chúng lớn nhất là $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ khi ba số bằng nhau và bằng $\frac{1}{3}$.

Vậy $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \le \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Dấu bằng đạt được khi

$A = B = C$.

*Ví dụ 15.* A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

1) $\cos A + \cos B + \sin C > 1$;

2) $\mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2} \geq 1$.

*Giải: Cách 1.* 1) Theo bài tập 10. b) ii) §1 ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Vì $0 < \dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, nên $\sin\dfrac{A}{2} > 0$, $\sin\dfrac{B}{2} > 0$, $\sin\dfrac{C}{2} > 0 \;\Rightarrow\; \cos A + \cos B + \cos C > 1$.

2) Vì $0 < \dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, nên $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2} > 0$, $\mathrm{tg}\dfrac{B}{2} > 0$, $\mathrm{tg}\dfrac{C}{2} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{2} \geq \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2},$$

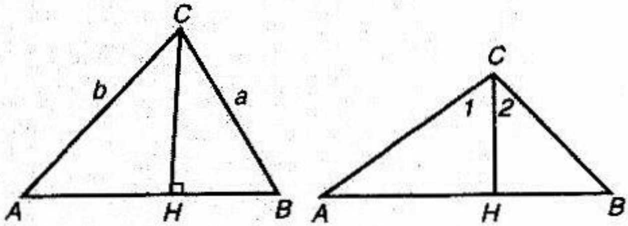
$$\frac{\mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}}{2} \geq \mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2},$$

$$\frac{\mathrm{tg}^2\frac{C}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}{2} \geq \mathrm{tg}\frac{C}{2}\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế với vế ta được:

$$\text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2} \geq \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} +$$

$+ \text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2} = 1$. (Xem ví dụ 11, §1 chương này).




*Hình 23*

*Cách 2.* 1) Giả sử rằng $A \leq B \leq C \leq 90^o$, khi đó $a \leq b \leq c$. Ta có:

$$c = b\cos A + a\cos B \Rightarrow 1 = \frac{b}{c}\cos A + \frac{a}{c}\cos B.$$

Vì $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $\cos C \geq 0$, nên ta có:

$$1 = \frac{b}{c}\cos A + \frac{a}{c}\cos B < \cos A + \cos B \leq \cos A + \cos B + \cos C.$$

Nếu $C > 90^o$, thì $C_1 < 90^o$, $C_2 < 90^o \Rightarrow$ áp dụng kết quả trên cho các tam giác ACH và BCH ta được:

$$\cos A + \cos C_1 + \cos H = \cos A + \cos C_1 = \cos A + \sin A > 1,$$

$$\cos B + \cos C_2 + \cos H = \cos B + \cos C_2 = \cos B + \sin B > 1.$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + (\sin A + \sin B) > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C + (\sin A + \sin B) - (1 + \cos C) > 1.$$

Để chứng minh bài toán, ta chứng minh rằng

$\sin A + \sin B - (1 + \cos C) \geq 0$ là đủ. Ta có:

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{C}{2} \geq 0$$

$$\left(\text{vì: } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2} > 0\right) \Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} -$$

$$-\cos\frac{A+B}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \geq 0 \text{ đúng.}$$

2) Áp dụng bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski ta có:

$$1 = \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2} \leq$$

$$\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}}\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}} =$$

$$= \mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

*Nhận xét.* Có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski dưới dạng:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

rồi áp dụng bài tập: $\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$.

*Ví dụ 16.* A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

1) $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1$ ;

2) $1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$.

*Giải: Cách 1.* 1) Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2}$$

$$+ \frac{1 - \cos C}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$, nên theo ví dụ 13, 2) và ví dụ 15 phần này

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

ta suy ra: $\frac{3}{4} \le \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1$

2) Theo bổ đề trong cách 2 ví dụ 13 chương này ta có:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le 3\sin\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3} =$$

$$= 3\sin\frac{A + B + C}{6} = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

Mặt khác ta có:

$\sin\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$, và vì $0 < \cos\frac{A}{2} < 1$;

$0 < \cos\frac{B}{2} < 1$ nên $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} > \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} +$

$$+ \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} >$$

$$> \sin\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= \sqrt{2}.\sin(\frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4}) > \sqrt{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

(vì $\frac{\pi}{4} < \frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(\frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4}) > \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

*Cách 2.* 1) Vì $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên áp dụng kết quả bài tập 30 §1 chương này ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} =$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

và theo cách 3, 2) ví dụ 13 phần này ta có

$$0 < \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8} \Rightarrow \text{ta được}$$

$$\frac{3}{4} \le \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1.$$

2) Ta có $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \sin\frac{\pi}{6} \le$

$$\le 2[\sin(\frac{A}{4} + \frac{B}{4}) + \sin(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12})] \le$$

$$4\sin\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right) = 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

*Ví dụ 17.* Chứng minh rằng

1) Với mọi tam giác ta đều có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$$

2) Tam giác ABC là nhọn, vuông hoặc tù nếu

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

là lớn hơn, bằng hoặc bé hơn 2.

*Giải:* Vì $A + B + C = \pi$, nên $\cos C = -\cos(A + B)$,

do vậy $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} +$

$+ 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos^2 B) - \cos^2(A + B) =$

$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2(A + B) =$

$= 2 - \cos(A + B)[\cos(A - B) + \cos(A + B)] =$

$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$

1) Vì: Nếu có một góc tù thì $\cos A\cos B\cos C < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos A\cos B\cos C < \frac{1}{8}$ . Nếu trái lại, $\cos A \ge 0$, $\cos B \ge 0$,

$\cos C \ge 0$ và ta có

$$\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \le$$

$$\leq \cos^3 \frac{A+B+C}{3} = \cos^3 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$$

(xem bổ đề trong cách 2 ví dụ 13) $\Rightarrow$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{4}.$$

2) a) Nếu $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$

$\Rightarrow \cos A \cos B \cos C > 0$

Vì trong một tam giác không thể có 2 góc tù, nên suy ra $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0 \Rightarrow$ A, B, C là các góc nhọn.

b) Nếu $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Rightarrow \cos A \cos B \cos C = 0$

$\Rightarrow$ một trong 3 thừa số bằng 0 $\Rightarrow$ có 1 góc vuông.

c) Nếu $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2 \Rightarrow \cos A \cos B \cos C < 0$

$\Rightarrow$ có một thừa số âm $\Rightarrow$ có 1 góc tù.

Bạn đọc thử tìm xem có còn cách nào khác giải bài toán này hay không?

*Ví dụ 18.* Chứng minh rằng, nếu $a\cos x + b\sin x \geq 0$ với mọi x thì $a = b = 0$.

*Giải: Cách 1.* Cho $x = 0$, ta có $a \geq 0$

$x = \pi$, ta có $-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 0$.

Vậy $a = 0$. Do đó ta có $b\sin x \geq 0\ \forall x$.

Cho $x = \frac{\pi}{2}$ ta có $b \geq 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$, ta có $-b \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b \leq 0$. Vậy $b = 0$.

*Cách 2.* Đặt $f(x) = a\cos x + b\sin x \Rightarrow \forall x$ ta có $f(x) + f(x + \pi) = 0$. Theo giả thiết $f(x) \geq 0$, $f(x + \pi) \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = 0$, $f(x + \pi) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$. Vậy $a = f(0) = 0$,

$$b = f(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

*Ví dụ 19.* Chứng minh rằng, nếu $a\cos x + b\sin x + c \geq 0$ với mọi x thì $c \geq \sqrt{a^2+b^2}$.

*Giải: Cách 1.* Ta có $a\cos x + b\sin x + c =$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) + c =$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-t) + c \geq 0,$$

trong đó

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ với } a^2+b^2 > 0,$$

lấy $x = t + \pi$, khi đó $-\sqrt{a^2+b^2} + c \geq 0 \Rightarrow c \geq \sqrt{a^2+b^2}$.

Chú ý. Có thể lý luận như sau: $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-t) + c \geq 0$

$$\Rightarrow \cos(x-t) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq -1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow c \geq \sqrt{a^2+b^2}$.

Nếu $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow 0.\cos x + 0.\sin x + c \geq 0$

$\Rightarrow c \geq 0 = \sqrt{a^2+b^2}$, bài toán vẫn đúng.

*Cách 2.* Ta đặt $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, khi đó

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ và bài toán trở thành

$$a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2} + c \geq 0 \ \forall t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c-a)t^2 + 2bt + c + a \geq 0 \ \forall t.$$

Nếu $c - a \leq 0$ thì vế trái không thể $\geq 0 \ \forall t \Rightarrow$

$c - a > 0$, khi đó giá trị bé nhất của vế trái là

$$-\frac{b^2 - c^2 + a^2}{c-a} \geq 0. \text{ Vì } c - a > 0 \Rightarrow b^2 - c^2 + a^2 \leq 0$$

$\Rightarrow c^2 \geq a^2 + b^2$

cho $t = 0 \Rightarrow c + a \geq 0$. Kết hợp với $c - a > 0 \Rightarrow c \geq 0$, do đó từ $c^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow c \geq \sqrt{a^2 + b^2}$.

*Ví dụ 20.* Cho bất đẳng thức $m^2\cos x + 2m\sin x - 1 \leq 0$.

1) Tìm m để bất đẳng thức đúng $\forall x$.

2) Tìm m để bất đẳng thức đúng khi $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

*Giải: Cách 1.* 1) Ta có, nếu $m = 0$, bất đẳng thức đúng vì $-1 \leq 0$ ;

Nếu $m \neq 0$, $m^2\cos x + 2m\sin x - 1 =$

$$\sqrt{m^4 + 4m^2}\left(\frac{m^2}{\sqrt{m^4 + 4m^2}}\cos x + \frac{2m}{\sqrt{m^4 + 4m^2}}\sin x\right) -$$

$-1 = \sqrt{m^4 + 4m^2}\cos(x - t) - 1 \leq 0$, trong đó

$$\cos t = \frac{m^2}{\sqrt{m^4 + 4m^2}}, \quad \sin t = \frac{2m}{\sqrt{m^4 + 4m^2}}.$$

Do đó: $\cos(x - t) \leq \dfrac{1}{\sqrt{m^4 + 4m^2}}$ $\forall x$

$\Rightarrow \sqrt{m^4 + 4m^2} \leq 1 \Rightarrow m^4 + 4m^2 \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^4 + 4m^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq m^2 \leq -2 + \sqrt{5}$,

$|m| \leq \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$.

2) Khi $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ thì $\sin x > 0$, $\cos x < 0 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng $\forall m \leq 0$.

Khi $m > 0$ ta đặt $\cos t = \dfrac{m}{\sqrt{m^2 + 4}}$, $\sin t = \dfrac{2}{\sqrt{m^2 + 4}}$.

$\frac{\pi}{2} < x < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} - t < x - t < \pi - t.$

Do $\cos t > 0$, $\sin t > 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{\pi}{2}$ và $0 < x - t < \pi$

$\Rightarrow \cos(x - t)$ nghịch biến, đạt giá trị lớn nhất khi

$x - t = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow \cos(x - t) = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$

Vậy $m\sqrt{m^2 + 4} \cdot \frac{2}{\sqrt{m^2 + 4}} - 1 \le 0 \Rightarrow 2m \le 1 \Rightarrow$

$$0 < m \le \frac{1}{2}.$$

Gộp nghiệm ta được $m \le \frac{1}{2}$.

*Cách 2.* 1) Nếu $\cos\frac{x}{2} \ne 0$, đặt $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ta có

$m^2\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 2m\frac{2t}{1 + t^2} - 1 \le 0 \Rightarrow -(m^2 + 1)t^2 + 4mt +$

$+ m^2 - 1 \le 0$. Đặt vế trái là y ta phải có $y_{max} \le 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{m^2 + 4m^2 - 1}{-(m^2 + 1)} \le 0 \Rightarrow m^4 + 4m^2 - 1 \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le m^2 \le -2 + \sqrt{5} \Rightarrow |m| \le \sqrt{-2 + \sqrt{5}}.$$

Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = (2k + 1)\pi$,

khi đó đẳng thức trở thành $-m^2 - 1 \le 0$ đúng.

2) Khi $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{x}{2} \ne 0$.

Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow 1 < t < \infty$ và bất phương trình trở thành

$-(m^2 + 1)t^2 + 4mt + m^2 - 1 \le 0$ $\forall t > 1$. Vì đỉnh parabôn là

$$t = \frac{2m}{m^2+1} \Rightarrow |t| = \frac{2|m|}{m^2+1} \leq \frac{2|m|}{2|m|} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_{max} = y(1) = -(m^2+1) + 4m + m^2 - 1 =$

$= 4m - 2 \leq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}$ .

*Ví dụ 21.* Chứng minh rằng khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ta có

1) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq 1$;

2) $\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x} \leq \sqrt[4]{2}$.

*Giải: Cách 1.*

1) Vì $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , nên $0 \leq \sin x \leq 1$.

$0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\sin x} \geq \sin x \geq \sin^2 x$, $\sqrt{\cos x} \geq \cos x \geq \cos^2 x$

$\Rightarrow \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2) Theo bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski ta có

$$\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x} \leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \times$$

$$\times \sqrt{\sin x + \cos x} + \sqrt{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})} \leq \sqrt[4]{2}.$$

*Cách 2.* Đặt $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = 0$

$\Rightarrow \cos x\sqrt{\sin x} = \sin x\sqrt{\cos x} \Rightarrow$ hoặc $\sin x = 0$, hoặc $\cos x = 0$, hoặc $\sin x = \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tại điểm $\sin x = 0$, $\cos x = 0$ đạo hàm không xác định

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ |
| $y$ | $1$ | $\nearrow$ | M $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ | $\searrow$ | $1$ |

Vậy:

1) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq y_{min} = 1$.

2) $\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\cos x} = \sqrt{\sin x\cos x}\,(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos x}) =$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}\,(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\, y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2}.$$

Chú ý. Để có $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \leq \dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$, có thể áp dụng bất đẳng thức

$(\dfrac{a+b}{2})^4 \leq \dfrac{a^4 + b^4}{2}$ với $a = \sqrt{\sin x}$, $b = \sqrt{\cos x}$

Có thể chứng minh 1) bằng cách bình phương 2 vế và sử dụng ví dụ 2, 1) phần này.

*Ví dụ 22.* Xác định a để $\cos 2x + a\cos x + 2 \geq 0\ \forall x$.

*Giải:*

*Cách 1.* Ta có $\cos 2x + a\cos x + 2 = 2\cos^2 x + a\cos x + 1$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow 2t^2 + at + 1 \geq 0$.

Đặt vế trái là y ta có $y = 2t^2 + at + 1 \geq 0 \Rightarrow$ ta phải tìm a để $y_{min} \geq 0$, $-1 \leq t \leq 1$. Đây là parabôn quay bề lõm về phía trên. Vậy 1) Nếu đỉnh parabôn

$t = -\dfrac{a}{4}$ ở trong đoạn $[-1, 1]$, tức là $-1 \leq -\dfrac{a}{4} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 \leq a \leq 4$ thì $y_{min} = y(-\dfrac{a}{2}) = -\dfrac{\Delta}{8} =$

$= -\dfrac{a^2 - 8}{8} \geq 0 \Rightarrow a^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow |a| \leq 2\sqrt{2}$. Kết hợp với $|a| \leq 4$ ta được $|a| \leq 2\sqrt{2}$.

2) Nếu đỉnh parabôn ở ngoài đoạn $[-1, 1]$ tức là $|a| \geq 4$ $\Rightarrow y_{min} = \min\{y(1), y(-1)\} = \min\{3 + a, 3 - a\}$.

Vậy a) $3 + a \geq 3 - a \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a \geq 4$ thì

$y_{min} = 3 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 3$, trái với $a \geq 4$.

b) $3 - a \geq 3 + a \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a \leq -4$ thì $y_{min} = 3 + a \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \geq -3$ trái với $a \leq -4$. Vậy giá trị a phải tìm là $|a| \leq 2\sqrt{2}$.

*Cách 2.* Từ $2t^2 + at + 1 \geq 0 \Rightarrow at \geq -(2t^2 + 1)$.

Nếu $t = 0$, bất đẳng thức trở thành $0 \geq -1$ đúng $\forall a$.

Nếu $-1 \leq t < 0$ thì $a \leq -\dfrac{2t^2 + 1}{t} = y$

Nếu $0 \leq t < 1$ thì $a \geq -\dfrac{2t^2 + 1}{t} = y$.

Thành thử khi $-1 \leq t < 0$, $a \leq y_{min}$, khi $0 < t \leq 1$, $a \geq y_{max}$.

Ta có $y = -2t - \dfrac{1}{t}$, $y' = -2 + \dfrac{1}{t^2} = 0$

$\Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{2}$, $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ta lập bảng biến thiên

| t | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| y | | $\searrow$ | m $2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | \|\| | $\nearrow$ | M $-2\sqrt{2}$ | $\searrow$ | |

Vậy $a \leq 2\sqrt{2}$, $a \geq -2\sqrt{2}$ hay $|a| \leq 2\sqrt{2}$.

*Nhận xét.* Có thể chuyển về $t = tg^2\dfrac{x}{2}$ và xét

$$g(t) = (3 - a)t^2 - 2t + (3 + a) \geq 0 \text{ khi } t \geq 0.$$

*Ví dụ 23.* Xác định tất cả các giá trị a sao cho $\forall x$ ta đều có $a\cos 2x + \cos x + 1 \geq 0$.

*Giải:* Gọi vế trái là y. Khi đó, khi $x=\pi$ ta có $y(\pi) = a \geq 0$. Nếu $a = 0$, ta có $1 + \cos x \geq 0$ đúng $\forall x$, bởi vậy ta chỉ còn phải xét $a > 0$. Khi $a > 0$ ta có $y(0) = a + 2 > 0$, vì vậy ta chỉ phải xác định các giá trị $a>0$ để $y \geq 0$ $\forall x \neq k\pi$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$ $\Rightarrow y = a(2t^2 - 1) + t + 1 \geq 0$ $\forall t \in (-1, 1)$. Vì $a > 0$, nên y là parabôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh $t = -\frac{1}{4a}$, nên:

1) Nếu $-1 < -\frac{1}{4a} < 1 \Rightarrow a > \frac{1}{4}$, thì $y_{min} = y(-\frac{1}{4a}) =$

$$= -\frac{\Delta}{8a} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{8a^2 - 8a + 1}{8a} \geq 0 \quad \Rightarrow 8^2 - 8a + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$. Kết hợp với $a > \frac{1}{4}$.

ta được $\frac{1}{4} < a < \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

2) Nếu $-\frac{1}{4a}$ ở ngoài khoảng $(-1, 1)$, tức là $a \leq \frac{1}{4}$, khi đó $y_{min} = y(-1) = a \geq 0$. Kết hợp với $a > 0$ và

$a \leq \frac{1}{4}$ ta được $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

Gộp nghiệm, ta được $0 \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ thì $y \geq 0 \ \forall x$.

*Cách khác.* Từ $y \geq 0$ với $\forall t \in (-1, 1)$ ta suy ra

$$\frac{1}{a} \geq -\frac{2t^2 - 1}{t + 1} = g \quad \text{(chú ý } t + 1 > 0).$$

Ta có $g = -2t + 2 - \frac{1}{t+1} \Rightarrow g' = -2 + \frac{1}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow$

$(t + 1)^2 = \frac{1}{2}$, $t = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lập bảng biến thiên ta có

| t | $-1$ | | $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | \|\| | + | 0 | - | |
| y | \|\| | ↗ | $M = 2(2 - \sqrt{2})$ | ↘ | |

Vậy $\frac{1}{a} \geq 2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow$

$a \leq \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

Gộp nghiệm ta được $0 \le a \le \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ thì $y \ge 0 \; \forall x$.

*Nhận xét.* Cũng có thể đổi biến $tg^2(x/2) = t$ và đưa về xét hàm $g(t) = at^2 - 2(3a - 1)t + 2 + a \ge 0 \; \forall t \ge 0$.

*Ví dụ 24.* Chứng minh rằng $y = \cos 3x + a\cos 2x + b\cos x$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm.

*Giải:* Giả sử trái lại, $y \ge 0 \; \forall x$, khi đó ta có

$$y(x) = \cos 3x + a\cos 2x + b\cos x \ge 0$$

$$y(x + \pi) = -\cos 3x + a\cos 2x - b\cos x \ge 0$$

Từ đó suy ra $a\cos 2x \ge 0 \; \forall x$. Nếu $a \ne 0$ ta đi đến mâu thuẫn vì cho $x = 0$ và $x = \pi/2$ ta được 2 giá trị trái dấu nhau.

Trường hợp $a = 0$, ta có $y = \cos 3x + b\cos x \Rightarrow b \ne 0$ vì nếu $b = 0$ thì $y = \cos 3x$ sẽ nhận cả giá trị âm lẫn dương. Vậy ta chỉ xét $a = 0$, $b \ne 0$ nữa là đủ. Nếu $b > 0$ ta có $y(0) = 1 + b > 0$, $y(\pi) = -1 - b < 0$. Vậy y nhận cả giá trị âm và giá trị dương.

Nếu $b < 0$ ta có $y(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} b < 0$ và $y(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} b > 0$.

Thành thử trong mọi khả năng của a và b ta đều có kết luận y: nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm.

*Nhận xét.* Bài toán trên có thể giải như sau: Trước hết chứng minh rằng y không đồng nhất bằng $0 \Rightarrow$ có ít nhất một giá trị $x_o$ để $y(x_o) \ne 0$, và chứng minh rằng:

$y(x) + y(x + \frac{\pi}{2}) + y(x + \pi) + y(x + \frac{3\pi}{2}) = 0$; cho $x = x_o \Rightarrow$ bốn số

$y(x_o)$, $y(x_o + \frac{\pi}{2})$, $y(x_o + \pi)$, $y(x_o + \frac{3\pi}{2})$ phải có hai số trái dấu.

*Ví dụ 25.* Chứng minh rằng

$$1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x > 0 \; \forall x.$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x =$

$= 1 + \cos x + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + \frac{1}{3}(4\cos^3 x - 3\cos x) =$

$= \frac{4}{3}\cos^3 x + \cos^2 x + \frac{1}{2} = \cos^2 x(1 + \cos x) +$

$+ \frac{1}{3}(1 - \cos^3 x) + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6} > 0$ vì $\cos^2 x \geq 0$, $1 + \cos x \geq 0$

và $1 - \cos^3 x \geq 0$.

*Cách 2.* Đặt $\cos x = t \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$. Gọi vế trái là y,

ta có $y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2} > 0$ $\forall t \in [-1, 1]$. Ta có

$y' = 4t^2 + 2t = 0$ khi $t = 0$ và $t = -\frac{1}{2}$. Lập bảng biến thiên ta được

| t | -1 | | $-\frac{1}{2}$ | | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | - | 0 | + | |
| y | $\frac{1}{6}$ | ↗ | M | ↘ | m $\frac{1}{2}$ | ↗ | |

$$y \geq y_{min} = \frac{1}{6} > 0.$$

*Nhận xét.* Có thể lấy đạo hàm trực tiếp hàm

$y = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$ nhưng sẽ phức tạp hơn.

*Ví dụ 26.* Cho hàm số

$$y = \frac{(1 - x^2)\cos 2\alpha + 2x\sin 2\alpha}{1 + x^2}$$

1) Chứng minh rằng: $|y| \le 1$ $\forall x$ và $0 \le \alpha \le \pi$.

2) Cho $\alpha = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của y.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Viết lại biểu thức hàm số dưới dạng

$$y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\cos 2\alpha + \frac{2x}{1 + x^2}\sin 2\alpha =$$

$$= \cos(2\alpha - t) \Rightarrow |y| = |\cos(2\alpha - t)| \le 1.$$

*Cách 2.* Áp dụng bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski cho tử số ta có: $|y| = \dfrac{1}{1 + x^2}|(1 - x^2)\cos 2\alpha + 2x\sin 2\alpha| \le$

$$\le \frac{1}{1 + x^2}\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4x^2}\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha} = 1.$$

*Cách 3.* Ta viết lại biểu thức hàm số dưới dạng:

$$(y + \cos 2\alpha)x^2 - 2x\sin 2\alpha + y - \cos 2\alpha = 0.$$

Vì phương trình phải có nghiệm, nên nếu $y \neq -\cos 2\alpha$

$\Rightarrow \Delta' = \sin^2 2\alpha - (y^2 - \cos^2 2\alpha) \ge 0 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow |y| \le 1.$

Nếu $y = -\cos 2\alpha$ thì $|y| = |-\cos 2\alpha| \le 1$.

*Cách 4.* Bất đẳng thức $|y| \le 1$ tương đương với

$$-1 \le \frac{(1 - x^2)\cos 2\alpha + 2x\sin 2\alpha}{1 + x^2} \le 1$$

Bất đẳng thức trái tương đương với

$$-1 - x^2 \le (1 - x^2)\cos 2\alpha + 2x\sin 2\alpha$$

hay $$(1 - \cos 2\alpha)x^2 + 2x\sin 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha \ge 0.$$

Nếu $\cos 2\alpha = 1$, thì $\sin 2\alpha = 0$, do đó ta có $2 \ge 0$ đúng.

Nếu $\cos 2\alpha < 1$, thì $1 - \cos 2\alpha > 0 \Rightarrow$ ta có tam thức bậc hai theo x với $\Delta' = \sin^2 2\alpha - 1 + \cos^2 2\alpha = 0 \Rightarrow$ bất đẳng thức luôn luôn đúng.

Chứng minh tương tự cho bất đẳng thức phải ta kết luận rằng bất đẳng thức đúng $\forall x$.

*Nhận xét.* Trong các cách giải trên ta không sử dụng giả thiết $0 \le \alpha \le \pi$.

2) *Cách 1.* Theo câu 1) $|y| \le 1 \; \forall \alpha$. Khi $\alpha = 0$ ta có:

$y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$. Vì $y = 1$ khi $x = 0$, nên $y_{max} = 1$,

$y \to -1$ khi $x \to \infty$, nên không có giá trị bé nhất.

*Cách 2.* Đặt $x = \text{tg}t \Rightarrow t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên, khi đó

$y = \dfrac{1 - \text{tg}^2 t}{1 + \text{tg}^2 t} = \cos 2t \Rightarrow y_{max} = 1$ khi $\cos 2t = 1$.

$2t = 2k\pi$, $t = k\pi$, $y_{min} = -1$ khi $\cos 2t = -1$,

$2t = (2k + 1)\pi \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (loại), vậy y không có giá trị bé nhất.

*Nhận xét.* Bài toán còn có thể giải bằng cách khảo sát và vẽ đồ thị hàm

$$y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

có max $y = 1$ khi $x = 0$ và tiệm cận ngang $y = -1$, vì $y \to -1$ khi $x \to \infty$ do vậy $y_{max} = 1$, $y_{min}$ không có.

*Ví dụ 27.* Cho hàm số

$$y = \frac{x^2\cos a + x(2\cos a + \sin a) - 2(1 - \sin a)}{x + 2}$$

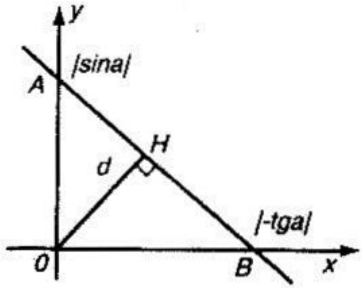
Chứng minh rằng khoảng cách từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên không vượt quá $\sqrt{2}$.

*Giải: Cách 1.* Ta có:

$$y = x\cos a + \sin a - \frac{2}{x+2}$$

Để $y = x\cos a + \sin a$ là tiệm cận xiên thì $\cos a \neq 0$.

Khoảng cách d từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên là đường cao OH của $\Delta OAB \Rightarrow$




*Hình 24*

$$d = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{|\sin a|\ |-\operatorname{tg} a|}{\sqrt{\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a}}, \ a \neq k\pi.$$

Theo bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski ta có

$$d \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a}}{\sqrt{\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a}} = \sqrt{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $|\sin a| = |-\operatorname{tg} a| = |\operatorname{tg} a| \Rightarrow a = k\pi$, k nguyên, $\Rightarrow$ không có dấu đẳng thức. Nếu $a = k\pi \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow d = 0 < \sqrt{2}$.

*Cách 2.* Để chứng minh $d \leq \sqrt{2} \Rightarrow d^2 \leq 2$, ta chứng minh

$$2 - d^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a}{\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a} \geq 0 \Leftrightarrow 2(\sin^2 a + \operatorname{tg}^2 a) -$$

$- \sin^2 a \operatorname{tg}^2 a \geq 0$, $a \neq k\pi \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a(2 - \sin^2 a) + 2\sin^2 a \geq 0$ đúng vì $\operatorname{tg}^2 a \geq 0$, $2 - \sin^2 a \geq 0$ và $\sin^2 a \geq 0$.

Nếu $a = k\pi$, ta có $y = \pm x \Rightarrow d = 0 < \sqrt{2}$ đúng.

***Nhận xét.*** Cũng có thể tính d như sau: d thuộc đường thẳng đi qua gốc tọa độ và $\perp$ tiệm cận xiên $\Rightarrow$ đường thẳng chứa d có phương trình

$$y = -\frac{1}{\cos a}x$$

Tọa độ của điểm H là nghiệm của phương trình:

$$y = x\cos a + \sin a = -\frac{1}{\cos a}x \ \Rightarrow x = -\frac{\sin a}{\cos a + \frac{1}{\cos a}}$$

$$= -\frac{\text{sinacosa}}{1+\cos^2 a},\ y = -\frac{1}{\text{cosa}} \cdot \frac{-\text{sinacosa}}{1+\cos^2 a} = \frac{\text{sina}}{1+\cos^2 a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{\sin^2 a\cos^2 a + \sin^2 a}{(1+\cos^2 a)^2} = \frac{\sin^2 a}{1+\cos^2 a} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 a} + \dfrac{1}{tg^2 a}} = \frac{\sin^2 a\, tg^2 a}{\sin^2 a + tg^2 a} \Rightarrow d = \frac{|\text{sina}| \cdot |\text{tga}|}{\sqrt{\sin^2 a + tg^2 a}}.$$

*Ví dụ 28.* Chứng minh rằng nếu

$$\cos 3x + a\cos 2x + b\cos x \geq -1,\ \forall x, \text{ thì } a = b = 0.$$

*Giải:* Gọi vế trái là $y(x)$ ta có $y(\pi) = -1 + a - b \geq -1$

$\Rightarrow a - b \geq 0,\ y(\frac{\pi}{3}) = -1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \geq -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b \leq 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$. Do vậy bài toán trở thành chứng minh $a = 0$, nếu

$$y = \cos 3x + a(\cos 2x + \cos x) \geq -1\ \forall x$$

$\Rightarrow g = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1 + a(2\cos^2 x - 1 + \cos x) \geq 0$

$\Rightarrow (\cos x + 1)(4\cos^2 x - 4\cos x + 1) + a(\cos x + 1) \times$
$\times (2\cos x - 1) \geq 0$

$\Rightarrow (\cos x + 1)(2\cos x - 1)^2 + a(\cos x + 1)(2\cos x - 1) \geq 0$

$\Rightarrow (\cos x + 1)(2\cos x - 1)[2\cos x - 1 + a] \geq 0.$

Vì $\cos x + 1 \geq 0\ \forall x \Rightarrow (2\cos x - 1)(2\cos x - 1 + a) \geq 0.$

Nếu $a = 0$ ta có $(2\cos x - 1)^2 \geq 0$ đúng $\forall x$.

Nếu $a > 0$ ta lấy $2\cos x - 1 < 0,\ 2\cos x - 1 + a > 0$

$$\Rightarrow \frac{1-a}{2} < \cos x < \frac{1}{2},$$

khi đó $(2\cos x - 1)(2\cos x - 1 + a) < 0.$

Nếu $a < 0$ ta lấy $2\cos x - 1 > 0,\ 2\cos x - 1 + a < 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \cos x < \frac{1-a}{2} \Rightarrow (2\cos x - 1)(2\cos x - 1 + a) < 0$$

Vậy chỉ có a = 0 là thích hợp.

*Cách khác.* Đặt $\cos x = t \Rightarrow -1 \le t \le 1$, ta phải chứng minh rằng $f(t) = (2t - 1)(2t - 1 + a) \ge 0$ khi $-1 \le t \le 1$ thì $a = 0$.

Vì $f(t) = X(X + a)$, với $X = 2t - 1 \Rightarrow -3 \le X \le 1$, là parabôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh $X = -\dfrac{a}{2}$, nên

Nếu $-3 \le -\dfrac{a}{2} \le 1 \Rightarrow -1 \le \dfrac{a}{2} \le 3 \Rightarrow -2 \le a \le 6$

thì $f_{min} = -\dfrac{\Delta}{4} = -\dfrac{a^2}{4} \ge 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$

Nếu $-\dfrac{a}{2} \ge 1 \Rightarrow a \le -2$ thì $f_{min} = f(1) = 1 + a \ge 0$

$\Rightarrow a \ge -1$ trái với $a \le -2$.

Nếu $-\dfrac{a}{2} \le -3 \Rightarrow a \ge 6$ thì $f_{min} = f(-3) =$

$= -3(-3 + a) \ge 0 \Rightarrow -3 + a \le 0 \Rightarrow a \le 3$ trái với $a \ge 6$.

Vậy chỉ có a = 0 là thích hợp.

*Ví dụ 29.* a, b, c là 3 cạnh một tam giác vuông, c là cạnh huyền; x, y là 2 số thỏa mãn hệ thức $ax + by = c$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \ge 1$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức?

*Giải: Cách 1.* Do $a > 0$, $b > 0$ và x, y không thể đồng thời bằng 0 (nếu trái lại ta có $0 = c > 0$ - vô lý), nên từ đầu bài ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}\ \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ và

$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$

nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos t$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin t$;

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos z$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin z$, ta được

$0 < \cos(t - z) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{x^2+y^2}} < 1 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 \geq \frac{c^2}{a^2+b^2} = 1$$

*Cách 2.* Theo bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski ta có

$c^2 = (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \geq$

$$\geq \frac{c^2}{a^2+b^2} = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{ax+by}{a^2+b^2} =$

$= \frac{c}{a^2+b^2} \Rightarrow x = \frac{ac}{a^2+b^2}$, $y = \frac{bc}{a^2+b^2}$.

**BÀI TẬP**

**1.** Chứng minh rằng nếu $\cos x \geq 0$ thì

1) $\cos x \geq \cos 2x$; 2) $\cos x \geq \cos 3x$;

và nếu $\sin x > 0$ thì 3) $\sin nx < n\sin x$ $\forall n \geq 2$ nguyên.

2. Chứng minh rằng nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x}.$$

**3.** Chứng minh rằng nếu $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ thì

$$tg\frac{x+y}{2} \leq \frac{tgx + tgy}{2},$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y$.

**4.** Chứng minh rằng

1) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$;

2) $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

**5.** Chứng minh rằng khi $0 < x \leq y < \frac{\pi}{2}$ thì

$$\frac{tgx}{x} \leq \frac{tgy}{y}.$$

**6.** Chứng minh rằng $4\cos 3x + 5 \leq 4\cos 2x + 5\cos x$.

**7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\forall x$ ta đều có:

1) $m(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + m > 0$;

2) $2m - 4 + m(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0$;

3) $5(m - 1) + \sin^2 x + m(3 - \cos x)^3 > 0$;

4) $\sin^2 x - 6 + 4m + m(5 - \cos^4 x)^2 < 0$.

**8.** Chứng minh rằng trong một tam giác ABC ta đều có:

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S,$$

trong đó a, b, c và S là các cạnh và diện tích tam giác.

**9.** Chứng minh rằng khi $a > 4$ ta có

$$\cos\frac{\pi}{a} > \frac{3}{\sqrt{a^2 + 9}}.$$

**10.** Chứng minh rằng nếu a là góc nhọn, $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì

1) $(a + \frac{b}{\sin\alpha})(b + \frac{a}{\cos\alpha}) \geq a^2 + b^2 + 3ab$;

2) $(a + \frac{b}{\sin\alpha})(b + \frac{a}{\cos\alpha}) \geq ab(3 + 2\sqrt{2})$.

**11.** Chứng minh rằng $\frac{1}{3} < \sin 20^o < \frac{7}{20}$.

**12.** Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ABC cạnh a, b, c, bán kính vòng tròn nội, ngoại tiếp là r và R, ta đều có:

1) $a\cos A + b\cos B \leq c$ ; 2) $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$.

**13.** Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ta đều có

1) $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ;

2) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ ;

3) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ ;

4) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

**14.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có

1) $\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

2) $(1 + \frac{1}{\sin A})(1 + \frac{1}{\sin B})(1 + \frac{1}{\sin C}) \geq 5 + \frac{26\sqrt{3}}{9}$.

**15.** Chứng minh rằng nếu cả 3 góc của tam giác ABC đều nhọn thì:

1) $\text{tgA} + \text{tgB} \ \ \text{tgC} \geq 3\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\text{tg}^5A + \text{tg}^5B + \text{tg}^5C}{\text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC}} \geq 9$.

**16.** A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

1) $2 < \cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{9}{4}$;

2) $2 < \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

**17.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong vòng tròn bán kính $R = 1$.

Chứng minh rằng tam giác ấy là nhọn, vuông hay tù, nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là lớn hơn, bằng hoặc bé hơn 8.

**18.** Chứng minh rằng nếu

$$a\cos 2x + b\sin 2x + c\cos x + d\sin x \geq 0$$

với mọi x thì $a = b = c = d = 0$.

**19.** Chứng minh rằng

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \leq 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

**20.** Chứng minh rằng, nếu $\forall x$ ta có

$$a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x \geq -1$$

thì $a_1 + a_2 + a_3 \leq 3$.

**21.** Chứng minh rằng nếu $\forall x$ ta có:

$a\cos x + b\cos 3x \leq 1$ thì $|b| \leq 1$.

**22.** Cho $m^2\cos x + 2m\sin x + 1 \geq 0$.

1) Tìm m để bất đẳng thức đúng $\forall x$.

2) Tìm m để bất đẳng thức đúng khi $0 \leq x \leq \pi$.

**23.** Chứng minh rằng khi $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ ta có

1) $\sqrt{2} \geq \sin x\sqrt{\sin x} + \cos x\sqrt{\cos x} \geq 1$;

2) $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

**24.** Tìm m để $\forall x$ ta đều có:

1) $y = \cos 2x + m\cos x + 4 \geq 0$;

2) $y = \cos^4 x + m\sin^2 x + 2 \geq 0$;

3) $y = (m - 1)\cos 2x + 4(m + 1)\sin x + 5 - 3m > 0$.

**25.** Chứng minh rằng $y = a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cos 4x$ nhận cả giá trị âm lẫn giá trị dương.

**26.** Chứng minh rằng khi $0 \leq x \leq \pi$ ta có:

1) $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \geq 0$;

2) $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x \geq 0$.

**27.** Cho hàm số $y = \dfrac{x^3\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1}$. Chứng minh rằng khi $0 < a < \pi$ thì $|y| \leq 1\ \forall x$.

**28.** Cho $y = \dfrac{x^2\cos a + 2x\sin a + 1}{x - 2}$. Tìm khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiệm cận xiên.

**29.** Chứng minh rằng nếu

$\cos 3x + a\cos(2x - \alpha) + b\cos(x - \beta) \geq -1\ \ \forall x$ thì $a = b = 0$.

**30.** a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, x và y là hai số thỏa mãn điều kiện $ax + by = c$.

1) Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \geq \dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$

2) Tìm giá trị bé nhất của $x^2 + y^2$.

**31.** Cho $x > 0$, $y > 0$. Chứng minh rằng:

$$x^{\sin^2 a}y^{\cos^2 a} < x + y\ \forall a.$$

## Chỉ dẫn và đáp số bài tập

### CHƯƠNG I

II. §1.

**1.** 1) *Cách 1.* Ta có: $\text{tgxtg}(\frac{\pi}{3} - x)\text{tg}(\frac{\pi}{3} + x) =$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - x)\sin(\frac{\pi}{3} + x)}{\cos(\frac{\pi}{3} - x)\cos(\frac{\pi}{3} + x)} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}}{\cos 2x + \cos\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\sin x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin x}{\cos x\cos 2x - \frac{1}{2}\cos x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{2}\sin x}{\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{2}\cos x} =$$

$$= \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \text{tg}3x.$$

Vậy biểu thức đã cho có thể viết:

$\text{tg}20^o\text{tg}40^o\text{tg}60^o\text{tg}80^o = \text{tg}20^o\text{tg}(60^o - 20^o)\text{tg}(60^o + 20^o)\text{tg}60^o$
$= \text{tg}3.20^o\text{tg}60^o = \text{tg}^2 60^o = 3.$

*Cách 2.*

Ta có: $\text{tg}20^o\text{tg}40^o\text{tg}60^o\text{tg}80^o = \text{tg}60^o \dfrac{\sin 20^o\sin 40^o\sin 80^o}{\cos 20^o\cos 40^o\cos 80^o}$.

Vì $\sin20^o\sin40^o\sin80^o = \frac{1}{2}(\cos20^o - \cos60^o)\sin80^o =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin100^o + \sin60^o}{2} - \frac{1}{2}\sin80^o\right)$, mà vì $\sin100^o = \sin80^o$

nên $\sin20^o\sin40^o\sin80^o = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lại có: $\cos20^o\cos40^o\cos80^o = \frac{2\sin20^o\cos20^o\cos40^o\cos80^o}{2\sin20^o} =$

$= \frac{\sin40^o\cos40^o\cos80^o}{2\sin20^o} = \frac{\sin80^o\cos80^o}{4\sin20^o} = \frac{\sin160^o}{8\sin20^o} = \frac{1}{8}$.

Vậy: $tg20^otg40^otg60^otg80^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} : \frac{1}{8}\right)\sqrt{3} = 3.$

*Cách 3:* $tg20^otg40^otg60^otg80^o = \frac{\sin20^o\sin40^o\sin80^o}{\cos20^o\cos40^o\cos80^o}\ tg60^o =$

$$= \frac{(\cos20^o - \cos60^o)\cos10^o}{(\cos20^o + \cos60^o)\sin10^o} . tg60^o =$$

$$= \frac{\left(\cos20^o - \frac{1}{2}\right)\cos10^o}{\left(\cos20^o + \frac{1}{2}\right)\sin10^o}\ tg60^o = \frac{2\cos20^o\cos10^o - \cos10^o}{2\cos20^o\sin10^o + \sin10^o}\ tg60^o =$$

$$= \frac{\cos30^\circ + \cos10^\circ - \cos10^\circ}{\sin30^\circ - \sin10^\circ + \sin10^\circ} . tg60^\circ = cotg30^\circ . tg60^\circ = \sqrt{3} . \sqrt{3} = 3.$$

2) *Cách 1.*

$$A = \frac{1}{2\sin10^\circ} - 2\sin70^\circ = \frac{1 - 4\sin10^\circ\cos20^\circ}{2\sin10^\circ} =$$

$$= \frac{1 - 2(-\sin10^\circ + \sin30^\circ)}{2\sin10^\circ} = \frac{2\sin10^\circ}{2\sin10^\circ} = 1.$$

*Cách 2.* $A = \frac{1}{2\cos80^\circ} - 2\cos20^\circ = \frac{1 - 4\cos80^\circ\cos20^\circ}{2\cos80^\circ} =$

$$= \frac{1 - 2(\cos60^\circ + \cos100^\circ)}{2\cos80^\circ} = \frac{-2\cos100^\circ}{2\cos80^\circ} = \frac{2\cos80^\circ}{2\cos80^\circ} = 1$$

3) ***Cách 1.*** **Vì** $\sin^2 x = \frac{1 - \cos2x}{2} \Rightarrow \sin^4 x = (\frac{1 - \cos2x}{2})^2$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos2x + \frac{1}{8}\cos4x.$$ **Vậy:**

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}) +$$

$$+\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}) = \frac{3}{2}.$$

vì: $\cos\frac{7\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8}$,

$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{4} = -\cos\frac{5\pi}{4}$.

*Cách 2.* Vì $\sin\frac{7\pi}{16} = \cos\frac{\pi}{16}$ ; $\sin\frac{5\pi}{16} = \cos\frac{3\pi}{16}$ , nên

theo công thức: $\sin^4x + \cos^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$ (xem ví dụ 15), ta có

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} =$$

$$= (\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}) + (\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{2}.$$

4) *Cách 1.* Vì $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{12} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ và $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} =$

$$= \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}) = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{12} \text{ mà } \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} =$$

$= 2 - \sqrt{3}$ , nên:

$$\text{tg}^2\frac{\pi}{12} + \text{tg}^2\frac{3\pi}{12} + \text{tg}^2\frac{5\pi}{12} = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} = 5$$

*Cách 2.* Vì $\text{tg}\,\frac{5\pi}{12} = \text{cotg}\,\frac{\pi}{12}$, $\text{tg} = \frac{3\pi}{12} = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$, nên:

$$\text{tg}^2\frac{\pi}{12} + \text{tg}^2\frac{3\pi}{12} + \text{tg}^2\frac{5\pi}{12} = 1 + \text{tg}^2\frac{\pi}{12} + \text{cotg}^2\frac{\pi}{12} =$$

$$1 + \frac{\sin^2\frac{\pi}{12}}{\cos^2\frac{\pi}{12}} + \frac{\cos^2\frac{\pi}{12}}{\sin^2\frac{\pi}{12}} = 1 + \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}} +$$

$$+ \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}} = 1 + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 5.$$

**5)** ***Cách 1.*** **Theo công thức:** $\text{tga} + \text{tgb} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$, **ta có:**

$$(\text{tg}9^\circ + \text{tg}81^\circ) - (\text{tg}27^\circ + \text{tg}63^\circ) =$$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ\cos 63^\circ} = \frac{1}{\cos 9^\circ\sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ\sin 27^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 2\,\frac{\sin 45^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = 4\,\frac{\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = 4.$$

*Cách 2.* Theo công thức $tga - tgb = \dfrac{\sin(a - b)}{\cos a.\cos b}$ ta có:

$$(tg81^o - tg63^o) - (tg27^o - tg9^o) = \frac{\sin 18^o}{\cos 81^o \cos 63^o} -$$

$$- \frac{\sin 18^o}{\cos 27^o \cos 9^o} = \sin 18^o\left(\frac{1}{\sin 9^o \sin 27^o} - \frac{1}{\cos 27^o \cos 9^o}\right) =$$

$$= \frac{\sin 18^o \cos 36^o}{\frac{1}{4}\sin 18^o \sin 54^o} = 4.$$

6) Đáp số: 5/4. *Chỉ dẫn:* Tương tự như câu 3) ở trên. Xem ví dụ 15 để có công thức $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$.

**2.** 1) *Cách 1.* Vì $54^o + 36^o = 90^o$ nên $\cos 54^o = \sin 36^o \Rightarrow$
$4\cos^3 18^o - 3\cos 18^o = 2\sin 18^o \cos 18^o$. Vì $\cos 18^o > 0 \Rightarrow$
$4\cos^2 18^o - 3 = 2\sin 18^o \Rightarrow 4(1 - \sin^2 18^o) - 3 = 2\sin 18^o \Rightarrow$
$4\sin^2 18^o + 2\sin 18^o - 1 = 0$. Vì $\sin 18^o > 0 \Rightarrow$
$\sin 18^o = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, $\cos 18^o = \sqrt{1 - \sin^2 18^o} = \sqrt{1 - \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} =$

$$= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

*Cách 2.* $\sin 45^o = \cos 36^o \Rightarrow -4\sin^3 18^o + 3\sin 18^o = 1 - 2\sin^2 18^o$

$$\Rightarrow 4\sin^3 18^o - 2\sin^2 18^o - 3\sin 18^o + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(\sin 18^o - 1)(4\sin^2 18^o + 2\sin 18^o - 1) = 0.$$

Vì $0 < \sin 18^o < 1$ nên suy ra: $4\sin^2 18^o + 2\sin 18^o - 1 = 0$ và quay về cách 1.

*Cách 3.* Vì cạnh của hình 10 cạnh đều nội tiếp trong vòng tròn đơn vị là

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ và trung đoạn } I_{10} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \text{ nên: } \sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^o = \frac{a_{10}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18^o = I_{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

2) Đáp số. $\sin 36^o = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$, $\cos 36^o = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

*Chỉ dẫn. Cách 1.* $36^o = 2.18^o$; *Cách 2.* Cạnh đa giác đều 5 cạnh nội tiếp trong vòng tròn đơn vị là

$$a_5 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

trung đoạn $I_5 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

3) ***Đáp số.*** $\sin 9^o = \frac{1}{8}[\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1) - 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}] \approx 0,15643.$

$$\cos 9^o = \frac{1}{8}[\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1) + 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}] \approx 0,98769.$$

*Chỉ dẫn. Cách 1.* $9^o = 45^o - 36^o$ ; *Cách 2.* $\cos 9^o = \frac{1 + \cos 18^o}{2}$,

$$\sin 9^o = \frac{1 - \cos 18^o}{2}.$$

**3.** 1) ***Đáp số:*** tg2x = -3/4. *Chỉ dẫn.* Làm như ví dụ 3 phần này.

2) ***Đáp số:*** 97/98.

3) *Đáp số.* $-\frac{1}{10}(3\sqrt{3}+4)$.

4) *Đáp số:* $\frac{\sqrt{5}}{6}(2+\sqrt{6})$ nếu $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

$$-\frac{\sqrt{5}}{6}(2+\sqrt{6}) \text{ nếu } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

**4.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Chỉ dẫn.* Làm như ví dụ 4 phần này.

*Cách khác:* Dùng cos hai góc bù nhau và sử dụng kết quả ví dụ 4 phần này.

2) 0.

3) $\frac{1}{2}$. *Chỉ dẫn:* Tính riêng tổng 3 số hạng đầu.

4) *Cách 1.* $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10} =$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5})}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}} = \frac{1}{2}.$$

*Cách 2.* Đặt $A = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} \Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{10}A =$

$2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} -$

$-\cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{5\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$ (vì $\cos\frac{5\pi}{10} = 0$) $\Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

**5.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{16}{5}$; 3) $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

**6.** 1) $\frac{3}{4}\sin 4x$; 2) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 4x$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x$ nếu

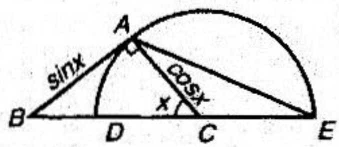
$\cos(x - \frac{\pi}{4}) \geq 0$; và $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x$, nếu $\cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0$; 4) $\sin^2 4x$.

**7.** 1) Dẫn về ví dụ 8, phần này. Cách 1 có thể tính trực tiếp.

2) Bài toán đúng $\forall x$ để mẫu số có nghĩa. Trong trường hợp x là góc nhọn có thêm cách giải bằng dựng hình như sau:

Dựng tam giác vuông ABC, cạnh huyền BC bằng 1 và góc nhọn C = x. Lấy C là tâm vẽ nửa vòng tròn bán kính CA cắt BC ở D và phần kéo dài của BC ở E. Tam giác ABD đồng dạng với tam giác EBA.

$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{EB}{BA}$.

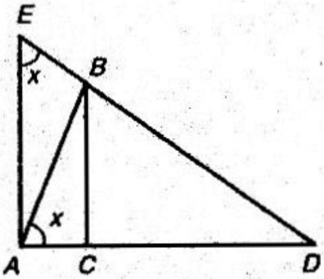



*Hình 25*

Vì AB = sinx. AC = cosx. BD = 1 - DC = 1 - AC = 1 - cosx, EB = BC + CE = 1 + CE = 1 + AC = 1 + cosx, nên ta được:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

3) Bài toán đúng cho mọi x mà sinx ≠ 0 và cosx ≠ 0. Đối với góc nhọn x, có thêm cách giải bằng dựng hình như sau:



*Hình 26*

Vẽ tam giác vuông ABC, cạnh huyền AB = 1 và góc nhọn A = x.

Dựng tam giác vuông ADE, với A = 1v, DE ⊥ AB, khi đó $\widehat{AED} = \widehat{BAD}$ = x (góc có các cạnh vuông góc), do đó tam giác ABC và tam giác AED đồng dạng ⇒

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{AD} = \frac{AC + BC}{AE + AC} \quad (1)$$

Vì AC = cosx, BC = sinx, AB = 1, AD = $\frac{1}{\cos x}$; AE = $\frac{1}{\sin x}$;

DE = DB + BE = tgx + cotgx = $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$, nên thay vào (1) ta được hệ thức cần chứng minh.

**8.** 1) *Cách 1.* (Dựa vào hình vẽ). Cần phân biệt hai trường hợp: hoặc cả hai góc B, C đều nhọn, hoặc có một trong 2 góc ấy, chẳng hạn B là tù. Trong trường hợp đầu:

$$a = BC = BH + HC = h(\text{cotg}B + \text{cotg}C) = \frac{h.\sin(B + C)}{\sin B.\sin C}.$$

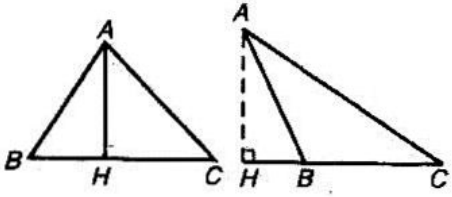
Trong trường hợp sau: a = BC = HC - HB =

$$= a(\text{cotg}C - \text{cotg}B_1) = h(\text{cotg}C + \text{cotg}B) = \frac{h\sin(B + C)}{\sin B \sin C}.$$

*Cách 2.* Gọi S là diện tích tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Sử dụng định lý hàm sin ta được:

$$a\sin B\sin C = \frac{ab\sin C}{2R} = \frac{S}{R} = \frac{ah}{2R} =$$

$$= h.\sin A = h.\sin(B + C).$$

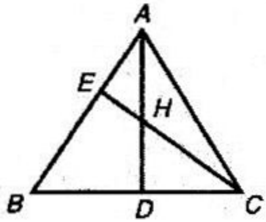



Hình 27

2) *Cách 1.* $tgB = cotg(\widehat{BCE}) = \frac{DC}{DH}$.

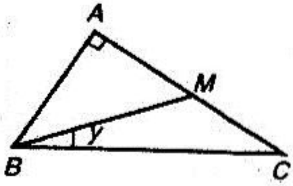
$$tgC = \frac{AD}{DC} \Rightarrow tgBtgC = \frac{DC}{DH} \cdot \frac{AD}{DC} =$$

$$= \frac{AD}{DH} = 2.$$




Hình 28

*Nhận xét.* Nếu một trong 2 góc B, C tù thì bài toán không đúng vì $tgBtgC < 0$. Cách khác bạn đọc tự chứng minh.




Hình 29

3) $$tg(B - y) = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AC}{AB}$$

$$= \frac{1}{2}tgB \Leftrightarrow \frac{tgB - tgy}{1 + tgBtgy} =$$

$$= \frac{1}{2}tgB \Leftrightarrow 2tgB - 2tgy = tgB +$$

$$+ tg^2Btgy \Leftrightarrow tgB = tgy(tg^2B + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tgy = \frac{tgB}{tg^2B + 2}.$$

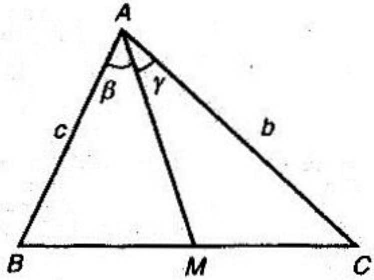
*Nhận xét.* Có thể giải bằng phương pháp diện tích và phương pháp dùng định lý hàm sin cho hai tam giác ABM và BCM.

4) *Chỉ dẫn:* Dùng định lý hàm sin.

5) *Chỉ dẫn:* Dùng phương pháp diện tích hoặc định lý hàm sin. suy ra từ các công thức đường phân giác trong ví dụ 12 là:

$$d = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos C\dfrac{B-C}{2}}$$ (phân giác ứng với cạnh a).

**9.** 1) *Chỉ dẫn:* Chứng minh rằng đường phân giác góc A cũng là đường phân giác góc y rồi dùng định nghĩa, các góc phụ nhau, hay dùng công thức các đường phân giác.




*Hình 30*

2) S(ABM) = S(ACM) ⇒

$$\Rightarrow b\sin\beta = c\sin\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{b-c}{b+c} =$$

$$= \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \text{cotg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,\text{tg}\,\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Lại có $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{B-C}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{B+C}{2}} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{B-C}{2}}{\text{cotg}\,\dfrac{A}{2}} =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\dfrac{B-C}{2}}{\text{cotg}\,\dfrac{\beta+\gamma}{2}} \Rightarrow \text{tg}\,\frac{B-C}{2} = \text{cotg}^2\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,\text{tg}\,\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

3) *Chỉ dẫn*. Chứng minh rằng đường phân giác của góc A cũng là đường phân giác của góc y và sử dụng kết quả ví dụ 10.

Chú ý: $tg^2\dfrac{A}{2} = tg^2 45^o = 1.$

**10.** 1) a), b) Xem ví dụ 30, phần này.

2) a), b) Xem cách giải ví dụ 11, phần này

*Chỉ dẫn*. a) i) Chuyển sin(A + B + C) sang trái và làm tương tự ví dụ 14 cách 2; ii) Tương tự ví dụ 9 cách 3.

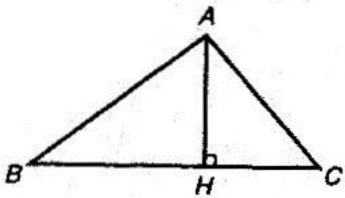
b) i) và ii) suy ra từ a) i) và ii), vì $\sin 180^o = 0$, $\cos 180^o = -1$, và chú ý hàm lượng giác của các góc phụ nhau.

**11.** a) Ta có 2S = ah = bcsinA.

Theo định lý hàm sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

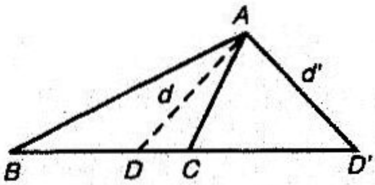
ta có $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}$ và $c = \dfrac{a\sin C}{\sin A}$




*Hình 31*

$$\Rightarrow ah = \frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}.\sin A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A}.$$




*Hình 32*

***Cách khác:***

$$h = c\sin B = \frac{a\sin C}{\sin A}\sin B.$$

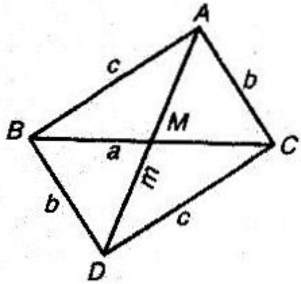
b) Thay vào công thức trong ví dụ 12:

$j = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ biểu thức của b và c như câu a).

c) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bd'\sin(90^o + \frac{A}{2}) -$

$-\frac{1}{2}cd'\sin(90^o - \frac{A}{2}) \Rightarrow 2bc\sin\frac{A}{2} = d'(b - c) \Rightarrow$

$\Rightarrow d' = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$. Thay b, c bằng giá trị của chúng như câu a) bài này ta được kết quả.



*Hình 33*

d) Kéo dài AM là đoạn MD = MA, khi đó $\widehat{ABD} = 180^o - A$.

Áp dụng định lý hàm côsin vào tam giác ABD ta được $AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2BD.AB\cos(180^o - A)$ hay $4m^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.

Vì trong tam giác ABC ta có

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, nên $4m^2 = b^2 + c^2 +$

$+ 2bc\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 2(b^2 + c^2) - a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 = \frac{1}{2}[(b^2 + c^2) - \frac{1}{2}a^2]$.

Cũng có thể giải bằng hình học đối với hình bình hành ABCD.

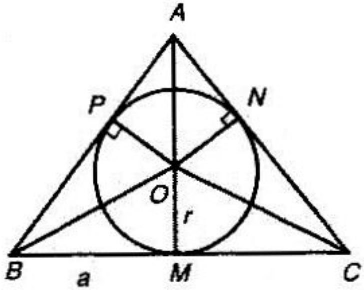
**12.** a) Ta có $\frac{r}{AN} = tg\frac{A}{2} \Rightarrow$

$r = AN.\text{tg}\dfrac{A}{2}$. Vì AB = AP,

CN = CM, BP = BM nên AM +

+ CM + BM = p $\Rightarrow$ AN + a = p $\Rightarrow$

AN = p - a $\Rightarrow r = (p - a)\text{tg}\dfrac{A}{2}$.




*Hình 34*

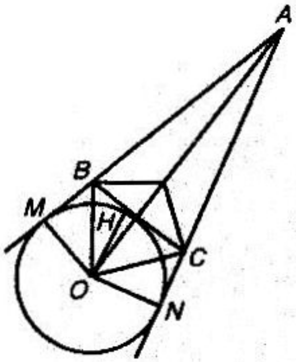
Ta lại có:

$$a = BM + CM = r\text{cotg}\frac{B}{2} + r\text{cotg}\frac{C}{2} =$$

$$= r(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}) =$$

$$= r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = r\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \Rightarrow r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

Xem cách giải khác ở cách 3 ví dụ 9 và bài tập 14, 4).




*Hình 35*

b) Ta có $OM = r_a = AM.\text{tg}\dfrac{A}{2}$.

Vì AM = AN (2 tiếp tuyến với vòng tròn O, xuất phát từ A) và tương tự BM = BN, CM = CH $\Rightarrow$ AM + AN = = 2AM = a + b + c =

$= 2p \Rightarrow AM = p$ và $r_a = p.\text{tg}\dfrac{A}{2}$.

$OH = r_a = CH.\text{tg}\widehat{OCH} = CH.\text{cotg}\dfrac{C}{2}$.

Vì CH = CN, CN = AN - AC = p - b, nên $r_a = (p - b)\text{cotg}\frac{C}{2}$.

Tương tự $r_a = (p - c)\text{cotg}\frac{B}{2}$.

Ta lại có $BC = a = BH + CH = r_a.\text{tg}\frac{B}{2} + r_a.\text{tg}\frac{C}{2}$.

($\widehat{HOC} = \frac{C}{2}$ vì cùng phụ với $\widehat{HCO}$; $\widehat{HOB} = \frac{B}{2}$, vì cùng phụ với

$$\widehat{HBO}) \Rightarrow a = r_a(\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}) = r_a.\frac{\sin(\frac{B}{2} + \frac{C}{2})}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= r_a.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \Rightarrow r_a = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

**13.** a) Ta có $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$$= \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc} =$$

$$= \frac{p(p - a)}{bc} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$$

Tương tự, ta tính được $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$.

b) Ta có $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} =$

$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$. Tương tự ta tính được $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$.

c) Theo công thức $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

và tương tự đối với tg(B/2), tg(C/2).

14. 1) Giải như ví dụ 13, 1).

2) (Xem hình vẽ ví dụ 10). Theo phần đầu cách 2 (phương pháp diện tích) ta có:

$$c\sin\left(\frac{A}{2} + x\right) = b\sin\left(\frac{A}{2} - x\right) \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{A}{2} - x\right)}.$$

Theo tính chất tỷ lệ thức ta có:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{A}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{A}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{A}{2} - x\right)} = \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Theo định lý hàm tang ta có:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{tg\frac{B-C}{2}}{tg\frac{B+C}{2}} = \frac{tg\frac{B-C}{2}}{cotg\frac{A}{2}}$$

Từ hai hệ thức cuối ta được $tg(\frac{x}{2}) = \frac{tg\frac{B-C}{2}}{cotg^2\frac{A}{2}} =$

$$= tg^2\frac{A}{2}\, tg\frac{B-C}{2}.$$

3) (Xem hình vẽ ví dụ 13, 2). Ta có:

$$\frac{V(PMNQ)}{V/2} = \frac{PM}{PA}\cdot\frac{PN}{PB}\cdot\frac{PQ}{PC} = \frac{m.n.q}{I^3} \quad ((I = SA = SB = SC = SD);$$

$$\frac{V(PMRQ)}{V/2} = \frac{PM}{PA}\cdot\frac{PN}{PD}\cdot\frac{PQ}{PC} = \frac{mrq}{I^3} \Rightarrow$$

$$\frac{V(PMNQR)}{V/2} = \frac{mq(n+r)}{I^3}$$. Tương tự $\frac{V(PMNQR)}{V/2} =$

$$= \frac{V(PMNR)}{V/2} + \frac{V(PRNQ)}{V/2} = \frac{nmr + rnq}{I^3} = \frac{nr(m+q)}{I^3} \Rightarrow$$

$$mq(n+r) = nr(m+q) \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{m} + \frac{1}{q}$$

4) Vì S = pr, mà theo công thức Hêrông

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Theo bài tập 13. c) ta có: $tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} =$

$$\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{r}{p-a} \Rightarrow r = (p-a)tg\frac{A}{2}.$$

15. 1) a) Vuông tại C; b) Vuông tại A; c) C = 1v; d) Vuông tại A; e) A = 1v; g) A = 1v; h = A = 1v; f) a là cạnh huyền; k) A = 1v.

2) a), b) B = C; c) A = B; d) A = B; c) a = b; g) Viết lại biểu thức dưới dạng atgA + btgB = (a + b)cotg(C/2) =

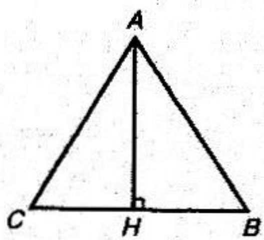
$= (a+b)tg\frac{A+B}{2}$ và quay lại bài 15, 2), c) ở trên.

3) Biến đổi điều kiện đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - bc \\ a = 2b\cos C. \end{cases}$$

So sánh điều kiện đầu với định lý hàm cosin suy ra cosA = 1/2 và do A là góc trong tam giác nên A = 60°. Mặt khác, gọi H là chân đường cao xuất phát từ A, ta có CH = bcosC = = a/2 = BC/2 (theo điều kiện cuối) ⇒ AH là trung tuyến. Vậy ABC là tam giác cân có một góc bằng 60° nên nó là tam giác đều.

*Nhận xét.* 1) Cách giải trên có một sơ xuất là chưa biện luận góc C phải nhọn, vì nếu không H nằm trên đoạn kéo dài của BC, chú ý a = 2bcosC ⇒ C nhọn, vì nếu C tù thì cosC < 0.




*Hình 36*

2) Bài toán trên có nhiều cách giải khác. Chẳng hạn, $\cos C = \frac{a}{2b}$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2ab.\frac{a}{2b} = b^2 \Rightarrow b = c$. Sau đó thay vào điều kiện $a^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow a = b = c$.

Cũng có thể dùng định lý hàm sin áp dụng vào điều kiện thứ hai, thì được $2\sin B\cos C = \sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B \Rightarrow \sin(B - C) = 0 \Rightarrow B = C, A = 60^o \Rightarrow A = B = C = 60^o$.

4) Giải tương tự câu 3) trên đây.

5) Giải tương tự $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$ như trong ví dụ 14.

6) Dẫn về tích $2(2\cos\frac{C}{2} - 1)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 0$.

7) Dẫn về tích $(1 - \cos 3A)(1 - \cos 3B)(1 - \cos 3C) = 0$.

8) a) Dẫn về tích $\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0$;

b) Dẫn về tích $\sin\frac{60^o - A}{2}\sin\frac{60^o - B}{2}\sin\frac{60^o - C}{2} = 0$;

c) Dẫn về tích $\sin 2A\sin 2B\sin 2C = 0$;

d) Dẫn về tích $\cos A\cos B\cos C = 0$.

9) Dẫn về $8 + 8\cos A\cos B\cos C >, =, < 8$.

**16.** 1) a) Dùng công thức hạ bậc hoặc công thức lũy thừa của nhị thức.

b), c) Công thức hiệu bình phương, hiệu mũ 3 và hạ bậc.

2) Gọi vế trái của các biểu thức cần tính là y, khi đó:

a) $y_{max} = 1$, khi $x = 0$, $y_{min} = \frac{1}{8}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

*Chỉ dẫn.* $y = \frac{1}{32}t^2 + \frac{7}{16}t + \frac{17}{32}$, $t = \cos 4x$.

b), c) Sử dụng ý: Hiệu lớn nhất nếu số bị trừ lớn nhất, đồng thời số trừ bé nhất, và ngược lại hiệu sẽ bé nhất, nếu số bị trừ bé nhất, số trừ lớn nhất đồng thời. Chú ý $\sin^2x + \cos^2x = 1$. $\cos^2x$ lớn nhất bằng 1, đồng thời $\sin^2x$ bé nhất bằng không và ngược lại.

b) $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$; c) $y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$.

**17.** a) Theo ví dụ 6 phần này, $y = \cos^3 2x \Rightarrow y_{max} = 1$, $y_{min} = -1$.

b) Theo bài tập 6. 1) phần này, $y = \frac{3}{4}\sin 4x \Rightarrow y_{max} = \frac{3}{4}$,

$$y_{min} = -\frac{3}{4}.$$

c) Làm như ví dụ 17: $y_{max} = \frac{1}{2}$; $y_{min} = -\frac{1}{2}$.

d) $y_{max} = \sqrt{\frac{a+b}{2} + c}$ ; $y_{min} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$.

**18.** 1), 2), 3), 4), 5) Hoặc biến đổi đưa về biểu thức không phụ thuộc x hoặc chứng minh đạo hàm theo x bằng 0. Xem cách giải ví dụ 20 phần này.

**19.** 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos(45^o - \frac{x}{2})$;

2) $4\cos\frac{x+y}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2})\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$;

3) $4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$;

4) $4\cos 2x\cos(\frac{x}{2} + 30^o)\cos(\frac{x}{2} - 30^o)$.

**20.** 1) $-4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

2) $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

3) $4\sin A\sin B\sin C$; 4) $4\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2}$.

**21.** 1) $2\sqrt{3}\sin 20^o\sin 40^o$;

2) $\dfrac{\sin 25^o}{2\sin 5^o}$ ; 3) $\dfrac{\sin 40^o \sin 35^o}{\sin 5^o}$ ; 4) $\cos 1^o$.

**22.** $\cot g\dfrac{A}{2}\cot g\dfrac{B}{2}\cot g\dfrac{C}{2}$.

**23.** $a^2 = tg^4x + cotg^4x + 2tg^2x cotg^2x$.

Vì $tg^4x + cotg^4x = b$ và $tgx cotgx = 1 \Rightarrow b + 2 = a^2$.

**24.** $a = \cos(x - \alpha) = \cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha$.

$b = \sin(x - \beta) = \sin x\cos\beta - \cos x\sin\beta$.

$\Rightarrow a\sin\beta + b\cos\alpha = \sin x\cos(\alpha - \beta)$.

$a\cos\beta - b\sin\alpha = \cos x\cos(\alpha - \beta)$.

Bình phương 2 vế và cộng lại ta được:

$\cos^2(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2ab\sin(\alpha - \beta)$.

**25.** 1) theo công thức $cotg\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{cotg\dfrac{A}{2}cotg\dfrac{B}{2} - 1}{cotg\dfrac{A}{2} + cotg\dfrac{B}{2}}$

$$= tg\frac{C}{2} = \frac{1}{cotg\dfrac{C}{2}} \Rightarrow cotg\frac{A}{2}cotg\frac{B}{2}cotg\frac{C}{2} =$$

$$= cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2}$$

2) $tgA = \sqrt{3} \Rightarrow A = 60^o \Rightarrow \dfrac{A}{2} = 30^o \Rightarrow tg\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$cotg\frac{A}{2} = \sqrt{3}\ ;\quad tgB = 2\sqrt{2} = \frac{2tg\dfrac{B}{2}}{1 - tg^2\dfrac{B}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{B}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}tg\frac{B}{2} - 1 = 0 \Rightarrow tg\frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow cotg\dfrac{B}{2} = \sqrt{2}$. Theo câu 1) ta có

$$\cot g\frac{C}{2} = \frac{\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1}.$$

**26.** $\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A}.\cos\frac{A}{2} =$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}.\cos\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}.$$

2) Tương tự 1) câu này.

3) Áp dụng định lý hàm sin $\Rightarrow \sin 2B + \sin 2C = 2\sin A\cos(B-C) \Rightarrow 2\sin(B+C)\cos(B-C) = 2\sin A\cos(B-C) \Rightarrow \sin A\cos(B-C) = \sin A\cos(B-C)$ đúng.

4) Dùng kết quả bài tập 13), c) phần này.

5) Dùng kết quả bài tập 13.

**27.** 1) Theo định lý hàm sin ta có:

$$\frac{a^2-b^2}{c^2} = \frac{\sin^2A - \sin^2B}{\sin^2C} = \frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{\sin^2(A+B)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin^2(A+B)} =$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2(A+B)} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}.$$

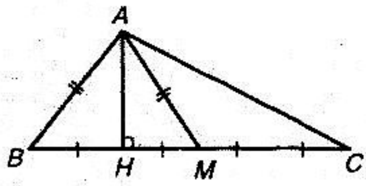
2) Áp dụng công thức Hérông và kết quả bài tập 13, c) phần này.

3) Áp dụng công thức diện tích $S = \frac{abc}{4R}$ và định lý hàm sin.

**28.** 1. Ta có $tgB = \frac{AH}{BH}$, $tgC = \frac{AH}{CH} = \frac{AH}{3BH} = \frac{1}{3}tgB \Rightarrow$

$\Rightarrow tgB = 3tgC$.

2) Theo bài tập 27, 1) phần này:




*Hình 37*

$$\frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\sin(B - C) = \frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin(B + C)$$

$$= \frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin A$$

Vì $AB = AM = m \Rightarrow 2m^2 + 2b^2 = a^2 + 4m^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 - 2m^2 =$

$= 2b^2 - 2c^2 \Rightarrow \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$. Do vậy $\sin A = 2\sin(B - C)$.

*Cách khác:* Từ kết quả câu 1) bài này ta có

$\sin B\cos C = 3\sin C\cos B \Leftrightarrow \sin(B - C) = \sin B\cos C - \sin C\cos B$

$= 2\sin C\cos B = \sin(B + C) - \sin(B - C) \Rightarrow 2\sin(B - C) =$

$= \sin(B + C) \Rightarrow 2\sin(B - C) = \sin A$.

**29.** Theo định lý hàm sin ta có $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

$\Rightarrow 2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin^2 B\sin A\cos A =$

$\sin^2 C.\cot g\frac{C}{2} \Leftrightarrow 2\sin A\sin B\sin(A + B) = \sin^2 C.\cot g\frac{C}{2}$.

Vì $C = \pi - (A + B) \Rightarrow \sin(A + B) = \sin C \neq 0$, do đó ta được

$2\sin A\sin B = \sin C\cot g\frac{C}{2} = 2\cos^2\frac{C}{2} = 1 + \cos C$

$\Rightarrow \cos(A - B) - \cos(A + B) = 1 - \cos(A + B) \Leftrightarrow \cos(A - B) = 1$.

Vì A, B là các góc của một tam giác nên từ hệ trên suy ra $A - B = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác cân.

Điều ngược lại vẫn đúng. Kiểm tra bằng cách đi ngược lại.

*Nhận xét.* Cũng có thể giải bằng định lý hàm côsin, nhưng cồng kềnh hơn.

**30.** Giải như ví dụ 30 phần này.

*Đáp số*: 2) : hoặc $A + B + C = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, hoặc

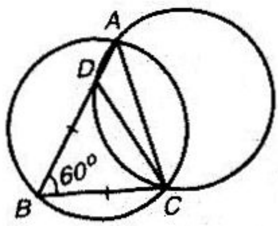
$$A = B + C + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ hoặc}$$

$$B = A + C + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ hoặc}$$

$$C = A + B + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ k nguyên}$$

**31.** *Đáp số*: $M = \frac{2}{1 - m^2}$.

**32.** *Cách 1*. Vì $A + B + C = 3A + 3x = 180^o \Rightarrow A + x = B = 60^o$.
Từ đó $A = 60^o - x$, $C = 60^o + x \Rightarrow c - a = 2R$, $2\cos 60^o \sin x = 2R\sin x$.




*Hình 38*

*Cách 2*. Vì $C > A$, nên $c > a$. Dựng đoạn $BD = BC$, $D \in AB$, khi đó tam giác BCD đều, vì $B = 60^o$. Vì vậy $\widehat{ADC} = 120^o$ và bán kính vòng tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ACD bằng nhau. Vậy $AD = c - a = 2R\sin\widehat{ACD} = 2R\sin x$.

§2.

**1.** 1) $\cos x - \cos 2x = \cos x - (2\cos^2 x - 1) = \cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = \cos x(1 - \cos x) + \sin^2 x \geq 0$, vì $\cos x \geq 0$, $1 - \cos x \geq 0$, $\sin^2 x \geq 0$. Do vậy $\cos x \geq \cos 2x$.

*Cách khác:* Do hàm tuần hoàn nên xét $-\frac{\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$ là đủ.

Nếu $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}$ hoặc $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\cos x \geq 0$.

$\cos 2x \le 0 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng. Nếu $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ thì sử dụng tính nghịch biến của hàm cosx trên $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ , nếu $-\frac{\pi}{4} \le x \le 0$ thì sử dụng tính chất hàm chẵn.

2) Tương tự 1).

3) Qui nạp hoặc tính chất hàm lồi.

**2.** Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , nên đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow 0 < t < 1$.

Do vậy $\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{t(1-t^2)}{1+t+t(1-t)} > 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x} > \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

*Cách khác:* Có thể dùng đạo hàm. Đặt $y(x) = \frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$, $g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$\Rightarrow y(o) = g(o)$. Hãy chứng minh rằng $y'(x) > g'(x)$ khi $o < x < \frac{\pi}{2}$.

**3.** Từ giả thiết suy ra $\cos x > 0$, $\cos y > 0$. Áp dụng kết quả thí dụ 3 phần này ta có:

$$0 < \cos x.\cos y \le \left(\frac{\cos x + \cos y}{2}\right)^2 \le \cos^2\frac{x+y}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$. Vì vậy

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\cos^2\frac{x+y}{2}} \le \frac{\sin(x+y)}{2\cos x\cos y} = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{2}.$$

Bạn đọc hãy tìm thêm cách giải khác.

**4.** 1) Đặt $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \Rightarrow y' = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} \le 0$

(xem cách 2 ví dụ 10 phần này); $y(o) = 0 \Rightarrow y \le y(o) = 0$.

$$\Rightarrow \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

*Cách khác:* Ta có

$$1 - \cos x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 2\sin^2\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ge 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2 -$$

$$- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = \frac{2x^6}{48^2} \ge 0 \Rightarrow \cos \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

2) Như 1) ở trên.

**5.** Ta chỉ cần xét $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ là đủ. Ta có

$$\frac{tgy}{y} - \frac{tgx}{x} = \frac{(y^2 - x^2)\left[\frac{\sin^2(y - x)}{y - x} - \frac{\sin(y + x)}{x + y}\right]}{2xy\cos x\cos y} > 0$$

Vì $0 < y - x < y + x < \pi$ (xem ví dụ 7 phần này).

$$\Rightarrow \frac{tgy}{y} > \frac{tgx}{x}.$$

*Cách khác:* Đặt $y = \frac{tgx}{x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - tgx}{x^2}$

$$= \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{x - (\frac{1}{2})\sin 2x}{x^2\cos^2 x} > \frac{x - \frac{1}{2}2x}{x^2\cos^2 x} = 0$$

$\Rightarrow$ y đồng biến $\Rightarrow$ từ $0 < x \le y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{tgx}{x} \le \frac{tgy}{y}$

**6.** Làm như ví dụ 8 phần này.

**7.** 1) Giả sử m thỏa mãn đầu bài. Lấy $x = \frac{\pi}{2}$, ta có

$(4 - \sin\frac{\pi}{2})^4 m - 3 + \cos^2\frac{\pi}{2} + m > 0 \Rightarrow 82m - 3 > 0$

$\Rightarrow m > \frac{3}{82}$.

Giả sử $m > \frac{3}{82}$ . Vì $\cos^2 x \geq 0, 4 - \sin x \geq 3$ và $(4 - \sin^4 x) \geq 81$

và $m > 0 \Rightarrow m(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + m \geq 81m - 3 + m = 82m - 3 > 0$.

Có nghĩa là mọi $m > \frac{3}{82}$ thỏa mãn đầu bài.

2) $m < \frac{3}{11}$ ; 3) $m > \frac{5}{13}$ ; 4) $m < \frac{5}{29}$ .

**8.** Tương tự như ví dụ 9 phần này.

**9.** Tương tự ví dụ 10 phần này.

**10.** Tương tự như ví dụ 11 phần này.

**11.** Ta có

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \Rightarrow \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{729.6} < \sin 20^o = \sin\frac{\pi}{9} <$$

$$< \frac{\pi}{9} \Rightarrow \frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{9^3.6} < \sin 20^o < \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20}.$$

Vì $\frac{\pi}{9} - \frac{\pi^3}{9^3.6} \approx \frac{3{,}141}{9} - \left(\frac{3{,}141}{9}\right)^3 . \frac{1}{6} = 0{,}349 - (0{,}349)^3 . \frac{1}{6} >$

$> 0{,}349 - (0{,}36)^2 . \frac{0{,}36}{6} = 0{,}349 - 0{,}007776 > 0{,}341 > \frac{1}{3}$ nên

$\frac{1}{3} < \sin\frac{\pi}{9} = \sin 20^o < \frac{7}{20}$ .

*Cách khác:* Ký hiệu $t = \sin 20^o$, khi đó

$$\sin 60^o = \sin 3.20^o = -4\sin^3 20^o + 3\sin 20^2 = -4t^3 + 3t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\sin 20^o$ là nghiệm của của phương trình $y = 4t^3 - 3t + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0$.

Phương trình này có 3 nghiệm vì $y_{max} \cdot y_{min} =$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$ (bạn đọc tự kiểm tra).

Vì $y(-1) = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} < 0$, $y(o) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$,

$y(\frac{1}{3}) = \frac{27\sqrt{3} - 46}{54} > 0$, $y(\frac{7}{20}) = \frac{1000\sqrt{3} - 1757}{2000} < 0$,

$y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} < 0$, $y(1) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} > 0$, nên có 3 nghiệm trong

các khoảng$(-1,0).(\frac{1}{3}, \frac{7}{20})$ và $(\frac{1}{2}, 1)$.

Do $0 < \sin 20^o < \sin 30^o = \frac{1}{2}$, nên $\frac{1}{3} < \sin 20^o < \frac{7}{20}$.

**12.** 1) Vì $c = a\cos B + b\cos A \Rightarrow a\cos A + b\cos B - c = a\cos A + b\cos B -$
$- a\cos B - b\cos A = (a - b)(\cos A - \cos B) \leq 0 \Rightarrow a\cos A + b\cos B \leq c$.

*Cách khác:* Theo định lý hàm côsin ta có

$$a\cos A + b\cos B - c = a\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - c =$$

$$\approx \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) - 2abc^2}{2abc} =$$

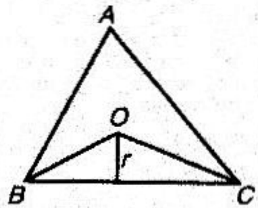
$$= -\frac{(a - b)^2 (c - a + b)(c + a - b)}{2abc} \leq 0 \Rightarrow a\cos A + b\cos B \leq c.$$

2) Gọi O là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Xét tam giác BOC ta có

$BC = a = r(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2})$.

Mặt khác theo định lý hàm sin ta có

$a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$



*Hình 39*

Do đó $\dfrac{r}{4R} = \dfrac{\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{\cotg\dfrac{B}{2} + \cotg\dfrac{C}{2}} =$

$$= \frac{\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{B+C}{2}} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Theo kết quả bài 13, 2) ta được $\dfrac{r}{4R} \leq \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{r}{R} \leq \dfrac{1}{2}$ .

*Cách khác:* Gọi S là diện tích tam giác ABC, p là nửa chu vi, khi đó theo công thức Hêrông ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

Mặt khác ta lại có $S = \dfrac{abc}{4R} = pr$

$$\Rightarrow R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{4S^2}{pabc} = 4\,\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} =$$

$$= 4\,\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} .$$

Vì $p - a = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-a}{2} > 0$ (trong tam giác tổng 2 cạnh lớn hơn cạnh thứ ba), và $p - b > 0$, $p - c > 0$ nên theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \dfrac{p-a+p-b}{2} = \dfrac{c}{2}$ . Tương tự

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2} , \qquad \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2} .$$

Nhân 3 bất đẳng thức vế với vế, ta được:

$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{abc}{8}$ và vì vậy $\dfrac{r}{R} \leq \dfrac{1}{2}$ .

**13.** Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số không âm và kết quả ví dụ 13, 1) phần này ta được:

$$\sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

*Cách khác:* Vì $\sin A = \frac{a}{2R}$ , $\sin B = \frac{b}{2R}$ , $\sin C = \frac{c}{2R}$ $\Rightarrow$

$\sin A\sin B\sin C = \frac{abc}{8R^2} = \frac{S}{2R^2}$ . Theo ví dụ 9 phần này ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \ge 4S\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S}{2R^2} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \le \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{4} =$$

$= \frac{3\sqrt{3}}{8}$ (xem ví dụ 17 phần này).

2) Theo bất đẳng thức Côsi và ví dụ 16, 2) phần này ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^3}{3} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

*Cách khác:* Gọi vế trái là y ta có:

$$y = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$ . Đặt $x = \sin\frac{C}{2}$ , ta được

$$x^2 - x\cos\frac{A-B}{2} + 2y = 0.$$

Vì phương trình này có nghiệm, nếu $\Delta = \cos^2\frac{A-B}{2} - 8y \geq 0$

$$\Rightarrow y < \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

3) Làm như câu 2). Chú ý: nếu có một góc tù thì vế trái âm, bất đẳng thức đúng, nên có thể xem ba góc đều nhọn.

4) Làm như câu 1). *Cách khác.* Theo bài tập 10, 3), b), i) §1 Chương I, ta có

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}(\sin A + \sin B + \sin C) =$$

$$= \frac{1}{4}.3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ (xem ví dụ 13 phần này).}$$

**14.** 1) Vì $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ là 3 góc nhọn, nên theo bài tập 3 ta có

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} \geq 3\mathrm{tg}\frac{A+B+C}{6} = 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

*Cách khác.* Dựa vào bất đẳng thức $\mathrm{tg}x \geq x + \frac{x^3}{6}$ khi $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

Bất đẳng thức này được chứng minh bằng cách xét hàm đồng biến.

$y = \mathrm{tg}x - x - \frac{x^3}{6}$. Ta có

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} > \frac{A+B+C}{2} + \frac{1}{48}(A^2 + B^3 + C^3) \geq$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi^3}{9.48} - \frac{1}{36.27}\pi^5 > \sqrt{3}. \text{ (Chú ý } A + B + C = \pi)$$

2) Ta có

$$(1 + \frac{1}{\sin A})(1 + \frac{1}{\sin B})(1 + \frac{1}{\sin C}) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) + \left(\frac{1}{\sin A\sin B} + \frac{1}{\sin A\sin C} +\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sin B\sin C}\right) + \frac{1}{\sin A\sin B\sin C} \geq 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}} + \frac{1}{\sin A\sin B\sin C}$$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương).

Cũng vì $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{A + B + C}{3}$$

$= \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (Xem ví dụ 13, a) phần này.

Do vậy, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq 1 + 3.\frac{2}{\sqrt{3}} +$$

$$+ 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = 5 + \frac{26}{9}\sqrt{3}$$

Nhận xét rằng dấu bất đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

**15.** 1) Do A, B, C nhọn, nên $tgA > 0$, $tgB > 0$, $tgC > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}.$$

Vì trong tam giác 3 ta có $tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$, nên $tgAtgBtgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC} \Rightarrow \sqrt[3]{(tgAtgBtgC)^2} \geq 3 \Rightarrow tgAtgBtgC \geq 3^{3/2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt[3]{tgAtgBtgC} \geq \sqrt{3}$. Vậy $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$.

Nhận xét rằng, có thể dùng bất đẳng thức $tgx > x + \dfrac{x^3}{6}$ để giải bài toán này như bài 14, 1) phần này.

2) Vì trong tam giác tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC, và vì A, B, C nhọn, nên tgA > 0, tgB > 0, tgC > 0. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta được:

$$\frac{tg^5A + tg^5B + tg^5C}{tgA + tgB + tgC} = \frac{tg^5A + tg^5B + tg^5C}{tgAtgBtgC} \geq \frac{3\sqrt[3]{(tgAtgBtgC)^5}}{tgAtgBtgC}$$

$= 3\sqrt[3]{(tgAtgBtgC)^2} \geq 3 \,.\, 3 = 9$ (xem câu 1 ở trên).

**16.** Làm như ví dụ 16 phần này.

**17.** Theo định lý hàm sin ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 8 + 8\cos A\cos B\cos C$ và làm như ví dụ 17, 2) phần này.

**18.** Làm như ví dụ 18.

**19.** Bằng cách biểu diễn $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ qua cos2x hãy chứng minh trước:

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \leq \frac{1}{2}[1 + ab + \sqrt{(1 + a)^2(1 + b^2)}\,]$$

**20.** Lấy $x = \frac{\pi}{2}$, ta có $-a_2 \geq -1$ hay $a_2 \leq 1$. Lấy $x = \pi$, ta được

$-a_1 + a_2 + a_3 \geq -1$ hay $a_1 + a_3 \leq 1 + a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \leq$

$\leq 1 + 2a_2 \leq 3$ (do $a_2 \leq 1$).

*Nhận xét.* Có thể giải bằng cách xét hàm $y = a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + 1 \geq 0\ \forall x$ và cho $y_{min} \geq 0$, nhưng rất cồng kềnh.

**21.** Lấy x = 0 ta có $a + b \leq 1$, lấy $x = \pi$ ta có $-a - b \leq 1$. Do vậy $-1 \leq a + b \leq 1$. Lấy $x = \frac{2\pi}{3}$ ta được $-\frac{1}{2}a + b \leq 1$, lấy $x = \frac{\pi}{3}$ ta được $\frac{1}{2}a - b \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -a + 2b \leq 2$.

Cộng hai bất đẳng thức kép cuối cùng ta được $-3 \leq 3b \leq 3 \Rightarrow -1 \leq b \leq 1$ hay $|b| \leq 1$.

*Cách khác.* Ta giải bằng phản chứng. Giả sử trái lại $|b| > 1$, khi đó:

Nếu $b > 1$ mà $a \geq 0$ thì khi x = 0 ta có $a + b > 1$ trái với đầu bài.

Nếu $b > 1$, $a < 0$ thì khi $x = \frac{2\pi}{3}$ ta có $-\frac{1}{2}a + b > 1$, trái với đầu bài.

Nếu $b < -1$, $a \geq 0$ thì khi $x = \frac{\pi}{3}$ ta có $\frac{1}{2}a - b > 1$ trái với đầu bài.

Nếu $b < -1$ ; $a < 0$ thì khi $x = \pi$, ta có: $-a - b > 1$ trái với đầu bài.

Bạn đọc thử giải bằng cách xét hàm $y = a\cos x + b\cos x - 1 \leq 0$ và cho $y_{max} \leq 0$. Cách này rất cồng kềnh.

**22.** 1) $0 \leq m^2 \leq -2 + \sqrt{5}$, hay $-\sqrt{-2+\sqrt{5}} \leq m \leq \sqrt{-2+\sqrt{5}}$.

2) $m \geq -\sqrt{-2+\sqrt{5}}$. Làm như ví dụ 20 phần này.

**23.** Làm như ví dụ 21.

**24.** 1) $|m| \leq 5$. Làm như ví dụ 22 phần này.

2) $2(1 - \sqrt{3}) \leq m \leq 2(1 + \sqrt{3})$. Làm như ví dụ 22 phần này.

3) $m < \frac{1}{4}$. Làm như ví dụ 22 phần này. Chú ý $m - 1$ dương, âm hoặc bằng 0.

**25.** Làm như ví dụ 24 phần này. Tuy nhiên do đặc thù của hàm số, tính toán sẽ đơn giản hơn.

**26.** Làm như ví dụ 25. Chú ý do $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \sin x \geq 0$.

**27.** Làm như ví dụ 26 phần này.

**28.** $d = \sqrt{6}$. Làm như ví dụ 27 phần này.

**29.** Làm như ví dụ 28 phần này.

**30.** Làm như ví dụ 29. Giá trị bé nhất là $\frac{c^2}{a^2+b^2}$ đạt được khi xảy ra dấu bằng, tức là khi $x = \frac{ac}{a^2+b^2}$, $y = \frac{bc}{a^2+b^2}$.

**31.** *Cách 1.* Vì $x \leq \max(x,y)$, $y \leq \max(x,y)$ nên:

$x^{\sin^2 a}y^{\cos^2 a} \leq [\max(x,y)]^{\sin^2 a + \cos^2 a} = \max(x,y) \leq x + y$.

*Cách 2.* Vì $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, nên $x^{\sin^2 a}y^{\cos^2 a} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\sin^2 a}. y$ và bởi vậy ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^{\sin^2 a} < \frac{x}{y} + 1$ hay:

$t^{\sin^2 a} < t + 1$, trong đó $t = \frac{x}{y} > 0$, $0 \leq \sin^2 a \leq 1$.

Nếu $0 < 1 \leq 1$ thì $t^{\sin^2 a} \leq 1 < t + 1$. Nếu $t > 1$ thì $t^{\sin^2 a} \leq t + 1$ $\Rightarrow$ bất đẳng thức đúng.

# CHƯƠNG II

# PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## 1. Các điều cần nhớ

Trong lượng giác có 3 phương trình cơ bản. Các phương trình lượng giác khác nếu giải được, đều phải dẫn được về một trong ba phương trình cơ bản. Bởi vậy, cần nhớ nghiệm của 3 phương trình cơ bản. Các phương trình cơ bản là:

**1. $\sin x = m$.** Cách giải như sau

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \le 1$ thì đặt $\sin x = m = \sin a$, $-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$.

Phương trình có nghiệm:

$$x = a + 2k\pi \text{ và } x = (\pi - a) + 2k\pi, \text{ k nguyên.}$$

hay dưới dạng gộp nghiệm: $x = (-1)^n a + n\pi$, n nguyên.

*Chú ý.* Nếu $m = 0$ thì nghiệm $x = k\pi$, k nguyên;

Nếu $m = 1$ thì $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên;

Nếu $m = -1$ thì nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

**2. $\cos x = m$.** Cách giải như sau:

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \le 1$ thì đặt $\cos x = m = \cos a$, $0 \le a \le \pi$.

Phương trình có nghiệm.

$$x = \pm a + 2k\pi, \text{ k nguyên.}$$

**3. tgx = m = tga,** $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ . Phương trình có nghiệm

$$x = a + n\pi, \text{ n nguyên.}$$

Về nguyên tắc thì phương trình cotgx = m dẫn về được phương trình $tgx = \frac{1}{m}$ , nhưng vì trong thực hành hay gặp phương trình cotgx = m = cotga, $0 < a < \pi$, nên ta cần nhớ luôn nghiệm phương trình này là:

$$x = a + n\pi, \text{ n nguyên.}$$

*Chú ý.* 1) Không được cộng độ và radian với nhau. Thí dụ không được viết $x = 30^o + k\pi$ mà phải viết $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = 30^o + k180^o$

2) Phải chỉ ra các giá trị của k hoặc n trong nghiệm.

3) Cần nhớ giá trị đặc biệt của các hàm lượng giác để làm toán cho nhanh

| a | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sina | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| cosa | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| tga | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | \|\| | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

4. Dạng $\sin^2 x = m$ và $\cos^2 x = m$ dẫn về dạng cơ bản như sau:

| m | $\sin^2 x = m$ | $\cos^2 x = m$ |
|---|---|---|
| 0 | $\sin x = 0$ | $\cos x = 0$ |
| 1 | $\cos x = 0$ | $\sin x = 0$ |
| $0 < m < 1$ | $\cos 2x = 1 - 2m$ | $\cos 2x = 2m - 1$. |

5. Dạng $a\cos x + b\sin x = c$ có nhiều cách dẫn về dạng cơ bản.

*Cách 1.* Nếu $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$, phương trình có dạng $0x = c \Rightarrow$ nếu $c = 0$ thì nghiệm là $\forall x$, nếu $c \neq 0$ phương trình vô nghiệm.

Nếu $a^2 + b^2 > 0$ thì chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ để đưa về dạng

$\cos(x - t) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = m$, trong đó $0 \le t \le \pi$ và $\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ hoặc đưa về dạng $\sin(x + t) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = m$, trong đó $0 \le t \le \pi$ và $\cos t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

*Cách 2.* Đổi cosx và sinx theo $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ và đưa về dạng cơ bản $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = m$.

**6.** Dạng $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = d$ được dẫn về dạng cơ bản như sau:

*Cách 1.* Do $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, nên thay vào phương trình đã cho và chuyển vế ta được phương trình:

$(a - c)\cos 2x + b\sin 2x = 2d - a - c$, do đó dẫn về 5) và sau đó về dạng cơ bản.

*Cách 2.* Do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, nên sinx và cosx không thể đồng thời bằng 0. Giả sử $\cos^2 x \neq 0$. Chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được: $(c - d)\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg}x + a - d = 0$.

Giải phương trình bậc 2 này và nếu nó có nghiệm, sẽ dẫn đến phương trình về dạng cơ bản $\operatorname{tg}x = m$.

**7.** Nên nhớ một số mẹo dẫn phương trình lượng giác về phương trình cơ bản sau đây:

a) Nếu trong phương trình chỉ có $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ và $\cos 2x$ thì đặt $\cos 2x = t$ để đưa phương trình đại số theo t. Giải phương trình đại số thì được $\cos 2x = m$.

*Ví dụ:* $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$. Đặt $\cos 2x = t$, thì :

$\cos^4 x + \sin^4 x = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+t^2)$. Do vậy phương trình trở thành:

$\frac{1}{2}(1+t^2) + t = 0$ hay $t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ và dẫn về dạng $\cos 2x = -1$.

b) Nếu trong phương trình chỉ có $\sin x + \cos x$ và $\sin 2x$ thì đặt $\sin x + \cos x = t$, khi đó $t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ và ta đưa phương trình lượng giác về phương trình đại số. Giải phương trình đại số ta được $\sin x + \cos x = m$ tức là dạng 5) và sau đó đưa về phương trình cơ bản.

Tương tự, nếu trong phương trình chỉ có $\sin x - \cos x$ và $\sin 2x$ thì đặt $\sin x - \cos x = t$.

c) Vì các hàm lượng giác đều có thể biểu diễn theo $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ nên nếu phương trình đại số theo t giải được, ta sẽ đưa phương trình lượng giác về dạng cơ bản $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = m$.

Chú ý phải xét riêng trường hợp $\cos\frac{x}{2} = 0$.

d) Nếu trong phương trình chỉ có $g(x) + \frac{\lambda}{g(x)}$ và $g^2(x) + \frac{\lambda^2}{g^2(x)}$, trong đó g(x) là các hàm lượng hoặc biểu thức các hàm lượng giác, thì đặt $g(x) + \frac{\lambda}{g(x)} = t$, khi đó $g^2(x) + \frac{\lambda^2}{g^2(x)} = t^2 - 2\lambda$ và ta đưa được phương trình lượng giác về phương trình đại số. Giải phương trình đại số ta được $g(x) + \frac{\lambda}{g(x)} = t$ và đưa về phương trình bậc hai. Tương tự, nếu trong phương trình lượng giác chỉ có $g(x) - \frac{\lambda}{g(x)}$ và $g^2(x) + \frac{\lambda^2}{g^2(x)}$ thì đặt $g(x) - \frac{\lambda}{g(x)} = t$, khi đó $g^2(x) + \frac{\lambda^2}{g^2(x)} = t^2 + 2\lambda$.

e) Nhiều khi thuận tiện nếu *biến đổi dưới dấu hàm lượng giác* và dùng công thức qui nhọn (các góc phụ nhau, bù nhau v.v...) để đưa về phương trình lượng giác cùng một ẩn số mới (ví dụ 16).

8. Nhiều trường hợp dùng *phương pháp không chính tắc* dẫn tới lời giải nhanh hơn. Nội dung của phương pháp này là ước lượng 2 vế để đi đến một đẳng thức đơn giản, hoặc đoán một nghiệm rồi chứng minh nghiệm duy nhất. Nên chú ý là nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) = 0$, trong đó $f_1(x) \geq 0, \ldots, f_k(x) \geq 0$ (hoặc tất cả đều $\leq 0$), thì nghiệm của $f(x) = 0$ là giao của các nghiệm $f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0$ (Xem các ví dụ 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 37, 38..)

*Ví dụ 1.* Giải các phương trình:

1) $\sin^2 x = 1$, 2) $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, nên từ $\sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Theo công thức $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = (2k + 1)\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên

*Cách 3.* Từ $\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$. Nếu $\sin x = 1 \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên. Nếu $\sin x = -1 \Rightarrow x =$

$= -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên. Gộp nghiệm ta được:

$x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, n nguyên.

*Nhận xét.* Khi đi thi không nên dùng cách 3. Vì hay quên nghiệm của $\sin x = -1$ và dài.

2) *Cách 1.* Theo công thức $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} =$

$\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Vì $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{12} - 1 \Rightarrow \cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

Vì $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0 \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$. Vậy, nếu $\cos x =$

$= \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{12} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$; nếu

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \cos\dfrac{11\pi}{12} \Rightarrow x = \pm\dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$.

Gộp nghiệm ta được:

$x = \pm\dfrac{\pi}{12} + n\pi$, n nguyên.

*Ví dụ 2.* Giải phương trình $\sin 3x\sin^3 x + \cos 3x\cos^3 x = 1$.

*Giải. Cách 1.* Theo ví dụ 6, §1, II chương I ta có $\sin 3x\sin^3 x + \cos 3x\cos^3 x = \cos^3 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Ta có $\sin 3x\sin^3 x + \cos 3x\cos^3 x = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ $\Rightarrow \sin^2 x(1 - \sin 3x\sin x) + \cos^2 x(1 - \cos 3x\cos x) = 0$.

Vì $\sin^2 x(1 - \sin 3x\sin x) \geq 0$, $\cos^2 x(1 - \cos 3x\cos x) \geq 0$,

nên suy ra $\begin{cases} \sin^2 x(1 - \sin 3x\sin x) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos 3x\cos x) = 0. \end{cases}$

Vì $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ không đồng thời bằng không nên ta nhận được

a) $\begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ 1 - \cos 3x\cos x = 0, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ 1 - \sin 3x\sin x = 0. \end{cases}$

a) Vì $1 - \cos 3x\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = 0 \Rightarrow$

$\cos^2 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{3}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 1$ và $\cos 2x = -\dfrac{3}{2}$

(loại); lại vì $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 1$. Do vậy hệ a) có nghiệm $\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$, k nguyên.

b) Vì $1 - \sin 3x\sin x = 1 - \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = 0 \Rightarrow$

$\cos^2 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2} = 0$, phương trình này vô nghiệm vì $\Delta = \dfrac{1}{4} - 2 < 0$. Vậy hệ b) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x = k\pi$, k nguyên.

*Ví dụ 3.* Cho phương trình $\cos x + \sqrt{3}\sin x = m$.

1) Giải phương trình khi $m = \sqrt{3}$.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm?

*Giải:* 1) *Cách 1.* Chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

hay $\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x + \text{tg}\frac{\pi}{3}\sin x =$

$= \sqrt{3} \Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} +$

$+ 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 3.* Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi \Rightarrow \cos x = -1$,

$\sin x = 0$ và phương trình trở thành $-1 = \sqrt{3}$, vô lý.

Vậy $\cos\frac{x}{2} \neq 0$; và ta đặt $\text{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow$ phương trình

trở thành:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\sqrt{3}\,\frac{2t}{1+t^2}=\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3}+1)t^2-2\sqrt{3}t+\sqrt{3}-1=0.$$

Vì a + b + c = 0, nên phương trình có nghiệm t = 1

và $t=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. Nếu $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} +$

$+ k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên. Nếu $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \operatorname{tg}\frac{x}{12}$ (bạn đọc xuất phát từ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

và tương tự tính $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$) $\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

k nguyên.

2) *Cách1.* Chia hai vế cho 2 ta được $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{m}{2}$

$\Rightarrow$ để phương trình có nghiệm thì $|\frac{m}{2}| \le 1$ hay

$|m| \le 2$.

*Cách 2.* $\cos x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin x = m \Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$$= m\cos\frac{\pi}{3} = \frac{m}{2} \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{m}{2} \Rightarrow |m| \le 2$$

thì phương trình có nghiệm.

*Cách 3.* Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0$ thì phương trình trở thành

$$-1 = m.$$

Vậy nếu m = - 1 thì phương trình có nghiệm x = (2k + + 1)π; Nếu m ≠ - 1 thì phương trình trở thành : $(m + 1)t^2 - 2\sqrt{3}t + m - 1 = 0$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta = 3 - (m^2 - 1) = 4 - m^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 \leq 4 \Rightarrow$ $|m| \leq 2$, $m \neq -1$. Kết hợp nghiệm ta được $|m| \leq 2$ thì phương trình có nghiệm.

*Ví dụ 4.* Giải phương trình:

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

*Giải: Cách 1.* Ta viết lại phương trình dưới dạng:

$$2\sin 2x - (\sin 3x - \sin x) = 3 \iff$$

$$2\sin 2x - 2\cos 2x.\sin x = 3$$

hay $\sin 2x - \sin x.\cos 3x = \dfrac{3}{2}$. Nhân và chia vế trái cho $\sqrt{1 + \sin^2 x} > 0$ ta được:

$$\sqrt{1 + \sin^2 x}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}\sin 2x - \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}\cos 2x\right) = \frac{3}{2}.$$

Đặt $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, $\sin t = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, ta được

$$\sqrt{1 + \sin^2 x}\,.\,\sin(2x - t) = \frac{3}{2}.$$

Vì $1 \leq \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{2}$, vậy vế trái bé hơn vế phải, do đó phương trình vô nghiệm.

*Nhận xét.* Cũng có thể ước lượng vế trái bằng bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpski như sau:

$$\sin 2x - \sin x.\cos 2x \leq \sqrt{1 + \sin^2 x}\,.\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 2x} = \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{2}.$$

Thực chất cách chứng minh trong cách 1 là lặp lại chứng minh bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski có 4 số bằng phương pháp lượng giác.

*Cách 2.* Nếu sinx < 0 thì sinx + 2sin2x < 0 + 2 = 2, 3 + sin3x $\geq$ 3 + (-1) = 2 $\Rightarrow$ vế trái bé hơn vế phải $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Nếu sinx $\geq$ 0 ta viết phương trình dưới dạng :

$$\sin x - \sin 3x + 2\sin 2x = 3 \Rightarrow$$

$$\sin x + 4\sin^3 x - 3\sin x + 4\sin x\cos x = 3 \Rightarrow$$

$$\sin x(4\sin^2 x + 4\cos x - 2) = 3 \Rightarrow$$

$$\sin x(-4\cos^2 x + 4\cos x + 2) = 3.$$

Vì khi sinx = 0 ta có 0 = 3 - vô lý $\Rightarrow$ sinx > 0 $\Rightarrow$

$$-4\cos^2 x + 4\cos x + 2 = \frac{3}{\sin x}.$$

Xét vế trái. Đặt cosx = t, - 1 < t < 1 và gọi vế trái là y ta có $y = -4t^2 + 4t + 2$ là một parabôn quay bề lõm về phía dưới, có đỉnh $t = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{max} = y(\frac{1}{2}) = 3$, còn vế phải có $0 < \sin x \leq 1$ nên $\frac{3}{\sin x} \geq 3$. Vậy vế phải bé nhất bằng 3, đạt được khi sinx = 1. Vì sinx = 1 và $\cos x = \frac{1}{2}$ không xảy ra đồng thời, nên phương trình vô nghiệm.

*Cách 3.* Khi sinx $\leq$ 0 vô nghiệm (xem cách 2) $\Rightarrow$ sinx > 0. Viết lại phương trình dưới dạng

$$\sin 3x - \sin x - 2\sin 2x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos 2x\sin x - 4\sin x\cos x + 3 = \sin x(2\cos 2x - 4\cos x) + 3 =$$
$$= \sin x[(2\cos x - 1)^2 - 3] + 3 = \sin x(2\cos x - 1)^2 +$$
$$+ 3(1 - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x(2\cos x - 1)^2 = 0 \\ 1 - \sin x = 0. \end{cases}$$

Do $\sin x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ , $\sin x = 1$. Điều này không xảy ra đồng thời $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

*Cách 4.* Khi $\sin x \le 0$ phương trình vô nghiệm (xem cách 2). Ta viết lại phương trình dưới dạng:

$$2\sin 2x = 3 + \sin 3x - \sin x$$

hay $\quad 4\sin x\cos x = 3 + 3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x$

hay $\quad 4\sin x\cos x = 3 + 2\sin x - 4\sin^3 x.$

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$16\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = (3 + 2\sin x - 4\sin^3 x)^2.$$

Đặt $\sin x = y$, $0 < y \le 1$ ta được

$$16y^6 - 24y^3 - 12y^2 + 12y + 9 = 0.$$

Nhóm số hạng đầu với số hạng thứ hai và số hạng cuối, ta được

$$(4y^3 - 3)^2 + 12y(1 - y) = 0.$$

Đây là tổng 2 số không âm bằng $0 \Rightarrow 4y^3 - 3 = 0$ và $y = 1$.

Hệ này vô nghiệm, do vậy phương trình hệ quả vô nghiệm và vì thế phương trình đã cho vô nghiệm.

*Ví dụ 5.* Giải phương trình $\mathrm{tg}x + \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}x = 1 + \sqrt{3}$.

*Giải : Cách 1.* Viết phương trình dưới dạng

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}\,\frac{\cos x}{\sin x} = 1 + \sqrt{3}$$

hay $\quad \sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x = (1 + \sqrt{3})\sin x\cos x \Rightarrow$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3}\,.\,\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{3})\sin 2x + (1 - \sqrt{3})\cos 2x = 1 + \sqrt{3}.$$

Chia 2 vế cho $2\sqrt{2}$ ta được

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Vì $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1$, nên đặt

$\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos t$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin t$, ta được

$$\cos(2x - t) = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Từ đó $2x - t = \pm\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2k\pi \Rightarrow$

a) $2x - t = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

b) $2x - t = -\frac{\pi}{2} + t + 2k\pi \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

Vì $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} -$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (vì $0 \le t \le \pi$) $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, k nguyên

*Cách 2.* Viết phương trình dưới dạng

$$\text{tg}x + \frac{\sqrt{3}}{\text{tg}x} = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}^2x - (1+\sqrt{3})\text{tg}x + \sqrt{3} = 0.$$

Đây là phương trình bậc 2 theo tgx, có a + b + c = 0 ⇒ phương trình có nghiệm tgx = 1 và tgx = $\sqrt{3}$ .

Nếu tgx = 1 ⇒ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

Nếu tgx = $\sqrt{3}$ ⇒ $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, n nguyên.

*Chú ý.* Cả hai cách đều phải đặt điều kiện cosx ≠ 0 và kiểm tra lại điều kiện ấy.

*Ví dụ 6.* Giải phương trình

$$3\cot g^2x + 2\sqrt{2}\sin^2x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x.$$

*Giải: Cách 1.* Điều kiện $\sin^2x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$, k nguyên.

Chia 2 vế cho $\sin^2x$ và đặt $y = \frac{\cos x}{\sin^2x}$ , ta được

$$3y^2 - (2 + 3\sqrt{2})y + 2\sqrt{2} = 0.$$

Từ đó suy ra $y = \frac{2}{3}$ hoặc $y = \sqrt{2}$ .

Nếu $y = \frac{2}{3} = \frac{\cos x}{\sin^2x} \Rightarrow 2\cos^2x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos x = -2$ (loại) và $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên.

Nếu $y = \sqrt{2} = \frac{\cos x}{\sin^2x} \Rightarrow \cos^2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos x = -\sqrt{2}$ (loại) hoặc $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, k nguyên.

Cả 2 nghiệm đều thích hợp.

*Cách 2.* Điều kiện $\sin x \neq 0\ \Rightarrow\ x \neq k\pi$, k nguyên. Chuyển vế và nhóm các số hạng chung, ta được:

$$3(\cot g^2 x - \sqrt{2}\cos x) + 2(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x) = 0.$$

Do $\sin x \neq 0 \Rightarrow (\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x)\left(3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\right) = 0$

$\Rightarrow$ hoặc: $\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x = 0$

$\Rightarrow \cos^2 x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, k nguyên.

hoặc $3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên.

Cả hai nghiệm đều thích hợp.

*Ví dụ 7.* Giải phương trình

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $\dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x - 2\dfrac{1 + \cos 2x}{2} =$

$= \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\sin 2x - 3\cos 2x = 2$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x - \dfrac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}.$

Đặt $\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin t = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\sin(2x - t) = \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$

$\Rightarrow$ hoặc $2x - t = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

k nguyên.

hoặc $\quad 2x - t = \frac{\pi}{2} + t + 2k\pi$

$\Rightarrow \; x = \frac{\pi}{4} + t + k\pi$, k nguyên, $0 \le t \le \pi$

và $\qquad \cos t = \frac{2}{\sqrt{13}}$

*Cách 2.* Nếu $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$ vô lý, vì

$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2} \neq 1$. Vậy $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế cho

$\cos^2 x \neq 0 \Rightarrow tg^2 x + 2tgx - 2 = \frac{1}{2\cos^2 x} =$

$= \frac{1}{2}(1 + tg^2 x) \Rightarrow tg^2 x + 4tgx - 5 = 0$.

Vì $a + b + c = 0 \;\Rightarrow tgx = 1,\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên

và $\quad tgx = -5 = tg\alpha, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \alpha + k\pi$,

k nguyên.

*Ví dụ 8.* Cho phương trình

$$\sin x\cos x - m(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$$

1) Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$.
2) Với m nào thì phương trình có nghiệm.

*Giải: Cách 1.* Đặt $\sin x + \cos x = t \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$ và $t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow$ phương trình trở thành $\frac{1}{2}(t^2 - 1) - mt + 1 = 0$. Với $m = \sqrt{2}$ ta có $t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} \pm 1$. Vì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, nên phương trình có nghiệm $t = \sqrt{2} - 1 =$

$= \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \cos\alpha$, $0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow x - \frac{\pi}{4}$

$= \pm\alpha + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Đặt $x = \frac{\pi}{4} + t$, khi đó $\sin x + \cos x =$

$\sin(\frac{\pi}{4} + t) + \cos(\frac{\pi}{4} + t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t + \sin t) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}\cos t$; $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \times$

$\times (\cos t - \sin t) = \frac{1}{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) = \frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) = \cos^2 t - \frac{1}{2}$. Do vậy phương trình trở thành $\cos^2 t - 2\cos t + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vì $-1 \le \cos t \le 1 \Rightarrow$

$\cos t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \cos\alpha \ (0 \le \alpha \le \pi) \Rightarrow t = \pm\alpha +$

$+ 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + 2k\pi$, k nguyên.

*Chú ý. 1.* Có thể đặt $x = \dfrac{\pi}{4} - t$

*Chú ý. 2.* Có thể trình bày như sau $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4} - x)$.

Đặt $\dfrac{\pi}{4} - x = t \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} - t$, $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x =$

$\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{2} - 2t) = \dfrac{1}{2}\cos 2t \Rightarrow$ phương trình trở thành $\dfrac{1}{2}\cos 2t$

$- 2\cos t + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) - 2\cos t + 1 = \cos^2 t - 2\cos t +$

$+ \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos t = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \cos\alpha \ (0 \le \alpha \le \pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \pm\alpha + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha - 2k\pi$, k nguyên.

*2) Cách 1.* Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, khi đó phương trình trở thành

$$\frac{1}{2}t^2 - mt + \frac{1}{2} = 0.$$

Vì $t = 0$, phương trình trở thành $\dfrac{1}{2} = 0$ vô nghiệm, nên ta viết phương trình dưới dạng

$$m = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} = y \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} = 0 \Rightarrow t = \pm 1.$$

Lập bảng biến thiên, ta được

| $t$ | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $-\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | $M$<br>$-1$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $m$<br>$1$ | $\nearrow$ | |

Để phương trình có nghiệm thì $m \le y_{max}$ hoặc $m \ge y_{min}$
$\Rightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 1 \Rightarrow |m| \ge 1$.

*Nhận xét.* Cũng có thể xét parabôn $g(t) = \frac{1}{2}t^2 - mt + \frac{1}{2}$ nhưng phải xét hai trường hợp đỉnh nằm trong và đỉnh nằm ngoài đoạn $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ nên dài hơn.

*Cách 2.* Vì: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) =$

$\sqrt{2}\cos X$, $X = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + X \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2X \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} + 2X) = \cos 2X$.

Vậy phương trình trở thành:

$$\frac{1}{2}\cos 2X - m\sqrt{2}\cos X + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 X - m\sqrt{2}\cos X + \frac{1}{2} = 0.$$

Đặt $t = \cos X \Rightarrow -1 \le t \le 1$

và $t^2 - m\sqrt{2}t + \dfrac{1}{2} = 0.$

Vì t = 0, ta có $\dfrac{1}{2} = 0$ vô lý, nên có thể viết phương trình dưới dạng

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,t + \frac{1}{2\sqrt{2}\,t} = m = y$$

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}\,t^2} = 0 \Rightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Lập bảng biến thiên ta được

| t | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| y | | ↗ | m = −1 | ↘ | ‖ | ↘ | m = 1 | ↗ | |

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m \le -1$ hoặc $m \ge 1$ $\Rightarrow |m| \ge 1$.

*Nhận xét.* Cũng có thể xét parabôn $g(t) = t^3 - m\sqrt{2}t + \dfrac{1}{2}$ như nhận xét ở trong cách 1.

*Ví dụ 9.* Cho phương trình sin2x(sinx + cosx) = m.

1) Chứng minh rằng, nếu $|m| > \sqrt{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

2) Giải phương trình khi $|m| = \sqrt{2}$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Vì $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$,

nên đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2t + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = \cos 2t$ và phương trình trở thành:

$$\sqrt{2}\cos 2t \cos t = m$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t + \cos 3t) = m.$$

Vì $-2 \le \cos t + \cos 3t \le 2$, dấu bằng đạt được ở bất đẳng thức trái khi $t = \pi$ và ở bất đẳng thức phải khi $t = 0$, nên vế trái thỏa mãn hệ:

$$-\sqrt{2} \le (\cos t + \cos 3t)\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{2}$$

và do đó phương trình sẽ vô nghiệm khi $m < -\sqrt{2}$ hoặc $m > \sqrt{2}$

$\Rightarrow |m| > \sqrt{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

*Cách 2.* Đặt $\sin x + \cos x = t = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$ và $\sin 2x = t^2 - 1$. Khi đó phương trình trở thành $(t^2 - 1)t = t^3 - t = m$. Gọi vế trái là $y = t^3 - t$, khi đó phương trình sẽ vô nghiệm, nếu $m < y_{min}$ hoặc $m > y_{max}$.

Ta có $y' = 3t^2 - 1 = 0$ khi $t^2 = \frac{1}{3}$, $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lập bảng biến thiên ta được

| $t$ | $-\sqrt{2}$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $y$ | $-\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | M $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\searrow$ | m $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ |

Từ đó $y_{max} = \sqrt{2}$ khi $t = \sqrt{2}$, $y_{min} = -\sqrt{2}$ khi $t = -\sqrt{2}$.

Vậy phương trình vô nghiệm khi m = < $-\sqrt{2}$ hoặc $m > \sqrt{2} \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}$.

2) *Cách 1.* Từ cách 1 giải câu 1) ta suy ra $|m| = \sqrt{2}$

khi $|\cos t| = 1 \Rightarrow t = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Từ cách 2 giải câu 1) ta suy ra $|m| = \sqrt{2}$ khi $|t| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow |\cos(x - \frac{\pi}{4})| = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ k nguyên.}$$

*Ví dụ 10.* Cho phương trình $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$.

1) Giải phương trình khi m = 4.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm?

*Giải:* 1) *Cách 1.* Đặt $\cos x - \sin x = t = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$ và $\sin 2x = 1 - t^2$. Vậy phương trình trở thành:

$$1 - t^2 + 4t = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Vì $a + b + c = 0 \Rightarrow t = 1$ và $t = 3 > \sqrt{2}$ (loại).

Khi $t = 1 = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

hoặc $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 2*. Đặt $x + \frac{\pi}{4} = t$, khi đó $2x = 2t - \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\sin 2x = -\cos 2t$ và phương trình trở thành

$-\cos 2t + 4\sqrt{2}\cos t = 4$ hay $2\cos^2 t - 4\sqrt{2}\cos t + 3 = 0 \Rightarrow$

$\cos t = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 1$ (loại) và $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$, hoặc $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

k nguyên.

2) *Cách 1*. Đặt $t = \cos x - \sin x$, ta được phương trình $y = 1 - t^2 + 4t = m$. Vế trái là parabol, có hệ số đầu là $-1$, nên quay bề lõm về phía dưới, có đỉnh tại điểm $t = 2 > \sqrt{2}$, nên trên đoạn $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ vế trái đồng biến. Do vậy $y_{max} = y(\sqrt{2}) = -1 + 4\sqrt{2}$, $y_{min} = y(-\sqrt{2}) = -1 - 4\sqrt{2}$ và phương trình có nghiệm khi

$$-1 - 4\sqrt{2} \le m \le -1 + 4\sqrt{2}.$$

*Nhận xét*. Cũng có thể giải trực tiếp phương trình $t^2 - 4t + m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 - (m - 1) = 5 - m \ge 0 \Rightarrow m \le 5$ có

$t_1 = 2 + \sqrt{5 - m} \geq 2$ (loại)

và $t_2 = 2 - \sqrt{5 - m}$.

Để $t_2$ là nghiệm cần phải có:

$$-\sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{5 - m} \leq \sqrt{2} \Rightarrow -1 - 4\sqrt{2} \leq m \leq -1 + 4\sqrt{2}.$$

*Cách 2.* Đặt $x + \dfrac{\pi}{4} = t$ ta được phương trình

$$-\cos 2t + 4\sqrt{2}\cos t = m.$$

Đặt $\cos t = X \Rightarrow -1 \leq X \leq 1$, $y = -2X^2 + 4\sqrt{2}X + 1 = m$. Vết trái là parabôn quay bề lõm về phía dưới, có đỉnh tại điểm $X = \sqrt{2} > 1$, nên trên đoạn $-1 \leq X \leq 1$ hàm y đồng biến, do vậy $y_{max} = y(1) = -1 + 4\sqrt{2}$, $y_{min} = y(-1) = -1 - 4\sqrt{2}$ và phương trình sẽ có nghiệm khi $-1 - 4\sqrt{2} \leq m \leq -1 + 4\sqrt{2}$.

*Nhận xét.* Cũng có thể giải trực tiếp phương trình

$2X^2 - 4\sqrt{2}X + m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta' = 8 - 2m + 2 \geq 0 \Rightarrow m \leq 5$, ta có

$$X_1 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{10 - 2m}}{2} \geq \sqrt{2} > 1 \text{ (loại), và}$$

$$X_2 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{10 - 2m}}{2}.$$

Để $X_2$ là nghiệm thì $-1 \leq X_2 \leq 1 \Rightarrow -1 - 4\sqrt{2} \leq m \leq -1 + 4\sqrt{2}$.

*Ví dụ 11.* Cho phương trình

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = m.$$

1) (Đề thi đại học A - B - D/1982). Giải phương trình khi $m = -\dfrac{1}{4}$.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm ?

*Giải:* Điều kiện $\sin(x \pm \dfrac{\pi}{4}) \neq 0$, $\cos(x \pm \dfrac{\pi}{4}) \neq 0$

$$\Rightarrow \sin(2x \pm \frac{\pi}{2}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \pm \frac{\pi}{2} \neq k\pi$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ k nguyên.}$$

Vì $\operatorname{tg}(x - \dfrac{\pi}{4}) = -\operatorname{tg}(-x + \dfrac{\pi}{4})$ mà hai góc

$(-x + \dfrac{\pi}{4})$ và $(x + \dfrac{\pi}{4})$ là phụ nhau, nên

$$\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = -\operatorname{tg}(-x + \frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = -1.$$

Do đó với điều kiện trên phương trình tương đương với

$$\sin^6 x + \cos^6 x = -m.$$

*Nhận xét.* Có thể chứng minh mẫu số bằng -1 như sau :

$$\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2x)}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos 2x)} = -1$$

Vậy

1) *Cách 1.* Đặt $\cos 2x = t$, khi đó

$\cos^2x = \dfrac{1 + \cos2x}{2} = \dfrac{1 + t}{2}$,

$\sin^2x = \dfrac{1 - \cos2x}{2} = \dfrac{1 - t}{2}$ và phương trình trở thành:

$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x)^3 + (\cos^2x)^3 = (\dfrac{1 - t}{2})^3 + (\dfrac{1 + t}{2})^3 =$

$= \dfrac{1}{4}(1 - 3t^2) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow t^2 = 0 \Rightarrow t = \cos2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ (loại).

Vậy phương trình vô nghiệm.

*Cách 2.* $\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 -$

$- 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x) = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^22x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\sin^22x = 1 \Leftrightarrow \cos^22x = 0 \Leftrightarrow \cos2x = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ (loại) (do điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$).

Vậy phương trình vô nghiệm.

2) *Cách 1.* Theo cách 1 trên đây ta có:

$$\frac{1}{4}(1 + 3t^2) = - m$$

$\Rightarrow \quad 3t^2 = -4m - 1 \Rightarrow t^2 = \dfrac{-4m - 1}{3}$

Để phương trình có nghiệm thì

$0 < t^2 = \dfrac{-4m - 1}{3} \leq 1$ (chú ý, do $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 2x \neq 0) \quad \Rightarrow \quad -1 \leq m < -\frac{1}{4}$ .

*Nhận xét.* Theo cách 2 trên đây ta có $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = -m \Rightarrow$

$\sin^2 2x = -\frac{4}{3}(m+1) \Rightarrow 0 \leq \sin^2 2x = \frac{4}{3}(m+1) < 1 \Rightarrow -1 \leq m < -\frac{1}{4}$.

*Cách 2.* Gọi vế trái là y, ta có $y = \frac{1}{4}(1 + 3t^2) = -m$

Vì y là hàm tuyến tính theo $t^2$, nên trên khoảng $0 < t \leq 1$ có hệ số $k = \frac{3}{4} > 0$ sẽ có $y_{min} = y(0) = \frac{1}{4}$; $y_{max} = y(1) = 1$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $\frac{1}{4} < -m \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq m < -\frac{1}{4}$ .

*Nhận xét.* Cũng có thể xét hàm tuyến tính $y = 1 - \frac{3}{4}t$, với $t = \sin^2 x \Rightarrow 0 \leq t < 1$.

*Ví dụ 12.* (Đề thi Đại học A - B - D/1984).

Cho phương trình

$$\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = m\text{tg}2x, \text{ m là tham số.}$$

1) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{4}$.

2) Với giá trị nào của m, phương trình có nghiệm?

*Giải:* Điều kiện $\cos 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$ , k nguyên.

Với điều kiện ấy phương trình có thể viết

$$3\sin^2 2x + 4m\sin 2x - 4 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x$, chú ý điều kiện của phương trình ta có $-1 < t < 1$. Khi đó ta có

$$f(t) = 3t^2 + 4mt - 4 = 0 \ (1), \text{ với } -1 < t < 1. \quad (2)$$

Ta giải câu 2) trước rồi suy ra kết quả câu 1).

2) *Cách 1.* Phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn điều kiện (2) trong các trường hợp sau:

Vì $ac < 0$, nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt trái dấu $t_1 < 0 < t_2$:

a) $\begin{cases} t_1 < -1 < t_2 < 1 \\ -1 < t_1 < 1 < t_2 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(1) < 0 \Leftrightarrow$

$$-(4m + 1)(4m - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow m < -\frac{1}{4} \text{ hoặc } m > \frac{1}{4}.$$

b) $-1 < t_1 < t_2 < 1$ điều này không xảy ra vì tích $t_1.t_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{4}{3}$.

c) $t_1 = -1 < t_2 < 1$, điều này không xảy ra, vì nếu $t_1 = -1$ thì $t_2 = \dfrac{4}{3}$.

d) $-1 < t_1 < 1 = t_2$, điều này không xảy ra, vì nếu $t_2 = 1$ thì $t_1 = -\dfrac{4}{3}$.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm khi $m < -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m > \dfrac{1}{4}$.

*Cách 2.* Phương trình (1) không có nghiệm thỏa mãn điều kiện (2) khi $t_1 \le -1 < 1 \le t_2$, tức là khi

$$\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m - 1 \le 0 \\ 4m - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le m \le \frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn điều kiện (2) khi $m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > \frac{1}{4}$.

*Cách 3.* Vì phương trình (1) không có nghiệm t = 0 (trái lại ta có - 4 = 0 vô lý), nên có thể viết (1) dưới dạng:

$$y = \frac{4 - 3t^2}{4t} = \frac{1}{t} - \frac{3}{4}t = m, \ -1 < t < 1.$$

Để phương trình có nghiệm thì $y_{min} \le m \le y_{max}$. Ta có $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow$ y nghịch biến. Lập bảng biến thiên ta có.

| t | -1 | | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | ‖ | - | ‖ | - | ‖ |
| y | ‖ | $-\frac{1}{4}$ ↘ | ‖ | ↘ $\frac{1}{4}$ | ‖ |

Vì $-1 < t < 1$ nên y không đạt $y_{max}$ và $y_{min}$. Vậy để phương trình có nghiệm thì $m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > \frac{1}{4}$.

1) Cả 3 cách trên đều suy ra $m = \frac{1}{4}$ phương trình vô

nghiệm.

*Ví dụ 13.* Giải các phương trình:

1) $\sin 2x + \text{tg}x = 2$;

2) $\sin 2x + \cos 2x + \text{tg}x = 2$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên.

Đặt $t = \text{tg}x$, khi đó phương trình trở thành

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 2$$

hay $t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0$. Vì tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ, nên phương trình có nghiệm $t = 1$ và do đó có thể viết dưới dạng:

$$(t-1)(t^2 - t + 2) = 0.$$

Vì $t^2 - t + 2 > 0$ (do biệt thức $\Delta = 1 - 3 < 0$), nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1 = \text{tg}x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện đã nêu ở trên.

*Cách 2.* Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên.

Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$(1 - \sin 2x) + (1 - \text{tg}x) = 0$$

hay $$(\cos x - \sin x)^2 + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x + \frac{1}{\cos x}) = 0.$$

Vì $\cos x - \sin x + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin x\cos x + 1}{\cos x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x + (1 - \frac{1}{2}\sin 2x)}{\cos x}$ có mẫu số khác không và tử số dương (do $1 - \frac{1}{2}\sin 2x > 0$ và $\cos^2 x \geq 0$), nên phân thức khác không, và do vậy phương trình chỉ có nghiệm duy nhất $\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên. Nghiệm này thích hợp vì nó khác $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

2) *Cách 1.* Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên. Đặt $t = \text{tg}x$, khi đó ta có

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 2$$

hay $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ hay $(t-1)^3 = 0$

$\Rightarrow \text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên (thích hợp).

*Cách 2.* Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên. Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$(1 - \sin 2x) - \cos 2x + (1 - \text{tg}x) = 0$$

hay $(\cos x - \sin x)^2 - (\cos^2 x - \sin^2 x) + \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left[\cos x - \sin x - (\cos x + \sin x) + \frac{1}{\cos x}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{\cos x} - 2\sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\,\frac{1 - 2\sin x\cos x}{\cos x} = 0 \qquad (1)$$

Do $\cos x \neq 0$,

(1) $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^3 = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên. Nghiệm này thích hợp.

*Ví dụ 14.* Giải các phương trình:

1) $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sin x + \dfrac{1}{\sin x}$ ;

2) $2\left(\cos^2 x + \dfrac{4}{\cos^2 x}\right) = 9\left(\cos x - \dfrac{2}{\cos x}\right) + 1.$

*Giải:* 1) *Cách 1.* Đặt $\sin x + \dfrac{1}{\sin x} = t \Rightarrow |t| \geq 2$ và

$\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = t^2 - 2$. Do vậy phương trình trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Vì $a - b + c = 0$, nên phương trình có nghiệm

$t = -1$ (loại) và $t = 2 = \sin x + \dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$ thỏa mãn điều kiện $\sin x \neq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Điều kiện $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$, k nguyên. Khi đó phương trình trở thành

$$\sin^4 x - \sin^3 x - \sin x + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\sin^3 x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow$$
$$(\sin x - 1)(\sin^3 x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$, l nguyên (thích hợp).

2) *Cách 1.* Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên. Đặt

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} = t \Rightarrow t^2 = \cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} - 4$$

và phương trình trở thành $2t^2 - 9t + 7 = 0$.

Do $a + b + c = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $t = 1$ và $t = \dfrac{7}{2}$.

Nếu $t = 1 = \cos x - \dfrac{2}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x - \cos x - 2 = 0$.

Vì $a - b + c = 0 \Rightarrow \cos x = -1$ và $\cos x = 2$ (loại) $\Rightarrow$

nghiệm của phương trình là: $x = (2k + 1)\pi$, k nguyên (thích hợp).

Nếu $t = \frac{7}{2} = \cos x - \frac{2}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x - \frac{7}{2}\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}\right) \Rightarrow$ hoặc $\cos x = 4$ (loại) hoặc

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên (thích hợp).

*Cách 2.* Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên.

Khi đó phương trình trở thành

$$2\cos^4 x - 9\cos^3 x - \cos^2 x + 18\cos x + 8 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$, khi đó ta có:

$2t^4 - 9t^3 - t^2 + 18t + 8 = 0$, $-1 \leq t \leq 1$, $t \neq 0$. Vì tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ bằng 9, nên phương trình có nghiệm $t = -1$ và ta có thể viết:

$$2t^3(t + 1) - 11t^2(t + 1) + 10t(t + 1) + 8(t + 1) =$$

$$= (t + 1)(2t^3 - 11t^2 + 10t + 8) = 0.$$

Phương trình $2t^3 - 11t^2 + 10t + 8 = 0$ có nghiệm

$t = -\frac{1}{2}$, vì khi đó ta có: $-\frac{1}{4} - \frac{11}{4} - \frac{10}{2} + 8 = 0$

Do vậy ta có thể viết

$$2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t^2 - 6t + 8) = 0$$

$\Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$ có 2 nghiệm $t = -2$ và $t = -4$. cả hai nghiệm này đều không thích hợp.

Với $t = -1 = \cos x \Rightarrow x = (2k+1)\pi$, k nguyên (thích hợp).

Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên (thích hợp)

*Ví dụ 15.* Cho phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{cotg}^2 x + m(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x) + 2 = 0.$$

1) Giải phương trình khi $m = \frac{5}{2}$.

2) Với m nào thì phương trình vô nghiệm?

*Giải:* 1) *Cách 1.* Điều kiện $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0 \Rightarrow$

$\sin 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq k\pi$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, k nguyên.

Với điều kiện ấy phương trình đã cho tương đương với

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + m(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x) + 3 = 0.$$

Đặt $t = \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x \Rightarrow |t| \geq 2$ và $t^2 = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 2$, khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 + mt + 1 = 0.$$

Với $m = \frac{5}{2}$ ta có:

$$t^2 + \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}\right)$$

$\Rightarrow t = -2$ và $t = -1 \Rightarrow |t| < 2$ (loại).

Với $t = -2 = tgx = cotgx \Rightarrow tgx = -1 = tg(-\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên (thích hợp).

*Cách 2.* Với điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$, k nguyên, ta đặt t = tgx, khi đó phương trình trở thành:

$$t^4 + mt^3 + 3t^3 + mt + 1 = 0.$$

Với $m = \frac{5}{2}$, ta có $t^4 + \frac{5}{2}t^3 + 3t^2 + \frac{5}{2}t + 1 = 0$.

Phương trình có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng số các hệ số bậc lẻ bằng 5, nên có nghiệm t = -1 và ta có thể viết :

$$(t + 1)^2(t^2 + \frac{1}{2}t + 1) = 0$$

Vì $t^2 + \frac{1}{2}t + 1 = 0$ vô nghiệm (do $\Delta = \frac{1}{4} - 4 < 0$), nên phương trình chỉ có nghiệm $t = -1 = tg(-\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên (thích hợp).

2) *Cách 1.* Phương trình sẽ vô nghiệm nếu $t^2 + mt + t = 0$ vô nghiệm (xem cách 1 câu 1). Phương trình có biệt thức $\Delta = m^2 - 4$, sẽ vô nghiệm nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow |m| < 2$ hoặc $\Delta \geq 0$ mà cả hai nghiệm theo giá trị tuyệt đối đều bé hơn 2. Điều này xảy ra khi $|m| \geq 2$, $f(2) > 0$,

$f(-2) > 0$, $-2 < \frac{S}{2} < 2$. Vì $f(2) = 5 + 2m$, $f(-2) = 5 - 2m$,

$\frac{S}{2} = -\frac{m}{2}$, nên suy ra $m > -\frac{5}{2}$, $m < \frac{5}{2}$,

$-4 < m < 4$. Kết hợp nghiệm ta được: khi $-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

*Cách 2.* Vì $t = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $t^2 + mt + 1 = 0$, nên từ đó ta có :

$$m = -\frac{t^2+1}{t} = -t - \frac{1}{t} = y$$

Vậy để phương trình vô nghiệm thì đường thẳng nằm ngang $y = m$ không cắt đồ thị $y = -t - \frac{1}{t}$ trên đoạn $|t| \geq 2$. Ta có $y' = -1 + \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

Lập bảng biến thiên ta được:

| t | | -2 | -1 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | - | | 0 | 0 | | - |
| y | ↘ | $\frac{5}{2}$ | | | $-\frac{5}{2}$ | ↘ |

***Hình 40***

Vậy để phương trình vô nghiệm thì $-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$

*Nhận xét.* Có thể xét parabôn $y = t^2 + mt + 1$ quay bề lõm về phía trên và đòi $y_{min} > 0$.

*Ví dụ 16.* Giải các phương trình:

1) $\sin^3(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x$;

2) $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x) = 2\sin^3(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2})$

*Giải:* 1) Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$, $\sin x =$

$= \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t)$. Do vậy phương trình trở thành:

$$\sin^3 t = \sin t + \cos t \Rightarrow 0 = \sin t(1 - \sin^2 t) + \cos t =$$

$$= \sin t\cos^2 t + \cos t = (\sin t\cos t + 1)\cos t =$$

$$= (1 + \frac{1}{2}\sin 2t)\cos t.$$

Vì $1 + \frac{1}{2}\sin 2t > 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$

$x = t + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

*Cách khác.* Có thể làm như sau:

$$\sin(x - \frac{\pi}{4})\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin x =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = 2\sin x\cos\frac{\pi}{4} = \sin(x - \frac{\pi}{4}) +$$

$$+ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4}).$$

$$\Rightarrow 0 = \sin(x - \frac{\pi}{4})(1 - \sin^2(x - \frac{\pi}{4})) + \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$= \sin(x - \frac{\pi}{4})\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4})$

$= \cos(x - \frac{\pi}{4})[1 + \sin(x - \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4})]$

$= \cos(x - \frac{\pi}{4})\ [1 + \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{2})]$

$= \cos(x - \frac{\pi}{4})(1 - \frac{1}{2}\cos 2x)$.

Vì $1 - \frac{1}{2}\cos 2x > 0 \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

2) *Cách 1.* Đặt $t = \frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} = 3t - 2\pi$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}) = \sin 3t$ và phương trình trở thành:

$\sin 3t = 2\sin^3 t \Rightarrow -4\sin^3 t + 3\sin t = 2\sin^3 t \Rightarrow -6\sin^3 t$
$+ 3\sin t = 0 \Rightarrow 3\sin t(1 - 2\sin^2 t) = 0 \Rightarrow$ hoặc $\sin t = 0 \Rightarrow$

$t = k\pi$, $x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên hoặc $1 - 2\sin^2 t = 0$

$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2t}{2} \Rightarrow \cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = (k - 1)\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Ta có $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3x}{2} +$

$$+ \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{3x}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}) =$$

$$= \sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2})$$

Vậy phương trình trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}) = \frac{2}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^3$$

hay: $\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2} = (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})\times$

$\times(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2} =$$

$$= (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos^3\frac{x}{2} - \sin^3\frac{x}{2}) - 3(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) =$$

$$= (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})(1 + \frac{1}{2}\sin x) -$$

$$-3\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left[4\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)-3-(1-\sin x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\sin x=0.$$

Vậy hoặc $\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+l\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2l\pi,$ $l$ nguyên.

Nhận xét rằng nghiệm này trùng với nghiệm:

$x=-\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ở cách 1, vì $x=\frac{\pi}{2}+2(k-1)\pi\ \Rightarrow$ $l=k-1$. Hoặc $\sin x=0\Rightarrow x=l\pi$, $l$ nguyên. Nghiệm này trùng với nghiệm $x=(k-1)\pi$ ở cách 1, nếu lấy $l=k-1$.

*Ví dụ 17.* Giải các phương trình

1) $\sin^2x+\sin^22x=1$;

2) $\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x=\frac{3}{2}$ (Đề dự trữ A-B/1980);

3) $\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x+\sin^24x=2$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Ta có $1=\sin^2x+\sin^22x$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$\Rightarrow\cos 3x\cos x=0\Rightarrow$ hoặc $\cos 3x=0$ hoặc $\cos x=0$.

Vì nghiệm của phương trình $\cos x=0$ nằm trong nghiệm của phương trình $\cos 3x=0$, nên ta được nghiệm của phương trình đã cho là $3x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x = (2k + 1)\frac{\pi}{6}$ , k nguyên.

*Cách 2.* $\sin^2x + \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin^2x + (\sin^2 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2x - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos 2x)(\sin x + \cos 2x) = 0$

$\Rightarrow$ hoặc $\sin x = \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Rightarrow 2x = \pm(\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ , và $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên,

hoặc $\cos 2x = -\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow$

$2x = \pm(\frac{\pi}{2} + x) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, và

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ , k nguyên.

Kết hợp nghiệm ta được $x = (2k + 1)\frac{\pi}{6}$ , k nguyên.

2) *Cách 1.* Ta có $\frac{3}{2} = \sin^2x + \sin^2 2x + \sin^2 3x =$

$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow$ hoặc: $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$,

k nguyên,

hoặc $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Ta có $3 = 2\sin^2 x + 2\sin^2 2x + 2\sin^2 3x \Leftrightarrow$

$$\sin^2 x + (\sin^2 x - 1) + \sin^2 2x + (\sin^2 2x - 1) + \sin^2 3x - (\sin^2 3x - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 2x - \cos^2 2x + \sin^2 3x - \cos^2 3x = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$ và quay lại cách 1.

3) *Cách 1.* $2 = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x =$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 8x) +$
$+ (\cos 4x + \cos 6x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x\cos 3x + 2\cos 5x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x\cos 2x\cos x = 0.$

Vì nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ chứa trong nghiệm của phương trình $\cos 5x = 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có các nghiệm $\cos 2x = 0 \Rightarrow x = (2l + 1)\frac{\pi}{4}$, l nguyên và $\cos 5x = 0$ $\Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{10}$, k nguyên.

*Cách 2.* Ta có $2 = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x$

$\Leftrightarrow 0 = (1 - \sin^2 4x) + 1 - \sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x$

$= \cos^2 4x + \cos^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x$

$= (\cos^2 4x - \sin^2 2x) + (\cos^2 3x - \sin^2 x)$

$= (\cos 4x - \sin 2x(\cos 4x + \sin 2x) +$
$+ (\cos 3x - \sin x)(\cos 3x + \sin x)$

$= [\cos 4x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)][\cos 4x + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)] +$

$+ [\cos 3x - \cos(\frac{\pi}{2} - x)][\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} - x)] =$

$= -4\sin(x + \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) \times$

$\times \cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(3x - \frac{\pi}{4}) -$

$- 4\sin(x + \frac{\pi}{4})\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \times$

$\times \cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(2x - \frac{\pi}{4}) =$

$= -\sin(2x + \frac{\pi}{2})\sin(6x - \frac{\pi}{2}) -$

$- \sin(2x + \frac{\pi}{2})\sin(4x - \frac{\pi}{2}) =$

$= -\sin(2x + \frac{\pi}{2})[\sin(6x - \frac{\pi}{2}) + \sin(4x - \frac{\pi}{2})] =$

$= \cos 2x\,[\cos 6x + \cos 4x] = 2\cos 2x\cos 5x\cos x$

và quay lại cách 1 ở trên.

*Ví dụ 18.* Giải các phương trình

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \frac{1}{2}$

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1;$

3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

*Giải.* 1) *Cách1.* Ta có

$\frac{1}{2} = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x \Leftrightarrow$

$0 = \cos 2x + 2\cos^2 2x = \cos 2x(1 + 2\cos 2x)$.

$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{4}$, k nguyên, hoặc

$\cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi$, l nguyên.

*Nhận xét.* Có thể nhận được phương trình $\cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$ bằng cách nhân hai vế với $2 \Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow$

$$(2\cos^2 x - 1) + 2\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + 2\cos^2 2x =$$
$$= \cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0.$$

*Cách 2.* Đặt $\cos^2 x = t \Rightarrow 0 \le t \le 1$ và $\cos^2 2x = (2t - 1)^2 = 4t^2 - 4t + 1$. Do vậy ta có phương trình

$4t^2 - 3t + \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$ và $t = \dfrac{1}{4}$

Nếu $t = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos 2x = 0$

$\Rightarrow x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{4}$, k nguyên; nếu $t = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\Rightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + l\pi$, l nguyên.

2) *Cách 1.* Ta có $1 = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} + \dfrac{1 + \cos 4x}{2} + \dfrac{1 + \cos 6x}{2} \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow$

$(1 + \cos 6x) + (\cos 2x + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow$

$2\cos^2 3x + 2\cos 3x\cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x(\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$2\cos 3x\cos 2x\cos x = 0$. Vì nghiệm của $\cos x = 0$ chứa trong nghiệm của $\cos 3x = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm:

$\cos 2x = 0 \Rightarrow x = (2l + 1)\dfrac{\pi}{4}$, l nguyên và $\cos 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{6}$ , k nguyên.

*Cách 2.* $1 = \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \dfrac{1+\cos 6x}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x\cos 2x + \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 0.$

Từ đây hoặc suy ra $2\cos 2x\cos 3x\cos x = 0$ và quay về cách 1, hoặc biến đổi thành $\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow$ $\cos 2x = 0$, $\cos 2x = -1$ và $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ . Vậy phương trình có các nghiệm $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$ , $x = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ ,

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + l\pi$, kết hợp nghiệm ta được $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$

và $x = \dfrac{\pi}{6} + l\dfrac{\pi}{3}$ hay $x = (2l+1)\dfrac{\pi}{6}$ , k, l nguyên.

*Nhận xét.* Ta cũng có thể làm như sau:

$\dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = 0$, $\cos 2x = -1$ và $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

3) Ta có $\dfrac{3}{2} = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x =$

$= \dfrac{1+\cos 2x}{2} + \dfrac{1+\cos 4x}{2} + \dfrac{1+\cos 6x}{2} + \dfrac{1+\cos 8x}{2}$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow$

$(1 + \cos 8x) + (\cos 2x + \cos 6x) + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$

$2\cos^2 4x + 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\cos 4x\,(2\cos 4x + 2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\cos 4x\,(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow$

hoặc $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{8}$

k nguyên; hoặc $4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos 72^\circ = \cos\frac{4\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\text{và } \cos 2x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} = -\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= \cos\frac{4\pi}{5} \Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{5} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{5} + k\pi,$$

k nguyên; và $2x = \pm\dfrac{4\pi}{5} + 2l\pi \Rightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{5} + l\pi$,

l nguyên.

*Cách khác.* Nhân hai vế của $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 3x = 0$ với $2\sin x \neq 0$ (nếu $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow 5 = 0$ vô lý), ta được: $2\sin x - \sin x + \sin 3x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x - \sin 7x + \sin 9x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \sin 9x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x\cos 4x = 0 \Rightarrow$ hoặc $\sin 5x = 0 \Rightarrow$

$x = k\dfrac{\pi}{5}$, k nguyên, $k \neq 5m$, hoặc $\cos 4x = 0 \Rightarrow$

$x = (2l + 1)\dfrac{5\pi}{8}$, l nguyên.

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác ta thấy nghiệm nhận theo 2 cách là như nhau.

*Ví dụ 19.* (Đề thi đại học khối A-B/1979).

a) Giải phương trình $\sin x\cos 2x = \sin 2x\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 5x.$ (1)

b) Xác định a để cho phương trình.

$$a\cos 2x + |a|\cos 4x + \cos 6x = 1 \quad (2)$$

có nghiệm là nghiệm của phương trình (1) và chỉ có các nghiệm ấy.

*Giải:* a) *Cách 1.* Trong (1) biến đổi tích thành tổng,

ta được $0 = \sin x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 5x$

$= \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) - \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) + \frac{1}{2}\sin 5x$

$= \frac{1}{2}\sin 3x \Rightarrow \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{3}$, k nguyên.

*Cách 2.* Trong (1) biến đổi tổng thành tích, ta được:

$0 = \sin x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 5x$

$= \sin x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x + \frac{1}{2}\sin(2x + 3x)$

$= \sin x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x\cos 2x$

$= \sin x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin x = \sin x(\cos 2x + \frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ hoặc $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, k nguyên, hoặc

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + l\pi,$

l nguyên.

Kết hợp nghiệm ta được $x = k\frac{\pi}{3}$, k nguyên.

b) Xét phương trình $a\cos2x + |a|\cos4x + \cos6x = 1$. (2)

*Cách 1.* Vì nghiệm của (1) là nghiệm của (2) nên ta có:

$$a\cos\frac{2k\pi}{3} + |a|\cos\frac{4k\pi}{3} + \cos\frac{6k\pi}{3} = 1$$

$\Rightarrow |a| = -a \Rightarrow a \leq 0$.

Nếu a = 0, phương trình (2) trở thành: $\cos6x = 1 \Rightarrow$

$6x = 2k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{3}$, k nguyên. Nghiệm này trùng với nghiệm của (1).

Nếu a < 0, phương trình (2) trở thành:

$$a\cos2x - a\cos4s + \cos6x = 1$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad 0 &= a\cos2x - a\cos4x + \cos6x - 1\\ &= -a(\cos4x - \cos2x) - 2\sin^2 3x\\ &= 2a\sin3x\sin x - 2\sin^2 3x\\ &= 2\sin3x(a\sin x - \sin3x)\\ &= 2\sin3x\sin x(4\sin^2 x + a - 3).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra hoặc $\sin3x = 0$, tức là $x = n\frac{\pi}{3}$,

hoặc $\sin x = 0$, tức là $x = n\pi$, hoặc $\sin^2 x = \frac{3 - a}{4}$.

$\Rightarrow x = n\frac{\pi}{3}$, n nguyên $\forall a < 0$. Để nghiệm của (2) chỉ là nghiệm của (1) thì phải có:

hoặc phương trình $\sin^2 x = \frac{3 - a}{4} > 0$ vô nghiệm

$\Rightarrow \dfrac{3 - a}{4} > 1 \Rightarrow a < -1$; hoặc $\sin^2 x = \dfrac{3 - a}{4}$ có nghiệm,

nhưng trùng với nghiệm của (1) . Nhưng vì $\dfrac{3 - a}{4} > \dfrac{3}{4}$,

nên không thể mọi nghiệm của (2) là nghiệm của (1) được.

Tóm lại, nghiệm của (1) và (2) trùng nhau, nếu $a = 0$ hoặc $a < -1$.

*Cách 2.* Ta có

$$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x,\ \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1.$$

Khi đó phương trình (2) có dạng

$4\cos^3 2x + 2|a|\cos^2 2x + (a - 3)\cos 2x - (|a| + 1) = 0.$

Đặt $y = \cos 2x$ ta được:

$$4y^3 + 2|a|y^2 + (a - 3)y - (|a| + 1) = 0. \qquad (3)$$

Vì nghiệm của (1) là nghiệm của (2) , nên với $x = k\dfrac{\pi}{3}$,

k nguyên, tức là $y = 1$ hoặc $y = -\dfrac{1}{2}$, thì từ (3) ta được

$|a| = -a \Rightarrow a \leq 0$. Nếu $a = 0$, phương trình (3) trở thành

$4y^3 - 3y - 1 = 0 \Rightarrow y \neq 1, y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ nghiệm của (3), tức là

của (2) trùng với nghiệm của (1).

Nếu $a < 0$, phương trình (3) trở thành:

$$4y^3 - 2ay^2 + (a - 3)y - (1 - a) = 0$$

hay $$(y - 1)(y + \frac{1}{2})[4y + 2(1 - a)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 1, y = -\frac{1}{2},\ y = \frac{a - 1}{2} < 0 \quad \text{(vì } a < 0\text{). Do đó}$$

nếu $\frac{a - 1}{2} < -1$, tức là $a < -1$ thì phương trình $\cos 2x = \frac{a - 1}{2}$ vô nghiệm. Khi đó nghiệm của (3) (tức là của (2)) trùng với nghiệm của (1). Khi $\frac{a - 1}{2} \geq -1$ tức là $a \geq -1$ thì phương trình $\cos 2x = \frac{a - 1}{2}$ có nghiệm, nghiệm đó không trùng với nghiệm của (1) $\frac{a - 1}{2} < -\frac{1}{2}$, vì vậy không phải mọi nghiệm của (3) (tức là của (2) (đều là nghiệm của (1). Vậy: để nghiệm của (1) và (2) trùng nhau thì phải có $a = 0$ hoặc $a < -1$.

*Ví dụ 20:* Giải phương trình

$$\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x.$$

*Giải: Cách 1.* Vì $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 + \sin x)(1 - \sin x)$ nên ta được

$\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + (1 + \sin x)(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - \sin x) + (1 + \sin x)(1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(2 + \cos x + \sin x) = 0.$

Vì $2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0$,

nên suy ra $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$(1 + \cos x)(1 - \sin x) + \cos^2 x = 0.$$

Vì $(1 + \cos x)(1 - \sin x) \geq 0$ và $\cos^2 x \geq 0$ nên suy ra

$\begin{cases} (1 + \cos x)(1 - \sin x) = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$

k nguyên.

*Ví dụ 21.* Giải phương trình:

$$\sin x \sin 2x \cos 5x = 1$$

***Giải:* *Cách 1.*** Vì $|\sin x| \le 1$, $|\sin 2x| \le 1$, $|\cos 5x| \le 1$, nên $|\sin x \sin 2x \cos 5x| \le 1$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $|\sin x| = 1$, $|\sin 2x| = 1$, $|\cos 5x| = 1$. Nhưng nếu $|\sin x| = 1$ thì $\cos x = 0$ (do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) $\Rightarrow$ $|\sin 2x| = |2\sin x \cos x| = 0 \ne 1$. Vậy phương trình vô nghiệm.

*Nhận xét.* Ta có thể nhận hệ $|\sin x| = 1$, $|\sin 2x| = 1$, $|\cos 5x| = 1$ bằng bất đẳng thức Côsi như sau:

$$1 = |\sin x \sin 2x \cos 5x| = |\sin x|\,|\sin 2x|\,|\cos 5x| \le$$
$$\left(\frac{|\sin x| + |\sin 2x| + |\cos 5x|}{3}\right)^3 \le 1$$

$\Rightarrow$ để phương trình có nghiệm thì bất đẳng thưc Côsi phải đạt dấu =, $\Rightarrow |\sin x| = 1$, $|\sin 2x| = 1$, $|\cos 5x| = 1$.

***Cách 2.*** Ta có $1 = \sin x \sin 2x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\cos 5x = \frac{1}{2}(\cos x \cos 5x - \cos 3x \cos 5x) = \frac{1}{4}(\cos 4x + \cos 6x - \cos 2x - \cos 8x) \Rightarrow -\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x - \cos 8x = 4$. Vì $|\cos kx| \le 1$, nên để phương trình có nghiệm thì phải có :

$\cos 2x = -1$, $\cos 4x = 1$, $\cos 6x = 1$, $\cos 8x = -1$.

Vì $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$, nên nếu $\cos 2x = -1$ thì $\cos 6x = -1 \ne 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

*Ví dụ 22.* Tìm những số thực x, y thỏa mãn phương trình:

$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x = 2\sin^2 y.$$

***Giải:* *Cách 1.*** Ta có $0 = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x - 2\sin^2 y =$

$= (tgx - cotgx)^2 + 2(1 - \sin^2 y).$ (1)

Do $1 - \sin^2 y \geq 0$, nên vế phải là tổng 2 số không âm bằng 0 $\Rightarrow$ mỗi số hạng bằng 0 đồng thời. Vậy (1) tương đương với

$$\begin{cases} 1 - \sin^2 y = 0 \\ tgx - cotgx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 y = 1 \\ tgx = cotgx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2y}{2} = 1 \\ tgx = cotgx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2y = -1 \\ tgx = cotgx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = (2k + 1)\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

k, k' nguyên.

*Cách 2.* Điều kiện $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0 \Rightarrow \sin 2x \neq 0 \Rightarrow$ $x \neq \dfrac{m\pi}{2}$, m nguyên. Ta có

$$0 = tg^2x + cotg^2y - 2\sin^2 y = tg^2x + \frac{1}{tg^2x} - 2\sin^2 y =$$

$$= \frac{tg^4x - 2\sin^2 y\, tg^2x + 1}{tg^2x}$$

$\Rightarrow tg^4x - 2\sin^2 y tg^2x + 1 = 0$. Đặt $tg^2x = t \geq 0$

$\Rightarrow t^2 - 2\sin^2 yt + 1 = 0.$

Biệt thức của phương trình là $\Delta' = \sin^2 y - 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq \sin^2 y \leq 1 \Rightarrow \sin^2 y = 1$, $t = 1$ (kép) $\Rightarrow \dfrac{1 - \cos 2y}{2} = 1$,

$tg^2x = 1 \Rightarrow \cos 2y = -1$, $tgx = \pm 1 \Rightarrow 2y = (2k + 1)\pi$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow y = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k'\dfrac{\pi}{2}$,

k, k' nguyên(thích hợp).

*Cách 3.* Ở vế trái áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm ta có : $tg^2x + cotg^2x \geq 2$, vế phải $2sin^2y \leq 2$, do vậy phương trình chỉ có hai nghiệm khi hai vế bằng nhau và bằng $2 \Rightarrow tg^2x = 1$ và $sin^2y = 1$ và $x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2}$, $y = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k, k' nguyên, thỏa mãn điều kiện $x \neq m\frac{\pi}{2}$, m nguyên.

*Ví dụ 23.* Cho phương trình $sin^4x + (1 - sinx)^4 = m$.

1) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm?

*Giải:*

1) *Cách 1.* Đặt $sinx = u$, $1 - sinx = v \geq 0 \Rightarrow$ hệ phương trình trở thành $u + v = 1$, $u^4 + v^4 = \frac{1}{8}$, với $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$. Vậy

$$\frac{1}{8} = u^4 + v^4 = (u^2)^2 + (v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 =$$
$$= [(u + v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = (1 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 =$$
$$= 1 - 4uv + 2u^2v^2 \Rightarrow 2(uv)^2 - 4(uv) + \frac{7}{8} = 0.$$

Đây là phương trình bậc 2 theo uv, có các nghiệm $uv = \frac{1}{4}$ và $uv = \frac{7}{4}$ (loại, vì $uv = sinx(1 - sinx)$ nhận giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$). Vậy u, v là nghiệm của phương trình $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$ (do có $u + v = 1$, $uv = \frac{1}{4}$).

$\Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. Vậy $u = v = \frac{1}{2} = \sin x$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Đặt $\sin x = \frac{1}{2} - t \Rightarrow 1 - \sin x = \frac{1}{2} + t$.

Khi đó phương trình trở thành:

$m = (\frac{1}{2} - t)^4 + (\frac{1}{2} + t)^4 = \frac{1}{8} + 3t^2 + 2t^4$.

Đặt $t^2 = X \geq 0$ và vì $t = \frac{1}{2} - \sin x \Rightarrow t^2 = X = (\frac{1}{2} - \sin x)^2 \leq \frac{9}{4}$, nên $0 \leq X \leq \frac{9}{4}$ và phương trình có dạng

$$m = \frac{1}{8} + 3X + 2X^2.$$

Với $m = \frac{1}{8}$ ta có $2X^2 + 3X = 0 \Rightarrow X(2X + 3) = 0$. Vì $X \geq 0 \Rightarrow 2X + 3 > 0$ và $X = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2kp$, k nguyên.

2) *Cách 1.* Theo cách 2 trên đây phương trình đã cho có dạng $2X^2 + 3X + \frac{1}{8} = m$, $0 \leq X \leq \frac{9}{4}$ nên phương trình có nghiệm, nếu đường thẳng nằm ngang $y = m$ cắt parabôn $y = 2X^2 + 3X + \frac{1}{8}$ trên đoạn $0 \leq X \leq \frac{9}{4}$. Vì $y = 2X^2 + 3X + \frac{1}{8}$ là parabôn có hệ số đầu là $2 > 0$, nên quay bề

lõm về phía trên, có hoành độ đỉnh $X = -\frac{3}{4}$ ở bên trái đoạn $[0, \frac{9}{4}]$, nên trên đoạn này y đồng biến $\Rightarrow y_{max} = y(\frac{9}{4}) = 17$, $y_{min} = y(0) = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $\frac{1}{8} \leq m \leq 17$.

*Cách 2.* Xét phương trình $2X^2 + 3X + \frac{1}{8} - m = 0$ có $\Delta = 9 - 4.2(\frac{1}{8} - m) = 8 + 8m \geq 0 \Rightarrow m \geq -1$.

Phương trình phải có ít nhất 1 nghiệm ở trong khoảng $[0, \frac{9}{4}]$, mà $X_1 = \frac{-3 - \sqrt{\Delta}}{4} < 0$, nên

$$0 \leq X_2 = \frac{-3 + \sqrt{\Delta}}{4} \leq \frac{9}{4}$$

$\Rightarrow 3 \leq \sqrt{\Delta} \leq 12 \Rightarrow 9 \leq \Delta \leq 144 \Rightarrow 9 \leq 8 + 8m \leq 144$

$\Rightarrow 1 \leq 8m \leq 136 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq m \leq 17$.

*Nhận xét.* 1) ta cũng có thể xét dấu hàm $y = 2X^2 + 3X + \frac{1}{8} - m$, nhưng thực chất lại quay về cách 1.

2) Ta cũng có thể dùng cách 1 ở câu 1) nhưng tính toán cồng kềnh và vất vả hơn.

*Ví dụ 24.* Cho phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x + m = 0.$$

1) Giải phương trình khi m = -2.

2) Biện luận phương trình đã cho.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Theo ví dụ 15 chương 1 ta có

$\sin^4x + \cos^4x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x$ nên phương trình trở thành

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) + m = 0$$

hay $\frac{1}{4}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{3}{4} + m = 0$ hay:

$$\cos^2 2x - 4\cos x + 3 + 4m = 0.$$

Khi $m = -2$ ta có $t^2 - 4t - 5 = 0$, $t = \cos x$. Vì $a - b + c = 0$, nên phương trình có nghiệm $t = -1$ và $t = 5$ (loại).

Với $t = -1 = \cos 2x \Rightarrow 2x = (2k + 1)\pi \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k nguyên.

*Cách 2.*

Ta có $0 = \sin^4x + \cos^4x - \cos 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x + m$

$= \sin^4x + (\cos^4x - \cos^2x) + \sin^2x + \sin^2x\cos^2x + m$

$= \sin^4x + \cos^2x(\cos^2x - 1) + \sin^2x + \sin^2x\cos^2x + m$

$= \sin^4x - \cos^2x\sin^2x + \sin^2x + \sin^2\cos^2x + m$

$= \sin^4x + \sin^2x + m$

Khi $m = -2$ ta có $\sin^4x + \sin^2x - 2 = 0$. Đây là phương trình bậc hai theo $\sin^2x$, có $a + b + c = 0$, nên có nghiệm $\sin^2x = 1$ và $\sin^2x = -2$ (loại). Khi $\sin^2x = 1 =$

$= \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$,

k nguyên.

2) *Cách 2.* Biến đổi như cách 1 câu 1) ta được

$$\cos^2 2x - 4\cos 2x + 3 + 4m = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo cos2x, có nghiệm khi

$\Delta' = 4 - 3 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$. Để nghiệm phương trình này là nghiệm của phương trình ban đầu thì ít nhất một nghiệm phải thỏa mãn điều kiện $-1 \leq t = \cos 2x \leq 1$. Vì nghiệm $t_1 = 2 + \sqrt{\Delta} > 1$ (loại), nên $t_2 = 2 - \sqrt{\Delta}$ phải thỏa mãn điều kiện $-1 \leq t_2 = 2 - \sqrt{\Delta} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{\Delta} \leq 3 \Rightarrow$ $1 \leq 1 - 4m \leq 9 \Rightarrow 0 \leq -4m \leq 8 \Rightarrow -2 \leq m \leq 0$.

*Nhận xét.* Có thể xét parabôn $y = t^2 + 4t + 3$ (= $-4m$) có đỉnh $t = 2$ quay bề lõm về phía trên, nên $y_{max} = y(-1) = 8$; $y_{min} = y(1) = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi $0 \leq -4m \leq 8$ hay $-2 \leq m \leq 0$.

*Cách 2.* Theo biến đổi ở cách 2 ở 1) ta có:

$$\sin^4 x + \sin^2 x + m = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo $\sin^2 x$, có nghiệm khi $\Delta = 1 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$. Để nghiệm phương trình này là nghiệm của phương trình ban đầu thì phải thỏa mãn điều kiện $t = \sin^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$. Vì $t_1 = \frac{-1 - \sqrt{\Delta}}{2} < -1$. nên phải có:

$$0 \leq t_2 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{\Delta} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 1 - 4m \leq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

*Nhận xét.* Cũng có thể xét $y = t^2 + t$ (= $-m$), $0 \leq t = \sin^2 x \leq 1$ là parabôn quay bề lõm về phía trên (có hệ số đầu là $1 > 0$) và đỉnh tại $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ trên $0 \leq t \leq 1$ y đồng biến và $y_{min} = y(0) = 0$, $y_{max} = y(1) = 2 \Rightarrow$ để có nghiệm thì $0 \leq -m \leq 2$ hay $-2 \leq m \leq 0$.

*Ví dụ 25.* Giải các phương trình:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;

2) $\sin^3x + \cos^3x = \dfrac{1}{\sin^4 x + \cos^4x}$

*Giải:* 1) *Cách 1.* Vì $1 = \sin^2x + \cos^2x$, nên có thể viết

$\sin^2x + \cos^2x - \sin^3x - \cos^3x = 0 \Leftrightarrow$

$\sin^2x(1 - \sin x) + \cos^2x(1 - \cos x) = 0$

Vế trái là tổng hai thừa số không âm và do sinx và cosx không đồng thời bằng 0 (do $\sin^2x + \cos^2x = 1$) nên phương trình tương đương với:

$$a) \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad b) \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

Hệ a) có nghiệm $x = 2k\pi$, k nguyên; hệ b) có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$, l nguyên. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$, k, l nguyên.

*Cách 2.* Ta có $1 = \sin^3x + \cos^3x = (\sin x + \cos x) \times$

$\times (\sin^2x + \cos^2x - \sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x)$.

Đặt $\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow t^2 = \sin^2x + \cos^2x + 2\sin x\cos x =$

$= 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ và phương trình trở thành

$$t(1 - \frac{1}{2}(t^2 - 1)) = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2(t + 2) = 0.$

Vì $t = \sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$ và $t + 2 > 0$.

Do vậy suy ra $t = 1 \Rightarrow \cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$,

k nguyên.

*Cách 3.* Vì $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ nên nếu sinx và cosx trái dấu hoặc sinx và cosx đồng dấu âm thì vế trái bé hơn 1, nên phương trình vô nghiệm. Nếu sinx và cosx đồng dấu không âm thì $0 \le \sin x \le 1$, $0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \cos^3 x \le \cos^2 x$, $\sin^3 x \le \sin^2 x \Rightarrow 1 = \sin^3 x + \cos^3 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Phương trình có nghiệm khi 2 vế bằng nhau và bằng 1 $\Rightarrow \sin^3 x = \sin^2 x$, $\cos^3 x = \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) = 0$, $\cos^2 x(1 - \cos x) = 0$ và quay về cách 1.

*Cách 4.* Cũng lý luận như cách 3, ta có $0 \le \sin x \le 1$, $0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \sin^3 x + \cos^3 x = \sin x.\sin^2 x + \cos x.\cos^2 x \le$$

$$\le \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x} = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

(Bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski ).

Nếu $\sin x = 0$ hoặc $\cos x = 0$, thì $\cos x = 1$ hoặc $\sin x = 1$ do đó có nghiệm $x = 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, k, l nguyên.

Nếu $\sin x > 0$ và $\cos x > 0$ thì ta có:

$$1 \le \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x} < \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2} = 1$$

do vậy trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

2) *Cách 1.* Vì:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \le \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x =$$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, nên $\dfrac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \ge 1$. Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $\sin^2 x = 0$ hoặc $\cos^2 x = 0$.

Mặt khác $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1 \Rightarrow \sin^3 x \le \sin^2 x$, $\cos^3 x \le \cos^2 x \Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dấu = đạt được khi và chỉ khi $\sin^3 x = \sin^2 x$, $\cos^3 x = \cos^2 x \Rightarrow$ hoặc

$\sin^2 x = 0$, $\cos x = 1$, hoặc $\cos^2 x = 0$, $\sin x = 1$. Phương trình chỉ có nghiệm khi 2 vế bằng nhau và bằng 1, nên $\Rightarrow$ $\sin^2 x = 0$, $\cos x = 1$ hoặc $\cos^2 x = 0$, $\sin x = 1 \Rightarrow$

$$x = 2k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi,\ k,\ l \text{ nguyên.}$$

*Cách 2.* Ta có

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \Leftrightarrow$$

$$1 = \sin^7 x + \cos^7 x + \sin^4 x\cos^3 x + \cos^4 x\sin^3 x \leq$$

$$\leq \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$$

Dấu = đạt được khi và chỉ khi $\sin^7 x = \sin^4 x$,
$\cos^7 x = \cos^4 x$, $\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4\cos^3 x = \cos^4 x\sin^3 x \Leftrightarrow$
$\sin^4 x(1 - \sin^3 x) = 0$, $\cos^4 x(1 - \cos^3 x) = 0$,
$\sin^2 x\cos^2 x(1 - \sin^2 x\cos x) = 0$,
$\sin^2 x\cos^2 x(1 - \cos^2 x\sin x) = 0$.

Vì $1 - \sin^2 x\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x\sin x = 1 - \frac{1}{4}\cos x -$

$- \frac{1}{4}\cos^3 x \geq 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$, tương tự:

$1 - \sin x\cos^2 x > 0$, nên suy ra $\cos x = 0$, $\sin x = 1$ hoặc

$\sin x = 0$, $\cos x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, hoặc $x = 2l\pi$,

k, l nguyên.

*Ví dụ 26.* Giải các phương trình

1) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{4}{5}$;

2) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

*Giải:* 1) *Cách 1.*

$$\frac{4}{5} = \sin 2x(\sin x\sin 3x) = \frac{1}{2}\sin 2x[\cos 2x - \cos 4x] =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Do vậy phương trình vô nghiệm.

*Cách 2.* $\frac{4}{5} = \frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x - \cos 4x\sin 2x)$.

Vì $|\sin 2x\cos 2x - \cos 4x\sin 2x| \leq \sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}\ \times$

$\times \sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x - \cos 4x\cos 2x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

*Nhận xét.* Có thể không áp dụng bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpski mà làm như sau:

$$\frac{1}{2}(\sin 2x\cos 2x - \cos 4x\sin 2x) = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}\ \times$$

$$\times\left(\frac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}} - \frac{\cos 4x\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}}\right) =$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}\cos(2x + t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (trong đó $\cos t =$

$= \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}}$ ; $\sin t = \frac{\cos 4x}{\sqrt{\sin^2 2x + \cos^2 4x}}$ ).

Vì $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5}$ nên phương trình vô nghiệm.

2) *Cách 1.* $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x) =$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x = \frac{1}{4}\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x\cos 4x = 0$$

$\Rightarrow$ hoặc $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$, k nguyên, hoặc $\cos 4x = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$, k nguyên.

*Nhận xét.* Cũng có thể làm như sau

$\sin x \sin 2x \sin 3x = \dfrac{1}{4}\sin 4x = \dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(\sin x \sin 3x - \dfrac{1}{2}\cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\cos 4x = 0$ và quay lại tìm nghiệm như trên.

*Cách 2.* $\dfrac{1}{4}\sin 4x = (\sin x \sin 2x)\sin 3x =$

$= \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\sin 3x = \dfrac{1}{2}\sin 3x\cos x -$

$- \dfrac{1}{4}\sin 6x \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(\sin 4x + \sin 6x) = \dfrac{1}{2}\sin 3x\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 5x\cos x = \sin 3x\cos x \Leftrightarrow \cos x(\sin 5x - \sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\cos 4x\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\cos 4x = 0 \Rightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$ và

$x = k\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8}$, k nguyên.

*Ví dụ 27.* Tìm tất cả các cặp số (a, b) sao cho $\forall x$ ta đều có $a\sin x + b = \sin(ax + b)$.

*Giải: Cách 1.* Cho $x = 0$, ta được $b = \sin b \Rightarrow b = 0$.

Do vậy ta có $a\sin x = \sin ax$.

Cho $x = \pi$, ta có $0 = \sin a\pi \Rightarrow a\pi = k\pi$, k nguyên $\Rightarrow a = k$.

Vì $|\sin\alpha x| \leq 1\ \forall\alpha$, nên từ $a\sin x = \sin ax \Rightarrow |a| \leq 1$. Vì a nguyên, nên $a = 0, \pm 1$.

Với $a = 0$ ta có: $0 = \sin 0$ đúng $\forall x$. Với $a = 1$ ta có: $\sin x = \sin x$ đúng $\forall x$, với $a = -1$ ta có $-\sin x = \sin(-x)$ đúng $\forall x$. Vậy ta có 3 cặp số thỏa mãn điều kiện đầu bài là (0,0), (1,0) và (-1,0).

*Cách 2.* Nếu $f(x) = g(x)$ thì $f'(x) = g'(x)$. Bởi vậy, do: $a\sin x + b = \sin(ax + b) \Rightarrow a\cos x = a\cos(ax + b)\ \forall x$. Nếu $a = 0$, thay vào phương trình đã cho ta có $b = \sin b \Rightarrow b = 0$. Vậy cặp (0,0) thích hợp.

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow \cos x = \cos(ax + b)$. Cho $x = 0 \Rightarrow 1 = \cos b \Rightarrow b = 2k\pi$. Thay vào phương trình đã cho ta được $0 + 2k\pi = 0 \Rightarrow k = 0$ và do đó $b = 0$. Bởi vậy ta được: $\cos x = \cos ax$. Cho $x = \dfrac{\pi}{2}$, ta có $\cos\dfrac{a\pi}{2} = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}(2k + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2k + 1$ là một số nguyên lẻ. Vì $a\sin x = \sin ax$ (do $b = 0$), nên lấy $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta có $a = \sin a\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow |a| \leq 1$. Vì a là một số nguyên lẻ, nên $a = \pm 1$.

Thay vào $a\sin x = \sin ax$:

$a = 1$, ta có $\sin x = \sin x$ đúng $\forall x$.

$a = -1$, ta có $-\sin x = \sin(-x)$ đúng $\forall x$.

Vậy có 3 cặp (a,b) thỏa mãn đầu bài là (0,0), (1,0) (-1,0)

***Ví dụ 28.*** Giải phương trình

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $\dfrac{3}{2} = \cos x + (\cos y - \cos(x + y)) =$

$$= \cos x + 2\sin(\frac{x}{2} + y)\sin\frac{x}{2}\ . \qquad (1)$$

Vì $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ (nếu trái lại ta có $\cos x = \frac{3}{2}$ vô lý),

nên từ (1) suy ra

$$\sin(\frac{x}{2} + y) = \frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Để phương trình có nghiệm thì

$$|\sin(\frac{x}{2} + y)| = \left|\frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq 1.$$

Vì $\frac{3}{2} - \cos x > 0$, nên từ đó suy ra:

$$\frac{3}{2} - \cos x \leq 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{3}{2} - (1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) \leq$$

$$\leq \left|2\sin\frac{x}{2}\right|.$$

Đặt $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = t \geq 0$, ta được $4t^2 - 4t + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$ k nguyên.

Thay $\cos x = \dfrac{1}{2}$ vào phương trình xuất phát ta được

$$\frac{1}{2} + \cos y - \cos(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi + y) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos y - \cos(y + \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos y - [\cos y\cos\frac{\pi}{3} \pm \sin y\sin\frac{\pi}{3}] =$$

$$\cos y - [\frac{1}{2}\cos y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(y \pm \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow y \pm \frac{\pi}{3} = 2l\pi \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi,$$

l nguyên.

Vậy $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi$, k, l nguyên.

(Dấu $\pm$ ở x và y tương ứng)

*Cách 2.* $(\cos x + \cos y) - \cos(x + y) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{2} = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2})^2 - \cos^2\frac{x-y}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2})^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0.$$

Vế trái là tổng 2 số âm, bằng 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ \sin^2\dfrac{x-y}{2} = 0. \end{cases}$$

Từ phương trình này $\Rightarrow$

$$\sin\frac{x-y}{2} = 0,\quad \frac{x-y}{2} = k\pi \Rightarrow x - y = 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2k\pi + x.$$

Thay vào phương trình đầu ta được:

$$2\cos(x - k\pi) - \cos k\pi = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x - k\pi) = \cos k\pi$$

$$= (-1)^k \Leftrightarrow 2.(-1)^k\cos x = (-1)^k \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \text{ nguyên.}$$

Thay vào phương trình xuất phát ta được:

$$y = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi,\ l \text{ nguyên.}$$

*Ví dụ 29.* Giải phương trình

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x.$$

*Giải: Cách 1.* Ta viết phương trình dưới dạng

$$\sin^2 x - \sin x.\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 - \frac{1}{4}\sin^4 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\,(1 - \sin^2 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\cos^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 6x = 0$$

Vế trái là tổng hai số hạng không âm, nên mỗi số hạng phải bằng 0. Do vậy ta có:

$$\begin{cases} 2\sin x = \sin^2 3x \\ \sin 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x = \dfrac{1 - \cos 6x}{2} \\ \sin 6x = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai suy ra $6x = k\pi \Rightarrow x = k\dfrac{\pi}{6}$,

k nguyên $\Rightarrow \cos 6x = \cos k\pi = \pm 1$.

Nếu $\cos 6x = 1$, thì từ phương trình đầu suy ra $\sin x = 0 \Rightarrow x = l\pi$, l nguyên. Vì $\cos k\pi = 1 \Rightarrow$ k chẵn và $k\dfrac{\pi}{6} = l\pi \Rightarrow k = 6l$, l tùy ý. Vậy phương trình có nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{6}$, $k = 6l$, l nguyên tùy ý.

Nếu $\cos 6x = -1 \Rightarrow$ k lẻ. Khi đó từ phương trình đầu suy ra $2\sin x = 1$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $x = (-1)^m\dfrac{\pi}{6} + m\pi$, m nguyên tùy ý. Vậy hệ có nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{6}$, $k = 6l$ và $k = 6m + (-1)^m$, l, m nguyên tùy ý.

*Cách 2.* Chú ý $\sin^2 x \geq 0$, $\dfrac{1}{4}\sin^2 x \geq 0$, nên áp dụng bất đẳng thức côsi cho 2 số không âm ta được:

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x \geq |\sin x|\ |\sin 3x| \geq \sin x.\sin^2 3x$$

Bởi vậy phương trình có nghiệm khi:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}|\sin 3x| \\ \sin x|\sin 3x| = \sin x.\sin^2 3x \end{cases}$$

(chú ý từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow \sin x \geq 0$ và vì $0 \leq |\sin 3x| \leq 1 \Rightarrow |\sin 3x| \geq \sin^2 3x$).

Phương trình thứ hai sẽ thỏa mãn nếu $\sin x = 0$ hoặc $\sin 3x = 0$, hoặc $\sin 3x = \pm 1$. Từ đây ta tìm lại được kết quả như trên.

*Ví dụ 30.* Với a nào thì phương trình sau có một nghiệm duy nhất:

$$1 + \sin^2 ax = \cos x \ ? \qquad (1)$$

*Giải: Cách 1.* Vì phương trình đối xứng theo x (theo nghĩa là thay x bằng -x thì phương trình không đổi), nên nếu phương trình có nghiệm là x, thì nó cũng có nghiệm -x. Do vậy để phương trình có nghiệm duy nhất, thì nghiệm duy nhất ấy phải thỏa mãn điều kiện $x = -x$ hay $x = 0$. Thay $x = 0$ vào (1) ta thấy phương trình nghiệm đúng.

Bây giờ ta tìm xem với a nào thì (1) không còn nghiệm nào khác. Vì vế trái $1 + \sin^2 ax \geq 1$, dấu = đạt được khi và chỉ khi $\sin ax = 0 \Rightarrow ax = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{a}$, k nguyên nếu $a \neq 0$; $\forall x$, nếu $a = 0$. Vế phải $\cos x \leq 1$, dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2l\pi$, l nguyên. Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi hai vế bằng nhau và bằng 1. Nếu $a = 0$, ngoài nghiệm $x = 0$, ta còn nghiệm $x = 2k\pi$, k tùy ý, do vậy $a = 0$ không thích hợp. Nếu $a \neq 0$ ta có $\dfrac{k\pi}{a} = 2l\pi \Rightarrow a = \dfrac{k}{2l} \Rightarrow$ nếu a vô tỷ thì ngoài nghiệm $x = 0$ không còn nghiệm nào khác, nếu a hữu tỷ thì ngoài nghiệm $x = 0$, ta còn có các nghiệm khác, chẳng hạn nếu $a = \dfrac{p}{q}$, thì còn nghiệm ứng với $l = q$, $k = 2p$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$, nếu a vô tỷ.

*Cách 2.* Như cách 1, ta có x = 0 là nghiệm của (1). Ta viết (1) dưới dạng:

$$1 + \frac{1 - \cos 2ax}{2} = \cos x \Leftrightarrow 3 = 2\cos x + \cos 2ax.$$

Vì $\cos\alpha \le 1 \Rightarrow$ phương trình chỉ có nghiệm khi $\cos x = 1$ và $\cos 2ax = 1 \Rightarrow x = 2l\pi$, $2ax = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$, $ax = k\pi$ và quay lại cách 1

*Nhận xét.* Bài toán còn có thể giải bằng phương pháp đồ thị.

*Ví dụ 31.* Giải phương trình

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5.$$

*Giải: Cách 1.* Điều kiện $\cos\frac{x}{2} \ne 0 \Rightarrow x \ne (2k + 1)\pi$, k nguyên. Ta có

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \le \frac{2\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \le \frac{2\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{2\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|} = 1$$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm 1 và $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$).

Dấu = đạt được khi và chỉ khi $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$. Vế phải $y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \ge 1$, Dấu = đạt được khi và chỉ khi $y = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm khi hai vế bằng nhau và bằng 1.

Khi đó $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, n nguyên, $y = 2$.

*Cách 2.* Vì $\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \sin x \leq 1$; $y^2 - 4y + 5 =$

$= (y - 2)^2 + 1 \geq 1$, nên phương trình chỉ có nghiệm khi hai vế bằng nhau và bằng 1 $\Rightarrow \sin x = 1$, $y = 2 \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y = 2$, n nguyên.

*Ví dụ 32.* Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \sin x.\sin y = \frac{1}{2}, \\ x + y = 120^o; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tgx.tgy = 1 \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

*Giải:* 1) *Cách 1.* Ta có

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)] \Rightarrow 1 = \cos(x - y) -$

$- \cos 120^o = \cos(x - y) + \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x - y) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y = \pm 60^o + k360^o$.

Kết hợp với $x + y = 120^o$ ta được các nghiệm:

$x = 90^o + k180^o$, $y = 30^o - k180^o$, k nguyên; và $x = 30^o +$ $+ k180^o$, $y = 90^o - k180^o$, k nguyên.

*Cách 2.* Từ phương trình thứ hai ta có $y = 120^o - x \Rightarrow$ $\sin y = \sin(120^o - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$. Thay vào phương trình đầu ta được:

$$\frac{1}{2} = \sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin(2x - 30^o) \Rightarrow$$

hoặc $2x - 30^o = 30^o + k360^o \Rightarrow x = 30^o + k180^o$, $y = 90^o - k180^o$, k nguyên, hoặc $2x - 30^o = 150^o + k360^o \Rightarrow$ $x = 90^o + k180^o$, $y = 30^o - k180^o$, k nguyên.

2) *Cách 1.* Với điều kiện $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, $x \neq$ $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, k, l nguyên, phương trình đầu tương đương với

$$1 = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} \Leftrightarrow$$

$$\cos x\cos y = \sin x\sin y \Leftrightarrow \cos(x + y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + y = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ m nguyên.}$$

Kết hợp với $x - y = \frac{\pi}{6}$, ta được $x = \frac{\pi}{3} + \frac{m\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2}$, m nguyên. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện đã đặt ra.

*Cách 2.* Từ phương trình thứ hai ta suy ra $y = x - \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{\operatorname{tg}x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x}$$

Thay vào phương trình đầu ta được

$$\mathrm{tgx}\,\frac{\mathrm{tgx} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tgx}} = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}^2x - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{tgx} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tgx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{hoặc } \mathrm{tgx} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$y = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên; hoặc $\mathrm{tgx} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$x = -\dfrac{\pi}{6} + l\pi, \quad y = -\dfrac{\pi}{3} + l\pi.$

Kết hợp nghiệm suy ra phương trình có nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{m\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2}, \text{ m nguyên.}$$

*Ví dụ 33.* Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ x - y = 60^\circ; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

*Giải:* 1) *Cách 1.* $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}$ x

x $\cos\dfrac{x-y}{2} = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos 30^\circ = \sqrt{3}\cos\dfrac{x+y}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \pm 60^\circ + k360^\circ.$$

Kết hợp với $x - y = 60^\circ$ hay $\dfrac{x-y}{2} = 30^\circ$ ta được:

hoặc $x = 90^\circ + k360^\circ$,

$y = 30^o + k360^o$, k nguyên, hoặc $x = -30^o + k\,360^o$, $y = -90^o + k360^o$, k nguyên.

*Cách 2.* $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x - y = 60^o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = x - 60^o \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos(x - 60^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = x - 60^o \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = x - 60^o \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x = \cos(x - 30^o) = \dfrac{1}{2} \\ y = x - 60^o \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^0 = \pm 60^o + k360^o \\ y = x - 60^o \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{hoặc } x = 90^o + k360^o,\ y = 30^o \pm k360^o, \text{ k nguyên;} \\ \text{hoặc } x = -30^o + k360^o,\ y = -90^o + k360^o, \text{ k nguyên.} \end{cases}$$

2) *Cách 1.*

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1 + \cos 2y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \cos 2y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin(x + y)\sin(x - y) = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - y) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + n\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8}[1 + (-1)^{n+1}] + \frac{n\pi}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{8}[1 + (-1)^{n}] - \frac{n\pi}{2}$$, n nguyên.

*Cách 2.*

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2(\dfrac{\pi}{4} - x) = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1 + \cos(\dfrac{\pi}{2} - 2x)}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 1 \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} - x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ hoặc $x = k\pi$, $y = \dfrac{\pi}{4} - k\pi$, k nguyên (ứng với nghiệm ở cách 1 khi n = 2k); hoặc $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \dfrac{\pi}{2} - k\pi$, k nguyên (ứng với nghiệm ở cách 1 khi n lẻ).

*Ví dụ 34.* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2. \end{cases}$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $2 = \sin^2 x + \sin^2 y = (\sin x + \sin y)^2 - 2\sin x\sin y = 4 - 2\sin x\sin y \Rightarrow \sin x\sin y = 1$. Vậy sinx và siny là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ (kép)} \Rightarrow \sin x = \sin y \neq 1,$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \text{ k, m nguyên.}$$

*Cách 2.* Vì $\sin^2 x \leq 1$, $\sin^2 y \leq 1$, $\sin^2 x + \sin^2 y = 2 \Rightarrow \sin^2 = 1$, $\sin^2 y = 1$. Lại có $\sin x \leq 1$, $\sin y \leq 1$, $\sin x + \sin y = 2 \Rightarrow \sin x = \sin y = 1$ thỏa mãn phương trình thứ hai. Vậy hệ có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, k, m nguyên.

*Ví dụ 35.* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}) \\ \operatorname{tg}y + \operatorname{cotg}y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

*Giải:* Điều kiện $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\sin y \neq 0$, $\cos y \neq 0 \Rightarrow \sin 2x \neq 0$, $\sin 2y \neq 0 \Rightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$, $y \neq l\frac{\pi}{2}$, k, l nguyên.

Với các điều kiện trên ta có:

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}), \\ \dfrac{\sin y}{\cos y} + \dfrac{\cos y}{\sin y} = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin 2x} = \sin(y + \dfrac{\pi}{4}) \\ \dfrac{1}{\sin 2y} = \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \sin 2x \sin(y + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}[\cos(2x - y - \dfrac{\pi}{4}) - \\ - \cos(2x + y + \dfrac{\pi}{4})], \\ 1 = \sin 2y \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}[\cos(2y - x + \dfrac{\pi}{4}) \\ - \cos(2y + x - \dfrac{\pi}{4})] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \cos(2x - y - \dfrac{\pi}{4}) - \cos(2x + y + \dfrac{\pi}{4}) \\ 2 = \cos(2y - x + \dfrac{\pi}{4}) - \cos(2y + x - \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x - y - \dfrac{\pi}{4}) = 1 \\ \cos(2x + y + \dfrac{\pi}{4}) = -1 \\ \cos(2y - x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \\ \cos(2y + x - \dfrac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - \dfrac{\pi}{4} = 2k\pi \\ 2x - y + \dfrac{\pi}{4} = (2l + 1)\pi \\ 2y - x + \dfrac{\pi}{4} = 2m\pi \\ 2y + x - \dfrac{\pi}{4} = (2n + 1)\pi \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được $x = -\dfrac{\pi}{4} + (2l + 1)\pi$,

$y = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, l, k nguyên

*Nhận xét.* Từ hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin 2x} = \sin(y + \dfrac{\pi}{4}) \\ \dfrac{1}{\sin 2y} = \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$$

ta có vế trái theo giá trị tuyệt đối lớn hơn hay bằng 1, vế phải theo giá trị tuyệt đối bé hơn hay bằng 1, do vậy hệ phương trình có nghiệm khi 2 vế bằng nhau và bằng 1. Do chúng đồng dấu nên suy ra $\sin 2x = 1$, $\sin(y + \frac{\pi}{4}) = 1$ hoặc $\sin x = -1$, $\sin(y + \frac{\pi}{4}) = -1$. Giải các hệ này và thay vào một trong hai hệ $\sin 2y = 1$, $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ hoặc $\sin 2y = -1$, $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1$ để kiểm tra lại, ta cũng nhận được nghiệm như trên.

*Cách khác:* Vì $\mathrm{tg}\alpha$ và $\mathrm{cotg}\alpha$ đồng dấu, nên từ hệ đã cho ta được:

$$2|\sin(y + \frac{\pi}{4})| = |\mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}x| = |\mathrm{tg}x| + |\mathrm{cotg}x| \geq 2,$$

$$2|\sin(x - \frac{\pi}{4})| = |\mathrm{tg}y + \mathrm{cotg}y| = |\mathrm{tg}y| + |\mathrm{cotg}y| \geq 2,$$

(Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương).

Do vế trái $\leq 2$, nên suy ra $|\sin(y + \frac{\pi}{4})| = 1$, $|\mathrm{tg}x| = 1$ và $|\sin(x - \frac{\pi}{4})| = 1$, $|\mathrm{tg}y| = 1$. Do chúng đồng dấu nên suy ra: $\sin(y + \frac{\pi}{4}) = 1$, $\mathrm{tg}x = 1$ hay $\sin(y + \frac{\pi}{4}) = -1$, $\mathrm{tg}x = -1$. Giải các hệ này và thay vào

các hệ $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$, $tgy = 1$ hoặc $\sin(x + \frac{\pi}{4}) =$
$= -1$, $tgy = -1$.

*Ví dụ 36.* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} tgx + tgy = 1 - tgxtgy, \\ \sin 2y + \sqrt{3}\sin 2x = 2. \end{cases}$$

*Giải:* Điều kiện $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Với điều kiện ấy, vế phải của phương trình đầu khác không, vì nếu trái lại ta có $0 = 1 - tgxtgy = tgx + tgy \Rightarrow tgy = -tgx$. Thay vào vế phải của phương trình đầu ta có $0 = 1 + tg^2x \Rightarrow$ vô lý.

Chia 2 vế của phương trình đầu cho $1 - tgxtgy \neq 0$ ta được:

$$1 = \frac{tgx + tgy}{1 - tgxtgy} = tg(x + y) \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow$$

$$y = \frac{\pi}{4} + n\pi - x \text{ và } \sin 2y = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi - 2x) =$$

$= \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos 2x$. Vậy phương trình thứ hai trở thành $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x +$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1 \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + n\pi - \frac{\pi}{6} - k\pi = \frac{\pi}{12} + (n - k)\pi$$

k, n nguyên.

*Ví dụ 37.* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx - tgy = x - y, \\ tgx + tgy = 2, \end{cases} \qquad 0 < x, y < \frac{\pi}{2}.$$

*Giải: Cách 1.* Ta viết phương trình đầu dưới dạng

$$tgx - x = tgy - y.$$

Xét hàm $f(t) = tgt - t$. Ta có $f' = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1 > 0$,

với $t \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, do vậy hàm f(t) đồng biến thực sự và vì thế nếu $f(x) = f(y)$ thì $x = y$ và ngược lại. Vậy thì, từ $tgx - x = tgy - y$ suy ra $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $tgx = tgy = 1$ vì $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ $x = y = \dfrac{\pi}{4}$.

*Cách 2.* Do $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < tgx, 0 < tgy$. Không giảm tính tổng quát ta xem $x \geq y$ (nếu trái lại ta chuyển vế và đổi chữ), khi đó ta có $0 \leq x - y = tgx - tgy =$ $= tg(x - y)[1 + tgx.tgy] \leq tg(x - y)$ (vì khi $0 \leq \alpha <$ $< \dfrac{\pi}{2}$ thì $\sin\alpha \leq \alpha \leq tg\alpha$ ). Do $x - y \geq 0 \Rightarrow tg(x - y) \geq 0$ Nếu $tg(x - y) > 0$, ta sẽ có $0 < 1 + tgxtgy \leq 1 \Rightarrow$ $0 < tgxty \leq 0$ vô lý $\Rightarrow tg(x - y) = 0$ và vì $0 \leq x - y < \dfrac{\pi}{2}$ nên suy ra $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ và suy ra $tgx = tgy = 1$ (từ phương trình thứ hai). Vì $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$, nên suy ra $x = y = \dfrac{\pi}{4}$.

*Ví dụ 38.* Tìm tất cả các giá trị a để hệ:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = \cos x + x^2 + a \\ x^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất.

*Giải:* Vì hệ đối xứng theo x, có nghĩa là thay x bằng -x thì hệ không đổi. Do vậy nếu hệ có nghiệm $x = x_o$ thì cũng có nghiệm $x = -x_o$. Vậy muốn hệ có nghiệm duy nhất thì $x_o = -x_o$ hay $x_o = 0$. Thay x = 0 vào phương trình đầu ta được:

$$2^0 = 1 + a = 1 \Rightarrow a = 0.$$

Thay x = 0 vào phương trình thứ hai ta được 1 = 1 đúng. Vậy, nếu giá trị a thích hợp thì a = 0. Bây giờ ta chứng minh rằng với a = 0 hệ chỉ có nghiệm duy nhất x = 0. Thật vậy, $2^{|x|} \geq 1$, $x^2 \leq |x|$ và $\cos x \leq 1$, nên

$$2^{|x|} + |x| \geq 1 + x^2 \geq \cos x + x^2$$

$\Rightarrow$ phương trình $2^{|x|} + |x| = \cos x + x^2$ chỉ có nghiệm khi $2^{|x|} = 1$, $x^2 = |x|$, $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Vậy giá trị a = 0 và chỉ có giá trị a = 0 là thích hợp.

*Nhận xét.* Sau khi nhận xét để rút ra a = 0, có thể suy ra từ phương trình thứ hai $|x| = |\sin x|$ và thay vào phương trình đầu để biện luận $1 \leq 2^{|x|} = \cos x - |\sin x| + \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 2^{|x|} = 1 \Rightarrow x = 0$.

*Ví dụ 39.* Tìm tất cả các giá trị của m để hệ

$$\begin{cases} \sin^2 x + m\,\mathrm{tg}\,y = m \\ \mathrm{tg}^2 y + m \sin x = m \end{cases}$$

có nghiệm thỏa mãn điều kiện $0 < y < \dfrac{\pi}{4}$.

*Giải: Cách 1.* Nhận xét rằng khi m = 0, từ phương trình thứ hai ta có $\mathrm{tg}^2 y = 0 \Rightarrow y = n\pi$, không thỏa mãn điều kiện $0 < y < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow m \neq 0$. Từ phương trình thứ hai với $m \neq 0$ ta có $\sin x = 1 - \dfrac{1}{m}\mathrm{tg}^2 y \leq 1$.

Do $tg^2y > 0 \Rightarrow m > 0$. Đặt $\sin x = u$, $tgy = v$ ta có

$$\begin{cases} u^2 + mv = m \\ v^2 + mu = m, \quad m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 - m(u - v) = 0 \\ v^2 + mu = m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - v)(u + v - m) = 0 \\ v^2 + mu = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} u - v = 0, \\ v^2 + mu = m > 0 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} u + v - m = 0 \\ v^2 + mu = m > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

a) Thay $u = v$ vào phương trình thứ hai ta được:

$v^2 + mv = m > 0 \Leftrightarrow v^2 + mv - m = 0, m > 0 \Rightarrow$

$v = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4m}}{2}$. Vì $v = tgy$, $0 < y < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < v < 1$. Do $m > 0 \Rightarrow 0 < v = \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < -m + \sqrt{m^2 + 4m} < 2$.

$0 < -m + \sqrt{m^2 + 4m} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{m^2 + 4m} \Rightarrow$

$m < m^2 + 4m \Rightarrow m > 0$ đúng.

$-m + \sqrt{m^2 + 4m} < 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{m^2 + 4m} < 2 + m \Rightarrow$

$m + 4m < 4 + 4m + m^2 \Rightarrow 4 > 0$ đúng.

Vậy hệ a) suy ra $m > 0$ thích hợp.

Ta không cần giải hệ b), vì ở trên ta có điều kiện cần là $m > 0$, và giải hệ a) ta có điều kiện đủ là khi $m > 0$ thì hệ có nghiệm:

$$tgy = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \text{ thỏa mãn đầu bài.}$$

*Cách 2.* Sau khi có điều kiện cần $m > 0$ ta làm như sau:

Từ phương trình đầu ta có

$$tgy = 1 - \frac{1}{m}\sin^2 x.$$

Do $0 < tgy < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{m} \sin^2x < 1 \Rightarrow x \neq 0$ và $\sin^2x < m$. Vậy ta chỉ cần chọn $x > 0$, $\sin^2x < m$ thì sẽ có nghiệm y thỏa mãn $0 < y < \frac{\pi}{4}$.

*Ví dụ 40.* Tìm điều kiện cần và đủ đối với a, b để hệ phương trình sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ \sin y + \cos x = b. \end{cases}$$

*Giải: Cách 1. Cần.* Theo bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski, ta có

$$a^2 = (\sin x + \cos y)^2 \leq 2(\sin^2x + \cos^2y),$$

$$b^2 = (\sin y + \cos x)^2 \leq 2(\sin^2y + \cos^2x).$$

Cộng vế với vế ta được:

$$a^2 + b^2 \leq 2(\sin^2x + \cos^2x + \sin^2y + \cos^2y) = 4.$$

Dấu = đạt được khi và chỉ khi $\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos y}{1}$ và $\frac{\sin y}{1} = \frac{\cos x}{1}$. Vậy điều kiện cần là $a^2 + b^2 \leq 4$.

***Đủ.*** Giả sử ta có $a^2 + b^2 \leq 4$. Nếu a, b đồng dấu dương, ta sẽ lấy nghiệm trên góc phần tư thứ nhất, tức là $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$; nếu a, b đồng dấu âm ta lấy $\pi \leq x, y \leq \frac{3\pi}{2}$; nếu $a > 0$, $b < 0$ ta lấy $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$, nếu $a < 0$, $b > 0$ ta lấy $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Như vậy trong mọi trường hợp hai vế đều đồng dấu, nên ta có thể bình phương hai vế. Để xác định ta xem $a \geq 0$, $b \geq 0$ (các trường hợp khác xét tương tự), khi đó $0 \leq x,\ y \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow a^2 = \sin^2x + 2\sin x.\cos y + \cos^2y,$$
$$b^2 = \sin^2y + 2\sin y.\cos x + \cos^2x$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2 + 2\sin(x + y)$$
$$\Rightarrow \sin(x + y) = \frac{a^2 + b^2}{2} - 1 \leq 1$$

$\Rightarrow$ ta có thể chọn $x + y$, mà $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$.

Do $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$, $\sin y \geq 0$, $\cos y \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$\Rightarrow \cos y = a - \sin x \geq 0,$$
$$\sin y = b - \cos x \geq 0$$
$$\Rightarrow \cos^2y = a^2 - 2a\sin x + \sin^2x,$$
$$\sin^2y = b^2 - 2b\cos x + \cos^2x$$
$$\Rightarrow 1 = a^2 + b^2 - 2(a\sin x + b\cos x) + 1$$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2(a\sin x + b\cos x) = 2\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + t)$, trong đó $\cos t = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Từ đó $\sin(x + t) =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1.$

Do vậy ta tìm được $x + t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ và do đó tìm được $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ và sau đó tìm được $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

*Cách 2.* Đặt $u = \sin x$, $v = \sin y$, khi đó $\cos y = \pm\sqrt{1 - v^2}$, $\cos x = \pm\sqrt{1 - u^2}$, dấu trước căn phụ thuộc vào dấu của cosy và dấu của cosx. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u \pm \sqrt{1 - v^2} = a, \\ v \pm \sqrt{1 - u^2} = b. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpski, ta có:

*cần*: $a^2 = (u \pm \sqrt{1 - v^2})^2 \leq 2\,(u^2 + 1 - v^2)$,

$b^2 = (v \pm \sqrt{1 - u^2})^2 \leq 2\,(v^2 + 1 - u^2)$.

Cộng vế với vế ta được: $a^2 + b^2 \leq 4$.

*Đủ:* Phụ thuộc vào dấu của a và b ta chọn các nghiệm u, v và dấu trước căn để 2 vế đồng dấu như ở cách 1. Giả sử $a \geq 0$, $b \geq 0$ (các trường hợp còn lại độc giả tự xét lấy), ta lấy $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow u \geq 0$, $v \geq 0$ và trước căn lấy dấu +.

Như vậy, ta có hệ

$$\begin{cases} u + \sqrt{1 - v^2} = a \\ v + \sqrt{1 - u^2} = b. \end{cases}$$

Với $a^2 + b^2 \leq 4$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Độc giả tự chứng minh hệ này có nghiệm.

## BÀI TẬP CHƯƠNG II

**1.** Giải các phương trình:

1) $\sin^2 x = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$;

2) $\cos^2 x = a$ với $a = 0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

**2.** Giải các phương trình:

1) $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \cos^3 4x$;

2) $\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = a$, với $a = -\dfrac{3}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{8}, \dfrac{3}{8}$.

**3.** Cho phương trình

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x + \sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x = m$$

1) Giải phương trình khi m = 1 và m = 2.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm ?

**4.** Giải các phương trình:

1) $\cos x + 2\cos 2x = \frac{17}{6} + \cos 3x$;

2) $3\sin 2x + \cos x = \frac{11}{3} - \cos 3x$;

3) $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x$.

**5.** Giải các phương trình :

1) $\text{tg}x + \sqrt{2}\,\text{cotg}x = 1 + \sqrt{2}$ ;

2) $\sqrt{3}\,\text{tg}x + \text{cotg}x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ .

**6.** Giải các phương trình:

1) $2\text{tg}^2x + \sqrt{2}\cos^2 x = (1 + 2\sqrt{2})\sin x$;

2) $$\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} - \left(1 + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) \times$$
$$\times \frac{1-\text{tg}x}{1+\text{tg}x} + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 0.$$

**7.** Giải các phương trình :

1) $4\cos^2 x + \sin x\cos x + 3\sin^2 x = 3$ ;

2) $\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 5$.

**8.** Cho phương trình

$$(1-\sqrt{2})\sin x\cos x + m(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} = 0.$$

1) Giải phương trình khi $m = -\frac{1}{2}$.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm?

**9**. Cho phương trình $\sin 2x(\sin x - \cos x) = m$.

1) Chứng minh rằng, nếu $|m| > \sqrt{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

2) Giải phương trình khi $|m| = \sqrt{2}$.

**10**. Cho phương trình

$$5\sin 2x - 16(\cos x + \sin x) + m = 0.$$

1) Giải phương trình khi $m = 16$.

2) Với m nào thì phương trình vô nghiệm?

**11.** Cho phương trình $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\text{cotg}(x + \frac{\pi}{3})\text{cotg}(\frac{\pi}{6} - x)} = m.$

1) Giải phương trình khi $m = \dfrac{7}{8}$.

2) Với m nào thì phương trình vô nghiệm ?

**12.** Cho phương trình $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin x.\cos x} = m.\text{cotg}2x$

1) Giải phương trình khi $m = -2$.

2) Với m nào thì phương trình vô nghiệm ?

**13**. Giải các phương trình:

1) $\text{cotg}x - 2\sin x = 1$; 2) $\sin x + \text{cotg}\dfrac{x}{2} = 2$;

3) $\cos 2x + \text{tg}x = 1$.

**14.** Giải phương trình :

1) $9\cos^2 x + \dfrac{4}{\cos^2 x} = m(3\cos x - \dfrac{2}{\cos x}) + 15$, với $m = -2$.

Với m nào thì phương trình vô nghiệm?

2) $\sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^2 x} = m(\sin x + \dfrac{2}{\sin x}) - 2$, với $m = -1$

Với m nào thì phương trình vô nghiệm?

**15.** Cho phương trình

$$\frac{3}{\sin^2 x} + 3tg^2x + m(tgx + cotgx) - 1 = 0$$

1) Giải phương trình khi m = 4.

2) Với m nào thì phương trình có nghiệm ?

**16.** Giải các phương trình :

1) $\sin^3(x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin x$ ;

2) $\sin(2x - \frac{7\pi}{2}) + \sin(\frac{3\pi}{2} - 8x) + \cos 6x = 1$.

**17.** Giải các phương trình :

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{a}{2}$ , với a = 1 và a = 3.

2) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}$ (Đề dự trữ A/1977);

3) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$;

4) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = \frac{5}{2}$ .

**18.** Giải các phương trình

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = a$, với a = 1, a = 2 và a = 0;

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = a$, với $a = \frac{3}{2}$ và a = 3;

3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

4) $\sin^2 x + \sin 3x = m\cos^2 2x$, với m = 2 , m = 3;

Với m nào thì phương trình 4) có nghiệm?

**19.** 1) Tìm tất cả các giá trị của a để mọi nghiệm của phương trình: $\sin 3x = a\sin x + (4 - 2|a|)\sin^2 x$ là nghiệm của phương trình:

$$\sin 3x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x\cos 2x$$

và ngược lại.

2) Tìm tất cả các giá trị của a để hai phương trình sau đây tương đương:

$$4\cos^2x - \cos3x = a\cos x - |a - 4| (1 + \cos2x),$$
$$2\cos x\cos2x = 1 + \cos2x + \cos3x.$$

**20.** Giải các phương trình:

1) $2\sin^3x + \cos^22x = \sin x$;

2) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin^3x + \cos^3x$;

3) $tgx - \sin x = 1 - tgx.\sin x$;

4) $2\sin^3x = \cos x$ ;

5) $6tg^2x - 2\cos^2x = \cos2x$.

**21.** Giải các phương trình:

1) $\sin x.\sin2x.\cos kx = 1$, với $k = 1$; Với k nào thì phương trình có nghiệm ?

2) $\cos x.\sin2x.\cos4x = m$, với $m = 1$; Với m nào thì phương trình vô nghiệm?

**22.** Giải các phương trình:

1) $\sin^2x + \sin^2y = \sin x\sin y + \sin x + \sin y - 1$;

2) $9tg^2x + 16\cos^2x = 24\cos^2y$.

**23.** 1) Cho phương trình $\sin^4x + (1 + \sin x)^4 = m$.

1) Giải phương trình khi $m = 17$.

b) Với m nào thì phương trình vô nghiệm ?

2) Cho phương trình $\cos^4x + (\cos x - 1)^4 = m$.

a) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$ .

b) Với m nào thì phương trình có nghiệm?

**24.** Cho phương trình $\sin^4x + \cos^4x + m\sin2x = 1$.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Với m nào thì phương trình có nghiệm?

**25**. Giải các phương trình:

1) $\sin^3x + \cos^7x = 1$;

2) $\sin^3x + \cos^7x = \dfrac{1}{\sin^6x + \cos^6x}$.

**26.** Giải các phương trình:

1) $\cos x\sin2x\cos3x = \dfrac{4}{5}$;

2) $\cos x\sin2x\cos3x = \dfrac{1}{4}\sin4x$ (Đề thi Đại học A - B - D - Cao đẳng năm 1987).

**27.** Tìm tất cả các cặp số (a,b) sao cho $\forall x$ ta đều có

1) $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$;

2) $a.e^x + b = e^{ax + b}$; $e = 2,718281828459045...$

3) $a\ln x + b = \ln(ax + b)$. $\ln x = \log_e x$.

**28**. Giải các phương trình:

1) $tg^4x + tg^4y + 2cotg^2x.cotg^2y = 3 + \sin^2(x + y)$;

2) $tg^2x + 2tgx(\sin y + \cos y) + 2 = 0$;

3) $tg^2\pi(x + y) + cotg^2\pi(x + y) = \sqrt{\dfrac{2x}{1 + x^2}} + 1$;

4) $\log_3|\pi x| + \log_{|\pi x|}3 = \dfrac{2}{\sin^2(x + y) - 2\sin(x + y) + 2}$;

5) $\cos^2x + \cos x\cos y + \cos^2y = 0$;

6) $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos2y$.

**29.** Giải các phương trình :

1) $\sin^2x + \dfrac{1}{4}\sin^23x = \sin x\sin3x$;

2) $\sin^24x + \cos^2x = 2\sin4x\cos^4x$;

3) $\cos^23x + \dfrac{1}{4}\cos^2x = \cos3x\cos^4x$

4) $\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x$.

**30.** Chứng minh rằng, nếu a là số hữu tỷ khác không, còn b là số vô tỷ, thì phương trình $1 + \sin^2 ax = \cos bx$ có một nghiệm duy nhất.

**31.** Giải các phương trình:

1) $\dfrac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = y^2 - 6y + 10;$

2) $2y - y^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 + tg^2 x}{tgx}$

**32.** Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \sin x.\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tgxtgy = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{3}{4} \\ x - y = 30^\circ. \end{cases}$

**33**. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}, \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$

**34**. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

**35.** Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \text{tg}x + \text{cotg}x = 2\cos\left(y - \dfrac{\pi}{3}\right). \\ \text{tg}y + \text{cotg}y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \text{tg}^2x + \text{cotg}^2x = 2\sin^2y, \\ \sin^2y + \cos^2z = 1. \end{cases}$

**36**. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = 1 - \text{tg}x\text{tg}y, \\ \sin2y + \sqrt{3}\sin2x = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \text{tg}x - \text{tg}y = 1 + \text{tg}x\text{tg}y, \\ \cos2x + \sqrt{3}\cos2y = 1. \end{cases}$

**37**. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \text{tg}x - \text{tg}y = x - y, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \end{cases}$ $-\dfrac{\pi}{2} < x, y < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\begin{cases} \sin x - \sin y = x - y, \\ \text{tg}x + \text{tg}y = 2, \end{cases}$ $-\dfrac{\pi}{2} < x, y < \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\begin{cases} \cos x - \cos y = x - y, \\ \sin x + \sin y = 1, \end{cases}$ $-\dfrac{\pi}{2} < x, y < \dfrac{\pi}{2}$.

**38**. 1) Tìm tất cả các giá trị của tham số $\alpha$ để các phương trình sau đây có một nghiệm duy nhất:

a) $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 36 = 0$;

b) $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{1}{\cos\alpha} + 2\sqrt{2} = 0$;

c) $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{3\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 12\sqrt{3} = 0$;

d) $x^2 - \dfrac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}} - \dfrac{1}{\cos\alpha} - 2\sqrt{2} = 0$.

2) Tìm tất cả các giá trị a để hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \sin x = a, \\ \dfrac{y}{x} + \sin y = a \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất.

**39**. 1) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin^2 x - m\,\mathrm{tg}y = \dfrac{8 - 3m}{2}, \\ \mathrm{tg}^2 x + m\sin x = \dfrac{8 - 3m}{2}. \end{cases}$$

a) Giải hệ khi $m = 3 - \sqrt{2}$.

b) Với m nào thì hệ có nghiệm, thỏa mãn điều kiện

$$0 < y < \frac{\pi}{4}\ ?$$

2) Với các giá trị a, b, c nào thì hệ sau đây có ít nhất một nghiệm?

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a, \\ \cos x + \cos y = 2b, \\ \mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y = c. \end{cases}$$

**40**. Tìm điều kiện cần và đủ đối với các tham số a, b để các hệ sau có nghiệm:

1) $\begin{cases} \sin 2x\cos y = a^2 + 1, \\ \cos 2x \sin y = 2a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \mathrm{cotg}x + \mathrm{tg}y = 2, \\ \mathrm{tg}x + \mathrm{cotg}y = a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin\alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos\alpha; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2\sin x + 3\sin y = a, \\ 2\cos x - 3\cos y = b; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sin x\,.\,\sin y = a, \\ \cos x\,.\,\cos y = b. \end{cases}$

**41**. Giải các phương trình

1) $\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} = \sin 3x$;

2) $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x}$.

## ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN BÀI TẬP

### Chương II

**1.** 1) $x = \pm \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, k nguyên.

2) $a = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên.

$a = \dfrac{1}{4}$, $x = \pm \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, k nguyên.

$a = \dfrac{1}{2}$, $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$, k nguyên.

$a = \dfrac{3}{4}$, $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

$a = 1$, $x = k\pi$, k nguyên; $a = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

$x = \pm \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$, k nguyên

**2.** 1) $x = \dfrac{k\pi}{3}$, k nguyên.

2) $a = -\dfrac{3}{4}$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, k nguyên;

$a = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + n\dfrac{\pi}{4}$, n nguyên;

$a = \dfrac{3}{8}$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{24} + n\dfrac{\pi}{3}$, n nguyên;

**3.** 1) $m = 1$, $x = \dfrac{\pi}{12} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên;

$m = 2,\quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, k nguyên. 2) $-2 \le m \le 2$.

**4.** 1) ; 2) Vô nghiệm. Chỉ dẫn: 1) $\sqrt{2} > \frac{17}{12}$.

2) $\sqrt{13} < \frac{11}{3}$ ; 3) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

**5.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên; $x = \alpha + n\pi$, n nguyên, $tg\alpha = \sqrt{2}$.

2) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên; $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, k nguyên.

**6.** 1) $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên; $x = (-1)^k\alpha + k\pi$,

k nguyên, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mà $\sin\alpha = -1 + \sqrt{2}$.

2) $x = k\pi$, k nguyên; $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, n nguyên.

**7.** 1) $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, n nguyên.

2) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

**8.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = (2k + 1)\pi$ ; $x = \frac{3\pi}{\pi} + 2n\pi$, k, n nguyên.

2) $m \ge \frac{1}{2}$ hoặc $m \le 0$.

**9.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

**10.** 1) $x = 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

2) $m < -16\sqrt{2} - 5$ hoặc $m > 16\sqrt{2} - 5$.

**11.** 1) $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, k nguyên. 2) $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

**12.** 1) $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, k nguyên. 2) $-2 < m < 2$.

**13.** 1) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \alpha + k\pi$, k nguyên, $tg\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$.

2) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

3) $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

**14.** 1) $x = 2k\pi$, k nguyên; $x = \pm\alpha + 2k\pi$, k nguyên.

$$\cos\alpha = \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}$$

$\forall m$ phương trình đều có nghiệm.

2) Vô nghiệm. Chỉ dẫn: chú ý $\left|\sin x + \frac{2}{\sin x}\right| \geq 2\sqrt{2}$.

$-\frac{3}{2}\sqrt{2} < m < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

**15.** 1) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên. 2) $|m| \geq 2$.

**16.** 1) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên; $x = \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{2}$,

n nguyên.

2) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$, $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{4}$, k, n nguyên.

**17.** 1) Với $a = 1$, $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$, k nguyên, $0 \leq \alpha \leq \pi$,

$$\cos\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.$$

Với $a = 3$, $x = k\pi$, k nguyên; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\pi$, n nguyên.

2) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$, k nguyên; $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + n\pi$, n nguyên.

3) $x = (2l + 1)\dfrac{\pi}{4}$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{6}$, k, l nguyên.

4) $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{8}$, $x = \pm\dfrac{\alpha}{8} + k\pi$, k nguyên, $0 \le \alpha \le \pi$,

$\cos\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

**18.** 1) Với $a = 1$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + n\pi$, k, n nguyên.

Với $a = 2$, $x = k\pi$, k nguyên. Với $a = 0$: vô nghiệm.

2) Với $a = \dfrac{3}{2}$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{8}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, k nguyên.

Với $a = 3$, $x = k\pi$, k nguyên.

3) $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{4}$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{10}$, k nguyên.

4) $m = 2$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $x = (2l + 1)\dfrac{\pi}{8}$, k, l nguyên.

$m = 3$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\alpha}{2} + l\pi$, k, l nguyên,

$\cos\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Với $m \ge 0$ thì phương trình có nghiệm.

**19.** 1) Hoặc $0 \le a \le 1$, hoặc $a = 3$, hoặc $a = 4$, hoặc $a > 5$.

2) Hoặc $a = 4$, hoặc $a > 5$.

**20.** 1) $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{4}$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$, $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + n\pi$,
k, l, n nguyên.

2) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên. 3) $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi$,

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, l, n nguyên. 4) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \alpha + l\pi$, $tg\alpha = \frac{1}{2}$, n, l, k nguyên.

5) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

**21.** 1) Vô nghiệm; ∀k phương trình đều vô nghiệm.

2) Vô nghiệm.

**22.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, k, l nguyên. Chỉ dẫn: Đưa phương trình về dạng

$$(\sin x - 1)^2 + (\sin y - 1)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 0.$$

2) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $y = l\pi$, k, l nguyên.

**23.** 1) a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên; b) $m < \frac{1}{8}$ hoặc $m > 17$.

2) a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên; b) $\frac{1}{8} \le m \le 17$.

**24.** 1) $x = \frac{k\pi}{2}$, k nguyên. 2) ∀m phương trình đều có nghiệm.

**25.** 1) $x = k\pi$, $x = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, k, m nguyên.

2) $x = 2l\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, l, k nguyên.

**26.** 1) Vô nghiệm. 2) $x = k\frac{\pi}{2}$, $x = (2l + 1)\frac{\pi}{8}$, k, l nguyên.

**27.** 1) (0,0), (1,0); 2) (1, 0); 3) (1, 0).

**28.** 1) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, $y = (4m - 2k + 1)\frac{\pi}{4}$, k, m nguyên.

2) $x = -\alpha + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$; $x = \alpha + k\pi$,

$y = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$, k, n nguyên. $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ mà $tg\alpha = \sqrt{2}$.

Chỉ dẫn: Đưa phương trình về dạng

$$[tgx + (\sin y + \cos y)]^2 + (1 - \sin 2y) = 0.$$

3) $x = 1$, $y = \frac{2k - 3}{4}$;

4) $x = \frac{3}{\pi}$, $y = (4k + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi}$, k nguyên;

$x = -\frac{3}{\pi}$, $y = (4k + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{3}{\pi}$.

5) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, n, k nguyên.

6) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y = (2n + 1)\pi$; $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$,

$y = 2n\pi$, k, n nguyên.

Chỉ dẫn: Thay $\cos y = z$ và dẫn phương trình về dạng

$z^2 - 2z\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$ hay

$[z - \sin(x + \frac{\pi}{4})]^2 + [1 - \sin^2(x + \frac{\pi}{4})] = 0$.

**29.** 1) $x = k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$, k, n nguyên.

2) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n nguyên. 3) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n nguyên.

4) Vô nghiệm.

**30.** Hiển nhiên phương trình có nghiệm $x = 0$. Vì $1 + \sin^2 ax \geq 1$, $\cos bx \leq 1$, nên phương trình chỉ có nghiệm khi 2 vế bằng nhau và bằng 1, tức là $\cos^2 ax = 1$, $\cos bx = 1 \Rightarrow \sin ax = 0$, $\cos bx = 1$.

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow ax = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{a}$, $k \neq 0$, $bx = 2l\pi \Rightarrow$

$x = \frac{2l\pi}{b} \Rightarrow \frac{k}{a} = \frac{2l}{b}$, k, $l \neq 0$, nguyên. Do a hữu tỷ.

b vô tỷ $\Rightarrow$ mâu thuẫn.

**31.** 1) $x = k\pi$, $y = 3$, k nguyên. 2) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = 1$, k nguyên

**32.** 1) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} - k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$,

$y = \frac{\pi}{3} - k\pi$, k nguyên.

2) $x = \frac{5\pi}{24} + n\pi$, $y = \frac{\pi}{24} - n\pi$; $x = \frac{\pi}{24} - m\pi$,

$y = \frac{5\pi}{24} - m\pi$, n, m nguyên.

3) Vô nghiệm. 4) $x = 60^o + k180^o$, $y = 30^o + k180^o$, k nguyên.

**33.** 1) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$,

$y = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, k, l nguyên. 2) $x = 30^o + k360^o$, $y = 60^o - k360^o$;

$x = -30^o + k360^o$, $y = 120^o - k360^o$, k nguyên

**34.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$y = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$;

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,

$y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, k, n nguyên.

2) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} - k\pi$; $z = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} - k\pi$, k nguyên.

**35.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{3} + n\pi$, k, n nguyên.

2) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$; $z = \frac{\pi}{2} + m\pi$, k, l, m nguyên.

**36.** 1) $x = -\dfrac{\pi}{6} + m\pi,\quad y = \dfrac{\pi}{12} + (m+n)\pi,$ m, n nguyên.

2) $x = (k+n)\pi,\quad y = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\qquad x = \dfrac{\pi}{3} + (k+n)\pi,$

$y = \dfrac{\pi}{12} + k\pi,$ k, n nguyên.

**37.** 1) $x = y = \dfrac{\pi}{4}$. 2) $x = y = \dfrac{\pi}{4}$. 3) $x = y = \dfrac{\pi}{6}$

**38.** 1) a) $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ \alpha = \dfrac{\pi}{18} + 2m\pi.$

$\alpha = \dfrac{13\pi}{18} + 2k\pi,$ n, m, k nguyên.

b) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\quad \alpha = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,$ n, k nhuyên.

c) $\alpha = \dfrac{\pi}{9} + 2k\pi,\ \alpha = \dfrac{7\pi}{9} + 2m\pi,\ \alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi.$

k, m, n nguyên.

d) $\alpha = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi,$ k nguyên.

2) Không có giá trị a nào.

**39.** 1) a) $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + n\pi,\quad y = \alpha + k\pi,$ n, k nguyên

$\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) Chỉ dẫn: Đặt $u = \sin x$, $v = \operatorname{tg} y$.

2) Hoặc $0 < a^2 + b^2 \le 1$ và $c = \dfrac{(a^2+b^2)^2 - b^2}{(a^2+b^2) - a^2}$ ; hoặc $a = b = 0$,

$c \ge 0$ tùy ý.

**40.** 1) $a = 0$; 2) $a < 0$ hoặc $a \ge 2$; 3) $a^2 + b^2 \le 4$;

4) $\forall\alpha$ ; 5) $a^2 + b^2 \le 25$ ; 6) $|a| + |b| \le 1$.

**41.** 1) Vô nghiệm. Chỉ dẫn: Vế trái $\ge 1$, vế phải $\le 1$.

# CHƯƠNG III

## BẤT PHƯƠNG TRÌNH
## HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Cũng như phương trình lượng giác, các bất phương trình và hệ bất phương trình lượng giác chỉ giải được khi chúng được dẫn về các bất phương trình cơ bản bằng các phép biến đổi tương đương.

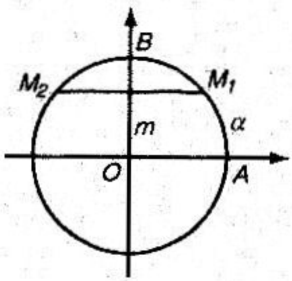
Các bất phương trình lượng giác cơ bản là:

1) $\sin x > m$, $\sin x \geq m$, $\sin x < m$, $\sin x \leq m$;

2) $\cos x > m$, $\cos x \geq m$, $\cos x < m$, $\cos \leq m$;

3) $\operatorname{tg}x > m$, $\operatorname{tg}x \geq m$, $\operatorname{tg}x < m$, $\operatorname{tg}x \leq m$

Bất phương trình đối với cotgx được dẫn về bất phương trình đối với tgx vì $\operatorname{cotg}x = \dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$. Giải bất phương trình lượng giác cơ bản là viết các cung thỏa mãn các bất đẳng thức dã cho. Về nguyên tắc, các phương trình lượng giác giải như nhau đối với tất cả các dấu, nên để đỡ viết, ta chỉ xét một dấu.




*Hình 41*

1) $\sin x > m$.

a) $m < -1$, nghiệm $\forall x$.

b) $-1 \leq m < 1$, đặt $m = \sin\alpha$.

Nghiệm của bất phương trình là cung $\overset{\frown}{M_1BM_2}$. Do vậy

$\alpha + 2k\pi < x < (\pi - \alpha) + 2k\pi$, k nguyên.

c) $m \geq 1$, bất phương trình vô nghiệm.

2) $\cos x \le m$.

a) $m > 1$, nghiệm $\forall x$.

b) $-1 \le m \le 1$, đặt $m = \cos\alpha$.

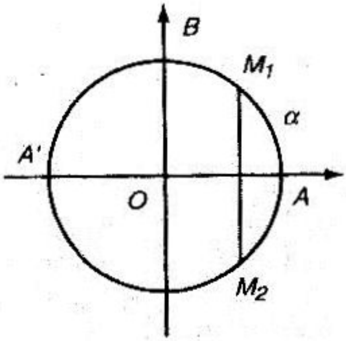
Nghiệm của bất phương trình là cung $M_1A'M_2$. Do vậy:

$\alpha + 2k\pi \le x \le (2\pi - \alpha) + 2k\pi$, k nguyên.

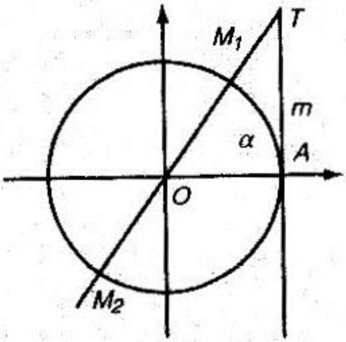
c) $m < -1$, bất phương trình vô nghiệm.

3) $\operatorname{tg}x \ge n = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$

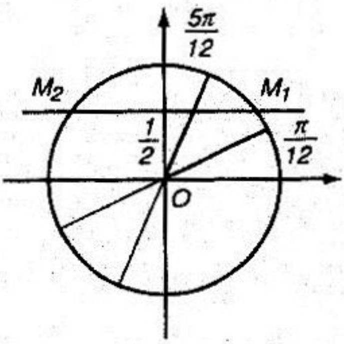
$$\alpha + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ k nguyên}$$




*Hình 42*




*Hình 43*




*Hình 44*

*Ví dụ 1.* Giải bất phương trình $\sin 2x > \frac{1}{2}$.

*Giải: Cách 1.* Vì $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$,

nên $\sin 2x > \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi,$$

k nguyên.

*Cách 2.* Vì $\sin 2x = 2\sin x\cos x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x\cos x > \frac{1}{4}$

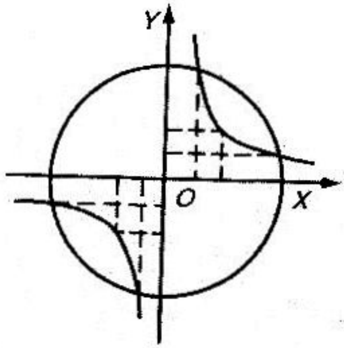
Đặt $\cos x = X$, $\sin x = Y$, ta có hệ:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1, \\ XY > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Vì $X^2 + Y^2 = 1$ là vòng tròn đơn vị, còn $XY > \frac{1}{4}$ là phần mặt phẳng chia bởi hypecbôn $Y = \frac{1}{4X}$ ở phần không chứa gốc tọa độ, nên nghiệm là 2 cung tròn nằm trong phần mặt phẳng này. Ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ XY = \frac{1}{4} \end{cases}$$

để tìm các giao điểm. Vì 2 cung đối xứng qua tâm nên ta tìm nghiệm $X > 0$, $Y > 0$ là đủ.



*Hình 45*

Ta có $X^2 + Y^2 = 1 = (X + Y)^2 - 2XY = (X + Y)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$(X + Y)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow X + Y = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (lấy nghiệm dương) $\Rightarrow$

X và Y là nghiệm của phương trình $t^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}t + \frac{1}{4} = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{12}, \quad Y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{5\pi}{12} \text{ và}$$

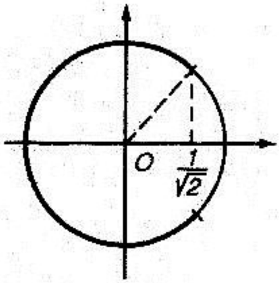
ta có nghiệm $\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$, k nguyên.

*Ví dụ 2.* (Đề dự trữ B/ 1972). Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Giải: Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n nguyên.

Với điều kiện ấy ta có




Hình 46

$$\sqrt{2} \leq \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - \sqrt{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}.\cos x}{\cos x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \cos x \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

k nguyên và

$$-\frac{\pi}{2} + 2m\pi < x \leq -\frac{\pi}{4} + 2m\pi,$$

m nguyên.

*Nhận xét.* Ta cũng có thể giải bằng hình học như trong ví dụ 1.

*Ví dụ 3.* Giải bất phương trình $\sin^2 x \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

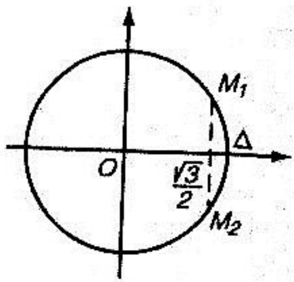
*Giải: Cách 1.* $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq$$

$$\leq 2x \leq (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi,$$

k nguyên.

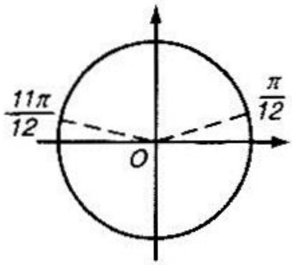



Hình 47

*Cách 2.* $\sin^2 x \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$

$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sin\frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq$

$\leq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ hoặc $-\frac{11\pi}{12} + 2l\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2l\pi.$




Hình 48

Kết hợp nghiệm ta được

$$\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi,$$

k nguyên.

*Ví dụ 4.* Giải bất phương trình:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > 0$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $0 < \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} =$

$$= \frac{\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4})}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin(x - \frac{\pi}{4})} =$$

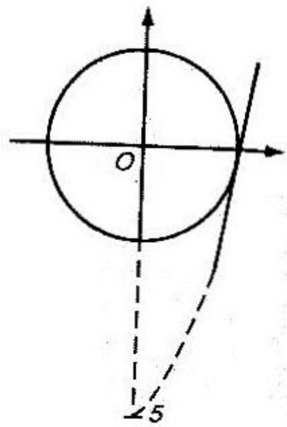
$$= \cot g(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{tg(x - \frac{\pi}{4})} \Rightarrow tg(x - \frac{\pi}{4}) > 0$$

$\Rightarrow k\pi < x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}$ hay $\frac{\pi}{4} + k\pi < x <$

$< \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* Nếu $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$, m nguyên thì $\sin x = \pm 1 \Rightarrow$ bất phương trình trở thành $1 > 0$ đúng. Vậy $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ là nghiệm. Nếu $\cos x \neq 0$, chia tử và mẫu cho $\cos x \neq 0$ ta được $\frac{\operatorname{tg}x + 1}{\operatorname{tg}x - 1} > 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x < -1$ hoặc $\operatorname{tg}x > 1$




*Hình 49*

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Gộp nghiệm ta được $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

*Ví dụ 5.* Giải bất phương trình $\frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 3\cos x - 4} < 0$.

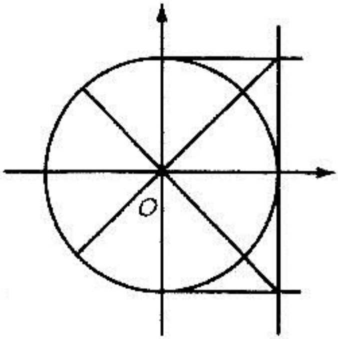
*Giải:* Nhận xét rằng $\sin 2x - 2 < 0 \; \forall x \Rightarrow$

$\cos 2x + 3\cos x - 4 > 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 5 > 0 \Rightarrow$

$(\cos x - 1)(2\cos x + 5) > 0$. Vì $2\cos x + 5 > 0 \;\; \forall x \Rightarrow$

$\cos x - 1 > 0 \Rightarrow \cos x > 1 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

*Nhận xét.* Có thể xét parapôn $y = 2t^2 + 3t - 5 > 0$, $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$ và đường tròn đơn vị $y^2 + t^2 = 1$, $y > 0$ với các điểm ở ngoài parabôn. Vì parabôn và vòng tròn đơn vị tiếp xúc trong tại điểm $t = 1$, $y = 0$ nên bất phương trình $2\cos^2 x + 3\cos x - 5 > 0$ vô nghiệm.



*Hình 50*

*Ví dụ 6.* Giải bất phương trình:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x > 1.$$

*Giải: Cách 1.* Chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên

*Cách 2.* Nếu $\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = -1$,

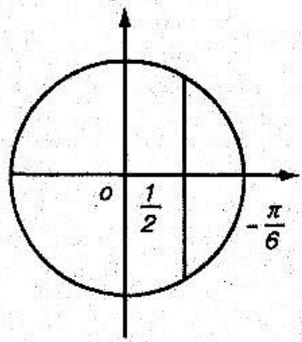
$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$, nên bất phương trình trở thành $-\sqrt{3} > 1$ vô lý. Vậy $\cos\frac{x}{2} = 0$ không phải là nghiệm.

Đổi biến $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \Rightarrow$

$$\sqrt{3}\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$(1 + \sqrt{3})t^2 - 2t + (1 - \sqrt{3}) < 0.$$

Tam thức bậc 2 ở vế trái có 2 nghiệm t = 1 (vì a + b + c = 0)




*Hình 51*

và $t = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} < 0 \Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình là

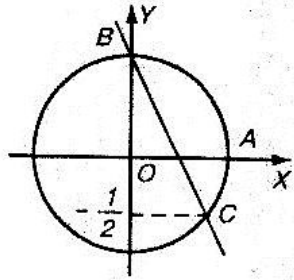
$$\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} < t < 1 \Leftrightarrow -\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{12} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x <$$

$$< \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ k nguyên.}$$

*Cách 3.* Đặt cosx = X, sinx = Y thì bất phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} \sqrt{3}X + Y < 1 \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases}$

Nghiệm của hệ này là cung tròn $X^2 + Y^2 = 1$ nằm ở phía nửa mặt phẳng $\sqrt{3}X + Y > 1$ (phần không chứa gốc toạ độ), tức là cung $\overset{\frown}{CAB}$. Tọa độ điểm C là nghiệm khác không của hệ




*Hình 52*

$$\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1 - \sqrt{3}X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} Y^2 = 1 - 2\sqrt{3}X + 3X^2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 4X^2 - 2\sqrt{3}X = 0$$

$\Rightarrow X = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $Y = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} . \sqrt{3} = -\dfrac{1}{2}$, tức là $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}$. Vậy nghiệm của bất phương trình

đã cho là $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên

*Ví dụ 7.* Giải bất phương trình

$$\cos^3x\cos3x - \sin^3x\sin3x > \frac{5}{8}.$$

*Giải: Cách 1.* Ta có $\frac{5}{8} < \cos^3x\cos3x - \sin^3x\sin3x =$

$= \cos^2x.\cos x\cos3x - \sin^2x.\ \sin x\sin3x =$

$= (1 - \sin^2x)\cos x\cos3x - (1 - \cos^2x)\sin x\sin3x =$

$= \cos x\cos3x - \sin x\sin3x - \sin x\cos x(\sin x\cos3x - \cos x\sin3x)$

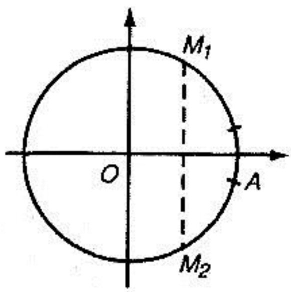
$= \cos4x + \frac{1}{2}\sin^22x = \cos4x + \frac{1}{4}(1 - \cos4x)$

$= \frac{3}{4}\cos4x + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos4x > \frac{1}{2} \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 4x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} <$

$< x < \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, k nguyên

*Cách 2.*




*Hình 53*

Vì $\sin3x = -4\sin^3x + 3\sin x$,

$\cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x \Rightarrow$

$$\sin^3x = \frac{3\sin x - \sin3x}{4}$$

$$\cos^3x = \frac{3\cos x - \cos3x}{4}$$

Thay vào bất phương trình đã cho ta được

$\frac{5}{8} < \frac{3\cos x + \cos3x}{4}.\cos3x - \frac{3\sin x - \sin3x}{4}.\sin3x =$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos4x \Rightarrow \cos4x > \frac{1}{2}$ và quay về cách 1.

*Nhận xét: 1)* Cũng có thể biến đổi bất phương trình như sau:

$\frac{5}{8} < \cos^2x(\cos x\cos 3x) - \sin^2x(\sin x\sin 3x) = \frac{1}{2}\cos^2x \times$

$\times (\cos 2x + \cos 4x) - \frac{1}{2}\sin^2x(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2}\cos 2x \times$

$\times (\cos^2x - \sin^2x) + \frac{1}{2}\cos 4x(\cos^2x + \sin^2x) = \frac{1}{2}\cos^2 2x +$

$+ \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1 + \cos 4x}{4} + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 4x$

$\Rightarrow \cos 4x > \frac{1}{2}$.

2) Cũng có thể làm như sau:

$\frac{5}{8} < \cos^3x(4\cos^3x - 3\cos x) + \sin^3x(4\sin^3x - 3\sin x) =$

$= 4(\cos^6x + \sin^6x) - 3(\cos^4x + \sin^4x) = (1 + 3\cos^2 2x) -$

$- \frac{3}{2}(1 + \cos^2 2x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 4x$

$\Rightarrow \cos 4x > \frac{1}{2}$

*Ví dụ 8.* Giải bất phương trình

$$\sqrt{3}\,\text{tg}x + \text{cotg}x \geq \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

*Giải:* Ta có $\sqrt{3}\,\text{tg}x + \text{cotg}x \geq \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$.

Đặt tgx = y, ta được $\sqrt{3}y + \frac{1}{y} \geq \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{3}y^2 - (\sqrt{3} + 1)y + 1}{y} \geq 0$. Vì $a + b + c = 0 \Rightarrow$ tam thức ở tử số của vế trái có các nghiệm $y = 1$ và $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bất phương trình có các nghiệm

$$0 < y \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y \ge 1.$$

Với $y = \text{tg}x \ge 1$ ta có $\text{tg}x \ge \text{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi \le$ $\le x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên.

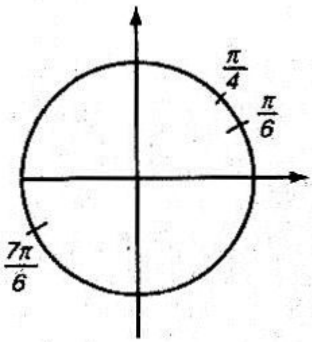
Với $0 < y = \text{tg}x \le \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$n\pi < x \le \frac{\pi}{6} + n\pi, \text{ n nguyên.}$$

*Chú ý:* Cần phải loại giá trị x mà $\sin x\cos x = 0$, tức là $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$, k tùy ý.

Vậy khi gộp nghiệm ta có nghiệm là:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{7\pi}{6} + k\pi, \quad x \ne k\frac{\pi}{2}, \text{ k nguyên.}$$



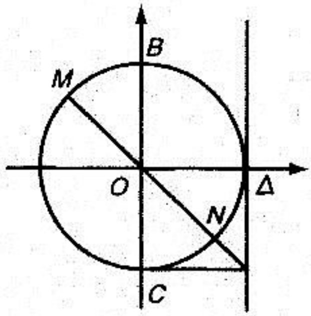

*Hình 54*

*Ví dụ 9.* Giải bất phương trình $4\cos^2 x + \sin x\cos x + 3\sin^2 x < 3$.

*Giải:* Ta viết bất phương trình dưới dạng

$$4\cos^2 x + \sin x\cos x + 3(\sin^2 x - 1) < 0$$

hay $\cos^2 x + \sin x\cos x < 0$.




*Hình 55*

*Cách 1.* Nếu cosx = 0 $\Rightarrow 0 < 0$, bất phương trình vô nghiệm.

$\Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow 1 + \text{tg}x < 0$

$\Rightarrow \text{tg}x < -1$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.*

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x < -1 \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \pi + 2k\pi <$$

$$< 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, \text{ k nguyên.}$$

*Nhận xét.* Có thể giải bằng hình học: Đặt $X = \cos x$, $Y = \sin x$ và giải hệ $X^2 + XY < 0$, $X^2 + Y^2 = 1$. Khi $X > 0$, ta có $X^2 + XY < 0$ $\Leftrightarrow X + Y < 0$ là phần mặt phẳng trong góc $\widehat{CON}$, khi $X < 0$ thì $X^2 + XY < 0 \Rightarrow X + Y > 0 \Rightarrow$ nghiệm là phần mặt phẳng trong góc $\widehat{BOM}$. Do vậy nghiệm của hệ là cung $\overset{\frown}{BM}$ và cung $\overset{\frown}{CN} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

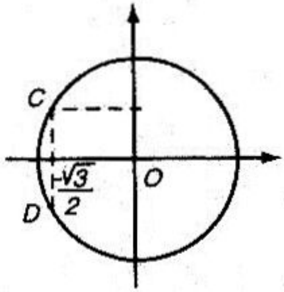
*Ví dụ 10.* Giải bất phương trình

$$\sqrt{1 - 4\sin^2 x} > 1 + 2\cos x.$$

*Giải:* Điều kiện: $1 - 4\sin^2 x \geq 0$.

Nếu $1 + 2\cos x < 0 \Leftrightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ mọi x để $1 - 4\sin^2 x \geq 0$ đều là nghiệm. Vì $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, nên $0 \leq 1 - 4\sin^2 x = 4\cos^2 x - 3 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x \geq$ $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kết hợp với $\cos x < -\frac{1}{2}$, ta được $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, k nguyên. Nghiệm là cung $\overparen{CD}$.

Nếu $1 + 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2}$, thì do 2 vế không âm, nên bình phương hai vế ta được $1 - 4\sin^2 x > 1 + 4\cos x +$ $+ 4\cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 3 > 1 +$ $+ 4\cos^2 x + 4\cos x \Leftrightarrow \cos x < -1$: vô nghiệm.




*Hình 56*

*Nhận xét.* Ta có thể giải bất phương trình trên bằng hình học như sau: Đặt $\cos x = X$, $\sin x = Y$, khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{4X^2 - 3} = 1 + 2X, & -1 \leq X \leq 1, \quad -1 \leq Y \leq 1. \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta cũng được nghiệm như trên.

*Ví dụ 11.* Giải bất phương trình

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

*Giải:* Điều kiện: $0 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq \cos x \leq 1$. Theo tính chất lũy thừa ta có: $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Dấu = đạt được khi và chỉ khi $\sqrt{\sin x} = \sin^2 x$ và $\sqrt{\cos x} = \cos^2 x$ xảy ra đồng thời $\Rightarrow x = 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là các giá trị của x để $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$, tức là $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

*Nhận xét.* Sau khi đặt điều kiện để căn số có nghĩa, ta cũng có thể giải bằng cách bình phương hai vế, nhưng cách giải dài và cồng kềnh hơn.

*Ví dụ 12.* Giải các bất phương trình:

1) $4\cos 12x + 8\cos 6x + \sin x \geq -7$;

2) $\cos^2 x \sin x > -\frac{7}{18}$

3) $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{16}$

*Giải:* 1) *Cách1.* Xét $y(x) = 4\cos 12x + 8\cos 6x = 8\cos^2 6x + 8\cos 6x - 4$.

Đặt $\cos 6x = t \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$, $y(t) = 8t^2 + 8t - 4$ là parabôn quay bề lõm về phía trên (vì hệ số đầu là $8 > 0$), có đỉnh tại điểm $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{min} = y(-\frac{1}{2}) = -\frac{\Delta'}{a} = -\frac{48}{8} = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq y_{min} = -6$ và khi đó $4\cos 12x + 8\cos 6x + \sin x \geq -6 + \sin x \geq -7$, $\forall x$. Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

*Cách 2.* Ta có $4\cos 12x + 8\cos 6x + \sin x \geq -7 \Leftrightarrow$

$4\cos 12x + 8\cos 6x + \sin x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 8\cos^2 6x + 8\cos 6x + \sin x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 8\cos^2 6x + 8\cos 6x + 2 + 1 + \sin x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $2(4\cos^2 6x + 4\cos 6x + 1) + (1 + \sin x) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $2(2\cos 6x + 1)^2 + (1 + \sin x) \geq 0$ đúng $\forall x$, vì

$2(2\cos 6x + 1)^2 \geq 0$, $\forall x$ và $1 + \sin x \geq 0$, $\forall x$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $\forall x$.

2) *Cách 1.* $\cos^2 x \sin x > -\dfrac{7}{18} \Leftrightarrow -\sin^3 x + \sin x > -\dfrac{7}{18}$

$\Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x - \dfrac{7}{18} < 0$. Gọi vế trái là y và đặt $\sin x = t$

$\Rightarrow -1 \leq t \leq 1$, $y = t^3 - t - \dfrac{7}{18} \Rightarrow y' = 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow t = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ . Lập bảng biến thiên

| $t$ | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | $M = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{18}$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{18}$ |

Vậy $y_{max} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} - \dfrac{7}{18} < 0$, vì $\dfrac{2}{3\sqrt{3}} - \dfrac{7}{18} < 0 \Leftrightarrow$

$4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow 48 < 49$. Vậy $y \leq y_{max} < 0 \Rightarrow$ bất phương trình đúng với $\forall x$.

*Cách 2.* Ta có $\cos^2 x \sin x > -\dfrac{7}{18} \Leftrightarrow -\sin^3 x + \sin x >$

$-\dfrac{7}{18} \Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x - \dfrac{7}{18} < 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \left(\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) -$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^2 x - \sin x - \frac{7}{18} < 0 \Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{3}\left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{7}{18} < 0 \Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sin^2 x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x - \frac{2}{3}\right) +$$

$$+\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{18}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\sin x -\right.$$

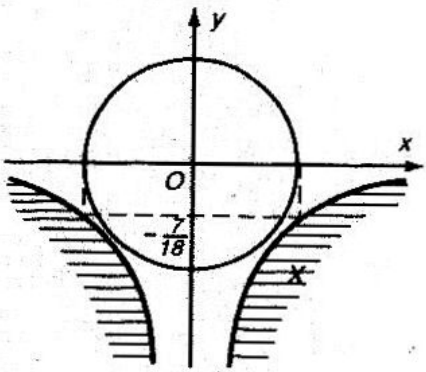
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{18}\right) < 0$$ đúng $\forall x$, vì $(\sin x +$

$+\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \geq 0\ \forall x$, $\sin x - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0\ \forall x$ và $\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{18} < 0$

(xem cách 1) Vậy bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

*Cách 3.* Đặt $X = \cos x$, $Y = \sin x$ thì bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} X^2Y > -\dfrac{7}{18} \\ X^2 + Y^2 = 1, \end{cases} \qquad -1 \leq X \leq 1, \quad -1 \leq Y \leq 1.$$




*Hình 57*

Nghiệm của $X^2Y > -\frac{7}{18}$ là phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $Y = -\frac{7}{18X^2}$, chứa trục tung, còn nghiệm của $X^2 + Y^2 = 1$ là vòng tròn đơn vị. Vậy nghiệm của hệ là phần vòng tròn đơn vị nằm trong miền nghiệm của $X^2Y > -\frac{7}{18}$. Vì vòng tròn đơn vị nằm trọn vẹn trong miền nghiệm của $X^2Y > -\frac{7}{18}$, nên nghiệm của bất phương trình đã cho là mọi giá trị của x.

3) *Cách 1.* Ta có $\sin^4x + \cos^4x = (\frac{1 - \cos^2x}{2})^2 + $
$+ (\frac{1 + \cos2x}{2})^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x) \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{16}\ \forall x$. Vậy bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

*Cách 2.* Ta có $\sin^4x + \cos^4x \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16(\sin^4x + \cos^4x) \geq$
$\geq 1 = (\sin^2x + \cos^2x)^2 = \sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x\cos^2x \Leftrightarrow$
$14(\sin^4x + \cos^4x) + \sin^4x + \cos^4x - 2\sin^2x\cos^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$14(\sin^4x + \cos^4x) + (\sin^2x - \cos^2x)^2 \geq 0$ đúng $\forall x$. Vậy bất phương trìnhnghiệm đúng với $\forall x$.

*Nhận xét.* Có thể làm mạnh bất phương trình thành $\sin^4 x +$ $+ \cos^4x \geq \frac{1}{2}$, bất phương trình vẫn có nghiệm $\forall x$. (Xem cách 1).

*Ví dụ 13.* Giải các bất phương trình:

1) $\sin^6x + \cos^6x \leq \frac{1}{4}$;

2) $\sin^6x + \cos^6x \leq \frac{15}{8}\cos2x - \frac{1}{2}$.

*Giải:* 1) *Cách 1.* Ta có $\frac{1}{4} \geq \sin^6x + \cos^6x =$

$$= \left(\frac{1 - \cos2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos2x}{2}\right)^3 =$$

$= \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x) = \frac{1}{4} \Rightarrow$

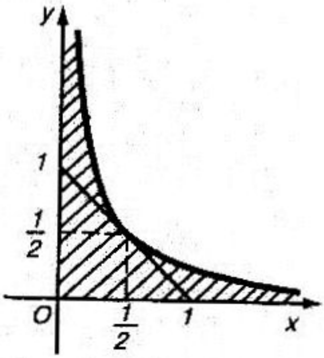
$\Rightarrow \cos^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow$

$2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, k nguyên.

*Cách 2.* Ta có $\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 -$

$- 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x) = 1 - 3\sin^2x\cos^2x \leq$

$\leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2x\cos^2x \geq \frac{1}{4}$




*Hình 58*

Đặt $X = \cos^2x$, $Y = \sin^2x \Rightarrow$ $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq 1$, $X + Y = 1$ và $XY \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow X = Y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2x =$ $= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} =$ $= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ và quay về cách 1

2) *Cách 1.* $\sin^6x + \cos^6x \leq$

$\leq \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x) \leq \frac{15}{8}\cos 2x -$

$- \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\cos^2 2x - \frac{15}{8}\cos 2x + \frac{3}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x -$

$- \frac{5}{2}\cos 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\cos 2x - \frac{1}{2})(\cos 2x - 2) \leq 0$

(vì $\cos 2x - 2 < 0\ \forall x$) $\Rightarrow \cos 2x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

$-\dfrac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

*Cách 2.* $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 =$

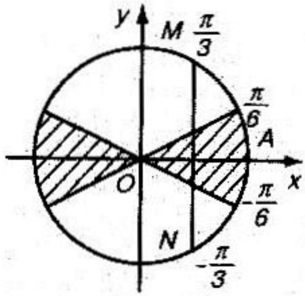
$1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x \le \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{15}{8}\cos 2x +$

$+ \dfrac{3}{4}\sin^2 2x \ge \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 5\cos 2x + 2\sin^2 2x \ge 4.$

Đặt $\cos 2x = X$, $\sin 2x = Y$

$\Rightarrow -1 \le X \le 1,\ -1 \le Y \le 1,$

$5X + 2Y^2 \ge 4,\ X^2 + Y^2 = 1.$



*Hình 59*

Nghiệm của $5X + 2Y^2 \ge 4$ là phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $Y = \pm 1$, $X = \pm 1$ và $5X + 2Y^2 = 4$. Bởi vậy nghiệm là cung $\overset{\frown}{MAN}$, điểm M và N là nghiệm của hệ phương trình $5X + 2Y^2 = 4$ và $X^2 + Y^2 = 1$

$M(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $N(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \dfrac{\pi}{3}$, $\overset{\frown}{AN} = -\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ nghiệm là $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$

$-\dfrac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

*Ví dụ 14.* Giải bất phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x \le 1.$$

*Giải:* Ta có $1 \ge \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x =$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x \le 0$$

*Cách1.* $0 \geq 1 + \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x =$

$= 4\cos^3 2x + 2\cos^2 2x - 2\cos 2x \Leftrightarrow$

$0 \geq 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - \cos 2x =$

$= \cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) =$

$2\cos 2x\,(\cos 2x + 1)\,(\cos 2x - \frac{1}{2})$.

Vì $1 + \cos 2x \geq 0\ \forall x \Rightarrow \cos 2x(\cos 2x - \frac{1}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow$

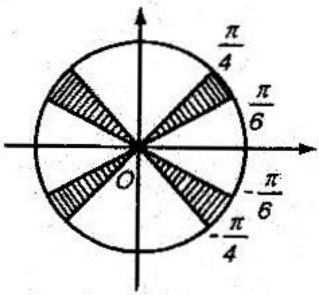
$\Leftrightarrow 0 \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên, và

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, l nguyên

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên và

$-\frac{\pi}{4} + l\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + l\pi$, l nguyên.




*Hình 60*

*Cách 2.* $0 \geq (1 + \cos 6x) + (\cos 2x + \cos 4x) = 2\cos^2 3x + 2\cos 3x\cos x = 2\cos 3x\,(\cos 3x + \cos x) = 4\cos 3x\cos 2x\cos x \Leftrightarrow \cos 3x\cos 2x\cos x \leq 0$.

$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \Rightarrow x =$

$= \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$; $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x =$

$= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ; $\cos x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Ta lập bảng xét dấu trên một chu kỳ $0 \leq x \leq 2\pi$:

| x | $0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{6} \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{6} \quad 2\pi$ |
|---|---|
| cosx | + \| + \| + 0 - \| - \| - \| - \| - 0 + \| + \| + |
| cos2x | + \| + 0 - \| - 0 + \| + 0 - \| - \| - 0 + \| + |
| cos3x | + 0 - \| - 0 + \| + 0 - \| - 0 + 0 - \| - 0 + |
| | + 0 - 0 + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 + 0 - 0 + |

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$,

$\frac{5\pi}{4} + 2m\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$, $\frac{7\pi}{4} + 2n\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$,

k, l, m, n nguyên. Sau khi gộp nghiệm ta được

$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $-\frac{\pi}{4} + l\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + l\pi$

k, l nguyên.

*Ví dụ 15.* Giải bất phương trình:

$$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x).$$

*Giải:* Ta có $2(\sin x + \cos x) < 2\cos 2x + \sin^2 x\cos x +$
$+ \sin x\cos^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) =$
$2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2] > 0.$

Đặt $\cos x - \sin x = t$, ta có $t^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ và $t = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}$. Khi đó, ta có

$$\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})\,[2t + \frac{1}{2}(1 - t^2) - 2] =$$

$$= \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})[-\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}] = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2}(t-1)(t-3)\right] > 0.$$ Do $t - 3 < 0\ \forall x \Rightarrow$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) \times (t - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4})\left[\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] > 0.$$

Do vậy:

hoặc a) $\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ hoặc b) $\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Ta giải hệ a): Xét một chu kì $2\pi$. Ta có:

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, còn $\cos(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Kết hợp nghiệm ta được $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ hay $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$.

Vậy nghiệm của hệ a) là $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi = 2(k+1)\pi$, k nguyên.

Ta giải hệ b): Ta có $\cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x -$ $- \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ ; $\cos(x + \frac{\pi}{4}) < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow 0 < x < \frac{3\pi}{2}$. Kết hợp nghiệm ta được $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ b) là $\frac{3\pi}{4} + 2l\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$, l nguyên.

*Nhận xét.* Ta có thể giải bất phương trình $\cos(x - \frac{\pi}{4}) \times$ $\times [\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}] > 0$ bằng cách lập bảng xét dấu như sau:

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ khi $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ , $x = \frac{7\pi}{4}$ ;

$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$. Do vậy

| $x$ | $0$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{7\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ | | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | |
| $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0 | - | \| | - | 0 | + | \| | + | |
| | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Vậy nghiệm trên $[0, 2\pi]$ là $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$ và

$\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$, và nghiệm của bất phương trình đã cho là

$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{7\pi}{4} + 2l\pi < x < 2(l + 1)\pi$,

k, l nguyên.

*Ví dụ 16.* Giải bất phương trình

$$4(\sin^4x + \cos^4x) > 2\sin x\cos x + 3.$$

*Giải:* Ta có

$$4\left[\left(\frac{1 - \cos2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos2x}{2}\right)^2\right] > \sin2x + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \cos^22x) > \sin2x + 3 \Leftrightarrow 2(2 - \sin^22x) >$$

$$> \sin2x + 3 \Leftrightarrow 2\sin^22x + \sin2x - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin2x + 1)\left(\sin2x - \frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin2x < \dfrac{1}{2} \\ \sin2x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \dfrac{\pi}{6} + 2(k + 1)\pi \\ 2x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5\pi}{12} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{12} + (k + 1)\pi \\ x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

*Nhận xét 1.* Có thể đưa bất phương trình về dạng

$$\cos4x > \sin2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 4x > \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) < 0$$

và lập bảng xét dấu:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{12}$ | | $\frac{5\pi}{12}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{13\pi}{12}$ | | $\frac{17\pi}{12}$ | | $\frac{7\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ | | + | \| | + | \| | + | 0 | - | \| | - | \| | - | 0 | + | |
| $\sin(3x - \frac{\pi}{4})$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |
| | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | - | |

ta lại nhận được nghiệm như trên.

*Nhận xét 2.* Từ $\sin(x + \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) < 0$, ta có thể đổi biến

$$x + \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow \sin t\sin 3t > 0 \Rightarrow 4\sin^4 t - 3\sin^2 t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \sin^2 t < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos 2t < 1$$ và cũng được kết quả trên.

*Ví dụ 17.* Giải bất phương trình

$$tg^4x - (\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}})tg^3x - 2tg^2x + (\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}})tgx + 1 < 0$$

*Giải:* Biến đổi vế trái về dạng

$$(tg^2x - 1)(tgx - \sqrt{3})(tgx + \frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$$

(chú ý tổng các hệ số = 0, vế trái có nghiệm $tgx = 1$ và tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ $\Rightarrow$ có nghiệm $tgx = -1$). Lập bảng xét dấu ta có:

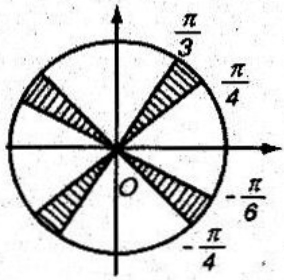
| $tgx$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $tg^2x - 1$ | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | \| | + |
| $(tgx - \sqrt{3})(tgx + \frac{1}{\sqrt{3}})$ | + | \| | + | 0 | - | \| | - | 0 | + |
| | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{\sqrt{3}} < tgx < -1$

và $1 < tgx < \sqrt{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$

và $\frac{\pi}{4} + l\pi < x < \frac{\pi}{3} + l\pi$, k, l nguyên.

Gộp nghiệm ta được: $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{2}$




*Hình 61*

*Nhận xét:*

1) Vì vế trái là vế trái của một phương trình lùi với $\lambda = -1$, nên có thể đổi biến $tgx - cotgx = t$, để đưa về bất phương trình bậc hai theo t. Tuy nhiên cần chú ý khi chia cho tgx phải lý luận $tgx > 0$, $tgx < 0$.

2) Cần đặt điều kiện $\cos x \neq 0$.

*Ví dụ 18.* Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ có nghiệm là $\forall x$.

*Giải: Cách 1.* Giả sử a thỏa mãn đầu bài. Vì bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$, nên $x = \frac{\pi}{2}$ là nghiệm và do đó ta phải có $a(4 - \sin\frac{\pi}{2})^4 - 3 + \cos^2\frac{\pi}{2} + a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 82a - 3 > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{82}$

Vậy là $\forall a$ thỏa mãn đầu bài đều ở trong khoảng $a > \frac{3}{82}$.

Giả sử $a > \frac{3}{82}$. Vì $\cos^2 x \geq 0$, $4 - \sin x \geq 3 \Rightarrow (4 - \sin x)^4 \geq 81$ với mọi giá trị của x. Vì $a > 0$, nên ta có $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a \geq 81a - 3 + a = 82a - 3 > 0$.

Vậy khi $a > \frac{3}{82}$ bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

*Cách 2.* Đặt $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$ và gọi vế trái là y, ta có $y = a(4 - t)^4 - 2 - t^2 + a > 0 \quad \forall t \in [-1,1] \Rightarrow$ phải có $y(1) = 82a - 3 > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{82} > 0$.

Ta lại có: $y' = -4a(4 - t)^3 - 2t < 0$ vì $a > 0$, $4 - t > 0 \Rightarrow$ $-4a(4 - t)^2 < -4\frac{3}{81} . 81 = -12$. Vậy y nghịch biến, và $y \leq y(1) = 82a - 3 < 0$ khi $a < \frac{3}{82}$. Vậy bất phương trình nghiệm đúng $\forall t$, và do đó nghiệm đúng $\forall x$.

*Ví dụ 19.* Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ nghiệm đúng $\forall x$.

*Giải: Cách 1.* Vì bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x$, nên cho $x = 0$ ta có $a^2 > 2$; cho $x = \dfrac{\pi}{2}$, ta có

$a^2 + 2a - 3 > 0 \Rightarrow a > 1$ hoặc $a < -3$; cho $x = \pi$ ta được $a^2 + 4a + 4 > 6$ hay $(a + 2)^2 > 6$.

Từ đó suy ra $a > \sqrt{2}$ hoặc $a < -2 - \sqrt{6}$.

Nếu $a > \sqrt{2} \Rightarrow a^2 > 2$, ta có $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ $\Leftrightarrow a^2 - 2 + 2a(1 - \cos x) - (1 - \cos^2 x) > 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 +$ $+ (1 - \cos x)(2a - 1 - \cos x) > 0$ đúng với $\forall x$, vì $a^2 - 2 > 0$, $1 - \cos x \geq 0$, $2a - 1 - \cos x > 2\sqrt{2} - 2 > 0$.

Vậy khi $a > \sqrt{2}$, thì bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

Nếu $a < -2 - \sqrt{6}$, ta có $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ $\Leftrightarrow (a + 2)^2 - 6 - 2a(1 + \cos x) - (1 - \cos^2 x) > 0 \Leftrightarrow (a + 2)^2 -$ $- 6 - (1 + \cos x)(2a + 1 - \cos x) > 0$ $\forall x$, vì $(a + 2)^2 - 6 > 0$, $1 + \cos x \geq 0$, $2a + 1 - \cos x < -4 - 2\sqrt{6} + 2 < 0$. Vậy khi $a < -2 - \sqrt{6}$ bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

Kết luận: Các giá trị a cần tìm là $a > \sqrt{2}$ và $a < -2 - \sqrt{6}$.

*Cách 2.* Vì $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, nên đặt $t = \cos x \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$ và bất phương trình trở thành $y = t^2 - 2at + a^2 + 2a - 3 > 0$ $\forall t \in [-1,1]$. Đây là một parabôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh tại điểm $t = a$, nên giá trị bé nhất $y_{min}$ của nó trên $[-1,1]$ là

$$y_{min} = \begin{cases} y(-1) = a^2 + 4a - 2, & \text{khi } a \leq -1, \\ y(a) = 2a - 3, & \text{khi } -1 < a < 1, \\ y(1) = a^2 - 2, & \text{khi } a \geq 1. \end{cases}$$

Bất đẳng thức $y > 0$ $\forall t \in [-1,1] \Leftrightarrow y_{min} > 0$ khi $t \in [-1,1]$. Khi $a \leq -1$, $a^2 + 4a - 2 > 0 \Rightarrow a < -2 - \sqrt{6}$; $-1 < a < 1$, $2a - 3 > 0$.

$\Rightarrow -1 < a, 1, a > \dfrac{3}{2}$ vô nghiệm; $a \geq 1$, $a^2 - 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a > \sqrt{2}$, Vậy bất phương trình nghiệm đúng với $\forall$ x khi $a > \sqrt{2}$ hoặc $a < -2 - \sqrt{6}$.

*Ví dụ 20.* Giải bất phương trình:

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} \leq a.$$

*Giải:* Điều kiện: $x \neq n\pi$, n nguyên. Ta có:

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} \leq a \Leftrightarrow \frac{2 - 2\sin x\cos x}{1 - \cos^2 x} \leq a \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\sin^2 x} - 2\text{cotg}x \leq a \Leftrightarrow 2(1 + \text{cotg}^2 x) - 2\text{cotg}x \leq a \Leftrightarrow$$

$2\text{cotg}^2 x - 2\text{cotg}x + 2 - a \leq 0$. Ta có $\Delta' = 2a - 3 \geq 0$

khi $a \geq \dfrac{3}{2}$ và khi đó $\dfrac{1 - \sqrt{2a - 3}}{2} \leq \text{cotg}x \leq$

$\leq \dfrac{1 + \sqrt{2a - 3}}{2}$. Vậy $k\pi + \alpha \leq x \leq k\pi + \beta$, k nguyên;

$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\text{cotg}\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{2a - 3}}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$,

$\text{cotg}\beta = \dfrac{1 - \sqrt{2a - 3}}{2}$

*Nhận xét.* Có thể đưa về dạng acost + bsint, cụ thể là:

$$\frac{2 - 2\sin x\cos x}{1 - \cos^2 x} \leq a \Leftrightarrow a\cos 2x - 2\sin 2x + 4 - a \leq 0$$

(vì mẫu số $1 - \cos^2 x = \sin^2 x \geq 0$).

*Ví dụ 21.* Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y \geq \dfrac{3}{2}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

*Giải: Cách1.* Ta có

$$\frac{3}{2} \leq \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2y \leq -1 \Leftrightarrow 2\cos(x + y)\cos(x - y) \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\cos(x + y)\cos(x - y) \leq -\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Từ phương trình thứ hai, ta có $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}[\cos(x + y) +$

$+ \cos(x - y) \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos(x + y) + \cos(x - y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(x - y) = \frac{1}{2} - \cos(x + y)$

Thay vào (1) ta được $\cos(x + y)[\frac{1}{2} - \cos(x + y)] \leq \frac{1}{2}$

Đặt $\cos(x + y) = t$, $-1 \leq t \leq 1$, ta được

$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \geq 0$. (2). Do $a + b + c = 0$, nên tam thức ở vế trái của (2) có nghiệm $t = 1$ và $t = -\frac{1}{2}$ và bất phương trình (2) có nghiệm $t \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $t \geq 1$. Khi $t \leq -\frac{1}{2}$ ta có $t = -\cos(x+y) \geq \frac{1}{2}$ khi đó $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$ -

$-\cos(x+y) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Vì $1 \leq \cos(x-y) \leq 1$,

nên ta có $\cos(x-y) = 1$; khi $t \geq 1$ ta có $1 \leq t = \cos(x+y) \leq 1$ $\Rightarrow \cos(x+y) = 1$. Vậy (2) có nghiệm $\cos(x+y) = 1$ hoặc $\cos(x-y) = 1$. Nếu $\cos(x \pm y) = 1 \Rightarrow x + y = 2k\pi \Rightarrow$ $y = 2k\pi - x \Rightarrow \cos y = \cos x$ và từ phương trình thứ hai ta

được $\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + l\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + (2k - l)\pi$, k, l nguyên.

Nếu $\cos(x-y) = 1 \Rightarrow x - y = 2m\pi$, $x = y + 2m\pi \Rightarrow$ $\cos x = \cos y \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} +$ $+ 2n\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + (n - 2m)\pi$, n, m nguyên.

*Cách 2.* Từ bất phương trình đầu ta được

$\frac{3}{2} \leq \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos^2 x + 1 - \cos^2 y \Leftrightarrow$

$\cos^2 x + \cos^2 y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y - \frac{1}{2} \leq 0$.

Vì $\frac{1}{4} = \cos x\cos y \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2\cos x\cos y$, do vậy

$\cos^2 x + \cos^2 y - \frac{1}{2} = \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y =$

$= (\cos x - \cos y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\cos x - \cos y)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \cos^2 y = \frac{1}{4} \;\Rightarrow \cos 2x = \cos 2y = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\; 2y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$y = \pm\frac{\pi}{3} + l\pi$, k, l nguyên tùy ý; tổ hợp dấu + và - tùy ý.

## BÀI TẬP

**1.** Giải các bất phương trình:

1) $\sin 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos 2x \le \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 2x \ge 1$; 4) $\operatorname{cotg} 2x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

**2.** Giải các bất phương trình:

1) $\frac{1}{\sin x} > -2$; 2) $\frac{1}{\sin x} \le 2$;

3) $\sin x > \sin 3x$; 4) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} < \operatorname{tg} x$

**3.** Giải các bất phương trình:

1) $\cos^2 x < \frac{1}{4}$; 2) $\sin x\,|\sin x| \le \frac{1}{2}$

3) $\operatorname{tg}^2 x \le 3$; 4) $\sin^6 x + \cos^6 x \le \frac{7}{16}$

**4.** Giải các bất phương trình:

1) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} > 0$; 2) $\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} \le 0$;

3) $\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$; 4) $\frac{\cos x}{1 + 2\cos x} > \frac{1 - \cos x}{1 - 2\cos x}$.

**5.** Giải các bất phương trình:

1) $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1$ ;    2) $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} > 3\text{tg}x$.

**6.** Giải các bất phương trình:

1) $\sin x + \cos x > 1$;

2) $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$;

3) $\sin x + \cos x > \cos \dfrac{\pi}{6}$

**7.** Giải các bất phương trình:

1) $\sin^3 x \sin(\dfrac{\pi}{2} - 3x) + \cos^3 x \cos(\dfrac{\pi}{2} - 3x) > \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ;

2) $\cos^3 x \sin(\dfrac{\pi}{2} - 3x) + \sin^3 x \cos(\dfrac{\pi}{2} - 3x) < \dfrac{1}{8}$ ;

3) $\sin x > 4\sqrt{3}\cos^3 x$;

4) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \leq \dfrac{1}{2}$ .

**8.** Giải các bất phương trình:

1) $2 + \text{tg}2x + \text{cotg}2x < 0$;

2) $\text{tg}x + \text{cotg}x < \text{tg}\dfrac{\pi}{4}$ ;

3) $\text{cotg}x + \text{cotg}(x + \dfrac{\pi}{2}) + 2\text{cotg}(x + \dfrac{\pi}{3}) > 0$;

4) $\text{cotg}x - \text{tg}x - 2\text{tg}2x - 4\text{tg}4x > 8\sqrt{3}$ ;

5) $\text{cotg}\dfrac{x}{2} + \text{cotg}(\dfrac{x}{2} + 12^o) + \text{tg}(x + 12^o) > 0$.

**9.** Giải các bất phương trình:

1) $4 + 2\sin^2 x < (3 + \sqrt{3})\sin 2x + 2(2 - \sqrt{3})\cos^2 x$;

2) $(\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1 \geq \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\sin 2x$;

3) $\sin 2x + 2\sin^2 x \leq 0$;

4) $\frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x > 0$.

**10.** Giải các bất phương trình:

1) $\sqrt{4\sin^2 x - 1} > 1 + 3\sin x$;

2) $\sqrt{3\cos^2 x - 1} > 5\sin^2 x - 4$;

3) $2 + \sqrt{4 - \cos x} > 3\cos x$;

4) $\sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} \geq \sin x - \cos x$;

5) $\sqrt{3 + 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x} \leq \frac{1 + 3\mathrm{tg}x}{2}$.

**11.** Giải các bất phương trình:

1) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} < \sqrt{2}$;

2) $\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} \geq 1$.

**12.** Giải các bất phương trình:

1) $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x + 7 \geq 0$;

2) a) $\cos x\sin 2x > -\frac{7}{9}$, b) $\sin x\sin 2x < 0{,}77$;

c) $\cos x\sin^2 x < 0{,}39$;

3) a) $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$ b) $\sin^8 x + \cos^8 x \geq \frac{1}{8}$.

**13.** Giải các bất phương trình:

1) $\sin^8 x + \cos^8 x \leq \frac{1}{8}$;

2) $\sin^8 x - \cos^8 x \geq \frac{1}{2}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$;

3) $\cos^6 x - \sin^6 x \leq \frac{13}{8}\cos^2 2x$;

4) $\cos^8 x - \sin^8 x \geq \cos^2 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$.

**14.** Giải các bất phương trình:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x \geq 2$;

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq \dfrac{3}{2}$.

**15.** Giải các bất phương trình:

1) $\sin x(1 + tg^2 x) > 1$; 2) $(1 + cotg^2 x)\cos x \geq \dfrac{1}{\cos x - 2}$;

3) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$;

4) $4\sin x\sin 2x\sin 3x > \sin 4x$;

5) $\sin x + \cos x + tgx + cotgx + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} > 6$;

6) $\sin 2x + \sin x - \sqrt{2\cos x} < 1/\sqrt{2}$;

7) $1 + \cos 2x \geq \cos x\,(1 + |1 - 2\cos x|)$.

**16.** Cho bất phương trình:

$$\sin^6 x + \cos^6 x > a\sin 2x - \frac{3}{4}.$$

1) Giải bất phương trình khi a = 1.

2) Với a nào bất phương trình có nghiệm duy nhất?

**17.** Giải các bất phương trình:

1) $\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \leq \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$;

2) $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} \geq \sin x - \dfrac{1}{\sin x} + 4$.

3) Cho bất phương trình:

$$tg^2 x + cotg^2 x + m(tgx + cotgx) + 3 \leq 0.$$

a) Giải bất phương trình khi $m = -\dfrac{5}{2}$.

b) Với m nào thì bất phương trình vô nghiệm?

**18.** Tìm tất cả các giá trị của a để các bất phương trình sau đây có nghiệm ∀x:

1) $2a - 4 + a(3 - \sin^2 x)^2 + \cos^2 x < 0$;

2) $-5 + 5a + \sin^2 x + a(3 - \cos x)^3 > 0$;

3) $\sin^2 x - 6 + 4a + a(5 - \cos^4 x)^2 < 0$.

4) Cho bất phương trình:

$$m^2\cos x + 2m\sin x - 1 \leq 0.$$

a) Với m nào bất phương trình nghiệm đúng $\forall x$?

b) Tìm m để bất phương trình được nghiệm đúng $\forall x$ thỏa mãn điều kiện $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

**19.** Tìm tất cả các tham số a để các bất phương trình sau đây nghiệm đúng $\forall x$:

1) $\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$;

2) $a^2 + a - \sin^2 x - 2a\cos x > 1$;

3) $\cos^2 x + 2a\sin x - a^2 < a - 2$.

**20.** Giải các bất phương trình (a là tham số):

1) $\sin x + \frac{1}{\sin x} \leq a,\ a > 0$ ; 2) $\sin^2 x + \sin 2x \geq a$;

3) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \leq a, \quad a > 0$;

4) $\sin^2 x \leq a^2\sin^2 3x, \quad a > 0$.

**21.** Giải các hệ :

1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \\ \sin^2 x + \sin^2 y \leq 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x\cos y \\ \cos^2 x \leq \sin x\sin y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0 \\ \cos x \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2\cos 2x - 4\cos x = 1 \\ \sin x \geq 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4 - 5\cos x - 2\cos^2 x = 0 \\ \sin x \geq 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 8\sin x + 5 = 2\cos 2x \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

## ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN BÀI TẬP

### *Chương III*

**1.** 1) $\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3}$, k nguyên.

2) $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

3) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, k nguyên.

4) $k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

**2.** 1) $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$ : $\frac{7\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, n nguyên.

2) $(2l + 1)\pi < x < 2(l + 1)\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq$

$\leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, l, k nguyên.

3) $(2k - 1)\pi < x < (2k - \frac{3}{4})\pi$; $(2k - \frac{1}{4})\pi < x < 2k\pi$;

$(2k + \frac{1}{4})\pi < x < (2k + \frac{3}{4})\pi$, k nguyên.

4) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ; $\pi\frac{3}{2} < x \frac{5}{2}\pi$, tuần hoàn chu kỳ $3\pi$.

**3.** 1) $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi$, k nguyên.

2) $\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{4} + 2n\pi$, n nguyên.

3) $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

4) $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$, k nguyên.

**4.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi$; $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên

2) $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

3) $\alpha + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, k nguyên, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$\sin\alpha = \frac{1}{8}$, hoặc $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < (2k + 1)\pi - \alpha$, k nguyên.

$\alpha$ đã chỉ, hoặc $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi$, k nguyên.

hoặc $(2k - 1)\pi < x < -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, k nguyên.

**5.** 1) $(6n - 1)\frac{\pi}{3} < x < (6n + 1)\frac{\pi}{3}$, n nguyên.

2) $-\frac{7\pi}{12} + k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + k\pi$, k nguyên, hoặc

$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi$, k nguyên.

**6.** 1) $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. k nguyên

2) $-\frac{\pi}{10} + 2n\frac{\pi}{5} < x < -\frac{\pi}{30} + 2n\frac{\pi}{5}$, n nguyên:

$$\frac{\pi}{10} + 2n\frac{\pi}{5} < x < \frac{7\pi}{30} + 2n\frac{\pi}{5}$$, n nguyên.

**7.** 1) $\frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{2}$, n nguyên.

2) $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$, k nguyên.

3) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, k nguyên.

4) $(12n - 7)\frac{\pi}{18} \leq x \leq (12n + 1)\frac{\pi}{18}$, n nguyên.

**8.** 1) $(2n - 1)\frac{\pi}{4} < x < (4n - 1)\frac{\pi}{8}$;

$(4n - 1)\frac{\pi}{8} < x < \frac{n\pi}{2}$, n nguyên.

2) Vô nghiệm.

3) $n\pi < x < \frac{2\pi}{9} + n\pi$; $\frac{\pi}{2} + n\pi < x < -\frac{5\pi}{9} + n\pi$;

$\frac{\pi}{3} + n\pi < x < -\frac{\pi}{9} + n\pi$, n nguyên.

4) $\frac{n\pi}{8} < x < (6n + 1)\frac{\pi}{48}$, n nguyên.

5) $n180^\circ < x < 78^\circ + n180^\circ$; $156^\circ + n180^\circ < x < 168^\circ + n180^\circ$,

n nguyên.

**9.** 1) $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

2) $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{3}+k\pi \le x < \frac{\pi}{2} k\pi$, k nguyên.

3) $\frac{3\pi}{4}+k\pi \le x \le (k+1)\pi$, k nguyên.

4) $\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$, k nguyên.

**10.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}+2k\pi$, k nguyên.

2) $-\frac{\alpha}{2}+k\pi \le x \le \frac{\alpha}{2}+k\pi$, k nguyên ; $0 \le \alpha \le \pi$.

$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

3) $\forall x$.

4) $\frac{\pi}{6}+2n\pi \le x \le \frac{5\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}+2n\pi$;

$\frac{\alpha}{2}-\frac{7\pi}{8}+2n\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}+n\pi$, $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5) $\frac{\pi}{4}+n\pi \le x \le \alpha+n\pi$, $tg\alpha = 3$.

**11.** 1) $2k\pi \le x \le \alpha-\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $\frac{3\pi}{4}-\alpha+2n\pi < x < \frac{\pi}{2}+$

$+2n\pi$, k, n nguyên; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = \sqrt{5}-\sqrt{2}$.

2) $\forall x$.

**12.** Tất cả câu bài trong bài này đều có nghiệm $\forall x$.

**13.** 1) $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, k nguyên.

2) $\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4}+k\pi$, k nguyên.

3) $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, k nguyên.

4) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$ , k nguyên.

**14.** 1) $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$; $-\frac{\pi}{4} + l\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + l\pi$,

k, l nguyên.

2) $-\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi$, k nguyên.

$\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi$, k nguyên;

$\frac{2\pi}{5} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{5} + k\pi$, k nguyên.

**15.** 1) $\alpha + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < (2k + 1)\pi - \alpha$.

k nguyên; $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

2) $-\alpha + 2k\pi \leq x \leq \alpha + 2k\pi$, bỏ điểm $x = 2k\pi$;

$\cos\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

3) $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2n\pi$;

$\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$;

$$\frac{5\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \text{ n nguyên.}$$

4) $-\dfrac{\pi}{8} + n\pi < x < n\pi$ ; $\dfrac{\pi}{8} + n\pi < x < \dfrac{3\pi}{8} = n\pi$;

$$\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{5\pi}{8} + n\pi, \text{ n nguyên.}$$

5) $2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k nguyên.

6) $-\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$;

$$\frac{2\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ n nguyên.}$$

7) $-\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \le x \le \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$;

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \text{ n nguyên.}$$

**16.** 1) $x \ne \dfrac{k\pi}{2}$ , k nguyên.

2) Không có giá trị a nào.

**17.** 1) $x = 2n\pi$, k nguyên.

2) $\alpha + 2k\pi \le x \le 2k\pi$, k nguyên; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;

$\sin\alpha = 1 - \sqrt{2}$ ; $-\pi + \alpha + 2k\pi < x < -\pi + k\pi$,

k nguyên; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , $\sin\alpha = 1 - \sqrt{2}$ ;

$2k\pi < x \le \beta + 2k\pi$; $\pi - \beta + 2k\pi < x < (2k+1)\pi$,

k nguyên; $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ , $\sin\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

3) a) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ , n nguyên;

b) $-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$ .

*Chỉ dẫn:* Đổi biến $t = tgx + cotgx \Rightarrow |t| \ge 2$ và đưa bất phương trình về dạng $t^2 + mt + 1 \le 0$. Bất phương trình này sẽ vô nghiệm khi $\Delta < 0$ hoặc $\Delta \ge 0$, nhưng cả 2 nghiệm của tam thức bậc hai $t^2 + mt + 1$ nằm trong khoảng $-2 < t < 2$.

**18.** 1) $a < \frac{3}{11}$ ; 2) $a > \frac{5}{13}$ ; 3) $a < \frac{5}{29}$ .

4) a) $-\sqrt{\sqrt{5}-2} < m < \sqrt{\sqrt{5}-2}$ ; b) $m < \frac{1}{2}$ .

**19.** 1) $a < -2 - \sqrt{8}$ , $a > 2$;

2) $a < -\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ , $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ;

3) $a < -\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ , $a > 2$.

**20.** 1) $a > 0$ thì $(2n + 1)\pi < x < (2n + 2)\pi$, n nguyên; nếu $a \geq 2$ thì có thêm một nghiệm $\alpha + 2n\pi \leq x \leq (\pi - \alpha) + 2n\pi$, n nguyên;

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

2) Nếu $a \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ thì nghiệm $\forall x$; nếu $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < a \leq$

$\leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $\frac{\alpha + \varphi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi - \alpha + \varphi}{2} + k\pi$,

k nguyên; $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha, \ \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ; mà $\sin\alpha = \frac{2a - 1}{\sqrt{5}}$.

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ; nếu $a > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ bất phương trình vô nghiệm.

3) $\forall a$ bất phương trình có nghiệm $(2n + 1)\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, n nguyên. Ngoài ra, nếu $a \geq 2(\sqrt{2} - 1)$ thì bất phương trình có nghiệm $\alpha - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi$, k nguyên, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

mà $\sin\alpha = \frac{2 - a}{a\sqrt{2}}$.

4) Nếu $0 < a < \frac{1}{3}$ thì nghiệm là $x = k\pi$, k nguyên.

Nếu $\frac{1}{3} \le a < 1$, thì nghiệm là $-\frac{1}{2}\alpha + k\pi \le x \le$

$$\le \frac{1}{2} \le \alpha + k\pi \ (1)$$, k nguyên, $0 \le \alpha \le \pi$ mà $\cos\alpha = \frac{1 - a}{2a}$.

Nếu $a \le 1$ thì nghiệm là đoạn (1) và thêm đoạn $-\frac{1}{2}\beta +$

$+ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{1}{2}\beta + (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k nguyên, $0 \le \beta \le \pi$ mà

$\cos\beta = \frac{1 + a}{2a}$.

**21.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, k, l nguyên.

2) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, $y = (2k + 1)\frac{\pi}{4} - 2l\pi$, k, l nguyên.

3) $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, n nguyên. 4) $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, n nguyên.

5) $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, n nguyên. 6) $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, n nguyên.

## CHƯƠNG IV
## ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC VÀO ĐẠI SỐ VÀ HÌNH HỌC

Nhiều bài toán đại số và hình học có thể giải bằng lượng giác và nhiều khi cũng đơn giản hơn.

*Ví dụ 1.* Cho hàm số $y = |x|(4x^2 + m)$.

Hãy tìm m để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

*Giải:* Vì y là hàm chẵn, nên xét $0 \leq x \leq 1$ là đủ.

Đặt $x = \cos t \Rightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ , và $y + x(4x^2 + m) =$

$= 4x^3 + mx = 4\cos^3 t + m\cos t = 4\cos^3 t - 3\cos t +$

$+ (m + 3)\cos t = \cos 3t + (m + 3)\cos t.$

Nếu $m = -3$, ta có $y = \cos 3t \Rightarrow |y| = |\cos 3t| \leq 1$

Nếu $m + 3 > 0 \Rightarrow m > -3$, thì với $t = 0$, $y = 1 + (m + 3) > 1$ nên $m > -3$ không thích hợp.

Nếu $m + 3 < 0 \Rightarrow m < -3$ thì với $t = \dfrac{\pi}{3}$, ta có $y = -1 + \dfrac{(m+3)}{2} < -1 \Rightarrow |y| > 1$, nên $m < -3$ cũng không thích hợp.

Vậy chỉ có $m = -3$ là thỏa mãn đầu bài.

*Nhận xét.* Bài này có thể giải bằng đại số, bằng cách xét các giá trị của hàm $y = 4x^3 + mx$ tại các điểm $x = 0$ , $x = 1$ và điểm cực trị (nếu có). Tuy nhiên phải xét nhiều trường hợp vất vả: có cực trị trong đoạn [0, 1], có cực trị ngoài đoạn [0, 1] và không có cực trị, dẫn về giải bất phương trình vô tỷ để đi đến $m \leq -3$ và $m \geq -3 \Rightarrow m = -3$. Bạn đọc thử xét xem.

*Ví dụ 2.* Phương trình $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn [0, 1]?

*Giải:* Do $0 \le x \le 1$, nên đặt $x = \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

ta sẽ được $8\cos t(2\cos^2 t - 1)(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1$.

Vì $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, $8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 =$

$= 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1 = 2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t$, nên ta được

$$8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1.$$

Nếu $t = 0$, ta được $8 = 1$ vô lý $\Rightarrow t \ne 0$ và $0 < t \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin t \ne 0$. Nhân 2 vế với $\sin t \ne 0$ ta được

$$8\sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \sin t$$

hay $\sin 8t = \sin t \Rightarrow 8t = t + 2n\pi \Rightarrow t = \frac{2n\pi}{7}$, n nguyên

và $8t = (\pi - t) + 2m\pi \Rightarrow t = \frac{2}{9}(\frac{\pi}{2} + m\pi)$, m nguyên.

Để $0 < t \le \frac{\pi}{2}$ thì $n = 1$, $m = 0$ và $m = 1$. Do vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm trên đoạn $[0, 1]$.

*Nhận xét.* Bài này cũng có thể giải bằng đạo hàm như sau: Xét $y = 8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) - 1$. Ta có $y(0) = -1$, $y(1) = 7 \Rightarrow y(0)y(1) < 0$ nên giữa 0 và 1 có ít nhất một nghiệm: (Bằng cách tìm nghiệm hữu tỷ $= \frac{p}{q}$ . p là ước của hệ số tự do, q là ước của hệ số cao nhất có thể thấy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm), tuy nhiên tìm nốt 2 nghiệm kia rất vất vả vì chúng là các số vô tỷ. Để chứng minh có 3 nghiệm trên $[0, 1]$, ta phải chứng minh $y'$ có ít nhất 2 nghiệm trên $[0, 1]$ và y tại đó trái dấu. Việc tính toán sẽ cồng kềnh vất vả.

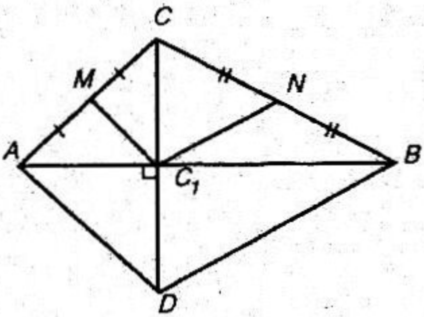
*Ví dụ 3.* Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC có thể tính theo công thức

$$S(\Delta ABC) = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$

*Giải: Cách 1.* Dựng $\Delta ABD$ đối xứng với $\Delta ABC$ theo cạnh AB, ta được S(ACBD) = 2S(ABC) =

$$= S(CAD) + S(BCD) = \frac{1}{2} b^2\sin 2A + \frac{1}{2} a^2\sin 2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{4} (a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$




*Hình 62*

*Cách 2.* Kẻ đường cao $CC_1$ và trong các $DACC_1$ và $BCC_1$ kẻ các trung tuyến $C_1M$ và $C_1N$, ta có S(ABC) =

$$= S(ACC_1) + S(BCC_1) =$$

$$= 2S(CMC_1) + 2S(CNC_1) =$$

$$= 2(\frac{1}{2} . \frac{b^2}{4} \sin 2A +$$

$$+ \frac{1}{2} . \frac{a^2}{4} \sin 2B =$$

$$= \frac{1}{4} (a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$

*Cách 3.* $S(ABC) = \frac{1}{2} ch_C =$

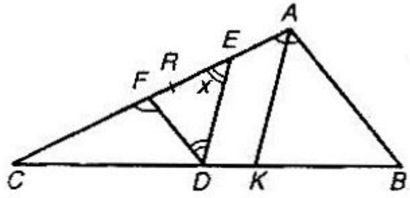
$$= \frac{1}{4} (a\cos B + b\cos A)(a\sin B + B\sin A) =$$

$$= \frac{1}{4} (\frac{1}{2} a^2\sin 2B + \frac{1}{2} b^2\sin 2A + ab\sin C) =$$

$$= \frac{1}{4} . \frac{1}{2} (a^2\sin 2B + b^2\sin 2A) + \frac{1}{2} S(ABC) =$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A).$$

*Ví dụ 4.* Trong tam giác ABC cạnh AC lớn hơn cạnh AB, Góc A = $\alpha$. Trên cạnh AC lấy một điểm R sao cho AB = RC. Gọi E là trung điểm của AR, D là trung điểm của BC. Tính góc $\widehat{CED}$.




*Hình 63*

*Giải: Cách1.* Ký hiệu $\widehat{CED} = x$, khi đó

$\widehat{CDE} = 180^o - (C + x)$

$CD = \frac{a}{2}$, $CE = CR + RE =$

$$= c + \frac{b - c}{2} = \frac{b + c}{2}.$$

Theo định lý hàm sin trong $\Delta CDE$ ta được

$$\frac{CE}{\sin\widehat{CDE}} = \frac{CD}{\sin\widehat{CED}}, \text{ tức là } \frac{b + c}{\sin(C + x)} = \frac{a}{\sin x}, \quad (1)$$

còn trong $\Delta ABC$: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

tức là $$\frac{b + c}{\sin B \sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad (2)$$

Chia (1) cho (2) ta được $\frac{\sin B + \sin C}{\sin(C + x)} = \frac{\sin A}{\sin x}$

hay do $B = 180^\circ - (A + C) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A + C) + \sin C}{\sin A} = \frac{\sin(C + x)}{\sin x},$$

tức là $$\frac{2\sin(\frac{A}{2} + C)\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin(C + x)}{\sin x};$$

từ đó $x = \frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

*Cách 2.* Trong $\Delta ABC$ kẻ đường trung bình DF. Ta có

$FE + CE - CF = \frac{b + c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = DF \Rightarrow DFE$ là

tam giác cân $\Rightarrow \widehat{CED} = \frac{1}{2}\widehat{CFD} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = \frac{\alpha}{2}$.

*Cách 3.* Kẻ phân giác AK của góc A, khi đó $\frac{CK}{CA} = \frac{a}{b + c}$.

Nhưng $\frac{CD}{CE} = \frac{a}{b + c} \Rightarrow \Delta CDE \sim \Delta CKA \Rightarrow DE \parallel AK \Rightarrow$

$\widehat{CED} = \widehat{CAK} = \frac{\alpha}{2}$.

*Nhận xét:* Hai cách giải bằng hình học ngắn gọn hơn cách giải bằng lượng giác rất nhiều, nhưng khó hơn, cách giải bằng lượng giác dài hơn, nhưng chân phương hơn.

*Ví dụ 5.* I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$. Chứng minh rằng

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

*Giải: Cách 1.* Gọi r là bán kính vòng tròn nội tiếp, thì

$$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \quad b = r(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{C}{2}),$$

$$c = r(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}).$$

Như vậy:

$$\frac{IA^2}{bc} = \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{C}{2})(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2})} =$$

$$= \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+B}{2}} = tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}.$$

Tương tự ta nhận được

$$\frac{IB^2}{ca} = tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}, \quad \frac{IC^2}{ab} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$$

và ta nhận được hệ thức đã chứng minh trong chương I:

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1.$$

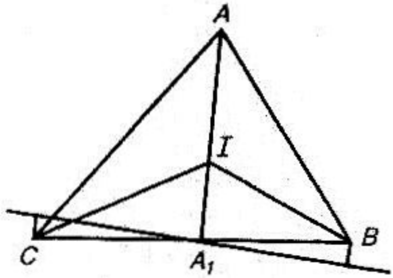
*Cách 2.* Trước hết ta chứng minh rằng $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = 0$. Giả sử đường thẳng IA cắt cạnh BC tại điểm $A_1$, chiếu các vectơ IB và IC lên đường thẳng $\perp$ IA. Hiển nhiên là các hình chiếu ấy có chiều ngược nhau, còn độ dài của chúng thỏa mãn đẳng thức $A_1B : A_1C = c : b$. Bởi vậy các độ dài của các hình chiếu của các véctơ $b\overrightarrow{IB}$ và $c\overrightarrow{IC}$ lên đường thẳng $\perp$ IA bằng nhau và ngược chiều. Từ đó ta kết luận rằng các hình chiếu của vectơ $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}$ lên mỗi đường thẳng tương ứng $\perp$ IA, IB, IC bằng 0, tức là $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$.

Tiếp theo ta có

$(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2abIA.IB + 2bcIB.IC + 2caIC.IA = 0$ (1). Nhưng $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA}$, $|\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}|^2 = c^2$.

Từ đó $2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IA^2 + IB^2 - c^2$.



*Hình 64*

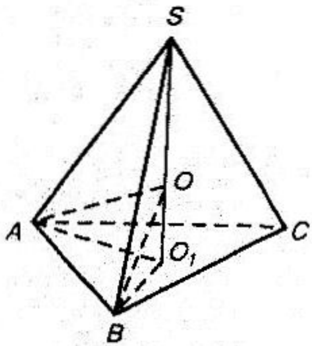
Tương tự ta được $2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 - a^2$, $2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = IC^2 + AI^2 - b^2$. Thay các giá trị của chúng vào (1) ta được: $a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - c^2) + bc(IB^2 + IC^2 - a^2) + ca(IC^2 + IA^2 - b^2) = 0$, hay $(a + b + c)(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2) = abc(a + b + c)$

$$\Rightarrow \frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

*Ví dụ 6.* Ngoại tiếp hình chóp tam giác đều SABC một hình cầu tâm O. Gọi $\varphi = \widehat{AOS}$, $\psi = \widehat{AOB}$, chứng minh rằng:

$$\cos\varphi + \cos\psi \geq -\frac{2}{3}.$$

*Giải: Cách1.* Xét góc tam diện OABS. Theo định lý hàm côsin đối với góc tam diện ta có



*Hình 65*

$\cos\widehat{AOB} = \cos\widehat{AOS}\cos\widehat{BOS} + \sin\widehat{AOS}\sin\widehat{BOS}\cos\widehat{AO_1B}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\psi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi.\cos 120^o \Rightarrow$

$\cos\varphi = \frac{3}{2}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}$. Bởi vậy: $\cos\varphi + \cos\psi =$

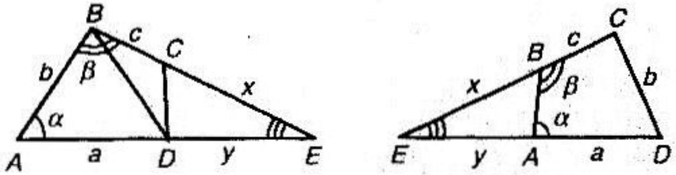
$\frac{3}{2}\cos^2\varphi + \cos\varphi - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi + \cos\psi =$

$\frac{3}{2}(\cos\varphi + \frac{1}{3})^2 - \frac{2}{3} \geq -\frac{2}{3}$. Dấu = đạt được khi

$\cos\varphi = \frac{1}{3}$, tức là tứ diện đều.

*Cách 2.* Ta có $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS})^2 \geq 0$. Từ đó $4R^2 + 6R^2\cos\psi + 6R^2\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \cos\varphi + \cos\psi \geq -\frac{2}{3}$.

*Ví dụ 7.* Tìm diện tích tứ giác, biết ba cạnh liên tiếp là a, b, c và hai góc kề cạnh b là α và β.




*Hình 66*

*Giải:* Giả sử ABCD là tứ giác đã cho, ký hiệu CE = x, DE = y, AD = a, AB = b, BC = c, A = α, B = β; khi đó:

1) Nếu $\alpha + \beta = 180^0$ thì tứ giác là hình thang, bởi vậy diện tích S của nó được tích theo công thức:

$$S = \frac{a + c}{2}\, b \sin\alpha.$$

2) Nếu $\alpha + \beta < 180^0$ (hình bên trái), khi đó $E = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Áp dụng định lý hàm sin vào tam giác EAB

ta được $\frac{b}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c + x}{\sin\alpha} = \frac{a + y}{\sin\beta}$

$$\Rightarrow c + x = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow x = \frac{b\sin\alpha - c\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$a + y = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow y = \frac{b\sin\beta - a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Nhận xét rằng S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD) = S(ABD) + + S(BED) - S(CED) =

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}(c+x)y\sin(a+\beta) - \frac{1}{2}xy\sin(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cy\sin(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{b\sin\beta - a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot c\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

Vậy $S(ABCD) = \frac{1}{2}[ab\sin\alpha + bc\sin\beta - ac\sin(\alpha+\beta)]$.

3) Nếu $\alpha + \beta > 180^o$ (hình bên phải), ta có S(ABCD) = = S(ECD) - S(EAB). Thay các giá trị S(ECD) và S(EAB) vào biểu thức trên, ta cũng được công thức tính S(ADCD) như trường hợp 2).

*Nhận xét.* Sau khi tính c + x, x, a + y, y ta có thể tính S(ABCD) = S(EAB) - S(ECD) (như trường hợp 2), tính

$S(EAB) = \frac{1}{4}[(c+x)^2\sin2\beta + (a+y)^2\sin2\alpha]$ như trong ví dụ 3,

còn $S(ECD) = \frac{1}{2}xy\sin(\alpha+\beta)$.

Ở trường hợp 3) ta có S(ABCD) = S(ECD) - S(EAB), S(ECD) =

$\frac{1}{2}(c+x)(a+y)\sin(\alpha+\beta)$, còn $S(EAB) = \frac{1}{4}(x^2\sin2\beta + y^2\sin2\alpha)$

như trong ví dụ 3 cả hai trường hợp ta đều nhận được đáp số:

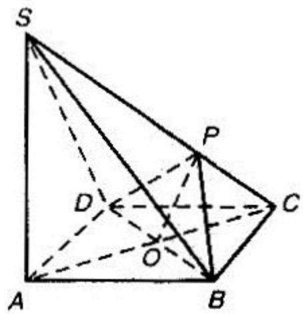
$$S(ABCD) = \frac{1}{2}\,[ab\sin\alpha + bc\sin\beta - ac\sin(\alpha + \beta)]$$

*Ví dụ 8.* Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$.

1) Chứng minh rằng góc phẳng nhị diện cạnh SC là góc tù.

2) Tính thể tính hình chóp nếu khoảng cách từ tâm O của đáy đến cạnh SC là p.

3) Qua A dựng một mặt phẳng $\perp$ SC. Tính diện tích thiết diện nhận được và tỷ số thể tích hai khối của hình chóp, chia bởi mặt phẳng ấy.




*Hình 67*

*Giải:* 1) *Cách 1.* Do tính đối xứng nên $\Delta BPD$ cân (có thể chứng minh bằng cách xét $\Delta BCP = \Delta DCP$) $\Rightarrow \widehat{BPO} = \widehat{DPO}$. Để chứng minh $\widehat{BPD}$ tù, ta chứng minh $\widehat{BPO} > 45^\circ$ hay $\text{tg}\,\widehat{BPO} > 1$. Thật vậy,

$$\text{tg}\,\widehat{BPO} = \frac{OB}{OP} = \frac{OC}{OP} > \frac{OP}{OP} =$$

(vì ABCD là hình vuông, nên OB = OC, và vì $OP \perp SC$, nên đường xiên OC > đường vuông góc OP).

*Cách 2.* Ta tính $\sin^2\widehat{BPO} = \dfrac{OB^2}{BP^2}$. Vì $BP^2 = OB^2 + OP^2$ mà $OP^2 < OB^2$ nên

$$\sin^2\widehat{BPO} = \frac{OB^2}{OB^2 + OP^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin \widehat{BPO} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \widehat{BPO} > \frac{\pi}{4} \text{ và } \widehat{BPD} > \frac{\pi}{2},$$

tức là BPD tù.

2) *Cách1.* $\sin\widehat{SCA} = \sin\widehat{OCP} = \dfrac{p}{a/\sqrt{2}} = \dfrac{p\sqrt{2}}{a}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{SCA} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{SCA}} = \sqrt{1 - \frac{2p^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - 2p^2}}{a}$$

và $\operatorname{tg}\widehat{SCA} = \dfrac{p\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}$. Lại có $\dfrac{SA}{AC} = \operatorname{tg}\widehat{SCA} \Rightarrow$

$$SA = AC\operatorname{tg}\widehat{SCA} = a\sqrt{2}\,\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2p^2}} = \frac{2ap}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}$$

Vậy $V(SABCD) = \dfrac{1}{3} SA.S(ABCD) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2ap}{\sqrt{a^2 - 2p^2}} \cdot a^2 =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 p}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}.$$

*Cách 2.* Vì (BPD) $\perp$ SC và

$SC = \dfrac{AC}{\cos\widehat{ACS}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2p^2}/a} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}$, nên

$$V(SBCD) = \frac{1}{3} SC.\, S(BPD) =$$

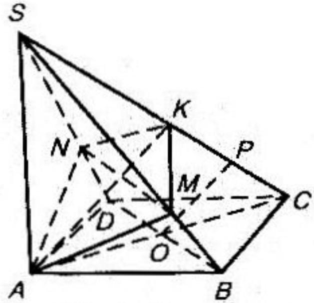
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - 2p^2}} \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2}\,p = \frac{a^3 p}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}}$$

Vì $V(SBCD) = \dfrac{1}{2} V(SABCD)$ (trùng đường cao SA, đáy BCD = $\frac{1}{2}$ đáyABCD) $\Rightarrow$ V(SABCD) = $\dfrac{2a^3p}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}}$

3) a) Diện tích thiết diện.

*Cách 1.* Hai tam giác vuông SAM và SAN bằng nhau (bạn đọc tự chứng minh AM $\perp$ SB, AN $\perp$ SD) vì SA chung và $\widehat{ASB} = \widehat{ASD} \Rightarrow$ SM = SN $\Rightarrow$

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} \Rightarrow MN//BD.$$




*Hình 68*

Ta có $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SB.SM}{SB^2} =$

$$= \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2p^2}{(a^2 - 2p^2)\,SB^2}$$

$\Rightarrow MN = \dfrac{BD}{SB^2} . SA^2$. Do MN//BD $\Rightarrow$ MN $\perp$ AK. Lại có AK = 2OP = 2p (vì OP là đường trung bình của $\Delta$ACK) $\Rightarrow$

$$S_{td} = \frac{1}{2} AK.MN = \frac{1}{2} . 2p . \frac{BD}{SB^2} . SA^2 =$$

$$= p . \frac{a\sqrt{2}}{SA^2 + AB^2} . SA^2$$

Vì $\dfrac{SA^2 + AB^2}{SA^2} = 1 + \dfrac{AB^2}{SA^2} =$

$$= 1 + \frac{a^2}{4a^2p^2}(a^2 - 2p^2)\,\frac{a^2 + 2p^2}{4p^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{4p^2}{a^2 + 2p^2} \text{ và}$$

$$S_{td} = p.\ a\sqrt{2}\ .\ \frac{4p^2}{a^2 + 2p^2} = \frac{4ap^3\sqrt{2}}{a^2 + 2p^2}$$

*Cách 2.* Do AM ⊥ MK, AN ⊥ NK (bạn đọc tự chứng minh) và AM = AN, MK = NK (do đối xứng) nên

$$S(AMKN) = 2.\ S(AMK) = 2.\ \frac{1}{2}\ AM.MK = AM.MK.$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{aSA}{SB}.$$

$$SK.SC = SA^2 \Rightarrow SK = \frac{SA^2}{SC} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + 2a^2}} = \frac{2\sqrt{2}p^2}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}$$

$$\text{và } \frac{MK}{SK} = \frac{a}{SB} \text{ (do } \Delta SMK \sim \Delta SBC) \Rightarrow$$

$$MK = \frac{aSK}{SB} \Rightarrow S_{td} = AM.MK = \frac{aSA}{SB}\ .\ \frac{aSK}{SB} =$$

$$= \frac{a^2SA.SK}{SB^2} = \frac{a^2.\ \dfrac{2ap}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}\ .\ \dfrac{2\sqrt{2p^2}}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}}{a^2\ \dfrac{a^2 + 2p^2}{a^2 - 2p^2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\,ap^3}{a^2 + 2p^2}$$

$$\text{vì } SB^2 = SA^2 + a^2 = \frac{4a^2p^2}{a^2 - 2p^2} + a^2 = a^2.\ \frac{a^2 + 2p^2}{a^2 - 2p^2}$$

*Cách 3.* Vì S(AMKN) = 2S(AMK), mà theo ví dụ 3 ta có

$$S(AMK) = \frac{1}{4}(AK^2\sin 2\widehat{AKM} + AM^2\sin 2\widehat{AMK}).$$

Vì $2\widehat{AMK} = 180^0 \Rightarrow \sin 2\widehat{AMK} = 0$, $2\widehat{AKM}$ là góc nhị diện cạnh SC, có $\sin 2\widehat{AKM} = \sin 2\widehat{BPD} = 2\sin\widehat{BPD}\cos\widehat{BPD} =$

$$= 2\frac{OB}{BP}\cdot\frac{OP}{BP} = 2\cdot\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot p}{BP^2} =$$

$$= \frac{ap\sqrt{2}}{\frac{a^2}{2} + p^2} = \frac{2ap\sqrt{2}}{a^2 + 2p^2},\ AK^2 = (2p)^2 = 4p^2, \text{ nên}$$

$$S(AMKN) = 2.\frac{1}{4}\cdot 4p^2\cdot\frac{2ap\sqrt{2}}{a^2 + 2p^2} = \frac{4\sqrt{2}\,ap^3}{a^2 + 2p^2}$$

b) Tỷ số thể tích hai khối.

*Cách 1.* $V(SAMKN) = \frac{1}{3}SK.S_{td} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}\,p^2}{\sqrt{a^2 - 2p^2}} \times$

$$\times\frac{4ap^3\sqrt{2}}{a^2 + 2p^2} = \frac{16ap^5}{3(a^2 + 2p^2)\sqrt{a^2 - 2p^2}} = V_1.$$

Thể tích hình chóp SABCD là $V = \frac{1}{3}AS.S(ABCD) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2ap}{\sqrt{a^2 - 2p^2}}\cdot a^2 = \frac{2a^3p}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}}.$$

Vậy thể tích phần còn lại là

$$V_2 = V - V_1 = \frac{2a^3p}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}} - \frac{16ap^5}{3(a^2 + 2p^2)\sqrt{a^2 - 2p^2}} =$$

$$= \frac{2ap}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}}\left(a^2 - \frac{8p^4}{a^2 + 2p^2}\right) = \frac{2ap}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}} \times$$

$$\times \frac{a^4 + 2a^2p^2 - 8p^4}{a^2 + 2P^2}$$

Vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{2ap}{3\sqrt{a^2 - 2p^2}} \cdot \dfrac{a^4 + 2a^2p^2 - 8p^4}{a^2 + 2p^2} \times$

$$\times \frac{3(a^2 + 2p^2)\sqrt{a^2 - 2p^2}}{16ap^5} = \frac{a^4 + 2a^2p^2 - 8p^4}{8p^4}.$$

*Cách 2.* $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\frac{1}{2}V_2}{\frac{1}{2}V_1} = \dfrac{V(ABCKM)}{V(SAMK)} \Rightarrow$

$$\frac{V_2}{V_1} + 1 = \frac{V(ABCKM)}{V(SAMK)} + 1 = \frac{V(ABCKM) + V(SAMK)}{V(SAMK)} =$$

$$= \frac{V(SABC)}{V(SAMK)} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SC}{SK} = \frac{SB}{SK} \cdot \frac{SC}{SM} = \frac{a^2}{MK^2}$$

Vì $MK = a\dfrac{SK}{SB} \Rightarrow MK^2 = a^2\dfrac{SK^2}{SB^2} \Rightarrow \dfrac{a^2}{MK^2} = \dfrac{SB^2}{SK^2} =$

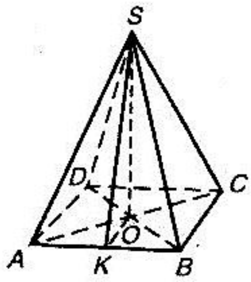
$$= a^2\frac{a^2 + 2p^2}{a^2 - 2p^2} \cdot \frac{a^2 - 2p^2}{8p^4} = \frac{a^4 + 2a^2p^2}{8p^4}$$

Vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{a^4 + 2a^2p^2}{8p^4} - 1 = \dfrac{a^4 + 2a^2p^2 - 8p^4}{8p^4}$

*Nhận xét.* Sở dĩ câu này đưa vào phần áp dụng lượng giá( vì phải dùng công thức lượng giác để rút ra công thức:

$$\frac{V(SABC)}{V(SAMK)} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SC}{SK}$$

*Ví dụ 9.* Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, cho SA = SB = SC = SD = AB = a. Tính thể tích lớn nhất của hình chóp.




*Hình 69*

*Giải:* Do 4 tam giác SAO, SBO, SCO, SDO bằng nhau (bạn đọc tự chứng minh), nên $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO} = x$.
$\Rightarrow$ SO = asinx. Vì $\Delta SAB$ đều, cạnh a, nên đường cao

$$SK = a\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và } \frac{BC}{2} = KO =$$

$$= \sqrt{SK^2 - SO^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - a^2\sin^2 x} = a\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 2a\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 x} \Rightarrow V = \frac{2}{3}a^3 \sin x\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{2}{3}a^3\sqrt{\sin^2 x\left(\frac{3}{4} - \sin^2 x\right)}.$$

Để V lớn nhất, thì $\sin^2 x\left(\frac{3}{4} - \sin^2 x\right)$ phải lớn nhất.

Đây là tích hai số không âm, có tổng không đổi bằng $\frac{3}{4}$ nên lớn nhất khi $\sin^2 x = \frac{3}{4} - \sin^2 x = \frac{3}{8} \Rightarrow$

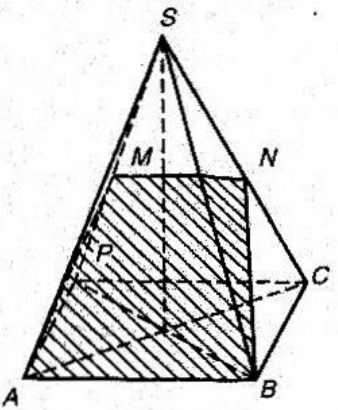
$$V_{max} = \frac{1}{4}a^3.$$

*Nhận xét.*

* Bài này có thể giải bằng phương pháp đại số thông thường.

* Có thể dùng công cụ đạo hàm để tìm $V_{max}$ nhưng phức tạp hơn.

*Ví dụ 10.* Qua cạnh đáy AB của một hình chóp đều SABCD kẻ một mặt phẳng cắt mặt bên đối diện một tam giác có diện tích $16cm^2$. Tìm diện tích xung quanh của hình chóp có đỉnh S và đáy thiết diện nhận được, biết diện tích xung quanh của hình chóp SABCD là $100cm^2$.




*Hình 70*

*Giải:* Gọi góc phẳng ở đỉnh S là x, khi đó $S_{xq}$ cần tìm là:

$$S_{xq} = \frac{1}{2} AS^2\sin x +$$

$$+ AS.SM\sin x + \frac{1}{2} SM^2\sin x.$$

Ta có AS.SMsinx =

$= \sqrt{AS^2\sin x.SM^2\sin x} = 2\sqrt{S.S_1}$,

trong đó $2S = AS^2\sin x$ là hai lần diện tích mặt bên SAB, $2S_1 = SM^2\sin x$ là hai lần diện tích tam giác SMN.

Vì diện tích xung quanh của hình chóp SABCD là $100cm^2$ nên diện tích mặt bên là $25cm^2$. Do đó $S = 25cm^2$, $S_1 = 16cm^2 \Rightarrow S_{xq} = S + 2\sqrt{SS_1} + S_1 = (\sqrt{S} + \sqrt{S_1})^2 =$
$= (5 + 4)^2cm^2 = 81cm^2$.

*Nhận xét 1.* Ta cũng có thể giải như sau:

Vì $\Delta DSC \sim \Delta MSN \Rightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{SC^2}{SN^2}$ ; $\frac{SC}{SN} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}}$ , nhưng

$$\frac{S(BSN)}{S(BSC)} = \frac{SN}{SC} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} \Rightarrow S(BSN) = S.\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \sqrt{S_1S}$$

Bởi vậy: $S_{xq} = S + S_1 + 2\sqrt{S_1S} = (\sqrt{S} + \sqrt{S_1})^2 = (4 + 5)^2 =$
$= 81(cm^2)$.

*Nhận xét 2.* Ta cũng có thể tính

$$S_{xq} = 100 - S(CDMN) - 2S(BNC).$$

Ta có: $S(CDMN) = S - S_1 = 25 - 16 = 9\ (cm^2)$;

$S(BNC) = 25 - S(BSN) = 25 - \sqrt{S_1S} = 25 - 20 =$

$= 5(cm^2) \Rightarrow S_{xq} = 100 - 9 - 2 . 5 = 81(cm^2)$

*Ví dụ 11.* (Đề thi đại học khối A/1987). Trong những nghiệm (x, y, z, t) của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases}$

nghiệm nào làm cho x + z đạt giá trị lớn nhất?

*Giải:* Đặt $x = 3\cos\alpha$, $y = 3\sin\alpha$, $z = 4\cos\beta$, $t = 4\sin\beta$, khi đó bất phương trình trở thành

$$12\sin(\alpha + \beta) \geq 12 \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Ta có $x + z = 3\cos\alpha + 4\cos\beta = 3\cos\alpha + 4\sin\alpha =$

$= 5\sin(\alpha + \varphi)$ với $\varphi$ là góc thoả mãn $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{3}{5} \\ \cos\varphi = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Vậy x + z đạt giá trị lớn nhất khi $\alpha + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

hay $\beta = \varphi + 2k\pi$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, tức là khi

$$x = 3\cos\alpha = 3\sin\varphi = \frac{9}{5},$$

$$y = 3\sin\alpha = 3\cos\varphi = \frac{12}{5},$$

$$z = 4\cos\beta = 4\cos\varphi = \frac{16}{5},$$

$$t = 4\sin\beta = 4\sin\varphi = \frac{12}{5}.$$

*Nhận xét.* Có cách giải bài này mà không dùng lượng giác. Bạn hãy tìm xem!

*Ví dụ 12.* Các số dương x, y , z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16. \end{cases}$$

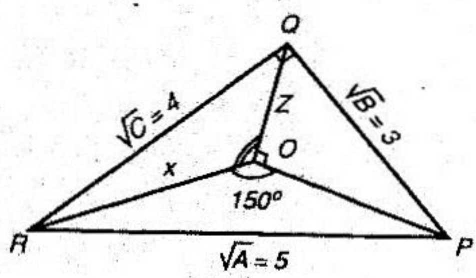
Tính xy + 2yz + 3xz.

*Giải: Cách 1.* Đặt $A = x^2 + (\frac{y}{\sqrt{3}})^2 - 2\frac{y}{\sqrt{3}}\cos 150^o$

$$B = (\frac{y}{\sqrt{3}})^2 + z^2,$$

$$C = x^2 + z^2 - 2xz\cos 120^o.$$

Theo định lý hàm cosin, A là bình phương cạnh thứ ba của tam giác có hai cạnh là x và $\frac{y}{\sqrt{3}}$ với góc giữa chúng là $150^o$, $\sqrt{B}$ là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là $\frac{y}{\sqrt{3}}$ và z, C là bình phương cạnh thứ ba của tam giác có các cạnh x, z và góc ở giữa là $120^o$. Vì $150^o + 90^o + 120^o = 360^0 \Rightarrow$ 3 tam giác có thể dựng kề nhau có đỉnh chung là O. Vì $A = B + C \Rightarrow$




*Hình 71*

$\Delta PQR$ vuông tại Q. Tính diện tích tam giác bằng hai cách ta có:

$$D = xy + 3xz + 2zy = 24\sqrt{3}.$$

(Vì $6 = \frac{zy}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} xz \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{yx}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Nhân hai vế với $4\sqrt{3} \Rightarrow 24\sqrt{3} = xy + 3xz + 2yz$).

*Cách 2.* $A = 25 = x^2 + xy + \frac{y^2}{3}$, $B = 9 = \frac{y^2}{3} + z^2$,

$C = 16 = z^2 + zx + x^2$, $D = xy + 2yz + 3zx$.

Ta có $A = B + C \Rightarrow xy = 2z^2 + xz = z(x + 2z)$, từ đó

$$D = (xy + 2yz) + 3zx = y(x + 2x) + 3zx = y\frac{xy}{z} + 3zx$$

$$= \frac{3x}{z}\left(\frac{y^2}{3} + z^2\right) = \frac{27x}{z}.$$

Mặt khác $D = xy + 2yz + 3zx = 2z^2 + zx + 2yz + 3zx =$

$= 2z(2x + y + z)$, tức là $2x + y + z = \frac{D}{2z} = \frac{27x}{2z^2}$.

Sau nữa $A - B + C = 32 = x(2x + y + z) = x\frac{D}{2z} = \frac{27x^2}{2z^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ (lưu ý $x > 0$, $z > 0$) $\Rightarrow$

$D = 27\frac{x}{z} = 24\sqrt{3}$.

*Ví dụ 13.* Tìm $\min\limits_{(a,b)} \max\limits_{x} |\cos x + a\cos 2x + b\cos 3x|$

*Giải:* Gọi $y(x) = |\cos x + a\cos 2x + b\cos 3x|$. Với mọi giá trị a, b ta đều có $\max\limits_{x} y(x) \geq \max\left\{ y(\frac{\pi}{6}) \cdot y(\frac{5\pi}{6}) \right\} =$

$= \max\left\{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right|, \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right|\right\} \geq \frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right| +\right.$

$\left.+ \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right|\right\} \geq \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right)\right| =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Bởi vậy $\min\limits_{(a,b)} \max\limits_{x} y(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặt $f(x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos 3x$ và tìm cực trị của nó: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) = -\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x = 0 \Rightarrow -2\sin x + (3\sin x - 4\sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ hoặc $\sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Với hàm $y(x) = |f(x)|$ ta có $y(k\pi) = \frac{5}{6} < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$y\left(\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó suy ra

$\max\limits_{x} y(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ và bởi vậy $\min\limits_{(ab)} \max\limits_{x} y(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cuối cùng $\min\limits_{(a,b)} \max\limits_{x} y(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, đạt được khi $a = 0$, $b = -\frac{1}{6}$.

*Nhận xét.* Có thể đặt $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$ và tìm

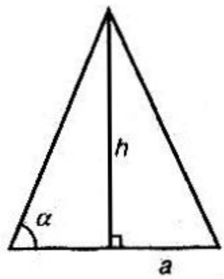
$$\min_{(a,b)} \max_{-1 \leq t \leq 1} |4bt^3 + 2at^2 + (1 - 3b)t - a|$$

bằng phương pháp đại số.

*Ví dụ 14.* Cho hình nón tròn xoay có bán kính đáy là a và đường cao là h. Gọi V là thể tích hình cầu ngoại tiếp, v là thể tích hình cầu nội tiếp, W là thể tích hình nón.

1) Tìm giá trị bé nhất của $\frac{V}{v}$ khi a và h thay đổi.

2) Tìm giá trị bé nhất của $\frac{W}{v}$ khi a và h thay đổi.




*Hình 72*

*Giải: Cách 1.* 1) Cắt hình nón theo thiết diện chứa trục, ta được tam giác cân, chiều cao h, đáy 2a. Gọi góc nhọn ở đáy là α, bán kính hình cầu ngoại tiếp là R, bán kính hình cầu nội tiếp là r ta có

$$r = \frac{a\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}, \quad R = \frac{a}{\sin 2\alpha}$$

Vì $\frac{V}{v} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = (\frac{R}{r})^3$ nên ta tìm giá trị bé nhất của $\frac{R}{r}$ là đủ. Ta có

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \cos\alpha}{2\cos\alpha\sin^2\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)} = \frac{1}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}$$

Để $\frac{R}{r}$ bé nhất thì cosα(1 - cosα) lớn nhất. Vì α nhọn nên cosα > 0, 1 - cosα > 0, do đó tích hai số dương cosα và 1 - cosα có tổng không đổi là 1, nên lớn nhấtkhi cosα = = 1 - cosα = $\frac{1}{2}$ (hệ quả bất đẳng thức Côsi) ⇒ α = 60° và $\frac{R}{r}$ bé nhất là $\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 2$ và giá trị bé nhất của $\frac{V}{v}$ là 8.

2) Cũng ký hiệu như trên ta được $W = \frac{\pi}{3}a^2h = \frac{\pi}{3}a^3tg\alpha$.

$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3\sin^3\alpha}{(1+\cos\alpha)^3}$. Do đó

$$\frac{W}{v} = \frac{1}{4}\frac{tg\alpha(1+\cos\alpha)^3}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{4}\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$$

Để $\frac{W}{v}$ bé nhất thì $\frac{\cos\alpha\,(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2} =$

$= -1 + \frac{3}{1+\cos\alpha} - \frac{2}{(1+\cos\alpha)^2}$ phải lớn nhất $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{1+\cos\alpha} - \frac{2}{(1+\cos\alpha)^2} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos\alpha}\left(3 - \frac{2}{(1+\cos\alpha)}\right)$

phải lớn nhất. Vì $\frac{2}{1+\cos\alpha}\left(3 - \frac{2}{1+\cos\alpha}\right)$ là tích hai số dương, có tổng không đổi là 3, nên lớn nhất khi

$\frac{2}{1+\cos\alpha} = 3 - \frac{2}{1+\cos\alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Khi đó $\frac{W}{v}$ sẽ bé nhất và bằng 2.

*Nhận xét.* Cả câu 1) và câu 2) đều có thể đặt $\cos\alpha = t$. $-1 \le t \le 1$ và dùng công cụ đạo hàm để khảo sát cực trị.

*Cách 2.* 1) Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2+h^2}}$.

$$R = \frac{2a(a^2 + h^2)}{4.ah} = \frac{1}{2}\ \frac{a^2 + h^2}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + h^2}{h} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{ah} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}\right).$$ Đặt $x = \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} > 1.$

ta được $\frac{2R}{r} = \left(x + 1 + \frac{1}{x - 1}\right) = y$. Khảo sát hàm y khi x > 1, ta có

$y' = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = 0$ khi $x = 2 \Rightarrow$

$\min y = y_{min} = y(2) = 4 \Rightarrow \frac{R}{r}$ bé nhất bằng $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ và $\frac{V}{v}$ bé nhất bằng 8.

2) Tương tự câu 1).

*Chú ý 1:* Nếu ta đặt $\frac{h^2}{a^2} = tg^2\alpha$ và sau khi biến đổi tương đương ta lại đưa về $\frac{V}{v} = \frac{1}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}$ như trong cách 1.

*Chú ý 2:* Nếu tính $\frac{W}{v} = \frac{tg\alpha}{4tg^3\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{4\left(1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\right)tg^3\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\left(1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\right)tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

thì áp dụng được ngay bất đẳng thức Côsi đối với $tg^2 \frac{\alpha}{2}$ .

Do vậy $\frac{W}{v}$ đạt giá trị bé nhất khi $tg^2\alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị bé nhất là 2.

## BÀI TẬP

**1.** Cho hàm số $y = 8x^4 - 8x^2 + m$.

1) Tìm m để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

2) Với m vừa tìm được hãy chứng tỏ rằng phương trình $8x^4 - 8x^2 + m = 0$ có đúng 4 nghiệm khác nhau trên đoạn $[-1, 1]$.

**2.** Phương trình $265x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(-1, 0)$?

**3.** 1) Chứng minh rằng diện tích tam giác vuông có thể tích theo công thức $S = \frac{1}{4}c^2\sin 2A$, trong đó A là góc nhọn của tam giác vuông, c là cạnh huyền.

2) Chứng minh rằng diện tích tam giác cân không vượt quá $\frac{2}{3}$ bình phương độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh bên. Khi nào đạt dấu = ?

**4.** 1) Trong tam giác cân ABC (A = B) kẻ trung tuyến $CC_1$ và phân giác $AA_1$ của góc A. Tính góc C, nếu $AA_1 = 2CC_1$.

2) Cho tam giác cân ABC, góc ở đỉnh $C = 108^o$. Tính tỷ lệ giữa cạnh đáy và cạnh bên của tam giác.

3) Nội tiếp trong vòng tròn bán kính R một hình 5 cạnh sao cho AB = BC = DE = R. Gọi M và N là trung điểm của DC và EA tương ứng. Chứng minh rằng $\Delta BMN$ đều.

4) Góc ở đỉnh tam giác đều là $\frac{\pi}{7}$. Chứng minh rằng tỷ số giữa cạnh bên và cạnh đáy là $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$.

**5.** Bán kính vòng tròn nội và ngoại tiếp tam giác là r và R. Ký hiệu x, y và z là khoảng cách từ một điểm M ở trong tam giác đến các đỉnh tam giác, còn u, v và w là khoảng cách từ M đến các cạnh. Chứng minh rằng $xyz \geq \frac{4R}{r}uvw$. Dấu = đạt được nếu M trùng với tâm vòng tròn nội tiếp.

**6.** Cho trên mặt phẳng P góc vuông $m\widehat{O}n$. Đoạn SO = a, SO $\perp$ P. Các điểm M, N chuyển động trên Om, On sao cho ta luôn có OM + ON = a Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh S của góc tam diện SOMN luôn bằng 90°.

**7.** M là một điểm ở trong góc $\widehat{AOB}$, có hình chiếu lên OA là $M_1$, hình chiếu lên OB là $M_2$. Chứng minh rằng diện tích S của tứ giác $OM_1MM_2$ thỏa mãn hệ thức

$$S \leq \frac{1}{2} OM^2 \sin\widehat{AOB}.$$

**8.** Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy.

1) Chứng minh rằng góc phẳng của nhị diện cạnh SC là một góc tù.

2) (Đề thi Đại học A/1981). Một mặt phẳng qua A, $\perp$ cạnh SC, cắt SB, SC, SD lần lượt ở B', C', D'. Cho góc giữa SC và mặt bên SAB là x. Tính tỷ số thể tính của hình chóp SAB'C'D' và hình chóp SABCD theo x, biết rằng AB = BC.

3) Nếu cho SA = h, AB = a, BC = b và góc nhị diện cạnh SC là α, thì diện tích thiết diện AB'C'D' là bao nhiêu?

**9.** Cho hình chóp SABCD, trừ cạnh bên SC, các cạnh còn lại đều bằng a, Tính thể tính lớn nhất của hình chóp ấy.

**10.** 1) Tìm góc nhị diện lập bởi mặt bên và đáy của một hình chóp tứ giác đều, nếu mặt phẳng phân giác của góc nhị diện chia diện tích xung quanh thành 2 phần bằng nhau.

2) Tìm thể tích của một hình chóp tứ giác đều, Nếu cạnh bên bằng a, góc nhị diện lập bởi hai mặt bên là β.

**11.** 1) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, đáy là hình vuông ABCD cạnh bên có độ dài l, góc giữa hai cạnh bên đối diện là $2\alpha < \frac{\pi}{2}$. Qua A và tâm hình cầu ngoại tiếp kẻ một mặt phẳng song song với BD. Tính diện tích thiết diện và thể tích hình chóp cụt nhận được.

2) Cho một hình chóp tam giác đều ABCD, đỉnh A, cạnh của đáy BCD bằng a, chiều cao hình chóp bằng $a\sqrt{2}$. Hình cầu nội tiếp trong hình chóp tiếp xúc với mặt bên ACD ở E. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng đi qua điểm E và cạnh DB.

**12.** Trong các nghiệm của (x,y,z,t) của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases}$

nghiệm nào làm cho giá trị của t đạt giá trị lớn nhất?

**13.** 1) Cho x, y, z là các số không âm sao cho $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

2) Cho hệ $\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

với x, y, z khác không. Tính $9x^2 + 4y^2 + 3z^2$.

3) Cho hệ $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0, \end{cases}$ tính $x^2 + y^2$.

**14.** 1) Tìm

$$\min_{(ab)} \max_{0 \leq x \leq 1} |x + ax^2 + bx^3|$$

2) Trong các tam thức bậc hai có hệ số cao nhất bằng 1 hãy tìm tam thức f sao cho giá tri lớn nhất của $|f(x)|$ trên đoạn $[-1,1]$ đạt giá trị bé nhất.

3) Tìm c và d để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{16}{9} + \frac{7^x + 7^{-x} - 2}{7^x + 7^{-x} + 2} + \right.$$

$$\left. + (c - d)\frac{4}{3}\,\frac{7^x - 1}{7^x + 1} + 2c - 3d \right|$$

bé nhất trên đoạn $[-1, 1]$.

**15.** Cho một hình nón có bán kính đáy bằng R, có đường sinh làm với mặt phẳng đáy một góc φ. Một hình chóp ngoại tiếp với hình nón đó có đáy là một tam giác vuông có một góc nhọn bằng α. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp. Với giá trị nào của α thì diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đạt giá trị nhỏ nhất?

Tìm giá trị bé nhất của tỷ số thể tích hình chóp và thể tích hình nón.

## ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN BÀI TẬP
### Chương IV

**1.** 1) $m = 1$;

2) Chứng minh rằng $8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos 4t$, với $x = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$

**2.** 3 nghiệm . Chỉ dẫn: Đặt $x = \cos t$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ và dẫn về phương trình $\cos 9t = 0$.

**3.** 1) Xem là trường hợp riêng của ví dụ 3. Hoặc viết

$$S = \frac{1}{2} c\sin A . c\cos A = \frac{1}{2} ab.$$

2) Gọi cạnh đáy là c, cạnh bên là b thì dấu = đạt được khi $b = \frac{\sqrt{10}}{2} c$.

**4.** 1) $C = 108^o$; 2) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ; 3) Áp dụng định lý về hàm côsin vào tam giác MON, BOM, BON (O là tâm vòng tròn) và chứng minh rằng $MN^2 = BM^2 = BN^2 = R^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha)$, trong đó $DOC = 2\alpha$;

4) Áp dụng định lý hàm sin vào tam giác ABC với

$$B = \frac{\pi}{7} \Rightarrow A = C = \frac{3\pi}{7} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= 1 + \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Cách khác: Trên cạnh CB lấy CD = CA, CF $\perp$ AD

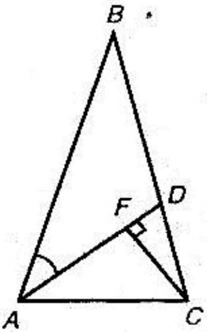
$$\Rightarrow \widehat{ACF} = \frac{1}{2}\widehat{ACD} = \frac{3\pi}{14}$$

$$\widehat{DAC} = \frac{2\pi}{7}, \quad \widehat{BAD} = \frac{\pi}{7}$$

$\Rightarrow$ AD = DB. Trong $\Delta$AFC ta có

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AD = AC\cos\frac{2\pi}{7}.$$

$$\Rightarrow AD = BD = 2AC\cos\frac{2\pi}{7};$$




*Hình 73*

$$BC = AD + AC = 2AC\cos\frac{2\pi}{7} + AC$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{AC} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

5) Chứng minh rằng $8xyz\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq$

$\geq (u + v)(v + w)(w + u)$. Sau đó chứng minh rằng

$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ và áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế phải.

**6.** Đặt $\widehat{OSM} = \alpha$, OSN = $\beta$, MSN = $\gamma$. Dùng định lý hàm côsin cho tam giác SMN và suy ra $\cos\gamma = \sin(\alpha + \beta)$. Lý luận $\gamma.\alpha + \beta$ nhọn $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^0$.

**7.** Chú ý tứ giác $OM_1MM_2$ nội tiếp.

**8.** 1) Qua A kẻ mặt phẳng $\perp$ SC, cắt SB, SC, SD lần lượt ở B', C', D'. Chứng minh rằng góc $\widehat{B'C'D'}$ là góc nhị diện có $tg\widehat{B'C'D'} < 0$. Sử dụng $tg\widehat{B'C'D'} = tg(\widehat{B'C'A'} + \widehat{AC'D'}) =$

$$= \frac{tg\widehat{B'C'A'} + tg\widehat{AC'D'}}{1 - tg\widehat{B'C'A}\ tg\widehat{AC'D'}} < 0 \Rightarrow tg\widehat{B'C'A'}\, tg\widehat{AC'D'} > 1.$$

Chú ý các góc $\widehat{AB'C'} = \widehat{AD'C'} = 1v \Rightarrow SC'^2 < SA^2$ đúng (cạnh góc vuông bé hơn cạnh huyền).

2) $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$ ; 3) $\dfrac{1}{2} h^2 \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}} \left(\dfrac{a^2}{a^2+h^2} + \dfrac{a^2}{b^2+h^2}\right)$.

**9.** Gọi góc $\widehat{SAC} = x \Rightarrow V = \dfrac{1}{6} a^3 \sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(4 - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}$

hoặc đặt $SC = x \Rightarrow V = \dfrac{1}{6} a \sqrt{x^2(3a^2 - x^2)}$ .

Sau đó dùng hệ quả bất đẳng thức Côsi đều được kết quả

$$V_{max} = \frac{a^3}{4}$$

Chú ý phải chứng minh trước SA $\perp$ SC.

**10.** 1) $\alpha = 45^o$ ; 2) $\dfrac{2}{3} a^3 \left(1 - \cot g^2 \dfrac{\beta}{2}\right) \cot g \dfrac{\beta}{2}$ .

**11.** 1) a) $S = \dfrac{l^2 \sin\alpha\, tg\alpha}{\sin 3\alpha}$ ;

b) V(chóp cụt) = $\dfrac{t^3}{3} \sin^2\alpha \left(2\cos\alpha - \dfrac{tg\alpha}{\sin 3\alpha}\right)$.

2) $S_{td} = \frac{\sqrt{219a^2}}{36}$.

**12.** $x = 3$, $y = z = 0$, $t = 4$.

**13.** 2) 5; 3) 2.

**14.** 1) $\frac{1}{3(2+\sqrt{3})}$.

2) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ hoặc $f(t) = \frac{1}{2}\cos 2t$.

3) $c = d = \frac{1}{2}$.

**15.** $S_{xq} = \frac{[R^2(1 + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2})(1 + \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})]}{2\cos\varphi} \Rightarrow S_{xq}$min khi

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{2}$.

$V = \frac{1}{6}R^3\operatorname{tg}\varphi\, l(1 + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2})\,[1 + \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})] \to \min$

khi $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{2}$.

Vậy $S_{xq}$ và V đạt giá trị bé nhất khi $\alpha = 45^o$;

$\frac{V(\text{chóp})}{V(\text{nón})}$ bé nhất bằng $\frac{1}{\pi(\sqrt{2}-1)^2}$ đạt được khi $\alpha = 45^o$.

PHỤ LỤC

# MỘT SỐ ĐỀ TOÁN TỰ LUYỆN

## Đề số 1

I. Cho hàm số:

$$y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

b) Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, tiệm cận xiên của đồ thị luôn luôn đi qua một điểm cố định.

c) Với giá trị nào của m thì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = m$?

Khi đó điểm tiếp xúc là điểm gì của đồ thị?

II. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 3x^2 + 5y^2 = b \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $a = 1$, $b = 2$.

b) Các số a, b phải thỏa mãn điều kiện gì để hệ có nghiệm?

III. a) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có một góc nào đó bằng $60^o$ thì

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (*)$$

b) Ngược lại, hãy chứng tỏ rằng nếu ba góc A, B, C của một tam giác ABC thỏa mãn hệ thức (*), thì tam giác đó phải có ít nhất một góc bằng $60^0$.

IV. Cho hai nửa đường thẳng Am, Bn lập với nhau một góc $\frac{\pi}{3}$, nhận AB = a là đường vuông góc chung.

Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên Am, Bn sao cho ta luôn có AM = 2BN. Đặt BN = x.

a) Chứng minh rằng $MN \perp Bn$. Từ đó suy ra mặt phẳng $\alpha$ qua AB, song song với MN là mặt phẳng cố định. Tính khoảng cách từ M đến $\alpha$ theo x.

b) Tính thể tích tứ diện ABMN theo a, x. Từ đó suy ra khoảng cách từ A đến mặt phẳng BMN.

c) Lấy điểm I trong đoạn AB sao cho $BI = \frac{a}{3}$. Chứng minh rằng mặt phẳng (IMN) chứa một đường thẳng cố định.

V. Giải và biện luận theo m bất phương trình lôgarit

$$\log_x(3x^2 + mx + 4) > 2.$$

## Đề số 2

I. Cho hàm số

$$y = 2x^3 + (2m - 3)x^2 - (3m + 2)x + 3.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m = 4.

b) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị m, hàm số không thể luôn luôn đồng biến.

c) Chứng tỏ rằng với mọi giá trị m, đồ thị của hàm số luôn luôn cắt trục hoành tại ba điểm (phân biệt hay có hai điểm trùng nhau).

II. Giải hệ phương trình

$$\log_x(3x + 2y) = \log_y(3y + 2x) = 2.$$

III. Giải phương trình

$$\sin 4x.\sin x - \sin 3x.\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 3x + \sqrt{1 + \cos x}.$$

IV. Cho trên mặt phẳng α góc vuông $\widehat{mOn}$. Đoạn SO = a vuông góc với mặt phẳng α. Các điểm M, N chuyển động trên Om, On sao cho ta luôn có

$$OM + ON = a.$$

a) Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SOMN.

b) Tìm quỹ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN. Chứng minh rằng khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó lại có bán kính mặt cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh của góc tam diện S.OMN luôn bằng $\pi/2$

d) Chứng minh rằng mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

V. Xác định m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

cũng là nghiệm của bất phương trình

$$mx^2 + (m + 1)x + m + 2 \geq 0.$$

## Đề số 3

I. Với mỗi giá trị m, gọi $H_m$ là đường hypecbôn đồ thị của hàm số

$$y = \frac{mx + m^2 + 2m}{2(x + m)}$$

a) Xác định các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số đi qua điểm (0;2).

b) Tìm quĩ tích Q các điểm M(x;y) sao cho chỉ có một đường $H_m$ duy nhất đi qua điểm M. Nếu $(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc quĩ tích Q, hãy tính giá trị tương ứng $m_0$ của m theo $x_0$ và $y_0$.

II. Xác định tất cả các giá trị m sao cho bất phương trình:

$$\frac{1}{2}\sin 3x + m\sin 2x + \sin x < 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$

III. Cho bất phương trình

$$2x + 1 \geq a(\sqrt{x-1} + 1).$$

a) Giải bất phương trình khi a = 1.

b) Với những giá trị nào của a thì bất phương trình có nghiệm?

IV. Trên cạnh AD của hình vuông ABCD cạnh a, người ta lấy điểm M với AM = x(0 < x < a), và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) người ta lấy điểm S với SA = y (0 < y).

a) Chứng minh rằng nhị diện cạnh SB tạo bởi các mặt phẳng (SBA) và (SBC) là một nhị diện vuông.

b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

c) Tính thể tích hình chóp S.ABCM. Với giả thiết SM luôn luôn bằng a, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM.

d) Gọi I là trung điểm của SC, H là hình chiếu vuông góc của I lên CM. Tìm quĩ tích của H khi M chạy trên AD và S chạy trên Ax

V. A, B, C là ba góc của tam giác tùy ý.

Chứng minh rằng

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4},$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra đối với tam giác đều.

## Đề số 4

I. Với giá trị nào của tham số m, hệ bất phương trình sau có nghiệm;

$$\begin{cases} x^2 - (m+1)x + m < 0, \\ x^2 + (m+3)x + 3m < 0\ . \end{cases}$$

II. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC có ít nhất một góc bằng $60^o$ là

$$\sin 3A + \sin 2B + \sin 3C = 0.$$

III. 1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3$.

2) Trên đồ thị đó lấy hai điểm A, B có hoành độ lần lượt là a, b thỏa mãn điều kiện $0 < a < b$. Tìm trên cung AB của đồ thị ấy một điểm K sao cho tổng diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị và dây AK với hình giới hạn bởi đồ thị và dây BK là nhỏ nhất. Chứng minh rằng tiếp tuyến với đồ thị tại K song song với dây AB.

IV. Trong mặt phẳng (P) cho một điểm O và một đường thẳng (d) cách O một khoảng OH = h. Lấy trên (d) hai điểm B, C sao cho $\widehat{BOH} = \widehat{COH} = \alpha$. Trên đường vuông góc với (P) tại O, lấy điểm A sao cho OA = OB.

1) Tính thể tích của hình tứ diện OABC và khoảng cách từ O tới mặt phẳng (ABC) theo h và $\alpha$.

2) K là một điểm trên đoạn OH, OK = x. Mặt phẳng (Q) vuông góc với OH tại K cắt hình tứ diện theo một thiết diện. Thiết diện ấy hình gì? Tính chu vi của thiết diện ấy theo x, h , $\alpha$ .Chứng minh rằng có một giá trị của $\alpha$ để chu vi ấy không phụ thuộc vào x.

3) $\alpha$ là giá trị vừa tính được, I là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I đi qua tâm vòng tròn ngoại tiếp của tam giác OBC và cắt OA tại D. Tính OD.

V. Chứng minh rằng nếu x, y là hai số dương thỏa mãn phương trình:

$$x^3 + y^3 = x - y$$

thì $x^2 + y^2 \leq 1$.

## Đề số 5

I. Giải

1). $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x - 2}$;

2) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x + 9}} < \sqrt{1 + 2x} - 1$.

II. a, b, c là ba cạnh của một tam giác nội tiếp trong một hình tròn có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ấy có ba góc nhọn là $a^2 + b^2 + c^2 > 8$.

III. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

IV. Cho đường tròn (L) bán kính R, AB là một đường kính cố định của nó, C là một điểm chạy trên (L). S là một điểm trên đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng của (L), SA = a < 2R.

1) Từ A kẻ AI ⊥ SB, AK ⊥ SC. Chứng minh rằng AK vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB), (SBC) theo a, R và $\alpha = \widehat{BAC}$.

2. Tìm vị trí của C trên (L) sao cho đường thẳng nối 2 điểm giữa E, F của AC và SB là đường vuông góc chung của hai đoạn thẳng đó.

3) M là giao điểm của các đường thẳng BC và IK. Tìm quĩ tích của M khi C chạy trên (L).

V. Chứng minh rằng với mọi giá tri của tham số p, q tổng chiều dài các đoạn nghiệm trên trục số của hệ bất phương trình

$$-2 \leq x^2 + px + q \leq 2$$

không lớn hơn 4.

## Đề số 6

I. Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} = \frac{(a+b)^2}{ab}$$

II. Tìm m để cho phương trình:

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + 2(m-2)\frac{x^2}{x^2+1} + m = 0$$

không có nghiệm.

III. A, B, C là ba góc thỏa mãn hệ thức:

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C = 1.$$

Tìm hệ thức giữa các góc A, B, C.

IV. Cho một hình nón có bán kính đáy bằng R, có đường sinh làm với mặt phẳng đáy một góc bằng $\varphi$. Một hình chóp ngoại tiếp với hình nón đó có đáy là một tam giác vuông có góc nhọn bằng $\alpha$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp. Với giá trị nào của $\alpha$ thì diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đạt giá trị nhỏ nhất.

V. Một hình tứ giác lồi, có bốn cạnh lần lượt là a, b, c, d, có diện tích là S. Chứng minh rằng:

$$2S \leq ab + cd,$$

$$2S \leq ac + bd.$$

Khi nào thì xảy ra dấu đẳng thức?

## Đề số 7

I. Cho hàm số: $y = (m + 1)\frac{x^3}{3} - x^2 + (m - 1)x + \frac{1}{3}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 0.

b) Tìm m để hàm số nghịch biến khi x < -1.

II. Cho tam giác ABC; BC = a; CA = b; AC = c.

Giả sử $a = \frac{b + c}{2}$, hãy chứng minh rằng:

$$\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$$

Cho trước $A = \alpha$, hãy tính B, C theo $\alpha$.

Với điều kiện nào đối với $\alpha$ thì bài toán có nghiệm?

III. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\log_2 (y + x) - \log_2 x = 2\log_4 2 + \log_2(3y - x), \\ \log_2\left(\frac{xy + 3}{x^2 - y + 3x - 1}\right) - \log_4\left(\frac{y}{x}\right) = 0. \end{cases}$$

IV. Trong hình tứ diện ABCD các góc phẳng của góc tam diện có đỉnh tại C, D đều bằng $\alpha$; CD = a. Tính thể tích của tứ diện ấy.

V. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4.S\sqrt{3},$$

trong đó a, b, c, S lần lượt là độ dài của ba cạnh và diện tích của tam giác. Khi nào thì xảy ra dấu bằng?

## LỜI GIẢI CÁC ĐỀ TỰ LUYỆN

### Đề số 1

I. a) Bạn hãy tự giải.

b) Ta viết hàm số đã cho dưới dạng:

$$y = mx + m + \frac{1}{x + 2}$$

Khi đó tiệm cận xiên có dạng $y = mx + m$. Từ đó suy ra điểm $A(-1, 0)$ là điểm cố định duy nhất.

c) Để đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = m$, thì phương trình

$$\frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2} = m, \text{ phải có nghiệm kép,}$$

hay phương trình:

$$mx^2 + 2mx + 1 = 0 \text{ có nghiệm kép.}$$

Tức là:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m = 0 \end{cases}$$

Suy ra $m = 1$ và $x = -1$.

Vậy khi $m = 1$ thì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = m$ và khi đó, ứng với $m = 1$, đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

II. a) khi $a = 1$, $b = 2$ ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 3x^2 + 5y^2 = 2. \end{cases}$$

Từ phương trình đầu ta có $y = \frac{1}{5}(1 - 3x)$. Thay giá trị của y vào phương trình thứ hai, sẽ có:

$$8x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Vậy ta được hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$ , $x_2 = \frac{3}{4}$ , tương ứng sẽ có

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ;\ y_2 = -\frac{1}{4}.$$

Ta được hai nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

và $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 3x^2 + 5y = b. \end{cases}$

Từ phương trình đầu của hệ, ta suy ra

$y = \frac{1}{5}(a - 3x)$. Thay vào phương trình thứ hai ta sẽ có

$$24x^2 - 6ax + a^2 - 5b = 0. \qquad (1)$$

Điều kiện để hệ phương trình đã cho có nghiệm là phương trình bậc hai (1) phải có nghiệm, hay:

$$\Delta' = 9a^2 - 24(a^2 - 5b) \geq 0.$$

Suy ra: $8b \geq a^2$.

III. Ta viết (*) dưới dạng:

$$\sqrt{3}\cos A + \sqrt{3}\cos B + \sqrt{3}\cos C = \sin A + \sin B + \sin C,$$

hay: $$(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A) + (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B - \frac{1}{2}\sin B) +$$

$$+ (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C - \frac{1}{2}\sin C) = 0.$$

Vì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^o$ và $\frac{1}{2} = \cos 60^o$.

Vậy: $\sin(A - 60^o) + \sin(B - 60^o) + \sin(C - 60^o) = 0$ (**)

a) Giả sử $A = 60^o$, khi đó $\sin(A - 60^o) = 0$ và

$\sin(B - 60^o) + \sin(C - 60^o) = 2\sin(\frac{B + C}{2} - 60^o) \times$

$\times \cos(\frac{B - C}{2}) = 0$ (vì $\frac{B + C}{2} - 60^o = 0$)

Từ đó suy ra (*) đúng.

b) Ngược lại, nếu có (*) hoặc (**), ta có thể giả thiết:

$A \geq B \geq C$ (khi đó $A \geq 60^o$; $60^o \geq C$).

Ta biến đổi (**):

$\sin(A - 60^o) + \sin(C - 60^o) + \sin(B - 60^o) =$

$= 2\sin(\frac{A + C}{2} - 60^o)\cos(\frac{A - C}{2}) + 2\sin(\frac{B}{2} - 30^o) \times$

$\times \cos(\frac{B}{2} - 30^o) = - 2\sin(\frac{B}{2} - 30^o) \times$

$\times [\cos(\frac{A - C}{2}) - \cos(\frac{B}{2} - 30^o)] = 4\sin(\frac{B}{2} - 30^o) \times$

$\times \sin\frac{1}{2}(\frac{A - C + B}{2} - 30^o) \sin\frac{1}{2}(\frac{A - C - B}{2} + 30^o) = 0.$

1) Nếu $\sin(\frac{B}{2} - 30^o) = 0$, suy ra $\frac{B}{2} = 30^o$, tức $B = 60^o$.

2) Nếu $\sin\frac{1}{2}(\frac{A - C + B}{2} - 30^o) = 0$, thì

$\frac{A - C + B}{2} - 30^o = 0$ hay $(\frac{A}{2} - 30^o) + (\frac{B}{2} - \frac{C}{2}) = 0$

suy ra: $\frac{A}{2} = 30^o$, $\frac{C}{2} = \frac{B}{2}$, vậy tam giác ABC đều.

3) Nếu $\sin\frac{1}{2}\left(\frac{A - C - B}{2} + 30^o\right) = 0$, thì

$\frac{A - C - B}{2} + 30^o = 0$ hay $\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) +$

$+ \left(30^o - \frac{C}{2}\right) = 0$, suy ra: $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$, $\frac{C}{2} = 30^o$, vậy tam giác ABC đều.

IV. Giải.

a) Kẻ $MM_1 = AB$ (hình 74).

Ta được $BM_1 = AM = 2x$.

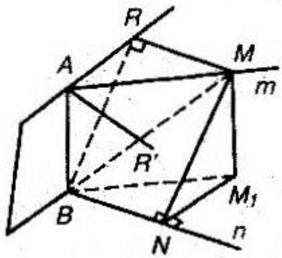
Tam giác $M_1BN$ có

$\widehat{M_1BN} = \frac{\pi}{3}$, $BM_1 = 2.BN$

nên $M_1N \perp BN \Rightarrow MN \perp Bn$.

Vậy $\alpha$ sẽ là mặt phẳng vuông góc với Bn tại B.

Do $MN // \alpha$, nên $d(M, \alpha) = d(N, \alpha) = x$.



*Hình 74*

b) $v(ABMN) = v(ABNM_1) = \frac{1}{3}M_1N.\frac{1}{2}AB.BN =$

$$= \frac{1}{3}x\sqrt{3}.\frac{1}{2}a.x = \frac{ax^2\sqrt{3}}{6},$$

và $v(ABMN) = \frac{1}{6}AH.BN.MN = \frac{1}{6}AH\,x\sqrt{a^2 + 3x^2} =$

$$= \frac{ax^2\sqrt{3}}{6}.$$

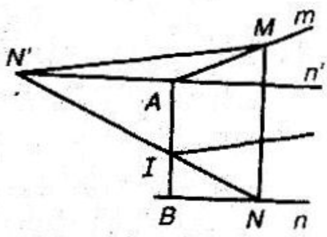
Từ đó suy ra d(A, BMN) = AH = $\dfrac{ax\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3x^2}}$

c) Kẻ đường An'//Bn.

Đường NI cắt An' tại N' (hình 75).

Ta có AN' = $\dfrac{IA}{IB}$ ;

BN = 2x = AM. Từ đó suy ra tam giác AMN' cân và do đó phương của MN cố định. Vậy đường thẳng qua I song song với MN' cố định và luôn nằm trong mặt phẳng [IMN].



*Hình 75*

V. $\log_x(3x^2 + mx + 4) > 2 = \log_x x^2$.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ 3x^2 + mx + 4 > 0, \end{cases}$ khi đó bất phương trình tương đương với

$$(x - 1)(3x^2 + mx + 4 - x^2) > 0, \text{ hay}$$
$$(x - 1)(2x^2 + mx + 4) > 0.$$

1) Khi $x > 1$ thì $2x^2 + mx + 4 > 0$,

$$\Delta = m^2 - 32.$$

$\Delta < 0$ khi $-4\sqrt{2} < m < 4\sqrt{2}$ và khi đó $x > 1$ là nghiệm.

$\Delta = 0$ khi $m = \pm 4\sqrt{2}$ khi đó $x > 1$ là nghiệm, trừ giá trị $x = -\dfrac{m}{4} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$, ứng với $m = -4\sqrt{2}$.

$\Delta > 0$ khi $m > 4\sqrt{2}$ hoặc $m < -4\sqrt{2}$.

Khi đó nghiệm: $x > \dfrac{-m + \sqrt{m^2 - 32}}{4}$ (1)

$$x < \frac{-m - \sqrt{m^2 - 32}}{4} \qquad (2)$$

a) Nếu n > $4\sqrt{2}$, thì nghiệm (2) bị loại. Nghiệm của bất phương trình là:

$$x > \max\left\{1, \frac{-m + \sqrt{m^2 - 32}}{4}\right\}$$

b) Nếu $m < -4\sqrt{2}$, thì $\dfrac{-m + \sqrt{m^2 - 32}}{4} > 1$, nên nghiệm (1) thỏa mãn.

Khoảng nghiệm thứ hai tồn tại khi:

$1 < \dfrac{-m - \sqrt{m^2 - 32}}{4}$, tức là $4 < -m - \sqrt{m^2 - 32} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{m^2 - 32} < -m - 4$

$\Rightarrow m^2 - 32 < m^2 + 8m + 16 \Rightarrow -48 < 8m \Rightarrow m > -6.$

Vậy khi: $-6 < m < -4$, thì:

$$1 < x < \frac{-m + \sqrt{m^2 - 32}}{4} \text{ là nghiệm;}$$

Khi $m \le -6$, thì bất phương trình vô nghiệm.

2) Khi $0 < x < 1$, thì $2x^2 + mx + 4 < 0$.

a) Nếu $\Delta \le 0$, bất phương trình vô nghiệm. .

b) Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4\sqrt{2}, \\ m < -4\sqrt{2}. \end{array}\right.$

$$\frac{-m - \sqrt{m^2 - 32}}{4} < x < \frac{-m + \sqrt{m^2 - 32}}{4}$$

Khi $m > 4\sqrt{2}$, thì $\dfrac{-m - \sqrt{m^2 - 32}}{4} < 0$

và $\dfrac{-m + \sqrt{m^2 - 32}}{4} < \dfrac{-m + m}{4} = 0.$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Khi $m < -4\sqrt{2}$ , thì nghiệm là:

$$0 < \frac{-m - \sqrt{m^2 - 32}}{4} < x < 1.$$

**Đề số 2**

I. $y = 2x^3 + (2m - 3)x^2 - (3m + 2) x + 3$.

a) Đề nghị bạn đọc tự giải.

b) $y' = 6x^2 + 2(2m - 3)x - (3m +2)$.

Vì $\Delta' = (2m - 3)^2 + 6(3m + 2) = 4m^2 + 6m + 21 =$

$$= (4m^2 + 2 .4m. \frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2}) + 21 - \frac{9}{16} =$$

$$= (2m + \frac{3}{4})^2 + 20\frac{7}{16} > 0,$$ với mọi m,

suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ ứng với mọi m.

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, thì khi $x_1 < x < x_2$ ta có $y' < 0$.

c) Nhận xét rằng $2x^3 + (2m - 3)x^2 - (3m + 2) x + 3 = 0$ có nghiệm $x = \frac{3}{2}$ Suy ra:

$$2x^3 + (2m - 3) x^2 - (3m + 2)x + 3 =$$
$$= 2(x - \frac{3}{2}) (x^2 + mx - 1)$$

Ta thấy rằng phương trình: $x^2 + mx - 1 = 0$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt vì $\Delta > 0$, với mọi m.

II. $\log_x(3x + 2y) = \log_y(3y + 2x) = 2$.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ y > 0, y \neq 1, \\ 3x + 2y > 0, \\ 3y + 2x > 0. \end{cases}$

$$3x + 2y = x^2,$$
$$3y + 2x = y^2$$
$\Rightarrow 3(x - y) + 2(y - x) = x^2 - y^2.$

1) $y = x \Rightarrow 3x + 2x = x^2 = 5x \left\langle \begin{array}{l} x = 0 : \text{loại}, \\ x = 5 \end{array} \right.$

Đáp số: $x = y = 5$.

2) $y = 1 - x \Rightarrow$

$3x + 2(1 - x) = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 : \text{loại}, \\ x = 2 \Rightarrow \\ y = -1 : \text{loại}. \end{array} \right.$

Vậy nghiệm là $x = y = 5$.

III. $\sin4x\sin x - \sin3x\sin2x = \dfrac{1}{2}\cos3x + \sqrt{1 + \cos x} \Leftrightarrow$

$\cos3x - \cos5x - \cos x + \cos5x = \cos3x + \sqrt{1 + \cos x}$

$\Leftrightarrow -\cos x = \sqrt{1 + \cos x}$.

1) $\cos x > 0$, phương trình vô nghiệm;

$\cos x < 0 \Rightarrow \cos^2x = \cos x + 1$

$\Leftrightarrow \cos^2x - \cos x - 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} : \text{loại}, \\ \cos x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = \cos\alpha \Rightarrow \end{array} \right.$

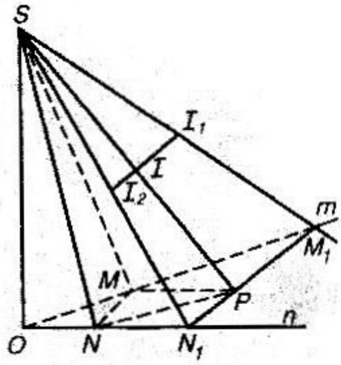
$\Rightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi$.

IV. (Hình 76).

Đặt $OM = x$, $ON = y$; $x + y = a$.

a) $V(SOMN) = \dfrac{1}{6}axy \leq \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{x + y}{2}\right)^2 = \dfrac{a}{6} \cdot \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^3}{24}$

Vậy $V_{max} = \dfrac{a^3}{24}$ đạt được khi $OM = ON = \dfrac{a}{2}$




*Hình 76*

b) Dựng hình chữ nhật OPMN. Hình chóp SOMPN có các đỉnh O, M, N nhìn đoạn SP dưới góc vuông nên nội tiếp trong mặt cầu đường kính SP. Vậy đây cũng là đường kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN $\Rightarrow$ I là điểm giữa SP.

Do OM + ON = a, nên P chạy trên đoạn $M_1N_1$ là đáy của tam giác vuông cân $OMN_1$ có $OM_1 = ON_1 = a \Rightarrow$ $I \in [I_1, I_2]$ là đường trung bình của tam giác đều $SM_1N_1$ có cạnh là $a\sqrt{2}$

$$R = \frac{1}{2}\ SP = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Do đó: $R_{min} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, đạt được khi $OM = ON = \dfrac{a}{2}$, tức là đồng thời với khi $V(SMNO)_{max}$

Đặt $\widehat{OSM} = \alpha$; $\widehat{OSN} = \beta$; $\widehat{MSN} = \gamma$.

c) Dùng định lý hàm số côsin cho tam giác SMN:

$$\cos\gamma = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM.SN} = \frac{SO^2}{SM.SN} =$$

$$= \frac{SO(OM + ON)}{SM.SN} = \frac{SO}{SM} \cdot \frac{ON}{SN} + \frac{SO}{SN} \cdot \frac{OM}{SM} =$$

$$= \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha = \sin(\alpha + \beta)$$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$

d) Gọi E là điểm giữa $M_1N_1$. Dựng đoạn EK $\overset{//}{=} \dfrac{1}{2}$ OS.

Mặt cầu tâm K, bán kính KE $= \dfrac{a}{2}$ sẽ luôn luôn tiếp xúc với mặt phẳng (SMN).

**V.** Để mọi nghiệm của $x^2 - 3a + 1 \leq 0$ $(1 \leq x \leq 2)$ là nghiệm của $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + m + 2 \geq 2$ thì phải có $f(x) \geq 0$ trên đoạn [1,2].

1) Khi $m = 0$, thì $f(x) = x + 2 \geq 0$ khi $-2 \leq x$, vậy $m = 0$ là một giá trị phải tìm.

2) Khi $m > 0$, thì hoành độ đỉnh là $-\dfrac{m + 1}{2m} < 0$.

Vậy tam thức bậc hai f(x) đồng biến trong khoảng [1,2] nên giá trị nhỏ nhất của f(x) trên đoạn đó bằng f(1). Vậy phải có:

$f(1) = m + m + 1 + m + 2 = 3m + 3 \geq 0.$

Suy ra: $m \geq -1$.

Kết hợp các kết quả lại, ta có: $m > 0$.

3) $m < 0$, khi đó để $f(x) \geq 0$ trên khoảng [1,2], thì ta phải có đồng thời:

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 3 \geq 0 \\ 7m + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \geq -\frac{4}{7}$$

Kết hợp: $-\dfrac{4}{7} \leq m \leq 0$.

**Đáp số:** $m \geq -\dfrac{4}{7}$.

## Đề số 3

1. a) Theo giả thiết, ta phải có:

$$2 = \frac{2m.0 + m^2 + 2m}{2(0 + m)}, \text{ hay } 2 = \frac{m^2 + 2m}{2m} =$$

$$= \frac{m + 2}{2} \quad (m \neq 0).$$

Giải phương trình này ta thu được m = 2.

b) Ta cần xác định các điểm $A(x_o, y_o)$, sao cho phương trình $y_o = \dfrac{2mx_o + m^2 + 2m}{2(x_o + m)}$ có nghiệm duy nhất, hay hay phương trình

$m^2 + 2(1 + x_o - y_o)m - 2x_oy_o = 0$ (1) có nghiệm duy nhất.

Vậy $\Delta' = (1 + x_o - y_o)^2 + 2x_oy_o = 0$. (2)

Tức là $(x_o + 1)^2 + (y_o - 1)^2 = 1$. Đây là phương trình của đường tròn, có tâm tại điểm (-1,1), bán kính bằng 1.

Với các điểm $A(x_o, y_o)$ thỏa mãn điều kiện này, phương trình (1) có nghiệm kép là: $m = y_o - x_o - 1$.

**II.** Ta có $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ nên:

$$\frac{1}{3}\sin 3x + m\sin 2x + \sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x(2\cos^2 x - 3m\cos x + 1).$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm trong $(0, \pi)$ khi và chỉ khi bất phương trình:

$2\cos^2 x - 3m\cos x + 1 < 0$ có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Đặt $\cos x = t$, khi đó $-1 < t < 1$.

Vậy ta cần xác định m để bất phương trình bậc hai: $f(t) = 2t^2 - 3mt + 1 < 0$ (1) có nghiệm trong khoảng (-1,1).

1) Khi $-1 < \frac{3m}{4} < 1$, tức $-\frac{4}{3} < m < \frac{4}{3}$, thì bất phương trình (1) có nghiệm trong khoảng (-1, 1) khi và chỉ khi: $\Delta = 9m^2 - 8 > 0$, tức là $m > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ hoặc $m < -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kết hợp các kết quả, ta có

$$-\frac{4}{3} < m < -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad ; \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} < m < \frac{4}{3}.$$

2) Khi $\frac{3m}{4} \leq -1$, tức là $m \leq -\frac{4}{3}$, thì bất phương trình (1) có nghiệm trong khoảng (-1, 1) khi và chỉ khi giá trị nhỏ nhất của f(t) trong khoảng [-1, 1] nhỏ hơn 0, tức là $f(-1) = 3m + 3 < 0$, hay $m < -1$.

Kết hợp: $m \leq -\frac{4}{3}$.

3) Khi $\frac{3m}{4} \geq 1$, tức là $m \geq \frac{4}{3}$, thì bất phương trình (1) có nghiệm trong khoảng (-1, 1) khi và chỉ khi:

$f(1) = 3 - 3m < 0$, tức là $m > 1$. Kết hợp: $m \geq \frac{4}{3}$.

Tóm lại: với mọi m thỏa mãn $|m| > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ bất phương trình đã cho đều có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

**III.** a) Khi a = 1, bất phương trình có dạng:

$$2x + 1 > \sqrt{x - 1} + 1. \qquad (1)$$

Điều kiện: $\sqrt{x - 1} \geq 0$ hay $x \geq 1$. (2)

Từ phương trình (1) suy ra $2x \geq \sqrt{x - 1}$.

Với điều kiện (2), ta có thể bình phương hai vế của bất phương trình:

$$4x^2 \geq x - 1 \text{ hay } 4x^2 - x + 1 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này nhận mọi x là nghiệm. Suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \geq 1$.

b) $2x + 1 \geq a(\sqrt{x - 1} + 1)$. (3)

Đặt $\sqrt{x - 1} = t$, khi đó $t \geq 0$ và $x = t^2 + 1 \geq 1$

Bất phương trình (3) có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình bậc hai:

$2(t^2 + 1) + 1 \geq a(t + 1)$ có nghiệm, hay bất phương trình: $f(t) = 2t^2 - at + 3 - a \geq 0$ có nghiệm $t \geq 0$.

Trường hợp $a \leq 0$ ta có $f(1) = 5 - 2a > 0$.

Trường hợp $a > 0$ ta có:

$f(a + 1) = 2(a + 1)^2 - a(a + 1) + 3 - a = a^2 + 2a + 5 =$

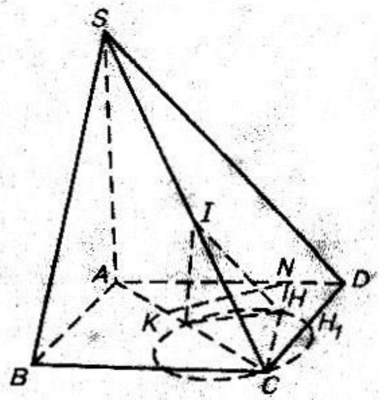
$= (a + 1)^2 + 4 > 0$.

Vậy với mọi a bất phương trình (3) đều có nghiệm.

**IV.** (Hình 77). a) Do $BC \perp BA$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SBA)$; mặt (SBC) chứa $BC \perp (SBA)$ nên $(SBC) \perp (SBA)$.

b) Do $BD \perp (SAC)$ nên kẻ $MK \parallel BD$ ($K \in AC$) thì MK là độ dài cần tính. Dễ thấy

$$MK = \frac{AM\sqrt{2}}{2} = \frac{x.\sqrt{2}}{2}.$$




*Hình 77*

c) $v(SABCM) = \frac{1}{3} SA . \frac{1}{2} AB(BC + AM) = \frac{a}{6} y(a + x)$.

Theo giả thiết $SM^2 = a^2 = SA^2 + AM^2 = x^2 + y^2$. Vậy

$$v = \frac{a}{6}(a + x)\sqrt{a^2 - x^2};$$

$v' = \frac{a}{6}\left(\frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$. Do biểu thức ở tử số của v' triệt tiêu tại $x_1 = -a$ và $x_2 = \frac{a}{2}$ , và vì $0 < x < a$ nên ta có bảng biến thiên sau:

| x | 0 | | a/2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| v' | | + | 0 | - | |
| v | | | $v_{max}$ | | |
| | $\frac{a^3}{6}$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | 0 |

*Bảng 6*

Từ đó ta có $v_{max} = v\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$, đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

d) Hình chiếu của I trên (ABCD) là tâm O của hình vuông. Do đó theo định lý ba đường vuông góc, sẽ có H nằm trên đường tròn đường kính OC của mặt phẳng (ABCD). Khi M chạy trên đoạn AD thì H (là giao điểm của CM với đường tròn) chạy trên cung $OH_1$ ($H_1$ là điểm giữa đoạn CD). Cung này bằng 1/4 đường tròn đang xét trừ hai điểm O và $H_1$.

**V.** Ta biến đổi

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$$

$$= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C =$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C =$$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C =$$

$$= 2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C \leq \frac{9}{4},$$

hay $-\cos^2 C + \cos C\cos(A - B) - \frac{1}{4} \leq 0.$

Xét tam thức bậc hai:

$$f(t) = -t^2 + t\cos(A - B) - \frac{1}{4}$$

ta có $\Delta = \cos^2(A - B) - 1 = -\sin^2(A - B) \leq 0.$

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t = \frac{1}{2}\cos(A - B) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sin(A - B) = 0 \\ \cos C = \frac{1}{2}\cos(A - B) \end{cases}$$

Từ hệ thức đầu suy ra A = B. Thay vào hệ thức thứ hai ta được $\cos C = \frac{1}{2}$ tức $C = \frac{\pi}{2}$. Vậy tam giác ABC là đều.

*Nhận xét.* Xem thêm cách giải ở ví dụ 3 §1, chương VI.

## Đề số 4

I. *Cách 1.*

Gọi $\begin{cases} f_1(x) = x^2 - (m+1)x + m, f_1(x) < 0, \\ f_2(x) = x^2 + (m+3)x + 3m, f_2(x) < 0. \end{cases}$ (1)

Bất phương trình $f_1(x) < 0$ có nghiệm khi phương trình $f_1(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, ta ký hiệu bằng $x_1$ và $x_2$ $(x_1 < x_2)$ và khi đó nghiệm là các x thỏa mãn $x_1 < x < x_2$, tức là khi $\Delta_1 = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 > 0$, hay khi $m \neq 1$ và khi đó

$$x_1 = \frac{(m+1) - |m-1|}{2} < x <$$

$$< \frac{(m+1) + |m-1|}{2} = x_2.$$

Như vậy, khi $m < 1$, ta có $x_1 = m < x < 1$, thì $f_1(x) < 0$ có nghiệm: (2)

Khi $m > 1$, ta có $x_1 = 1 < x < m$, thì $f_1(x) < 0$ có nghiệm.

Bất phương trình $f_2(x) < 0$ có nghiệm khi phương trình $f_2(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt được ký hiệu bằng $x'_1$ và $x'_2$ $(x'_1 < x'_2)$ và khi đó nghiệm là các x thỏa mãn $x'_1 < x < x'_2$, hay khi

$\Delta_2 = (m+3)^2 - 12m = (m-3)^2 > 0$, vậy $m \neq 3$;

$$x'_1 = \frac{-(m+3) - |m-3|}{2} < x <$$

$$< \frac{-(m+3) + |m-3|}{2} = x'_2.$$

Như vậy, khi $m < 3$, ta có $x'_1 = -3 < x < -m = x'_2$;
khi $m > 3$, ta có $x'_1 = -m < x < -3 = x'_2$. (3)

Kết hợp các kết quả ở (2) và (3) ta có:

| $m < 1$: | $1 < m < 3$: | $m > 3$: |
|---|---|---|
| Để hệ (1) có nghiệm ta phải có đồng thời | Để hệ (1) có nghiệm ta phải có đồng thời | Để hệ (1) có nghiệm ta phải có đồng thời |
| $m < x < 1$, | $1 < x < m$, | $1 < x < m$, |
| $-3 < x < -m$. | $-3 < x < -m$. | $-m < x < -3$. |
| Vậy $m < 0$, thì hệ có nghiệm. | Vậy hệ vô nghiệm. | Vậy hệ vô nghiệm. |

Kết luận: Hệ (1) có nghiệm khi $m < 0$.

*Cách 2.* Ta thấy tam thức $x^2 - (m + 1)x + m$ có $(m + 1) = m + 1$ và $m = m.1$, nên theo định lý Viét suy ra tam thức luôn có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = m$.

Tương tự tam thức $x^2 + (m + 3)x + 3m$ cũng luôn có hai nghiệm $x_1' = -3$ và $x_2' = -m$. Do đó bất phương trình (1) và (2) có các khoảng nghiệm xen giữa 1 và m ($m \neq 1$).; -3 và -m ($m \neq 3$). Muốn hệ đã cho có nghiệm $m \neq 1$, $m \neq 3$ và đồng thời, hai khoảng đó phải giao nhau.

Nếu $m > 3$ thì các khoảng nghiệm trên cụ thể là $(1; m)$ và $(-m; -3)$ rời nhau; vậy hệ vô nghiệm.

Nếu $1 < m < 3$ thì hai khoảng nghiệm là $(1 ; m)$ và $(-3; -m)$ cũng rời nhau, hệ vô nghiệm.

Nếu $0 \le m < 1$, hai khoảng nghiệm là $(m ; 1)$ và $(-3 ; -m)$ rời nhau, hệ vô nghiệm.

Nếu $m < 0$, hai khoảng nghiệm là $(m; 1)$ và $(-3; -m)$ có phần giao nhau, hệ có nghiệm. Tóm lại hệ có nghiệm khi $m < 0$.

**II.** Xem ví dụ 3 §3, chương VI.

**III.** 1) Hàm số $y = x^3$ xác định với mọi giá trị của x. Đạo hàm $y' = 3x^2 \ge 0$ ($\forall x$) nên hàm số luôn luôn đồng biến

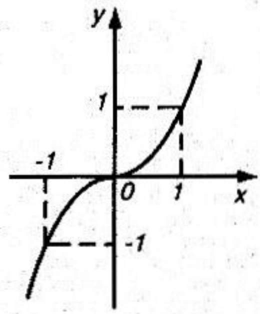
$y' = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$, $y'' = 6x = 0$ khi $x = 0$ và đổi dấu khi qua giá trị đó, nên đồ thị có điểm uốn tại điểm $(0, 0)$; đồng thời, tại điểm đó đồ thị cũng tiếp xúc với trục hoành và trục hoành xuyên qua đồ thị.

$-y(x) = -x^3 = y(-x)$, nên hàm số là hàm số lẻ nhận điểm gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

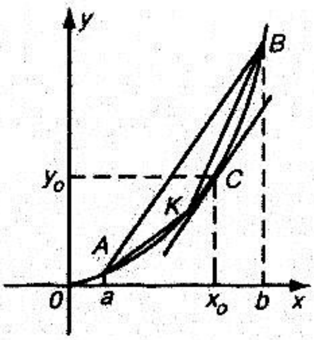
Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | $+\infty$ | + | 3 | + | 0 | + | 3 | + | $+\infty$ |
| y | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

2) Muốn cho tổng diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm $y = x^3$ và các dây cung AK và BK nhỏ nhất thì diện tích của tam giác AKB phải lớn nhất. Nhưng vì độ dài của AB không đổi nên khoảng cách từ điểm K đến dây cung AB phải lớn nhất. Ta thấy rằng khoảng cách từ K đến AB lớn nhất khi và chỉ khi điểm K trùng với điểm C, tại đó tiếp tuyến với đồ thị song song với AB. Thực vậy, vì $y'' = 6x > 0$ khi $x > 0$, nên đường cong $y = x^3$ là đường cong lồi nên nó luôn luôn ở phía trên đường tiếp tuyến. Vì vậy, mọi điểm K nằm trên cung AB có khoảng cách đến AB bé hơn khoảng cách từ C đến AB và khoảng cách đó lớn nhất khi K trùng với C.




*Hình 78*




*Hình 79*

Bây giờ ta tìm cách xác định điểm C. Dễ dàng thử lại rằng đường thẳng đi qua hai điểm A và B có phương trình $y = (a^2 + ab + b^2)x - ab(a + b)$.

Vì vậy hoành độ $x_o$ của điểm C tại đó tiếp tuyến với đồ thị song song với AB thỏa mãn điều kiện:

$$y'(x_o) = 3x_o^2 = a^2 + ab + b^2$$

hay

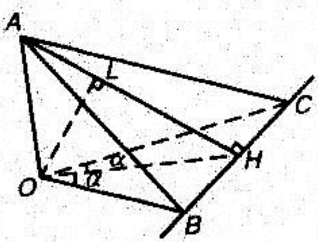
$$x_o = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \quad y_o = \sqrt{\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right)^3}$$

**IV.** 1) $V_{OABC} = \frac{1}{3}S(OBC).OA = \frac{1}{3}\frac{h^3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$$= \frac{1}{3}h^3tg^2\alpha$$

vì $S(OBC) = \frac{1}{2}OB^2\sin^2\alpha = \frac{h^2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

$$OA = OB = \frac{h}{\cos\alpha}$$




*Hình 80*

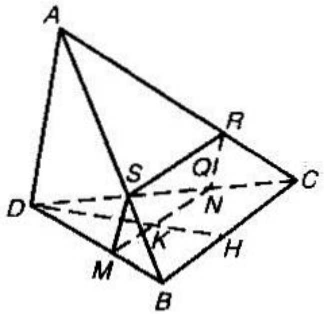
Vì OH ⊥ BC, AH ⊥ BC, nên BC ⊥ (AOH). Vậy (AOH) ⊥ (ABC). Ta có đường cao OL hạ từ O của Δ OAH cũng vuông góc với (ABC) và là đường cao của hình chóp OABC. Vậy OL là khoảng cách từ O đến (ABC).

Trong $\Delta AOH$, ta có:

$$OI.AH = AO.OH;$$

từ đó ta có: $OL = \dfrac{h}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}$

2) Vì $(Q) \perp OH$, $OA \perp OH$ nên $(Q)//OA$, nên giao tuyến của (Q) với (AOB) là $MS//OA$; tương tự giao tuyến của (Q) với (AOC) là $NR//OA$. Vậy $MS//NR$.




*Hình 81*

Lý luận tương tự ta có $RS//MN$. Vậy tứ giác MNRS là hình bình hành. Mặt khác $MS//OA$ mà $OA \perp (OBC)$ nên $MS \perp (OBC)$ hay $MS \perp MN$, vậy MNRS là hình chữ nhật.

Vì $MN//BC$ nên, ta có:

$$\frac{OK}{OH} = \frac{MN}{BC} \qquad MN = \frac{OK.BC}{OH} = \frac{x.2htg\alpha}{h} = 2xtg\alpha .$$

Vì $NP//OA$, nên

$$\frac{NR}{OH} = \frac{NC}{OC} = \frac{KH}{OH} \text{ hay } NR = \frac{OA.HK}{OH} =$$

$$= \frac{h}{\cos\alpha} \cdot \frac{(h - x)}{h} = \frac{h - x}{\cos\alpha}$$

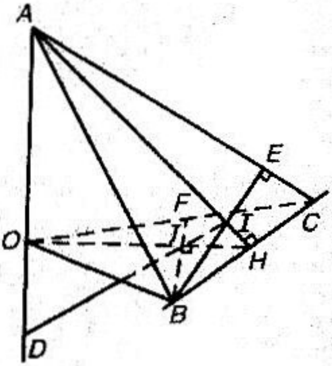
Chu vi của thiết diện bằng

$$2p = 4xtg\alpha + \frac{2.(h - x)}{\cos\alpha} = \frac{2(2\sin\alpha - 1)x + 2h}{\cos\alpha}$$

Từ đó suy ra khi $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, tức là $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, thì chu vi không phụ thuộc vào x và khi đó $\Delta OBC$ là tam giác đều.

3) Theo chứng minh ở điểm 1) ta có $(AOH) \perp (ABC)$, vì AH là giao tuyến của (AOH) và (ABC), nên đường thẳng vuông góc với (ABC) đi qua trực tâm I của $\Delta ABC$ phải nằm trong mặt phẳng (AOH). Vì đường thẳng đó vuông góc với AH, nó không thể //OH và OA, nên phải cắt OH, chẳng hạn tại J và phải cắt AO kéo dài, chẳng hạn tại D. Ta chỉ còn phải chứng minh J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OBC$. Thật vậy, ta có I là giao điểm AH với đường cao BE của $\Delta ABC$, hay $BI \perp AC$, mà $IJ \perp (ABC)$, hay $IJ \perp AC$, nên $AC \perp (BIJ)$. Từ đó $AC \perp BJ$ mà $OA \perp (OBC)$ hay $OA \perp BJ$, nên $BJ \perp (OAC)$, hay $BJ \perp OC$. Vậy J là trực tâm của $\Delta OBC$. Nhưng tam giác đó đều nên J cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OBC$.

Tính OD: Xét $\Delta ODJ$ và $\Delta OHA$ là hai tam giác vuông có $D = H$, vì cùng phụ với $\widehat{OAH}$, nên hai tam giác đó đồng dạng.



*Hình 82*

Vậy $\dfrac{OD}{OH} + \dfrac{OJ}{OA}$;

$$\text{từ đó } OD = \frac{OH.\ OJ}{OA} = \frac{h.\ \dfrac{2}{3}h}{\dfrac{h}{\cos 30^0}} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$$

**V.** Xét trường hợp vế phải $x - y \le 0$, trong khi đó theo giả thiết $x > 0$, $y > 0$, nên vế trái $x^3 + y^3 > 0$.

Vậy trường hợp này không xảy ra.

Ta xét $x - y > 0$,

ta có $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} \geq 0$, hay

$$x^2 - xy - 2y^2 \geq 0$$

Vì $y > 0$, nên ta có

$$y(x^2 - xy + 2y^2) \geq 0.$$

Vậy $y^3 + x^3 \geq y^3 + x^3 - (2y^2 - xy + x^2)y = x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y = (x - y)(x^2 + y^2)$.

Theo giả thiết $x - y = x^3 + y^3$, nên từ bất đẳng thức đó ta có

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

## Đề số 5

**I.** 1) Giải phương trình: $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x - 2}$. (1)

Điều kiện để các căn có nghĩa là:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 2x - 1 \geq 0, \\ 3x - 2 \geq 0; \text{ từ đó suy ra } x \geq \dfrac{2}{3}. \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), ta có:

$$\sqrt{x + 3} = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{3x - 2}. \quad (3)$$

Vì cả hai vế đều không âm, ta bình phương hai vế và được phương trình tương đương:

$$3 - 2x = \sqrt{(2x - 1)(3x - 2)}. \quad (4)$$

Để phương trình (4) có nghĩa ta cần có thêm điều kiện:

$$3 - 2x \geq 0, \text{ hay } x \leq \frac{3}{2}. \quad (5)$$

Với điều kiện (5) phương trình (4) tương đương với:

$$2x^2 + 5x - 7 = 0. \quad (6)$$

Nghiệm của (6) là $x = 1$ và $x = -\frac{7}{2}$. Nhưng chỉ $x = 1$ thỏa mãn các điều kiện (2) và (5), nên nghiệm là $x = 1$.

2) Giải bất phương trình:

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{2x+1} - 1. \quad (1)$$

Điều kiện để các biểu thức có nghĩa là:

$$\begin{cases} 2x + 9 > 0, \\ 2x + 1 \geq 0; \end{cases} \text{ hay } x \geq -\frac{1}{2}.$$

Từ (1), ta có:

$$2x < \sqrt{(2x+1)(2x+9)} - \sqrt{2x+9}. \quad (2)$$

Ta xét hai trường hợp a) $x > 0$; b) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

a) Vì $x > 0$ nên $2x + 1 > 1$ và vế phải của (2) là $(\sqrt{2x+1} - 1).\sqrt{2x+9} > 0$. Vậy hai vế của (2) cùng dương.

Bình phương hai vế của (2) ta được bất phương trình tương đương.

$$(2x + 9).\sqrt{2x+1} < 11x + 9. \quad (3)$$

Vì hai vế đều dương, nên có thể bình phương cả hai vế của (3) ta được:

$8x^3 - 45x^2 < 0$. Vậy nghiệm cần tìm là $0 < x < \frac{45}{8}$.

b) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1), vậy chỉ cần xét $-\frac{1}{2} \le x < 0$. Khi đó cả hai vế của (2) đều âm nên khi bình phương hai vế và đổi chiều của bất đẳng thức ta được bất phương trình tương đương là:

$8x^3 - 45x^2 > 0$, vậy $x > \frac{45}{8}$ không thoả mãn điều kiện $-\frac{1}{2} \le x < 0$.

Vậy nghiệm của (1) là $0 < x < \frac{45}{8}$.

**II.** *Cần:* Giả sử ba góc A, B, C đều nhọn, khi đó $\cos A, \cos B, \cos C > 0$. Ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$ $= 2R = 2$. Vậy

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$
$$= 4\left(\frac{3}{2} - \frac{\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{2}\right) =$$
$$= 2[3 - 2\cos(A + B)\cos(A - B) - 2\cos^2 C + 1] =$$
$$= 2[4 - 2\cos(A + B)\cos(A - B) - 2\cos^2 C] =$$
$$= 2[4 + 2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]] =$$
$$= 2[4 + 4\cos A.\cos B.\cos C] > 8.$$

*Đủ:* Giả sử $a^2 + b^2 + c^2 > 8$. Khi đó:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 8 = 8\cos A.\cos B.\cos C > 0 \qquad (1)$$

Muốn cho tích $\cos A.\cos B.\cos C$ dương thì hoặc cả ba thừa số dương, khi đó A, B, C đều nhọn; hoặc có một thừa số dương và hai thừa số âm hay $\Delta ABC$ có 2 góc tù, trường hợp này không xảy ra.

**III.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6. \end{cases} \qquad (1)$$

Từ hai phương trình đầu của (1), ta có:

$$(x + y + z)^2 = 36 \text{ hay } x + y + z = \pm 6.$$

Vậy (1) tương đương với hai hệ sau:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6; \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} x + y + z = -6, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

a) Vì $x + y = 6 - z$,

$xy = \dfrac{6}{z}$ ; thay vào phương trình thứ hai ta được:

$\dfrac{6}{z} + z(6 - z) = 11$; từ đó ta có $- z^3 + 6z^2 - 11z + 6 = 0$

hay $(z - 1)(z - 2)(z - 3) = 0$, vậy: $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$.

Với $z = 1$, ta có $y = 3$, $x = 2$, hay $y = 2$, $x = 3$.

Vì x, y, z, có vai trò như nhau, nên có thể thấy ngay hệ có 6 nghiệm:

$z = 1, y = 2, x = 3$; $\quad z = 1, y = 3, x = 2$;

$z = 2, y = 1\ x = 3$; $\quad z = 2, y = 3, x = 1$;

$z = 3, y = 1, x = 2$; $\quad z = 3, y = 2, x = 1$.

b) Vì $x + y + z = -6$, $xyz = 6$, ta phải có, chẳng hạn, $x > 0$, $y < 0$, $xz < 0$.

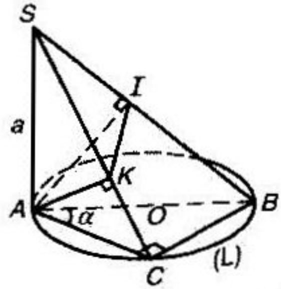
Mặt khác ta có:

$$z^2 + y^2 > \frac{(z + y)^2}{2} = \frac{(6 + x)^2}{2} = 18 + 6x + \frac{x^2}{2},$$

$$z^2 + y^2 + x^2 \geq 18 + 6x + \frac{3x^2}{2} > 14 \text{ (vì } x > 0).$$

Vậy hệ vô nghiệm.

**IV.** 1) Ta có $AC \perp BC$, và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAC)$, vậy $AK \perp BC$. Mà theo giả thiết $AK \perp SC$, nên $AK \perp (SBC)$. Từ đó $AK \perp SB$; mặt khác $AI \perp SB$, nên $SB \perp (AIK)$, hay góc $\beta = AIK$ là góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB) và (SBC). Do $AK \perp (SBC)$, nên $AK \perp KI$ và ta có:




*Hình 83*

$$\sin\beta = \frac{AK}{AI} = \frac{2R.a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + 4R^2\cos^2\alpha}} : \frac{2R.a}{\sqrt{a^2 + 4R^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 4R^2} \,.\, \cos^2\alpha}{\sqrt{4R^2\cos^2\alpha + a^2}}$$

$$\text{Vì } AK = \frac{SA.\,AC}{SC} = \frac{2R\cos\alpha \,.\, a}{\sqrt{a^2 + 4R^2\cos^2\alpha}},$$

$$AI = \frac{SA.\,SB}{SB} = \frac{2R.\,a}{\sqrt{a^2 + 4R^2}}$$

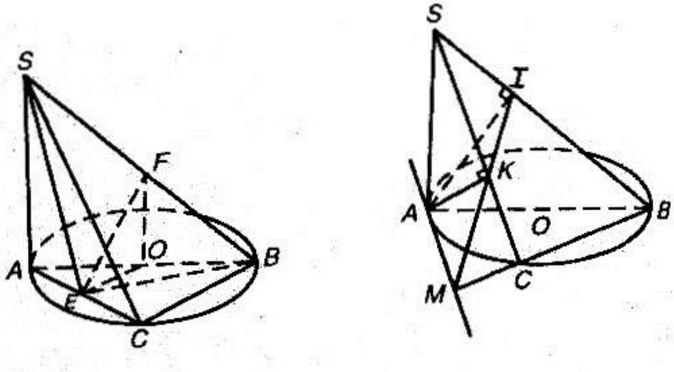
$$\text{nên } \beta = \arcsin\left(\frac{\cos\alpha\sqrt{a^2 + 4R^2}}{\sqrt{a^2 + 4R^2\cos^2\alpha}}\right).$$

2) Gọi O là tâm đường tròn (L). FO//SA, nên $FO \perp (ABC)$; $EO \perp AC$, nên $EF \perp AC$.

Muốn cho $EF \perp SB$, thì SE = EB. Vậy tam giác vuông SAE, BCE phải bằng nhau vì có cạnh huyền SE = EB và AE = EC; nên suy ra SA =BC.

Vậy điểm C cách điểm B một đoạn BC = a.

3) Theo giả thiết ta có $M \in (ABC)$, $M \in (AIK)$.




*Hình 84*

Vậy M nằm trên giao tuyến AM của hai mặt phẳng đó. Giao tuyến đó cố định vì mặt phẳng (ABC) cố định, còn (AIK) đi qua điểm A cố định, lại vuông góc với đường SB cố định, nên cũng cố định.

Vậy quĩ tích của M là giao tuyến x của hai mặt phẳng (AIK) và (ABC). Vì $AM \perp SA$, $AM \perp SB$, nên $AM \perp (SAB)$, vậy $AM \perp BC$, hay $x \perp AB$.

**V.** Hệ bất phương trình: $-2 \leq x^2 + px + q \leq 2$

tương đương với hệ (*) $\begin{cases} x^2 + px + (q - 2) \leq 0 & (1) \\ x^2 + px + (q + 2) \geq 0. & (2) \end{cases}$

Nếu $\Delta_1 = p^2 - 4(q - 2) \leq 0$, thì (1) có nhiều nhất một nghiệm.

Vậy nếu hệ (*) có nghiệm, thì nhiều nhất cũng chỉ có một nghiệm, từ đó suy ra điều cần chứng minh (vì chiều dài đoạn nghiệm bằng không bé hơn 4).

Nếu $\Delta_1 = p^2 - 4(q - 2) > 0$, khi đó phương trình $x^2 + px + (q - 2) = 0$ có hai nghiệm là:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q - 2)}}{2}\ ;\quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4(q - 2)}}{2}$$

nghiệm của (1) là: $x_1 \le x \le x_2$. (3)

α) Khi đó nếu $\Delta_2 = p^2 - 4(q + 2) \le 0$, thì bất phương trình (2) có nghiệm là toàn trục số. Do đó nghiệm của hệ (*) là (3).

Độ dài của đoạn nghiệm trong trường hợp này là:

$x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4(q - 2)} = \sqrt{16 + p^2 - 4(q + 2)} \le \sqrt{16} = 4.$

β) Nếu $p^2 - 4(q + 2) > 0$ thì phương trình

$x^2 + px - 4(q + 2) = 0$ có nghiệm:

$$x'_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q + 2)}}{2} \text{ và } x'_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4(q + 2)}}{2}$$

và nghiệm của bất phương trình (2) là $x < x'_1$ và $x > x'_2$. Dễ thấy:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q - 2)}}{2} <$$

$$< \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4(q + 2)}}{2} = x'_1,$$

$$x'_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4(q + 2)}}{2} <$$

$$< \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4(q - 2)}}{2} = x_2.$$

Do đó, ta có: $x_1 < x'_1 < x'_2 < x_2$.

Vậy nghiệm của hệ (*) $x_1 \le x \le x'_1$, $x'_2 \le x \le x_2$.

Tổng độ dài của các đoạn nghiệm bằng:

$(x'_1 - x_1) + (x_2 - x'_2) = \sqrt{p^2 - 4(q - 2)} - \sqrt{p^2 - 4(q + 2)} =$

$= \sqrt{p^2 - 4(q + 2) + 16} - \sqrt{p^2 - 4(q + 2)} =$

$= \sqrt{A + 16} - \sqrt{A} < \sqrt{(\sqrt{A})^2 + 16 + 8\sqrt{A}} - \sqrt{A} =$

$= (\sqrt{A} + 4) - \sqrt{A} = 4$; trong đó $A = p^2 - 4(q + 2) > 0$.

## Đề số 6

**I.** * Nếu a = -b, thì phương trình vô nghiệm.

* Nếu a = b, thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{a}{2}$.

* Nếu $a^2 \neq b^2$, thì phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = -\frac{ab}{a+b} \quad ; \quad x_2 = -\frac{-a^2+b^2}{a+b} .$$

•

**II.** Đặt ẩn số phụ: $t = \frac{x^2}{x^2+1}$ (chú ý rằng $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$)

**III.** Có thể xảy ra các khả năng sau:

1) $A + B + C = \pi + 2k\pi$ ;

2) $A + B - C = \pi + 2k\pi$ ;

3) $A + C - B = \pi + 2k\pi$ ;

4) $A - B - C = \pi + 2k\pi$ ;

**IV.** $$S_{xq} = \frac{R^2(1 + \text{cotg}\frac{\alpha}{2}) . [1 + \text{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})]}{2\cos\varphi} .$$

$$V = \frac{1}{6} R^3 \,\text{tg}\varphi\, (1 + \text{cotg}\frac{\alpha}{2}) . [1 + \text{cotg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})].$$

$S_{xq}$ và V đạt giá trị nhỏ nhất khi $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{2}$ .

**V.** $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2}\,ab\sin A + \frac{1}{2}\,cd\sin C \leq$

$\le \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}(ab + cd)$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin A = 1$ và $\sin C = 1$, tức là A và C vuông.

Muốn chứng minh bất bất đẳng thức thứ hai, ta lấy một điểm D', sao cho tam giác ACD' = tam giác ACD rồi lý luận tương tự như trên.

## Đề số 7

**I.** a) Bạn đọc tự giải.

b) $m \le -\sqrt{2}$.

**II.** (*) Áp dụng định lý hàm số sin, từ giả thiết suy ra:

$\sin B + \sin C = 2\sin A$, hay là

$\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$, hay

$$\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{B+C}{2}. \qquad (1)$$

Ta có: $$\mathrm{tg}\frac{B}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{3\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

(*) Nếu $A = \alpha$, thì $B + C = \pi - \alpha$. Từ (1) suy ra:

$\cos\left(\frac{B - C}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$ (2). Bài toán có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm, tức là ta phải có:

$$0 < 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \leq 1, \text{ từ đó: } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}.$$

**III.** $x = y = 1$, và cặp: $\begin{cases} x = t, \\ y = 3t, \end{cases}$ với $t > 0$

**IV.** $V = \dfrac{a^3 . \sin\frac{\alpha}{2} . \sqrt{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{3\alpha}{2}}}{12\cos^2\alpha}$

**V.** Đặt $p = \dfrac{a + b + c}{2}$, ta có:

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \leq p\left(\frac{p - a + p - b + p - c}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

Từ đó: $p^4 \geq 27. S^2$, hay là: $p^2 \geq 3\sqrt{3} . S$.

Ta lại có: $4p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq$

$\leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4p^2}{3} \geq \frac{4}{3} . 3\sqrt{3} . S = 4. S.\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

# MỤC LỤC

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

*Giám đốc:* PHÙNG QUỐC BẢO
*Tổng biên tập:* PHẠM THÀNH HƯNG

*Biên tập và sửa bản in:* MINH QUANG
HỒNG LIÊN
*Biên tập tái bản:* LAN HƯƠNG
*Trình bày bìa:* NGUYỄN MẠNH DỨA

**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỌN LỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP, TẬP I**

Mã số: 1L- 01004- 04403
In 2000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 tại Công ty in Ba Đình - Bộ Công an 160 Thái Thịnh - Đống Đa - Hà Nội. ĐT: (04) 5141329
Số xuất bản: 85/1553/XB-QLXB, ngày 05/11/2003. Số trích ngang: 218 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2003