

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Chương 1

Các bất đẳng thức cổ điển

§1. Bất đẳng thức AM-GM

Câu 1.1.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1.$$

Đặt :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \\ T &\leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right] \\ T &\leq \frac{1}{3} \left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c} \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \\ &= \left(\frac{a+b}{c} + 1\right) + \left(\frac{b+c}{a} + 1\right) + \left(\frac{c+a}{b} + 1\right) - 1 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 1 \\ &\geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} - 1 \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + 2. \end{aligned}$$

Câu 1.2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}} + \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}} \leq 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT(1) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_i} = 1.$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 1.3. Ta có $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Khi đó

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 64.$$

Suy ra $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 64abc$.

Câu 1.4. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} \leq 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + b_n} \right) \\ \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{b_n}{a_n + b_n} \right) \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 1.5. Vì α_i là các số hữu tỉ dương và $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ nên tồn tại các số nguyên dương $N, k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho $\alpha_i = \frac{k_i}{N}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho N số, ta có

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a_i = \frac{\underbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{k_1 \text{ số}} + \cdots + \underbrace{a_n + a_n + \cdots + a_n}_{k_n \text{ số}}}{N} \geq \frac{k_1}{a_1^N} \cdots \frac{k_n}{a_n^N} = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 1.6. Chuẩn hóa $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, ta cần chứng minh

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \geq n. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho k số gồm $k-1$ số 1 và a_i^k ta có

$$a_i^k + k - 1 \geq k a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^k + n(k-1) \geq k \sum_{i=1}^n a_i = kn \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^k \geq n.$$

Vậy (1) đúng, hay bài toán được chứng minh.

Câu 1.7. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} &\geq \frac{4}{(a+3b) + (b+2c+a)} = \frac{2}{a+2b+c} \\ \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{2a+b+c} &\geq \frac{2}{a+b+2c} \\ \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} &\geq \frac{2}{2a+b+c}. \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 1.8. Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số ta có

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} \geq 2\sqrt[8]{ab} \Rightarrow \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4 \geq 16\sqrt{ab} \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}.$$

Suy ra

$$\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 16\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 32.$$

Dẫn tới

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Tương tự:

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right).$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có $ab + bc + ca \leq 3abc$ nên suy ra

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{3}{16} \text{ (đpcm)}.$$

Câu 1.9. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b+2c} + \frac{2b}{c+2a} + \frac{2c}{a+2b} &\geq 4 - \frac{2a}{b+2a} - \frac{2b}{c+2b} - \frac{2c}{a+2c} \\ \Leftrightarrow a \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \right) + b \left(\frac{1}{c+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) + c \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+2c} \right) &\geq 2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta có

$$\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \geq \frac{4}{2a+2b+2c} = \frac{2}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$a \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \right) \geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự:

$$b \left(\frac{1}{c+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) \geq \frac{2b}{a+b+c}, \quad c \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+2c} \right) \geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$a \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \right) + b \left(\frac{1}{c+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) + c \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+2c} \right) \geq 2 \text{ (đpcm)}.$$

Câu 1.10. Áp dụng AM – GM, ta có

$$1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2) \leq \frac{(1 + x + 1 - x + x^2)^2}{4} = \frac{(2 + x^2)^2}{4}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y^3}} \geq \frac{2}{2 + y^2}; \frac{1}{\sqrt{1 + z^3}} \geq \frac{2}{2 + z^2}.$$

Vậy

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + z^3}} \geq \frac{2}{2 + x^2} + \frac{2}{2 + y^2} + \frac{2}{2 + z^2}.$$

Áp dụng Cauchy – Swarzt, ta được:

$$P \geq \frac{18}{x^2 + y^2 + z^2 + 6} \geq 1.$$

Dấu ‘=’ xảy ra khi $x = y = z = 2$. Vậy GTNN của biểu thức là $P = 1$.

Câu 1.11. Ta có:

$$\frac{a}{1 + b^2} = \frac{a(1 + b^2) - ab^2}{1 + b^2} = a - \frac{ab^2}{1 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Do đó:

$$\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(ab + bc + ca).$$

Mà:

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3.$$

Nên suy ra:

$$\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 1.12. Ta có:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} = \frac{a(a + 2b^2) - 2ab^2}{a + 2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a + b^2 + b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{2\sqrt{2}ab} = a - \frac{1}{\sqrt{2}}b\sqrt{a}.$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a}.b + \sqrt{b}.c + \sqrt{c}.a).$$

Mặt khác:

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{3}{4}.$$

Và

$$\sqrt{ab}.\sqrt{b} + \sqrt{bc}.\sqrt{c} + \sqrt{ca}.\sqrt{a} \leq \sqrt{(ab + bc + ca)(a + b + c)} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Vậy:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Câu 1.13. $ax^2 + ay^2 \geq 2axy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
 $by^2 + cz^2 \geq 2\sqrt{bc}yz$. Đẳng thức xảy ra khi $by^2 = cz^2$.
 $cz^2 + bx^2 \geq 2\sqrt{cb}zx$. Đẳng thức xảy ra khi $cz^2 = bx^2$.
 Bây giờ ta chọn a, b, c sao cho :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2c = 1 \\ a = \sqrt{bc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra: $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2yz$. Đẳng thức xảy ra khi $2y^2 = \frac{1}{2}z^2$.

$\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \geq 2zx$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{2}z^2 = 2x^2$.

Cộng vế theo vế ta được :

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10 \text{ (đpcm)}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \begin{cases} x = y \\ 2y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ \frac{1}{2}z^2 = 2x^2 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Câu 1.14. Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số thực dương ta có

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{a+2b}{27} + \frac{b+2c}{27} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} \cdot \frac{a+2b}{27} \cdot \frac{b+2c}{27}} = \frac{1}{3}a.$$

Tương tự:

$$\frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{b+2c}{27} + \frac{c+2a}{27} \geq \frac{1}{3}b,$$

và

$$\frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} + \frac{c+2a}{27} + \frac{a+2b}{27} \geq \frac{1}{3}c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} + \frac{2(a+b+c)}{9} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} \geq \frac{a+b+c}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 1.15. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Khi đó $\frac{a^4}{b^2(c+2)} = \frac{1}{3}, b = 1, c + 2 = 3$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 4 số ta được

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c+2}{9} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^2(c+2)} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{c+2}{9}} = \frac{4}{3}a$$

Tương tự:

$$\frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{2b}{3} + \frac{a+2}{9} \geq \frac{4}{3}b, \quad \frac{c^4}{a^2(b+2)} + \frac{2a}{3} + \frac{b+2}{9} \geq \frac{4}{3}c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} + \frac{7(a+b+c)+6}{9} \geq \frac{4(a+b+c)}{3}.$$

Hay

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} \geq \frac{5(a+b+c)-6}{9}.$$

Mà $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ nên ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} \geq 1 \text{ (đpcm)}.$$

Câu 1.16. Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta có :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &\geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{2(b+c)}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{2(a+c)}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{2(a+b)}} \\ &= 2 \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right). \end{aligned}$$

Câu 1.17. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b+2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^4}{b+2} \cdot \frac{b+2}{9}} = \frac{2}{3}a^2.$$

Tương tự:

$$\frac{b^4}{c+2} + \frac{c+2}{9} \geq \frac{2}{3}b^2, \quad \frac{c^4}{a+2} + \frac{a+2}{9} \geq \frac{2}{3}c^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} + \frac{a+b+c+6}{9} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) = 2.$$

Suy ra

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} \geq \frac{12-(a+b+c)}{9}.$$

Mặt khác:

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3$$

nên suy ra

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} \geq \frac{12-3}{9} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.18. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{4}{3-a^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-c^2} + 1\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Từ đề bài, ta suy ra $a^2, b^2, c^2 < 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{4}{3-a^2} + (3-a^2) \geq 2\sqrt{\frac{4}{3-a^2}(3-a^2)} = 4,$$

suy ra

$$\frac{4}{3-a^2} + 1 \geq a^2 + 2.$$

Tương tự:

$$\frac{4}{3-b^2} + 1 \geq b^2 + 2, \quad \frac{4}{3-c^2} + 1 \geq c^2 + 2.$$

Do đó

$$\left(\frac{4}{3-a^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-c^2} + 1\right) \geq (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2).$$

Mặt khác:

$$3(a+b+c)^2 = 3\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot c\right)^2 \leq 3\left[\frac{(a+b)^2}{2} + 1\right](c^2 + 2).$$

Ta chứng minh

$$3\left[\frac{(a+b)^2}{2} + 1\right] \leq (a^2 + 2)(b^2 + 2). \quad (*)$$

Khai triển và rút gọn, bất đẳng thức (*) trở thành

$$2a^2b^2 + a^2 + b^2 + 2 \geq 6ab.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì:

$$2(a^2b^2 + 1) \geq 4ab, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 1.19. Ta có: $b + c \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)}$ Suy ra

$$\frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c+a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2(c^2 + a^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c^2 + a^2}; \quad \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \right).$$

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \geq \frac{9}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}}$$

và

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{6} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \right)^2.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \right).$$

Đặt

$$t = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) \geq 3\sqrt{2}\sqrt{abc}.$$

Suy ra $\frac{1}{54\sqrt{2}}t^3 \geq abc$ nên từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = \frac{7 - abc}{\sqrt{2}} \geq \frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{1}{108}t^3 \\ &\Leftrightarrow t^3 + 108t - 378\sqrt{2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 3\sqrt{2})(t^2 + 3\sqrt{2}t + 126) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $VT \geq \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ 3\sqrt{2}a = \frac{7 - a^3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a^3 + 6a - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

Câu 1.20. Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ và $3 = 1 + 2$ nên ta có đánh giá

$$a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2.$$

Do đó:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \leq 1.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì đó là đẳng thức. Để chứng minh ta thay $c = \frac{1}{ab}$ vào vế trái và biến đổi ta có đpcm.

Câu 1.21. Ta có

$$\sum \frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a^3b}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)^3 \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Câu 1.22. Ta có

$$ab + 1 \geq \frac{2ab + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2} = \frac{(a+b)^2 + (c+a)(c+b)}{2}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{(a+c)(b+c)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+a)(b+c)}{(c+a)^2} \right) \geq 3.$$

Câu 1.23. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a + b + c = a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a \frac{(b+c)^2}{4}},$$

suy ra

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} \geq \frac{3a}{a+b+c}.$$

Chúng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^3} \geq \frac{3b}{a+b+c} \text{ và } \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2} \geq \frac{3c}{a+b+c}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 1.24. Bài toán này có thể chứng minh bằng cách sử dụng đánh giá sau:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \leq \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Chú ý rằng: $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b - \frac{2ab}{a + b}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$2 \left[\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right] + a + b + c \geq 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với $abc = 1$, ta có ngay:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{a+b}{2} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{b+c}{2} + \frac{2ca}{c+a} + \frac{c+a}{2} \geq 6.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.25. Ta có

$$\frac{13a^2b^2c^2 - 2abc - 2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} = \frac{27a^2b^2c^2 - (abc + 2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{27a^2b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^3}.$$

Ta chứng minh:

$$\frac{27a^2b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{54}.$$

Vì $a + b + c = 0$ nên trong ba số a, b, c có hai số cùng dấu, ta giả sử hai số đó là a, b . Khi đó $ab \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^3 &= [a^2 + b^2 + (a+b)^2]^3 = \left[a^2 + b^2 + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} \right]^3 \\ &\geq \frac{27}{4} (a^2 + b^2) (a+b)^2 (a+b)^2 \geq \frac{27}{4} \cdot 2ab \cdot 4ab \cdot c^2 = 54a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{54} \text{ (đpcm).}$$

Câu 1.26. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $c = \min \{a, b, c\}$.

Nếu $a \geq b$ suy ra $6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a) \leq 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.

Nếu $a \leq b$, ta có:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a) &= 6\sqrt{3}(b-a)(b-c)(a-c) \\ &\leq 6\sqrt{3}(b-a)ba = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{(a-b)^2 2ab \cdot 2ab} \\ &\leq 3\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{(a-b)^2 + 2ab + 2ab}{3}\right)^3} \\ &= \sqrt{(a+b)^3} \leq \sqrt{(a+b+c)^3} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} c = 0 \\ (a-b)^2 = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = (2 \pm \sqrt{2})b \end{cases}$.

Câu 1.27. Trước hết ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b > c$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \\ &\geq \frac{8}{a-b+b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \\ &= \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \\ &\geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} \\ &= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$(1-b)(1+3b) = \frac{1}{3}(3-3b)(1+3b) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3-3b+1+3b}{2} \right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Do đó $P \geq 10\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = \frac{2}{3}, c = 0 \end{cases}$. Vậy $\min P = 10\sqrt{6}$.

Câu 1.28. Ta có

$$\sum \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \sum \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) = \sum ab + \sum \frac{a}{c} + \sum \frac{1}{ab} + 3.$$

Áp dụng $\sum \frac{1}{ab} = \sum a$ và $\sum ab + \sum \frac{a}{c} \geq 2 \sum a$, ta có đpcm.

Cách 2: Ta có

$$a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot abc}{bc}} = 3a.$$

Tương tự

$$b^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{c}{a} \geq 3b,$$

và

$$c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{a}{b} \geq 3c.$$

Kết hợp với

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3.$$

ta có đpcm.

Câu 1.29. Ta có $b + 2a + \frac{2}{b+1} \geq \frac{5}{2} + \frac{3}{2}a$ nên

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}b\right)$$

và

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}b\right) = \frac{25}{4} + \frac{15}{4}(a+b) + \frac{9}{4}ab \geq 16$$

nên ta có đpcm.

Câu 1.30. Ta có

$$2a + b + c = a + b + a + c \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(a+b)(a+c)}.$$

Do đó

$$VT \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Mặt khác ta có:

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

và

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

Từ giả thiết, ta suy ra $ab+bc+ca = abc(a+b+c)$ nên $ab+bc+ca \geq 3$. Suy ra

$$\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \frac{1}{ab+bc+ca} \leq \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{8}.$$

Từ đó, suy ra đpcm.

Câu 1.31. Áp dụng bất đẳng thức Bunhia ta có:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= (a\sqrt{a} \cdot a + b\sqrt{b} \cdot b)^2 \leq (a^3 + b^3)(a+b) \leq (a^3 + b^3) \sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ &\Rightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)^3} \leq \sqrt{2}(a^3 + b^3) \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \sqrt[3]{2(a^3 + b^3)^2} \\ &\Rightarrow \frac{c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{c^3}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{a^3 + b^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự

$$\frac{b^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{\sqrt[3]{(c^3 + a^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{c^3 + a^3}, \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{b^2 + c^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{\sqrt[3]{(b^3 + c^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{b^3 + c^3}. \quad (3)$$

Cộng ba bất đẳng thức (1), (2) và (3), ta được

$$P \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \right).$$

Đặt $x = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, $y = \sqrt[3]{b^3 + c^3}$, $z = \sqrt[3]{c^3 + a^3}$. Suy ra:

$$P \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[(x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - (x + y + z) \right].$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có được:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) &\geq 9 \\ \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &\geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Rightarrow (x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) &\geq 9 \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Rightarrow P &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[9 \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z) \right]. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

mà

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= (x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + y\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} + z\sqrt{z} \cdot \sqrt{z})^2 \leq (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) \\ \Rightarrow (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2) &\leq 3(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) \\ \Rightarrow \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} &\geq \frac{1}{3}(x + y + z). \end{aligned}$$

Do đó

$$P \geq \sqrt[3]{4}(x + y + z) = \sqrt[3]{4} \left(\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \right)$$

Vì

$$t = \sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \geq \sqrt[3]{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) \geq 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{abc}$$

Suy ra $abc \leq \frac{1}{54}t^3$.

Nên từ giả thiết ta suy ra:

$$3 \leq t + \frac{1}{54}t^3 \Leftrightarrow t^3 + 54t - 162 \geq 0. \quad (*)$$

Vì hàm số $f(t) = t^3 + 54t - 162$ là hàm đồng biến và $f(2)f(3) < 0$ nên $f(t)$ có nghiệm duy nhất $x = m \in (2; 3)$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow t \geq m \Rightarrow P \geq \sqrt[6]{32} \cdot m$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a^3 + 3\sqrt[3]{2}a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \alpha$.

Trong đó α là nghiệm duy nhất của phương trình $X^3 + 3\sqrt[3]{2}X - 3 = 0$ và $\alpha > 0$.
Vậy $\min P = \sqrt[6]{32} \cdot m$ (đpcm).

Câu 1.32. Ta chứng minh $a + bc \leq 2$ (1).

Do $bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2} < 2$ nên 1 tương đương $a^2 \leq (2 - bc)^2$. Do

$$a^2 \leq 3 - (b^2 + c^2) \text{ và } (2 - bc)^2 - (3 - b^2 - c^2) = (bc - 1)^2 + (b - c)^2 \geq 0$$

nên (1) đúng.

Ta chứng minh $\sqrt{(4 - a^2)(4 - c^2)} \geq ac + 2b$ (2).

Ta có $abc \leq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \leq 1$ nên

$$(4 - a^2)(4 - c^2) - (ac + 2b)^2 = 16 - 4(a^2 + b^2 + c^2 + abc) \geq 0.$$

Suy ra (2) đúng.

Ta chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^b + b^2c + c^2a$ (3).

Ta có $a^2 + \frac{1}{4}(ab + c^2)^2 \geq a(ab + c^2) = a^2b + c^2a$ (4) và

$$\frac{1}{4}[(4 - a^2)b^2 + (4 - c^2)c^2] \geq \frac{1}{2}bc\sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)} \geq bc^2 + \frac{abc^2}{2} \quad (5)$$

Cộng (4) và (5) theo về suy ra (3) được chứng minh.

Quay trở lại bài toán. Từ (1) ta có $a^2b + ab^2c \leq 2ab$, $b^2c + abc^2 \leq 2bc$, $c^2a + a^2bc \leq 2ca$. Suy ra

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca) &\geq a^2b + b^2c + c^2a + abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + abc(a + b + c) + a^2b + b^2c + c^2a. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &\geq abc(a + b + c) + 2(a^2b + b^2c + c^2a) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)(a + b + c - abc) &\geq 2(a^2b + b^2c + c^2a). \end{aligned}$$

Câu 1.33. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a; b; c\}$.

Khi đó $b + c + 1 \leq c + a + 1$ và $b + c + 1 \leq a + b + 1$

Suy ra $\frac{b}{c + a + 1} \leq \frac{b}{b + c + 1}$; $\frac{c}{a + b + 1} \leq \frac{c}{b + c + 1}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

Mặt khác theo BĐT AM-GM ta có

$$(1 - b)(1 - c)(b + c + 1) \leq \left(\frac{1 - b + 1 - c + b + c + 1}{3} \right)^3 = 1$$

Suy ra

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \frac{1 - a}{b + c + 1}$$

Do đó

$$P \leq \frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{b + c + 1} + \frac{c}{b + c + 1} + \frac{1 - a}{b + c + 1} = 1$$

Dấu = xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.34.

- Cách 1: Theo BDT AM-GM ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{3a + 2b + c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{3a + 2b + c}{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \right).$$

$$\text{Lại có: } 3bc + 4ac + 5ab \leq 6abc \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \leq 6. \text{ Đặt } S = \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} + \frac{25}{c^2} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = 9 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} \\ &\Rightarrow S^2 \geq \frac{18}{ac} + \frac{32}{bc} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = \frac{24}{ab} + \frac{48}{ac} + \frac{72}{bc} = 24 \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \leq \frac{S^2}{24} \leq \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow P \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{16}$ khi $a = b = c = 2$.

- Cách 2: $3bc + 4ac + 5ab \leq 6abc \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \leq 6$. Đặt $S = \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$.

Ta có:

$$S^2 = \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} + \frac{25}{c^2} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = 9 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc}$$

$$\Rightarrow S^2 \geq \frac{18}{ac} + \frac{32}{bc} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = \frac{24}{ab} + \frac{48}{ac} + \frac{72}{bc} = 24 \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \right).$$

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}; \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{(b+c)^2}; \frac{1}{ac} \geq \frac{4}{(a+c)^2}$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 24 \left[\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{8}{(a+c)^2} + \frac{12}{(c+b)^2} \right] = 96 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+c)^2} + \frac{3}{(c+b)^2} \right]$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 96 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + 2 \left(\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 96 \left[\frac{2}{(a+b)(b+c)} + \frac{4}{(a+c)(b+c)} \right]$$

$$S^2 \geq 192 \left[\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{2}{(a+c)(b+c)} \right] = 192 \frac{3a + 2b + c}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$P \leq \frac{S^2}{192} = \frac{36}{192} = \frac{3}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{16}$ khi $a = b = c = 2$.

Câu 1.35. Biến đổi tương đương ta chứng minh được: $a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$, $\forall a, b, c > 0$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &\leq \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2y^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+2z^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+2x^3+6}} \right)} \\ &\leq \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{x^3+2y^3+6} + \frac{1}{y^3+2z^3+6} + \frac{1}{z^3+2x^3+6} \right)}} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức TTBC-TBN ta có:

$$x^3 + 2y^3 + 6 = (x^3 + y^3 + 1) + (y^3 + 1 + 1) + 3 \geq 3xy + 3y + 3 = 3(xy + y + 1)$$

Tương tự:

$$y^3 + 2z^3 + 6 \geq 3(yz + z + 1)$$

$$z^3 + 2x^3 + 6 \geq 3(xz + x + 1)$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT^4 &\leq 9 \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} \right) \\ &= 9 \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{xy(yz + z + 1)} + \frac{1}{zx + x + 1} \right) \\ &= 9. \text{ (do } xyz = 1) \end{aligned}$$

Hay $VT \leq \sqrt[4]{9}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Câu 1.36. Ta có $P + \frac{2\sqrt{3} + 1}{3} = \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}x^3 \right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{3} \right) + \left(\frac{1}{z^3} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} \right)$

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}x^3 \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{3}} = \frac{4}{3}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{3} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{z^3} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} \geq \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $P + \frac{2\sqrt{3} + 1}{3} \geq \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{9}$ hay $P \geq \frac{4\sqrt{3} + 9}{9}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} = \frac{x^3}{3} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{3} \\ \frac{1}{z^3} = \frac{z}{9} \\ x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt[4]{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $\min P = \frac{4\sqrt{3} + 9}{9}$ khi $(x, y, z) = (1, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3})$

Câu 1.37. Ta có: $a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 = a^5b^5.ab + b^5c^5.bc + c^5a^5.ca$
 $\leq a^5b^5 \frac{a^5 + b^5 + 1 + 1 + 1}{5} + b^5c^5 \frac{b^5 + c^5 + 1 + 1 + 1}{5} + c^5a^5 \frac{c^5 + a^5 + 1 + 1 + 1}{5}$
 $= \frac{1}{5} (a^5b^5(a^5 + b^5 + 3) + b^5c^5(b^5 + c^5 + 3) + c^5a^5(c^5 + a^5 + 3))$

Đặt $x = a^5, y = b^5, z = c^5$. Ta có: $x + y + z = 3$; với $x, y, z > 0$.

Cần chứng minh: $xy(x + y + 3) + yz(y + z + 3) + zx(z + x + 3) \leq 15$

hay $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3(xy + yz + zx) \leq 15$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)(x + y + z + 3) - 3xyz \leq 15$$

$$\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) - xyz \leq 5 \quad (1)$$

Mặt khác: $xyz \geq (3 - 2x)(3 - 2y)(3 - 2z) \Rightarrow 9xyz \geq 12(xy + yz + zx) - 27$

$$\Rightarrow xyz \geq \frac{4}{3}(xy + yz + zx) - 3.$$

Ta có: $VT(1) \leq 2(xy + yz + zx) - \frac{4}{3}(xy + yz + zx) + 3 = \frac{2}{3}(xy + yz + zx) + 3 \leq 5.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 1.38. Với $k = 1$ thì bộ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ không thỏa mãn.

Với $k = 2$ thì bộ $\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$ không thỏa mãn.

Ta chứng minh với $k = 3$ thì bất đẳng thức đúng hay $x^3y^3z^3(x^3 + y^3 + z^3) \leq 3$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử z nhỏ nhất suy ra $z \leq 1$. Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (3 - z)^3 - 3xy(x + y)$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$(3 - z)^3 + z^3 \leq \frac{3}{x^3y^3z^3} + 3xy(x + y) \Leftrightarrow 3z^2 - 9z + 9 \leq \frac{1}{x^3y^3z^3} + x^2y + xy^2$$

Ta có $\frac{1}{x^3y^3z^3} + x^2y + xy^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3y^3}{x^3y^3z^3}} = \frac{3}{z}$, như vậy chỉ cần chứng minh

$$3z^2 - 9z + 9 \leq \frac{3}{z} \Leftrightarrow 3(z - 1)^2 \leq 0$$

Câu 1.39. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} a + b + \sqrt{2(a + c)} &= (a + b) + \sqrt{\frac{a + c}{2}} + \sqrt{\frac{a + c}{2}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{(a + b) \cdot \left(\sqrt{\frac{a + c}{2}}\right)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{(a + b)(a + c)}{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} \leq \frac{2}{27(a + b)(a + c)}.$$

Tương tự với hai biểu thức còn lại. Do đó:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} \leq \sum_{sym} \frac{2}{27(a + b)(a + c)} = \frac{4(a + b + c)}{27(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Hơn nữa, ta thấy với mọi a, b, c dương:

$$\begin{aligned} 9(a + b)(b + c)(c + a) - 8(a + b + c)(ab + bc + ca) &= \sum_{sym} a(b - c)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) &\geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Do đó:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} \leq \frac{1}{6(ab + bc + ca)}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có: $(ab + ca + cb)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ nên theo giả thiết:

$$16(a + b + c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} \geq \frac{3(a + b + c)}{ab + bc + ca} \Rightarrow ab + bc + ca \geq \frac{3}{16}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b + c + \sqrt{2(b + a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c + a + \sqrt{2(c + b)}\right)^3} \leq \frac{8}{9}.$$

Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi dấu bằng ở tất cả các bất đẳng thức trên xảy ra hay: $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a = b = c \\ 16(a + b + c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{4}.$

Câu 1.40. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a + b + c = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + a(a^2 + 8bc) \geq 3a \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + a(a^2 + 8bc) \geq 3a.$$

Tương tự :

$$\frac{2b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + b(b^2 + 8ca) \geq 3b ; \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} + c(c^2 + 8ab) \geq 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được :

$$2P + a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \geq 3$$

Mặt khác ta lại có :

$$1 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Suy ra :

$$2P \geq 3 - (a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq 3 - 1 = 2 \Rightarrow P \geq 1 \text{ đpcm.}$$

Câu 1.41. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^3b + 2b = a^3b + b + b \geq 3ab, b^3c + 2c \geq 3bc, c^3a + 2a \geq 3ca.$$

Suy ra

$$a^3b + b^3c + c^3a + 2(a + b + c) \geq 3(ab + bc + ca),$$

hay

$$a^3b + b^3c + c^3a + 6 \geq 3(ab + bc + ca).$$

Mặt khác

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3,$$

nên ta có

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ca).$$

Câu 1.42. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} \right).$$

Tương tự:

$$b \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{b}{a} \right), c \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b} \right), d \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c} \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a + b + c + d &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \right) \\ &\leq \frac{3}{4} (a + b + c + d) + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \right). \end{aligned}$$

Nên

$$a + b + c + d \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Câu 1.43. Ta giả sử $a = \min \{a, b, c\}$.

Ta có $VT = \prod (a + b) (a^2 - ab + b^2)$.

Mà

$$\begin{aligned} (a + b) (b + c) (c + a) &= (a + b + c) (ab + bc + ca) - 3abc \\ &\leq (a + b + c) (ab + bc + ca) = 2 (ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Suy ra $VT \leq 2 (ab + bc + ca) \prod (a^2 - ab + b^2)$.

Do $a = \min \{a, b, c\}$ nên $a^2 - ab + b^2 \leq b^2$ và $c^2 - ca + a^2 \leq c^2$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$b^2 c^2 (ab + bc + ca) (b^2 - bc + c^2) \leq 1. \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} b^2 c^2 (ab + bc + ca) (b^2 - bc + c^2) &\leq \left(\frac{bc + bc + ab + bc + ca + b^2 - bc + c^2}{4} \right)^4 \\ &= \frac{1}{4^4} (b^2 + c^2 + 2bc + ab + ca)^4. \end{aligned}$$

Lại có

$$b^2 + c^2 + 2bc + ca + ab = (b + c)^2 + a(b + c) = (2 - a)^2 + a(2 - a) = -2a + 4 \leq 4.$$

Từ đó, ta có đpcm.

Câu 1.44. Xét $x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy$ là các số thực dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{3} \right)^3$$

Mặt khác

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 \geq 0,$$

suy ra

$$xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$P \leq \frac{1}{8}.$$

Xét $x^2 - yz > 0 > y^2 - zx, z^2 - xy$, khi đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P = (x^2 - yz)(xz - y^2)(xy - z^2) \leq \left(\frac{xy + xz + x^2 - yz - y^2 - z^2}{3} \right)^3$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} x^2 + xy + xz - yz - y^2 - z^2 &= x^2 + xy + xz + yz - (y + z)^2 \\ &\leq x^2 + xy + xz + yz \\ &= \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (x - 2y)^2 - (x - 2z)^2 \\ &\leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = 0$.

Vậy GTLN của P bằng: $\frac{1}{8}$.

Câu 1.45. Ta có

$$(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x^2 y^2}{1 - z} = \frac{x^2 y^2}{x + y} \leq \frac{1}{4} xy(x + y).$$

Do đó, $VT \leq \frac{1}{4}(xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)) + 3xyz$. Tiếp theo ta chứng minh

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 12xyz \leq \frac{2}{3} = \frac{2(x + y + z)^3}{3}. \quad (1)$$

Ta có (1) tương đương với

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)) \geq 24xyz. \quad (2)$$

Vì

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 2xy\sqrt{xy} + 2yz\sqrt{yz} + 2zx\sqrt{zx},$$

nên

$$VT(2) \geq 8(xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx}) \geq 24\sqrt{xyz} \geq 24xyz.$$

(Do $xyz \leq 1$ nên $\sqrt{xyz} \geq xyz$).

Câu 1.46. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a^2}{b + 2c} + \frac{(b + 2c)a^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b + 2c} \frac{(b + 2c)a^2}{9}} = \frac{2a^2}{3}.$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{c + 2a} + \frac{(c + 2a)b^2}{9} \geq \frac{2b^2}{3}, \quad \frac{c^2}{a + 2b} + \frac{(a + 2b)c^2}{9} \geq \frac{2c^2}{3}.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a^2}{b + 2c} + \frac{b^2}{c + 2a} + \frac{c^2}{a + 2b} \\ &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}[a^2(b + 2c) + b^2(c + 2a) + c^2(a + 2b)]. \quad (1) \end{aligned}$$

Lại áp dụng AM – GM, ta có

$$a^2c + b^2a + c^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} F &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$, từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} 25(a^2 + b^2 + c^2) - 48 &= 9(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 &\leq 0 \\ \Rightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + c^2 &\leq \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Do đó

$$F \geq \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{27}t^3 = f(t).$$

với $t \in [3; 4]$ (3) Mà $\min_{t \in [3; 4]} f(t) = f(3) = 1$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $F \geq 1$.

Vậy $\min F = 1$ xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.47. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum (\sqrt{5a^2 + 4bc} - 2\sqrt{bc}) &\geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \\ \Leftrightarrow \sum \left(\frac{a^2}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}(\sqrt{5a^2 + 4bc} + 2\sqrt{bc})} \right) &\geq \frac{1}{5}. \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng đt AM-GM ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}(5a^4bc) &\leq \frac{8a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4bc}{2} \\ \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot 2\sqrt{bc} &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 3bc. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}(\sqrt{5a^2 + 4bc} + 2\sqrt{bc}) \leq \frac{10a^2 + 5(b+c)^2}{2} \leq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

Suy ra

$$VT(1) \geq \sum \frac{a^2}{5(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{1}{5}.$$

Câu 1.48. Gọi P là vế trái. Ta có

$$\frac{4a^2b}{1+a+b} = \frac{a^2b(1+a+b+c)}{1+a+b} = a^2b + \frac{a^2bc}{1+a+b}.$$

Tương tự

$$\frac{4b^2c}{1+b+c} = b^2c + \frac{ab^2c}{1+b+c}, \quad \frac{4c^2a}{1+c+a} = c^2a + \frac{abc^2}{1+c+a}.$$

Do đó

$$4P = 4 \sum \frac{a^2b}{1+a+b} = \sum a^2b + abc \sum \frac{a}{1+a+b}.$$

Mặt khác

$$4 \sum \frac{a}{1+a+b} = \sum \frac{a(1+a+b+c)}{1+a+b} = 3 + \sum \frac{ac}{1+a+b}.$$

Lại có

$$\frac{ac}{1+a+b} = \frac{3ac}{2(2a+b) + (2b+c)} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2ac}{2a+b} + \frac{ac}{2b+c} \right).$$

Nên

$$\sum \frac{ac}{1+a+b} \leq \frac{1}{3}(a+b+c) = 1.$$

Suy ra

$$4P \leq a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4 \Rightarrow P \leq 1.$$

Câu 1.49. Ký hiệu P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài. Tiếp theo, có thể giải bài đã ra theo một trong các cách sau:

Cách 1 Vì $a, b, c > 0$ nên ta có:

$$P = \frac{a^2 + bc}{\sqrt{a(b+c) \cdot (a^2 + bc)}} + \frac{b^2 + ca}{\sqrt{b(c+a) \cdot (b^2 + ca)}} + \frac{c^2 + ab}{\sqrt{c(a+b) \cdot (c^2 + ab)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương $a(b+c)$ và $(a^2 + bc)$, ta được:

$$\sqrt{a(b+c) \cdot (a^2 + bc)} \leq \frac{ab + ac + a^2 + bc}{2} = \frac{(a+b)(a+c)}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2 + bc}{\sqrt{a(b+c) \cdot (a^2 + bc)}} \geq \frac{2(a^2 + bc)}{(a+b)(a+c)}. \quad (1.1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b^2 + ca}{\sqrt{b(c+a) \cdot (b^2 + ca)}} \geq \frac{2(b^2 + ca)}{(b+c)(a+c)}. \quad (1.2)$$

$$\frac{c^2 + ab}{\sqrt{c(a+b) \cdot (c^2 + ab)}} \geq \frac{2(c^2 + ab)}{(c+a)(c+b)}. \quad (1.3)$$

Cộng vế theo vế, các bất đẳng thức (1.1), (1.2) và (1.3), ta được:

$$P \geq 2 \left(\frac{a^2 + bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 + ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 + ab}{(c+a)(c+b)} \right). \quad (1.4)$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2 + bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 + ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 + ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (1.5)$$

Thật vậy, vì $a, b, c > 0$ nên

$$\begin{aligned} (1.5) &\Leftrightarrow 2 \left[(a^2 + bc)(b+c) + (b^2 + ca)(a+c) + (c^2 + ab)(a+b) \right] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\Leftrightarrow 4(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) \geq 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc) \\ &\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \geq 6abc \\ &\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - 2abc) + b(c^2 + a^2 - 2ac) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Hiển nhiên, (1.6) là bất đẳng thức đúng. Vì thế, (1.5) được chứng minh. Từ (1.4) và (1.5), suy ra $P \geq 3$. Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (1.1), (1.2), (1.3) và (1.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2 Vì $a, b, c > 0$ nên ta có:

$$P = \frac{\sqrt{(a^2 + bc)(ab + ac)}}{a(b+c)} + \frac{\sqrt{(b^2 + ca)(bc + ba)}}{b(c+a)} + \frac{\sqrt{(c^2 + ab)(ca + cb)}}{c(a+b)}. \quad (2.1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ 2 số $(a, \sqrt{bc})$ và $(\sqrt{ab}, \sqrt{ac})$, ta được:

$$(a^2 + bc)(ab + ac) \geq (a \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac})^2 = ab \cdot (a+c)^2.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(a^2 + bc)(ab + ac)} \geq \sqrt{ab} \cdot (a + c). \quad (2.2)$$

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt{(b^2 + ac)(bc + ba)} \geq \sqrt{bc} \cdot (b + a) \quad (2.3)$$

$$\sqrt{(c^2 + ab)(ca + cb)} \geq \sqrt{ca} \cdot (c + b). \quad (2.4)$$

Từ (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4), suy ra

$$P \geq \frac{\sqrt{ab}(a + c)}{a(b + c)} + \frac{\sqrt{bc}(b + a)}{b(c + a)} + \frac{\sqrt{ca}(c + b)}{c(a + b)}. \quad (2.5)$$

Ký hiệu Q là vế phải của (2.5). Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$Q \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab}(a + c)}{a(b + c)} + \frac{\sqrt{bc}(b + a)}{b(c + a)} + \frac{\sqrt{ca}(c + b)}{c(a + b)}} = 3. \quad (2.6)$$

Từ (2.5) và (2.6), suy ra $P \geq 3$. Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (2.2), (2.3), (2.4) và (2.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3 Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$P \geq 3 \sqrt[6]{\frac{a^2 + bc}{a(b + c)} \cdot \frac{b^2 + ca}{b(c + a)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a + b)}}. \quad (3.1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2 + bc}{a(b + c)} \cdot \frac{b^2 + ca}{b(c + a)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a + b)} \geq 1. \quad (3.2)$$

Thật vậy, do $a, b, c > 0$ nên

$$(3.2) \Leftrightarrow (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \geq abc(a + b)(b + c)(c + a). \quad (3.3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ 2 số $(a, \sqrt{bc})$ và $(b, \sqrt{bc})$, ta được:

$$(a^2 + bc)(b^2 + bc) \geq (ab + bc)^2.$$

Hay

$$b(a^2 + bc)(b + c) \geq b^2(a + c)^2. \quad (3.4)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$c(b^2 + ca)(c + a) \geq c^2(b + a)^2. \quad (3.5)$$

$$a(c^2 + ab)(a + b) \geq a^2(c + b)^2. \quad (3.6)$$

Vì các vế của (3.4), (3.5) và (3.6) đều dương nên nhân các bất đẳng thức đó với nhau, vế theo vế, rồi chia cả 2 vế của bất đẳng thức thu được cho $abc(a + b)(b + c)(c + a)$, ta sẽ nhận được bất đẳng thức (3.3). Vì thế, (3.2) được chứng minh. Từ (3.1) và (3.2), hiển nhiên suy ra $P \geq 3$. Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (3.1), (3.4), (3.5) và (3.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 1.50. Áp dụng Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018})^2 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2018}} \right) \\ &\geq 2018 \sqrt[2018]{a_1 a_2 \cdots a_{2018}} \cdot \frac{2018}{\sqrt[2018]{a_1 a_2 \cdots a_{2018}}} = 2018^2. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018} \geq 2018. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } P = a_1 + \frac{a_2^2 + 1}{2} + \frac{a_3^3 + 2}{3} + \cdots + \frac{a_{2018}^{2018} + 2017}{2018} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2017}{2018} \right). \quad (2)$$

Tiếp tục sử dụng Cauchy và sử dụng (1) ta thu được

$$a_1 + \frac{a_2^2 + 1}{2} + \frac{a_3^3 + 2}{3} + \cdots + \frac{a_{2018}^{2018} + 2017}{2018} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018} \geq 2018. \quad (3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2018} = 1$.

Từ (2) và (3) suy ra $P \geq 2018 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2017}{2018} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2018}$.

§2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Câu 2.1. Bình phương hai vế và rút gọn, ta có

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)} \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n).$$

Đây chính là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức. Đẳng thức xảy ra khi $a_i = kb_i$.

Câu 2.2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a^2 + 1)(1 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)^2, (c^2 + 1)(a^2 + 1) \geq (c + a)^2.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.3. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 9$$

hay là

$$a^2 + b^2 + 1 \geq \frac{9}{c^2 + 2}.$$

Tương tự

$$b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{9}{a^2 + 2} \text{ và } c^2 + a^2 + 1 \geq \frac{9}{b^2 + 2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 9 \left(\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.4. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c^3 + 8abc} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

Suy ra

$$VT \leq \sqrt{(a + b + c)(a + b + c)^3} = (a + b + c)^2 = 1.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 2.5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum \frac{a^4}{a(b+2c)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Câu 2.6. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum \frac{a^4}{a\sqrt{b^2+c^2+7}} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a\sqrt{b^2+c^2+7}+b\sqrt{c^2+a^2+7}+c\sqrt{a^2+b^2+7}} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(2a^2+2b^2+2c^2+21)}} \\ &= \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{2t+21}}, \quad t = a^2+b^2+c^2 \geq 3. \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{2t+21}} \geq 1 \Leftrightarrow t^3 \geq 2t+21 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+9) \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Câu 2.7. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \frac{9}{4a^2+b^2+c^2} &= \frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \\ &\leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} = \frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}. \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\frac{9}{a^2+4b^2+c^2} \leq \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{1}{2}$$

và

$$\frac{9}{a^2+b^2+4c^2} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{1}{2}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 2.8. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3}{2a^2+3}\right) + \left(1 - \frac{3}{2b^2+3}\right) + \left(1 - \frac{3}{2c^2+3}\right) &\leq \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{2a^2+3} + \frac{b^2}{2b^2+3} + \frac{c^2}{2c^2+3} &\leq \frac{3}{5}. \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \frac{25}{3(2a^2+3)} &= \frac{25}{6a^2+(a+b+c)^2} \\ &= \frac{(2+2+1)^2}{2(2a^2+bc)+2a(a+b+c)+a^2+b^2+c^2} \\ &\leq \frac{2}{2a^2+bc} + \frac{2}{a(a+b+c)} + \frac{1}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{2a^2+3} \leq \frac{3}{25} \left(\frac{2a^2}{2a^2+bc} + \frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \right).$$

Suy ra

$$VT(1) \leq \frac{3}{25} \left(\frac{2a^2}{2a^2+bc} + \frac{2b^2}{2b^2+ca} + \frac{2c^2}{2c^2+ab} + 3 \right).$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT(2) \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2} = 1.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.9. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{a^2+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b^2+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{c^2+1}\right) \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca} + \frac{4b^2}{3b^2+ab+bc+ca} + \frac{4c^2}{3c^2+ab+bc+ca} \leq 2. \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có

$$\frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca} = \frac{(a+a)^2}{(2a^2+bc) + a(a+b+c)} \leq \frac{a}{2a^2+bc} + \frac{a}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$VT(1) \leq \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} + 1 \leq 1 + 1 = 2.$$

Câu 2.10. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{3-ab} &= 1 + \frac{ab}{a^2+b^2+c^2-ab} = \frac{2ab}{a^2+b^2+2c^2+(a-b)^2} \\ &\leq 1 + \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2+2c^2)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right). \end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{3}{3-bc} \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{b^2+a^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right)$$

và

$$\frac{3}{3-ca} \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 2.11. Ta có

$$VT = \frac{4}{x^2 + y^2 + 3yz} + \frac{4}{y^2 + z^2 + 3zx} + \frac{4}{z^2 + x^2 + 3xy} \\ + \frac{\frac{5}{x}}{x^2 + y^2 + 3yz} + \frac{\frac{5}{y}}{y^2 + z^2 + 3zx} + \frac{\frac{5}{z}}{z^2 + x^2 + 3xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta được:

$$VT \geq \frac{4.9}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} + \frac{5\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} \\ \geq \frac{36}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} + \frac{45}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} \\ = \frac{84}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} \geq \frac{162}{x^2 + y^2 + z^2 + 27}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.12. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \\ \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1.$$

Do đó

$$VT \geq \frac{\left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 2.13. Đặt $x = \sqrt{ab}$, $y = \sqrt{bc}$, $z = \sqrt{ca}$, ta có

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} = \frac{ba}{4b\sqrt{ca} - ca} = \frac{x^2}{4yz - z^2}, \quad \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} = \frac{y^2}{4xz - x^2}, \quad \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} = \frac{z^2}{4xy - y^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{4(xy+yz+zx) - (x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{4(xy+yz+zx) - (xy+yz+zx)} = 1.$$

Câu 2.14. Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$ ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ và ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} = \frac{x^4}{x(y^2 + z^2)} + \frac{y^4}{y(z^2 + x^2)} + \frac{z^4}{z(x^2 + y^2)} \\ \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{z(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x(y^2 + z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2(y^2 + z^2)(y^2 + z^2)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y(z^2 + x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2y^2(z^2 + x^2)(z^2 + x^2)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z(x^2 + y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2z^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Suy ra

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 2.15. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} (3S)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{100} a_{k+1}(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}) \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_{k+1}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{100} (a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})^2 \right) \\ &= 1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} (a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})^2 \right) = \sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 4a_k^2a_{k+1}a_{k+2} + 4a_{k+1}^2a_{k+2}^2) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^4 + 2a_k^2(a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2) + 4a_{k+1}^2a_{k+2}^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 6a_k^2a_{k+1}^2 + 2a_k^2a_{k+2}^2). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 2a_k^2a_{k+1}^2 + 2a_k^2a_{k+2}^2) \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2 \right)^2$$

và

$$\sum_{k=1}^{100} a_k^2a_{k+1}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right),$$

nên ta có

$$(3S)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2 \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right) \leq 1 + \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 + \sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right)^2 = 2.$$

Suy ra $S \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2.16. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)} &\leq \frac{1}{ab+bc+ca} \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{2(ab+bc+ca)}{a(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)} &\leq 2 \end{aligned}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(a+b+c)}{a(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)} \geq 1. \quad (4)$$

Ta có

$$\begin{aligned} VT(4) &= (a+b+c) \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a^2(a+b+c) + 2a(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^3}{\sum_{\text{cyc}} [a^2(a+b+c) + 2a(ab+bc+ca)]} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.17. Đặt $S = a\sqrt{3 + \frac{b^2}{c^2}} + b\sqrt{3 + \frac{c^2}{a^2}} + c\sqrt{3 + \frac{a^2}{b^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(3+1) \left(3 + \frac{b^2}{c^2}\right) \geq \left(3 + \frac{b}{c}\right)^2$$

Suy ra

$$a\sqrt{3 + \frac{b^2}{c^2}} \geq \frac{1}{2} \left(3a + \frac{ab}{c}\right).$$

Do đó

$$S \geq \frac{1}{2} \left(3(a+b+c) + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right).$$

Lại có

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c.$$

Nên ta có $S \geq 2(a+b+c)$.

Đặt $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, khi đó bất đẳng thức

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) &\geq S \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) &\geq x\sqrt{x^2 + 3z^2} + y\sqrt{y^2 + 3x^2} + z\sqrt{z^2 + 3y^2} \quad (4). \end{aligned}$$

Áp dụng AM-GM ta có

$$x\sqrt{x^2 + 3z^2} = \frac{1}{2}(2x)\sqrt{x^2 + 3z^2} \leq \frac{1}{4}(4x^2 + x^2 + 3z^2) = \frac{1}{4}(5x^2 + 3z^2).$$

Tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại và cộng 3 bất đẳng thức đó theo vế ta có đpcm.

Câu 2.18. Đặt $a = 1 + x^2$, $b = 1 + y^2$, $c = 1 + z^2$. Ta có

$$x \leq \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{a}{2}, \quad y \leq \frac{b}{2}, \quad z \leq \frac{c}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT &\geq 2 \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) \\ &\geq 2 \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)} \geq 1. \end{aligned}$$

Câu 2.19. Theo bất đẳng thức Cauchy-Shwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{bc+ca} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + 2bc + a(b+c)}. \end{aligned}$$

Từ đó, để chứng minh bất đẳng thức của bài ra, ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + 2bc + a(b+c)} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

với mọi $a, b, c > 0$.

Vì $a, b, c > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + a(b+c) + 2(b^2 - bc + c^2) \geq 3a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}. \quad (2)$$

Vì $b^2 - bc + c^2 > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương $2a^2$, $a(b+c)$ và $b^2 - bc + c^2$, ta được

$$2a^2 + a(b+c) + 2(b^2 - bc + c^2) \geq 3\sqrt[3]{2a^2 \cdot a(b+c) \cdot 2(b^2 - bc + c^2)} = 3a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}.$$

Vậy (2) được chứng minh; do đó (1) được chứng minh và vì thế bất đẳng thức của bài toán được chứng minh. Dễ thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 2.20. Kí hiệu P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

- Nếu $a = 0$ thì từ các ràng buộc đối với a, b, c suy ra $c > 0$. Do đó $P = \frac{b}{c} + 2 > 1$.
- Nếu $b = 0$ thì từ các ràng buộc đối với a, b, c suy ra $c > 0$. Do đó

$$P = \frac{a}{c} + \frac{2c}{c+2a} > \frac{a}{a+c} + \frac{2c}{2c+2a} = 1.$$

- Nếu $c = 0$ thì từ các ràng buộc đối với a, b, c suy ra $a, b > 0$.

Do đó $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{4a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{4a}} = 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = 2a$.

- Xét $a, b, c > 0$. Khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$P = \frac{4a^2}{4ab+4ac} + \frac{b^2}{bc+4ab} + \frac{4c^2}{2c^2+4ac} \geq \frac{(2a+b+2c)^2}{8ab+8ac+bc+2c^2}. \quad (1.1)$$

$$\text{Tiếp theo, ta sẽ chứng minh } \frac{(2a+b+2c)^2}{8ab+8ac+bc+2c^2} > 1 \quad (1.2)$$

Thật vậy, ta có

$$(1.2) \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ab + 8ac + abc > 8ab + 8ac + bc + 2c^2 \Leftrightarrow (2a-b)^2 + (3b+2c)c > 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng và vì thế (1.2) được chứng minh.

Từ (1.1) và (1.2), hiển nhiên suy ra $P > 1$.

Vậy, tóm lại, bất đẳng thức đề bài được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 2a$ và $c = 0$.

Câu 2.21. Ta có $a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3$ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3. \quad (1)$$

Ta có

$$VT(1) = \frac{a^2}{a(2-a)} + \frac{b^2}{b(2-b)} + \frac{c^2}{c(2-c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}.$$

Ta chứng minh $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3} \geq 3 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0$ (bđt luôn đúng). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.22. Để ý rằng $\frac{1}{1-ab} = 2 - \frac{1-2ab}{1-ab}$. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1-2ab}{1-ab} + \frac{1-2bc}{1-bc} + \frac{1-2cd}{1-cd} + \frac{1-2da}{1-da} \geq \frac{8}{3}.$$

Vì $1-2ab = (a-b)^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau

$$\begin{aligned} & \frac{1-2ab}{1-ab} + \frac{1-2bc}{1-bc} + \frac{1-2cd}{1-cd} + \frac{1-2da}{1-da} \geq \\ & \geq \frac{[(1-2ab) + (1-2bc) + (1-2cd) + (1-2da)]^2}{(1-2ab)(1-ab) + (1-2bc)(1-bc) + (1-2cd)(1-cd) + (1-2da)(1-da)} \\ & = \frac{4[2 - (a+c)(b+d)]^2}{4 - 3(a+c)(b+d) + 2(a^2+c^2)(b^2+d^2)}. \end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$3[2 - (a+c)(b+d)]^2 \geq 2[4 - 3(a+c)(b+d) + 2(a^2+c^2)(b^2+d^2)].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$4 - 6(a+c)(b+d) + 3(a+c)^2(b+d)^2 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 0,$$

hay

$$3[1 - (a+c)(b+d)]^2 + 1 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) &= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \\ &= (a^2+c^2-b^2-d^2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nên bất đẳng thức cuối đúng. Bài toán được chứng minh.

Câu 2.23. Từ giả thiết, ta có thể đặt $x = \frac{2a^2}{bc}, y = \frac{2b^2}{ca}$ và $z = \frac{2c^2}{ab}$ với $a, b, c > 0$. Thay vào bất đẳng thức đã cho, ta có thể viết nó dưới dạng sau

$$\frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + b^2ca + c^2a^2} + \frac{c^4}{c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta dễ thấy

$$VT \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a+b+c) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)},$$

suy ra ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\geq abc(a+b+c) \\ \Leftrightarrow (ab-ac)^2 + (bc-ba)^2 + (ca-cb)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 2.24. Từ giả thiết, ta có thể đặt $x = \frac{2a^2}{bc}, y = \frac{2b^2}{ca}$ và $z = \frac{2c^2}{ab}$ với $a, b, c > 0$. Thay vào bất đẳng thức đã cho, ta có thể viết nó dưới dạng sau

$$\frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + b^2ca + c^2a^2} + \frac{c^4}{c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta dễ thấy

$$VT \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a + b + c) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)},$$

suy ra ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

hay

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c) \Leftrightarrow (ab - ac)^2 + (bc - ba)^2 + (ca - cb)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 2.25. Từ $xyz = 1 \Rightarrow x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^4}{(a^2 - bc)^2} + \frac{b^4}{(b^2 - ca)^2} + \frac{c^4}{(c^2 - ab)^2} \geq 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$VT(1) \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2}.$$

Ta chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 \geq 0.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.26. Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow x; y; z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{x}{\sqrt{z(3x+y)}} + \frac{y}{\sqrt{x(3y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{y(3z+x)}} \geq \frac{3}{2}.$$

Đặt vế trái là P , sử dụng bất đẳng thức C - S ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{z(3x+y)}} + \frac{y^2}{y \cdot \sqrt{x(3y+z)}} + \frac{z^2}{z \cdot \sqrt{y(3z+x)}} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x\sqrt{z(3x+y)} + y\sqrt{x(3y+z)} + z\sqrt{y(3z+x)}} \end{aligned}$$

Đặt $Q = x\sqrt{z(3x+y)} + y\sqrt{x(3y+z)} + z\sqrt{y(3z+x)}$ Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{xz(3x+y)} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{yx(3y+z)} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{zy(3z+x)} \\ &\leq \sqrt{(x+y+z)[xz(3x+y) + xy(3y+z) + zy(3z+x)]} \\ &= \sqrt{3(x+y+z)(x^2z + y^2x + z^2y + xyz)} \end{aligned}$$

Mặt khác, ta chứng minh được: $x^2z + y^2x + z^2y + xyz \leq \frac{4}{27}(x+y+z)^3$ Thật vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x và z . Khi đó

$$\begin{aligned}(y-x)(y-z) &\leq 0 \Leftrightarrow y^2 + xz \leq xy + yz \Leftrightarrow y^2x + x^2z \leq x^2y + xyz \\ &\Rightarrow x^2z + y^2x + z^2y + xyz \leq x^2y + z^2y + 2xyz = y(x+z)^2 = 4y \cdot \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \\ &\leq 4 \cdot \left(\frac{y + \frac{x+z}{2} + \frac{x+z}{2}}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}(x+y+z)^3\end{aligned}$$

Do đó $Q \leq \frac{2}{3}(x+y+z)^2 \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Câu 2.27. Khi thay a, b, c bởi $-a, -b, -c$ thì bất đẳng thức không đổi, do đó ta giả sử $a \leq 0 \leq b, c$. Khi đó ta thay a bởi $-a$ ta cần chứng minh BĐT

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 3(bc - ab - ac)^3. \quad (1)$$

với $a, b, c \geq 0$.

Ta chỉ xét $bc - ca - ab \geq 0$. Do

$$b^2 + bc + c^2 - (bc - ac - ab) = b^2 + c^2 + a(b+c) \geq 0,$$

nên ta chứng minh

$$(a^2 - ab + b^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 3(bc - ab - ac)^2. \quad (2)$$

Ta có

$$\begin{aligned}4(a^2 - ab + b^2) \cdot 4(c^2 - ca + a^2) &= [(a+b)^2 + 3(b-c)^2] \cdot [(c+a)^2 + 3(c-a)^2] \\ &\geq [(a+b)(a+c) + 3(a-c)(a-b)]^2.\end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$(a+b)(a+c) + 3(a-b)(a-c) \geq 4(bc - ab - ac).$$

Bất đẳng thức này đúng vì nó tương đương với

$$\Leftrightarrow a(2a + b + c) \geq 0.$$

Câu 2.28. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT = \sum \frac{a^4}{a^2(2b^2 - bc + 2c^2)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum a^2(2b^2 - bc + 2c^2)}.$$

Ta chứng minh

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \sum a^2(2b^2 - bc + 2c^2),$$

hay

$$\sum a^4 + abc \sum a \geq 2 \sum a^2b^2. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có

$$\sum a^4 + abc \sum a \geq \sum ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum a^2b^2,$$

nên (1) đúng.

Câu 2.29. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(a(2 - bc) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(b + c) \right)^2 \\ &\leq (a^2 + 2) \left((2 - bc)^2 + 2(b + c)^2 \right) \\ &= (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2). \end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) &= \frac{1}{6} 3(a^2 + 2) \cdot 2(b^2 + 2) \cdot (c^2 + 2) \\ &\leq \frac{1}{6} \left(\frac{3(a^2 + 2) + 2(b^2 + 2) + (c^2 + 2)}{3} \right)^3 = 36. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P^2 \leq 36$. Suy ra $-6 \leq P \leq 6$. Mặt khác với $a = 0, b = 1, c = 2$ thì $P = 6$; $a = 0, b = 1, c = 2$ thì $P = -6$.

Vậy $P_{\max} = 6$ và $P_{\min} = -6$.

Câu 2.30. Đặt $P = \frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{c+a}{(c+a+1)^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$2(a+b+c)P \geq \left(\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \right)^2.$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \geq 2,$$

hay

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Câu 2.31. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(x^4 + y) \left(\frac{z^2}{y} + 1 \right) \geq (x^2 + z)^2 \Rightarrow (x^4 + y)(z^2 + y) \geq y(x^2 + z)^2.$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} (y^4 + z)(x^2 + z) &\geq z(y^2 + x)^2 \\ (x^4 + y)(z^2 + y) &\geq y(x^2 + z)^2 \\ (z^4 + x)(y^2 + x) &\geq x(z^2 + y)^2. \end{aligned}$$

Nhân các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(x^4 + y)(y^4 + z)(z^4 + x) \geq xyz(x + y^2)(y + z^2)(z + x^2) \geq (x + y^2)(y + z^2)(z + x^2).$$

Câu 2.32. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT \leq \sqrt{\left(\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+a} \right) \cdot (a+b+c)}.$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+a} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b}{3a+b} &\geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{b}{3a+b} = \sum_{cyc} \frac{b^2}{3ab+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}.$$

Do đó, ta chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Câu 2.33. Từ giả thiết có

$$(1-b^2)(1-c^2) \geq (a-bc)^2.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1-b^6)(1-c^6) \geq (a^3-b^3c^3)^2,$$

hay

$$(1-b^2)(1-c^2)(1+b^2+b^4)(1+c^2+c^4) \geq (a-bc)^2(a^2+abc+b^2c^2)^2.$$

Như vậy cần chứng minh

$$(1+b^2+b^4)(1+c^2+c^4) \geq (a^2+abc+b^2c^2)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} (1+b^2+b^4)(1+c^2+c^4) &\geq (1+|bc|+b^2c^2)^2 \\ &\geq (a^2+|abc|+b^2c^2)^2 \geq (a^2+abc+b^2c^2)^2. \end{aligned}$$

Do $-1 \leq a \leq 1$. Suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.34. Ta có

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) &\geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)^2 \\ &\geq \frac{6}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}.$$

Câu 2.35. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(n-2)x_1^2 + 2x_1}{(n-1)x_1^2 + 1} + \frac{1}{n-1} \right) \geq 1 - \frac{(n-2) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k}{(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{((n-1)x_k + 1)^2}{(n-1)((n-1)x_k^2 + 1)} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 + 1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{((n-1)x_k + 1)^2}{(n-1)((n-1)x_k^2 + 1)} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + 1}.$$

Nên ta chứng minh

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + 1} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 + 1},$$

hay

$$(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2. \quad (1)$$

Câu 2.36. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ac} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}$$

$$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{\sum (2a^2 + bc)(b^2 + c^2 + 2bc)}.$$

Ta chứng minh

$$\sum (2a^2 + bc)(b^2 + c^2 + 2bc) \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca),$$

hay

$$\sum ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum a^2 b^2.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM

Câu 2.37. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $P \geq 3 \cdot \sqrt[3n]{\frac{a^2 + bc}{a(b+c)} \cdot \frac{b^2 + ac}{b(a+c)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a+b)}}.$

(1)

Ta chứng minh $\frac{a^2 + bc}{a(b+c)} \cdot \frac{b^2 + ac}{b(a+c)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a+b)} \geq 1.$ (2)

Thật vậy: Do a, b, c dương nên bất đẳng thức (1) đưa về

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geq abc(a+b)(b+c)(c+a) \quad (3).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho 2 bộ 2 số $(a, \sqrt{bc})$ và $(b, \sqrt{bc})$ ta được

$$(a^2 + bc)(b^2 + bc) \geq (ab + bc)^2$$

$$\text{hay } b(a^2 + bc)(b + c) \geq b^2(a + c)^2. \quad (4)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } c(b^2 + ac)(a + c) \geq c^2(a + b)^2 \quad (5)$$

$$a(c^2 + ab)(a + b) \geq a^2(c + b)^2 \quad (6)$$

Vì các vế của (4), (5), (6) đều dương. Nhân vế với vế các bất đẳng thức đó với nhau, rồi chia cả 2 vế của bất đẳng thức thu được cho $abc(a + b)(b + c)(c + a)$ ta được (3), do đó có (2), suy ra $P \geq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (1), (4), (5) và (6), khi đó $a = b = c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3.

Câu 2.38. $a^3 + 5 = (a^3 + 1 + 1) + 3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 3 = 3a + 3$.

Tương tự: $b^3 + 5 \geq 3b + 3$; $c^3 + 5 \geq 3c + 3$.

$$\frac{a^3 + 5}{a^3(b + c)} + \frac{b^3 + 5}{b^3(c + a)} + \frac{c^3 + 5}{c^3(a + b)} \geq \frac{3a + 3}{a^3(b + c)} + \frac{3b + 3}{b^3(c + a)} + \frac{3c + 3}{c^3(a + b)}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3a + 3}{a^3(b + c)} + \frac{3b + 3}{b^3(c + a)} + \frac{3c + 3}{c^3(a + b)} &= \frac{3a(abc) + 3(abc)^2}{a^3(b + c)} + \frac{3b(abc) + 3(abc)^2}{b^3(c + a)} + \frac{3c(abc) + 3(abc)^2}{c^3(a + b)} \\ &= \frac{3(bc + b^2c^2)}{ab + bc} + \frac{3(ca + c^2a^2)}{bc + ca} + \frac{3(ab + a^2b^2)}{ca + ab} \end{aligned}$$

Đặt $x = bc$, $y = ca$, $z = ab$; $x, y, z > 0$, $xyz = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{3a + 3}{a^3(b + c)} + \frac{3b + 3}{b^3(c + a)} + \frac{3c + 3}{c^3(a + b)} &\geq 3 \left(\frac{x + x^2}{y + z} + \frac{y + y^2}{z + x} + \frac{z + z^2}{x + y} \right) \\ &= 3 \left(\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \right) + 3 \left(\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} &\geq \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} &\geq \frac{x + y + z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^3 + 5}{a^3(b + c)} + \frac{b^3 + 5}{b^3(c + a)} + \frac{c^3 + 5}{c^3(a + b)} \geq 9.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.39. Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwartz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k(b_k + a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)} + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j} + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}. \quad (1)$$

Đặt $x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ và $y = \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}$ ta có ngay $x > y$. (2)

Đồng thời cũng có

$$1 = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x > y \Rightarrow y < 1.$$

Do (1) nên ta cần chứng minh:

$$\sqrt{1 - 2x} + y < 1 \Leftrightarrow 1 - 2x < 1 - 2y + y^2 \Leftrightarrow 2(y - x) < y^2 \text{ (hiển nhiên đúng)}.$$

§3. Một số bất đẳng thức khác

Câu 3.1. Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9abc}{3\sqrt[3]{(3abc)^2(a^3+b^3+c^3)}} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9abc}{a^3+b^3+c^3+6abc}. \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} - 3 \geq 1 - \frac{9abc}{a^3+b^3+c^3+6abc} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3+6abc}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo Schur.

Câu 3.2. Vì $a+b+c=1$, nên ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) &= (a+b+c) \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \\ &= ab+bc+ca + abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &\geq ab+bc+ca + \frac{9abc}{2(a+b+c)} \\ &= ab+bc+ca + \frac{9}{2}abc. \end{aligned}$$

Suy ra

$$2 \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) + 1 \geq 2(ab+bc+ca) + 9abc + 1.$$

Do đó, ta chứng minh

$$9abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có

$$a^2+b^2+c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Suy ra

$$1 + 9abc \geq 4(ab+bc+ca),$$

hay (1) được chứng minh.

Câu 3.3. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b+c) \sum_{cyc} \sqrt[3]{(a^2+bc)(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \geq 9 \sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)abc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a^2+b^2)(a^2+c^2) \geq (a^2+bc)^2,$$

và theo AM-GM

$$9\sqrt[3]{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)abc} \leq 3 \sum_{cyc} c(a^2 + b^2).$$

Do đó, ta chứng minh

$$(a + b + c) \sum_{cyc} (a^2 + bc) \geq 3 \sum_{cyc} c(a^2 + b^2),$$

Đây chính là bất Schur.

Câu 3.4. Ta có

$$VT = a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8.$$

Mặt khác

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 = a^2b^2 + 1 + b^2c^2 + 1 + c^2a^2 + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

và

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 + 2 &= a^2b^2c^2 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq \frac{9abc}{a + b + c} \geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} VT &\geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) + 2.2(ab + bc + ca) + 4(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 6(ab + bc + ca) + 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 6(ab + bc + ca) + 3(ab + bc + ca) \geq 9(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 3.5. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a + b + c = 3$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \frac{ab(4a+4b+c)}{27} \geq \frac{1}{2}(a+b)$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \frac{ab(4a+4b+c)}{54} \geq \frac{1}{4}(a+b).$$

Tương tự

$$\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}} + \frac{bc(4b+4c+a)}{54} \geq \frac{1}{4}(b+c)$$

và

$$\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}} + \frac{ca(4c+4a+b)}{54} \geq \frac{1}{4}(c+a).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P + A \geq B.$$

Với

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{54} [ab(4a+4b+c) + bc(4b+4c+a) + ca(4c+4a+b)] \\ &= \frac{1}{54} [4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc] \\ &= \frac{1}{54} [4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc] \leq \frac{1}{54}(a+b+c)^3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

và

$$B = \frac{1}{4} \cdot 2(a + b + c) = \frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow P \geq 2\sqrt{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 3.6. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} & 12(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc + 48 - 30(a + b + c) \\ &= 12(a^2 + b^2 + c^2) + 3(2abc + 1) + 45 - 5 \cdot 2 \cdot 3(a + b + c) \\ &\geq 12(a^2 + b^2 + c^2) + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 45 - 5 \cdot ((a + b + c)^2 + 9) \\ &= 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} - 10(ab + bc + ca) \\ &\geq 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9}{a + b + c} \geq 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2 = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned} & 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca) \\ &\geq 7(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) - 3(a^2 + b^2 + c^2) - 10(ab + bc + ca) \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 3.7. Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(xy + yz + zx) \\ &\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 3) \geq 2(x + y + z)(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Hay

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) \geq x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 6 \quad (1).$$

Ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 9 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 6 \geq VP(1).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 3.8. Đặt $x = \sqrt[3]{a^2}$, $y = \sqrt[3]{b^2}$, $z = \sqrt[3]{c^2}$, ta có $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx}). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \\ &\geq 2xy\sqrt{xy} + 2yz\sqrt{yz} + 2zx\sqrt{zx}. \end{aligned}$$

Suy ra (1) đúng, hay bài toán được chứng minh.

Câu 3.9. Áp dụng bất đẳng thức Holder với chú ý $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ta có

$$4a^3 + 9b^3 + 36c^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)^2 \geq (a + b + c)^3 = 1.$$

Từ đó ta có đpcm.

Câu 3.10. Đặt P là vế trái của bất đẳng thức. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$P^3 \left(\sum a(a + 2b) \right) \geq (a + b + c)^4.$$

Mặt khác

$$\sum a(a + 2b) = (a + b + c)^2,$$

nên ta có

$$P^3 \geq (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow P \geq 1.$$

Câu 3.11. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right)^2 \geq \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} \right)^3.$$

Từ đó ta có đpcm.

Câu 3.12. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(x^n + y^n + z^n) \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n} \right)^{n-1} \geq (ax + by + cz)^n = 1.$$

Suy ra

$$x^n + y^n + z^n \geq \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n} \right)^{1-n}.$$

Câu 3.13.

$$\begin{aligned} & (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 4\sqrt{2} \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 9 + 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 \geq 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2}{ab} + \frac{(b - c)^2}{bc} + \frac{(c - a)^2}{ca} \geq 2\sqrt{2} \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{(a - b)^2}{b} = \frac{(a - c)^2}{c}$ Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(a - c)^2}{c} \right] (b + c) \geq 2 [(a - b)^2 + (a - c)^2] \\ \Rightarrow & \frac{(a - b)^2}{ab} + \frac{(a - c)^2}{ac} \geq \frac{2 [(a - b)^2 + (a - c)^2]}{a(b + c)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM - GM$:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2a^2 + (b + c)^2 \geq 2\sqrt{2}a(b + c)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2}{a(b+c)} &\geq \frac{2\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2} \\ \Rightarrow \frac{2[(a-b)^2+(a-c)^2]}{a(b+c)} &\geq 2\sqrt{2} \frac{(a-b)^2+(a-c)^2}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a\sqrt{2} = b + c$.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3bc > 2\sqrt{2}bc \text{ (do } a \geq b \geq c) \\ \Rightarrow \frac{(b-c)^2}{bc} &\geq 2\sqrt{2} \frac{(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra bất đẳng thức (*) đúng. Suy ra điều phải chứng minh.

Chương 2

Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

§1. Phương pháp quy nạp

§2. Phương pháp phân tích bình phương SOS

Câu 5.1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2(a^3 + b^3 + c^3) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \\
 & - \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_b \geq 0, S_c \geq 0$ Ta có $S_a + S_b = 2c \geq 0$

Câu 5.2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{ab - bc + ca}{b^2 + c^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{bc - ca + ab}{c^2 + a^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{ca - ab + bc}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)(2a-b-c)}{b^2 + c^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)(a-b)}{b^2 + c^2} + \sum \frac{(b+c)(a-c)}{b^2 + c^2} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)(a-b)}{b^2 + c^2} + \sum \frac{(c+a)(b-a)}{c^2 + a^2} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum \frac{(a-b)^2(ab+bc+ca-c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Mặt khác

$$ab + bc + ca - c^2 = (b-c)(c-a) + 2bc \geq (b-c)(c-a),$$

nên để chứng minh (1) ta chứng minh

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{(a-b)^2(b-c)(c-a)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} & \geq 0 \Leftrightarrow \sum (a^2+b^2)(a-b)^2(b-c)(c-a) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Câu 5.3. BDT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2(a^3 + b^3 + c^3) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \\
 & \geq ab \left(\sqrt{2(a^2+b^2)} - a - b \right) + bc \left(\sqrt{2(b^2+c^2)} - b - c \right) + ca \left(\sqrt{2(c^2+a^2)} - c - a \right) \\
 & \Leftrightarrow S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
 S_c &= a + b - c - \frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + a + b}, \\
 S_a &= b + c - a - \frac{2bc}{\sqrt{2(b^2+c^2)} + b + c}, \\
 S_b &= c + a - b - \frac{2ca}{\sqrt{2(c^2+a^2)} + c + a}.
 \end{aligned}$$

Do a, b, c bình đẳng, không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta có

$$S_c \geq a + b - c - \frac{2ab}{4b} = \frac{a}{2} + b - c \geq 0, \quad S_b \geq c + a - b - \frac{ca}{a+c} \geq 0$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_b + S_a &= 2c \left(1 - \frac{a}{\sqrt{2(c^2 + a^2)} + c + a} - \frac{b}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} \right) \\ &\geq 2b \left(1 - \frac{a}{2(a+c)} - \frac{b}{2(b+c)} \right) = \frac{bc}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 5.4. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} &\frac{4a^2 + 2bc - 3(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + 2ca - 3(c^2 + a^2)}{c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + 2ab - 3(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{2(a^2 - b^2) + 2(a^2 - c^2) - (b - c)^2}{b^2 + c^2} + \frac{2(b^2 - c^2) + 2(b^2 - a^2) - (c - a)^2}{c^2 + a^2} \\ &+ \frac{2(c^2 - a^2) + 2(c^2 - b^2) - (a - b)^2}{a^2 + b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &S_c(a - b)^2 + S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{2(a+b)^2}{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} - \frac{1}{a^2 + b^2}, \\ S_b &= \frac{2(c+a)^2}{(b^2 + c^2)(b^2 + a^2)} - \frac{1}{c^2 + a^2}, \\ S_a &= \frac{2(b+c)^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} - \frac{1}{b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ suy ra $S_b \geq 0, S_c \geq 0, S_c \geq S_b \geq S_a$ Ta cần chứng minh $S_a + S_b \geq 0$, hay

$$2(c+a)^2(c^2 + a^2) + 2(b+c)^2(b^2 + c^2) \geq (b^2 + c^2)(b^2 + a^2) + (a^2 + b^2)(a^2 + c^2)$$

Ta thấy hệ số c^2 ở vế trái là $2(c+a)^2 + 2(b+c)^2$ lớn hơn hoặc bằng vế phải là $2(a^2 + b^2)$ nên ta chỉ cần chứng minh khi $c = 0$.

Hay

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Câu 5.5. Ta có : BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} &4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^3 - b^3 - c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a - a^3 - b^3 - c^3) \\ \Leftrightarrow &2(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &- 2[(2b+a)(a-b)^2 + (2c+b)(b-c)^2 + (2a+c)(c-a)^2] \\ &+ (2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &(2a-b+2c)(a-b)^2 + (2b-c+2a)(b-c)^2 + (2c-a+2b)(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nếu $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq 0, S_c \geq 0$, mặt khác

$$S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0.$$

Theo tiêu chuẩn 3 suy ra ĐPCM.

Nếu $a \leq b \leq c \Rightarrow S_b \geq 0, S_c \geq 0$.

Theo tiêu chuẩn 2 ta cần chứng minh $S_a + S_b \geq 0$ (hiển nhiên) Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5.6. Trước hết ta thấy rằng :

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 9 = \sum \frac{(x-y)^2}{xy},$$

$$6 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) - 9 = \sum \frac{(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}.$$

Ta cần chứng minh :

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \Leftrightarrow \sum \frac{(x-y)^2}{xy} \geq \sum \frac{3(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}.$$

với mọi số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 2]$. Đặt $S_x = \frac{1}{yz} - \frac{3}{(x+y)(x+z)}$, $S_y = \frac{1}{zx} - \frac{3}{(y+x)(y+z)}$,
 $S_z = \frac{1}{xy} - \frac{3}{(z+x)(z+y)}$.

Bất đẳng thức đã cho viết dưới dạng tương đương là:

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $2 \geq x \geq y \geq z \geq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $S_x, S_y \geq 0$.
 Thật vậy:

$$S_x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + xz - 2yz \geq 0, \quad (\text{đúng}).$$

$$S_y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + yx + yz - 2zx \geq x(y-z) + z(z+y-x) \geq 0$$

(do $x, y, z \in [1; 2]$ nên $y+z-x \geq 0$).

- Nếu $S_z \geq 0$, ta có đpcm.

- Nếu $S_z < 0$, ta chứng minh được rằng $S_x + 2S_z \geq 0$, $S_y + 2S_z \geq 0$.

Khi đó dễ dàng thấy rằng vì: $(x-y)^2 \leq 2[(y-z)^2 + (z-x)^2]$ và $S_z < 0$ nên

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq (S_x + 2S_z)(y-z)^2 + (S_y + 2S_z)(z-x)^2 \geq 0.$$

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hoặc $y = z = 1, x = 2$ và các hoán vị của chúng.

Câu 5.8.

$$\text{a) Chứng minh } \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \leq a^3 + b^3 + c^3, \quad (1).$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3) \\ &\Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) \\ &\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 + (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng nên (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

$$\text{b) Chứng minh } a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 3abc, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \leq 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \leq 2(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b) \\ &\Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \quad (3). \end{aligned}$$

trong đó $S_a = 3a - b - c$; $S_b = 3b - a - c$; $S_c = 3c - a - b$.

Không mất tính tổng quát giả sử $1 \geq a \geq b \geq c$.

Ta có $VT(3) = S_a(b-c)^2 + S_b[(c-a)^2 - (a-b)^2] + (S_b + S_c)(a-b)^2$

Mà $S_a \geq 0; S_b = 2(1-a) + 2(b-c) \geq 0;$

$(c-a)^2 - (a-b)^2 \geq 0; S_b + S_c = 4(1-a) \geq 0.$

Suy ra $VT(3) \geq 0 \Rightarrow (2)$ đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}; a = 1, b = c = \frac{1}{2}$ và các hoán vị.

§3. Phương pháp dồn biến

Câu 6.1.

a) Ta có bất đẳng thức sau với mọi $a, b, c > 0$

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Thật vậy, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \\ = (a+b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} abc &\geq (3-2c)(3-2a)(3-2b) \\ \Leftrightarrow abc &\geq 27 - 18(a+b+c) + 12(ab+bc+ca) - 8abc \\ \Leftrightarrow 3abc &\geq 4(ab+bc+ca) - 9 \\ \Leftrightarrow abc &\geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca) - 3. \end{aligned}$$

Suy ra

$$P = abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca) + \frac{12}{ab+bc+ca} - 3 \geq 8 - 3 = 5.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

b) Do bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ nên nó cũng đúng với bộ số $a=b=x, c=3-2x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} k \left(\frac{1}{x^2 + 2x(3-2x)} - \frac{1}{3} \right) &\geq 1 - x^2(3-2x), \forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right) \\ \Leftrightarrow k &\geq 3x(2-x)(2x+1), \forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Với $x = \frac{4}{3}$ ta có $k \geq \frac{88}{9} > 9$. Do k nguyên nên $k \geq 10$.

Với $k = 10$, ta cần chứng minh $f(a,b,c) := abc + \frac{10}{ab+bc+ca} \geq \frac{13}{3}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $0 < c \leq 1$.

Ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$. Thật vậy, điều này tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{10}{ab+bc+ca} - \frac{10}{\frac{(a+b)^2}{4} + bc + ca} &\geq c \left[\frac{(a+b)^2}{4} - ab \right] \\ \Leftrightarrow \frac{10(a-b)^2}{(ab+bc+ca) \left[\frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) \right]} &\geq c(a-b)^2. \end{aligned}$$

Điều này đúng do $c \leq 1, ab+bc+ca \leq 3$ và

$$3(a+b)(a+b+4c) \leq \frac{(4a+4b+4c)^2}{4} = 36.$$

Ta sẽ chứng minh $f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq \frac{13}{3}$. Thật vậy, điều này tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{c(3-c)^2}{4} + \frac{40}{(3-c)^2 + 4c(3-c)} \geq \frac{13}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{c(3-c)^2 - 4}{4} + \frac{40 - 10(1+c)(3-c)}{3(1+c)(3-c)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (c-1)^2 \left[\frac{c-4}{4} + \frac{10}{3(1+c)(3-c)} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Điều này đúng do

$$\begin{aligned} & 3(4-c)(1+c)(3-c) - 40 \\ &= 3c^3 - 18c^2 + 15c - 4 \\ &= 3c(1-c)(5-c) - 4 < 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 - 4 < 0, \forall c \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Vậy số nguyên k nhỏ nhất cần tìm là $k = 10$.

Câu 6.2. Từ điều kiện $a + b + c = 3$ ta sẽ nghĩ đến việc dồn biến về trung bình cộng. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = 0, c = 3$ hoặc các hoán vị của bộ số $(0, 0, 3)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a, b, c\}$, suy ra $a \leq c, b \leq c$ và $1 \leq c \leq 3, 0 \leq a + b \leq 2$.

Đặt

$$f(a, b, c) = \sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} + \sqrt{3c^2 + 4ab + 9}.$$

Ta sẽ chứng minh $f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$.

Bước 1: Ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} \geq \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36 + \frac{5(a-b)^2}{2}}.$$

Bình phương hai vế và sử dụng $(x+y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x-y)^2$, ta được

$$\begin{aligned} & 2(3a^2 + 4bc + 9 + 3b^2 + 4ca + 9 - (\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} - \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2) \\ & \geq 3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36 + \frac{5(a-b)^2}{2}. \end{aligned}$$

Tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2} \geq (\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} - \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2.$$

Ta có

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} - \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} = \frac{(a-b)[3(a+b) - 4c]}{\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9}}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{2} \geq \frac{[3(a+b) - 4c]^2}{(\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2}.$$

Suy ra

$$(\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2 \geq 2[3(a+b) - 4c]^2. \quad (1)$$

Kết hợp với $c = \max\{a, b, c\}$ và bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} &\geq \sqrt{3a^2 + 4b^2 + 9} + \sqrt{3b^2 + 4a^2 + 9} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (2b)^2 + 3^2} + \sqrt{(\sqrt{3}b)^2 + (2a)^2 + 3^2} \\ &\geq \sqrt{3(a+b)^2 + 4(a+b)^2 + 36} \\ &= \sqrt{7(a+b)^2 + 36}.\end{aligned}$$

Từ $1 \leq c \leq 3$, ta có

$$[3(a+b) - 4c]^2 \leq [3(a+b) - 4]^2 = 9(a+b)^2 - 24(a+b) + 16.$$

Kết hợp với (1), ta chỉ cần chứng minh

$$7(a+b)^2 + 36 \geq 2[9(a+b)^2 - 24(a+b) + 16].$$

Tương đương với

$$11(a+b)[3 - (a+b)] + 15(a+b) + 4 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng, bởi vì $0 \leq a+b \leq 2$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}&\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} + \sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \\ &\geq \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} - \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} \\ &\geq \sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} - \sqrt{3c^2 + 4ab + 9}.\end{aligned}$$

Nhân liên hợp và phân tích thành tổng bình phương, ta đưa về chứng minh

$$\begin{aligned}&5\sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} + 5\sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \\ &\geq 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} + 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36}.\end{aligned}\quad (2)$$

(i) Ta sẽ chứng minh

$$5\sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} \geq 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2}.$$

Thật vậy, ta có $a \leq c, b \leq c$ và $1 \leq c \leq 3$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}&2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} \\ &= \sqrt{12(a^2 + 2ab + b^2) + 32(a+b)c + 144} + 10(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \sqrt{22(a^2 + b^2) + 2ab + 32(a+b)c + 144} \\ &\leq \sqrt{22(c^2 + c^2) + 2c^2 + 32(a+b)c + 144} \\ &= \sqrt{46c^2 + 32(a+b)c + 144}.\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$5\sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} \geq \sqrt{46c^2 + 32(a+b)c + 144}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$29c^2 + 25(a+b)^2 + 81 - 32(a+b)c \geq 0.$$

Từ $a+b+c=3$, ta có

$$29c^2 + 25(a+b)^2 + 9(a+b+c)^2 - 32(a+b)c \geq 0.$$

hay

$$10c^2 + 34(a+b)^2 + 14c[2c - (a+b)] \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì

$$2c - (a+b) = 2c - (3-c) = 3c - 3 = 3(c-1) \geq 0, \forall 1 \leq c \leq 3.$$

(ii) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$5\sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \geq 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36}.$$

Thật vậy, từ $c = \max\{a, b, c\}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} &\leq \sqrt{3(c+c)^2 + 8(a+b)c + 36} \\ &= \sqrt{12c^2 + 8(a+b)c + 36}. \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$5\sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \geq 2\sqrt{12c^2 + 8(a+b)c + 36}.$$

Bình phương hai vế, ta được

$$25(3c^2 + 4ab + 9) \geq 4[12c^2 + 8(a+b)c + 36].$$

Chú ý rằng $a+b+c=3$ nên

$$8c^2 + 100ab + 9(a+b)^2 + 14c[2c - (a+b)] \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng tương tự trường hợp trên.

Do đó, bất đẳng thức (2) được chứng minh. Bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Để hoàn thành lời giải, ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} \geq 12.$$

Từ $a+b+c=3$, ta có

$$\sqrt{3(3-c)^2 + 8(3-c)c + 36} + \sqrt{3c^2 + (3-c)^2 + 9} \geq 12.$$

Suy ra

$$\sqrt{63 + 6c - 5c^2} + \sqrt{4c^2 - 6c + 18} \geq 12.$$

Bình phương hai vế và khử căn hai lần, ta đưa về được

$$(c-1)^2(3-c)(3c+7) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng bởi vì ta có $1 \leq c \leq 3$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán 1 được giải quyết hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=3, b=c=0$ hoặc $b=3, c=a=0$ hoặc $c=3, a=b=0$.

Câu 6.3. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị của các bộ số $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $0 \leq c \leq 1$.

Đặt

$$f(a, b, c) = \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Bước 1. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2} \geq \sqrt{36 - 12(a+b)c + (a+b)^2 + 4c^2} - \frac{(a-b)^2}{5}.$$

Bình phương hai vế và biến đổi, ta thu được

$$\frac{6(a-b)^2}{5} \geq \left(\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} - \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2}\right)^2.$$

Nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta đưa về chứng minh rằng

$$\frac{6}{5} \geq \frac{[6c - (a+b)]^2}{(\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2})^2}.$$

hay

$$6 \left(\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2}\right)^2 \geq 5[6c - (a+b)]^2. \quad (3)$$

Từ $c = \min\{a, b, c\}$ và $a + b + c = 3$, ta chứng minh được rằng

$$\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} \geq \sqrt{b^2 + (c+a)^2 + (b-c)^2}.$$

và

$$\sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2} \geq \sqrt{a^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2}.$$

Cộng hai đánh giá trên lại và áp dụng thêm bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{b^2 + (c+a)^2 + (b-c)^2} + \sqrt{a^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b)^2 + (a+b+2c)^2 + (a-b)^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b)^2 + (a+b+2c)^2} \\ & = \sqrt{18 + 2c^2}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, $[6c - (a+b)]^2 = [6c - (3-c)]^2 = 49c^2 - 42c + 9$. Kết hợp với (3), ta đưa về

$$6(18 + 2c^2) \geq 5(49c^2 - 42c + 9).$$

Bất đẳng thức cuối tương đương với $-233c^2 + 210c + 63 = (1-c)(233c + 23) + 40 \geq 0$ đúng vì $c \leq 1$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{36 - 12(a+b)c + (a+b)^2 + 4c^2} - \frac{(a-b)^2}{5} \\ & \geq \sqrt{9 - (a+b)^2} + \sqrt{36 - 12(a+b)c + (a+b)^2 + 4c^2}. \end{aligned}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} - \sqrt{9 - (a + b)^2} \\ & \geq \sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} - \sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2 - \frac{(a - b)^2}{5}}. \end{aligned}$$

Tiếp tục nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & 10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} + 10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2 - \frac{(a - b)^2}{5}} \\ & \geq \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{9 - (a + b)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

(i) Ta sẽ chứng minh

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} \geq \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2}.$$

Thật vậy, từ $a + b + c = 3$ và $c = \min\{a, b, c\}$, suy ra $a \geq c, b \geq c, 0 \leq c \leq 1$ và

$$a^2 + b^2 - 6ab = (a + b)^2 - 2ab - 6ab = (a + b)^2 - 8ab \leq (a + b)^2 - 8c^2.$$

Suy ra

$$\sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} \leq \sqrt{9 + (a + b)^2 - 8c^2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} \geq \sqrt{9 + (a + b)^2 - 8c^2}.$$

Từ $a + b + c = 3$, ta có

$$10\sqrt{36 - 12(3 - c)c + (3 - c)^2 + 4c^2} \geq \sqrt{9 + (3 - c)^2 - 8c^2}.$$

Khai triển và thu gọn, ta được

$$1707c^2 + 4194(1 - c) + 288 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng vì $0 \leq c \leq 1$.

(ii) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} - \frac{(a - b)^2}{5} \geq \sqrt{9 - (a + b)^2}.$$

Ta có:

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} - \frac{(a - b)^2}{5} = \sqrt{3600 - 1200(a + b)c + 80(a + b)^2 + 400c^2 + 80ab}.$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{3600 - 1200(a + b)c + 80(a + b)^2 + 400c^2 + 80ab} \geq \sqrt{9 - (a + b)^2}.$$

Bình phương hai vế và biến đổi, ta thu được

$$4086(1 - c) + 234 + 1681c^2 + 80ab \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì $0 \leq c \leq 1$ và a, b là các số thực dương.

Do đó, bất đẳng thức (4) là được chứng minh. Bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Để hoàn thành lời giải, ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a + b}{2}, \frac{a + b}{2}, c\right) = \sqrt{9 - (a + b)^2} + \sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} \geq 3\sqrt{5}.$$

Từ $a + b + c = 3$, ta có

$$\sqrt{9 - (3 - c)^2} + \sqrt{36 - 12(3 - c)c + (3 - c)^2 + 4c^2} \geq 3\sqrt{5}.$$

Suy ra

$$\sqrt{6c - c^2} + \sqrt{17c^2 - 42c + 45} \geq 3\sqrt{5}.$$

Lại bình phương hai vế và phân tích, ta thu được

$$c(c - 1)^2(10 - 3c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì $0 \leq c \leq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}$, $c = 0$ hoặc $b = 0$, $c = a = \frac{3}{2}$.

Tương tự bài toán 1 ở trên, đánh giá ở bước 1 chính là chìa khóa để giải quyết bài toán này.

Câu 6.4. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$, còn xảy ra tại $a = b = 0$, $c = 3$ hoặc các hoán vị của bộ số $(0; 0; 3)$. Không mất tính tổng quát giả sử $c = \max\{a, b, c\}$, suy ra $a \leq c$, $b \leq c$. Từ $a + b + c = 3$, suy ra $1 \leq c \leq 3$ kéo theo $0 \leq a + b \leq 2$. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)} + \sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \leq 12\sqrt{3}.$$

Ta đặt

$$f(a; b; c) = \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)} + \sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)}.$$

Ta sẽ chứng minh $f(a; b; c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right)$.

Bước 1. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \\ & \leq \sqrt{48 + 44(a+b)c + 7(a+b)^2 + 28c^2 + 2(a-b)^2}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế và biến đổi, ta thu được

$$5(a-b)^2 \leq \left[\sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} - \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \right]^2.$$

hay

$$5 \left[\sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \right]^2 \leq [7(a+b) + 22c]^2. (5)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \right]^2 \\ & \leq (1+1) [12 + 22bc + 7(b^2 + c^2) + 12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)] \\ & = 48 + 44(a+b)c + 28c^2 + 14(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Kết hợp với (5), ta chỉ cần chứng minh

$$5 [48 + 44(a+b)c + 28c^2 + 14(a^2 + b^2)] \leq [7(a+b) + 22c]^2.$$

Tương đương với

$$(a+b)[88c - 21(a+b)] + 240(c^2 - 1) + 104c^2 + 140ab \geq 0.$$

3. PHƯƠNG PHÁP ĐỒN BIẾN

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $0 \leq a + b \leq 2$ và $1 \leq c \leq 3$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước đôn biến ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} \\ & \leq \sqrt{12 + 9(a + b)^2} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2}. \end{aligned}$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} - \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \\ & \leq \sqrt{12 + 9(a + b)^2} - \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Bằng cách nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta đưa về chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \\ & \geq \sqrt{12 + 9(a + b)^2} + \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Đầu tiên ta chứng minh

$$\sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} \geq \sqrt{12 + 9(a + b)^2}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta thu được

$$36 + 2(a + b)[22c - (a + b)] + 28c^2 + 2(a - b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì $0 \leq a + b \leq 2$ và $1 \leq c \leq 3$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$\sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \geq \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta thu được

$$36 + 44(a + b)c + 28c^2 - 8ab \geq 0.$$

Vì $c = \max\{a, b, c\}$ nên $28c^2 - 8ab \geq 0$ và bất đẳng thức trên là đúng. Do đó, bất đẳng thức (7) được chứng minh. Bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Để hoàn thành lời giải ta cần chứng minh

$$f\left(\frac{a + b}{2}; \frac{a + b}{2}; c\right) = \sqrt{12 + 9(a + b)^2} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \leq 12\sqrt{3}.$$

Từ $a + b + c = 3$ ta được điều phải chứng minh trở thành

$$\sqrt{93 - 54c + 9c^2} + \sqrt{111 + 90c - 9c^2} \leq 12\sqrt{3}$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta được

$$(c - 1)^2(c - 3)(c - 11) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $1 \leq c \leq 3$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn hay bài toán được chứng minh xong.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 3, b = c = 0$ hoặc $b = 3, a = c = 0$ hoặc $c = 3, a = b = 0$.

Bước đánh giá ở bước 1 là mấu chốt để ta giải quyết bài toán.

Câu 6.5. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$ còn xảy ra tại $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị của bộ số $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, khi đó $0 \leq c \leq 1$.

Đặt $f(a; b; c) = \sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + \sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(a; b; c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right).$$

Bước 1. Ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b} \geq \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2}.$$

Bình phương hai vế và khai triển ta có

$$4(a-b)^2 \geq \left[\sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} - \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b}\right]^2.$$

Nhân liên hợp cho bất đẳng thức trên ta đưa về

$$4\left[\sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b}\right]^2 \geq [21 - 2(a+b)]^2. (8)$$

Áp dụng tính chất $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$ và bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b} \\ & \geq \sqrt{(b+c)^2 + 21a} + \sqrt{(c+a)^2 + 21b} \\ & = \sqrt{(b+c)^2 + (\sqrt{21a})^2} + \sqrt{(c+a)^2 + (\sqrt{21b})^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b+2c)^2 + (\sqrt{21a} + \sqrt{21b})^2}. \end{aligned}$$

Từ $a + b + c = 3$ và $c = \min\{a; b; c\}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a+b+2c)^2 + (\sqrt{21a} + \sqrt{21b})^2} \\ & = \sqrt{(3-c+2c)^2 + 21(a+b+2\sqrt{ab})} \\ & \geq \sqrt{(3+c)^2 + 21(3-c+2c)} = \sqrt{c^2 + 27c + 72}. \end{aligned}$$

Ngoài ra $[21 - 2(a+b)]^2 = [21 - 2(3-c)]^2 = 225 + 60c + 4c^2$, kết hợp với (8) ta cần có

$$4(c^2 + 27c + 72) \geq 225 + 60c + 4c^2 \Leftrightarrow 16c + 21 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $0 \leq c \leq 1$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b)^2 + 21c} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} - \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \\ & \leq \sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} - \sqrt{(a+b)^2 + 21c}. \end{aligned}$$

Nhân lượng liên hợp ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \\ & \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + 2\sqrt{(a+b)^2 + 21c}. \end{aligned} \quad (9)$$

Đầu tiên ta chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c}.$$

Thật vậy ta có $c = \min\{a, b, c\}$ suy ra $2(a^2 + b^2) = 2(a+b)^2 - 4ab \leq 2(a+b)^2 - 4c^2$. Khi đó ta thu được

$$2\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} \geq 2\sqrt{2(a+b)^2 - 4c^2 + 21c}.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} \geq 2\sqrt{2(a+b)^2 - 4c^2 + 21c}.$$

Từ $a + b + c = 3$, bình phương hai vế và biến đổi ta cần chứng minh

$$2(3-c)^2 + 8c^2 + 42(3-c) \geq 8(3-c)^2 - 16c^2 + 84c \Leftrightarrow (1-c)(4-c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng do $0 \leq c \leq 1$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \geq 2\sqrt{(a+b)^2 + 21c}.$$

Để ý rằng $\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} = \sqrt{8c^2 + 42(a+b) + 8ab}$ nên ta cần chứng minh

$$\sqrt{8c^2 + 42(a+b) + 8ab} \geq 2\sqrt{(a+b)^2 + 21c}.$$

Từ $a + b + c = 3$ nên điều này tương đương với

$$8c^2 + 42(3-c) + 8ab \geq 4[(3-c)^2 + 21c].$$

Từ $c = \min\{a, b, c\}$ ta có $8ab \geq 8c^2$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$$8c^2 + 42(3-c) + 8c^2 \geq 4[(3-c)^2 + 21c] \Leftrightarrow (1-c)(15-2c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $0 \leq c \leq 1$. Đến đây thì bất đẳng thức (9) đã được chứng minh hay bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right) = \sqrt{(a+b)^2 + 21c} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} \geq 15.$$

Từ $a + b + c = 3$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{(3-c)^2 + 21c} + \sqrt{2(3-c)^2 + 8c^2 + 42(3-c)} \geq 15.$$

Bình phương khử căn ta đưa về

$$c(c-1)^2(40-3c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0 \leq c \leq 1$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán đã được giải quyết.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc $b = c = \frac{3}{2}, a = 0$ hoặc $a = c = \frac{3}{2}, b = 0$.

Câu 6.6. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị bộ $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $0 \leq c \leq 1$.

Đặt $f(a, b, c) = \sqrt{3a^2 - a + 1} + \sqrt{3b^2 - b + 1} + \sqrt{3c^2 - c + 1} - \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9}$.

Bước 1. Ta dễ chứng minh được

$$\sqrt{3a^2 - a + 1} + \sqrt{3b^2 - b + 1} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{6(a^2 + b^2 - 2(a + b) + 4 - (a + b)^2)}.$$

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{6(a^2 + b^2 - 2(a + b) + 4 - (a + b)^2)} - \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9} \leq \\ & \leq \sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} + \sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9}. \end{aligned}$$

Nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta đưa về

$$\begin{aligned} & 3 \left[\sqrt{6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 4 - (a - b)^2} + \sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} \right] \geq \\ & \geq 2 \left[\sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9} + \sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9} \right]. \end{aligned}$$

- Ta dễ chứng minh được

$$3\sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} \geq 2\sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9}.$$

- Ta dễ chứng minh được

$$3\sqrt{6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 4 - (a - b)^2} \geq 2\sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9}.$$

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9}.$$

Từ $a + b + c = 3$ ta suy ra

$$\sqrt{3c^2 - 16c + 25} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{9(c^2 - 2c + 4)}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$9c(c - 1)^2(16 - 3c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0 \leq c \leq 1$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$, hoặc $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$, hoặc $b = 0, c = a = \frac{3}{2}$.

Câu 6.7. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra $a = b = c = \frac{2}{3}$. Còn xảy ra tại $a = b = 1$ hoặc các hoán vị bộ $(1, 1, 0)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $0 \leq c \leq \frac{2}{3}$.

Đặt $f(a, b, c) = \sqrt{a + b - 2ab} + \sqrt{b + c - 2bc} + \sqrt{c + a - 2ca}$.

Bước 1. Ta chứng minh được

$$\sqrt{b + c - 2bc} + \sqrt{c + a - 2ca} \geq \sqrt{2(a + b) + 4c - 4(a + b)c - \frac{1}{2}(a - b)^2}.$$

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b-2ab} + \sqrt{2(a+b)+4c-4(a+b)c-\frac{1}{2}(a-b)^2} &\geq \\ &\geq \sqrt{a+b+\frac{(a+b)^2}{2}} + \sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)}. \end{aligned}$$

Nhân lượng liên hợp, ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)} + \sqrt{2(a+b)+4c-4(a+b)c-\frac{1}{2}(a-b)^2} &\geq \\ \sqrt{a+b-2ab} + \sqrt{a+b+\frac{(a+b)^2}{2}}. \end{aligned}$$

(i) Ta chứng minh được

$$\sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)} \geq \sqrt{a+b-2ab}.$$

(ii) Ta chứng minh được

$$\sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)^2} \geq \sqrt{a+b+\frac{(a+b)^2}{2}}.$$

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{2c-c^2}{2}} + \sqrt{4-6c+4c^2} \geq 2.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$c(3c-2)^2(16-9c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0 \leq c \leq \frac{2}{3}$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán đã cho được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$, hoặc $a = b = 1, c = 0$, hoặc $a = 0, b = c = 1$, hoặc $b = 0, c = a = 1$.

Câu 6.8. Bài toán ngày ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = \frac{2}{3}, c = \frac{5}{3}$, hoặc các hoán vị của bộ số $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $1 \leq c \leq 3$. Đặt

$$f(a, b, c) = \sqrt{2a^2 - a + 1} + \sqrt{2b^2 - b + 1} + \sqrt{2c^2 - c + 1} - \frac{1}{3}\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99}.$$

Bước 1. Dễ dàng chứng minh được

$$\sqrt{2a^2 - a + 1} + \sqrt{2b^2 - b + 1} + \geq \sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4 + \frac{7}{16}(a-b)^2}.$$

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4 + \frac{7}{16}(a-b)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99} \geq$$

$$\geq \sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} - \frac{1}{3}\sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99}.$$

Nhân lượng liên hợp và biến đổi ta đưa về

$$\begin{aligned} & \sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99} + \sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99} \geq \\ & \geq 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} + \frac{7}{16}(a-b)^2 + 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4}. \end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

$$\sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99} \geq 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4}.$$

và

$$\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99} \geq 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} + \frac{7}{16}(a-b)^2.$$

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} + \sqrt{2c^2 - c + 1} - \frac{1}{3}\sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99} \geq 0.$$

Từ $a + b + c = 3$, ta suy ra

$$\sqrt{2c^2 - 10c + 16} + \sqrt{2c^2 - c + 1} \geq \sqrt{\frac{7c^2 - 14c + 43}{2}}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$7(3c - 5)^2(c - 1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng. Bước 3 giải quyết hoàn toàn và cũng kết thúc bài toán.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{2}{3}, c = \frac{5}{3}$ hoặc $a = \frac{5}{3}, b = \frac{2}{3}, c = a = \frac{2}{3}$.

Câu 6.15. Chuẩn hóa $ab + bc + ca = 3$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}$ và t là số thực dương thỏa mãn $2at + t^2 = 3$. Xét

$$P = f(a, b, c) - f(a, t, t) = \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(a+t)^2} \right) + \left(\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{4t^2} \right).$$

Ta có

$$2at + t^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow a(b + c - 2t) = t^2 - bc. \quad (1)$$

Nếu $b + c < 2t$ thì $VT(1) < 0$ và $t^2 > \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab$ nên $VP(1) \geq 0$, dẫn đến mâu thuẫn với (1). Từ đó, suy ra $b + c \geq 2t \Rightarrow (b+c)^2 \geq 4t^2 \Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2}$

§4. Phương pháp p, q, r

Câu 1.1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1 + \frac{3}{p} \geq \frac{6}{q} \Leftrightarrow pq + 3q - 6p \geq 0 \Leftrightarrow q \geq \frac{6p}{p+3}. \quad (1)$$

Ta có $p^2 \geq 3pr = 3p$, nên $q \geq \sqrt{3p}$. Do đó, để chứng minh (1) ta chứng minh

$$\sqrt{3p} \geq \frac{6p}{p+3} \Leftrightarrow p(p+3)^2 \geq 12p^2 \Leftrightarrow (p-3)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Câu 1.2. Ta có $q + 6r = 9$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$p + 3r \geq 6 \Leftrightarrow 2p \geq q + 3. \quad (2)$$

Theo BĐT Schur ta có

$$9r \geq 4pq - p^3 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{9-q}{6} \geq 4pq - p^3 \Leftrightarrow q \leq \frac{27+2p^3}{8p+3}.$$

Do đó để chứng minh (2) ta chứng minh

$$2p \geq \frac{27+2p^3}{8p+3} + 3 \Leftrightarrow p^3 - 2p^2 + 9p + 18 \leq 0 \Leftrightarrow (p+1)(p-3)(p-6) \leq 0. \quad (3)$$

Ta có $9 = q + 6r \leq \frac{p^2}{3} + \frac{6p^3}{27} \Leftrightarrow p \geq 3$ nên (3) đúng khi $p \leq 6$. Nếu $p > 6$ thì $a + b + c + 3abc > 6$.

Câu 1.3. Nếu $a + b + c > 4$ thì ta có $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 > \frac{64}{9}$ Áp dụng BĐT Schur, ta có:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc &\geq (ab+bc+ca)(a+b+c) = pq = 3p \end{aligned}$$

và

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} = \frac{p(12-p^2)}{9}.$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} 3p + \frac{p(12-p^2)}{9} &\geq 10 \\ \Leftrightarrow \frac{(p-3)[(16-p^2) + 3(4-p) + 2]}{9} &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.4. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$3r + 12 \geq 5q. \quad (1)$$

Mặt khác, theo BDT Schur, ta có:

$$3r \geq \frac{3p(4q-p^2)}{9} = 4q - 9.$$

Nên ta chứng minh

$$4q - 9 + 12 \geq 5q \Leftrightarrow q \leq 3 \text{ (đúng).}$$

Câu 1.5. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$8p + 3r \geq 12 + 5q. \quad (1)$$

Áp dụng BDT Schur, ta có:

$$3r \geq \frac{p(4q - p^2)}{3} = \frac{p(2q - 3)}{3}.$$

Từ giả thiết $p^2 - 2q = 3 \Rightarrow q = \frac{p^2 - 3}{2}$.

Nên ta chỉ cần chứng minh:

$$8p + \frac{p(p^2 - 6)}{3} \geq 12 + \frac{5(p^2 - 3)}{2} \Leftrightarrow (2p - 3)(p - 3)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm.

Câu 1.6. Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh và chuyển về dạng p, q, r , ta có:

$$8(243 - 18p + 3r) \leq 3(729 - 81q + 27r - r^2) \Leftrightarrow 243 - 99q + 57r - 3r^2 \geq 0.$$

Theo BDT AM-GM thì $3 = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 \geq 3(abc)^2 = r^2$.

Theo BDT Schur, ta có:

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{3} = \frac{4q - 9}{3} \Rightarrow 57r \geq 19(4q - 9).$$

Nên ta cần chứng minh:

$$72 - 23q - 3r^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(1 - r^2) + 23(3 - q) \geq 0.$$

Vậy BDT được chứng minh.

Câu 1.7. Đưa bất đẳng thức về dạng p, q, r , từ giả thiết, ta có $q + r = 4$.
và lúc đó, bất đẳng thức trở thành

$$p^2 - 2q + 5r \geq 8 \Leftrightarrow p^2 - 7q + 12 \geq 0.$$

Nếu $4 \geq p$, sử dụng BDT Schur, ta có:

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9},$$

suy ra

$$\begin{aligned} 4 &\geq q + \frac{p(4q - p^2)}{9} \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3 + 36}{4p + 9} \\ \Rightarrow p^2 - \frac{7(p^3 + 36)}{4p + 9} + 12 &\geq 0 \Leftrightarrow (p - 3)(p^2 - 16) \leq 0. \end{aligned}$$

điều này đúng vì $4 \geq p \geq \sqrt{3q} \geq 3$.

Nếu $p \geq 4$, ta có $p^2 \geq 16 \geq 4q$ và

$$p^2 - 2q + 5r \geq p^2 - 2q \geq \frac{p^2}{2} \geq 8.$$

Vậy BDT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ hoặc $x = y = 2, z = 0$ và các hoán vị

§5. Phương pháp tiếp tuyến và cát tuyến

Câu 2.1. Vì BĐT đã cho thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, khi đó bđt cần chứng minh trở thành: $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$ trong đó: $f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x} - x$ với $0 < x < 1$. Dễ thấy hàm số $f(x)$ có $f''(x) > 0 \forall x \in (0; 1)$.

Theo BĐT tiếp tuyến ta có :

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f' \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) (a + b + c - \sqrt{3}) + 3f \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$\text{Do } \begin{cases} f' \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) < 0 \\ a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1.$$

Câu 2.2. Đặt $a_i = \tan x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\Rightarrow a_i > 0 \ i = 1, 2, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n a_i \leq n$.

Ta cần chứng minh :

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_i^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x > 0$ có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} \Rightarrow f''(x) < 0 \forall x > 0.$$

Do đó

$$f(x) \leq f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2^3}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x + 1).$$

Suy ra

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_i^2}} = \prod_{i=1}^n f(a_i) \leq \frac{1}{\sqrt{8^n}} \prod_{i=1}^n (a_i + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{8^n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (a_i + 1)}{n} \right)^n \leq \frac{2^n}{\sqrt{8^n}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ hay $\tan x_1 = \tan x_2 = \dots = \tan x_n = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\pi}{4}$.

Câu 2.3. Ta có :

$$bc \leq \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-a}{2} \right)^2; \quad ca \leq \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-b}{2} \right)^2; \quad ab \leq \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-c}{2} \right)^2$$

nên

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} = f(a) + f(b) + f(c).$$

Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2x + 5}$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{99x - 3}{100}$, nên ta xét

$$\frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} = \frac{(3x - 1)^2(15 - 11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0 \forall x \in (0; 1).$$

Suy ra

$$\frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} \geq \frac{99(a + b + c) - 9}{100} = \frac{9}{10}.$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 2.4. Vì Bđt cần chứng minh là thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Khi đó Bđt đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2 + a^2} + \frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2 + b^2} + \frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{4a^2 - 4a + 1}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{4b^2 - 4b + 1}{2b^2 - 2b + 1} + \frac{4c^2 - 4c + 1}{2c^2 - 2c + 1} \geq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{2b^2 - 2b + 1} + \frac{1}{2c^2 - 2c + 1} \leq \frac{27}{5} \\ \Leftrightarrow & f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{27}{5}. \end{aligned}$$

Trong đó $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$ với $x \in (0; 1)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{54x + 27}{25}$.

Ta có

$$\frac{54x + 27}{25} - f(x) = \frac{2(54x^3 - 27x^2 + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{2(3x - 1)^2(6x + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} \geq 0 \quad \forall x \in (0; 1).$$

Suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{54(a + b + c) + 81}{25} = \frac{27}{5}. \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 2.5. Phân tích. Với điều kiện $a + b + c = 1$ ta chọn điểm rơi tại $a = b = c = \frac{1}{3} = x_0$ và đặt $f(a) = a^3 + 5a^2$. Khi đó $f'(a) = 3a^2 + 10a$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$.

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} & a^3 + 5a^2 \geq \frac{11}{3} \left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27} \\ \Leftrightarrow & a^3 + 5a^2 - \frac{11}{3}a + \frac{17}{27} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \left(a + \frac{17}{3}\right) \geq 0 \quad (\text{BDT cuối luôn đúng với điều kiện } a > -1). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với các biểu thức còn lại:

$$\begin{aligned} b^3 + 5b^2 & \geq \frac{11}{3} \left(b - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27}, \\ c^3 + 5c^2 & \geq \frac{11}{3} \left(c - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế, ta được

$$S \geq \frac{11}{3}(a + b + c - 1) + \frac{16}{9} = \frac{16}{9}.$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $S = \frac{16}{9}$.

Vậy $\min S = \frac{16}{9}$ tại $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 2.6. Phân tích. Chọn điểm rơi $a = b = c = -2$ và đặt $f(a) = \frac{a}{a^2 + a + 1}$. Tính được $f'(-2) = -\frac{1}{3}$, $f(-2) = -\frac{2}{3}$. Ghép vào công thức (**).

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + a + 1} &\leq -\frac{1}{3}(a + 2) - \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -a^3 - 5a^2 - 8a - 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2)^2(a + 1) &\leq 0 \text{ (luôn đúng với } a < -1). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với các biến b, c , ta có

$$\begin{aligned} \frac{b}{b^2 + b + 1} &\leq -\frac{1}{3}(b + 2) - \frac{2}{3}, \\ \frac{c}{c^2 + c + 1} &\leq -\frac{1}{3}(c + 2) - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế được $S \leq -\frac{1}{3}(a + b + c) - 4 = 2 - 4 = -2$.

Với $a = b = c = -2$ thì $S = -2$.

Vậy $\max S = -2$ tại $a = b = c = -2$.

Câu 2.7. Phân tích. Lần này 3 biến không còn đối xứng (chỉ là hoán vị vòng quanh) và cũng không nhóm dạng phân ly biến được. Ta sẽ nhóm riêng $(a^3 + 2a^2b)$ để đánh giá và coi b là tham số (hoặc có thể nhóm $a^3 + 2c^2a$). Từ điều kiện ta có thể nhẩm ra dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$ và đặt $f(a) = a^3 + 2a^2b \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 4ab$, $f'(1) = 3 + 4b$, $f(1) = 1 + 2b$.

Ta có sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} a^3 + 2a^2b &\geq (3 + 4b)(a - 1) + (1 + 2b) \\ \Leftrightarrow (a^3 - 1) + (2a^2b - 2b) - (3 + 4b)(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 2b + 2) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng với điều kiện ban đầu)}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\begin{aligned} b^3 + 2b^2c &\geq (3 + 4c)(b - 1) + (1 + 2c), \\ c^3 + 2c^2a &\geq (3 + 4a)(c - 1) + (1 + 2a). \end{aligned}$$

Cộng vế với vế được $S \geq 4(ab + bc + ca) + a + b + c - 6 \geq 15 - 6 = 9$.

Với $a = b = c = 1$ thì $S = 9$.

Vậy $\min S = 9$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.8. Phân tích. Từ điều kiện đề bài nhẩm ra $a = b = c = 1$. Đặt $f(a) = 2a^3 - 3a^2b$ suy ra $f'(1) = 6 - 6b$, $f(1) = 2 - 3b$.

Ta có sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} 2a^3 - 3a^2b &\geq (6 - 6b)(a - 1) + 2 - 3b \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(2a - 3b + 4) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng bởi điều kiện xác định)}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\begin{aligned} 2b^3 - 3b^2c &\geq (6 - 6c)(b - 1) + 2 - 3c, \\ 2c^3 - 3c^2a &\geq (6 - 6a)(c - 1) + 2 - 3a. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ta được $S \geq 9(a + b + c) - 6(ab + bc + ac) - 12 \geq 3 \cdot 3 - 12 = -3$.

Với $a = b = c = 1$ thì $S = -3$.

Vậy $\min S = -3$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.9. Phân tích. Đặt $f(a) = 5a^3 + 2a^2b$, tính được $f'(1) = 15 + 4b$, $f(1) = 5 + 2b$.
Ta có

$$\begin{aligned} 5a^3 + 2a^2b &\geq (15 + 4b)(a - 1) + 5 + 2b \\ \Leftrightarrow 5(a - 1)(a^2 + a + 1) + 2b(a - 1)(a + 1) - (15 + 4b)(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)[5a^2 + 5a - 10 + 2b(a - 1)] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(5a + 2b + 10) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được $S \geq 13(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 30$.

Lại có $a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 3$.

Suy ra $S \geq 13 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 30 = 21$.

Với $a = b = c = 1$ thì $S = 21$.

Vậy $\min S = 21$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.10. Phân tích. Đặt $f(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{b}{a}$, tính được $f'(1) = -2 + b$, $f(1) = 1 - b$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{b}{a} &\geq (-2 + b)(a - 1) + 1 - b \\ \Leftrightarrow (1 - a) \left(\frac{1 + a}{a^2} \right) + b \left(\frac{a - 1}{a} \right) + (-2 + b)(1 - a) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - a) \left(\frac{1 + a}{a^2} - 2 + b - \frac{b}{a} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - a)^2 \left(\frac{2a + 1}{a^2} - \frac{b}{a} \right) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được $T \geq -4(a + b + c) + ab + bc + ca + 9 = 0$.

Với $a = b = c = 1$ thì $T = 0$.

Vậy $\min T = 0$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.11. Phân tích. Đặt $f(a) = a^5 + 3a^4b$, tính được $f'(1) = 5 + 12b$, $f(1) = 1 + 3b$.

Ta có

$$\begin{aligned} a^5 + 3a^4b &\geq (5 + 12b)(a - 1) + 1 + 3b \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) + 3b(a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) - (5 + 12b)(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)[3b(a^3 + a^2 + a - 3) + a^4 + a^3 + a^2 + a - 4] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2[3b(a^2 + 2a + 3) + a^3 + 2a^2 + 3a + 4] &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế được $A \geq 12(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) - 12 \geq 24 - 12 = 12$.

Với $a = b = c = 1$ thì $A = 12$.

Vậy $\min A = 12$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.12. Phân tích. Đặt $f(a) = a^2 + b\sqrt{3a + 1}$, tính được $f'(1) = 2 + \frac{3}{4}b$, $f(1) = 1 + 2b$.

Ghép vào công thức.

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b\sqrt{3a + 1} &\geq \left(2 + \frac{3}{4}b \right) (a - 1) + 1 + 2b \\ \Leftrightarrow (a - 1) \left(a + 1 + \frac{3b}{\sqrt{3a + 1} + 2} - 2 - \frac{3}{4}b \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2 \left[1 - \frac{9b}{4(\sqrt{3a + 1} + 2)^2} \right] &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự rồi cộng vế với vế được $B \geq \frac{3}{4}(ab + bc + ca) + \frac{13}{4}(a + b + c) - 3 \geq 9$.

Với $a = b = c = 1$ thì $B = 9$.

Vậy $\min B = 9$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.13. Xét hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, có $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, suy ra $f''(x) = 2 \tan x(1 + \tan^2 x) > 0$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Áp dụng BĐT tiếp tuyến với $\triangle MNP$ nhọn, ta có :

$$f(A) \geq f'(M)(A - M) + f(M) = \frac{1}{\cos^2 M}(A - M) + \tan M,$$

suy ra

$$\cos^2 M \cdot f(A) \geq \frac{1}{2} \sin 2M + A - M.$$

Tương tự :

$$\cos^2 N \cdot f(B) \geq \frac{1}{2} \sin 2N + B - N; \quad \cos^2 P \cdot f(C) \geq \frac{1}{2} \sin 2P + C - P.$$

Suy ra

$$\cos^2 M \cdot f(A) + \cos^2 N \cdot f(B) + \cos^2 P \cdot f(C) \geq \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2}.$$

Ta chọn các góc M, N, P sao cho

$$\cos M = k > 0; \quad \cos N = \sqrt{2}k; \quad \cos P = \sqrt{3}k.$$

Vì M, N, P là ba góc của tam giác nên ta có đẳng thức :

$$\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P + 2 \cos M \cdot \cos N \cdot \cos P = 1,$$

nên ta có $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})k + 2\sqrt{6}k^3 = 1$, do đó k là nghiệm dương của phương trình :

$$2\sqrt{6}x^3 + (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})x - 1 = 0. \quad (1)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sin 2M &= 2\sqrt{1 - \cos^2 M} \cdot \cos M = 2k\sqrt{1 - k^2}; \\ \sin 2N &= 2k\sqrt{2(1 - 2k^2)}; \quad \sin 2P = 2k\sqrt{3(1 - 3k^2)}. \end{aligned}$$

Dẫn tới

$$F \geq \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2k^2} = \frac{\sqrt{1 - k^2} + \sqrt{2(1 - 2k^2)} + \sqrt{3(1 - 3k^2)}}{k}.$$

Vậy $\min F = \frac{\sqrt{1 - k^2} + \sqrt{2(1 - 2k^2)} + \sqrt{3(1 - 3k^2)}}{k}$ đạt được khi $A = M; B = N; C = P$ với M, N, P là ba góc của tam giác nhọn được xác định bởi

$$\cos M = k > 0; \quad \cos N = \sqrt{2}k; \quad \cos P = \sqrt{3}k,$$

trong đó k là nghiệm dương duy nhất của (1).

Câu 2.14. Ta có các hàm số $f(t) = t^3$; $g(t) = \sqrt{1+t^2}$; $h(t) = \sqrt[4]{1+t^4}$, $t \in (0; 1)$ là những hàm số có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng $(0; 1)$. Nên với $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 1$ áp dụng BDT tiếp tuyến, ta có:

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a), h(y) \geq h'(b)(y - b) + h(b), g(z) \geq g'(c)(z - c) + g(c).$$

Ta chọn a, b, c sao cho

$$f'(a) = g'(b) = h'(c) = k \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = k \\ \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = k \\ \frac{c^3}{\sqrt[4]{(1+c^4)^3}} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{k}{3}} \\ b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \\ c = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}} \end{cases} \quad (1)$$

Do $a + b + c = 1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{k}{3}} + \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}} = 1. \quad (2)$$

Dễ thấy phương trình (2) luôn có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$. Suy ra

$$P = f(x) + g(y) + h(z) \geq f(a) + h(b) + g(c) = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = a; y = b; z = c$.

Vậy $\min P = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}}$ với k là nghiệm nằm trong $(0; 1)$ của (2).

Chương 3

Một số chuyên đề

§1. Ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc ba

Câu 1.1. Đặt $n = ab + bc + ca$, $p = -abc$ Suy ra a, b, c là ba nghiệm của phương trình : $x^3 - mx + n = 0$ (4) Ta có:

$$p^2 \leq -\frac{4}{27}n^3 \Rightarrow n^3 \leq -\frac{27}{4}p^2.$$

Do đó:

$$13p^2 + 2p - 2 + 2n^3 \leq 13p^2 + 2p - 2 - \frac{27}{2}p^2 = -\left(\frac{1}{2}p - 1\right)^2 \leq 0.$$

Suy ra:

$$13p^2 + 2p - 2 \leq -2n^3 \Leftrightarrow 13a^2b^2c^2 - 2ab - 2 \leq -2(ab + bc + ca)^3.$$

Mà:

$$(a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

dẫn tới:

$$13a^2b^2c^2 - 2abc - 2 \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^3 \Rightarrow P \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a, b, c$ là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2.$$

Vậy $\max P = \frac{1}{4}$ đạt được khi $(a, b, c) = (1, 1, -2)$ và các hoán vị.

Câu 1.2. Đặt $n = ab + bc + ca$, $p = -abc$ Ta có:

$$p^2 \leq -\frac{4}{27}n^3 \Rightarrow -n^3 \geq \frac{27}{4}p^2 \Rightarrow |n^3| \geq \frac{27}{4}p^2.$$

Vì

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca) = -2n \Rightarrow n \leq 0.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} P &= -32n^5 - 32np^2 - 8|p| = 32[(-n)^5 + (-n)p^2] - 8|p| \\ &\geq 64|n^3||p| - 8|p| \geq 8(54|p|^3 - |p|). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 54t^3 - t, t \geq 0$ ta có:

$$f'(t) = 162t^2 - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{t \geq 0} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{18}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{27}$.

Suy ra $P \geq -\frac{8\sqrt{2}}{27}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} p = \frac{\sqrt{2}}{18} \\ n = -\frac{1}{\sqrt[3]{24}} \end{cases}$ hay a, b, c là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{24}}t + \frac{\sqrt{2}}{18} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}\right)^2 \left(t + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}, t = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}.$$

Vậy $\min P = -\frac{8\sqrt{2}}{27}$. Đạt được khi $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}, c = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}$ và các hoán vị.

Câu 1.3. Đặt $m = -(a + b + c), n = ab + bc + ca, p = -abc$. Từ giả thiết ta suy ra:

$$(a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca) \Leftrightarrow n = \frac{m^2}{4}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \left|27p - \frac{m^3}{4}\right| &\leq \frac{|m^3|}{4} \\ \Leftrightarrow |108p - m^3| &\leq |m^3| \\ \Leftrightarrow p(54p - m^3) &\leq 0 \Leftrightarrow pm^3 \geq 54p^2. \end{aligned}$$

Do đó:

$$P = pm^3 + \frac{1}{p^4} \geq 54p^2 + \frac{1}{p^4} = 27p^2 + 27p^2 + \frac{1}{p^4} \geq 3\sqrt[3]{27p^2 \cdot 27p^2 \cdot \frac{1}{p^4}} = 27 \text{ (đpcm)}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{m^2}{4} \\ 27p^2 = \frac{1}{p^4} \\ 54p = m^3 \end{cases}, \text{ chẳng hạn ta chọn } \begin{cases} p = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m = \sqrt[3]{18\sqrt{3}} \\ n = \frac{\sqrt[3]{972}}{4} \end{cases} \text{ hay } a, b, c \text{ là nghiệm của}$$

phương trình:

$$t^3 + \sqrt[3]{18\sqrt{3}}t^2 + \frac{\sqrt[3]{972}}{4}t + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{\sqrt[3]{18\sqrt{3}}}{6}\right)^2 \left(t + \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Vậy $\min P = 27$ đạt được khi $a = b = -\frac{\sqrt[3]{18\sqrt{3}}}{6}, c = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$ và các hoán vị.

Câu 1.4. Đặt $m = -(a + b + c), n = ab + bc + ca, p = -abc$. Từ giả thiết ta suy ra:

$$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca) + 4 \Rightarrow m^2 = 3n + 4.$$

Mặt khác :

$$|27p + 2m^3 - 9mn| \leq 2\sqrt{(m^2 - 3n)^3}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |27p + 2m(3n + 4) - 9mn| &\leq 18 \\ \Leftrightarrow |27p - 3mn + 8m| &\leq 16 \\ \Rightarrow mn - 9p &\geq \frac{8m - 16}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} P &= 18(ab + bc + ca)^2 + 48(ab + bc + ca) - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 9abc \\ &= 2[3(ab + bc + ca) + 4]^2 - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 9abc - 16 \\ &= 2(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 9abc - 16 \\ &= 2m^4 + mn - 9p - 16 \geq 2m^4 + \frac{8m - 16}{3} - 16 = \frac{1}{3}(6m^4 + 8m - 64). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(m) = 6m^4 + 8m - 64$, ta có:

$$f'(m) = 24m^3 + 8 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Suy ra

$$f(m) \geq f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt[3]{3}} - 64.$$

$$\text{Nên } P \geq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} + 64\right).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 4\right) \\ p = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{3}} + \frac{47}{9}\right) \end{cases}, \text{ suy ra } a, b, c \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$: t^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}t^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 4\right)t + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{3}} + \frac{47}{9}\right) = 0.$$

$$\text{Vậy } \min P = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} + 64\right).$$

Câu 1.5. Chuẩn hoá $abc = 2 \Rightarrow a + b + c = 4$. Đặt $n = ab + bc + ca$, suy ra

$$\begin{aligned} |18n - 91| &\leq \sqrt{(16 - 3n)^3} \\ \Leftrightarrow 3n^3 - 12n^2 - 108n + 465 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (n - 5)(3n^2 + 3n - 93) &\leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq n \leq \frac{-1 + 5\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= (16 - 2n)^2 - 2(n^2 - 16) = 2n^2 - 64n + 288. \end{aligned}$$

Nên

$$P = \frac{1}{256}(a^4 + b^4 + c^4) = \frac{1}{128}(n^2 - 32n + 144)$$

Vì hàm $f(n) = n^2 - 32n + 144$ nghịch biến trên $\left[5; \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}\right]$ nên ta suy ra

$$\max P = \frac{1}{128}f(5) = \frac{9}{128} \text{ và } \min P = \frac{1}{128}f\left(\frac{5\sqrt{5} - 1}{2}\right) = \frac{383 - 165\sqrt{5}}{2}.$$

§2. Bài toán tìm hằng số tốt nhất

Câu 2.1. Vì bất đẳng thức đúng với mọi giá trị a, b, c nên phải đúng với $a = b = c = 1 \Rightarrow k \leq \frac{2}{3}$.

Ta chứng minh $k = \frac{2}{3}$ là giá trị lớn nhất.

Xét $k = \frac{2}{3}$ bất đẳng thức trở thành

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq \frac{2}{3}(ab + bc + ca)^2,$$

hay

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a + b + c). \quad (1)$$

Áp dụng bất AM – GM ta có

$$(a^4 + b^4) + (b^4 + c^4) + (c^4 + a^4) \geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Suy ra

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad (2)$$

Mặt khác

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c) = \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(bc - ca)^2 + \frac{1}{2}(ca - ab)^2 \geq 0. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) được chứng minh.

Vậy số k lớn nhất $k = \frac{2}{3}$.

Câu 2.2. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \min\{a; b; c\}$. Chọn $b = c$. Từ điều kiện, ta có $a + 2b = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq b \leq \frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{1 + 9b^2} + \frac{2b}{1 + 9ab + k(a - b)^2} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1 - 2b}{1 + 9b^2} - \frac{1}{6} \right) + \left[\frac{2b}{1 + 9b(1 - 2b) + k(1 - 3b)^2} - \frac{1}{3} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3b + 5)(1 - 3b)}{6(1 + 9b^2)} + \frac{(3b - 1)(6b + 1) - k(3b - 1)^2}{3[9b - 18b^2 + 1 + k(1 - 3b)^2]} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{6b + 1 - k(3b - 1)}{9b - 18b^2 + 1 + k(1 - 3b)^2} \geq \frac{3b + 5}{6(1 + 9b^2)} \\ \Leftrightarrow & \frac{54b^3 + 27b^2 + 12b - 1}{9b^2 + 4b - 1} \geq k \\ \Leftrightarrow & \frac{18b^2 + 15b + 1}{9b^2 + 4b - 1} \geq k \\ \Leftrightarrow & \frac{7b + 3}{9b^2 + 4b - 1} \geq k - 2. \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(b) = \frac{7b + 3}{9b^2 + 4b - 1}$ trên $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

Ta dễ dàng thấy được f nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ nên suy ra $f(b) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Do đó $k - 2 \leq 2 \Leftrightarrow k \leq 4$.

Ta chứng minh $k = 4$ là giá trị lớn nhất cần tìm. Tức là ta cần chứng minh:

$$\frac{a}{1 + 9bc + 4(b - c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + 4(c - a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + 4(a - b)^2} \geq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c) + 27abc + 4a(b - c)^2 + 4b(c - a)^2 + 4c(a - b)^2} \\ &= \frac{1}{1 + 3abc + 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ca(c + a)}. \end{aligned}$$

Do đó để chứng minh (1) ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 3abc + 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ca(c + a) \\ &\Leftrightarrow (a + b + c)^3 \geq 3abc + 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ca(c + a) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \end{aligned}$$

(điều này đúng, do đây là bất đẳng thức Schur).

Do đó (1) đúng với mọi a, b, c không âm và thỏa $a + b + c = 1$ và với $k_{\max} = 4$.

Vậy $k = 4$ là số cần tìm.

Câu 2.3. Thử chọn $b = c$ rồi xét hàm theo biến $\frac{a}{b}$, ta không dẫn đến kết quả cần tìm. Như vậy ta sẽ thử chọn một biến bằng 0, ở đây là một biến tiến dần đến 0.

Trong bất đẳng thức, ta cho $c \rightarrow 0$, khi đó $a^3 + b^3 \geq Mab^2$. Nhưng lại theo bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$a^3 + b^3 = a^3 + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot ab^2.$$

Như vậy ta thấy $M \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Do đó ta chứng minh $M = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ là giá trị lớn nhất cần tìm như sau:

Không giảm tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = u + c$, $b = v + c$ với $u, v \geq 0$.

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned} &(u + c)^3 + (v + c)^3 + c^3 - 3c(u + c)(v + c) \\ &\geq M[(u + c)(v + c)^2 + (v + c)c^2 + c(u + c)^2 - 3c(u + c)(v + c)] \\ &\Leftrightarrow (3 - M)(u^2 - uv + v^2) + u^3 + v^3 - Muv^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì, $3 - M > 0$, $u^2 - uv + v^2 \geq uv \geq 0$ và

$$u^3 + v^3 = u^3 + \frac{v^3}{2} + \frac{v^3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}uv^2 = Muv^2.$$

Từ đó ta hoàn tất phần chứng minh.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là: $M = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 2.4. Vì tính thuần nhất của bất đẳng thức nên ta chuẩn hóa $xyz = 1$. Từ đó ta biến đổi:

$x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + 3k \geq (k + 1) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3k \cdot abc \geq (k + 1)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq (k + 1)(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc). \end{aligned}$$

Đây là bất đẳng thức ở bài trên.

$$\text{Vậy } k + 1 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow k = -1 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Câu 2.5. Ta chọn $b = c$ thì giả thiết trở thành:

$$a + 2b = b^2 + 2ab \Rightarrow a = \frac{2b - b^2}{2b - 1}.$$

Vì $a > 0$ nên

$$\frac{2b - b^2}{2b - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < b \leq 2.$$

Bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} (a + 2b) \left(\frac{1}{2b} + \frac{2}{a + b} \right) &\geq k(a + 2b + 1) \\ \Rightarrow \left(\frac{2b - b^2}{2b - 1} + 2b \right) \left(\frac{1}{2b} + \frac{2}{\frac{2b - b^2}{2b - 1} + b} \right) &\geq k \left(\frac{2b - b^2}{2b - 1} + 2b + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3b^2 - b}{3b^3 + 5b^2 + b - 1} &\geq \frac{2k}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } f(b) = \frac{3b^2 - b}{3b^3 + 5b^2 + b - 1} \text{ trên } \left[\frac{1}{2}; 2 \right].$$

Ta có

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{-(b^2 - 1)(3b - 1)^2}{(3b^3 + 5b^2 + b - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Bằng cách lập bảng biến thiên ta tìm được $\min_{\left[\frac{1}{2}; 2 \right]} f(b) = \frac{2}{9}$ khi $b = 2$. Từ đó tìm được $k \leq 1$.

Ta chứng minh $k = 1$ là giá trị lớn nhất cần tìm. Thực vậy ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) &\geq a + b + c + 1 \\ \Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) &\geq a + b + c + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} &\geq 1. \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng dấu “=” đạt được tại một biến bằng 0 và hai biến bằng 2 nên nếu đánh giá bằng những bất đẳng thức thông thường có dấu “=” tại tâm sẽ không dẫn đến kết quả. Để đảm bảo dấu “=” ta sẽ loại bỏ dấu “=” tại biên này bằng cách sử dụng $abc \geq 0$ như sau:

Theo Cauchy - Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)} \\ &= \frac{(ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc} \\ &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} = 1. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn thành. Ta kết luận số k lớn nhất cần tìm là $k = 1$.

Câu 2.6. Cho $b = c$, ta có bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} (a + 2b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) - 9 &\geq k \left(1 - \frac{2ab + b^2}{a^2 + 2b^2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2(a - b)^2}{ab} &\geq k \cdot \frac{(a - b)^2}{a^2 + 2b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + 2b^2}{ab} &\geq \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\frac{a^2 + 2b^2}{ab} \geq 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $k \leq 4\sqrt{2}$.

Ta chứng minh đây là giá trị k lớn nhất cần tìm. Sử dụng bất đẳng thức Schur – SOS như sau:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 &\geq 4\sqrt{2} \left(1 - \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc}{abc} &\geq 4\sqrt{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2c(a - b)^2 + (a + b)(a - c)(b - c)}{abc} &\geq 4\sqrt{2} \cdot \frac{(a - b)^2 + (a - c)(b - c)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow M \cdot (a - b)^2 + N \cdot (a - c)(b - c) &\geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó: $M = \frac{2c}{abc} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$, $N = \frac{a + b}{abc} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ thì mọi việc hoàn tất nếu chỉ ra $N \geq 0$, hay

$$(a + b)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{2}abc.$$

Do tính thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Ta đi chứng minh kết quả mạnh hơn sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq c(a + b)\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - 2c(a + b) \geq c(a + b)\sqrt{2} + 2ab.$$

Và mạnh hơn nữa:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot c(a + b) &\geq \sqrt{2} \cdot c(a + b) + \frac{(a + b)^2}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot t(1 - t) &\geq \sqrt{2} \cdot t(1 - t) + \frac{t^2}{2}, \text{ với } t = a + b \\ \Leftrightarrow \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}t^2 - (2 + \sqrt{2})t + 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{(-2 + \sqrt{2})t}{2} - 1 \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Điều này đúng. Như vậy chứng minh hoàn tất.

Vậy số k lớn nhất thỏa đề bài là $k = 4\sqrt{2}$.

Câu 2.7. Ta chọn $a = b = t$, $c = 3 - 2t$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} k[2t^4 + (3 - 2t)^4 - 3] &\geq 2t^3 + (3 - 2t)^3 + 3t^2(3 - 2t) - 6 \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{-12t^3 + 45t^2 - 54t + 21}{18t^4 - 96t^3 + 216t^2 - 216t + 78} \\ &= \frac{3(t - 1)^2(7 - 4t)}{(t - 1)^2(18t^2 - 60t + 78)} \\ &= \frac{7 - 4t}{2(3t^2 - 10t + 13)} = f(t). \end{aligned}$$

Ta có:

$$f'(t) = \frac{12(2t^2 - 7t + 3)}{4(3t^2 - 10t + 13)^2} = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{3; \frac{1}{2}\right\}.$$

Khoảng giá trị của t là $(0; 3)$, từ đó ta thấy $\min_{(0;3)} f(t) = \frac{2}{7}$ khi $t = \frac{1}{2}$.

Vậy trở lại bài toán, ta cho $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 2$ thì ta được $k \geq \frac{2}{7}$, ta chứng minh giá trị nhỏ nhất của k là $\frac{2}{7}$ bằng cách chứng minh:

$$\frac{2}{7}(a^4 + b^4 + c^4 - 3) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 6.$$

Đặt $f(a, b, c) = VT - VP$. Ta chứng minh:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{7}\left[a^4 + b^4 - \frac{(a+b)^4}{8}\right] - \left[a^3 + b^3 - \frac{(a+b)^3}{4}\right] - 3c\left[ab - \frac{(a+b)^2}{4}\right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(a-b)^4 + 6(a-b)^2(a+b)^2}{28} - \frac{3(a+b)(a-b)^2}{4} + 3c \cdot \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7a^2 + 7b^2 + 10ab}{28} - \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3c}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 7(a^2 + b^2) + 10ab - 21(a+b) + 21c \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 7(a^2 + b^2) + 10ab - 21(a+b) + 21(3-a-b) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 5(a+b)^2 + 2(a^2 + b^2) - 42(a+b) + 63 \geq 0. \end{aligned}$$

Do $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ nên ta sẽ chứng minh:

$$6(a+b)^2 - 42(a+b) + 63 \geq 0.$$

Và điều này sẽ đúng nếu ta giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ vì khi đó $a+b \leq 2$.

Vậy ta chỉ cần chỉ ra:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &\geq 0 \Leftrightarrow f(t; t; 3-t) \geq 0, t = \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{7}[2t^4 + (3-2t)^4 - 3] \geq 2t^3 + (3-2t)^3 + 3t^2(3-2t) - 6. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng theo lập luận chặn t phía trên.

Vậy $k = \frac{2}{7}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Câu 2.8. Cho $b = c$ giả thiết đã cho viết thành:

$$a + 2b = b^2 + 2ab \Rightarrow a = \frac{b^2 - 2b}{1 - 2b} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq b \leq 2.$$

Lưu ý vì tìm số thực k lớn nhất nên xét $k > 0$.

Thay vào bất đẳng thức, ta được:

$$\begin{aligned} 2b + \frac{b^2 - 2b}{1 - 2b} + k \frac{b^2(b^2 - 2b)}{1 - 2b} &\geq k + 3 \\ \Leftrightarrow 2b(1 - 2b) + (b^2 - 2b) + kb^2(b^2 - 2b) &\geq k(1 - 2b) + 3(1 - 2b) \\ \Leftrightarrow 3(b-1)^2 \geq k(b^2 - 1)(b-1)^2 &\Leftrightarrow \frac{3}{k} \geq b^2 - 1. \end{aligned}$$

Mà $b^2 - 1 \leq 2^2 - 1 = 3$ suy ra $k \leq 1$. Ta chứng minh $k = 1$ là giá trị lớn nhất cần tìm.
Với giả thiết $a + b + c = ab + bc + ca$, ta chỉ cần chứng tỏ

$$ab + bc + ca + abc \geq 4.$$

Ta phản chứng $ab + bc + ca + abc = 4$ và đi chứng minh $a + b + c \geq ab + bc + ca$.
Đây là một kết quả quen thuộc của kì thi VMO 1996.

Câu 2.9. Trong bất đẳng thức ban đầu, ta cho $b = c$, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + 2b^3}{2b(a+b)} + k \cdot \frac{b^2 + 2ab}{(a+2b)^2} \geq \frac{3}{8} + \frac{k}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left[\frac{a^3 + 2b^3}{b(a+b)^2} - \frac{1}{4} \right] \geq k \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{b^2 + 2ab}{(a+2b)^2} \right] \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2 (4a+5b)}{8b(a+b)^2} \geq k \cdot \frac{(a-b)^2}{3(a+2b)^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{8k}{3} \leq \frac{(a+2b)^2 (4a+5b)}{b(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể chọn $b = 1$. Khi đó, ta có:

$$\frac{8k}{3} \leq \frac{(a+2)^2 (4a+5)}{(a+1)^2}.$$

Ta xét hàm $f(a) = \frac{(a+2)^2 (4a+5)}{(a+1)^2}$, $a > 0$. Ta có:

$$f'(a) = \frac{2(a+2)(2a^2+2a-1)}{(a+1)^3} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ (do } a > 0 \text{)}.$$

Lập bảng biến thiên ta được $f(a) \geq f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = 9 + 6\sqrt{3}$. Suy ra: $k \leq \frac{3(9+6\sqrt{3})}{8}$.

Ta chứng minh giá trị k lớn nhất cần tìm là $\frac{3(9+6\sqrt{3})}{8}$.

Ta sử dụng kĩ thuật Schur – SOS trong phần chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh viết dưới dạng:

$$\frac{8(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) - 3((a+b)(b+c)(c+a) - 8abc)}{8(a+b)(b+c)(c+a)} \geq k \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{3(a+b+c)^2}.$$

Ta sử dụng các khai triển:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c) [(a-b)^2 + (a-c)(b-c)] \\ (a+b)(b+c)(c+a) - 8abc &= 2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c) \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= (a-b)^2 + (a-c)(b-c). \end{aligned}$$

Từ đó ta nhóm được điều cần chứng minh thành:

$$M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0,$$

trong đó:

$$\begin{aligned} M &= \frac{8a+8b+2c}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{k}{3(a+b+c)^2} \\ N &= \frac{5a+5b+8c}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{k}{3(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Bây giờ, không giảm tổng quát ta giả sử $c = \min \{a, b, c\}$ nên $a + b \geq 2c$.

Từ đó $8a + 8b + 2c \geq 5a + 5b + 8c$.

Từ đây ta thấy ngay $M \geq N$. Hơn nữa cũng có $(a - c)(b - c) \geq 0$.

Hơn nữa cũng có $(a - c)(b - c) \geq 0$.

Như vậy bất đẳng thức chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được $N \geq 0$. Tức là:

$$3(5a + 5b + 8c)(a + b + c)^2 \geq 8k(a + b)(b + c)(c + a).$$

Đổi biến $(a + b, b + c, c + a) \rightarrow (X, Y, Z)$. Khi đó cần chứng minh:

$$3(X + 4Y + 4Z)(X + Y + Z)^2 \geq 32k \cdot XYZ.$$

Ta chứng minh kết quả mạnh hơn là:

$$3(X + 4Y + 4Z)(X + Y + Z)^2 \geq 8k \cdot X(Y + Z)^2 = (27 + 18\sqrt{3})X(Y + Z)^2.$$

Vì tính thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $X + Y + Z = 1$. Từ đó ta cần chứng minh:

$$3(4 - 3X) \geq (27 + 18\sqrt{3})X(1 - X)^2 \Leftrightarrow g(X) = \frac{4 - 3X}{X(1 - X)^2} \geq 9 + 6\sqrt{3},$$

trong đó $0 < X < 1$.

Khảo sát hàm g trên khoảng $(0; 1)$ ta được $g(X) \geq 9 + 6\sqrt{3}$.

Như vậy ta hoàn tất chứng minh.

Vậy k lớn nhất bằng $\frac{3(9 + 6\sqrt{3})}{8}$.

Câu 2.10. Cho $b = c$ ta được:

$$\left(\frac{a}{2b} + k\right) \left(\frac{b}{b+a} + k\right)^2 \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^3.$$

Cho $a \rightarrow 0$ ta được:

$$8k(k+1)^2 \geq (2k+1)^3 \Leftrightarrow 4k^2 + 2k \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ k \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

Ta chứng minh đây là toàn bộ giá trị k cần tìm. Đặt $x = \frac{2a}{b+c}$, $y = \frac{2b}{c+a}$, $z = \frac{2c}{a+b}$ thì

$$xy + yz + zx + xyz = 4.$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (x + 2k)(y + 2k)(z + 2k) &\geq (2k + 1)^3 \\ \Leftrightarrow xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(x + y + z) + 8k^3 &\geq (2k + 1)^3. \end{aligned}$$

Theo kết quả VMO 1996, ta được:

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} &xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(x + y + z) + 8k^3 \\ &\geq xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(xy + yz + zx) + 8k^3 \\ &= (xy + yz + zx + xyz) + (4k^2 + 2k - 1)(xy + yz + zx) + 8k^3 \\ &= 8k^3 + 4 + (4k^2 + 2k - 1)(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

Hơn nữa ta có:

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Rightarrow xyz \leq \frac{\sqrt{(xy + yz + zx)^3}}{3\sqrt{3}}.$$

Từ đó:

$$4 = xy + yz + zx + xyz \leq xy + yz + zx + \frac{\sqrt{(xy + yz + zx)^3}}{3\sqrt{3}} = t^2 + \frac{t^3}{3\sqrt{3}},$$

với $t = \sqrt{xy + yz + zx}$. Suy ra: $t \geq \sqrt{3} \Rightarrow xy + yz + zx \geq 3$. Suy ra:

$$\begin{aligned} & xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(x + y + z) + 8k^3 \\ & \geq 8k^3 + 4 + (4k^2 + 2k - 1)(xy + yz + zx) \\ & \geq 8k^3 + 4 + 3(4k^2 + 2k - 1) = (2k + 1)^3. \end{aligned}$$

Bài toán hoàn tất.

Câu 2.11. Trước hết ta đi tìm điều kiện cần cho k .

Thay $a = b = x$, $c = \frac{1}{x^2}$ với $x > 0$, $x \neq 1$, bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{2}{x} + \frac{k}{2x + \frac{1}{x^2} + 1} \geq 3 + \frac{k}{4} \\ \Leftrightarrow & x^2 + \frac{2}{x} - 3 \geq k \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 1} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{x} \geq \frac{k(x - 1)^2(2x + 1)}{4(2x^3 + x^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow & \frac{k}{4} \leq \frac{(x + 2)(2x^3 + x^2 + 1)}{x(2x + 1)} \\ \Leftrightarrow & \frac{k}{4} \leq x^2 + 2x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x + 1}, \forall x > 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta sẽ cho $x = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$ và tính giá trị của biểu thức

$$f(x) = x^2 + 2x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x + 1}$$

ở bên vế phải. Để ý rằng x là nghiệm của phương trình, do đó ta có $x^2 = \frac{4x + 1}{8}$, $\frac{1}{x} = 8x - 4$, $\frac{3}{2x + 1} = 4 - 4x$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x + 1}{8} + 2x + 2(8x - 4) - (4 - 4x) \\ &= \frac{45}{2}x - \frac{95}{8} = \frac{45}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{4} - \frac{95}{8} = \frac{45\sqrt{3} - 50}{8}. \end{aligned}$$

Với kết quả này, ta thu được

$$k \leq \frac{45\sqrt{3} - 50}{2} = 45 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 25 \approx 45 \times 0.866 - 25 \approx 13.97.$$

Mặt khác, vì k là số nguyên nên từ đây có $k \leq 13$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $k = 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1} \geq \frac{25}{4}.$$

Đặt

$$f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) &= \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{\sqrt{bc}} \right) + 13 \left(\frac{1}{a+b+c+1} - \frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1} \right) \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \left[\frac{1}{bc} - \frac{13}{(a+b+c+1)(a+2\sqrt{bc}+1)} \right]. \end{aligned}$$

Do $a = \max\{a; b; c\}$ và giả thiết $abc = 1$ nên ta có $bc \leq 1$, suy ra $\frac{1}{bc} \geq 1$. Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta lại có

$$\frac{13}{(a+b+c+1)(a+2\sqrt{bc}+1)} \leq \frac{13}{(3\sqrt[3]{abc}+1)(3\sqrt[3]{abc}+1)} = \frac{13}{16} < 1.$$

Từ đây ta đưa bài toán về chứng minh

$$f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right) \geq \frac{25}{4}$$

với $x = \sqrt{bc}$, $0 < x \leq 1$.

Nếu $x = 1$ thì bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức. Trong trường hợp $0 < x < 1$ bằng cách sử dụng lại biến đổi đã thực hiện trong quá trình tìm điều kiện cho k , ta thấy bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x^3+x^2+1)}{x(2x+1)} &\geq \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow 4(x+2)(2x^3+x^2+1) &\geq 13x(2x+1) \\ \Leftrightarrow 4(2x^4+5x^3+2x^2+x+2) &\geq 26x^2+13x \\ \Leftrightarrow 8x^4+20x^3-18x^2-9x+8 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 8x^4+20x^3-18x^2-9x+8 &= (8x^4-8x^2+2) + (20x^3-20x^2+5x) + (10x^2-14x+6) \\ &= 2(2x^2-1)^2 + 5x(2x-1)^2 + 2(5x^2-7x+3) > 0. \end{aligned}$$

Do $2(2x^2-1)^2 \geq 0$, $5 \cdot x(2x-1)^2 \geq 0$ và $5x^2-7x+3 > 0$ (tam thức bậc hai có hệ số cao nhất dương và biệt thức $\Delta = -11 < 0$).

Như vậy, bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy $k = 13$ là giá trị cần tìm.

Câu 2.12. Cho $a = b = t > 0$, $c = \frac{1}{t^2}$ ta được

$$\begin{aligned} 2t^2 + \frac{1}{t^4} + 3k &\geq (k+1) \left(\frac{2}{t} + t^2 \right) \Leftrightarrow \frac{2t^6 + 1}{t^4} + 3k \geq (k+1) \cdot \frac{t^3 + 2}{t} \\ \Leftrightarrow k \left(3 - \frac{t^3 + 2}{t} \right) &\geq \frac{t^3 + 2}{t} - \frac{2t^6 + 1}{t^4} \Leftrightarrow k \left(\frac{3t - t^3 - 2}{t} \right) \geq \frac{-t^6 + 2t^3 - 1}{t^4} \\ \Leftrightarrow k(t-1)^2(t+2) &\leq \frac{(t^3 - 1)^2}{t^3} \\ \Leftrightarrow k(t+2) &\leq \frac{(t^2 + t + 1)^2}{t^3} \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{(t^2 + t + 1)^2}{t^4 + 2t^3} \Leftrightarrow k \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right)^2}{1 + \frac{2}{t}}. \end{aligned}$$

Đặt $z = \frac{1}{t}$. Khi đó

$$k \leq \frac{(z^2 + z + 1)^2}{2z + 1}.$$

Khi $t \rightarrow +\infty$ thì $z \rightarrow 0$. Như vậy

$$k_{\max} = \min_{[0; +\infty)} f(z),$$

với $f(z) = \frac{(z^2 + z + 1)^2}{2z + 1}$, với $z \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{2(z^2 + z + 1)(2z + 1)^2 - 2(z^2 + z + 1)}{(2z + 1)^2} \\ &= \frac{2(z^2 + z + 1)[(2z + 1)^2 - 1]}{(2z + 1)^2} \geq 0, \forall z \geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra hàm số f đồng biến trên $[0; +\infty)$, do đó với $z \geq 0$ thì $f(z) \geq f(0) = 1$. Do đó $k \leq 1$. Từ đó $k_{\max} = 1$ nếu chỉ ra được

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 3 &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 &\geq 2(ab + bc + ca) \quad (\text{do } abc = 1) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 &\geq 2(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Đây là một kết quả quen thuộc được chứng minh bằng nguyên lí Diricle (ta cũng có thể dùng dồn biến để chứng minh).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (1; 1; 1)$; $a = b \rightarrow +\infty$, $c \rightarrow 0$ và các hoán vị.

Câu 2.13. Thông thường trong những dạng toán này, đẳng thức đạt được ngoài giá trị tâm $(1; 1; 1)$ thì còn đạt được khi hai biến bằng nhau. Như vậy để chặn k , ta chọn $a = b = t$, $c = 3 - 2t$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} + \frac{1}{3-2t} - 3 &\geq k(2t^2 + (3-2t)^2 - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{6-4t+t-3(3t-2t^2)}{3t-2t^2} &\geq k(6t^2-12t+6) \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{6t^2-12t+6}{(3t-2t^2)(6t^2-12t+6)} \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{t(3-2t)}. \end{aligned}$$

Như vậy giá trị $c = 3 - 2t$ lớn nhất cần tìm chính là giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(t) = \frac{1}{t(3-2t)}, t \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$t(3-2t) = \frac{1}{2} \cdot 2t(3-2t) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2t+3-2t)^2}{4} = \frac{9}{8}.$$

Từ đó kết luận được $k_{\max} = \frac{8}{9}$ nếu chứng tỏ được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \geq \frac{9}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 3). \quad (1)$$

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 - \frac{9}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 3)$. Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 - \frac{9}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 3) - \\ &\quad - \frac{4}{a+b} - \frac{1}{c} + 3 + \frac{9}{8} \left(\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 - 3 \right) \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} \right) - \frac{9}{8} \left(a^2 + b^2 - \frac{(a+b)^2}{2} \right) \\ &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{ab(a+b)} - \frac{9}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} \\ &= (a-b)^2 \left(\frac{1}{ab(a+b)} - \frac{9}{8} \right). \end{aligned}$$

Ta giả sử $c = \max\{a, b, c\}$. Khi đó $a + b \leq 2$, suy ra

$$ab(a+b) \leq \frac{(a+b)^3}{4} \leq \frac{8}{4} < \frac{9}{4}.$$

Như vậy

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0 \Leftrightarrow f(t, t, 3-2t) \geq 0, \text{ với } t = \frac{a+b}{2}.$$

Tức là chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} + \frac{1}{3-2t} - 3 &\geq \frac{9}{8} (2t^2 + (3-2t)^2 - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{8}{9} &\leq \frac{1}{t(3-2t)} \Leftrightarrow \frac{24t - 16t^2 - 9}{t(3-2t)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{16t^2 - 24t + 9}{t(3-2t)} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(4t-3)^2}{t(3-2t)} \geq 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Vậy (*) được chứng minh. Từ đó kết luận $k_{\max} = \frac{8}{9}$.

Câu 2.14. Kí hiệu (1) là bất đẳng thức đã nêu trong đề bài. Giả sử k là số thực sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi bộ ba số thực a, b, c , mà $abc \geq 0$.

Trong (1) thay $a = 0, b = c = 2$, ta được $2 + 8k \geq 4$. Suy ra $k \geq \frac{1}{4}$.

Ta sẽ chứng minh $k = \frac{1}{4}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh với mọi bộ ba số thực không âm a, b, c , ta luôn có

$$abc + \frac{1}{4} ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) + 2 \geq a + b + c.$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 4 \geq ab + bc + ca + 2(a + b + c). \quad (2)$$

Xét 3 số $(b-1)(c-1), (c-1)(a-1), (a-1)(b-1)$, ta có

$$a(b-1)(c-1) \cdot b(c-1)(a-1) \cdot c(a-1)(b-1) = abc(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0.$$

Suy ra có ít nhất một số trong 3 số nêu trên không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $a(b-1)(c-1) \geq 0$. Khi đó, ta có $abc \geq a(b+c-1)$.

Do vậy, bất đẳng thức (2) sẽ được chứng minh, nếu ta chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2a(b+c-1) + 4 \geq ab + bc + ca + 2(a+b+c),$$

hay

$$a^2 - (4-b-c)a + b^2 + c^2 - bc - 2(b+c) + 4 \geq 0, \quad (3)$$

với mọi a, b, c , mà $abc \geq 0$.

Ta xem vế trái của (3) là một tam thức bậc hai theo ẩn a , ta có:

$$\Delta = (b+c-4)^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc + 8(b+c) - 16 = -3b^2 - 3c^2 + 6bc = -3(b-c)^2 \leq 0,$$

với mọi b, c nên (3) đúng với mọi a, b, c , mà $abc \geq 0$.

Vậy $k = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Câu 2.15. Rõ ràng, các giá trị $x = y = z = 1$ thỏa mãn ràng buộc nêu trong đề bài. Vì thế, trong bất đẳng thức của đề bài, cho $x = y = z = 1$ ta được $k+1 \geq 2$. Suy ra $k \geq 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh với $k = 1$, bất đẳng thức của đề bài là một bất đẳng thức đúng; tức ta sẽ chứng minh

$$\sqrt[3]{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2 + 1, \quad (1)$$

với mọi số thực dương x, y, z mà $\min\{xy, yz, zx\} \geq 1$.

Thật vậy, trước hết, ta chứng minh nhận xét sau: **Nhận xét:** Với a, b là hai số thực dương thỏa mãn $ab \geq 1$, ta luôn có:

$$(a^2+1)(b^2+1) \leq \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 1 \right).$$

Chứng minh: Vì $ab \geq 1$ nên $\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - 1 \geq ab - 1 \geq 0$. Do đó

$$(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \leq \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - 1 \right)^2 + (a+b)^2 = \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 1 \right)^2.$$

Nhận xét được chứng minh.

Không mất tổng quát, giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó, từ ràng buộc của đề bài, suy ra $x \geq 1$.

Đặt $t = \frac{x+y+z}{3}$. Ta có

$$xt = \frac{x(x+y+z)}{3} = \frac{x^2 + xy + xz}{3} \geq \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

Do đó, áp dụng nhận xét lần lượt cho cặp (x, t) và cặp (y, z) , ta được

$$(x^2 + 1)(t^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{x+t}{2} \right)^2 + 1 \right)^2, \quad (2)$$

và

$$(y^2 + 1)(z^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + 1 \right)^2. \quad (3)$$

Nhân (2) và (3), về theo về, ta được

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)(t^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{x+t}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + 1 \right)^2. \quad (4)$$

Nhận thấy $\frac{x+t}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{xt} \cdot \sqrt{yz} \geq 1$. Do đó, theo nhận xét, ta có

$$\left(\left(\frac{x+t}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \leq \left(\left(\frac{x+y+z+t}{4} \right)^2 + 1 \right)^4. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)(t^2 + 1) \leq (t^2 + 1)^4.$$

Do đó

$$\sqrt[3]{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)(t^2 + 1)} \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2 + 1.$$

Suy ra (1) được chứng minh và vì thế, giá trị k nhỏ nhất cần tìm theo yêu cầu bài là $k = 1$.

Câu 2.16. Kí hiệu (1) là bất đẳng thức đã nêu trong đề bài. Giả sử k là số thực sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi bộ ba số thực a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Trong (1) thay $b = c > 0$ ta được

$$\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a+b} + k \cdot \frac{2ab+b^2}{a^2+2b^2} \leq \frac{3}{2} + k.$$

Cố định b và cho a tiến tới 0^+ ta được $2 + \frac{k}{2} \leq \frac{3}{2} + k$. Suy ra $k \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh $k = 1$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh với mọi bộ ba số thực a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta luôn có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}. \quad (2)$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 - \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)(b+c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)(c+a-b)} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)(a+b-c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $b+c-a > 0, c+a-b > 0, a+b-c > 0$. Do đó tất cả các phân thức nằm ở vế trái của (3) đều có mẫu thức dương. Vì thế, kí hiệu VT là biểu thức nằm ở vế trái của (3), theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng Engel, ta có:

$$VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Vì

$$(b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c$$

và

$$(b+c-a)(b+c) + (c+a-b)(c+a) + (a+b-c)(a+b) = 2(a^2+b^2+c^2).$$

Nên (3) được chứng minh và vì thế (2) được chứng minh.

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Câu 2.17. Rõ ràng, các giá trị $x = y = z = \frac{1}{3}$ thỏa mãn ràng buộc nêu trong đề bài. Vì thế, trong bất đẳng thức của đề bài, cho $x = y = z = \frac{1}{3}$ ta được $\frac{9}{3k+2} \leq \frac{9k+3}{2}$, mà $k > 0$ nên suy ra $k \geq \frac{1}{3}$.

Tiếp theo, ta chứng minh với $k = \frac{1}{3}$, bất đẳng thức của đề bài là một bất đẳng thức đúng; tức ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{x+y+\frac{1}{3}} + \frac{1}{y+z+\frac{1}{3}} + \frac{1}{z+x+\frac{1}{3}} \leq 3, \quad (1)$$

với mọi số thực dương x, y, z mà $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Thật vậy, đặt

$$T = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hai bộ 3 số dương, ta có

$$\left(x + y + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + z\right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{z}\right)^2 = \frac{T}{3}$$

hay

$$\frac{1}{x+y+\frac{1}{3}} \leq \frac{3z+2}{T}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{y+z+\frac{1}{3}} \leq \frac{3x+2}{T}; \quad \frac{1}{z+x+\frac{1}{3}} \leq \frac{3y+2}{T}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức vừa nêu trên, vế với vế, với lưu ý $T = x + y + z + 2$, ta được

$$\frac{1}{x+y+\frac{1}{3}} + \frac{1}{y+z+\frac{1}{3}} + \frac{1}{z+x+\frac{1}{3}} \leq \frac{3z+2+3x+2+3y+2}{T} = 3.$$

(1) được chứng minh.

Vậy $k = \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Câu 2.18. Kí hiệu (1) là bất đẳng thức cần chứng minh.

Trong (1) cho $a = b = c = 1$, suy ra $k \leq 729$. Ta chứng minh (1) đúng với $k = 729$. Từ giả thiết ta có

$$3|abc| \geq |ab| + |bc| + |ca| \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \geq 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & [a^2 + 4(b^2 + c^2)] [b^2 + 4(a^2 + c^2)] [c^2 + 4(a^2 + b^2)] \\ & \geq (a^2 + 8|bc|) (b^2 + 8|ac|) (c^2 + 8|ab|) \\ & \geq 9^3 (abc)^2 \geq 729. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho chín số a^2 và 8 số $|bc|$. Vậy $\max k = 729$.

Câu 2.19. Gọi (1) là bất đẳng thức cần tìm. Trong (1) cho $a_1 = 1; a_2 = \dots = a_n = -\frac{1}{n-1}$ ta được $c \leq \frac{n}{2}$.

Ta chứng minh BĐT (1) đúng với $c = \frac{n}{2}$. Tức là cần chứng minh

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n |a_i| \quad (2)$$

Ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ khi đó tồn tại k với $(1 \leq k \leq n-1)$ sao cho $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0 \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$. Khi đó ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_k = -(a_{k+1} + \dots + a_n)$ và

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) = \sum_{i=1}^n (n+1-2i) a_i; \quad \sum_{i=1}^n |a_i| = 2 \sum_{i=1}^n a_i.$$

BĐT (2) trở thành

$$\sum_{i=1}^n (n+1-2i) a_i \geq n \sum_{i=1}^k a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (n+1-2i) a_i + \sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) a_i \geq n \sum_{i=1}^k a_i \quad (3)$$

Ta có $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ và $n+1-2.1 \geq \dots \geq n+1-2.k$.

Áp dụng bất đẳng thức Chebychev ta được

$$\sum_{i=1}^k (n+1-2i) a_i \geq \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{i=1}^k (n+1-2i) \right) \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \right] = (n-k) \left(\sum_{i=1}^k a_i \right). \quad (4)$$

Tương tự thì $a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$ và $n+1-2(k+1) \geq \dots \geq n+1-2.n$ nên

$$\sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) a_i \geq \frac{1}{n-k} \left[\left(\sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) \right) \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) \right] = -k \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = k \left(\sum_{i=1}^k a_i \right).$$

Từ (4) và (5) suy ra BĐT (3) đúng.

Vậy $\max c_n = \frac{n}{2}$.

Câu 2.20. Ta chứng minh $\max_{k=\overline{1,n}} a_k < 2$ và $\max_{k=\overline{1,n}} b_k < \frac{2}{n-1}$.

Thật vậy, đặt $L = \max_{k=\overline{1,n}} a_k$, từ (ii) suy ra $L^2 \leq 1 + L \Rightarrow L < 2$.

Đặt $b_m = \max_{k=\overline{1,n}} b_k$, từ (i) dễ thấy

$$b_k \geq \frac{(k-1)b_m + (m-k)b_1}{m-1}, \text{ nếu } 1 \leq k \leq m \text{ và}$$

$$b_k \geq \frac{(k-m)b_n + (n-k)b_m}{n-m}, \text{ nếu } m \leq k \leq n.$$

Suy ra $b_k > \frac{(k-1)b_m}{m-1}$ nếu $1 \leq k \leq m$ và $b_k \geq \frac{(n-k)b_m}{n-m}$ nếu $m \leq k \leq n$.

Do đó

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^m b_k + \sum_{k=m+1}^n b_k > \frac{1}{m-1} \left(\sum_{k=1}^m (k-1) \right) b_m \\ &+ \frac{1}{n-m} \left(\sum_{k=m+1}^n (n-k) \right) b_m = \frac{n-1}{2} \cdot b_m \Rightarrow b_m < \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

Đặt $x_0 = 1$; $x_k = 1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i$, $k = \overline{1,n}$ thì $x_k - x_{k-1} = a_k b_k$. Từ (ii) suy ra $a_k^2 \leq x_k \Rightarrow a_k \leq \sqrt{x_k}$.
Từ $\max_{k=\overline{1,n}} a_k < 2$ suy ra $x_k - x_{k-1} < 2b_k$. Do đó với mọi $k = \overline{1,n}$ thì

$$\begin{aligned} \sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}} &< b_k \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}}} = b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{x_k - x_{k-1}}{2(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})^2} \right) \\ &< b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{b_k}{4} \right) < b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right). \end{aligned}$$

Lấy tổng k từ 1 đến n ta được

$$a_n \leq \sqrt{x_n} < \sqrt{x_0} + \sum_{k=1}^n b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(n-1)}.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $M = a_n \leq \frac{3}{2}$.

Cuối cùng chọn bộ $a_k = 1 + \frac{k}{2n}$; $b_k = \frac{1}{n}$ thỏa các điều kiện đề bài. Vậy $\max M = \frac{3}{2}$.