dễ hơn nhiều so với Bài toán 4.
Nhận xét: Chúng ta có thể dễ dàng mở rộng bài toán cho trường hợp nhiều ẩn: n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$, đồng thời cho n góc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Bài toán 4 cũng vậy.

Bài toán 4. Giải và biện luận hệ phương trình (ẩn là x, y, z):

$$\frac{a-x}{\cos\alpha} = \frac{b-y}{\cos\beta} = \frac{c-z}{\cos\gamma} = -\frac{p(x^2+y^2+z^2)+q(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{(p+q)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}; \qquad (****)$$

trong đó $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p+q \neq 0,\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ và thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad \text{(i)}$$

Hướng dẫn giải. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\frac{p(x^2+y^2+z^2)+q(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{(p+q)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)} \qquad \text{(ii)}$$

không phụ thuộc vào x, y, z.

Cụ thể, gọi $-\lambda$ là giá trị của biểu thức (ii) ở trên, thế thì ta được: $a = x+\lambda\cos\alpha,\ b = y+\lambda\cos\beta,\ c = z+\lambda\cos\gamma$. Từ đó suy ra:

$$\lambda = \frac{p(a^2+b^2+c^2)+q(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2}{(p+q)(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)}. \qquad \text{(iii)}$$

Trả lời. 1°) Nếu $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma \neq 0$, hệ (****) *có nghiệm duy nhất*, biểu diễn được dưới dạng:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} = -\frac{p(a^2+b^2+c^2)+q(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2}{(p+q)(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)}; \qquad \text{(iv)}$$

2°) Nếu $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma = 0$, hệ phương trình (****) *vô nghiệm.*
3°) Nếu $a = b = c = 0$ thì $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma = 0$, hệ phương trình *vô định.*

Nhận xét. 1°) Biểu thức (iv) của nghiệm của hệ phương trình (****) nhận được từ các hệ thức xuất phát của bài toán bằng cách thay trong đó x, y, z lần lượt bởi các hằng số a, b, c đã cho, và ngược lại. Như vậy, quan hệ $R(x, y, z; a, b, c)$ có tính chất *đối hợp*, nghĩa là:

$$R(x, y, z; a, b, c) = R(a, b, c; x, y, z)$$

2° Ngoài ra, dễ dàng thiết lập thêm hệ thức đối hợp nữa sau đây:

$$x^2+y^2+z^2+(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2 = a^2+b^2+c^2+(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2; \quad \text{(v)}$$

Đề nghị bạn đọc hãy tự kiểm tra hệ thức (v) này, xem là một bài tập.

Xuất xứ của bài toán 4. Bài toán đại số 4 trên đây được tác giả bài viết này phát hiện nhân quan tâm đến một phép biến hình đối hợp trong hình học "phi Euclide" [Còn bài toán 3 ở trên là một trường hợp riêng của bài toán 4 này, khi cho $p = 0$].
Chú thích. Đặc biệt, nếu chọn các góc nhọn α, β, γ thỏa mãn điều kiện (i) với những giá trị cụ thể, chẳng hạn $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$ thì Bài toán 4 bây giờ có dạng cụ thể sau đây:

Bài toán 4a. Giải hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\frac{a-x}{3} = \frac{b-y}{4} = \frac{c-z}{12} = \frac{169p(x^2+y^2+z^2) + q(3x+4y+12z)^2}{169(p+q)(3x+4y+12z)}$$

(trong đó: $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p+q \neq 0$).

Sau đây tác giả bài viết này *giới thiệu bổ sung* một số bài toán nữa về giải (và biện luận) hệ phương trình đại số bậc hai cũng có xuất xứ từ hình học để *bạn đọc tự giải* và *làm quen hơn* với thể loại toán này.

Bài toán 5. Giả sử (x, y, z); (x', y', z') là hai bộ ba số dương, mỗi bộ đều thỏa mãn bất đẳng thức tam giác[1] , đồng thời thỏa mãn các đẳng thức sau đây:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2, & \text{(i)} \\ x^2+x'^2 = y^2+y'^2 = z^2+z'^2. & \text{(ii)} \end{cases}$$

Chứng minh rằng ta cũng có các hệ thức sau đây:
1°)

$$x^4+y^4+z^4 = x'^4+y'^4+z'^4, \qquad \text{(iii)}$$

2°)

$$\Sigma(y^2+z^2-x^2)x^2 = \Sigma(y'^2+z'^2-x'^2)x'^2; \qquad \text{(iv)}$$

trong đó $\Sigma(y^2+z^2-x^2)$ là ký hiệu tắt của tổng (có tính chất hoán vị vòng quanh): $\Sigma(y^2+z^2-x^2)x^2 = (y^2+z^2-x^2)x^2 + (z^2+x^2-y^2)y^2 + (x^2+y^2-z^2)z^2$.
Hướng dẫn Giải và Nhận xét. Nếu "hình học hóa" bài toán đại số này ta được và đưa về giải Bài toán hình học không gian sau đây.

Tuy nhiên, bài toán Đại số này còn có ý nghĩa như là "*lời giải đại số của Bài toán hình học không gian*" có nội dung như sau:

Bài toán 5'. Trong không gian xét một tam giác đều ABC và hai điểm D, D' (nằm ngoài mặt phẳng của tam giác ABC) đối xứng với nhau qua trọng tâm O của tam giác đều đã cho.

[1] Ta ký hiệu giả thiết này là: $\exists T_1(x, y, z)$ và $T_2(x', y', z')$, trong đó T_i chỉ tam giác có độ dài cạnh là x, y, z đối với T_1 và x', y', z' đối với T_2.

Chứng minh rằng hai tam giác $\mathcal{T}_1(DA, DB, DC)$ và $\mathcal{T}_2(D'A, D'B, D'C)$ là *tương đương* (cũng tức là có *diện tích bằng nhau*), trong đó $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, y, z)$ là ký hiệu tam giác có độ dài các cạnh là x, y, z; và lẽ đương nhiên 3 số dương x, y, z thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Chú thích. Sự tồn tại các tam giác $\mathcal{T}_i (i = 1, 2)$ được suy ra từ định lý Pompiu mà ta có thể dễ dàng chứng minh. Ngoài ra, ta cũng lưu ý rằng $\Sigma(y^2 + z^2 - x^2)x^2 = -(x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 16S_1^2$, trong đó $S_1 = s(\mathcal{T}_1)$ là diện tích của tam giác $\mathcal{T}_1(x, y, z)$.

Cũng vậy, $\Sigma(y'^2 + z'^2 - x'^2)x'^2 = 16S_2^2$, trong đó $S_2 = s(\mathcal{T}_2)$ là diện tích của $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2(x', y', z')$.

Bài toán 6. 1°) Chứng minh rằng các nghiệm dương x, y, z (nếu có) của hệ ba phương trình bậc hai:

$$(\mathcal{H}_1)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \ (a, b, c > 0); & (i) \\ x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2; & (ii) \end{cases}$$

thỏa mãn hệ thức (iii) sau đây:

$$\Sigma(y^2 + z^2 - x^2)x^2 = \Sigma(b^2 + c^2 - a^2)a^2; \qquad \text{(iii)}$$

Chú thích: Không cần phải giải hệ phương trình

2°) Đảo lại, nếu x, y, z là các nghiệm dương của hệ phương trình $(\mathcal{H}_2)$ (gồm 2 phương trình (ii) và một phương trình (iii)):

$$\mathcal{H}_2 = \{(ii), (iii)\}$$

thì cũng thỏa mãn hệ thức (i).

Tóm lại:

$$\mathcal{H}_1\{(i), (ii)\} \ \Leftrightarrow\ \mathcal{H}_2\{(ii), (iii)\}$$

3°) Chứng minh rằng các hệ $\mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2)$ có nghiệm (dương) khi và chỉ khi các số dương a, b, c đã cho thỏa mãn các bất đẳng thức sau đây:

$$a^2 < 2(b^2 + c^2), \ \ b^2 < 2(c^2 + a^2), \ \ c^2 < 2(a^2 + b^2).$$

Bài toán 7*. Cho 9 số dương $a, b, c; x, y, z; x', y', z'$ thỏa mãn các đẳng thức sau đây:

$$\begin{cases} \Sigma(b^2 + c^2 - a^2)a^2x^2 = \Sigma(b^2 + c^2 - a^2)a^2x'^2, & (1) \\ x^2 + x'^2 = y^2 + y'^2 = z^2 + z'^2. & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng ta cũng có đẳng thức sau:

$$\Sigma(b^2y^2 + c^2z^2 - a^2x^2)a^2x^2 = \Sigma(b^2y'^2 + c^2z'^2 - a^2x'^2)a^2x'^2. \qquad (3)$$

Chú thích. Bài toán 7 có xuất xứ từ bài toán hình học không gian sau đây:

Bài toán 7'. Hai tứ diện $ABCD$ và $ABCD'$ có đáy ABC chung và hai đỉnh D, D' đối xứng với nhau qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy ABC. Chứng minh rằng các tam giác $\mathcal{T}_1(BC.DA, CA.DB, AB.DC)$ và $\mathcal{T}_2(BC.D'A, CA.D'B, AB.D'C)$ có diện tích bằng nhau.

Bài toán 8. Giải và biện luận hệ phương trình sau (ẩn x, y, z, t đều > 0):

$$(\mathcal{H})\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=a^2+b^2+c^2+d^2,\ (a>0, b>0, c>0, d>0); & (*)\\ x^2+a^2=y^2+b^2=z^2+c^2=t^2+d^2; & (**)\end{cases}$$

Xuất xứ của bài toán 8. Bài toán 8 trên đây có xuất xứ từ bài toán hình học không gian sau đây:

Bài toán 8'. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ (mà tứ diện đều là trường hợp đặc biệt), nghĩa là các cạnh đối diện bằng nhau: $BC = DA, CA = DB, AB = DC$.

Hãy xác định các khoảng cách từ một điểm P đã cho đến các đỉnh của tứ diện biết rằng điểm Q, đối xứng với P qua tâm O của mặt cầu $C(ABCD)$ ngoại tiếp tứ diện đã cho có khoảng cách đến các đỉnh A, B, C, D của tứ diện theo thứ tự bằng $QA = a, QB = b, QC = c, QD = d$.

Hướng dẫn. Áp dụng định lý về đường trung tuyến trong tam giác và tính chất của trọng tâm của một hệ điểm. Tuy nhiên cũng có thể sử dụng phương pháp vectơ.

Đáp số. Giải hệ $\mathcal{H}\{(*), (**)\}$, ta được kết quả:

$$\begin{cases} x^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2+d^2-a^2), & y^2=\frac{1}{2}(c^2+d^2+a^2-b^2),\\ z^2=\frac{1}{2}(d^2+a^2+b^2-c^2), & t^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-d^2).\end{cases}\qquad (***)$$

Bài toán luôn có nghiệm (dương) duy nhất, xác định bởi các hệ thức (***). Muốn vậy, hãy chứng minh tính chất sau đây, *đặc trưng cho một tứ diện gần đều* (bao gồm cả tứ diện đều), *tương tự* với định lý Pompiu trong hình học phẳng, đặc trưng cho một tam giác đều.

Định lý Pompiu (trong hình học không gian) có nội dung như sau:

Bình phương các khoảng cách từ một điểm P bất kỳ trong không gian đến các đỉnh của một tứ diện gần đều $ABCD$ đã cho luôn biểu thị diện tích các mặt của một tứ diện $(\mathcal{T})$ nào đó. (Điều đó có nghĩa cụ thể như sau: Bình phương khoảng cách từ P đến một đỉnh nào đó của tứ diện gần đều $ABCD$ đã cho không lớn hơn tổng bình phương các khoảng cách từ P đến ba đỉnh còn lại).

Tứ diện $(\mathcal{T})$ này suy biến thành một tứ điểm phẳng (tức là có thể tích $v(\mathcal{T}) = 0$) khi và chỉ khi điểm P trùng với điểm xuyên tâm đối của một đỉnh nào đó của tứ diện gần đều đã cho $ABCD$ trên mặt cầu $\mathcal{C}(ABCD)$ ngoại tiếp tứ diện đó.

Hướng dẫn chứng minh định lý Pompiu trong hình học không gian.

Sử dụng vectơ và tính chất của tâm tỉ cự của một hệ điểm, chứng minh các bất đẳng thức hình học sau:

$$\begin{cases} PA^2 \leqslant PB^2 + PC^2 + PD^2, \text{ và ba B.Đ.T tương tự} & (1) \\ PB^2 \leqslant PC^2 + PD^2 + PA^2, & (2) \\ PC^2 \leqslant PD^2 + PA^2 + PB^2, & (3) \\ PD^2 \leqslant PA^2 + PB^2 + PC^2. & (4) \end{cases}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $P \in \{A', B', C', D'\}$, trong đó $A' = Œ_0(A), B' = Œ_0(B), C' = Œ_0(C)$ và $D' = Œ_0(D)$, O là tâm cầu $\mathcal{C}(ABCD)$, tùy theo P tương ứng thuộc vào bất đẳng thức (1), (2), (3) hay (4).

Chú thích bổ sung. Trong mục 1.2 trên đây, tác giả bài viết này đã giới thiệu thêm 4 *bài toán mới* cũng về giải những hệ phương trình bậc hai có 3 hoặc 4 ẩn, trong đó có chỉ rõ xuất xứ hình học đối với ba bài toán 5, 7, và 8. Chính việc giải các bài toán này, các bạn đã cho *lời giải đại số* của các bài toán hình học 5', 7' và 8', là xuất xứ hình học của các bài toán đại số 5, 7 và 8. Ngoài ra, tác giả các đề toán này cũng đề nghị bạn đọc tìm tòi thêm lời giải thuần túy hình học của các bài toán hình học xuất xứ 5', 7' và 8', góp phần làm phong phú và đa dạng cho lời giải các bài toán đó. Đối với bài toán 6, tác giả của nó cũng xuất phát từ một bài toán hình học mà đề xuất, nhưng lại không giới thiệu trong bài viết. Tác giả có dụng ý để lại, dành cho bạn đọc *phán đoán, suy xét về nguồn gốc xuất xứ* nào từ hình học của bài toán đại số (bài 6) này. Tuy nhiên, xin lưu ý bạn đọc là *việc phán đoán về xuất xứ hình học* của bài toán 6 thực ra *không có gì khó khăn lắm*. Các bạn chỉ cần quan tâm đến *ý nghĩa hình học* của các đẳng thức (ii) và (iii) cũng như ý nghĩa hình học của hai bộ số dương (a, b, c) và (x, y, z). Từ đó bạn dễ dàng chỉ ra đối tượng hình học không gian nào ẩn ở đằng sau 6 con số, trong đó a, b, c là đã cho còn x, y, z là các ẩn số dương cần tìm.

Sau cùng, xin giới thiệu *hai bài toán về hệ phương trình đại số bậc hai phức tạp hơn và chứa nhiều ẩn (5 hoặc 6 ẩn).*

Bài toán 9*. *Giải và biện luận hệ phương trình bậc hai (sáu ẩn $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$ là những số dương)*:

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_3 = x_3 + y_1 = d, & (*) \\ x_1^2 + y_1^2 + kx_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + kx_2y_2 = x_3^2 + y_3^2 + kx_3y_3 = c^2; & (**) \end{cases}$$

trong đó c và d là những số dương và $k \in \mathbb{R}$; c, d, k cho trước.
a) **Lời giải thứ nhất:** Lời giải gồm hai bước sau đây:

Bước 1: Nếu hệ phương trình $\mathcal{H}\{(*), (**)\}$ có nghiệm thì $x_1 = x_2 = x_3 \ (= x)$ và $y_1 = y_2 = y_3 \ (= y)$.

Từ (*) thay $y_1 = d - x_3, y_2 = d - x_1$ và $y_3 = d - x_2$ vào (**), sau khi thực hiện các phép tính rồi rút gọn ta được hệ ba phương trình sau đối với ba ẩn x_1, x_2 và x_3:

$$(kx_1 - 2x_3)d - (x_2^2 + kx_3x_1) + X = 0 \tag{i}$$

và hai phương trình tương tự bằng cách hoán vị vòng quanh các chỉ số: $1 \to 2 \to 3 \to 1$, trong đó ta đã đặt $X = d^2 - c^2 + \sum_{i=1}^{3} x_i^2$.

Từ đó ta biểu thị được d bằng ba biểu thức khác nhau như sau đây, trong đó biểu thức sau được suy từ biểu thức đứng trước nó nhờ hoán vị nói trên

$$d = \frac{x_1^2 + kx_2x_3 - X}{kx_3 - 2x_2} = \frac{x_2^2 + kx_3x_1 - X}{kx_1 - 2x_3} = \frac{x_3^2 - kx_1x_2 - X}{kx_2 - 2x_1} \tag{ii}$$

(với quy ước nếu mẫu số triệt tiêu thì tử số cũng triệt tiêu).

Sau đó áp dụng tính chất của dãy các tỷ số bằng nhau để khử đại lượng X, ta thu được ba đẳng thức sau:

$$d = t_1 = t_2 = t_3,$$

trong đó

$$t_1 = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 + x_2 - kx_1)}{2(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1)} \tag{iii}$$

và t_2 nhận được từ t_1 cũng như t_3 nhận được từ t_2 bởi hoán vị vòng quanh các chỉ số $1 \to 2 \to 3 \to 1$. (Lẽ đương nhiên cũng dễ nhận ra rằng đến lượt t_1 thì nhận lại từ t_3 cũng bởi hoán vị vòng quanh các chỉ số như đã nói ở trên). Đến đây từ các cặp đẳng thức $t_i = t_j$ $(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$ ta đều thu được sự triệt tiêu của một biểu thức có dạng một tam thức bậc hai đối với k sau đây:

$$f(k) = \alpha k^2 + \beta k + \gamma = 0 \tag{iv}$$

Chẳng hạn, từ $t_3 = t_1$ thì α, β và γ lần lượt đều có dạng là những đa thức bậc 3 thuần nhất và đối xứng đối với các đối số x_1, x_2, x_3 theo nghĩa hoán vị vòng quanh các chỉ số $1, 2, 3$ như đã nói ở trên. Cụ thể là:

$$\begin{cases} \alpha = -x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_3, & \text{(v)} \\ \beta = -2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3) + \gamma, & \text{(vi)} \\ \gamma = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2) + 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_3x_1^2 - x_1x_2^2 - x_2x_3^2) & \text{(vii)} \end{cases}$$

Sau vài phép biến đổi đơn giản nữa, các hệ số α, β và γ trong phương trình (iv) còn được biểu thị dưới dạng một số biểu thức khác nữa, thuận tiện hơn cho việc xét dấu của chúng. Thật vậy, ta có các biểu thức sau:

$$\begin{cases} -\alpha = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)x_2 + (x_3 - x_2)^2x_1, & \text{(v')} \\ \beta = -(x_1 + x_2 + x_3)\Big[(x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2\Big] + \gamma, & \text{(vi')} \\ \gamma = (x_2 - x_1)\Big[2(x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_1^2)\Big] + (x_3 - x_2)(2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2). & \text{(vii')} \end{cases}$$

Ngoài ra, cùng với biểu thức (v') của α và biểu thức (vii') của γ ta còn nhận được thêm hai biểu thức nữa của α cũng như hai biểu thức nữa của γ nhờ hoán vị vòng quanh $1 \to 2 \to 3 \to 1$ như đã nói ở trên. Từ đó suy ra, ngoài (vi') thì β cũng còn có hai biểu thức khác nữa. Đối với việc xét dấu của α, β và γ, không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả định quy ước rằng: $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3$ (hoặc $0 < x_2 \leq x_3 \leq x_1$, hoặc $0 < x_3 \leq x_1 \leq x_2$). Chẳng hạn, với giả định $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ta thấy ngay rằng $\alpha \leq 0$ và $\gamma \geq 0$ còn $\beta^2 \geq 0$. Từ đó suy ra biệt số của (iv) không âm: $\triangle = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$. Ngoài ra, với các biểu thức (v') và (vii') của α và γ, ta nhận ra ngay rằng:

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3; \quad \gamma = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Và do đó: $\alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$, kéo theo $\beta = 0$. Mặt khác, dễ thấy: Từ $\triangle = \beta^2 + (-4\alpha\gamma)$ suy ra:

$$\triangle = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ và } \beta = 0, \\ \gamma = 0 \text{ và } \beta = 0. \end{array}\right.$$

Bởi vậy, ta đi đến kết luận:

$$\triangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \ (= x) \text{ và do đó, kéo theo } y_1 = y_2 = y_3 \ (= y).$$

Nhưng $\triangle = 0$ lại là *điều kiện cần và đủ* để k là *nghiệm duy nhất* của hệ phương trình $\mathcal{H}\{(*), (**)\}$ được xét (nếu hệ này có nghiệm).

Tóm lại là; lập luận trên đây chứng tỏ rằng: Nếu hệ $\mathcal{H}$ sáu phương trình $\{(*), (**)\}$ có nghiệm thì các ẩn x_1, x_2, x_3 bằng nhau (và đặt bằng x), đồng thời các ẩn y_1, y_2, y_3 cũng bằng nhau (và đặt bằng y). Đó là đpcm. Và do đó, bài toán quy về việc giải một hệ hai phương trình bậc hai đối với hai ẩn x và y sau đây:

Bước 2: Giải và biện luận hệ hai phương trình (ẩn x và y đều dương)

$$\begin{cases} x + y = d, & (1) \\ x^2 + y^2 + kxy = c^2. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta được

$$(2 - k)xy = d^2 - c^2 \qquad (3)$$

Từ đó dễ dàng suy ra:

- Nếu $k = 2$ và $c \neq d$ thì hệ phương trình $\{(1), (2)\}$ vô nghiệm.

- Nếu $k = 2$ và $c = d$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm, miễn sao thỏa mãn (1). Cụ thể là

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + \lambda, \\ y = \frac{d}{2} - \lambda; \end{cases} \qquad (0 < \lambda < \frac{d}{2})$$

- Nếu $k \neq 2$ thì

$$xy = \frac{d^2 - c^2}{2 - k} \qquad (4)$$

và do đó, x và y là hai nghiệm X_i $(i = 1, 2)$ của phương trình bậc hai sau:

$$X^2 - dX + \frac{d^2 - c^2}{2 - k} = 0 \tag{5}$$

Muốn cho phương trình bậc hai (5) có hai nghiệm dương (phân biệt hoặc trùng nhau), điều kiện cần và đủ là:

$$\triangle = d^2 - 4\frac{d^2 - c^2}{2 - k} \geq 0 \text{ và } (2 - k)(d^2 - c^2) > 0. \tag{6}$$

Cuối cùng, từ các bất đẳng thức (6) dễ dàng suy ra:

Phương trình bậc hai (5) có hai nghiệm dương khi và chỉ khi:

1°) Hoặc

$$k \leq 2 - 4\Big(\frac{d^2 - c^2}{d^2}\Big) < 2, \quad c < d; \tag{7}$$

2°) Hoặc

$$k \geq 2 + 4\Big(\frac{c^2 - d^2}{d^2}\Big) > 2, \quad c > d. \tag{8}$$

Còn các nghiệm dương x, y của hệ $\{(1), (2)\}$ là hai nghiệm của (5), xác định bởi:

$$\{x, y\} = \{X_1, X_2\}; \;\; X_i = \frac{1}{2}\Big(d \pm \sqrt{\frac{4c^2 - (2 + k)d^2}{2 - k}}\Big); \; (i = 1, 2) \tag{9}$$

b) Nhận xét. Sau khi thực hiện hai bước giải như đã trình bày ở trên, việc giải và biện luận hệ phương trình bậc hai với 6 ẩn dương $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ đến đây đã hoàn tất. Đây là một hệ phương trình đại số đặc biệt, gồm ba phương trình bậc nhất (*) và ba phương trình bậc hai (**) đồng thời đòi hỏi tất cả các ẩn x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ đều là những số thực dương. Bây giờ chúng ta hãy quan tâm đến quá trình biện luận về việc giải hệ phương trình $\{(1), (2)\}$. Trước hết hãy để ý đến giá trị đặc biệt $k = 2$ làm cho hệ phương trình hoặc vô nghiệm, hoặc có vô số nghiệm. Nếu $k = 2$ và $c = d$ thì (2) được viết lại là (đối chiếu với (1)):

$$x^2 + y^2 + 2xy = c^2 = d^2 \text{ hay là } x^2 + y^2 - 2xy\cos\pi = c^2 \; (= d^2) \tag{10}$$

Khi đó, hệ thức (10) biểu thị định lý hàm số cosin đối với một tam giác "*suy biến*" có hai cạnh với độ dài x, y còn cạnh lớn nhất c bằng tổng hai cạnh có độ dài x và y (với $c = d$ thì từ (10) suy ra: $x + y = c \; (= d)$. Sau nữa, trong hai bất đẳng thức (7) và (8) biểu thị điều kiện có hai nghiệm dương (cố nhiên là duy nhất) của phương trình bậc hai (5), ta hãy để ý đặc biệt đến bất đẳng thức (7). Đó là bất đẳng thức điều kiện quy định mối liên hệ giữa hai số thực dương c, d và số thực k để (5) có nghiệm dương, cũng tức là để bài toán có lời giải. Đối với bất đẳng thức kép (7) ta đặc biệt chú ý đến bất đẳng thức $k < 2$ (với $c < d$). Khi đó ta có thể đặt $k = -2\cos\gamma$ (với $0 < \gamma < \pi$), γ được hoàn toàn xác định: $\gamma = \arccos\frac{-k}{2}$ và do đó, (2) được viết lại dưới dạng:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma = c^2; \;\; (c < d) \tag{2'}$$

Lúc này, hệ thức (2') biểu thị định lý hàm số cosin đối với một tam giác có một cạnh với độ dài c, đối diện với góc có độ lớn γ và hai cạnh của góc γ đó có độ dài x và y. Ngoài ra, theo (1) thì tổng độ dài $x + y$ của hai cạnh đó bằng d và trong các đại lượng x, y, c, d và γ thì các độ dài c, d và độ lớn góc γ là đã cho.

Nhận xét nói trên cũng đáp ứng hoàn toàn cho cả ba đẳng thức (**), trong đó x_i và y_i $(i = 1, 2, 3)$ còn thỏa mãn cả ba đẳng thức (*). Nói một cách khác, các đẳng thức đại số đề cập đến trong hệ phương trình $\mathcal{H} = \{(*), (**)\}$ của bài toán 9 được xét ở trên cũng phản ánh sự kiện mang nội dung hình học liên quan đến ba tam giác nào đó có một góc (ba góc tương ứng) bằng nhau và bằng γ, cạnh đối diện (ba cạnh đối diện tương ứng) bằng nhau và bằng c và các cạnh còn lại thì thỏa mãn ba đẳng thức (*). Với ý nghĩa đó, ta có thể phát biểu kết quả phần chứng minh được chỉ ra trong bước 1 của lời giải bài toán 9-một bài toán đại số về giải hệ phương trình bậc hai-sang ngôn ngữ hình học như sau.

Bài toán 9a. *Giả sử ba tam giác $A_iB_iC_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ thỏa mãn các điều kiện:*

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$; $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$ *và* $B_1C_1 + C_2A_2 = B_2C_2 + C_3A_3 = B_3C_3 + C_1A_1$

Chứng minh rằng ba tam giác đó bằng nhau.

Tiếp theo, cũng với ý nghĩa như trên, chúng ta cũng có thể phiên dịch sang ngôn ngữ hình học toàn bộ nội dung của bài toán đại số 9 về giải hệ phương trình. Nói một cách khác, sau đây chúng ta sẽ *thiết lập một mô hình hình học của bài toán 9*, cũng tức là *hình học hóa* bài toán đó.

c) Hình học hóa nội dung bài toán 9, cũng có nghĩa là: Phát biểu sang ngôn ngữ hình học nội dung bài toán (về giải và biện luận một hệ phương trình đại số bậc hai).

Bài toán 9b. *Cho một cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ chứa góc γ; $AB = c$. Tìm trên cung đó (không kể hai đầu mút A và B) tất cả những bộ ba điểm C_1, C_2, C_3 sao cho*

$$BC_1 + AC_2 = BC_2 + AC_3 = BC_3 + AC_1 = d, \qquad (*)$$

trong đó d là độ dài của một đoạn thẳng cho trước. Biện luận.

d) Lời giải thứ hai (Lời giải hình học) của bài toán 9-Lời giải bài toán 9b. Lời giải gồm các bước theo trình tự sau:

Bước 1. Trước hết ta chứng tỏ rằng: *Nếu hai trong ba điểm C_1, C_2, C_3 trùng nhau thì dãy đẳng thức (*) được thỏa mãn khi và chỉ khi cả hai điểm đó trùng nhau.*

Thật vây, đặt $BC_i = a_i, AC_i = b_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$. Khi đó dãy đẳng thức (*) được viết lại là:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 \qquad (1)$$

Nếu chẳng hạn $C_1 \equiv C_2$ thì $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$. Do đó từ (1) ta được: $b_2 = b_3$ và $a_3 = a_1$. Suy ra: $a_1 = a_2 = a_3$, đồng thời $b_1 = b_2 = b_3$; nghĩa là $C_3 \equiv C_1 \equiv C_2\ (\equiv C)$.

Bước 2. Ta chứng minh rằng: Điều đó cũng có nghĩa là (theo khẳng định được chỉ ra ở bước 1):

Nếu bài toán có lời giải thì, trước hết ba điểm C_1, C_2, C_3 phải trùng nhau. Để chứng minh khẳng định này, ta cần đến bổ đề (bài toán phụ trợ) sau.

Bổ đề. *Nếu một tứ giác lồi $ABCD$ có hai cạnh đối diện AD và BC bằng nhau nhưng không song song thì $AB \neq CD$; cụ thể là AB lớn hơn hay nhỏ hơn CD tùy theo hai tia AD và BC cắt nhau hay hai tia DA và CB cắt nhau (ở điểm O).*

(Có thể chứng minh điều này bằng cách dựng hình bình hành $BCDE$ (Hình 1) nếu $OC \leq OD$, (hoặc hình bình hành $ADCE$ nếu $OD \leq OC$) sau đó sử dụng định lý về so sánh cạnh và góc vào tam giác ABE thì được $AB > BE = CD$, đ.p.c.m).

Bây giờ ta trở lại chứng minh điều khẳng định trên đây bằng phương pháp *phản chứng*. Thật vậy, giả sử trên cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ đã cho ta tìm được ba điểm C_1, C_2, C_3 đôi một phân biệt thỏa mãn (*), cũng tức là thỏa mãn dãy đẳng thức (1). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả định rằng: $a_1 < a_2 < a_3$ và do đó theo (1) thì đưa đến:

$$b_1 < b_3 < b_2; \tag{2}$$

Sau đó, ta dựng một góc $\widehat{xCy} = \gamma$ rồi lấy các điểm A_0, A_1, A_2, A_3 trên Cx và B_0, B_1, B_2, B_3 trên Cy sao cho $CA_0 = CB_0 = \frac{d}{2}$; $CA_i = b_i$ và $CB_i = a_i$ $(i \in \{1,2,3\})$. Thế thì ta được: $\triangle A_iB_iC = \triangle ABC_i$ (c.g.c); do đó:

$$A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = AB = c. \tag{3}$$

Và từ các bất đẳng thức (2) suy ra $\triangle A_1B_1C$ nằm gọn trong cả hai tam giác A_2B_2C và A_3B_3C. Ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$A_1B_1 < A_2B_2 \text{ hoặc } A_1B_1 < A_3B_3.$$

Thật vậy, từ (1) ta được $b_2 - b_3 = a_2 - a_1$ và $b_3 - b_1 = a_3 - a_2$. Do đó ta có

$$A_3A_2 = B_1B_2; \text{ (Hình 2)} \tag{4}$$

và

$$A_1A_3 = B_2B_3. \tag{5}$$

Trên hình 2 ta được hai tứ giác lồi $A_2B_2B_1A_3$ và $A_3B_3B_2A_1$ tương ứng thỏa mãn (4) và (5), trong đó hai cặp tia (A_2A_3, B_2B_1) và $A_3A_1, B_3B_2)$ đều cắt nhau ở C. Bởi vậy, theo bổ đề ở trên ta được

$$A_2B_2 > A_3B_1, \tag{6}$$

và

$$A_3B_3 > A_1B_2. \tag{7}$$

Xét hai trường hợp có thể xảy ra:

1°) Nếu $a_1 \leq b_1$ (Hình 2) thì $\widehat{CA_1B_1} \leq \widehat{CB_1A_1}$ suy ra $\widehat{A_1A_3B_1} < \widehat{CA_1B_1} < 90° < \widehat{B_1A_1A_3}$ và do đó, trong $\triangle A_1B_1A_3$ ta có $A_3B_1 > A_1B_1$ nên đối chiếu với (6) ta được:

$$A_1B_1 < A_2B_2 \tag{8}$$

2°) Nếu $a_1 \geq b_1$ thì cũng lập luận tương tự (bạn đọc tự vẽ hình tương ứng) ta được $\widehat{A_1B_2B_1} < 90° < \widehat{A_1B_1B_2}$ và do đó, trong $\triangle A_1B_1B_2$ ta có $A_1B_2 > A_1B_1$ nên đối chiếu với bất đẳng thức (7) ta được:

$$A_1B_1 < A_3B_3. \tag{9}$$

Các bất đẳng thức (8) hoặc (9) thu được từ giả định có các bất đẳng thức nghiêm ngặt (2), mâu thuẫn với giả thiết của bài toán là có dãy đẳng thức (3). Mâu thuẫn đó chứng tỏ hoặc $a_1 = a_2 = a_3$ và do đó, $b_1 = b_2 = b_3$, [nghĩa là các điểm C_i $(i = 1, 2, 3)$ trùng nhau ở một điểm C_0 nào đó trên cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$], hoặc ít nhất hai trong ba số a_i bằng nhau (hay hai trong ba số b_i bằng nhau, $i \in \{1, 2, 3\}$).

Bây giờ ta chứng minh rằng: Nếu hai trong ba số a_i $(i \in \{1, 2, 3\})$ bằng nhau thì cả ba số a_i đó bằng nhau, do đó cả ba số b_i cũng bằng nhau. Thật vậy, chẳng hạn giả sử $a_2 = a_3$, thế thì từ (1) suy ra $b_3 = b_1$ và bây giờ thì dãy đẳng thức (1) thu về chỉ còn một, đó là:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1. \tag{10}$$

Bài toán quy về chỉ còn hai tam giác, trong đó điều kiện (*) được thay bởi (10). Sau đó cũng chứng minh tương tự như ở phần trên, sử dụng bổ đề đã nêu thì chứng minh được rằng: $a_1 = a_2 = a_3$ và do đó $b_1 = b_2 = b_3$, ta được đ.p.c.m.

Bước 3. Rốt cuộc bài toán quy về bài toán dựng hình đơn giản sau đây:

Bài toán 9c. *Tìm trên cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ một điểm C sao cho: $BC + CA = d$, trong đó $AB = c$, c và d là những độ dài cho trước. Biện luận:*

Kéo dài tia BC về phía C rồi dựng điểm D sao cho $CD = CA$ và do đó, $BD = BC + CD = BC + CA = d$. (Có đẳng thức này là do ta giả sử rằng C trên cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ là điểm đã tìm được, thỏa mãn điều kiện đặt ra). Thế thì $\triangle CAD$ cân ở C có góc ở đáy $\widehat{CDA}$ $(= \widehat{BDA} = \frac{\gamma}{2})$. Từ đó suy ra D là một trong hai giao điểm D_1, D_2 của đường tròn (B, d) tâm B bán kính d và cung tròn $\overset{\frown}{A\delta B}$ chứa góc $\delta = \frac{\gamma}{2}$ [có tâm là trung điểm C_0 của cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ đã cho] dựng trên đoạn AB và nằm cùng phía với $\overset{\frown}{A\gamma B}$.

- Từ đó suy ra cách dựng điểm C: Điểm C là giao điểm của tia BD và cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$, trong đó $D \in \{D_1, D_2\} = (B, d) \cap \overset{\frown}{A\delta B}$. Dễ thấy rằng $BC + CA = d$. (Hình 3)

- *Biện luận:* Bài toán có lời giải (*nghiệm hình*) khi và chỉ khi:

$$AB = c < d \leq BD_0 = 2BC_0 = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} = c.\text{cosec}\,\frac{\gamma}{2} \tag{11}$$

Kết luận: Bài toán có 2 hoặc 1 nghiệm hình khi và chỉ khi $c < d \leq \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} = c.\text{cosec}\,\frac{\gamma}{2}$ (khi $c = d\sin\frac{\gamma}{2}$ thì bài toán có nghiệm duy nhất); vô nghiệm nếu $d \leq c$ hoặc $c < d\sin\frac{\gamma}{2}$.

Đến đây bài toán 9c) và do đó, *bài toán dựng hình 9b) đã được giải xong* (vì về mặt hình học, chúng ta đã hoàn toàn xác định được điểm C trên cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ đã cho bởi các phép dựng hình học theo trình tự đã được chỉ ra ở trên). Tuy nhiên, *lời giải hình học của bài toán đại số 9 đến đây chưa hoàn tất.*

Để hoàn tất lời giải hình học của bài toán 9 ta cần lưu ý rằng bài toán 9c) chính là nội dung hình học của bài toán đại số, phát biểu trong bước 2 của lời giải bài toán 9. Muốn vậy, sau khi đã xác định được điểm C trên $\overset{\frown}{A\gamma B}$ bằng những phép dựng hình học rồi, ta cần tính độ dài các đoạn $BC = x$ và $AC = y$ theo $AB = c, d$ và $\widehat{ACB} = \gamma$. (Việc làm này có ý nghĩa tương đương với việc xác định vị trí hình học của điểm C bằng phương pháp dựng hình). Ta chỉ việc giải và biện luận hệ phương trình (ẩn $x, y > 0$):

$$\begin{cases} x + y = d \\ x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = d \\ xy = \frac{d^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} > 0 \text{ (vì } c < d) \end{cases}$$

Vậy x và y là hai nghiệm dương X_1, X_2 của phương trình bậc hai:

$$X^2 - dX + \frac{d^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} = 0 \tag{12}$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (12) có nghiệm (nghiệm dương) là: Biệt số

$$\triangle = \frac{c^2 - d^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow c \geq d\sin\frac{\gamma}{2} \text{ và } c < d$$

$$\Leftrightarrow d > c \geq d\sin\frac{\gamma}{2} \tag{13}$$

Để ý rằng $\triangle$ có thể được viết lại như sau:

$$\triangle = \frac{2c^2 - (1 - \cos\gamma)d^2}{1 + \cos\gamma} = \frac{4c^2 - (2 + k)d^2}{2 - k} \tag{14}$$

Từ đó ta được kết quả (sau khi đã thay $-2\cos\gamma = k$, với $|k| < 2$)

$$\{x, y\} = \{X_1, X_2\} = \frac{1}{2}\left(d \pm \sqrt{\frac{4c^2 - (2 + k)d^2}{2 - k}}\right) \tag{15}$$

Kết quả (15) này tìm được phù hợp với kết quả (9) tìm ra ở bước 2, tiểu mục a).
e) Nhận xét và lời bình (về hai lời giải của bài toán 9).

Hai bài toán hình học 9a) và 9c) chính là nội dung hình học tương ứng với hai bài toán đại số mà lời giải được đề cập đến trong hai bước giải (bước 1 và bước 2) liên tiếp của bài toán 9 về giải và biện luận một hệ phương trình đại số bậc hai. Chúng là hai phần cấu thành bài toán hình học 9b – bản phiên dịch sang ngôn ngữ hình học của bài toán 9 (một bài toán hoàn toàn đại số về hệ phương trình) mà chúng ta có thể cho nó một tên gọi là "*Mô hình hình học*" của bài toán 9, một bài toán về giải và biện luận một hệ phương trình bậc hai. Nó cho ta một hình ảnh trực quan trong hình học vật lý của một hệ phương trình đại số bậc hai. Tuy nhiên, mỗi lời giải của bài toán 9 mặc dù khác nhau về phương pháp tiếp cận nhưng đều thể hiện sắc thái đặc thù, riêng biệt và rất ấn tượng của từng lời giải. Nếu như lời giải 1 (*lời giải đại số*) có *đòi hỏi kỹ năng biến đổi và tính toán tinh tế* và cần phải thực hiện nhiều phép toán nhưng lại cho được *chứng minh trực tiếp* điều khẳng định quan trọng phát biểu trong bước 1 của lời giải bài toán 9 [và điều đó cũng có nghĩa là chỉ ra được cách *chứng minh trực tiếp tính chất hình học* phát biểu trong nội dung của bài toán hình học 9a)] thì lời giải 2 (*lời giải hình học*) của bài toán 9 lại *không đòi hỏi tính toán* nhưng đòi hỏi thông minh sáng tạo, dựng thêm đường phụ, hình phụ và chỉ cần huy động vốn kiến thức ít ỏi thuộc chương trình hình học 8 cũng đủ dùng cho việc chứng minh tính chất hình học nói trên tuy lời giải này lại không thể cho được cách chứng minh trực tiếp mà sử dụng phương pháp *phản chứng*_một phương pháp *chứng minh gián tiếp*_để khẳng định tính chất hình học này.

Trên đây là phác họa đôi nét về *tổng thể* khi đối chiếu, so sánh hai lời giải của bài toán 9 về *phương pháp tiếp cận* cũng như *phương pháp giải quyết vấn đề* của từng lời giải đó mà bài viết này nêu ra nhằm mục đích trao đổi với bạn đọc những suy ngẫm, những ý tưởng đề xuất và kinh nghiệm xung quanh việc giải và khai thác một bài toán toán học hay (về đại số cũng như hình học) nào đó.

Nếu xem xét kỹ lưỡng, chi tiết hơn thì trước hết, phải nói rằng: Bài toán hình học 9b) chỉ là *mô hình hình học* của *một phần* bài toán đại số 9 mà thôi. Thật vậy, trở lại phần biện luận của lời giải thứ nhất của bài toán 9 (trình bày ở bước 2) chúng ta nhận ra ngay rằng lời giải thứ hai (lời giải hình học) của bài toán này chỉ đề cập đến những giá trị của tham số k thỏa mãn bất đẳng thức $|k| < 2$ sao cho có thể gán cho k *ý nghĩa hình học* $k = -2cos\gamma$, trong đó $0 < \gamma < \pi$ là độ lớn của một góc của một tam giác nào đó mà cạnh đối diện với góc đó có độ dài c và hai cạnh của góc γ đó có độ dài x và y mà tổng của hai cạnh đó $x + y = d$, đồng thời $d > c$. Những giá trị của k ở đây đòi hỏi $|k| < 2$ chỉ là một tập con những giá trị k thỏa mãn bất đẳng thức (7) chứ chưa nói tới những giá trị của k thỏa mãn bất đẳng thức (8) được chỉ ra đầy đủ trong phần biện luận thuộc bước 2 của tiểu mục a) trình bày lời giải thứ nhất của bài toán 9. Tác giả bài viết này còn để trống, chưa thấy được ý nghĩa hình học của những giá trị k khác, ngoài $|k| < 2$.

f) Xuất xứ của các bài toán 9, 9a), 9b) và một hướng đề xuất bài toán mới khác.

Trong kỳ thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 46 (46^{th} IMO, 7/2005) tổ chức ở Mexico có hai bài toán hình học phẳng, trong đó có bài toán (Bài 1) sau đây:

Trên các cạnh của một tam giác đều ABC sáu điểm đã được chọn lần lượt: A_1, A_2 trên BC; B_1, B_2 trên CA; C_1, C_2 trên AB. Các điểm này là các đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng quy.

Chính từ bài toán hình học này của kỳ thi IMO, 7/2005 vừa qua mà tác giả đã đề xuất bài toán hình học 9a), 9b) và bài toán đại số 9 ở trên. Để được thuận tiện cho việc phát biểu các bài toán này dưới dạng như đã trình bày trong bài viết, tác giả đã đặt lại tên như hình 4 đã ghi: Tam giác đều xuất phát được ký hiệu lại là $C_1C_2C_3$, còn lục giác lồi được xét ký hiệu là $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ với các cặp đỉnh B_2, A_3; B_3, A_1 và B_1, A_2 lần lượt trên C_2C_3, C_3C_1 và C_1C_2. Ba đường thẳng được xét sẽ là: A_1B_2, A_2B_3 và A_3B_1. Thế thì, theo giả thiết của bài toán và với ký hiệu như trên hình 4 chúng ta thiết lập được ngay dãy đẳng thức (*) nêu trong giả thiết của các bài toán 9, 9b) và 9a). Tuy nhiên, riêng về góc, góc 60° ở các đỉnh C_i (của $\triangle$ đều $C_1C_2C_3$ và cũng là của ba $\triangle A_iB_iC_i$) đã được thay bởi góc có độ lớn γ *tổng quát hơn*, miễn là $0 < \gamma < \pi$.

Bài toán 10.**[1] *Giải và biện luận hệ phương trình bậc hai 5 ẩn x, y, z, u, v sau đây*

$$(\mathcal{H}_o) \qquad \frac{xz-y^2}{a} = \frac{xu-yz}{b} = \frac{xv-yu}{c} = \frac{yu-z^2}{d} = \frac{zu-yv}{e} = \frac{zv-u^2}{f} \qquad (*)$$

trong đó a, b, c, d, e, f là các số thực khác không đã cho.

A. Lời giải "sơ cấp" của bài toán.

1°) *Nghiệm tầm thường của bài toán.*

a) Hệ phương trình $\mathcal{H}_o$ (*) có thể viết lại dưới dạng sau đây: Nếu đặt λ là giá trị chung (mà ta thường gọi là *ẩn phụ* của hệ) của dãy 5 tỉ số bằng nhau (*) thì ta có 6 đẳng thức sau:

$$(I) \qquad \begin{cases} \lambda a = xz - y^2 \\ \lambda b = xu - yz \\ \lambda c = xv - yu \\ \lambda d = yu - z^2 \\ \lambda e = zu - yv \\ \lambda f = zv - u^2 \end{cases}$$

b) Nhận thấy rằng với x, y, z, u, v tùy ý, bao giờ ta cũng có đồng nhất thức sau đây (dễ dàng kiểm nghiệm):

$$(xz-y^2)(zv-u^2) + (xu-yz)(zu-yv) + (xv-yu)(yu-z^2) \equiv 0, \ (\forall x, y, z, u, v); \ (*')$$

Đối chiếu (I) và (*') ta được hệ thức sau đây (nếu hệ (*) đã cho có nghiệm):

$$\lambda^2(af + be + cd) = 0$$

Từ đó suy ra:

1° Hoặc $\lambda = 0$, và do đó, hệ (*) có dạng đơn giản (I') sau:

$$\{xz - y^2 = xu - yz = xv - yu = yu - z^2 = zu - yv = zv - u^2 = 0\}; \qquad \text{(I')}$$

2° Hoặc $\lambda \neq 0$ thì hệ (*) cũng còn nghiệm khác nữa khi các hằng số đã cho ràng buộc với nhau bởi điều kiện sau:

$$af + be + cd = 0, \qquad (**)$$

Vậy ta cần xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu các số thực khác không a, b, c, d, e, f đã cho là tùy ý, không đòi hỏi phải thỏa mãn điều kiện (**) thì hệ phương trình (*) được xét chỉ có *nghiệm tầm*

[1]Bài toán 10** này đã được đưa vào cuốn sách của GS. Nguyễn Văn Mậu "Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ", NXB Giáo dục, 2002 (Bài toán 5, trang 48)

thường, ứng với giá trị $\lambda = 0$ trong (I). Nghiệm đó là nghiệm của hệ phương trình (I') như đã chỉ ra ở trên.
Từ hệ (I') này ta dễ dàng thiết lập được dãy đẳng thức sau:

$$(I') \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{u}{z} = \frac{v}{u} \ (= t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

Từ (1) suy ra hệ (I') này có nghiệm sau đây:

$$x : y : z : u : v = 1 : t : t^2 : t^3 : t^4, \ (\text{với } t \text{ tùy ý, } t \in \mathbb{R}); \quad (2)$$

Nếu để ý rằng $1 = t^o$ thì x, y, z, u, v theo thứ tự tỷ lệ với lũy thừa của t, từ $0, 1, 2, 3$ đến 4. Điều đó gợi ý rằng nếu ta thay đổi ký hiệu các ẩn số x, y, z, u, v lần lượt bởi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 thì biểu thức nghiệm của hệ (I) được viết gọn lại dưới dạng:

$$x_i = \rho t^i \ (\rho \neq 0 \text{ bất kỳ, } i \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$$

hay đặc biệt, có thể cho $\rho = 1$ thì:

$$x_i = t^i, \ (i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}); \quad (3)$$

Trường hợp 2. Hệ $\mathcal{H}_o$ được bổ sung thêm điều kiện (**) để trở thành hệ $(\mathcal{H}) = \{(*), (**)\}$. Từ đây không những chỉ thay đổi ký hiệu đối với các ẩn số như trên mà cũng thay đổi ký hiệu đối với các hằng số đã cho; cụ thể là a, b, c, d, e, f lần lượt được thay bởi $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Việc thay đổi này cũng còn có tác dụng giúp chúng ta theo dõi việc giải hệ phương trình phần nào được dễ dàng hơn. Với quy ước đó, ta viết lại hệ phương trình $(\mathcal{H}) = \{(*), (**)\} = (\mathcal{H}_o) \cup (**)$ sau khi được bổ sung thêm điều kiện (**):

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \frac{x_0x_2 - x_1^2}{b_0} = \frac{x_0x_3 - x_1x_2}{b_1} = \frac{x_0x_4 - x_1x_3}{b_2} = \frac{x_1x_3 - x_2^2}{b_3} = \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{b_4} = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{b_5} \ (= \lambda \neq 0) & (*) \\ b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 = 0 & (**) \end{cases}$$

Còn đồng nhất thức (*') ở trên thì bây giờ được viết lại như sau:

$$(x_0x_2 - x_1^2)(x_2x_4 - x_3^2) + (x_0x_3 - x_1x_2)(x_2x_3 - x_1x_4) + (x_0x_4 - x_1x_3)(x_1x_3 - x_2^2); \quad (*')$$

2°) *Tìm nghiệm không tầm thường của bài toán.*

c) Ngoài đồng nhất thức (*') liên quan đến các ẩn số x_i ($i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) đã được phát hiện ở trên, bằng những quan sát đặc biệt các nhị thức thuần nhất của các ẩn có cùng bậc (đồng bậc) và có cùng tổng các chỉ số, ta còn phát hiện thêm 5 đồng nhất thức nữa sau đây (mà bạn đọc cũng dễ dàng kiểm nghiệm được):

$$\begin{cases} (x_2x_4 - x_3^2)x_2 + (x_2x_3 - x_1x_4)x_3 + (x_1x_3 - x_2^2)x_4 \equiv 0, & \text{(i)} \\ -2(x_2x_4 - x_3^2)x_1 - (x_2x_3 - x_1x_4)x_2 + (x_0x_4 - 2x_1x_3 + x_2^2)x_3 & \\ \qquad -(x_0x_3 - x_1x_2)x_4 \equiv 0, & \text{(ii)} \\ (x_2x_4 - x_3^2)x_0 - (x_2x_3 - x_1x_4)x_1 - 2(x_0x_4 - x_1x_3)x_2 & \\ \qquad +(x_0x_3 - x_1x_2)x_3 + (x_0x_2 - x_1^2)x_4 \equiv 0, & \text{(iii)} \\ (x_2x_3 - x_1x_4)x_0 + (x_0x_4 - 2x_1x_3 + x_2^2)x_1 + (x_0x_3 - x_1x_2)x_2 - 2(x_0x_2 - x_1^2)x_3 \equiv 0, & \text{(iv)} \\ (x_1x_3 - x_2^2)x_0 - (x_0x_3 - x_1x_2)x_1 + (x_0x_2 - x_1^2)x_2 \equiv 0. & \text{(v)} \end{cases}$$

Bây giờ ta thay các nhị thức ở trong ngoặc bởi nhị thức tương ứng có giá trị λb_i ($i = 0,1,2,3,4,5\}$) rút từ dãy tỉ số bằng nhau (*) ở trên, sau đó khử ẩn phụ λ ta thu được một hệ mới $\mathcal{H}_1$ gồm 5 phương trình tuyến tính thuần nhất với 5 ẩn số x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 mà định thức Δ của hệ triệt tiêu (vì Δ được phân tích thành tích hai thừa số, trong đó một thừa số là $b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3$ ($= 0$); thừa số còn lại, ký hiệu $\Phi(b_i) \neq 0$.

$$(\mathcal{H}_1)\begin{cases} & & b_5x_2 & + & b_4x_3 & + & b_3x_4 & = & 0 & (\mathrm{i})_1\\ & -2b_5x_1 & - b_4x_2 & + & (b_2-b_3)x_3 & - & b_1x_4 & = & 0 & (\mathrm{ii})_1\\ b_5x_0 & -b_4x_1 & - 2b_2x_2 & + & b_1x_3 & + & b_0x_4 & = & 0 & (\mathrm{iii})_1\\ b_4x_0 & + (b_2-b_3)x_1 & + b_1x_2 & & -2b_0x_3 & & & = & 0 & (\mathrm{iv})_1\\ b_3x_0 & -b_1x_1 & + b_0x_2 & & & & & = & 0 & (\mathrm{v})_1 \end{cases}$$

Vì định thức Δ của hệ $(\mathcal{H}_1)$ có dạng: $\Delta = (b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3).\Phi(b_i) = 0$ mà $\Phi(b_i) \neq 0$ nên $(\mathcal{H}_1)$ có *nghiệm không tầm thường duy nhất*, (xác định sai khác một thừa số $\neq 0$). Giải hệ $(\mathcal{H}_1)$ ta thu được nghiệm sau đây:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_0 = b_1^2 - b_0(b_2 + b_3),\\ \lambda_1 x_1 = b_0b_4 + b_1b_3,\\ \lambda_1 x_2 = b_3^2 - b_0b_5,\\ \lambda_1 x_3 = -(b_1b_5 + b_3b_4),\\ \lambda_1 x_4 = b_4^2 - b_5(b_2 + b_3). \end{cases} \tag{4}$$

[Để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\mathcal{H}_1$ này (có định thức $\Delta = 0$) ta chỉ việc bỏ đi một trong 5 phương trình của hệ đó, chẳng hạn bỏ phương trình thứ ba $(\mathrm{iii})_1$ sau đó chỉ việc giải hệ $\{\mathcal{H}_1 \backslash (\mathrm{iii})_1\}$ gồm 4 phương trình còn lại với 5 ẩn x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 thì thu được nghiệm duy nhất có biểu thức (4)].

Tóm lại là, sau hai bước giải ta thu được kết quả:

Hệ phương trình bậc hai $(\mathcal{H})$ $\{(*), (**)\}$ với 5 ẩn x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 có nghiệm tầm thường (3) và nghiệm không tầm thường (4) như đã chỉ ra ở trên.

B. Cơ sở lý thuyết toán học dẫn đến hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(\mathcal{H}_1)$ để tìm nghiệm không tầm thương của hệ $(\mathcal{H})$ nêu trong bài toán 3.

Chúng ta cần tìm hiểu ngọn ngành để *lý giải* con đường dẫn đến lời giải "*sơ cấp*" của bài toán 10** như đã nêu ra trong mục A ở trên.

1°) *Trước hết, để ý rằng các hiệu sau đây:*

$$x_0x_2 - x_1^2,\ x_0x_3 - x_1x_2,\ x_0x_4 - x_1x_3,\ x_1x_3 - x_2^2,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2x_4 - x_3^2$$

là các nhị thức bậc hai thuần nhất của các ẩn x_i ($i \in \{0,1,2,3,4\}$), xuất hiện trong dãy (*) các tỷ số bằng nhau của hệ $(\mathcal{H}_o)$, được tạo thành từ các định thức con (minor) cấp 2 rút từ ma trận chữ nhật (2×4) sau:

$$\begin{Vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}$$

Có thể xem chúng là các *toạ độ Plücker* của một đường thẳng xạ ảnh trong không gian xạ ảnh 3 chiều P_3 xác định bởi hai điểm có các toạ độ: điểm $A(x_0, x_1, x_2, x_3)$ và điểm $B(x_1, x_2, x_3, x_4)$ trong toạ độ xạ ảnh thuần nhất.

2°) *Các ý tưởng cơ bản trong quá trình tìm tòi lời giải (nghiệm) của hệ phương trình* ($\mathcal{H}$) *ở trên.*

a) Như ở phần A đã chỉ ra: Hệ phương trình $\mathcal{H}_o$ (*) và do đó, hệ phương trình ($\mathcal{H}$) có nghiệm tầm thường mà biểu thức nghiệm có dạng (3)

$$x_i = \rho t^i, \quad i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad \rho \neq 0.$$

b) Hệ phương trình $\mathcal{H}_o$ (*) với các ẩn x_i được viết lại như sau:

$$(I') \begin{cases} \rho b_0 = x_0x_2 - x_1^2, \ \rho b_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \ \rho b_2 = x_0x_4 - x_1x_3, \\ \rho b_3 = x_1x_3 - x_2^2, \ \rho b_4 = x_2x_3 - x_1x_4, \ \rho b_5 = x_2x_4 - x_3^2; \end{cases}$$

trong đó ρ là giá trị chung của 5 tỉ số bằng nhau của hệ phương trình (*) mà giá trị $\rho = 0$ cho ta *nghiệm tầm thường* (3) của hệ ($\mathcal{H}$) và chưa đòi hỏi đến điều kiện (**) của các hằng số cho trước b_i ($i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$).

Cũng như nhận xét b) phần A đã chỉ ra: Với x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 tuỳ ý bao giờ ta cũng có đồng nhất thức (*'):

$$\forall x_i \ (i = \overline{0, 1, 2, \ldots, 4}) : (x_0x_2 - x_1^2)(x_2x_4 - x_3^2) + (x_0x_3 - x_1x_2)(x_2x_3 - x_1x_4) + \\ + (x_0x_4 - x_1x_3)(x_1x_3 - x_2^2) \equiv 0; \quad (*')$$

Chính đồng nhất thức (*') này cùng với đẳng thức điều kiện (**) về các hằng số b_i ($i = \overline{0, 1, \ldots, 5}$) là cơ sở quyết định cho việc tìm nghiệm không tầm thường của hệ ($\mathcal{H}$).

c) Ta chứng minh điều khẳng định sau:
Nếu có hệ thức (**) nghĩa là các hằng số b_i ($i = \overline{0, 1, \ldots, 5}$) ràng buộc bởi điều kiện

$$b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 = 0$$

thì, ngoài nghiệm tầm thường (3) $[x_i = t^i \ (i \in \{0, 1, 2, 3, 4\})]$, hệ phương trình bậc hai thuần nhất $(\mathcal{H}) = \{(*), (**)\}$ còn có một nghiệm không tầm thường duy nhất mà (4) là biểu thức nghiệm đã chỉ ra ở phần A.

Thật vậy, hệ thức (**) được viết lại dưới dạng tương đương sau:

$$2\rho(b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3) = 0 \ \text{(với } \rho \neq 0),$$

hay là

$$b_0(\rho b_5) + b_5(\rho b_0) + b_1(\rho b_4) + b_4(\rho b_1) + b_2(\rho b_3) + b_3(\rho b_2) = 0. \qquad (*'')$$

Thay các giá trị của ρb_i ($i = \overline{0, 1, \ldots, 5}$) từ (I') vào (*'') ta được hệ thức sau đây (sau khi đã nhân hai vế của (*'') với 2):

$$2[b_0(x_2x_4 - x_3^2) + b_5(x_0x_2 - x_1^2) + b_1(x_2x_3 - x_1x_4) + b_4(x_0x_3 - x_1x_2) + \\ + b_2(x_1x_3 - x_2^2) + b_3(x_0x_4 - x_1x_3)] = 0. \quad \text{(I'')}$$

Với các b_i $(i = \overline{0, 1, \ldots, 5})$ là đã cho thì (I″) chính là phương trình trong tọa độ xạ ảnh thuần nhất của một siêu mặt bậc hai, suy biến thành một siêu nón trong không gian xạ ảnh 4 chiều P_4.

Bây giờ ta viết lại phương trình (I″) dưới dạng ma trận $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = 0$:

$$\sum_{i,j=0}^{4} q_{ij}x_ix_j = 0, \quad (q_{ij} = qji) \tag{5}$$

trong đó các hệ số q_{ij} có các giá trị cụ thể như sau:

$$\begin{cases} q_{00} = 0, & q_{01} = 0, & q_{02} = b_5, & q_{03} = b_4, & q_{04} = b_3; \\ q_{10} = 0, & q_{11} = -2b_5, & q_{12} = -b_4, & q_{13} = b_2 - b_3, & q_{14} = -b_1; \\ q_{20} = b_5, & q_{21} = -b_4, & q_{22} = -2b_2, & q_{23} = b_1^2, & q_{24} = b_0; \\ q_{30} = b_4, & q_{31} = b_2 - b_3, & q_{32} = b_1, & q_{33} = -2b_0, & q_{34} = 0; \\ q_{40} = b_3, & q_{41} = -b_1, & q_{42} = b_0, & q_{43} = 0, & q_{44} = 0. \end{cases} \tag{5'}$$

Vậy dưới dạng ma trận thì phương trình siêu quadric (5) có dạng:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_5 & b_4 & b_3 \\ 0 & -2b_5 & -b_4 & b_2 - b_3 & -b_1 \\ b_5 & -b_4 & -2b_2 & b_1 & b_0 \\ b_4 & b_2 - b_3 & b_1 & -2b_0 & 0 \\ b_3 & -b_1 & b_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

hay viết (6) một cách ngắn gọn hơn, dưới dạng toán tử:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \equiv 0, \ \forall \boldsymbol{x} \neq \overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0, 0) \tag{7}$$

trong đó: $\boldsymbol{x}^T = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ là véctơ hàng (chuyển vị của véctơ cột $\boldsymbol{x}(x_0, \ldots, x_4)$, và $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})$ là một ma trận vuông cấp 5, có các phần tử q_{ij} tạo thành từ các hằng số b_i đã cho (thỏa mãn (**)) theo bảng (5′) ở trên).

Sau khi thực hiện phép tính định thức $|\boldsymbol{Q}|$ của ma trận $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})$ trong đó $\boldsymbol{b} = (b_o, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ thì được: $|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})| = (b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3).\Phi(b_i) = 0$ (vì theo (**) thì $b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 = 0$), nghĩa là $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})$ là một ma trận suy biến và có hạng $r = 4$. Bởi vậy, (6) là phương trình của một siêu mặt bậc hai suy biến thành một *siêu nón bậc hai có 0-phẳng_đỉnh*, tức phẳng_đỉnh này là một điểm, được xác định bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau: Dưới dạng toán tử, hệ phương trình này được viết gọn lại là:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

Vì ma trận vuông cấp 5 $\boldsymbol{Q}$ có hạng r bằng 4 nên trong 5 phương trình tuyến tính thuần nhất của hệ (8) chỉ có 4 phương trình là độc lập tuyến tính. Bởi vậy, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (8) xác định cho ta một *điểm duy nhất* trong không gian xạ ảnh bốn chiều P_4. Điểm này chính là *đỉnh của siêu nón bậc hai* có phương trình (6) hoặc (7) trong không gian xạ ảnh P_4 này.

Thật vậy, vì (*′) là một đồng nhất thức, kết hợp với đẳng thức điều kiện (**) thì (*″) và do đó, (6) hay (7) cũng là một đồng nhất thức. Và từ (7) suy ra (8) là một phương trình toán tử.

Nếu viết cụ thể ra thì (8) cho ta hệ 5 phương trình tuyến tính thuần nhất $(\mathcal{H}_1)$ như đã viết rõ ở tiểu mục 2°)c) của phần A ở trên.

Sau cùng giải hệ phương trình tuyến tính (8) cũng tức là giải hệ $(\mathcal{H}_1)$ ta được *nghiệm không tầm thường (4)* của hệ $(\mathcal{H})$ như đã chỉ ra trong phần A, tiểu mục 2°)c) ở trên. Điều khẳng định trên đây đã được chứng minh.

d) Với lời giải trên đây của bài toán đại số 10 trình bày ở tiểu mục c) ta thấy rằng việc giải bài toán này có liên quan đến một *lý thuyết hình học về mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh*, trong đó có *mặt bậc hai suy biến thành nón bậc hai.* Về một ý nghĩa nào đó mà nói thì cũng có thể gọi lời giải này là *lời giải hình học của bài toán 10**.* Điều đó còn nói lên rằng bài toán 10** chắc hẳn còn những lời giải khác nữa. Hy vọng bài toán này còn nhận được lời giải hay khác ở bạn đọc.

C. Nguồn gốc lịch sử hay xuất xứ của bài toán 10**.

Bài toán 10** xuất hiện cách đây đã được 42 năm. Năm 1965 trong một bài báo "Sur un espace riemannien à absolus locaux" đăng ở Tạp chí Acta Scient. Viet. (Sectio Math et Phys) Tome II, p. 5-42, nhân một vấn đề nghiên cứu đầu tiên về một không gian có tuyệt đối động, giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn đã đề xuất và giải bài toán đại số mà bài viết này đã đưa vào danh mục các bài toán cần khảo cứu về "*Một số hệ phương trình đại số đặc biệt*", bài toán đó đích thực là bài toán 10. Xuất phát từ một vấn đề nghiên cứu về hình học, tuy công cụ sử dụng lại là đại số, tác giả bài báo vốn giàu trí tưởng tượng không gian đã giải bài toán bằng phương pháp "*cắt*", "*chiếu*",... Và tác giả bài báo đã cho đáp số như chúng ta đã biết về hai công thức nghiệm (3) và (4) trên đây; tuy nhiên người mở đường "*khám phá*" đã cho lời giải khá dài (do tính toán nhiều và có phần phức tạp). Năm 1970, 5 năm sau đó tác giả bài viết này đã cho lời giải như đã trình bày ở mục B. Khoảng 20 năm sau nữa, giáo sư Nguyễn Văn Mậu đã quan tâm đến bài toán 10 này và đã giải nó bằng phương pháp "*hình học hoá*" (vì có sử dụng khái niệm và tính chất của tích vô hướng). Tác giả bài viết này hy vọng giáo sư Nguyễn Văn Mậu khôi phục lại lời giải đó để bổ sung một lời giải đẹp và hay nữa cho bài toán 10** này.

D. Bổ sung một bài toán tương tự: Bài toán đảo (ngược) của bài toán 10**.

Bài toán 10′. *Giải hệ 6 phương trình bậc hai thuần nhất (ẩn $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$) sau:*

$$(\mathcal{H}_2)\quad \begin{cases} y_0y_5 + y_1y_4 + y_2y_3 = 0, \\ \rho' a_0 = y_1^2 - y_0(y_2 + y_3), \\ \rho' a_1 = y_0y_4 + y_1y_3, \\ \rho' a_2 = y_3^2 - y_0y_5, \\ \rho' a_3 = -(y_1y_5 + y_3y_4), \\ \rho' a_4 = y_4^2 - y_5(y_2 + y_3); \end{cases}$$

trong đó a_i là những số thực khác không đã cho $(i = \overline{0, 1, \ldots, 4})$.

1°) Chứng minh rằng hệ phương trình $(\mathcal{H}_2)$ này có một nghiệm duy nhất, trùng với nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(\mathcal{H}_2')$ sau đây:

$$\mathcal{A}y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & -a_4 & a_3 & -a_3 & -a_2 & -2a_1 \\ a_4 & a_3 & -2a_2 & 0 & -a_1 & a_0 \\ -2a_3 & a_2 & a_1 & -a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 0 & a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (\mathcal{H}_2')$$

2°) Giải hệ 6 phương trình tuyến tính thuần nhất $(\mathcal{H}_2')$ này ta thu được biểu thức nghiệm của hệ $(\mathcal{H}_2)$ như sau: (Từ hệ $(\mathcal{H}_2')$ suy ra:

$$\begin{cases} \rho y_0 = a_0a_2 - a_1^2, \\ \rho y_1 = a_0a_3 - a_1a_2, \\ \rho y_2 = a_0a_4 - a_1a_3, \\ \rho y_3 = a_1a_3 - a_2^2, \\ \rho y_4 = a_2a_3 - a_1a_4, \\ \rho y_5 = a_2a_4 - a_3^2. \end{cases}$$

2 Một số bài toán cực trị đại số, giải tích và lượng giác có xuất xứ từ hình học

Trước hết, xin giới thiệu một bài toán *cực trị giải tích* có xuất xứ từ hình học.
Bài toán 11. *Xét hàm ba biến $f = f(x_1, x_2, x_3)$ cho bởi biểu thức:*

$$f = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} + \sqrt{(x_1-b_1)^2+(x_2-b_2)^2+(x_3-b_3)^2}; \quad (*)$$

trong đó các biến x_1, x_2, x_3 ràng buộc với nhau bởi điều kiện (các đẳng thức) sau:

$$\frac{x_1-c_1}{u_1} = \frac{x_2-c_2}{u_2} = \frac{x_3-c_3}{u_3}, \quad v_i \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

còn a_i, b_i, c_i, u_i $(i = 1, 2, 3)$ là những số thực cho trước sao cho các bộ ba số sắp thứ tự $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ đôi một phân biệt (cũng có nghĩa là trong ba bộ đó không có hai bộ nào trùng nhau) và $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$.

Hãy tìm cực tiểu f_m của hàm f. Biện luận.

a) **Nhận xét.** Đây là một bài toán *cực trị giải tích* (có ràng buộc), cụ thể là tìm cực tiểu của hàm (*) ba biến thực x_1, x_2, x_3 ràng buộc với nhau bởi hai đẳng thức (1). [Tuy nhiên, cũng có thể phát biểu khác đi để được xem là một bài toán về *giải một hệ phương trình đại số* (bậc nhất, ba ẩn x_1, x_2, x_3) nhưng gắn với một điều kiện khác nữa, cụ thể là biểu thức (*) phải đạt giá trị nhỏ nhất f_m (thay cho việc bớt đi một phương trình].

Chính vì vậy, chúng ta có thể nghĩ ngay tới việc sử dụng phương pháp giải tích (cụ thể là định lý của giải tích toán về điều kiện cần của cực trị của hàm một biến số. Thật vậy, đặt giá trị chung của ba tỉ số trong các đẳng thức (1) bằng t, rồi thay $x_i = u_i t + c_i$ $(-\infty < t < +\infty;\ i = 1, 2, 3)$ vào (1), ta được f là hàm một biến t: $f = f(t)$, xác định trên toàn trục số.

Cụ thể là:

$$f(t) = \sqrt{(c_1 - a_1 + u_1 t)^2 + (c_2 - a_2 + u_2 t)^2 + (c_3 - a_3 + u_3 t)^2} +$$
$$+ \sqrt{(c_1 - b_1 + u_1 t)^2 + (c_2 - b_2 + u_2 t)^2 + (c_3 - b_3 + u_3 t)^2}, \quad (2)$$

Tính đạo hàm $f'(t)$ rồi giải phương trình

$$f'(t) = 0, \quad (3)$$

ta sẽ tìm được những giá trị của tham số t để $f(t)$ đạt cực tiểu f_m (hay cực đại). Tuy nhiên, cũng còn phải khảo sát hàm một biến $f(t)$ (2) để xác định giá trị nào tìm được (rút ra từ $f'(t) = 0$) của t sẽ cho ta giá trị cực tiểu f_m cần tìm của $f(t)$. Trong thực tế, việc sử dụng phương pháp giải tích đối với trường hợp bài toán này đòi hỏi thực hiện nhiều phép tính cồng kềnh mới đi đến kết quả. Vì vậy, đối với bài toán này chúng ta cần tìm một phương án giải khác sao cho đỡ phải mất nhiều thời gian tính toán mà vẫn đi đến kết quả nhanh chóng hơn. Muốn thế, ta hãy quay trở lại để một lần nữa tìm hiểu đề toán (nội dung bài toán cực trị giải tích hay đại số này) kỹ lưỡng hơn. Quả thật, trước hết ta nhận ra ngay rằng (1) là phương trình chính tắc của một đường thẳng Δ trong không gian Ơclit ba chiều E_3, xác định bởi điểm C có toạ độ $C(c_1, c_2, c_3)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ (vì $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$ theo giả thiết). Sau nữa, biểu thức của đại lượng f cho bởi vế phải của (*) biểu thị tổng khoảng cách $f = MA + MB$ từ một điểm $M(x_1, x_2, x_3)$ bất kỳ trên đường thẳng Δ đến hai điểm A và B phân biệt cho trước trong không gian mà trong hệ toạ độ Đề các vuông góc $Oxyz$ đã chọn thì (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là các toạ độ của hai điểm đó. Trên cơ sở phân tích này, chúng ta đã "hình học hoá" được bài toán cực trị giải tích (1) và sau đây chúng ta hãy tìm cách giải bài toán đó bằng kiến thức của hình học trên cơ sở sử dụng kết hợp với những bất đẳng thức cơ bản của đại số.

b) Lời giải 1 (lời giải hình học) của bài toán 11. Bài toán cực trị giải tích 11 sau khi đã được "*hình học hoá*" có nội dung sau đây của một bài toán cực trị hình học quen thuộc trong không gian và được phát biểu như sau:

Bài toán 11' *Trong không gian cho một đường thẳng Δ và hai điểm A, B phân biệt, cố định. Tìm trên Δ một điểm M sao cho tổng khoảng cách $MA + MB$ từ đó đến hai điểm A và B đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo $AB = d$ và các khoảng cách d_1, d_2 từ A và B đến đường thẳng Δ.*

Gọi A' và B' tương ứng là hình chiếu (vuông góc) của A và B trên Δ. Nếu hai điểm A và B không nằm trên Δ thì $A' \neq A$, $B' \neq B$. Tuy nhiên dù cho $\{A, B\} \not\subset \Delta$ thì vẫn có thể xảy ra $A' = B'$ (khi và chỉ khi $(AB) \perp \Delta$). Khi đó điểm M cần tìm hiển nhiên trùng với điểm A' này.

Giả sử $A' \neq B'$, ta chọn hướng dương của Δ là hướng của véctơ $\overrightarrow{A'B'}$. Thế thì:

$$\overline{A'B'} = \overline{A'M} + \overline{MB'}, \quad (M \in \Delta).$$

Đặt $\overline{A'A} = d_1$, $\overline{B'B} = d_2$, $\overline{A'B'} = 2c$ $(\neq 0)$, $\overline{A'M} = u$, $\overline{MB'} = v$, ta luôn có $u + v = 2c$ (> 0, không đổi) với mọi điểm M trên (Δ).
Ta có:

$$MA + MB = \sqrt{u^2 + d_1^2} + \sqrt{v^2 + d_2^2}. \tag{4}$$

Nhưng ta lại có (bất đẳng thức Mincopski):

$$\sqrt{u^2 + d_1^2} + \sqrt{v^2 + d_2^2} \ \geq \ \sqrt{(u+v)^2 + (d_1 + d_2)^2}. \tag{5}$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi:

$$\frac{u}{d_1} = \frac{v}{d_2}, \text{ hay } \frac{u}{v} = \frac{d_1}{d_2}. \tag{5'}$$

Từ đó suy ra: $uv > 0$, nghĩa là $M \in [A'B']$. Vậy ta được:

$$MA + MB = \sqrt{u^2 + d_1^2} + \sqrt{v^2 + d_2^2} \ \geq \ \sqrt{4c^2 + (d_1 + d_2)^2} = \sqrt{d^2 + 4d_1 d_2}; \ (AB = d)$$

Trả lời. Tổng $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất $f_m = \sqrt{d^2 + 4d_1 d_2}$ ở điểm M thuộc đoạn thẳng $[A'B']$ (là đoạn hình chiếu của đoạn thẳng AB trên Δ) và chia trong đoạn đó theo tỉ số số học $A'M : MB' = d_1 : d_2$, cũng tức là:

$$(A'B', M) = \frac{\overline{MA'}}{\overline{MB'}} = k = -\frac{d_1}{d_2}. \tag{6}$$

Trên đây là *lời giải đại số* (vì phương pháp giải đòi hỏi sử dụng bất đẳng thức đại số, cụ thể là bất đẳng thức Mincopski) của bài toán cực trị hình học 11' được phiên dịch sang ngôn ngữ hình học từ bài toán gốc (bài toán 11) về cực trị giải tích. Bây giờ ta lại phải phiên dịch trở lại kết quả của bài toán 11' sang bài toán gốc (bài toán 11).

- Để xác định các tọa độ của điểm M theo (6), ta cần xác định các tọa độ của A', B' và các khoảng cách d_1, d_2.

$AA' \perp \Delta = A'$, suy ra A' được xác định bởi $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CA'} = 0$, trong đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}(c_1 - a_1 + u_1 t, c_2 - a_2 + u_2 t, c_3 - a_3 + u_3 t); \\ \overrightarrow{CA'}(u_1 t, u_2 t, u_3 t); \end{cases}$$

(với $\overrightarrow{u}$ đã được chọn sao cho $\overrightarrow{u}^2 = 1$ tức $\overrightarrow{u}$ là véc tơ đơn vị chỉ phương của Δ), nghĩa là véctơ $\overrightarrow{u}$ đã được chọn sao cho $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ mà

$$|\overrightarrow{u}| = 1; \ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |\overrightarrow{u}|^2$$

Từ đó ta được giá trị của tham số $t = t_1$ ứng với A'; tương tự $t = t_2$ ứng với B',

$$t_1 = \vec{u}\overrightarrow{CA} \ \ (t_1 = 0 \Leftrightarrow A' = C); \ \ t_2 = \vec{u}\overrightarrow{CB}.$$

Chuyển qua biểu thức tọa độ, ta được:

$$\begin{cases} t_1 = u_1(a_1 - c_1) + u_2(a_2 - c_2) + u_3(a_3 - c_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i(a_i - c_i) \\ t_2 = u_1(b_1 - c_1) + u_2(b_2 - c_2) + u_3(b_3 - c_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i(b_i - c_i) \end{cases} \tag{7}$$

Từ (6) ta được

$$(1-k)\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA'} - k\overrightarrow{CB'}$$

Thay $k = -\frac{d_1}{d_2}$ thì được

$$\overrightarrow{CM} = \frac{d_1 t_2 + d_2 t_1}{d_1 + d_2}\vec{u}. \tag{8}$$

Vậy tham số $t = t_3$ ứng với điểm M phải tìm được xác định bởi

$$t_3 = \frac{d_1 t_2 + d_2 t_1}{d_1 + d_2}. \tag{9}$$

Cũng từ đó ta suy ra điểm M phải tìm trên $\triangle$ được xác định bởi

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \vec{u}t_3. \tag{10}$$

Từ đẳng thức véctơ (10) ta được các tọa độ của điểm M cần tìm

$$x_i = c_i + u_i t_3, \ \ (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Các khoảng cách $d_1 = AA'$ và $d_2 = BB'$ được xác định từ

$$d_1^2 = AA'^2 = CA^2 - CA'^2 = \overrightarrow{CA}^2 - (\vec{u}\overrightarrow{CA})^2 = \vec{u}^2\overrightarrow{CA}^2 - (\vec{u}\overrightarrow{CA})^2 = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{CA})^2$$

Như vậy

$$d_1 = \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{CA}\right|, \ d_2 = \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{CB}\right|, \ (|\vec{u}| = 1); \tag{12}$$

trong đó các tích véctơ $\vec{u} \wedge \overrightarrow{CA}$ và $\vec{u} \wedge \overrightarrow{CB}$ có các tọa độ như sau:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \overrightarrow{CA}&\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ a_3 - c_3 & a_1 - c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{vmatrix}\right) \\ \vec{u} \wedge \overrightarrow{CB}&\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ b_2 - c_2 & b_3 - c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ b_3 - c_3 & b_1 - c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ b_1 - c_1 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Từ (13) ta tính được

$$d_1 = \sqrt{(\vec{u} \wedge \overrightarrow{CA})^2}, \ \ d_2 = \sqrt{(\vec{u} \wedge \overrightarrow{CB})^2} \tag{14}$$

Thay giá trị của d_1, d_2 từ (14) vào (9) thì được t_3, sau đó lại tiếp tục thay giá trị của t_3 vào (11) thì xác định được hoàn toàn các tọa độ x_1, x_2, x_3 của "*điểm cực tiểu*" M trên $\triangle$ phải tìm. Còn giá trị cực tiểu f_m của f được xác định bởi:

$$f_m^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + 4d_1d_2 \tag{15}$$

trong đó d_1 và d_2 được xác định bởi các hệ thức (14).
Chú thích: Phần lời giải đại số của bài toán cực trị hình học 11' chưa đả động đến biện luận của bài toán dựng hình này mặc dầu đã chỉ ra đáp số đúng của bài toán về giá trị cực tiểu f_m của đại lượng f, kèm theo vị trí của "*điểm cực tiểu*" M phải tìm trên đường thẳng $\triangle$, cụ thể là trên đoạn $A'B'$, hình chiếu của đoạn thẳng AB trên $\triangle$. Chính vì vậy, khi ta phiên dịch trở lại kết quả thu được trong bài toán cực trị hình học 11' sang bài toán gốc (cực trị giải tích 11) cũng chưa thấy xuất hiện phần biện luận là bước cuối cùng của việc giải bài toán gốc (bài toán 11 về cực trị giải tích). Bởi vậy, để hoàn chỉnh lời giải bài toán dựng hình (bao gồm cả bài toán cực trị hình học) chúng ta cần bổ sung phần *biện luận* mà lẽ ra phần này phải xem là phần cuối cùng của lời giải. Tuy nhiên, để nhấn mạnh và làm nổi bật điều này chúng ta tách khỏi lời giải thành tiểu mục riêng.

c) Biện luận: Trở lại, theo dõi lời giải (đại số) của bài toán cực trị hình học 1' ta thấy rằng tỉ số đơn $(A'B', M)$ có biểu thức (6) được hoàn toàn xác định khi và chỉ khi $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$. Bởi vậy, bài toán 1' có nghiệm *duy nhất* khi và chỉ khi $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ tức là khi và chỉ khi ít nhất một trong hai điểm (phân biệt) A và B *không nằm trên* $\triangle$, cũng tức là khi và chỉ khi hoặc ba điểm A, B, C không thẳng hàng hoặc khi C trùng A, hoặc C trùng B nhưng $\triangle \neq (AB)$. Bài toán có *vô số nghiệm* [và bất cứ điểm M nào nằm trong đoạn AB (kể cả hai đầu mút A và B) cũng là điểm phải tìm] khi và chỉ khi *cả hai điểm A và B đều nằm trên đường thẳng* $\triangle$. Như vậy:

$$f \text{ đạt } \min f_m = AB \Leftrightarrow \{M\} = [AB] \subset \triangle \quad (f = MA + MB,\ M \in \triangle)$$

Trên cơ sở kết quả phần biện luận này của bài toán 11' ta phiên dịch ngược lại sang ngôn ngữ của bài toán gốc 11, ta có kết quả sau đây.

Nói chung, bài toán 11 có *nghiệm duy nhất* và biểu thức nghiệm x_i $(i = 1, 2, 3)$ có dạng (11), trong đó t_3 có biểu thức (9) và t_i $(i = 1, 2)$ có dạng (7) còn d_i được xác định bởi (12). Giá trị cực tiểu f_m của f được xác định bởi (15).

Bài toán 11 có *vô số nghiệm* khi và chỉ khi

$$a_1 - c_1 : a_2 - c_2 : a_3 - c_3 = b_1 - c_1 : b_2 - c_2 : b_3 - c_3 = u_1 : u_2 : u_3$$

Giá trị cực tiểu f_m của f được xác định bởi (15), trong đó $d_1 = d_2 = 0$. **d) Lời bình bổ xung.** Với nhận xét nêu ra ở mục 2.1 a) trên đây bài toán 11 về cực trị giải tích đã được giải nhờ hình học hóa nội dung bài toán cực trị gốc. Bài toán 11 đã được phiên dịch sang ngôn ngữ hình học thành bài toán cực trị trong hình học không gian (bài toán 11'). Chúng ta đã sử dụng một B. Đ. T đại số cơ bản (đó là B. Đ. T. Mincopski) để giải bài toán cực trị hình học11'này. Sau cùng chúng ta lại phải sử dụng đồng thời cả kiến thức về đại số (phương pháp tọa độ) và hình học (cụ thể là tích vô hướng và tích véc tơ của hai véc tơ trongkhông gian) để biểu thị kết quả tìm được (giá trị cực tiểu f_m của hàm f) hoàn toàn theo các dữ kiện (các số thực dã cho $a_i, b_i, c_i, u_i (i = 1, 2, 3)$ trong nội dung bài toán). Cụ thể là không những chỉ tính giá trị cực tiểu f_m của hàm f mà còn phải xác định giá trị cụ thể của các biến x_1, x_2, x_3 theo các số đã cho khi f đạt cực tiểu f_m. Vì vậy, lời giải không sử dụng phương pháp giải tích (cũng còn được gọi là phương pháp hàm số) này thực ra cũng khôngđược gọn gàng và tiện lợi cho lắm . Để ý quan sát kỹ về lời giải 1 (lời giải hình học) này chúng ta thấy việc sử dụng B. Đ. T. Mincopski có phần đã được gợi ý từ nội dung biểu thức (*) nằm ngay trong nội dung bài toán 11 rồi, nhất là khi (*) đã được biến đổi về dạng (2) của $f = f(t)$ phụ thuộctham số t. Điều đó khiến chúng ta cần quay trở lại thêm một lần nữa tìm cách sử dụng B. Đ. T. Mincopski để giải bài toán cực trị giải tích này hoàn toàn bằng phương pháp đại số.

d) Lời giải 2(lời giải đại số) của bài toán 11.

Trước hết để thực hiện các phép toán được gọn gàng ta luôn luôn giả thiết được rằng:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1, \tag{1'}$$

và đưa (1) về dạng (phương trình tham số):

$$x_i = c_i + u_i t, \ (i = 1, 2, 3), \tag{i}$$

trong đó u_i thỏa mãn điều kiện (1') và $(-\infty < t < +\infty$.

Đến đây, thay x_i bởi giá trị ở vế phải của (i) ta được:

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - a_i)^2 = t^2 + 2\alpha_1 t + \gamma_1^2; \ \sum_{i=1}^{3} (x_i - b_i)^2 = t^2 + 2\alpha_2 t + \gamma_2^2 \tag{ii}$$

trong đó ta đã đặt:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - a_i), \ \gamma_1^2 = \sum_{i=1}^{3} (c_i - a_i)^2; \\ \alpha_2 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - b_i), \ \gamma_2^2 = \sum_{i=1}^{3} (c_i - b_i)^2; \ (i = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{i'}$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\alpha_1^2 = [u_1(c_1 - a_1) + u_2(c_2 - a_2) + u_3(c_3 - a_3)]^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)[(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2 + (c_3 - a_3)^2]$$

rồi để ý đến (1") và (i') ta được$\alpha_1^2 \leq \gamma_1^2$.

Tương tự ta cũng được$\alpha_2^2 \leq \gamma_2^2$.

Tuy nhiên, áp dụng hằng đẳng thức Lagrange thì ta có các đẳng thức sau:

$$\begin{cases} \gamma_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2; \\ \gamma_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2; \end{cases} \tag{iii}$$

trong đó

$$\begin{cases} \gamma_1^2 - \alpha_1^2 = \beta_1^2 = [u_2(c_3 - a_3) - u_3(c_2 - a_2)]^2 + [u_3(c_1 - a_1) - u_1(c_3 - a_3)]^2 + [u_1(c_2 - a_2) - u_2(\\ \gamma_2^2 - \alpha_2^2 = \beta_2^2 = [u_2(c_3 - b_3) - u_3(c_2 - b_2)]^2 + [u_3(c_1 - b_1) - u_1(c_3 - b_3)]^2 + [u_1(c_2 - b_2) - u_2(c_1 \end{cases} \tag{iv}$$

Đối chiếu (ii) và (iii) ta được:

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i - a_i)^2 = (t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2,$$

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i - b_i)^2 = (t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2,$$

và do đó thu được biểu thức gọn của f như sau:

$$f = \sqrt{(t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \sqrt{(t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2}, \tag{1}$$

trong đó $\alpha_i), \beta_i$ $(i = 1, 2)$ đều là những hằng số theo thứ tự được xác định bởi (i') và (iv) như đã chỉ ra ở trên.

Đến đây với biểu thức (*') đã được thu gọn của f chúng ta có thể tìm được giá trị cực tiểu (giá trị nhỏ nhất) f_m của hàm f bằng phương pháp giải tích (sử dụng điều kiện cần để hàm f đạt cực tiểu thông qua việc tính đạo hàm $f'(t)$ rồi giải phương trình $f'(t) = 0$ để chỉ ra giá trị $t = t_0$, ở đó f đạt cực tiểu f_m mà ta phải tìm.

Tuy nhiên việc giải phương trình $f'(t) = 0$ cũng chưa thật sự đơn giản như chúng ta mong muốn. Bởi vậy chúng ta nghĩ đến phương pháp sử dụng bất đẳng thức đại số để tìm giá trị nhỏ nhất f_m của biểu thức f.

Thật vậy, vì $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ và β_2 đều là những hằng số đã cho, trong đó β_1 và β_2 đều là những số không âm; bởi vậy ta nghĩ đến bất đẳng thức Mincopski. Theo bất đẳng thức Mincopski, ta được:

$$f = \sqrt{(t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \sqrt{(t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2} \geq \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}; \tag{v}$$

(Để ý rằng $(t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2 = (-t - \alpha_2)^2 + \beta_2^2$). Dấu đẳng thức ở (v) đạt được khi và chỉ khi

$$\frac{(t + \alpha_1)}{\beta_1} = -\frac{(t + \alpha_2)}{\beta_2},$$

và do đó dễ dàng suy ra khi và chỉ khi

$$t = t_0 = -\frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, \tag{vi}$$

trong đó

$$-\alpha_1 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - a_i); \ \alpha_2 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - b_i)$$

và β_1, β_2 được xác định bởi đẳng thức (iv).

Cuối cùng ta thu được kết quả cho giá trị nhỏ nhất f_m của f:

$$minf = f_m = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2} \quad \text{(vii)}$$

khi và chỉ khi $t = t_0$, xác định bởi (vi), còn α_i, β_i $(i = 1, 2)$ được xácđịnh bởi (i')và (iv) như đã chỉ ra ở trên.

Biện luận. Bài toán có nghiệm khi giá trị của t (xác định bởi (vi) được hoàn toàn xác định. Vì $\beta \geq 0$ $(\forall i = 1, 2)$ nên $\beta_1 + \beta_2 \geq 0$. Bởi vậy bài toán có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, cũng tức là khi và chỉ khi ít nhất có một nghiệm β_i $(i = 1, 2) \neq 0$ (và do đó hoặc $\beta_1 > 0$, hoặc $\beta_2 > 0$). Bài toán có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Và do đó, theo các hệ thức (iv) xác định β_1^2 và β_2^2 ở trên dễ dàng suy ra:

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 - a_1 : c_2 - a_2 : c_3 - a_3 = c_1 - b_1 : c_2 - b_2 : c_3 - b_3 = u_1 : u_2 : u_3. \quad \text{(viii)}$$

Tóm lại: Bài toán 11 có nghiệm duy nhất f_m xác định bởi (vii) $\Leftrightarrow \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Bài toán 11 có vô số nghiệm có cùng giá trị $f_m = \mid \alpha_1 - \alpha_2 \mid \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$, cũng tức là các bộ số a_i, b_i, c_i, u_i $(i = 1, 2, 3)$ thỏa mãn điều kiện(Viii).

Cuối cùng, đối chiếu hai lời giải 1 và 2 (hình học và đại số) của bài toán 11 ta thấy được ý nghĩa hình học của α_i và β_i $(i = 1, 2)$ của lời giải đại số. Đó là:$t_0 = t_3, \beta_1 = d_1, \beta_2 = -d_2$ và $\alpha_i = -t_i$ $(i = 1, 2)$. Sau đây là *hai bài toán cực trị đại số và lượng giác* đều có xuất xứ từ cùng một bài toán cực trị hình học (trong hình học phẳng). Hai bài toán cực trị đó, nói khác đi chính là *lời giải đại số* và *lời giải lượng giác* của bài toán cực trị gốc.

Bởi vậy, trước hết xin đề cập *bài toán cực trị hình học gốc*, xuất xứ của hai bài toán cực trị đại số và lượng giác (về nội dung cũng như lời giải) để bạn đọc dễ theo dõi và đối chiếu.

Bài toán 12. (Bài toán cực trị hình học gốc)

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính a và một điểm P cố định nằm trong đường tròn $(OP = d < a)$. Trong các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P, hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo a và d.

Chú thích. Bài toán này chính là một bài toán hình học phẳng (Bài 1) trong kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán (Bảng A), tháng 3 năm 1997.

Bài toán này có nhiều cách giải.

Sau đây là *lời giải hình học* của bài toán (Lời giải 1).

a) Ký hiệu $p = AB + BC + CD + DA$ là chu vi của tứ giác $ABCD$, ta tính $p^2 = [(AB + CD) + (BC + DA)]^2$. Ta được:

$$p^2 = (AB^2 + CD^2) + (BC^2 + DA^2) + 2(AB.CD + BC + DA)+$$
$$+ 2(AB.AD + CB.CD + BA.BC + DC.DA).$$

Vì $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, a) nên ta có (Hình 1):

$$AP.PC = BP.PD = -\mathcal{P}P/(O, a) = a^2 - d^2 = b^2, \qquad (1)$$
$$AB.CD + BC.DA = AC.BD \text{ (Định lý Ptolémé);} \qquad (2)$$

Lại vì $AC \perp BD = P$ nên ta dễ dàng thiết lập được các hệ thức sau:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = 4a^2, \qquad (3)$$
$$\frac{AB.AD}{AP} = \frac{CB.CD}{PC} = \frac{BA.BC}{BP} = \frac{DA.DC}{PD} = 2a, \qquad (4)$$
$$AC^2 + BD^2 = 4(2a^2 - d^2) = 4(a^2 + b^2). \qquad (5)$$

Đến đây, từ (1), (2), (3), (4), (5), và $2AC.BD = (AC + BD)^2 - (AC^2 + BD^2)$ ta thu được biểu thức thu gọn của p^2 (vế phải của biểu thức (*) sau đây):

$$p^2 = (AC + BD)^2 + 4a(AC + BD) + 4(a^2 - b^2). \qquad (*)$$

b) Biểu thức (*) của p^2 cho ta biết : p^2 và do đó, p đạt giá trị lớn nhất p_M hay giá trị nhỏ nhất p_m khi và chỉ khi tổng $AC + BD$ độ dài hai đường chéo của tứ giác $ABCD$, tương ứng đạt giá trị max hay min.

Bây giờ từ hệ thức (5) và hệ thức (6) sau đây liên quan đến AC và BD:

$$(AC + BD)^2 + (AC - BD)^2 = 2(AC^2 + BD^2), \qquad (6)$$

ta suy ra: $AC + BD$ đạt giá trị max(min) khi và chỉ khi $|AC - BD|$ đạt min(max).

+) Từ (6) suy ra:

$$\max(AC + BD)^2 = 8(a^2 + b^2) \Leftrightarrow AC = BD.$$

Bởi vậy, ta được:

$$AC + BD \text{ đạt giá trị } \max = 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow AC = BD = \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \qquad (7)$$

Cuối cùng thế giá trị (7) vào (*) ta thu được kết quả cần tìm của p_M:

$$p_M = 2(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + b^2}), \ (b^2 = a^2 - d^2) \qquad (8)$$
$$\Leftrightarrow AC = BD = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Vì AC và BD là hai dây cung của đường tròn (O, a) nên chúng bằng nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thang cân ở vị trí $A_1B_1C_1D_1$ (hình 2) nhận (OP) làm trục đối xứng và cũng là trung trực chung của hai đáy B_1C_1 và A_1D_1.

+) Cũng từ (6) suy ra

$$\min(AC+BD)^2 = 8(a^2+b^2) - 4(a-b)^2 = 4(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow |AC-BD| \text{ đạt } \max = 2(a-b)$$

và do đó, khi và chỉ khi một trong hai đường chéo (AC hoặc BD) là đường kính đi qua P của (O, a), còn đường chéo kia (BD hoặc AC) là dây cung ngắn nhất đi qua P. Ta đi đến kết luận p đạt giá trị nhỏ nhất p_m

$$p_m = 4\sqrt{a(a+b)}, \tag{9}$$

khi và chỉ khi $ABCD$ ở vị trí của tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ nhận đường chéo lớn làm trục đối xứng, trùng với đường kính đi qua P của (O, a); (chẳng hạn $A_2C_2 \ni P$ ở hình 3).

Lời giải 2. (Lời giải lượng giác)

a) Ký hiệu độ lớn các góc ở tâm AOB, BOC, COD và DOA lần lượt là $2x, 2y, 2z$ và $2t$. Khi đó $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = x, \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = y, \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = z, \widehat{DBA} = \widehat{DCA} = t$; (Hình 1) đồng thời thoả mãn các điều kiện sau

$$0 < x, y, z, t < \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$
$$x + z = y + t = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Ngoài ra, theo định lý hàm sin ta có

$$\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin y} = \frac{CD}{\sin z} = \frac{DA}{\sin t} = 2a. \tag{12}$$

Từ (11) và (12) ta thu được biểu thức (**) sau đây về chu vi p của tứ giác $ABCD$

$$p = 2a(\sin x + \cos x + \sin y + \cos y). \tag{**}$$

Đến đây bài toán quy về tìm cực đại f_M và cực tiểu f_m của biểu thức lượng giác sau đây

$$f(x, y) = f(y, x) = \sin x + \cos x + \sin y + \cos y, \tag{**'}$$

trong đó hàm lượng giác $f(x, y)$ được xác định trong miền mở $(0, \frac{\pi}{2})$ của hai biến x, y không độc lập mà theo hệ thức (1) được chỉ ra trong lời giải 1 ở trên thì x, y ràng buộc với nhau bởi điều kiện (đẳng thức)

$$\sin 2x.\sin 2y = \frac{b^2}{a^2}. \tag{13}$$

Với nhãn quan này ta đề xuất được một *bài toán mới về cực trị lượng giác* sau:
Bài toán 13. Tìm cực đại f_M và cực tiểu f_m của biểu thức lượng giác sau (**'):

$$f(x, y) = \sin x + \cos x + \sin y + \cos y,$$

trong đó $f(x,y)$ được xác định trong miền mở $(0, \dfrac{\pi}{2})$ của hai biến thực x, y ràng buộc với nhau bởi hệ thức (13):

$$\sin 2x.\sin 2y = \frac{b^2}{a^2}.$$

b) Nhờ công thức $\sin u + \cos u = \sqrt{2}\sin(u + \frac{\pi}{4}), \forall u$ và hai công thức biến đổi các tổng $\sin u + \sin v$ và $\cos u + \cos v$ thành tích, chúng ta dễ dàng đưa được biểu thức (**') của $f(x,y)$ về một trong hai dạng sau

$$f(x,y) = \sqrt{2}[\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(y + \frac{\pi}{4})], \qquad (14)$$

$$f(x,y) = 2[\sin(\frac{x+y}{2}) + \cos(\frac{x+y}{2})]\cos(\frac{x-y}{2}). \qquad (15)$$

+) Đến đây, để tìm giá trị max f_M của $f(x,y)$ ta sử dụng biểu thức (14)của nó. Vì $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \sin(x + \frac{\pi}{4}), \sin(y + \frac{\pi}{4}) \leq 1$ và do đó $f(x,y) \leq 2\sqrt{2}$. Suy ra: $f_M(x,y) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = z = t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow P = O \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông. Bởi vậy, nếu $P = O$ thì $f_M(x,y) < 2\sqrt{2}$. Từ đó suy ra: Nếu $d \neq 0$, tức là $P \neq O$ thì $f(x,y)$ đạt max khi và chỉ khi hoặc $x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $y = \frac{\pi}{4}$. Chẳng hạn, nếu $x = x_0 = \frac{\pi}{4}$ thì $2x = 2x_0 = \frac{\pi}{2}$, do đó $\sin 2x_0 = 1$ và $z_0 = x_0 = \frac{\pi}{4}$. Khi đó ta được:

$$\max f(x,y) = f_M = f(x_0, y_0) = \sqrt{2} + \sin y_0 + \cos y_0, \qquad (16)$$

trong đó $0 < y_0 < \frac{\pi}{2}$ được xác định bởi:

$$\sin 2y_0 = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (17)$$

Từ (17) ta tính được $\sin y_0$ và $\cos y_0$ như sau:

$$\frac{\sin y_0}{\sqrt{2(a^2 - \sqrt{a^4 - b^4})}} = \frac{\cos y_0}{\sqrt{2(a^2 + \sqrt{a^4 - b^4})}} = \frac{1}{2a}. \qquad (18)$$

Thay giá trị của $\sin y_0$ và $\cos y_0$ từ (18) vào biểu thức (16) của f_M ta được:

$$\max f(x,y) = f(x_0, y_0) = f_M = \sqrt{2} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \qquad (19)$$

đạt được khi và chỉ khi $x = x_0, y = y_0$, trong đó x_0, y_0 được xác định bởi (18).

Cuối cùng, từ giá trị f_M vừa tìm được ở (19), thay vào (**) ta tìm được giá trị lớn nhất p_M của p đúng như biểu thức (8) của nó đã được chỉ ra ở trên trong (lời giải hình học) của bài toán 12.

+) Bây giờ, đến lượt tìm giá trị min của $f(x,y)$ ta lại sử dụng biểu thức (15) của nó. Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương, ta được

$$f(x,y) \geq 2\sqrt{2\sin(x+y)}\cos(\frac{x-y}{2}). \qquad (20)$$

Dấu đẳng thức ở (20) đạt được khi và chỉ khi:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x+y = z+t = \frac{\pi}{2} \tag{21}$$
$$\Leftrightarrow \sin(x+y) = \sin(z+t) = 1.$$

Bởi vậy, $f(x,y)$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$f_m = f(x_0', y_0'),$$
$$f_m = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x_0' - y_0'}{2}\right), \tag{22}$$

trong đó x_0', y_0' là nghiệm của hệ hai phương trình $\{(13),(21)\}$. Giải ra ta được $\cos(x_0' - y_0') = \sin 2y_0' = \frac{b}{a}$ rồi dễ dàng tìm được:

$$\cos\left(\frac{x_0' - y_0'}{2}\right) = \frac{1}{2a}\sqrt{2a(a+b)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\frac{b}{a}} \tag{23}$$

Từ đó suy ra:

$$f_m = 2\sqrt{1+\frac{b}{a}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0' = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}, \\ y = y_0' = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}. \end{cases} \tag{24}$$

Sau đó, từ (24) ta thu được $p_m = 2af_m$ và thấy lại biểu thức (9) của p_m như đã chỉ ra trong lời giải hình học (Bài toán 12).

Sau đây là lời giải đại số (Lời giải 3) của bài toán 12.

a) Đặt $b = \sqrt{a^2 - d^2}; PA = x; PC = x'; PB = y; PD = y'$. Ta thu được biểu thức sau đây của chu vi p của tứ giác $ABCD$:

$$p = p(x,x',y,y') = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+x'^2} + \sqrt{x'^2+y'^2} + \sqrt{y'^2+x^2}. \tag{***}$$

Ngoài ra, dễ dàng chỉ ra được các biến số x, x', y, y' ràng buộc với nhau bởi các điều kiện (bao gồm cả bất đẳng thức và đẳng thức) sau đây

$$a - d = a - \sqrt{a^2 - b^2} \le x, x', y, y' \le a + \sqrt{a^2 - b^2} = a + d, \tag{i}$$
$$xx' = yy' = b^2 \quad (0 < b \le a), \tag{ii}$$
$$x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2 = 4a^2. \tag{iii}$$

Như vậy, với cách nhìn bài toán cực trị hình học (bài toán 12) dưới góc độ mới này, ta lại thu được một bài toán mới khác về *cực trị đại số* mà nội dung có thể phát biểu ngắn gọn như sau:

Bài toán 14. Tìm cực đại p_M và cực tiểu p_m của biểu thức đại số $p(x,x',y,y')$ của các biến x, x', y, y' ràng buộc với nhau bởi (i), (ii) và (iii).

Trước hết ta hãy tìm cách thu gọn vế phải của (***). Thật vậy, nhờ đẳng thức (ii) ta dễ dàng thu được các đẳng thức sau đây:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{(x+y')^2 + (x'+y)^2)}$$
$$\sqrt{x^2+y'^2} + \sqrt{x'^2+y^2} = \sqrt{(x+y)^2 + (x'+y')^2)}$$

tương tự với bài toán cực trị hình học (Bài toán 12) trong hình học phẳng (xem phần chú thích c) ở đoạn dưới).

a) **Phát biểu bài toán:**

Bài toán 15. *Xét* $2n$ *biến số thực dương* x_i, x_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *thoả mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - b^2} \le x_i, x_i' \le a + \sqrt{a^2 - b^2}, & (i) \\ x_i x_i' = b^2 \ (0 < b \le a), & (ii) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2 + x_i'^2) = 4a^2 + 2(n-2)b^2. & (iii) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất p_M *và giá trị nhỏ nhất* p_m *của hàm* $2n$ *biến* x_i, x_i' $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ *sau đây:*

$$p(x_1, x_1'; \ldots; x_n, x_n') = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\sqrt{x_i^2 + x_j^2} + \sqrt{x_i^2 + x_j'^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j'^2} \right). \quad (*)$$

Chú thích: Nếu đặt $p_{ij} = p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j')$ thì (*) được viết gọn lại hơn như sau:

$$p(x_1, x_1'; x_2, x_2'; \ldots; x_n, x_n') = \sum_{1 \le i < j \le n} p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j')$$

và dưới dấu $\sum$ có tất cả $\frac{1}{2}(n-1)n = C_n^2$ hàm $p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j')$ của bốn biến x_i, x_i', x_j, x_j' với $1 \le i < j \le n$, trong đó p_{ij} có dạng là tổng của bốn căn thức bậc hai ở vế phải của (*).

b) Phương án giải (lời giải) của bài toán.

Đặt: $X_i = x_i + x_i'$; $X_j = x_j + x_j'$; $x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2 = 4a_{ij}^2$; $x_0 = 2b$, $X_0 = 2a$. Thế thì từ (i), (ii) và (iii) ta suy ra $X_i^2 \ge 4x_i x_i' = 4b^2$, $X_i^2 + X_j^2 = 4a_{ij}^2 + 4b^2$ và do đó, $X_i^2 \le 4a_{ij}^2$.

Từ đó ta được bất đẳng thức và đẳng thức sau:

$$\begin{cases} 2b = x_0 \le X_i \le 2a_{ij} \le 2a \\ \sum_{i=1}^n X_i^2 = 4a^2 + 2(n-2)b^2 + 2nb^2 = 4a^2 + 4(n-1)b^2 = X_0^2 + (n-1)x_0^2.. \end{cases}$$

+) Ta hãy tính p_{ij} theo X_i, X_j, a_{ij} và b.

Từ (ii) ta suy ra

$$\sqrt{x_i^2 + x_j^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j'^2} = \sqrt{(x_i + x_j')^2 + (x_j + x_i')^2},$$
$$\sqrt{x_i^2 + x_j'^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j^2} = \sqrt{(x_i + x_j)^2 + (x_i' + x_j')^2};$$

và do đó,

$$p_{ij} = p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j') = \sqrt{(x_i + x_j')^2 + (x_j + x_i')^2} + \sqrt{(x_i + x_j)^2 + (x_i' + x_j')^2}. \quad (1)$$

Sau khi bình phương hai vế của (1) và sử dụng các hệ thức (ii) và ký hiệu rút gọn $x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2 = 4a_{ij}^2$, ta được biểu thức rút gọn sau của p_{ij}^2 dưới dạng một tam thức bậc hai đối với biến $X_i + X_j$:

$$p_{ij}^2 = (X_i + X_j)^2 + 4a_{ij}(X_i + X_j) + 4(a_{ij}^2 + b^2), \tag{2}$$

trong đó giữa X_i và X_j có các hệ thức sau đây:

$$X_i^2 + X_j^2 = 4a_{ij}^2 + 4b^2, \tag{3}$$
$$(X_i + X_j)^2 + (X_i - X_j)^2 = 8(a_{ij}^2 + b^2). \tag{4}$$

+) Vì $X_i > 0, X_j > 0$ nên biểu thức (2) của p_{ij}^2 cho biết: p_{ij}^2 và do đó, p_{ij} đạt giá trị $\max p_{ij_M}$ hay giá trị $\min p_{ij_m}$ khi và chỉ khi $X_i + X_j$ đạt max hay min. Do đó, từ (4) ta suy ra:

$$X_i + X_j \text{ đạt } \max(\min) \Leftrightarrow |X_i - X_j| \text{ đạt } \min(\max).$$

Từ (4) ta được: $(X_i + X_j)^2 \leq 8(a_{ij}^2 + b^2)$ và do đó thay vào (2) ta được:

$$p_{ij}^2 \leq 4\left(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\right)^2.$$

Vậy

$$p_{ij} \leq p_{ij_M} = 2\left(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\right), \tag{5}$$
$$p_{ij} = p_{ij_M} = 2\left(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\right) \tag{6}$$
$$\Leftrightarrow X_i = X_j \ (2b \leq X_i = X_j \leq 2a_{ij} \leq 2a).$$

Mặc khác, $|X_i - X_j|$ đạt max khi và chỉ khi hoặc X_i đạt max $= 2a_{ij}$, X_j đạt min $= x_0 = 2b$ hoặc X_j đạt max $= 2a_{ij}, X_i$ đạt min $= x_0 = 2b$. Suy ra:

$$\begin{aligned} p_{ij}^2 \geq p_{ij_m}^2 &= (2a_{ij} + 2b)^2 + 4a_{ij}(2a_{ij} + 2b) + 4(a_{ij}^2 - b^2) \\ &= 4(a_{ij} + b)^2 + 8a_{ij}(a_{ij} + b) + 4(a_{ij} + b)(a_{ij} - b) \\ &= 16a_{ij}(a_{ij} + b). \end{aligned}$$

Vậy

$$p_{ij} \geq p_{ij_m} \ (\min) = 4\sqrt{a_{ij}(a_{ij} + b)}, \tag{7}$$

và

$$p_{ij} = p_{ij_m} = 4\sqrt{a_{ij}(a_{ij} + b)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_i = X_0 = 2a_{ij}, \ X_j = x_0 = 2b, \\ X_j = 2a_{ij}, \ X_i = x_0 = 2b. \end{array}\right. \tag{8}$$

Và do đó:

$$p_{ij_m} = \left[\begin{array}{l} 4b\sqrt{2} \ (\text{với } a_{ij} = b), \\ 4\sqrt{a^2 + ab} = 4a\sqrt{1 + \frac{b}{a}} \ (\text{với } a_{ij} = a). \end{array}\right.$$

Bây giờ ta trở lại với hàm $2n$ biến $p(x_1, x_1'; \dots; x_n, x_n')$ (*), từ (5) và (7) ta thu được bất đẳng thức kép sau:

$$4\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{a_{ij}(a_{ij}+b)} \le p = \sum_{1\le i<j\le n} p_{ij} \le 2\Big[\sum_{1\le i<j\le n}(a_{ij}\sqrt{2}+\sqrt{a_{ij}^2+b^2})\Big], \qquad (*')$$

trong đó $0 < b \le a_{ij} \le a$.

+) Đến đây, ta có thể tìm được các giá trị lớn nhất p_M và nhỏ nhất p_m của p.

- Trước hết, ta tìm giá trị nhỏ nhất p_m của $p = p(x_1, x_1'; \dots; x_i, x_i'; \dots; x_n, x_n')$. Để tính p_m, ta hãy để ý rằng:

$$(n-1)\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x_i'^2)\Big] = \sum_{1\le i<j\le n}(x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2) = \sum_{1\le i<j\le n}(4a_{ij}^2). \qquad (9)$$

Từ (iii) và (9) ta được:

$$(n-1)[4a^2 + 2(n-2)b^2] = 4\Big(\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}^2\Big).$$

Suy ra

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}^2 = (n-1)a^2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)b^2 = (n-1)a^2 + C_{n-1}^2 b^2 = const \qquad (10)$$

$$= (n-1)max a_{ij}^2 + C_{n-1}^2 min a_{ij}^2.$$

Hệ thức (10) chứng tỏ rằng:

- Không thể xảy ra $a_{ij} = b$ với $\forall i, j$ (Điều này dễ dàng suy ra bằng phương pháp chứng minh phản chứng). Từ đó suy ra rằng phải có một số giá trị $a_{ij} = a$. Mặt khác, có tất cả $C_n^2 = (n-1) + C_{n-1}^2$ giá trị của a_{ij}, mà theo (10) thì tối đa có C_{n-1}^2 giá trị $a_{ij} = b$ và vì thế, phải có $n-1$ giá trị a_{ij} nào đó đạt cực đại bằng a (chẳng hạn, $a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = a$, tức là $a_{1j} = a (j \ne 1)$. Cuối cùng, suy ra:

$$p_m = 4\Big[(n-1)\sqrt{a(a+b)} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)b\sqrt{2}\Big], \qquad (11)$$

hay là

$$\min p = 4\Big[(n-1)a\sqrt{1+\frac{b}{a}} + C_{n-1}^2 b\sqrt{2}\Big] = 4(n-1)\sqrt{a(a+b)} + 2(n-1)(n-2)b\sqrt{2}. \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_i = x_i + x_i' = 2a, & (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ X_j\ (j \ne i) = 2b, & j \ne i. \end{cases}$$

Với $n = 2$, ta được: $minp = 4\sqrt{a(a+b)}$, ta thấy lại kết quả đã thu được ở phần (I).

- Bây giờ tìm giá trị lớn nhất p_M của p. Ta sử dụng bất đẳng thức $\frac{u_i}{n} \leq \sqrt{\frac{u_i^2}{n}}$, ($u_i > 0$) để đánh giá tiếp bất đẳng thức ở vế phải của bất đẳng thức kép (*') có sử dụng đại lượng bất biến (10). Thế thì, vì $\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sqrt{n\sum u_i^2}$ nên ta được:

α) $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \leq \sqrt{C_n^2(\sum a_{ij}^2)}$, hay viết cụ thể hơn là:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \leq \sqrt{C_n^2[(n-1)a^2 + C_{n-1}^2 b^2]} = \Big[\frac{n(n-1)}{2}(n-1)a^2 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{2}b^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Do đó ta được

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \leq \Big(\frac{(n-1)}{2}\Big)\sqrt{2na^2 + n(n-2)b^2}. \qquad (13)$$

β) Cũng vậy, $\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(\sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\Big) \leq C_n^2\sqrt{\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_{ij}^2+b^2)}{C_n^2}}$, rồi sử dụng (10) thì được:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(\sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\Big) &\leq \sqrt{C_n^2\Big(\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}^2 + C_n^2 b^2\Big)} \\ &= \sqrt{C_n^2(n-1)a^2 + C_n^2 C_{n-1}^2 b^2 + (C_n^2)^2 b^2} \\ &= \Big(\frac{n-1}{2}\Big)\sqrt{2n[a^2 + (n-1)b^2]}.\end{aligned}$$

Do đó:

$$2\Big[\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(\sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\Big)\Big] \leq (n-1)\sqrt{2n[a^2 + (n-1)b^2]}. \qquad (14)$$

Cuối cùng, từ (13) và (14) ta được kết quả (sau khi thay vào vế phải của (*')):

$$p \leq (n-1)\Big[\sqrt{2n[2a^2 + (n-2)b^2]} + \sqrt{2n[a^2 + (n-1)b^2]}\Big]. \qquad (15)$$

Vậy là:

$$\begin{aligned} p_M &= (n-1)\Big[\sqrt{2n[2a^2 + (n-2)b^2]} + \sqrt{2n[a^2 + (n-1)b^2]}\Big] \qquad (16)\\ &\Leftrightarrow X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \frac{2}{n}\sqrt{na^2 + n(n-1)b^2};\ (X_i = x_i + x_i';\ (i = 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}$$

Với $n = 2$, thì được $p_M = 2(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + b^2})$, ta thấy lại kết quả đã thu được ở phần I.

c) Chú thích: Đến đây, bài toán 15 - một bài toán cực trị đại số_đã được giải xong. Nhưng vì bài toán cực trị đại số này lại chính là nội dung (ngôn ngữ) đại số của một bài toán cực trị hình học trong không gian Ơclit n chiều $E_n(n \geq 3)$, tương tự với bài toán cực trị hình học gốc trong mặt phẳng (đã được giới thiệu 3 lời giải); bởi vậy, chỉ việc cho $n = 3$ vào các biểu thức (12) và (16) trên đây của p_m và p_M ta được ngay tức khắc đáp số của bài toán cực trị tương tự trong hình học không gian khi ta thay đường tròn (O, a) bởi mặt cầu (O, a), tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, a) có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau ở một điểm P nằm trong đường tròn bởi hình bát diện $\mathcal{K}(A.BCB'C'.A')$ nội tiếp mặt cầu $\mathcal{C}(O,a)$ có ba đường chéo AA', BB', CC' cũng là ba dây cung của $\mathcal{C}(O,a)$, vuông góc với nhau đôi một ở một điểm P cố định nằm trong mặt cầu $\mathcal{C}(O,a)$ $(OP = d < a)$.

Sau đây, một bài toán mới thứ hai khác, về cực trị đại số được đề xuất trên cơ sở phiên dịch sang ngôn ngữ đại số nội dung của bài toán cực trị hình học trong không gian vừa mới đề cập trong chú thích ở mục c) trên đây (cụ thể là cực trị về diện tích của một họ hình bát diện $\mathcal{K}(A.BCB'C'.A')$ nội tiếp mặt cầu $\mathcal{C}(O,a)$.

d) Phát biểu bài toán:

Bài toán 16. *Xét 6 biến số thực dương x_i, x'_i $(i = 1,2,3)$ thoả mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2-b^2} \le x_i, x'_i \le a + \sqrt{a^2-b^2}, \ (a \ge b > 0), & (i) \\ x_i x'_i = b^2, \ \ (i = 1,2,3) & (ii) \\ \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 + x_i'^2) = 4a^2 + 2b^2. & (iii) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất s_M và giá trị nhỏ nhất s_m của hàm 6 biến x_i, x'_i $(i = 1,2,3)$ sau đây:

$$s = s(x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3) = \sum \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \qquad (**)$$

trong đó: $\{x,y,z\} \subset \{x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3\}$ và x, y, z không có cùng chỉ số, tức là sao cho $\{x,y\} \ne \{x_i, x'_i\}$, $\{y,z\} \ne \{x_i, x'_i\}$ và $\{z,x\} \ne \{x_i, x'_i\}$; $i \in \{1,2,3\}$. Chú thích: Dưới dấu Σ có tất cả 8 căn thức bậc hai mà biểu thức dưới dấu căn thức là 8 đa thức thuần nhất bậc 4 của ba trong 6 đối số x_i, x'_i nhưng không cùng một chỉ số $(i \in \{1,2,3\})$. Cụ thể là biểu thức (**) của s có thể được viết lại như sau:

$$s = S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + S_3 + S'_3 + S_4 + S'_4,$$

trong đó

$$\begin{cases} 4S_1^2 = x_2^2x_3^2 + x_1'^2(x_2^2 + x_3^2), & 4S_1'^2 = x_2'^2x_3'^2 + x_1^2(x_2'^2 + x_3'^2); \\ 4S_2^2 = x_3^2x_1^2 + x_2'^2(x_3^2 + x_1^2), & 4S_2'^2 = x_3'^2x_1'^2 + x_2^2(x_3'^2 + x_1'^2); \\ 4S_3^2 = x_1^2x_2^2 + x_3'^2(x_1^2 + x_2^2), & 4S_3'^2 = x_1'^2x_2'^2 + x_3^2(x_1'^2 + x_2'^2); \\ 4S_4^2 = x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2, & 4S_4'^2 = x_2'^2x_3'^2 + x_3'^2x_1'^2 + x_1'^2x_2'^2; \end{cases}$$

là những biểu thức dưới dấu căn thức bậc hai ở vế phải của (**).

e) Gợi ý hướng giải. Sử dụng đại lượng bất biến (ii), hãy tìm cách rút bớt số căn thức ở vế phải của biểu thức (**) từ 8 xuống 4 rồi 2.

Đặt $X_i = x_i + x'_i$ $(i = 1,2,3)$, chứng tỏ rằng:

$$\sum_{i=1}^{2} X_i^2 = 4a^2 + 8b^2 = 4a^2 + 2.4b^2 = X_0^2 + 2x_0^2 \ (X_0 = 2a, x_0 = 2b). \qquad \text{(iv)}$$

Ngoài ra, sử dụng các đại lượng bất biến (ii) và (iii), hãy thiết lập thêm những hệ thức liên quan đến các đại lượng $\sum_{i=1}^{4} S_i^2 + S_i'^2$, $\sum_{1\le i<j\le 4} X_i^2X_j^2$ và các đại lượng bất biến (ii), (iii) và (iv).

f) Đáp số của bài toán.

Hãy chứng minh rằng biểu thức đại số (**) của đại lượng biến thiên $s = s(x_1, x_1'; x_2, x_2'; x_3, x_3')$ của 6 biến x_i, x_i' $(i = 1, 2, 3)$ thực dương ràng buộc bởi các bất đẳng thức và đẳng thức điều kiện (i), (ii) và (iii) về các biến x_i, x_i', đạt cực đại s_M khi và chỉ khi $X_1 = X_2 = X_3$ và đạt cực tiểu s_m khi và chỉ khi, chẳng hạn: $X_1 = X_0 = 2a$ và $X_2 = X_3 = x_0 = 2b$. Từ đó mà thiết lập được các giá trị cực đại s_M và cực tiểu s_m theo a và b.

g) Vì nội dung bài toán cực trị đại số này chính là ngôn ngữ đại số của bài toán về cực trị hình học trong không gian được đề cập đến ở mục c) "chú thích" vừa mới nói ở trên (cụ thể là cực trị về diện tích toàn phần của một họ các hình bát diện $\mathcal{K}$ nội tiếp một mặt cầu (O, a) theo cách cấu tạo đã chỉ ra trong bài toán) nên giải bài toán này cũng tức là chúng ta đã giải bài toán cực trị hình học không gian bằng phương pháp đại số. Và do đó, đáp số chỉ ra ở đây cũng là đáp số của bài toán cực trị hình học không gian đó.

Bất biến, đơn biến và ứng dụng

Trần Nam Dũng

Tất cả rồi sẽ đổi thay, chỉ Tình yêu và Niềm tin là mãi mãi

Mở đầu

Bất biến là một trong những khái niệm trung tâm của toán học. Nó có mặt trong hầu hết các lĩnh vực của Toán học: Đại số, Hình học, Tô-pô, Lý thuyết số, Xác suất, Phương trình vi phân Ă Chẳng hạn, các bất biến được sử dụng trong việc nghiên cứu các đồ thị phẳng (định lý Kuratowsky), giải tích hàm (chứng minh định lý về điểm bất động Brawer hay chứng minh hình cầu không đồng phôi với xuyến. Khó có định lý về phân loại (nhóm, đại số, đồ thị Ă) nào lại thiếu sự có mặt của các bất biến. Có hẳn một lý thuyết bất biến nghiên cứu các dạng bất biến đại số của các biến đổi tuyến tính.

Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi. Chẳng hạn khi thực hiện phép tịnh tiến thì khoảng cách giữa hai điểm sẽ không thay đổi. Với phép vị tự thì khác: khoảng cách có thể sẽ thay đổi, nhưng sẽ có một bất biến khác, đó là tỷ lệ giữa hai đoạn thẳng.

Một ví dụ khác về bất biến: Lấy một số nguyên dương N (viết trong hệ thập phân). Phép biến đổi T biến N thành tổng các chữ số của N. Ví dụ: $1997 \to 26 \to 8 \to 8 \ldots$ Ă Vậy có gì bất biến ở đây? Có đấy, tất cả các số $N, T(N), T(T(N)), \ldots$ Ă đều có cùng số dư khi chia cho 8. Đó chính là bất biến.

Đơn biến, trái lại, là một đại lượng luôn thay đổi, nhưng chỉ theo một chiều (tức là tăng lên hay giảm xuống). Chúng ta sẽ định nghĩa một cách chặt chẽ về bất biến cũng như đơn biến trong các phần sau, ở đây chỉ dừng lại ở một số ví dụ.

Xét bộ số nguyên dương (a, b, c). Phép biến đổi T biến (a, b, c) thành $(|bc|, |ca|, |ab|)$. Khi đó có thể chứng minh được rằng hàm số

$$S(a, b, c) = a + b + c$$

là một hàm không tăng, tức là một đơn biến đối với phép biến đổi T.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu về bất biến, đơn biến và ứng dụng của chúng trong việc giải các bài toán Olympic. Có hai mẫu bài toán tổng quát thường được giải quyết bằng bất biến và đơn biến:

Bài 1. *Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Có hai trạng thái α và β thuộc Ω. Hỏi có thể dùng hữu hạn các phép biến đổi thuộc T để đưa trạng thái α về trạng thái β được không?*

Bài 2. *Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ωvào Ω. Cần chứng minh rằng, bắt đầu từ một trạng thái α bất kỳ, sau một số hữu hạn các phép biến đổi từ T, ta sẽ đi đến trạng thái kết thúc (trong nhiều trường hợp, đó là trạng thái ổn định, tức là sẽ không tiếp tục thay đổi khi tác động các phép biến đổi từ T, tình huống $T(8) = 8$ ở trên đây là một ví dụ).*

Bất biến và đơn biến sẽ giúp chúng ta giải quyết các tình huống căn bản này. Tất nhiên, các tình huống áp dụng sẽ muôn hình vạn trạng, nhưng cũng cần có những kiến thức cơ bản và lối tư duy chung để tiếp cận các vấn đề. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một số ví dụ đơn giản.

1 Các ví dụ mở đầu

Ví dụ 1. *Xét một bảng vuông 4×4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu $+$ hoặc dấu $-$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có 1 dấu $+$ và 15 dấu $-$. Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?*

Câu trả lời là không. Và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng -1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông (1, 15) sẽ chỉ đưa về các bảng vuông có số lẻ dấu -, có nghĩa là không thể đưa về bảng có toàn dấu cộng.

Ví dụ 2. *Trên bảng có các số $1/96, 2/96, 3/96, \ldots, 96/96$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng $a + b2ab$. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?*

Tôi rất thích ví dụ này. Khi đặt bài toán cho các học sinh, bạn nào cũng lắc đầu lè lưỡi vì đề bài yêu cầu tính toán quá nhiều. Hơn nữa, trong bài toán trên, thứ tự thực hiện các phép toán lại không được nói rõ, tạo ra một tình huống gần như không thể xử lý nổi.

Nhưng chính những khó khăn đó lại gợi mở ra cách giải. Ở đây tôi sẽ không trình bày cụ thể cách phân tích để tìm ra hướng giải. Chỉ biết rằng, khi lời giải được đưa ra, các bạn học sinh đều vô cùng bất ngờ và thích thú. Cũng từ sự thích thú này, việc đưa tiếp các ví dụ tiếp theo được đón tiếp một cách nồng nhiệt hơn hẳn.

Sau đây là lời giải đó.

Giả sử các số trên đang là $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ta cho tương ứng bảng này với

$$(2a_1 - 1)(2a_2 - 1)(2a_k - 1).$$

Khi đó, sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $(2a-1)(2b-1)$ và được thêm vào thừa số

$$2(a+b-2ab)-1=-(2a-1)(2b-1).$$

Do đó tích trên vẫn không đổi (chỉ đổi dấu). Vì tích ban đầu bằng 0 (do bảng ban đầu có chứa số $48/96 = 1/2$!) nên số cuối cùng s cũng phải cho tích số bằng 0, tức là $2s1 = 0$, suy ra $s = 1/2$! Thật ấn tượng.

Kết quả không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện (điều này có thể dự đoán được qua cách đặt câu hỏi ở đề bài). Và lời giải mới ngắn gọn làm sao! Không cần một tính toán nào.

Ví dụ 3. *Cho 3 số nguyên không âm a, b, c bất kỳ. Mỗi một lần thực hiện, ta biến bộ (a, b, c) thành bộ $(|bc|, |ca|, |ab|)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta thu được bộ có chứa số 0.*

Đặt $M = \max\{a, b, c\}$. Ta chứng minh rằng nếu bộ (a, b, c) không chứa số 0 thì M sẽ giảm sau khi thực hiện phép biến đổi. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó ta có

$$|bc| < b \leqslant a, \quad |c-a| < a, |ab| < a,$$

suy ra

$$\max\{|bc|, |ca|, |ab|\} < a = \max(a, b, c).$$

Như vậy, nếu ta chưa thu được số 0 thì M sẽ nhỏ đi ít nhất một đơn vị (do tính chất của số nguyên). Quá trình này không thể kéo dài vô hạn. Vì thế, chắc chắn phải có lúc nào đó xuất hiện số 0.

Trong ví dụ trên, $\max\{a, b, c\}$ chính là một đơn biến. Đây là một phương pháp khá hiệu quả để chứng minh một quá trình là dừng.

Chú ý rằng phương pháp này thường sử dụng các tính chất cơ bản sau đây của số nguyên:

i) $m < n$ suy ra $m \leqslant n1$;

ii) Một tập con bất kỳ của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất (tính sắp thứ tự tốt).

Để thấy rõ điều quan trọng của các tính chất xem chừng rất đơn giản này, ta sẽ đưa ra ví dụ cho thấy rằng kết luận ở ví dụ 3 không còn đúng nếu a, b, c không còn là số nguyên (hay đúng hơn, không còn là số hữu tỷ).

Thật vậy, gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2x1 = 0$. Chọn các số $a = \alpha^2, b = \alpha, c = 1$ thì ta có

$$|ab| = \alpha^2 - \alpha = (\alpha-1)\alpha, \quad |ac| = \alpha^2 1 = (\alpha-1)(\alpha+1) = (\alpha-1)\alpha^2, \quad |bc| = \alpha - 1.$$

Suy ra bộ số mới tỷ lệ với bộ số cũ theo tỷ lệ $\alpha - 1$. Và như thế, sau n lần thực hiện, bộ số của chúng ta sẽ là $(\alpha-1)n(\alpha^2, \alpha, 1)$, không bao giờ chứa 0.

Ví dụ 4. *Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho trong mỗi viện, mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù.*

Đây cũng là một ví dụ mà tôi rất thích. Có nhiều cách giải khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách giải sử dụng đơn biến. Ý tưởng tuy đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng (trong nhiều bài toán phức tạp hơn).

Ta chia quốc hội ra thành 2 viện A, B một cách tùy ý. Với mỗi viện A, B, ta gọi $s(A), s(B)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thoả mãn yêu cầu, tức là vẫn có một nghị sĩ nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong viện của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử nghị sĩ x thuộc A có ít nhất 2 kẻ thù trong A. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau: chuyển x từ A sang B để được cách chia mới là $A = A \setminus \{x\}$ và $B = B \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A và A không còn chứa x nên ta có

$$s(A) \leqslant s(A)4$$

(trong tổng mất đi ít nhất 2 của $s(x)$ và 2 của các kẻ thù của x trong A).

Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B (hay B), cho nên

$$s(B) \leqslant s(B) + 2.$$

Từ đó $s(A) + s(B)$
$leqslant s(A) + s(B) 2$.

Như vậy nếu (A, B) là một cách chia chưa thoả mãn điều kiện thì ta có thể biến đổi A, B để có một cách chia mới có tổng $s(A) + s(B)$ nhỏ đi ít nhất 2 đơn vị. Rõ ràng quá trình này không thể thực hiện được mãi, có nghĩa là tồn tại cách chia $(A*, B*)$ mà ở đó không tồn tại nghị sĩ có quá 1 kẻ thù trong viện của mình, đó chính là đpcm.

Bất biến cũng có thể xuất hiện trong các bài toán về trò chơi. Trò chơi Nim là một ví dụ điển hình.

Ví dụ 5. *Có 3 đống sỏi có k, m, n viên sỏi. Hai người cùng chơi trò chơi sau: Người thứ nhất chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); sau đó đến lượt người thứ hai chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); và cứ như thế tiếp tục. Người nào đến lượt mình không thể bốc được nữa (tức là không còn viên sỏi nào) sẽ là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng.*

Ý tưởng của lời giải bài toán này là tìm một tính chất của bộ (k, m, n) sao cho với mọi cách bốc sỏi thành bộ (k, m, n), tính chất này sẽ bị mất đi, nhưng từ bộ (k, m, n) không có tính chất này, luôn tìm được một cách bốc để đưa về bộ mới có tính chất này.

Giả sử có một tính chất như vậy (giả sử là T) và giả sử bộ $(0, 0, 0)$ có tính chất T. Khi đó người đi trước sẽ thắng cuộc nếu bộ (k, m, n) ban đầu không có tính chất T và sẽ thua cuộc nếu bộ ban đầu có tính chất T.

Ta sẽ quay lại lời giải của bài toán này ở phần sau, nhưng trước hết ta giải thích về Ótính chất TÕ thông qua một trường hợp đơn giản của bài toán Nim.

Cụ thể, xét bài toán Nim trong trường hợp chỉ có hai đống sỏi. Khi đó ta nói bộ (m, n) có tính chất T nếu $m = n$. Rõ ràng $(0, 0)$ có tính chất T. Từ bộ (m, n) có tính chất T (tức là m=n), với mọi cách bốc sỏi, ta đều phá đi tính chất T của nó. Ngược lại, với bộ (m, n) không có tính chất T, ta luôn đưa được về bộ có tính chất T bằng cách bốc đi $|mn|$ viên sỏi ở đống sỏi có số sỏi nhiều hơn. Như thế tính chất T của chúng ta thoả mãn yêu cầu đề bài. Và như thế, nếu ban đầu hai đống sỏi có số sỏi khác nhau thì người thứ nhất thắng cuộc, còn nếu hai đống sỏi có số sỏi giống nhau thì người thứ hai thắng cuộc.

Cuối cùng, ta xét đến một ứng dụng của bất biến trong hình học

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng trong một đa diện lồi, luôn tồn tại ít nhất 1 đỉnh là đỉnh của một góc tam diện hoặc ít nhất một mặt là tam giác.*

Ví dụ này hơi lạ so với các ví dụ trước vì không có phép biến đổi nào. Thực ra, bất biến không chỉ xuất hiện ở những chỗ có các phép biến đổi mà nó còn xuất hiện khi ta xét một lớp các đối tượng thoả mãn những tính chất nào đó. Ví dụ với các điểm (x, y) nằm trên đường tròn đơn vị thì $x^2 + y^2$ là một bất biến. Còn với một đa diện lồi bất kỳ thì ta có công thức Euler nổi tiếng

$$V\text{-}E + F = 2,$$

trong đó V là số đỉnh, F là số mặt và E là số cạnh của một đa diện lồi bất kỳ.

Ta sẽ dùng công thức này để giải bài toán của chúng ta.

Giả sử ngược lại, tồn tại một đa diện mà không có đỉnh nào là đỉnh của một góc tam diện và không có mặt nào là tam giác. Khi đó, do một mặt sẽ có ít nhất 4 cạnh và một cạnh chỉ có thể là cạnh của hai mặt nên ta có $F \leqslant E/2$. Với lý luận tương tự, ta có $V \leqslant E/2$. Vì vậy $V + F\text{-}E \leqslant E/2 + E/2E = 0$, mâu thuẫn.

Cuối cùng, chúng ta sẽ kết thúc phần ví dụ mở đầu bằng phép chứng minh công thức Euler nêu trên. Qua chứng minh này có thể thấy sự xuất hiện của các phép biến đổi. Phép chứng minh này do Cauchy đưa ra khi ông chỉ mới 20 tuổi.

Remove one face of the polyhedron.

By pulling the edges of the missing face away from each other, deform all the rest into a planar network of points and curves, as illustrated by the first of the three graphs for the special case of the cube. (The assumption that the polyhedron is homeomorphic to the sphere at the beginning is what makes this possible.) After this deformation, the regular faces are generally not regular anymore Ò in fact, they are not even polygons. However, the numbers of vertices, edges and faces remain the same as those of the given polyhedron. (The removed face corresponds to the exterior of the network.)

If there is a face with more than three sides, draw a diagonal Ò that is, a curve through the face connecting two vertices that aren't connected yet. This adds one edge and one face and does not change the number of vertices, so it does not change the quantity $V - E + F$. Continue adding edges in this manner until all of the faces are triangular.

Apply repeatedly either of the following two transformations:

1. Remove a triangle with only one edge adjacent to the exterior, as illustrated by the second graph. This decreases the number of edges and faces by one each and does not change the number of vertices, so it preserves $V - E + F$.

2. Remove a triangle with two edges shared by the exterior of the network, as illustrated by the third graph. Each triangle removal removes a vertex, two edges and one face, so it preserves $V - E + F$.

Repeat these two steps, one after the other, until only one triangle remains.

At this point the lone triangle has $V = 3, E = 3$, and $F = 2$ (counting the exterior), so that $V - E + F = 2$. This equals the original $V - E + F$, since each transformation step has preserved this quantity. Therefore at the start of the process it was true that $V - E + F = 2$. This proves the theorem.

2 Bất biến và ứng dụng

Bây giờ ta sẽ đưa ra định nghĩa chặt chẽ cho một dạng bất biến mà ta sẽ sử dụng nhiều nhất trong các bài toán áp dụng, cũng như một số các khái niệm liên quan như quỹ đạo, bất biến toàn năng, hệ bất biến toàn năng.

Định nghĩa 1. *Cho Ω là một tập hợp các trạng thái. T là tập hợp các phép biến đổi từ Ω vào Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là bất biến trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu*

$$f(t(\omega)) = f(\omega),\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in T.$$

Như vậy, bất biến f có thể giúp chúng ta giải quyết trọn vẹn câu hỏi ÓBằng các phép biến đổi T, có thể đưa từ trạng thái ω_s về trạng thái ω_fÕ trong trường hợp mà $f(\omega_s) \neq f(\omega_f)$. Cụ thể câu trả lời sẽ là ÓkhôngÕ (như ở ví dụ 1). Tuy nhiên, nếu $f(\omega_s) = f(\omega_s)$ thì ta lại chưa có thể kết luận gì. Chính vấn đề này dẫn đến một khái niệm mới: bất biến toàn năng.

Định nghĩa 2. *Bất biến f đối với cặp (Ω, T) được gọi là bất biến toàn năng nếu:*

Trạng thái ω_f có thể đưa về từ trạng thái ω_s bằng các phép biến đổi T khi và chỉ khi $f(\omega_f) = f(\omega_s)$.

Bất biến toàn năng sẽ giúp chúng ta giải quyết trọn vẹn bài toán Óchuyển đượcÕ. Tuy nhiên, việc xây dựng một bất biến như vậy không đơn giản. Trong nhiều trường hợp, sẽ dễ dàng hơn khi chúng ta xét đến một hệ bất biến toàn năng.

Định nghĩa 3. *Hệ các bất biến $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ đối với cặp (Ω, T) được gọi là hệ bất biến toàn năng nếu: Trạng thái ω_f có thể đưa về từ trạng thái ω_s bằng các phép biến đổi T khi và chỉ khi $f_i(\omega_f) = f_i(\omega_s)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$.*

Một khái niệm quan trọng khác có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu các bất biến, đó là khái niệm quỹ đạo. Trên Ω, ta đưa ra quan hệ Óchuyển đượcÕ như sau: Ta nói trạng thái ω_s có thể chuyển được về trạng thái ω_f bằng các phép biến đổi T nếu tồn tại một dãy các phép biến đổi $t_1, t_2, \dots, t_m$ thuộc T sao cho

$$\omega_f = t_k(t_k - 1((t_1(\omega_s)\dots))$$

Khi đó ta viết $\omega_s \rightarrow_T \omega_f$.

Trong nhiều trường hợp, quan hệ $\rightarrow_T$ có tính phản xạ (ω_s có thể đưa về ω_s bằng cách Ă không làm gì cả), bắc cầu (thực hiện phép hợp các phép biến đổi) và đối xứng (nếu các phép biến đổi T là khả nghịch). Trong trường hợp đó $\rightarrow_T$ là một quan hệ tương đương và ta sẽ viết $\omega_s \equiv \rightarrow_T \omega_f$ thay vì $\omega_s \rightarrow_T \omega_f$. Với quan hệ tương đương này, Ω sẽ được chia thành các lớp tương đương, có đại diện là $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$, ký hiệu là $\Omega_i = \{\omega | \omega \equiv \rightarrow_T \omega_i\}$. Ta gọi Ω_i là các quỹ đạo sinh bởi ω_i. Dễ thấy hai quỹ đạo bất kỳ hoặc trùng nhau, hoặc không giao nhau.

Ví dụ 7. *Trên tập hợp các hàm số, cho phép thực hiện các phép toán sau:*

1) Nhân hai hàm số đã có với nhau,

2) Cộng hai hàm số đã có với nhau,

3) Nhân hàm số với một hằng số thực.

Các phép toán trên tiếp tục có thể được thực hiện với các hàm đã có và các hàm kết quả thu được. Chứng minh rằng từ hai hàm số $f_1(x) = x + 1/x$ và $f_2(x) = x^2$, bằng các phép toán trên không thể thu được hàm số $f(x) = x$.

số phức

Lời giải. Ta thấy $f_1(i) = 0$ và $f_2(i) = -1$. Qua các phép biến đổi trên, số thực luôn biến thành số thực do đó nếu f là một hàm kết quả thì $f(i)$ là số thực. Vì thế, hàm số $f(x) = x$ không thể là một hàm kết quả.

Ví dụ 8. *Hình tròn được chia thành n ô. Trên mỗi ô có một viên sỏi. Mỗi một bước đi cho phép chọn hai viên sỏi và chuyển sang ô bên cạnh, một viên chuyển theo chiều kim đồng hồ, một viên chuyển ngược chiều kim đồng hồ. Với những giá trị nào của n thì có thể chuyển tất cả các viên sỏi về một ô sau một số hữu hạn lần thực hiện.*

Ví dụ 9. *Cho bảng vuông 4×4. Trên mỗi ô vuông người ta ghi dấu + hoặc dấu -. Mỗi phép biến đổi cho phép chọn một hàng hoặc một cột và đổi dấu tất cả các dấu trên đó.*

1) Có thể biến một bảng gồm 9 dấu cộng, 7 dấu trừ về bảng có toàn dấu cộng được không?

2) Tập trạng thái có bao nhiêu phần tử? Có bao nhiêu quỹ đạo?

3) Hãy tìm một hệ bất biến toàn năng của bài toán này.

3 Đơn biến và ứng dụng

Đơn biến là đại lượng mà luôn tăng hoặc luôn giảm trong quá trình biến đổi. Sau đây là định nghĩa chặt chẽ của đơn biến.

Định nghĩa 4. *Cho Ω là một tập hợp các trạng thái. T là tập hợp các phép biến đổi từ Ω vào Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{N}$ được gọi là đơn biến trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu*

$$f(t(\omega)) < f(\omega),\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in T.$$

Chú ý là dấu bằng đôi khi có thể thay thế bằng dấu $>, \geqslant, \leqslant$. Ngoài ra, tập đích $\mathbb{N}$ cũng có thể được thay thế bằng một tập hợp có thứ tự tốt bất kỳ.

Đơn biến được sử dụng trong việc chứng minh một quá trình là dừng. Chúng ta minh hoạ ứng dụng này thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 10. *Cho hàm số $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

$i) f(0,0) = 5^{2005}$, $f(0,n) = 0$ *với mọi số nguyên* $n \neq 0$,

$ii) f(m,n) = f(m-1,n) - 2\left[\frac{f(m-1,n}{2}\right] + \left[\frac{f(m-1,n-1}{2}\right] + \left[\frac{f(m-1,n+1}{2}\right]$

với mọi số tự nhiên

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N sao cho

$$f(m,n) = f(m,n)\forall m, m \geqslant N,\ n \in\in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 11. *Cho $2n$ điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành n cặp sao cho các đoạn thẳng nối chúng không cắt nhau.*

Lời giải. Đầu tiên ta phân cặp các điểm một cách ngẫu nhiên và nối chúng lại với nhau. Gọi S là tổng các đoạn thẳng được nối (Chú ý rằng, do chúng ta có hữu hạn cách phân cặp nên tập giá trị của S là hữu hạn). Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O thì ta thay AB, CD bằng AC, BD. Vì

$$AB + CD = (AO + OB) + (CO + OD) = (AO + OC) + (BO + OD) > AC + BD$$

theo bất đẳng thức tam giác, nên nếu cặp đoạn thẳng nào đó giao nhau, ta có thể thay thế cách nối để S giảm xuống. Vì S chỉ có hữu hạn các giá trị nên một lúc nào đó quá trình phải dừng. Và khi đó, sẽ không có các cặp đoạn thẳng giao nhau.

4 Bài tập

1. Ở Vương quốc ÒSắc màu kỳ ảoÕ có 45 hiệp sĩ: 13 hiệp sĩ tóc đỏ, 15 hiệp sĩ tóc vàng, 17 hiệp sĩ tóc xanh. Khi hai hiệp sĩ có màu tóc khác nhau gặp nhau, tóc của họ sẽ lập

tức đổi sang màu thứ ba. Hỏi có thể có một lúc nào đó, tất cả các hiệp sĩ đều có màu tóc giống nhau?

2. Có 7 chiếc cốc đựng nước: chiếc cốc thứ nhất chứa 1/2 nước, chiếc cốc thứ hai chứa 1/3 nước, chiếc thứ ba chứa 1/4 nước, chiếc thứ tư chứa 1/5 nước, chiếc thứ năm chứa 1/8 nước, chiếc thứ sáu chứa 1/9 nước và chiếc thứ bảy chứa 1/10 nước. Cho phép đổ tất cả nước từ cốc này sang cốc khác hoặc đổ nước từ cốc này sanng cốc khác cho đến khi cốc chưa đầy. Có thể sau một số lần đổ nước, một chiếc cốc nào đó chứa

a) 1/12 nước b) 1/6 nước?

3. Có 1 bảng vuông $n \times n$. Trong $n-1$ ô của bảng có ghi các số 1, trong các ô còn lại ghi số 0. Cho phép thực hiện trên bảng phép biến đổi sau: chọn một ô, giảm số đang viết ở ô đó đi 1 đơn vị và tăng tất cả các số ở các ô cùng hàng, cùng cột với ô này lên một đơn vị. Hỏi có thể từ bảng ban đầu, sau một số phép biến đổi, thu được bảng gồm toàn các số bằng nhau?

4. Trên bảng có 4 số 3, 4, 5, 6. Mỗi một lần thực hiện cho phép xóa đi hai số x, y có trên bảng và thay bằng $x+y+\sqrt{x^2+y^2}, x+y-\sqrt{x^2+y^2}$. Hỏi sau 1 số hữu hạn bước thực hiện, trên bảng có thể xuất hiện 1 số nhỏ hơn 1 được không?

5. Trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người cùng thay phiên nhau bốc đi k viên kẹo, trong đó $k \in \{1, 2, 3\}$. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng? Cùng câu hỏi trên với $k \in \{1, 2, a\}$, là số nguyên dương cho trước.

6. Trên bảng có 1 số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu trên bảng ghi số 7^{1998}. Hỏi có thể sau một số số lần thực hiện như thế, thu được số 1998^7?

7. Số nguyên dương có 4 chữ số trên bảng có thể biến đổi thành một số có 4 chữ số khác theo quy tắc sau: hoặc cộng thêm 1 vào hai chữ số liên tiếp của nó, nếu hai chữ số này đều không bằng 9; hoặc trừ đi 1 từ hai chữ số liên tiếp của nó, nếu hai chữ số này đều không bằng 0. Hỏi bằng các phép biến đổi như vậy, có thể thu được số 2002 từ số 1234?

8. Hai người chơi trò chơi sau. Ban đầu có các số 1, 2, 3, 4. Mỗi một lần thực hiện, người thứ nhất cộng vào hai số cạnh nhau nào đó 1 đơn vị, còn người thứ hai đổi chỗ hai số cạnh nhau nào đó. Người thứ nhất thắng nếu sau một nước đi nào đó tất cả các số bằng nhau. Hỏi người thứ hai có thể cản trở người thứ nhất chiến thắng?

Tài liệu tham khảo

1. Tolpygo, *Bất biến, Kvant*, 12/1976

2. N.Agakhanov, *Olympic Toán toàn nước Nga*, Nhà xuất bản MCCME, 2007 (tiếng Nga).

3. A.Schen, *Trò chơi và chiến thuật dưới quan điểm toán học*, Nhà xuất bản MCCME, 2007.

4. Kin Y.Li, Mathematical Games (I), *Mathematical Excalibur, July-October* 2002.

Một số vấn đề của Toán rời rạc

Nguyễn Văn Tiến

Đặt vấn đề

Trong chuyên đề này ta sẽ xét các bài toán mà đối tượng nghiên cứu là các đại lượng rời rạc. Trong cuộc sống ta có thể hiểu các hiện tượng rời rạc là những hiện tượng mà giữa các thời điểm xuất hiện cần có một khoảng thời gian nào đó. Trong toán học ta có thể định nghĩa các đại lượng rời rạc như sau:

Định nghĩa 1. *Phần tử $x \in A$ được gọi là phần tử rời rạc của tập A nếu*

$$\exists \epsilon > 0, \textit{đủ bé, sao cho } V(x;\epsilon) \cup A = \{x\}$$

trong đó ta ký hiệu $V(x;\epsilon) := (x-\epsilon; x+\epsilon)$ và gọi là $\epsilon-$ lân cậncủa điểm x.

Định nghĩa 2. *Tập A được gọi là tập rời rạc nếu nó chỉ gồm các phần tử rời rạc. Các phần tử của tập rời rạc cũng được gọi là các phần tử rời rạc nhau.*

Chẳng hạn các tập: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\overline{0..9} := \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, ... là những tập rời rạc.

Toán rời rạc nghiên cứu các tập rời rạc cũng như các phần tử của tập rời rạc.Vì các khái niệm của Giải tích như giới hạn, đạo hàm, nguyên hàm, tích phân cũng như các hàm số sơ cấp được học trong chương trình phổ thông chỉ được áp dụng cho các hàm số liên tục nên trong Toán rời rạc không thể áp dụng các phương pháp và kiến thức của giải tích (Trừ một số trường hợp đặc biệt.)

Toán học nghiên cứu và mô hình hoá thế giới thông qua các quan trắc. Các kết quả quan trắc thu được trong những thời điểm rời rạc nhau. Bởi vậy có thể nói Toán học chủ yếu là dựa trên cơ sở rời rạc. Tính liên tục của các sự kiện, hiện tượng xảy ra trong thế giới thực chất là một sự giả định, tiên đề, in - Prior của các nhà toán học mà không thể nào kiểm định được tính đúng - sai. Điều này cũng giống như ánh sánglà lưỡng tính: có cả tính chất sóng và tính chất hạt. Bởi vậy, trong những năm gần đây, nhất là khi Tin học có những thành tựu đáng kể và thời gian tính toán được cải thiện nhiều thì Toán rời rạc càng được quan tâm nhiều hơn.

Trong những năm cuối của thế kỷ XX, ở Mỹ cũng như nhiều nước Tây Âu đã đưa Toán rời rạc vào giáo trình giảng dạy trong nhà trường phổ thông của mình. Tuy nhiên, ở Việt Nam hiện nay, tuy các bài tập Toán rời rạc cũng thường được thấy trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp nhưng Toán rời rạc vẫn là một điểm yếu trong giảng dạy và học tập không những trong các trường phổ thông mà ngay cả ở các trường đại học. Không những đối với học sinh mà ngay cả đối với các thày cô giáo.

Hy vọng tài liệu này phần nào khắc phục được hiện tượng trên.

1 Phương pháp phản chứng

1.1 Tiểu dẫn

Phương pháp phản chứng có lẽ là một trong những phương pháp chứng minh sớm nhất mà loài người đã biết đến, đặc biệt trong nghệ thuật diễn thuyết và tranh luận. Trong Toán học, phương pháp phản chứng (FC hay là CM: Contra-Method) cũng là một phương pháp rất thường được sử dụng, đặc biệt khi cần chứng minh tính duy nhất của một đối tượng T nào đó thoả mãn điều kiện (*) cho trước(mà sự tồn tại của T đã được chứng minh trước đó) ta thường giả sử còn $\forall\, T' \neq T$, T' cũng thoả mãn điều kiện (*), từ đó suy ra một điều vô lý. Vậy điều giả sử của chúng ta là sai, tức là T duy nhất.

Các ví dụ minh hoạ xin xem thêm trong chứng minh các định lý hình học, SGK HH11).

1.2 Cơ sở lý thuyết

Cơ sở lý thuyết của phương pháp FC là các định luật trong Logic: Gọi p ; q ; r là các mệnh đề toán học nào đó thì:

Định lí 1 (*Các định luật cơ bản*). *1. (Phi mâu thuẫn):* $p \,\&\, \overline{p} \equiv F$
2. (Bài trung): p *hoặc* $\overline{p} \equiv T$

Định lí 2 (*Các định luật phản chứng*). *1. (Phản chứng):* $\models \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.
2. (Phản chứng suy rộng):

$$\models \quad (\begin{cases} p \\ q \end{cases} \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\begin{cases} p \\ \overline{r} \end{cases} \Rightarrow \overline{q}) \quad (\alpha)$$

3. $\models (p \Rightarrow q \,\&\, \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$.
4. $\models (\overline{q} \Rightarrow F) \Rightarrow q$.

Các định luật trên có thể được chứng minh chẳng hạn bằng phương pháp lập bảng giá trị chân lý hoặc phương pháp biến đổi tương đương.

Chẳng hạn, ta có thể chứng minh (α) như sau:

$$\begin{aligned}
(p \,\&\, q \Rightarrow r) &\Leftrightarrow \overline{p \,\&\, q} \text{ hoặc } r \quad (\text{do } a \Rightarrow b \Leftrightarrow \overline{a} \text{ hoặc } b) \\
&\Leftrightarrow \overline{p} \text{ hoặc } \overline{q} \text{ hoặc } r \quad (\text{do } \overline{a \,\&\, b} \Leftrightarrow \overline{a} \text{ hoặc } \overline{b}) \\
&\Leftrightarrow (\overline{p} \text{ hoặc } \overline{\overline{r}}) \text{ hoặc } \overline{q} \quad (\text{giao hoán, kết hợp và } \overline{\overline{r}} \Leftrightarrow r) \\
&\Leftrightarrow \overline{p \& \overline{r}} \text{ hoặc } \overline{q} \\
&\Leftrightarrow (p \,\&\, \overline{r} \Rightarrow \overline{q}) \ (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

1.3 Nội dung phương pháp phản chứng

Để chứng minh khẳng định: $p \Rightarrow q \quad (\alpha)$ bằng phương pháp phản chứng ta giả sử q sai (tức là $\overline{q}$ là mệnh đề đúng). Nếu từ đó thu được một điều vô lý (vl) thì điều đó chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là q đúng ⊠ .

Điều vô lý vl có thể thuộc một trong các dạng sau:

+) Điều trái với giả thiết p $(vl \equiv \overline{p})$.

+) Điều trái với một trong những kiến thức đã biết $(vl \equiv F)$.

+) Điều trái với giả sử phản chứng $(vl \equiv \overline{\overline{q}})$.

Khi xây dựng mệnh đề phản chứng $(\overline{q})$ ta cần nhớ:

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$.
2. $\overline{p \,\&\, q} \Leftrightarrow \overline{p}$ hoặc $\overline{q}$.
3. $\overline{p \text{ hoặc } q} \Leftrightarrow \overline{p} \,\&\, \overline{q}$.
4. $\overline{\forall x,\, p(x)} \Leftrightarrow \exists\, x,\, \overline{p(x)}$.
5. $\overline{\exists x,\, p(x)} \Leftrightarrow \forall\, x,\, \overline{p(x)}$.
6. $\forall x,\, p(x) \Leftrightarrow \overline{\exists}\, x,\, \overline{p(x)}$.
7. $\exists x,\, p(x) \Leftrightarrow \overline{\forall}\, x,\, \overline{p(x)}$.
8. Nếu $p(x) := f(x) \Re g(x)$ $\quad(\alpha)$ thì $\overline{p(x)}$ là: $f(x)\overline{\Re} g(x)$ trong đó, $\Re$ và $\overline{\Re}$ được xác định như sau:

Nếu	$\Re$:	$=$	$\neq$	$>$	$\geqslant$	$<$	$\leq$
thì	$\overline{\Re}$:	$\neq$	$=$	$\leq$	$<$	$\geqslant$	$>$

Ngoài ra còn có:

Định lí 3 (*Định luật về âm bản*). *Cho A là một công thức Logic mà trong đó chỉ chứa các phép toán: Phủ định ; $\&$; hoặc đối với các mệnh đề: $p_1; p_2; \cdots ; p_n$. Âm bản của A, ký hiệu là A_d là một công thức thu được từ A bằng cách thay: $p_j \sim \overline{p_j}$; $\overline{p_j} \sim p_j$; hoặc $\sim$ $\&$; $\&$ $\sim$ hoặc . Khi đó:*

$$\models \overline{A} \Leftrightarrow A_d$$

1.4 Trình bày lời giải của phương pháp phản chứng

Bài toán: Chứng minh $p \Rightarrow q$.

Lời giải . Giả sử ngược lại, q sai, tức là $\overline{q}$.

Mà $\overline{q} \Rightarrow \cdots \Rightarrow vl$.

Vậy giả sử của ta là sai, tức là q đúng. ⊠

2 Thí dụ minh hoạ

Ví dụ 1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$. Giả sử $|a| + |b| + |c| > 17$ $(*)$. Chứng minh rằng:

$$\exists x \in [0;1],\ |f(x)| > 1 \quad (1)$$

Lời giải . (phản chứng), Giả sử (1) sai, tức là:

$$\forall x \in [0;1],\ |f(x)| \leqslant 1 \quad (\bar{1})$$

Chọn $x = 0; \frac{1}{2}; 1$, từ $(\bar{1})$ ta được: $|c| \leqslant 1$ và:

$$\begin{cases} |a+b+c| \leqslant 1 \\ |\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow |a| + |b| + |c| \leqslant 17$$

Đó là điều vô lý (trái với (*)). Vậy điều giả sử của ta là sai, tức là (1) đúng.⊠
Ví dụ 2. Chứng minh rằng tập các số nguyên tố P là tập vô hạn.
Lời giải . (phản chứng) Giả sử ngược lại, tập P là hữu hạn. Giả sử $P = \{p_1; p_2; \cdots; p_n\}$. Khi đó, tồn tại số nguyên tố lớn nhất. Gọi đó là p_n. Tức là:

$$p_n \in P \ \&\ \forall p \in P,\ p \leqslant p_n.$$

Xét số $x = p_1.p_2.\cdots.p_n + 1$. Ta có, $x \in \mathbb{N}$; x không chia hết cho các số $p_1; p_2; \cdots; p_n$ (vì nếu $x \vdots p_j$ nào đó thì $1 \vdots p_j$: vô lý). Vậy $p \in P$. Mà hiển nhiên, $x > p_n$. Đó là điều vô lý (trái với cách chọn p_n). Vậy điều giả sử của ta là sai, tức là P hữu hạn.⊠
Ví dụ 3. Có thể chia các số tự nhiên từ 1 đến 21 thành các nhóm đôi một rời nhau sao cho trong mỗi nhóm số lớn nhất bằng tổng của các số còn lại hay không?.
Lời giải . Giả sử chia được. Khi đó tổng các số ở mỗi nhóm là một số chẵn (bằng hai lần số lớn nhất). Vậy tổng của tất cả 21 số đã cho là số chẵn (vì các nhóm đôi một rời nhau và tổng của các số chẵn là số chẵn). Nhưng tổng của 21 số đó là 21.11=231 là số lẻ. Điều vô lý đó chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là không chia được thành các nhóm thoả mãn yêu cầu bài ra.⊠
Ví dụ 4. Có thể tìm được hay không 5 số nguyên sao cho các tổng của hai số một trong 5 số đó lập thành 10 số nguyên liên tiếp?.
Lời giải . Giả sử tìm được 5 số như vậy, gọi s là tổng của 5 số đó và n là giá trị nhỏ nhất của tổng các cặp hai số. Khi đó 10 số nguyên liên tiếp nói trong đề bài là $n,\ n+1,\ \cdots,\ n+9$. Ta tính tổng $\mathcal{T}$ của 10 số đó theo hai cách khác nhau: Một mặt, $\mathcal{T} = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+9) = 5(2n+9)$. Mặt khác , $\mathcal{T} = 4s$ (do trong $\mathcal{T}$ mỗi số đã cho có mặt đúng 4 lần). Từ đó suy ra $4s = 5(2n+9)$ là điều vô lý. Vậy giả sử ban đầu là sai, tức là không thể chọn được 5 số thoả mãn yêu cầu bài ra.
Ví dụ 5. Cho ba điểm $A,\ B,\ C$ phân biệt trên mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu tồn tại điểm G thuộc mặt phẳng đó thoả mãn

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

thì điểm G đó là duy nhất.

Ví dụ 6. (Mở rộng của ví dụ 5) Trên mặt phẳng cho n điểm phân biệt $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ và n số thực $m_1,\ m_2,\ \cdots m_n$ thoả mãn $m_1+m_2+\cdots+m_n := m \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm T thoả mãn:

$$m_1\overrightarrow{TA_1}+m_2\overrightarrow{TA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{TA_n}=\overrightarrow{0}.$$

Ví dụ 7. (IMO 1982) Cho phương trình $x^3-3xy^2+y^3=n \quad (1),\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

1) Chứng minh rằng nếu (1) có nghiệm nguyên thì nó không có nghiệm nguyên duy nhất.

2) Tìm nghiệm nguyên của (1) khi $n=2005$.

Lời giải .

1) Dễ dàng biến đổi:

$$x^3-3xy^2+y^3=(y-x)^3-3(y-x)x^2+(-x)^3=(-y)^3-3(-y)(x-y)^2+(x-y)^3.$$

Từ đó ta có: nếu $(x;y)$ là một nghiệm của (1) thì $(y-x;-x)$, $(-y;x-y)$ cũng là các nghiệm của (1). Ba nghiệm này đôi một khác nhau vì nếu có hai nghiệm nào đó bằng nhau thì ta có $x=y=0$ là điều vô lý do $n>0$.

Vậy nếu (1) có nghiệm thì nó có ít nhất ba nghiệm phân biệt, tức là (1) không thẻ có nghiệm duy nhất.⊠

2) Với $n=2005$ giả sử (1) có nghiệm $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$. Ta viết các nghiệm theo mod 3, phương trình đã cho trở thành

$$x^3+y^3=-1 \pmod 3 \Rightarrow x+y=-1 \pmod 3.$$

Do vậy ta có các trường hợp sau:

(i) $x\equiv 0 \pmod 3$ và $y\equiv -1 \pmod 3$;

(ii) $x\equiv 1 \pmod 3$ và $y\equiv 1 \pmod 3$;

(iii) $x\equiv -1 \pmod 3$ và $y\equiv 0 \pmod 3$.

Trong trường hợp (i) đặt $x=3m,\ y=3n-1$, thay vào phương trình đã cho ta được $VT\equiv -1 \pmod 9$ còn $VP=2005\equiv -2 \pmod 9 \Rightarrow$ vô lý.

Trong trường hợp (ii), do $(y-x;-x)$ cũng là nghiệm, mà $y-x\equiv 0 \pmod 3$ và $-x\equiv -1 \pmod 3$ nên ta cũng thu được một điều vô lý. Tương tự, từ trường hợp (iii) ta cũng thu được điều vô lý.

Vậy với $n=2005$ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 8. (Từ IMO 83) Tìm tất cả những hàm số $f(x):\ \mathbb{R}^+\longmapsto\mathbb{R}^+$, là toàn ánh và thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) $f(xf(y))=yf(x),\ \forall\, x,\ y\in\mathbb{R}^+$.

2) $f(x)\to 0$ khi $x\to+\infty$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thoả mãn yêu cầu bài ra.

Do $f(x)$ là toàn ánh và $1\in\mathbb{R}^+$ nên $\exists\ y_0\in\mathbb{R}^+:\ f(y_0)=1$. Trong 1) cho $x=1,\ y=y_0$ được

$$f(1)=f(1.1)f(1.f(y_0))=y_0f(1)\Rightarrow y_0=1 \ \text{(do } f(1)>0) \Rightarrow y_0=1\Rightarrow f(1)=1.$$

Vậy $f(x)$ có một điểm bất động là $x = 1$. Ta sẽ chứng minh đó là điểm bất động duy nhất. Thật vậy, giả sử $f(x)$ có hai điểm bất động x, y phân biệt, khi đó ta có:

(i) $f(xy) = f(xf(y)) = yf(x) = yx = xy \Rightarrow xy$ cũng là điểm bất động của $f(x)$.

(ii) $1 = f(1) = f(\frac{1}{x}f(x)) = xf(\frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động của $f(x)$.

Giả sử $f(x)$ còn có điểm bất động $x \neq 1$, khi đó, theo (ii) $f(x)$ còn có điểm bất động $\frac{1}{x}$. Trong hai số đó phải có một số > 1. Giả sử $x > 1$. Theo (i) $f(x)$ sẽ có vô số điểm bất động $x_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có dãy đối số $(x_n) \to +\infty$ (do $x > 1$), do đó dãy hàm $(f(x_n)) = (x_n) \to +\infty$. Điều đó trái với 2): $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Vậy giả sử của ta là sai, tức là $f(x)$ có duy nhất một điểm bất động là $x = 1$.

Nhưng trong (i) cho $y = x$ ta được $f(xf(x)) = xf(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xf(x)$ cũng là điểm bất động của $f(x)$. Vậy ta phải có

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ : \; xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$$

Dễ thấy hàm số này thoả mãn các điều kiện của bài ra. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm số cần tìm.

Ví dụ 9. (Từ IMO 83) Cho các số $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}^*$, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng phương trình

$$xbc + yca + zab = 2abc - ab - bc - ca \quad (1)$$

không có nghiệm tự nhiên.

Lời giải . Giả sử (1) có nghiệm $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$.

Từ (1) ta có $(z+1)ab \,\vdots\, c$. Mà $(a, c) = (b, c) = 1 \Rightarrow z + 1 \,\vdots\, c$, mà $z + 1 > 0$ nên từ đó có $z + 1 \geqslant c$.

Tương tự, có $x + 1 \geqslant a$, $y + 1 \geqslant b$. Từ các đánh giá này ta được

$$VT(1) \geqslant (a-1)bc+(b-1)ca+(c-1)ab = 3abc-ab-bc-ca > 2abc-ab-bc-ca = VP(1)$$

Điều vô lý này chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là phương trình (1) không có nghiệm tự nhiên. ⊠

Ví dụ 10. (Putnam 1998) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số

$$f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$$

không phải là số chính phương.

Lời giải . Ta cần chứng minh mệnh đề sau:

$$\forall\, (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \text{ không phải là số chính phương.} \quad (p)$$

Nhận xét rằng mọi số chính phương đều $\equiv 0 \pmod 4$ hoặc $\equiv 1 \pmod 4$.

Giả sử (p) là mệnh đề sai, tức là:

$$\exists\, (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \text{ là số chính phương.} \quad (\overline{p})$$

Đặc biệt, từ đó có:

$$\begin{cases} f(1) &= a+b+c+1 \quad \text{là số chính phương}(i) \\ f(2) &= 4a+2b+c+8 \quad \text{là số chính phương}(ii) \\ f(3) &= 9a+3b+c+27 \quad \text{là số chính phương}(iii) \\ f(4) &= 16a+4b+c+64 \quad \text{là số chính phương}(iv) \end{cases}$$

Từ (i) và (iv) ta có $f(4) - f(2) = 2b \pmod 4$.
Mà $2b$ là số chẵn, còn theo nhận xét thì:
$f(4) - f(2)$ chỉ có thể $\equiv 0,\ 1,\ -1 \pmod 4 \Rightarrow 2b \equiv 0 \pmod 4$.
Từ (ii) và (iii) ta có $f(3) - f(1) \equiv (2b+2) \pmod 4$.
Tương tự trên ta cũng có $2b + 2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod 4$ là điều vô lý. Vậy giả sử của ta là sai, tức là (p) là mệnh đề đúng.⊠

3 Phương pháp cực hạn.

3.1 Tiểu dẫn

Một trong những lời khuyên đối với người làm Toán là:

"Hãy xét các trường hợp đặc biệt"

Khái niệm trường hợp đặc biệt có thể hiểu theo nhiều góc độ:

1. Đối với một đa giác, các điểm đặc biệt là những điểm thuộc cạnh (điểm biên), các đỉnh (điểm cực biên) hoặc các điểm mà tại đó có một đặc trưng nào đó của hình đạt giá trị đặc biệt ($= 0$; $=\infty$; không xác định ; đạt Min ; đạt Max ;v.v...), thí dụ điểm trọng tâm của hình.

2. Đối với một tập hợp sắp thứ tự, các điểm đặc biệt là những phần tử lớn nhất hoặc phần tử nhỏ nhất của tập hợp.

3. Trên trục số có ba điểm đặc biệt là 0 ; $+\infty$; $-\infty$.

4. Đối với một bài toán có điều kiện, các trường hợp đặc biệt xảy ra khi các biến có mặt bằng nhau hoặc xảy ra dấu bằng trong các đánh giá của điều kiện.

5. Đối với một hàm số, các điểm đặc biệt là những điểm mà tại đó hàm số không xác định, hoặc $= 0$, hoặc đạt cực trị, v.v...

6. Đối với một đường cong, đó là các điểm gián đoạn, điểm cực trị, điểm uốn, điểm biên, điểm tự cắt, v.v...

7. Khi tìm quỹ tích, tập hợp điểm ta thường xét các vị trí đặc biệt của điểm chạy, từ đó tìm ra các vị trí tương ứng của điểm thuộc quỹ tích và dự đoán quỹ tích.

8. Trong Tâm thần học, Kinh tế học có một có một biện pháp chữa trị được gọi là "Liệu pháp sốc", đó chính là phương pháp đưa hệ thống đang xét về trạng thái khủng hoảng (đặc biệt) có kiểm soát.

Các điểm, trường hợp đặc biệt nói trên được gọi chung là các điểm cực hạn.

Tóm lại, điểm cực hạn là điểm mà tại đó một đặc trưng nào đó của đối tượng đang xét đạt khủng hoảng, hay là có thay đổi về chất. Tuỳ theo trường hợp mà điểm cực hạn có các tên gọi khác nhau. Chẳng hạn: "Điểm chuyển pha" trong Vật lý, "Điểm kỳ dị" trong lý thuyết hàm phức, "Điểm tới hạn" khi xét sự biến thiên của hàm số, "Điểm gián đoạn" khi xét tính liên tục của hàm số, "Hố đen" trong Thiên văn học (nhân tiện nói thêm là mới đây, tác giả của khái niệm "Hố đen", nhà Vật lý kiệt xuất người Anh là Hawkins đã phủ định khái niệm này) v.v....

Các điểm cực hạn của một hệ thống có một vai trò quan trọng trong việc khảo sát hệ thống đó, bởi vậy trong những thập kỷ cuối của thế kỷ XX đã xuất hiện một lý thuyết gọi là lý thuyết khủng hoảng hoặc lý thuyết về các điểm kỳ dị.

3.2 Cơ sở lý thuyết

Ta sẽ chỉ xét một số trường hợp đặc biệt, riêng của điểm cực hạn. Muốn vậy, trước hết phải chỉ ra sự tồn tại của nó.

Định lí 4. *(Về sự tồn tại điểm cực hạn của tập hợp)*
Trong tập gồm hữu hạn phần tử là các số luôn tồn tại phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

Định lý trên là trường hợp đặc biệt của

Định lí 5. *Xét tập $\mathcal{A}$ gồm hữu hạn phần tử. Mỗi phần tử $x \in \mathcal{A}$ được đặt tương ứng với một trạng thái $f(x)$ nào đó của nó. Khi đó, nếu mỗi trạng thái $f(x)$ có một đặc trưng $P(f(x))$ và tập các đặc trưng: $\{P(f(x)) \mid x \in \mathcal{A}\}$ có thể sắp thứ tự thì tồn tại*

$$\underset{x\in}{Min} P(f(x)) \quad \text{và} \quad \underset{x\in}{Max} P(f(x))$$

Hệ quả 1: Nếu vai trò của các chỉ số trong tập gồm n số: $x_1; x_2; \cdots ; x_n$ là như nhau thì luôn có thể giả sử:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

Một trong những ứng dụng của điểm cực hạn là nguyên lý nổi tiếng của Pontriagin:

Nếu $\exists \underset{x\in}{Min} f(x)$; $\underset{x\in}{Max} f(x)$ thì các giá trị Min ; Max đó thường đạt tại những điểm cực hạn của $\mathcal{A}$

3.3 Nội dung phương pháp

Khi khảo sát một tính chất nào đó của các phần tử của tập $\mathcal{A}$ ta có thể xét tính chất đó tại điểm cực hạn $x \in \mathcal{A}$. Do x là điểm cực hạn nên ta có thêm những thông tin (điều kiện) phụ đối với x. Từ các kết quả của việc khảo sát tại những điểm cực hạn ta có thể dự đoán kết quả chung cho các phần tử $\in \mathcal{A}$.

3.4 Thí dụ minh hoạ

Ví dụ 1. (ĐN-IMO 1983) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0 \quad (1)$$

Lời giải . Giả sử $a = max\{a;b;c\} \Rightarrow a-b\geqslant 0$; $a-c\geqslant 0$. Ta có:

$$VT(1) \stackrel{?}{=} a(b+c-a)(b-c)^2+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geqslant 0 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2. (ĐS: 150; VĐCHLBĐức) Cho $a,b,c\in[0;1]$. Tìm Max của:

$$F=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải . Giả sử $a = max\{a;b;c\}$. Khi đó:

$$\frac{b}{a+c+1}\leqslant\frac{b}{b+c+1}\,;\ \frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{c}{b+c+1}\quad(\alpha)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, có

$$(1-b)(1-c)(1+b+c)\leqslant\left(\frac{1-b+1-c+1+b+c}{3}\right)^3=1$$

$$\Rightarrow (1-b)(1-c)\leqslant\frac{1}{b+c+1}\quad(\text{do } 1+b+c>0)$$

Từ đó có:

$$(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\frac{1-a}{b+c+1}\quad(\beta)\quad(\text{do } 1-a\geqslant 0)$$

Từ (α) ; (β) có:

$$\begin{aligned}F&\leqslant\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{b+c+1}+\frac{1-a}{b+c+1}\\&=\frac{a+b+c+1-a}{b+c+1}\\&=1\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $a=b=c=0\in[0;1]$. Vậy $Max\,F=1$.⊠

Ví dụ 3. Chứng minh rằng bốn hình tròn có các đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín miền tứ giác đó.

Lời giải . Gọi M là một điểm bất kỳ nằm trong miền tứ giác $ABCD$. Ta có:

$$\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360^o\quad(\text{tính chất tứ giác lồi})$$

Do đó, góc lớn nhất trong bốn góc này sẽ $\geqslant 90^o$. Giả sử $\widehat{BMC} \geqslant 90^o$. Khi đó, M nằm trong hình tròn đường kính BC. Từ đó có ⊠ .

Ví dụ 4. Trên đường thẳng cho tập $\mathbf{X}$ gồm các điểm sao cho mỗi điểm $M \in \mathbf{X}$ là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $\in \mathbf{X}$. Chứng minh rằng tập $\mathbf{X}$ là vô hạn.

Lời giải . Giả sử tập $\mathbf{X}$ là hữu hạn, khi đó tồn tại điểm B là biên của $\mathbf{X}$, nhưng B khi đó không thể là trung điểm của hai điểm $\in \mathbf{X}$, vậy giả sử sai, tức là tập $\mathbf{X}$ là vô hạn. ⊠

Ví dụ 5. Trên mặt phẳng cho tập $\mathbf{X}$ gồm các điểm sao cho mỗi điểm $M \in \mathbf{X}$ là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $\in \mathbf{X}$. Chứng minh rằng tập $\mathbf{X}$ là vô hạn.

Ví dụ 6. Tại mỗi ô của một bảng ô vuông vô hạn viết một số sao cho mỗi số được viết bằng trung bình cộng của bốn số kề với nó. Chứng minh rằng tất cả các số được viết đều bằng nhau.

Ví dụ 7. Trên một bàn cờ quốc tế cỡ $n \times n$ đặt các quân xe thoả mãn điều kiện sau: nếu có một ô nào đó không có quân xe thì tổng số các quân xe đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng trên bàn cờ có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ quân xe.

Lời giải . Tồn tại một đường (hàng hoặc cột, giả sử là hàng) có số quân xe nhỏ nhất (giả sử là k quân xe). Nếu $k \geqslant \frac{n}{2}$ thì tổng số các quân xe S thoả mãn $S \geqslant n.\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$.

Nếu $k < \frac{n}{2}$ thì trên đường đang xét còn $n-k$ ô trống. Trong mỗi cột của $n-k$ cột đi qua những ô trống đó có $\geqslant n-k$ quân xe và tổng số các quân xe như vậy là $\geqslant (n-k)^2$. Trong k cột còn lại có $\geqslant k^2$ quân xe. Mặt khác, dễ thấy:

$$[(n-k)^2 + k^2] - \frac{n^2}{2} = 2(\frac{n}{2} - k)^2 \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra ⊠ .

Ví dụ 8. Một nước có 80 sân bay mà khoảng cách giữa các cặp sân bay bất kỳ đều khác nhau và không có ba sân bay nào thẳng hàng. Cùng một thời điểm từ mỗi sân bay có một chiếc sân bay cất cánh và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

Lời giải . Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì MN là cạnh lớn nhất trong tam giác OMN vì vậy $\angle MON$ là góc lớn nhất trong tam giác OMN và do đó $\angle MON > 60^o$. Giả sử O là sân bay có số máy bay bay đến là nhiều nhất ($= n$) và các máy bay đó bay đến từ các sân bay $M_1, M_2, \cdots, M_n$. (Tên của các sân bay được đặt sao cho các tia $[OM_i)$ và $[OM_{i+1})$ là kề nhau và được xếp ngược chiều kim đồng hồ, $M_{n+1} := M_1$.). Do không có ba sân bay nào thẳng hàng nên ta sẽ được n góc $\angle M_iOM_{i+1}$ có tổng bằng 360^0. Góc nhỏ nhất trong số các góc đó phải $\leqslant \frac{360^o}{n}$. Nhưng theo trên, góc đó phải $> 60^o$. Từ đó ta có:

$$\frac{360^o}{n} > 60^o \Rightarrow n < 6 \Rightarrow n \leqslant 5. \text{ ⊠ }.$$

Từ chứng minh trên ta thấy điều kiện không có ba sân bay nào thẳng hàng có thể bỏ qua.

Ví dụ 9. Một quốc gia có 2005 thành phố. Giữa hai thành phố bất kỳ đều có đường nối với nhau. Độ dài của các con đường đó đôi một khác nhau. Từ một thành phố A nào đó ta đi đến thành phố B khác theo con đường ngắn nhất. Từ B ta lại đi đến thành phố C khác theo con đường ngắn nhất khác với con đường vừa đi. Cứ như vậy cho đến khi không thể đi tiếp theo quy tắc đó nữa. Hỏi trên đường đi có thành phố nào được đi qua hai lần hay không?

Lời giải . Biểu diễn các thành phố bởi các điểm A_j, ($j \in \overline{1..2005}$ trên mặt phẳng. Giả sử ta xuất phát từ điểm A_1 và đi đến điểm A_2. Khi đó A_1A_2 là đoạn ngắn nhất trong các đoạn A_1A_j và A_2 là duy nhất. Xét các đoạn A_2A_j và tìm đoạn ngắn nhất trong số các đoạn đó. Có thể xảy ra hai khả năng:

Khả năng 1: $\underset{j\in\overline{1..2005},j\neq 2}{\underline{\text{Min}}} A_2A_j = A_2A_1$. Khi đó đường đi kết thúc tại A_2 và không có thành phố nào được đi qua hai lần.

Khả năng 2: $\underset{j\in\overline{1..2005},j\neq 2}{\underline{\text{Min}}} A_2A_j = A_2A_3$. Khi đó A_3 là duy nhất và $A_2A_3 < A_2A_1$. Ta đi tiếp đến điểm A_3. Đối với điểm A_3 ta cũng làm như vậy. Giả sử đường đi kết thúc tại điểm A_n thì theo lập luận trên, mỗi điểm A_k, ($k \in \overline{1..n}$) được chọn một cách duy nhất và

$$A_1A_2 > A_2A_3 > \cdots > A_iA_{i+1} > \cdots > A_{n-1}A_n.$$

Giả sử trên đường đi ta đi qua điểm A_i hai lần, thế thì đường đi trên chứa một đường gấp khúc khép kín:

$$A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_mA_i.$$

Theo nhận xét trên ta có:

$$A_iA_{i+1} > A_{i+1}A_{i+2} > \cdots > A_{m-1}A_m > A_mA_i \Rightarrow A_iA_{i+1} > A_iA_m.$$

Đó là điều vô lý (trái với cách chọn điểm A_{i+1} là điểm duy nhất có khoảng cách ngắn nhất tới A_i.

Vậy trên đường đi không có thành phố nào được đi qua hai lần.

4 Nguyên lý Dirichlet.

4.1 Tiểu dẫn

Phương pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet là phương pháp mà học sinh được làm quen sớm nhất (từ tiểu học) và là một trong những phương pháp thể hiện rõ cái đẹp của Toán học, làm cho học sinh thêm yêu thích môn toán. Lập luận của phương pháp Dirichlet thường được sử dụng trong các bài toán cho học sinh giỏi và dùng để chứng minh sự tồn tại một khả năng nào đó mà không cần chỉ rõ khả năng đó tồn tại khi nào, ở đâu và có bao nhiêu khả năng như vậy tồn tại. Phương pháp chứng minh như vậy còn được gọi là phương pháp chứng minh không kiến thiết.

4.2 Cơ sở lý thuyết

Định lí 6. **(Nguyên lý Dirichlet. Peter Gustav Lejeune Dirichlet là nhà toán học người Đức, 1805-1059)**

Có n phần tử được xếp hết vào m tập hợp. Khi đó, tồn tại (có ít nhất một) tập hợp chứa không ít hơn ($\geqslant$) $\frac{n}{m}$ phần tử. Hay là:

$$\models \mathcal{A} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j \Rightarrow \exists \mathcal{A}_k,\ k \in \overline{1;m},\ |\mathcal{A}_k| \geqslant \frac{|\mathcal{A}|}{m}$$

Vì số phần tử của một tập hợp $\mathbf{X}$, ký hiệu là $|\mathbf{X}|$, phải là số tự nhiên nên ta hiểu khái niệm: $|\mathbf{X}| \geqslant \frac{n}{m}$ như sau:

+) Nếu $\frac{n}{m} = k \in \mathbb{N}$ $\quad (n \vdots m)$ thì:

$$|\mathbf{X}| \geqslant \frac{n}{m} \Leftrightarrow |\mathbf{X}| \geqslant k\ (= \frac{n}{m})$$

+) Nếu $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$ $\quad$ (n không $\vdots$ m) thì:

$$|\mathbf{X}| \geqslant \frac{n}{m} \Leftrightarrow |\mathbf{X}| \geqslant \left[\frac{|\mathcal{A}|}{m}\right] + 1$$

(ta ký hiệu $[x] :=$ phần nguyên của số $x \in \mathbb{R}$).

Để dễ nhớ, nguyên lý trên còn được phát biểu như sau:

Có n con thỏ được nhốt hết vào m cái lồng. Khi đó, tồn tại (có ít nhất một) lồng chứa không ít hơn ($\geqslant$)$\frac{n}{m}$ con thỏ.

Đặc biệt, nếu số thỏ nhiều hơn số lồng ($n > m$) thì tồn tại lồng chứa ít nhất hai con thỏ.

Thường ta chỉ xét trường hợp $n \geqslant m$.

Lời giải . (phản chứng) Giả sử ngược lại, tức là: $\forall \mathcal{A}_j,\ j \in \overline{1;m},\ |\mathcal{A}_j| < \frac{|\mathcal{A}|}{m}$ $\quad (i)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= |\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j| \\ &= \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{A}_j| \\ &< \sum_{j=1}^{m} \frac{|\mathcal{A}|}{m} \qquad \text{(theo } (i)) \\ &= m.\frac{|\mathcal{A}|}{m} = |\mathcal{A}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\mathcal{A}| < |\mathcal{A}| \quad \text{là điều vô lý.}$$

Vậy giả sử của ta là sai, tức là: $\exists \mathcal{A}_k,\ k \in \overline{1;m},\ |\mathcal{A}_k| \geqslant \dfrac{|\mathcal{A}|}{m}$. (đpcm)

Hệ quả: Nếu $\mathcal{A}$ là tập vô hạn và $\mathcal{A}$ được phân hoạch thành hữu hạn các tập con $\mathcal{A}_j$ thì có ít nhất một tập con cũng là tập vô hạn.

4.3 Nội dung phương pháp

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" thoả mãn các điều kiện:

+) Số "thỏ" phải nhiều hơn số chuồng.

+) "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc là "chuồng" nào cũng phải có "thỏ".

Thường phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng.

Chú ý:Có nhiều bài tập có kết luận "giống như" kết luận của nguyên lý Dirichlet, tuy nhiên, lời giải hoàn toàn không sử dụng nguyên lý Dirichlet.

4.4 Thí dụ minh hoạ

Ví dụ 1. Trong hình vuông có cạnh bằng 1 đặt 51 điểm bất kỳ, phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất ba trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Lời giải . Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng $\frac{1}{5}$. Theo nguyên lý Dirchlet, tồn tại ít nhất một hình vuông con (α) chứa ít nhất ba trong số 51 điểm đã cho. Đường tròn ngoại tiếp (α) có bán kính là $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} < \dfrac{1}{7}$. Vậy ba điểm nói trên nằm trong hình tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp (α) có bán kính là $\frac{1}{7}$. (đpcm)

Ví dụ 2. Trong hình tròn (C) có diện tích bằng 8 đặt 17 điểm phân biệt, bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Lời giải . Chia hình tròn (C) thành 8 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quạt có diện tích bằng 1. Theo nguyên lý Dirchlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (α) chứa ít nhất ba trong số 17 điểm đã cho. Tam giác có ba đỉnh là ba điểm đó nằm trọn trong hình quạt (α) nên có diện tích nhỏ hơn diện tích của hình quạt, tức là bé hơn 1. ⊠

Ví dụ 3. Chọn 5 người bất kỳ. Chứng minh rằng có ít nhất hai người có cùng số người quen trong số 5 người đã chọn.

Ví dụ 4. Trong một giải vô địch bóng đá có 10 đội tham gia. Hai đội bất kỳ phải thi đấu với nhau đúng một trận. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của giải luôn có hai đội đã có số trận đấu bằng nhau.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng từ 12 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được hai số có hiệu chia hết cho 11.

Ví dụ 6. Viết n số tự nhiên thành một hàng ngang. Chứng minh rằng hoặc có một số chia hết cho n hoặc có một số số liên tiếp có tổng chia hết cho n.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng từ 52 số tự nhiên bất kỳ sao cho hoặc tổng, hoặc hiệu của hai số đó chia hết cho 100. Kết luận còn đúng không đối với 51 số?.

Ví dụ 8. Trong một hình vuông đơn vị chọn tuỳ ý 101 điểm (có thể thuộc cạnh của hình vuông) sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác với ba đỉnh là các điểm được chọn và có diện tích nhỏ hơn $0,01$.

Ví dụ 9. Trong hình lập phương đơn vị có 2001 con ruồi. Chứng minh rằng có ít nhất ba con ruồi nằm trong một hình cầu bán kính $\frac{1}{11}$.

Ví dụ 10. Một số cung của một đường tròn được tô màu đen, các cung còn lại được tô màu đỏ. Biết rằng tổng độ dài các cung màu đen nhỏ hơn nửa chu vi của đường tròn. Chứng minh rằng có thể kẻ được một đường kính của đường tròn với hai đầu mút được tô màu đỏ.

Ví dụ 11. Trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $1cm$ đặt một số hình tròn có tổng các bán kính bằng $0,6cm$ (các hình tròn có thể có điểm chung hoặc kể cả trùng nhau). Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng song song với cạnh AB và có điểm chung với ít nhất hai trong số những đường tròn nói trên.

Ví dụ 12. Trong số 100.000.000 số hạng đầu tiên của dãy Fibonacei:

$$1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ \cdots$$

có tồn tại hay không số hạng tận cùng bằng 4 chữ số 0?.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, trong dãy số Fibonacei nói trên luôn tồn tại số hạng tận cùng bằng n chữ số 0.

Ví dụ 14. Trong các ô của một bảng cỡ $n \times n$ đặt một cách tuỳ ý các số nguyên từ 1 đến n^2. Xét khẳng định sau:

"*Luôn tìm được hai ô có cạnh chung sao cho hiệu của hai số nằm ở hai ô đó lớn hơn 5.*"

1) Chứng minh rằng khẳng định đó đúng với $n = 10$.
2) Chứng minh rằng khẳng định đó đúng với mọi $n > 10$.
3) Chứng minh rằng khẳng định đó đúng với $n = 9$.
4) Chứng minh rằng khẳng định đó không đúng với $n = 5$.
5) Hãy xét tính đúng, sai của khẳng định đó khi $n = 6,\ 7,\ 8$.

Ví dụ 15. Trên mặt phẳng cho 5 điểm A, B, C, D, E có các tọa độ là các số nguyên. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 5 điểm đó có ít nhất ba tam giác có các diện tích nguyên.

Lời giải . Nhận xét rằng nếu thay đổi tọa độ của một đỉnh một số chẵn đơn vị thì tính nguyên của diện tích không đổi. Ta dịch chuyển tọa độ của các điểm đã cho những số chẵn đơn vị sao cho thu được các điểm mới A', B', C', D', E' mà các tọa độ chỉ là các số 0 hoặc 1. Chỉ có 4 trường hợp:

$$(0;0)\ ;\ (0;1)\ ;\ (1;0)\ ;\ (1;1)$$

mà có 5 điểm nên sẽ có hai điểm trùng nhau. Giả sử $A' \equiv B' \equiv O(0;0)$. Khi đó, ba tam giác OOC', OOD', OOE' sẽ có các diện tích bằng $0 \in \mathbb{Z}$ nên các tam giác ABC, ABD, ABE sẽ có các diện tích nguyên.⊠

5 Một chút về sáng tạo trong Toán học

Trong phần này chúng ta sẽ làm quen với một trong những phương pháp sáng tạo trong Toán học, đó là phương pháp tổng quát hoá.

5.1 Thí dụ mở đầu

Ta sẽ tìm cách mở rộng một khẳng định hình học đã biết sau:

Qua hai điểm phân biệt có thể kẻ được một và chỉ một đường thẳng	(I)

Hiển nhiên, vì đó là một kết quả của hình học nên trước hết ta tìm những mở rộng về mặt hình học.

Mọi người đều biết, qua ba điểm không thẳng hàng có thể dựng được một và chỉ một đường tròn. Một số người với kiến thức toán học rộng hơn có thể biết rằng qua bốn điểm có thể dựng được một Parabol, còn qua năm điểm có thể dựng được một Elip. Nhưng sau đó là ngõ cụt! Ta không nghĩ ra được đường cong nào đi qua sáu điểm.

Ta sẽ tìm cách mở rộng theo con đường đại số. Ta biết rằng mọi đường thẳng không vuông góc với $x'Ox$ đều có phương trình:

$$y = ax + b \quad (d)$$

Khẳng định (I) "dịch" sang ngôn ngữ đại số có dạng (II):

Luôn tìm được duy nhất bộ số $a; b$ sao cho đường thẳng $(d)\ :\ y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(x_1; y_1)$; $N(x_2; y_2)$ cho trước $(x_1 \neq x_2)$. Nói cách khác, hệ:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \quad (1)$$

(ẩn a ; b) **luôn có nghiệm duy nhất với mọi** x_1 ; y_1 ; x_2 ; y_2 $(x_1 \neq x_2)$

Nghiệm của hệ (1) là

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\ ;\ b = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}.$$

Nói cách khác , đường thẳng (d) có phương trình

$$y = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}. \quad (2)$$

Từ phương trình (2) ta rút ra được những nhận xét gì?

1) Trước hết, $x_1 - x_2$ là biểu thức duy nhất nằm ở mẫu thức.

Điều đó có nghĩa là nếu $x_1 = x_2$ thì biểu thức ở $VP(2)$ là vô nghĩa. Khẳng định đó phù hợp với bản chất hình học của bài toán vì khi $x_1 = x_2$ thì $(d) \perp x'Ox$ mà ta chỉ xét những đường thẳng không $\perp x''Ox$.

2) $VP(2)$ là bậc nhất đối với y_1 và y_2. Nói cách khác, khi ta cho $x_1; x_2; x$ những giá trị cụ thể, tuỳ ý thì (2) luôn có dạng

$$y = A.y_1 + B.y_2$$

trong đó, A ; B là các hằng số.

Từ nhận xét này ta viết lại (2) về dạng bậc nhất đối với y_1 và y_2, được

$$(2) \Leftrightarrow y = y_1\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) + y_2\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) := y_1.u(x) + y_2.v(x) \quad (3)$$

3) Các hàm $u(x)$; $v(x)$ có những tính chất sau:

+) Không xác định khi $x_1 = x_2$.

+) $u(x_1) = 1$; $u(x_2) = 0$ và tương tự $v(x_1) = 0$; $v_(x_2) = 1$.

6 Mô hình hoá toán học của các bài toán

Phần lớn các bài tập toán mà ta gặp đều có kết luận được phát biểu dưới dạng tường minh, tức là trong đề bài yêu cầu rõ ta phải làm gì. Chẳng hạn phải giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, v.v....

Tuy nhiên giả thiết của các bài tập thường được tác giả "phức tạp hoá" nhằm làm cho chúng ta khó phát hiện ra mối liên hệ giữa "cái đã cho" và "cái cần tìm", không phân biệt được điều kiện chính và điều kiện phụ, hoặc đôi khi không phát hiện được những điều kiện thừa, điều kiện gây "nhiễu".

Nhiệm vụ của người giải toán là "phát biểu lại" bài toán đã cho, làm cho giả thiết và kết luận trở nên có liên hệ với nhau và đưa bài toán cần giải về một hoặc nhiều bài toán quen thuộc, đã có thuật toán giải sẵn.

Muốn vậy, khi giả thiết của bài toán được cho bằng "lời" , dưới "dạng văn học", ta phải "dịch" ngôn ngữ "văn học" của bài toán đã cho về ngôn ngữ toán học quen thuộc. Đôi khi chúng ta còn phải dùng các phương pháp đặc biệt để chuyển dạng bài toán. Chẳng hạn từ bài toán đại số về bài toán hình học hoặc lượng giác hay là ngược lại.

Con đường như vậy được gọi là "mô hình hoá" bài toán đã cho. Trong phần này ta sẽ đưa ra một số phương pháp "mô hình hoá" thường gặp, chủ yếu dùng để giải các bài toán tổ hợp.

Các ví dụ và bài tập của phần này xem thêm trong tài liệu: **Lý thuyết hệ thống.**

6.1 Tô mầu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong sáu người bất kỳ hoặc có ba người đôi một quen nhau, hoặc có ba người đôi một không quen nhau.

Lời giải . Biểu diễn mỗi người bởi một điểm trong không gian sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào đồng phẳng. Nối hai điểm bất kỳ bởi một đoạn thẳng. Tô mầu các đoạn thẳng thu được (15 đoạn) bởi hai mầu: xanh và đỏ như sau:

Nếu hai người quen nhau thì đoạn thẳng nối hai điểm biểu diễn hai người đó được tô bằng mầu đỏ. Trong trường hợp ngược lại đoạn thẳng tương ứng được tô mầu xanh.

Chọn một điểm A nào đó. Trong 5 đoạn thẳng nối A với các điểm còn lại có ít nhất ba đoạn thẳng cùng mầu (?). Không giảm tính tổng quát giả sử đó là mầu đỏ. Gọi ba đoạn đó là AB ; AC ; AD.

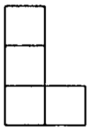
Xét mầu của ba đoạn BC ; CD ; DA. Có thể xảy ra hai khả năng:

+) Nếu có một đoạn mầu đỏ, chẳng hạn BC mầu đỏ, thế thì tam giác ABC có ba cạnh cùng mầu đỏ, tức là ba người tương ứng với ba điểm A ; B ; C đôi một quen nhau.

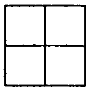
+) Nếu không có đoạn nàu mầu đỏ, thế thì cả ba đoạn đều có mầu xanh và khi đó ba người tương ứng với ba điểm B ; C ; D đôi một không quen nhau.

Tóm lại, luôn tồn tại hoặc ba người đôi một quen nhau, hoặc ba người đôi một không quen nhau. Đó chính là đpcm.

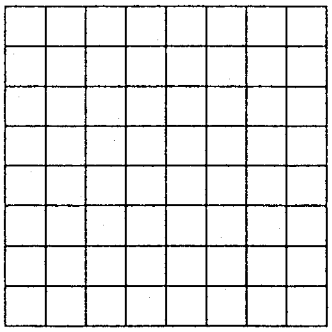
Ví dụ 2. Chứng minh rằng không thể lát kín một bàn cờ quốc tế (8×8) bằng 15 $L -$ *domino* và 1 $V -$ *domino* như hình sau:



$L - Domino$



$V - Domino$



Bàn cờ quốc tế

Lời giải . Tô mầu bàn cờ như hình vẽ. Khi đó, có 32 ô đen và 32 ô trắng. Với mọi vị trí, mỗi $V -$ *domino* phủ hai ô đen và hai ô trắng, còn mỗi $L -$ *domino* phủ một số lẻ ô đen và một số lẻ ô trắng. Như vậy, 15 $L -$ *domino* và 1 $V -$ *domino* chỉ phủ được một số lẻ ô đen và do đó không phủ kín hết bàn cờ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho một bàn cờ cỡ 4×50. Một con mã đứng ở ô sát cạnh bàn cờ và đi theo đường chéo hình chữ nhật 2×3. Hỏi có tồn tại hay không một đường đi của quân mã liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ mỗi ô một lần hay không?

Lời giải . Tô mầu các ô của bàn cờ bằng 4 mầu: Trắng (T), đen (D), vàng (V), xanh (X) như hình vẽ sau:

Xanh:								⋯ ⋯
Vàng:								⋯ ⋯
Vàng:								⋯ ⋯
Xanh:								⋯ ⋯

Bàn cờ 4×50

Giả sử tồn tại một đường đi thoả mãn yêu cầu bài ra và ban đầu quân mã đứng ở ô XT, khi đó các ô tiếp theo mà quân mã có thể đi đến là:

$$XT \to VD \to XT \to VD \to \cdots .$$

Như vậy các ô VT, XD sẽ không bao giờ được đi qua. Vậy không tồn tại một đường đi thoả mãn yêu cầu bài ra.

6.2 Xây dựng bất biến

Để giải các bài toán dạng:

Cho tập M (mà các phần tử của nó sẽ được gọi là các trạng thái). Cho một quy tắc Q sao cho khi áp dụng quy tắc Q đó, từ một trạng thái $\in M$ ta thu được một trạng thái khác $\in M$. Cho trước hai trạng thái α ; $\beta \in M$. Hỏi sau một số hữu hạn bước áp dụng quy tắc Q, từ α ta có thể thu được β hay không?

Trước hết ta xây dựng một số ký hiệu:

+) Ta ký hiệu $\beta = Q(\alpha)$, hay là $\alpha \to \beta$ nếu theo quy tắc Q, từ trạng thái α ta thu được trạng thái β.

+) Ta ký hiệu $\beta \sim \alpha$ (đọc là α tương đương với β) nếu từ α có thể thu được β sau một số hữu hạn bước áp dụng Q. Phủ định của điều đó được ký hiệu là $\beta \nsim \alpha$.

Ta sẽ chỉ xét các quy tắc Q có những tính chất sau:

1) (Tính phản xạ) $\forall\, \alpha \in M,\ \alpha \sim \alpha$.

2) (Tính đối xứng) $\forall\, \alpha \in M, \alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$.

3) (Tính bắc cầu) Nếu $\alpha \sim \beta\ \&\ \beta \sim \gamma$ thì $\alpha \sim \gamma$.

Quy tắc thoả mãn cả ba tính chất trên còn được gọi là quy tắc có tính tương đương.

Định lí 7. (Về sự phân lớp tập trạng thái theo quy tắc tương đương)
Nếu Q là quy tắc có tính tương đương thì M được phân thành các tập con đôi một không giao nhau:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots$$

thoả mãn: Với mọi $i,\ j \in \mathbb{N}^*$, luôn có

i) $\forall\, \alpha\ ;\ \beta \in M_j,\ \alpha \sim \beta$.

ii) Nếu $i \neq j$ thì $\forall\, \alpha \in M_i$, $\forall\, \beta \in M_j$, $\alpha \nsim \beta$.

Định nghĩa 3. *1 Mỗi tập con M_j nói trong định lý trên được gọi là một quỹ đạo của quy tắc Q (xác định trên tập M).*

Hiển nhiên, các quỹ đạo có tính chất quan trọng sau: Nếu ta xuất phát từ một trạng thái bất kỳ thuộc quỹ đạo M_i nào đó thì sau một hoặc một số lần áp dụng Q ta chỉ có thể thu được những trạng thái cũng $\in M_i$ đó và không thể thu được các trạng thái thuộc các quỹ đạo khác.

Ngoài ra, nếu M là tập hữu hạn thì số quỹ đạo của quy tắc Q xác định trên tập M là hữu hạn.

Định nghĩa 4. *2 Hàm số f xác định trên tập các trạng thái M được gọi là một bất biến của quy tắc Q (xác định trên tập M) nếu nó thoả mãn*

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta).(1)$$

Định nghĩa 5. *3 Bất biến f được gọi là bất biến tổng quát nếu nó thoả mãn*

$$\alpha \nsim \beta \Rightarrow f(\alpha) \neq f(\beta).(2)$$

Vậy f là bất biến tổng quát khi và chỉ khi

$$\forall\, \alpha,\ \beta \in M,\ \alpha \sim \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta).$$

Vậy nếu ta xác định được một bất biến tổng quát f thì với hai trạng thái α ; β bất kỳ, có thể xác định được $\alpha \sim \beta$ hay là $\alpha \nsim \beta$ bằng cách so sánh $f(\alpha)$ và $f(\beta)$.
Nếu ta chỉ xác định được một bất biến f và với hai trạng thái α ; β ta có $f(\alpha) \neq f(\beta)$ thì ta kết luận $\alpha \nsim \beta$. Tuy nhiên, nếu $f(\alpha) = f(\beta)$ thì không thể kết luận gì về mối tương quan giữa α và β.
Để xây dựng bất biến tổng quát thường sử dụng định lý sau

Định lí 8. *Nếu*

a) Tồn tại tập $\Delta := \{\delta_1\ ;\ \delta_2\ ;\ \cdots\ ;\ \delta_l\}$ gồm l trạng thái phân biệt của M sao cho

$$\forall\, \alpha \in M,\ \exists\, \delta_i \in \Delta,\ \alpha \sim \delta_i.$$

b) Bất biến f nhận ít nhất l giá trị khác nhau.

Thì f là bất biến tổng quát và các trạng thái $\in \Delta$ là đôi một không tương đương.

Chứng minh:

Từ a) ta thấy có không quá l quỹ đạo.

Từ b) ta thấy có không ít hơn l quỹ đạo.

Vậy có đúng l quỹ đạo. Từ b) ta thấy f nhận đúng l giá trị, suy ra f là bất biến tổng quát.

Cuối cùng, từ a) ta thấy các trạng thái khác nhau của Δ sẽ thuộc các quỹ đạo khác nhau nên đôi một không tương đương. $\boxtimes$

6.3 Ví dụ

Ví dụ 1. *Hình tròn được chia thành n hình quạt. Ta xếp n viên sỏi một cách tuỳ ý vào n hình quạt đó. Được phép đồng thời chuyển một viên sỏi từ một hình quạt baaats kỳ sang hình quạt kề bên theo chiều kim đồng hồ và chuyển một viên sỏi từ một hình quạt bất kỳ sang hình quạt kề bên theo hướng ngược lại. Hỏi rằng làm như vậy sau một số hữu hạn bước có thể từ vị trí mà ở mỗi hình quạt có đúng một viên sỏi thu được vị trí mà tất cả các viên sỏi được tập trung về trong cùng một hình quạt hay không?*

HDG: *Đánh số các hình quạt từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ kể từ một hình quạt nào đó. Với mỗi trạng thái xếp sỏi* α, *gọi* $a_k(\alpha)$ *là số viên sỏi trong hình quạt thứ* k.

$$\textit{Đặt } q(\alpha) := 1.a_1(\alpha) + 2.a_2(\alpha) + \cdots + n.a_n(\alpha)$$

$$\textit{và } r(\alpha) := q(\alpha) \pmod n$$

Ta chứng minh các khẳng định sau:

1) $r(\alpha)$ *là bất biến tổng quát.*

2) Gọi β *là trạng thái mà ở mỗi hình quạt có đúng một viên sỏi ;* γ *là trạng thái mà n viên sỏi tập trung vào hình quạt thứ* l *thì* $r(\gamma) = 0$ *và* $r(\beta) = 0 \Leftrightarrow n$ *là số lẻ.*

3) Từ đó suy ra

$$\beta \sim \gamma \Leftrightarrow n \;\text{ là số lẻ.}$$

6.4 Xây dựng hàm đặc trưng

Với bài toán được phát biểu trong phần trước, nếu chỉ yêu cầu chứng minh từ trạng thái α *sau một hoặc một số hữu hạn lần áp dụng quy tắc* Q *ta có thể thu được trạng thái* β *(*α *;* β *là các trạng thái cho trước) ta có thể giải như sau:*

1) Xây dựng hàm số $f(k)$ *trong đó* $k \in \mathbb{N}^*$ *là số lần áp dụng quy tắc* Q *vào trạng thái* α.

2) Chứng tỏ $f(k)$ *là hàm không giảm (hoặc không tăng).*

3) Chứng tỏ $f(k)$ *nhận giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).*

4) Chứng tỏ trạng thái β *tương ứng với trường hợp* $f(k)$ *nhận giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) đó.*

5) Từ đó thu được đpcm.

Hàm rời rạc $f(k)$ *còn được gọi là hàm đặc trưng của bài toán. Sự tồn tại* Max (Min) *của* $f(k)$ *thường được chứng minh dựa vào nguyên lý cực hạn.*

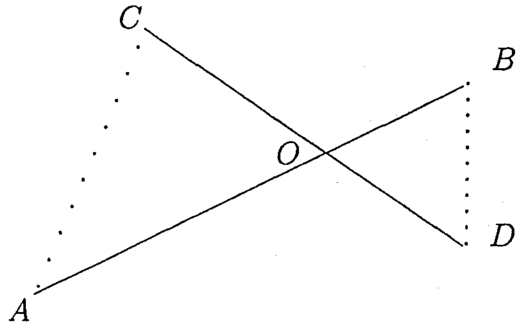
6.5 Ví dụ

Ví dụ 1. *Trên mặt phẳng cho 2004 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể dựng các đoạn thẳng nối 2 điểm một với nhau sao cho 1002 đoạn thẳng được dựng đôi một không có điểm chung.*

Lời giải . *Nối hai điểm một với nhau bởi các đoạn thẳng.*

Nếu các đoạn thẳng vừa dựng đôi một không có điểm chung thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu có hai đoạn thẳng, chẳng hạn AB và CD cắt nhau tại O (xem Hình 1).



Hình 1

Gọi f là tổng độ dài các đoạn thẳng được nối. Khi đó, nếu ta thay hai đoạn thẳng AB ; CD bởi hai đoạn đứt nét AC ; BD thì do $AB + CD > AC + BD$ (?) nên tổng độ dài các đoạn thẳng được nối khi đó sẽ giảm (do các đoạn thẳng khác vẫn được giữ nguyên). Mà tập giá trị của f là hữu hạn (?) nên sau một số hữu hạn lần thay đổi lại các đoạn thẳng như vậy f sẽ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi f đạt giá trị nhỏ nhất thì không có hai đoạn thẳng được nối nào cắt nhau vì nếu có hai đoạn thẳng cắt nhau thì ta lại tiếp tục làm như trên và sẽ thu được trạng thái mà trong đó f đạt giá trị nhỏ hơn, trái với giả thiết là f nhỏ nhất.

Vậy có thể dựng được 1002 đoạn thẳng thoả mãn yêu cầu bài ra (đpcm).

6.6 Bài tập luyện tập

Bài toán 1. *1 (D7) Cho một bàn cờ cỡ 7×7. Một quân mã đứng ở ô (1;4) và đi theo đường chéo hình chữ nhật 2×3. Hỏi có tồn tại hay không một đường đi của quân mã liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ mỗi ô một lần hay không?*
Đáp số: *Không. Tô màu như bàn cờ quốc tế và sử dụng tính chẵn, lẻ (có 25 ô đen và 24 ô trắng. Ban đầu, quân mã đứng ở ô trắng.)*

Bài toán 2. *2 (D71) Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó không có hai đường nào song song và không có ba đường nào đồng quy. chứng minh trong mỗi miền mặt phẳng mà các đường thẳng đó chia ra có thể đặt một số nguyên $\in (-n; n) \setminus \{0\}$ sao cho tổng các số được viết ở mỗi phía của một đường thẳng bất kỳ luôn bằng 0.*

Bài toán 3. *3 (D78) Trên bàn cờ quốc tế đặt 8 quân tốt sao cho ở mỗi hàng và ở mỗi cột đều có đúng một quân tốt. Chứng minh rằng số quân tốt nằm ở các ô đen là số chẵn.*

Bài toán 4. *4 (D85) Trên mỗi cạnh của tứ diện $ABCD$ lấy một điểm bất kỳ. Qua mỗi cặp ba điểm thuộc ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện dựng một mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu ba trong số bốn mặt phẳng thu được mà tiếp xúc với cầu nội tiếp tứ diện thì mặt phẳng thứ tư cũng tiếp xúc với cầu đó.*

Bài toán 5. *5 (D70) Có $4m$ đồng xu, trong đó có một nửa là các đồng xu giả. Các đồng xu thật có khối lượng bằng nhau, các đồng xu giả cũng có khối lượng bằng nhau nhưng nhẹ hơn. chứng minh bằng không quá $3m$ phép cân đĩa (không có quả cân) ta có thể xác định được tất cả các đồng xu giả.*

Bài toán 6. *6 (D71) Trên mạng lưới nguyên đánh dấu các nút nào đó (số nút được đánh dấu $\geqslant 1$). Cho một tập hữu hạn các vectơ có tọa độ nguyên. Biết rằng nếu đặt điểm gốc của các vectơ đó tại một điểm nút được đánh dấu bất kỳ thì số điểm ngọn được đánh dấu nhiều hơn số điểm ngọn không được đánh dấu. Chứng minh rằng có vô số điểm nút được đánh dấu.*

Bài toán 7. *7 (D 73) Cho điểm A_0 và n vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ có tổng bằng $\overrightarrow{0}$. Mỗi hoán vị $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}, \cdots, \overrightarrow{b_n})$ của các vectơ đó xác định một tập các điểm :*

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \equiv A_0 \text{ sao cho}$$

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{A_2A_3}, \cdots, \overrightarrow{b_n} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị của các vectơ đã cho sao cho tất cả các điểm $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ đều nằm trong miền góc có số đo bằng 60^o với đỉnh là A_0 (miền góc được kể cả cạnh của góc).

Bài toán 8. *8 (D 72) Trên bờ một con sông thẳng đặt hữu hạn các súc gỗ không chồng lên nhau và mỗi súc gỗ tạo với bờ sông góc $< 45^o$. Chứng minh rằng ta có thể lần lượt lăn tất cả các súc gỗ đó xuống sông sao cho khi lăn không có súc gỗ nào va chạm với các súc gỗ khác. (Các súc gỗ chỉ được lăn theo phương vuông góc với nó và không được quay.)*

Bài toán 9. *9 (D 69) Chứng minh rằng nếu trên mặt phẳng có một số hữu hạn các đa giác lồi đặt tuỳ ý, không có điểm chung thì với mọi tia $\overrightarrow{Ox}$ luôn tồn tại một đa giác mà khi tịnh tiến song song nó theo hướng của tia sẽ không chạm vào các đa giác khác.*

Bài toán 10. *10 (D 65) Trên bàn cờ quốc tế đặt các dấu +, − một cách tuỳ ý vào các ô. Được phép đổi dấu đồng thời ở 15 ô thuộc cùng một hàng và cùng một cột. Hỏi có thể làm như vậy để sau một số hữu hạn bước, từ một bàn cờ với các dấu được đặt bất kỳ thu được một bàn cờ với các vị trí các dấu đã cho trước hay không?.*

7 Cực trị trên tập rời rạc

7.1 Phương pháp xây dựng cấu trúc của điểm mà tại đó đạt Min, Max

Dự đoán Min, Max *của biểu thức $f(x)$ đạt tại x^* nào đó và chứng minh dự đoán đó.*
Trong phương pháp này thường ta phải sử dụng các kiến thức của Số học, Tổ hợp và Toán rời rạc. Việc dự đoán thường được thực hiện bởi phép quy nạp dựa vào một số tính toán ban đầu.

7.2 Ví dụ minh hoạ

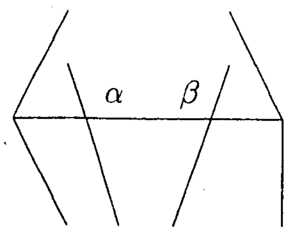
Ví dụ 1. *Cho một n - giác lồi ($n > 4$), trong đó không có ba đường chéo nào đồng quy tại một điểm nằm trong đa giác. Gọi $f(n)$ là số các đường chéo có thể kẻ được sao cho các phần mà chúng cắt ra khỏi đa giác đã cho đều là các tam giác.*
Hãy xác định Max f(n).
Lời giải . *Gọi $f(n)$ là số các đường chéo có thể kẻ được thoả mãn yêu cầu bài ra. Xét một số trường hợp ban đầu của n. Bằng cách vẽ hình cụ thể ta được*

$n =$	4	5	6	7	8	9	10
$f(n) \leqslant$	2	3	5	6	8	9	11

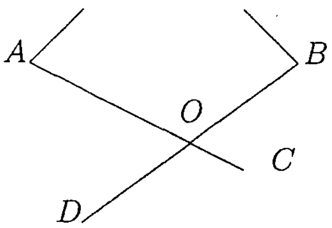
Từ đó ta có dự đoán

$$f(n) \leqslant \left[\frac{3n}{2}\right] - 4. \quad (*)$$

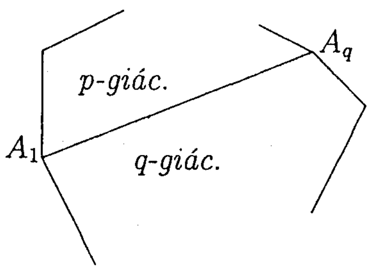
Trong đó ta ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Để chứng minh (*) trước hết ta chứng minh
Bổ đề: *Nếu tập S các đường chéo của một n - giác lồi ($n \geqslant 5$) chia n - giác đó thành các tam giác thì có ít nhất một đường chéo $\in S$ không cắt tất cả các đường chéo khác $\in S$ tại điểm trong của n - giác đã cho.*
Chứng minh: *Xét các hình vẽ sau:*



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Từ các hình vẽ trên ta có các nhận xét hiển nhiên sau:

1) Không có đường chéo nào $\in S$ cắt $\geqslant 2$ đường chéo $\in S$ khác (xem Hình 1). Do hai góc α ; β có $\alpha + \beta \geqslant 180^o$).

2) Giả sử mọi đường chéo $\in S$ đều cắt đúng một đường chéo $\in S$. Xét hai đường chéo $\in S$ là AC ; BD cắt nhau tại O (xem Hình 2)). Do $n \geqslant 5$ nên có ít nhất một cạnh của tứ giác $ABCD$ là đường chéo của n - giác đã cho. Giả sử đó là cạnh AB. Ta có $AB \in S$ vì nếu không thì phần n - giác với biên chứa đường gấp khúc AOB sẽ không là tam giác nên sẽ có một đường chéo $\in S$ cắt AB, khi đó đường chéo đó còn cắt hoặc AC, hoặc BD. Điều đó trái với nhận xét 1) (Có một đường chéo $\in S$ cắt hai đường chéo $\in S$).

Từ hai nhận xét trên suy ra kết luận của bổ đề.

Trở lại bài toán đang xét. Hiển nhiên, (*) đã đúng với $n = 4; 5; 6$. Giả sử (*) đúng với mọi k, $5 \leqslant k < n$, $n \geqslant 6$. Theo bổ đề, tồn tại một đường chéo $\in S$ không cắt các đường chéo khác $\in S$ và chia n - giác đã cho thành hai phần rời nhau. Giả sử đường chéo đó là A_1A_q (xem Hình 3) và nó chia n - giác đã cho thành p - giác và q - giác (với $3 \leqslant p; q < n$; $p+q = n+2$).

Khi đó, số $f(n)$ các đường chéo kẻ được thoả mãn yêu cầu bài ra là

$$f(n) = 1 + f(p) + f(q).$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} 1 + f(p) + f(q) &\leqslant 1 + \left[\frac{3p}{2}\right] - 4 + \left[\frac{3q}{2}\right] - 4 \\ &= \left[\frac{3p}{2}\right] + \left[\frac{3q}{2}\right] - 7 \\ &\leqslant \left[\frac{3(p+q)}{2}\right] - 7 \\ &= \left[\frac{3n}{2} + 3\right] - 7 \\ &= \left[\frac{3n}{2}\right] - 4 \\ \Rightarrow f(n) &\leqslant \left[\frac{3n}{2}\right] - 4. \end{aligned}$$

Vậy (*) cũng đúng với n.

Do đó, theo nguyên lý quy nạp, (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$; $n \geqslant 4$. Vậy số lớn nhất các đường chéo kẻ được thoả mãn yêu cầu bài ra là $\left[\frac{3n}{2}\right] - 4$. ⊠

Ví dụ 2. *(VMO 2003) Tìm số $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất sao cho hệ phương trình sau có nghiệm nguyên.*

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = (x+3)^2 + y_3^2 = \cdots = (x+n)^2 + y_n^2. \quad (1)$$

Lời giải . *Hiển nhiên nếu hệ (1) không có nghiệm* $(x\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\cdots ;\ y_n)$ *nguyên khi* $n=k$ *thì nó cũng không có nghiệm nguyên với* $n \geqslant k$.
Với $n=3$ *dễ thấy hệ có nghiệm:* $(x\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3) \equiv (-2\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
Ta sẽ chứng minh với $n=4$ *thì hệ (1) không có các nghiệm nguyên.*
Thật vậy, giả sử tồn tại các số $x\ ; y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3\ ;\ y_4 \in \mathbb{Z}$ *và thoả mãn:*

$$(x+1)^2+y_1^2=(x+2)^2+y_2^2=(x+3)^2+y_3^2=(x+4)^2+y_4^2. \quad (2)$$

Từ (2), do $x+1$ *và* $x+3$ *cùng tính chẵn, lẻ nên* y_1 *và* y_3 *cùng tính chẵn, lẻ. Tương tự,* y_2 *và* y_4 *cùng tính chẵn, lẻ.*
Do $x+1$ *và* $x+2$ *khác tính chẵn, lẻ nên* y_1 *và* y_2 *khác tính chẵn, lẻ. Tương tự,* y_3 *và* y_4 *khác tính chẵn, lẻ.*
Nhận xét rằng:
Với $a \in \mathbb{Z}$; *a lẻ thì* $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, *còn với* $a \in \mathbb{Z}$; *a chẵn thì* $2a^2 \equiv 0 \pmod 8$.
Từ (2) ta có:

$$(x+1)^2+y_1^2+(x+3)^2+y_3^2=2[(x+2)^2+y_2^2 \Leftrightarrow 2y_2^2=y_1^2+y_3^2+2. \quad (*)$$
$$(x+2)^2+y_2^2+(x+4)^2+y_4^2=2[(x+3)^2+y_3^2 \Leftrightarrow 2y_3^2=y_2^2+y_4^2+2. \quad (**)$$

Nếu y_2 *chẵn thì theo trên ta có* $y_1; y_3$ *lẻ, và từ (*) ta được:*

$$0 \equiv (1+1+2) \pmod 8\ :\ \textit{vô lý}.$$

Nếu y_2 *lẻ thì theo trên ta có* y_4 *lẻ ;* y_3 *chẵn và từ (**) ta được:*

$$0 \equiv (1+1+2) \pmod 8\ :\ \textit{vô lý}.$$

Vậy giả sử ban đầu là sai, tức là với $n=4$ *thì hệ (1) không có các nghiệm nguyên.*
Do đó $n=3$ *là giá trị lớn nhất để hệ phương trình đã cho có nghiệm* $\in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. *Cho* $n \geqslant 3$ *và các số* $x_1; x_2; \cdots ; x_{n-1} \in \mathbb{N}$, *biến thiên và thoả mãn*

$$\begin{cases} 1)\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}=n \\ 2)\ x_1+2x_2+3x_3+\cdots+(n-1)x_{n-1}=2n-2 \end{cases} .(ii)$$

$$\textit{Tìm } \mathrm{Min\,f} \textit{ với } f=f(x_1;x_2;\cdots;x_{n-1}) := \sum_{k=1}^{n-1} k.x_k.(2n-k).$$

Lời giải . *Vì tập giá trị của f là tập con của* $\mathbb{N}$ *nên tồn tại* Min f. *Giả sử*

$$\mathrm{Min\,f} = \mathrm{f}(\mathrm{x}^*) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1^*;\mathrm{x}_2^*;\cdots;\mathrm{x}_{n-1}^*).$$

Từ điều kiện 2) suy ra $x_{n-1}^* \leqslant 2$. *Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi*

$$x_1^*=x_2^*=\cdots=x_{n-2}^*=0 \Rightarrow n=2 \textit{ (theo 1))}.$$

Đó là điều vô lý vì $n \geqslant 3$. *Vậy* $x^*_{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow x^*_{n-1} \in \{0; 1\}$.

+) Nếu $x^*_{n-1} = 0$ *thì*

$$\begin{cases} 1)\ x^*_1 + x^*_2 + x^*_3 + \cdots + x^*_{n-2} = n \\ 2)\ x^*_1 + 2x^*_2 + 3x^*_3 + \cdots + (n-2)x^*_{n-2} = 2n-2 \end{cases} . \quad (i)$$

a) Nếu $\exists\, m \in \overline{1..n-2},\ x^*_m > 0$ *còn* $x^*_i = 0,\ \forall\, i \neq m$ *thì*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x^*_m = n \\ mx^*_m = 2n-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow mn = 2n - 2$$

$$\Rightarrow n(2-m) = 2 \ : \ \text{vô lý do } n \geqslant 3.$$

b) Nếu $\exists\, i,\ j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n-2,\ j \geqslant i+2.$ *sao cho* $x^*_i,\ x^*_j > 0$.

Xét bộ số $x' := (x'_1; x'_2; \cdots; x'_{n-1})$ *xác định như sau*

$$\begin{cases} x'_k = x^*_k \quad \text{khi } k \notin \{i; j; i+1; j+1\} \\ x'_i = x^*_i + 1\ ;\ x'_{i+1} = x^*_{i+1} - 1\ ;\ x'_j = x^*_j - 1\ ;\ x'_{j+1} = x^*_{j+1} + 1 \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng bộ các số $x' := (x'_1; x'_2; \cdots; x'_{n-1})$ *xác định như vậy thoả mãn điều kiện (ii). Nhưng*

$$f(x^*_1; x^*_2; \cdots; x^*_{n-1}) - f(x'_1; x'_2; \cdots; x'_{n-1}) = \cdots = 2(j-i) > 0$$

nên f *không đạt* Min *tại* $x^* = (x^*_1; x^*_2; \cdots; x^*_{n-1})$.

Vậy ta phải có: $\exists\, i,\ x^*_i,\ x^*_{i+1} > 0$ *và* $x^*_k = 0,\ \forall\, k \neq i,\ i+1$. *Khi đó*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x^*_i + x^*_{i+1} = n \\ ix^*_i + (i+1)x^*_{i+1} = 2n-2 \end{cases} \Rightarrow x^*_{i+1} = (2-i)n - 2.$$

Do $x^*_{i+1} > 0 \Rightarrow i < 2 \Rightarrow i = 1$. *Vậy* $x^*_2 = n-2,\ x^*_1 = 2$ *và*

$$f(x^*) = f(2; n-2; 0; 0; \cdots; 0) = 2(2n-1) + 2(n-2)(2n-2) = 4n^2 - 8n + 6.$$

+) Nếu $x^*_{n-1} = 0$ *thì*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x^*_1 + x^*_2 + x^*_3 + \cdots + x^*_{n-2} = n-1 \\ 2)\ x^*_1 + 2x^*_2 + 3x^*_3 + \cdots + (n-2)x^*_{n-2} = n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^*_2 = x^*_3 = \cdots = x^*_{n-2} = 0,\ x^*_1 = n-1$$

$$\Rightarrow f(x^*) = 1.(n-1)(2n-1) + (n-1).1.(2n-n+1) = 3n^2 - 3n.$$

Nhưng với mọi $n \geqslant 3$ *ta luôn có*

$$(4n^2 - 8n + 6) - (3n^2 - 3n) = (n-3)(n-2) \geqslant 0$$

nên ta được kết quả sau

$$\mathrm{Min\,f} = \mathrm{3n^2 - 3n = f(n-1; 0; 0; \cdots; 0; 1)}.$$

Ví dụ 4. *Hàm số* $(f(n)) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *xác định như sau*

$$f(1) = 0\ ;\ f(n) = f([\frac{n}{2}]) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\ ,\ n \geqslant 2.$$

1) Xác định Min; Max *của* $f(n)$ *với* $n \leqslant 1999$ *và tìm tất cả các giá trị* $n \in \overline{1..1999}$ *để* $f(n)$ *đạt* Min; Max.
2) Có bao nhiêu giá trị $n \in \overline{1..1999}$ *để* $f(n) = 0$.
Lời giải. *Ta có*

$$f(n) - f([\frac{n}{2}]) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1 & (\textit{nếu } n = 0; 3 \pmod 4) \\ -1 & (\textit{nếu } n = 1; 2 \pmod 4) \end{cases}.$$

Nhận xét rằng trong hệ cơ số 2, nếu $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$ *thì*

$$[\frac{n}{2}] = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}}.$$

Ngoài ra

$$n = 0; 3 \pmod 4 \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_k} = \overline{00}\ \textit{ hoặc } \overline{11}.$$
$$n = 1; 2 \pmod 4 \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_k} = \overline{01}\ \textit{ hoặc } \overline{10}.$$

Như vậy:

$f(n)$ *tăng 1 đơn vị đối với* $f([\frac{n}{2}])$ *nếu* $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$ *với* $a_k = a_{k-1}$.

$f(n)$ *giảm 1 đơn vị đối với* $f([\frac{n}{2}])$ *nếu* $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$ *với* $a_k \neq a_{k-1}$.

Ký hiệu $u(n)$ *là số cặp* 00 ; 11 *còn* $v(n)$ *là số cặp* 01 ; 10 *trong cách viết theo cơ số 2 của số* n. *Ta sẽ chứng minh*

$$f(n) = u(n) - v(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp toán học theo k *là số chữ số trong cách viết nhị phân của số* n.

Thật vậy, khi $k = 1 \Rightarrow n = 1$ *thì* $f(1) = 0\ ;\ u(1) = v(1) = 0 \Rightarrow (*)$ *đúng với* $k = 1$.
Nếu $k = 2$ *thì*
+) Hoặc $n = 2 = 10_2 \Rightarrow u(2) = 0\ ;\ v(2) = 1$ *còn* $f(2) = -1 \Rightarrow f(2) = u(2) - v(2)$.
+) Hoặc $n = 3 = 11_2 \Rightarrow u(3) = 1\ ;\ v(3) = 0$ *còn*

$$f(3) = f(1) + 1 = 1 \Rightarrow f(3) = u(3) - v(3).$$

Giả sử (*) đúng tới k, *hay là (*) đúng với mọi số* $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$.
Xét $m = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_ka_{k+1}}$.
Nếu $a_{k+1} = 0 \Rightarrow [\frac{m}{2}] = n,\ m+1$ *lẻ và*

$$f(m) = f(n) + (-1)^{n(m+1)}.$$

Nếu $a_k = 0$ *thì* n *chẵn và*

$$u(m) = u(n) + 1\ ;\ v(m) = v(n)\ ;\ (-1)^{n(m+1)} = 1$$

$$\Rightarrow f(m) = f(n) + 1 = u(n) - v(n) + 1 = u(m) - v(m).$$

Nếu $a_k = 1$ *thì* n *lẻ và*

$$u(m) = u(n)\ ;\ v(m) = v(n) + 1\ ;\ (-1)^{n(m+1)} = -1$$

$$\Rightarrow f(m) = f(n) - 1 = u(n) - v(n) - 11 = u(m) - v(m).$$

Nếu $a_{k+1} = 0$ *thì lập luận tương tự ta cùng được* $f(m) = u(m) - v(m)$. *Vậy (*) cũng đúng tới* $k+1$ *nên theo nguyên lý quy nạp ta được (*) đúng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

Trở lại bài toán đã cho

1) Từ (*) ta thấy để $f(n)$ *lớn nhất thì* $v(n)$ *phải nhỏ nhất. Mà* $v(n) \geqslant 0$ *nên ta phải tìm số* n *lớn nhất,* $\leqslant 1999$ *sao cho* $v(n) = 0$. *Nhận xét rằng*

$$11111111111_2 = 2047 > 1999\ ;\ 1111111111_2 = 1023 < 1999$$

nên số n *lớn nhất* $\in \overline{1..1999}$ *có* $v(n)$ *nhỏ nhất là số 1023. Khi đó* $f(n) = 9 - 0 = 9$.

$$Vậy \underset{1\ \ n\ \ 1999}{\mathrm{Max}} f(n) = 9 = f(1023).$$

Để $f(n)$ *nhỏ nhất ta phải có* $u(n)$ *nhỏ nhất, đồng thời* $v(n)$ *lớn nhất. Lập luận tương tự trên ta được số* $10101010101_2 = 1365$ *là số có* $u(n) = 0$ *là nhỏ nhất và* $v(n) = 10$ *là lớn nhất. Khi đó* $f(n) = 0 - 10 = -10$.

$$Vậy \underset{1\ \ n\ \ 1999}{\mathrm{Min}} f(n) = -10 = f(1365).$$

2) Trong biểu diễn $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_{k_2}}$ *giữa hai chữ số giống nhau ta đặt dấu "." còn giữa hai chữ số khác nhau ta đặt dấu ",". Khi đó* $u(n) =$ *số dấu "." và* $v(n) =$ *số dấu ",". Nếu nhớ rằng chữ số đầu tiên phải là chữ số 1 thì mỗi dãy gồm* m *ký hiệu "." và "," sẽ xác định duy nhất một số có* $m+1$ *chữ số trong hệ cơ số 2.*

Chẳng hạn dãy (. . , , .) sẽ ứng với số 111011_2

Như vậy $f(n) = 0 \Leftrightarrow u(n) = v(n) \Leftrightarrow$ *số dấu "." bằng số dấu ",". Từ đó* $\Rightarrow m$ *chẵn.*

Với m *chẵn có* $C_m^{\frac{m}{2}}$ *cách xếp* $\dfrac{m}{2}$ *dấu "." vào* m *chỗ .*

(Các chỗ còn lại đặt các dấu ","). Mà $1999 < 100000000000_2 = 2048$. *Trong 2047 số* $n < 2048$ *có*

$$C_0^0 + C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + C_8^4 + C_{10}^5 = 351$$

số có $f(n) = 0$. *Nhưng trong các số có* $f(n) = 0$ *đó có 5 số* $> 1999 = 11111001111_2$ *là các số*

$$11111010010_2 = 2002\ ;\ 11111010100_2 = 2004\ ;\ 11111010110_2 = 2006\ ;$$

$$11111011010_2 = 2010\ ;\ 11111101010_2 = 2016.$$

Vậy có tất cả $351-5=346$ *số* $\in \overline{1..1999}$ *là nghiệm của phương trình* $f(n)=0$.

Ví dụ 5. *Cho* $a>2$ *và hàm số* $a(n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *xác định như sau*

$$a(0)=1,\ a(1)=a,\ a(n+1)=\left(\frac{a^2(n)}{a^2(n-1)}-2\right)a(n),\quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

Với $k\in\mathbb{N}^*$, *đặt*

$$f(k)=\frac{1}{a(0)}+\frac{1}{a(1)}+\cdots+\frac{1}{a(k)}.$$

Chứng minh rằng

$$\underset{k\in\ *}{Sup} f(k)=\frac{1}{2}\left(2+a-\sqrt{a^2-4}\right).$$

Lời giải . *Ta có*

$$a>2\Rightarrow \exists\, b>1,\ a=b+\frac{1}{b}\Rightarrow a^2-2=b^2+\frac{1}{b^2},\ a^2-4=\left(b-\frac{1}{b}\right)^2.$$

Ta phải chứng minh

$$f(k)<\frac{1}{2}\left(2+a-\sqrt{a^2-4}\right):=\varrho\quad (1),\ \forall\, k\in\mathbb{N}^*$$

và ở vế phải của (1) không thể thay ϱ *bởi số nhỏ hơn. Từ định nghĩa của hàm số và từ cách đặt số* b *ta có*

$$a_2=\left(\frac{a^2(1)}{a^2(0)}-2\right)a(0)=(a^2-2).a=\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$
$$a_3=\left(\frac{a^2(2)}{a^2(1)}-2\right)a(1)=(a^2-2).a=\left(b^4+\frac{1}{b^4}\right)\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$a(n)=\left(b^{2^{n-1}}+\frac{1}{b^{2^{n-1}}}\right)\left(b^{2^{n-2}}+\frac{1}{b^{2^{n-2}}}\right)\cdots\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a(n)}=\frac{b^{2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)}=\frac{b^{2^n-1}}{M}$$

(với $M:=(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)$*). Mặt khác:*

$$\varrho=\frac{1}{2}(b+\frac{1}{b}+2-(b-\frac{1}{b}))=1+\frac{1}{b}.$$

(Do $b>1\Rightarrow b-\frac{1}{b}>0$*).*

Từ các kết quả trên ta có

$$(1)\Leftrightarrow 1+\frac{b}{b^2+1}+\frac{b^3}{(b^2+1)(b^4+1)}+\cdots+\frac{b^{2^n-1}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)}<1+\frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{b^4}{(b^2+1)(b^4+1)} + \cdots + \frac{b^{2^n}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)} < 1. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $a_i > 0$, $(i \in \overline{1..n})$ *ta luôn có*

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_j)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}. \quad (3)$$

Thật vậy, có $S_1 = \dfrac{a_1}{1+a_1} = 1 - \dfrac{1}{1+a_1} \Rightarrow (3)$ *đúng với* $n = 1$.
Giả sử (3) đúng đến n, khi đó đặt $P := (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ *ta có*

$$S_{n+1} = S_n + \frac{a_{n+1}}{P.(1+a_{n+1})} = 1 - \frac{1}{P} + \frac{a_{n+1}}{P.(1+a_{n+1})} = 1 - \frac{1}{P.(1+a_{n+1})}.$$

Vậy (3) cũng đúng với $n+1$, *tức là theo nguyên lý quy nạp, (3) đúng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.
Theo (3), ta có

$$VT(2) = 1 - \frac{1}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)} < 1 \Rightarrow VT(2) < 1.$$

Vậy (2) đúng nên (1) đúng. Mặt khác , khi cho $b \to 1^+$ $(\Leftrightarrow a \to 2^+)$ *ta có* $VT(2) \to 1^-$ *nên ở* $VP(2)$ *không thể thay 1 bởi số nhỏ hơn, hay là ở* $VP(1)$ *không thể thay* ϱ *bởi số nhỏ hơn. Tóm lại, ta được*

$$\underset{k\in\ ^*}{Sup} f(k) = \varrho = \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2-4}\right) \ (đpcm).$$

Ví dụ 6. *Cho* $S_n = \{1;\ 2; \cdots;\ n\}$. *Phần tử* $j \in S_n$ *được gọi là điểm bất động của song ánh* $p : S_n \to S_n$ *nếu* $p(j) = j$.
Gọi $f(n)$ *là số song ánh không có điểm bất động, còn* $g(n)$ *là số song ánh có đúng một điểm bất động :* $S_n \to S_n$.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $H(n)$ *với*

$$H(n) := |f(n) - g(n)|,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải . *Gọi p là một song ánh :* $S_n \to S_n$ *mà có đúng một điểm bất động* j.
Có n cách chọn $j \in S_n$ *và* $f(n-1)$ *cách lập các song ánh :* $S_n \setminus \{j\} \to S_n \setminus \{j\}$ *mà không có điểm bất động. Vậy*

$$g(n) = nf(n-1) \quad (1), \quad \forall\, n \geqslant 2$$

Bây giờ, gọi r là song ánh : $S_n \to S_n$ *mà không có điểm bất động.*
Khi đó, $r(1) = j$ *với* $j \neq 1$ *và có* $n-1$ *cách chọn j như vậy.*
Nếu $r(j) = 1$ *thì có* $f(n-2)$ *các song ánh :* $S_n \setminus \{1;j\} \to S_n \setminus \{1;j\}$ *mà không có điểm bất động. Nếu bổ sung thêm* $r(1) = j$, $r(j) = 1$ *thì song ánh r đó :* $S_n \to S_n$ *cũng không có điểm bất động. Vậy có* $(n-1)f(n-2)$ *các song ánh :* $S_n \to S_n$ *loại này.*

Nếu $r(j) \neq 1$ thì có $f(n-1)$ các song ánh : $S_n \setminus \{1\} \to S_n \setminus \{1\}$ mà không có điểm bất động. Gọi q là một song ánh như vậy. Bằng cách đặt

$$\begin{cases} p(i) = q(i) & \text{nếu } q(i) \neq j \\ p(i) = 1,\ p(1) = j & \text{nếu } q(i) = j \end{cases}$$

ta cũng được song ánh p không có điểm bất động : $S_n \to S_n$. Vậy có $(n-1)f(n-1)$ các song ánh : $S_n \to S_n$ loại này.

Tóm lại, ta có

$$f(n) = (n-1)f(n-2) + (n-1)f(n-1) \quad (2),\ \forall\, n \geqslant 3.$$

Từ (1) và (2) ta được với $n \geqslant 2$ thì

$$f(n+1) - g(n+1) = n[f(n) + f(n-1)] - (n+1)f(n) = nf(n-1) - f(n) = g(n) - f(n).$$

Mà $f(1) - g(1) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow f(2) - g(2) = 1, \cdots$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(n) - g(n) = (-1)^n \Rightarrow H(n) = |f(n) - g(n)| = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có

$$\operatorname*{Min}_{n\in\,^*} H(n) = \operatorname*{Max}_{n\in\,^*} H(n) = 1.$$

Ví dụ 7. *Trên mặt phẳng cho $2n+1$ đường thẳng $(n \in \mathbb{N}^*)$. Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác.*

Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải . *Gọi số các tam giác nhọn tạo thành là $f(n)$. Ta phải chứng minh*

$$f(n) \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Có thể giả sử trong $2n+1$ đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song, không có hai đường thẳng nào vuông góc với nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy.

Thật vậy, nếu có hai đường thẳng nào song song hoặc vuông góc thì ta chỉ việc quay chúng một góc đủ nhỏ sao cho các tam giác nhọn vẫn là các tam giác nhọn, khi đó số các tam giác nhọn không giảm. Nếu có ba đường thẳng nào đồng quy thì ta tịnh tiến song song một đường với khoảng cách đủ nhỏ, số tam giác nhọn cũng không giảm.

Như vậy, ba đường thẳng bất kỳ trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau và tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù.

Gọi $g(n)$ là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng a, b, c nào đó là "giả nhọn cạnh a" nếu các góc chung cạnh a của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng l nào đó và coi nó là trục hoành. Các đường thẳng còn lại được chia thành hai tập: Tập T^+ gồm các đường thẳng với hệ số góc dương và tập T^- gồm các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với l một tam giác "giả nhọn" *nếu một đường $\in T^+$, đường kia $\in T^-$. Gọi p là số đường thẳng $\in T^+$, p là số đường thẳng $\in T^-$. Khi đó $p + q = 2n$ và số tam giác "giả nhọn cạnh l" sẽ là pq. Nhớ rằng*

$$pq \leqslant \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 = n^2.$$

Nhưng l có thể là đường thẳng bất kỳ trong số $2n + 1$ đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng l ; tam giác "giả nhọn cạnh l") sẽ $\leqslant n^2(2n+1)$.

Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù chỉ được tính một lần nên

$$3f(n) + g(n) \leqslant n^2(2n+1).$$

Thế nhưng tổng số các tam giác là C^3_{2n+1}, tức là

$$f(n) + g(n) = C^3_{2n+1} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}.$$

Vậy ta có

$$2f(n) \leqslant n^2(2n+1) - (f(n) + g(n)) = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\Rightarrow f(n) \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 8. *Cho $n \geqslant 3$ và các số $x_1; x_2; \cdots; x_{n-1} \in \mathbb{N}$, biến thiên và thoả mãn*

$$\begin{cases} 1)\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = n \\ 2)\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 2n-2 \end{cases} .(ii)$$

$$\text{Tìm Min f với } f = f(x_1; x_2; \cdots; x_{n-1}) := \sum_{k=1}^{n-1} k.x_k.(2n-k).$$

Lời giải . *Vì tập giá trị của f là tập con của $\mathbb{N}$ nên tồn tại Min f. Giả sử*

$$\mathrm{Min\,f} = \mathrm{f}(\mathrm{x}^*) = \mathrm{f}(\mathrm{x}^*_1; \mathrm{x}^*_2; \cdots; \mathrm{x}^*_{n-1})$$

Từ điều kiện 2) suy ra $x^*_{n-1} \leqslant 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$x^*_1 = x^*_2 = \cdots = x^*_{n-2} = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ (theo 1)).}$$

Đó là điều vô lý vì $n \geqslant 3$. Vậy $x^*_{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow x^*_{n-1} \in \{0; 1\}$.

+) Nếu $x^*_{n-1} = 0$ thì

$$\begin{cases} 1)\ x^*_1 + x^*_2 + x^*_3 + \cdots + x^*_{n-2} = n \\ 2)\ x^*_1 + 2x^*_2 + 3x^*_3 + \cdots + (n-2)x^*_{n-2} = 2n-2 \end{cases} . \quad (i)$$

a) Nếu $\exists\, m \in \overline{1..(n-2)}$, $x_m^* > 0$ *còn* $x_i^* = 0$, $\forall\, i \neq m$ *thì*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_m^* = n \\ mx_m^* = 2n-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow mn = 2n - 2$$

$$\Rightarrow n(2-m) = 2 \ : \ \textit{Vô lý do } n \geqslant 3.$$

b) Nếu $\exists\, i,\ j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n-2,\ j \geqslant i+2.$ *sao cho* $x_i^*,\ x_j^* > 0$.
Xét bộ số $x' := (x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}')$ *xác định như sau*

$$\begin{cases} x_k' = x_k^* \quad \textit{khi } k \notin \{i; j; i+1; j+1\} \\ x_i' = x_i^* + 1 \ ; \ x_{i+1}' = x_{i+1}^* - 1 \ ; \ x_j' = x_j^* - 1 \ ; \ x_{j+1}' = x_{j+1}^* + 1 \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng bộ các số $x' := (x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}')$ *xác định như vậy thoả mãn điều kiện (ii). Nhưng*

$$f(x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*) - f(x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}') = \cdots = 2(j-i) > 0$$

nên f *không đạt* Min *tại* $x^* = (x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*)$.
Vậy ta phải có: $\exists\, i,\ x_i^*,\ x_{i+1}^* > 0$ *và* $x_k^* = 0$, $\forall\, k \neq i,\ i+1$. *Khi đó*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_i^* + x_{i+1}^* = n \\ ix_i^* + (i+1)x_{i+1}^* = 2n-2 \end{cases} \quad \Rightarrow x_{i+1}^* = (2-i)n - 2.$$

Do $x_{i+1}^* > 0 \Rightarrow i < 2 \Rightarrow i = 1$. *Vậy* $x_2^* = n-2$, $x_1^* = 2$ *và*

$$f(x^*) = f(2; n-2; 0; 0; \cdots; 0) = 2(2n-1) + 2(n-2)(2n-2) = 4n^2 - 8n + 6.$$

+) Nếu $x_{n-1}^* = 0$ *thì*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x_1^* + x_2^* + x_3^* + \cdots + x_{n-2}^* = n-1 \\ 2)\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* + \cdots + (n-2)x_{n-2}^* = n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2^* = x_3^* = \cdots = x_{n-2}^* = 0,\ x_1^* = n-1$$

$$\Rightarrow f(x^*) = 1.(n-1)(2n-1) + (n-1).1.(2n-n+1) = 3n^2 - 3n.$$

Nhưng với mọi $n \geqslant 3$ *ta luôn có*

$$(4n^2 - 8n + 6) - (3n^2 - 3n) = (n-3)(n-2) \geqslant 0$$

nên ta được kết quả sau

$$\mathrm{Min\,f} = 3\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} = \mathrm{f}(\mathrm{n}-1; 0; 0; \cdots; 0; 1).$$

7.3 Bài tập tương tự

1. *Cho* $x, y, z \in \mathbb{N}^*$; $x + y + z = 100$. *Tìm Min, Max của* $P = xyz$.

2. *Cho* $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x + y = 2003$. *Tìm Min, Max của* $P = x!y!$.

3. *Cho* $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x + y = 2003$. *Tìm Min, Max của* $P = x! + y!$.

4. *Hãy viết số 2003 thành tổng của một số số nguyên dương sao cho tích của các số được viết là lớn nhất.*

5. *Cho* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *là các số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng:*

$$Inf\left[(1 - \frac{1}{p_1^2})(1 - \frac{1}{p_2^2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_n^2})\right] = \frac{1}{2}.$$

6. *Hãy tìm ước số chung lớn nhất của 20 số tự nhiên dương có tổng bằng 2002.*

7. *Cho* $n \in \mathbb{N}^*$. *Cho tập hữu hạn:*

$$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \text{ với } a_i \in (0; 1) \text{ ; } \sum_{i=1}^{k} a_i > n.$$

$$\text{Đặt } d_S = \underset{X \subset S}{Inf}\left|n - \sum_{a_i \in X} a_i\right|.$$

Tìm
$Max d_S$ *khi* S *biến thiên, thoả mãn* $|S| < +\infty$

8. *Tìm số nhỏ nhất có dạng:(* $k, l \in \mathbb{Z}$*)*

   - $A = |11^k - 5^l|$.
   - $B = |36^k - 56^l|$.
   - $C = |53^k - 37^l|$.

9. *Một đội văn nghệ gồm cả học sinh nam và học sinh nữ. Hãy tính xem đội văn nghệ này có ít nhất bao nhiêu học sinh trong các trường hợp sau:*
a) Số học sinh nữ của đội nhỏ hơn 50% nhưng lớn hơn 40%.
b) Số học sinh nữ của đội nhỏ hơn 44% nhưng lớn hơn 43%.

10. *Trong một giải bóng đá có m đội tham gia theo thể thức vòng tròn một lượt. Đội thắng được hai điểm, đội hoà được một điểm, còn đội thua không được điểm. Sau giải, ban tổ chức xếp thứ tự các đội theo số điểm đạt được. Hỏi hai đội có vị thứ kề nhau có thể hơn kém nhau nhiều nhất bao nhiêu điểm?*