

VÕ QUỐC BÁ CẨN – TRẦN QUỐC ANH

SỬ DỤNG AM – GM
ĐỂ CHỨNG MINH
BẤT ĐẲNG THỨC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



good is NOT enough

Bookbooming



KHO SÁCH NỔI
CHƯA TỪNG CÓ TRÊN MẠNG



TOÀN BỘ SLIDE BÀI GIẢNG
CỦA TẤT CẢ CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC



BẢN MỀM NHỮNG CUỐN
SÁCH MỚI NHẤT



TẠP CHÍ HÀNG ĐẦU
THẾ GIỚI

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập ĐINH VĂN VANG

Chịu trách nhiệm nội dung và bản quyền:
Nhà sách HỒNG AN

Biên tập nội dung:
LƯU THẾ SƠN

Kỹ thuật vẽ hình:
Nhà sách HỒNG AN

Trình bày bìa:
PHẠM VIỆT QUANG

Mã số: 02.02.45/55.PT 2010

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP AM-GM ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Bao Bì Phong Tân.
Đăng ký kế hoạch xuất bản số: 916-2010/CXB/45-59/ĐHSP ký ngày 14/9/2010.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2011.

Lời nói đầu

*"If I feel unhappy, I do mathematics to become happy.
If I am happy, I do mathematics to keep happy."*

Alfred Rényi

Người lớn thường quan niệm: "Lớp trẻ bây giờ suy nghĩ không chín chắn". Còn thế hệ trẻ thì lại nhận xét: "Tư tưởng những người đi trước là cổ hủ, lạc hậu". Thực ra, cả hai câu nói thường gặp trên đã mắc cùng một lỗi đó là lấy tuổi tác làm thước đo cho tư duy con người. Điều này chỉ đúng trong những hoàn cảnh cụ thể nhất định. Tư duy thành công thực sự không phụ thuộc nhiều vào độ tuổi, trình độ học vấn hiện tại, hay hoàn cảnh gia đình, hay bất cứ yếu tố ngoại cảnh nào khác.

Chính vì vậy, có thể ngày hôm nay, bạn chưa phải một người giỏi Toán, giỏi tư duy logic, thế nhưng bạn hoàn toàn có thể đạt được những điều đó bằng niềm đam mê và thói quen không ngừng học hỏi của mình. Hãy nhớ rằng: *"Điều quan trọng không phải là vị trí đang đứng, mà là hướng ta đang đi"*. Đối với chúng tôi, người thầy giáo giỏi không phải là người có khả năng "nhồi nhét" lượng kiến thức đồ sộ cho học sinh của mình mà đó phải là người trong thời gian ngắn nhất, truyền thụ được cho học sinh lượng kiến thức cần thiết nhất, một cách hiệu quả nhất và tối ưu nhất. *"Người ta có thể quên đi điều bạn nói, nhưng những gì bạn để lại trong lòng họ thì không bao giờ nhạt phai"*. Triết lý này chính là nguồn động lực quan trọng giúp chúng tôi biên soạn cuốn *"Sử dụng AM-GM để chứng minh bất đẳng thức"*.

Cuốn sách này một lần nữa đã đánh dấu sự thay đổi trong phong cách viết của nhóm tác giả, với nhiều kinh nghiệm quý báu được rút ra từ thành công của cuốn sách cùng bộ là *"Sử dụng phương pháp Cauchy Schwarz để chứng minh bất đẳng thức"*.

Ở đây, bạn sẽ nhận được những chia sẻ nhiệt tình kèm theo sự giải thích tường tận về các ý tưởng cũng như tính toán. Có những lời giải đôi khi không tránh được việc trình bày hơi dài, bởi lẽ chúng tôi muốn mọi chi tiết đều trở nên thật rõ ràng đối với bạn đọc.

Cuốn sách gồm những nội dung sau:

Chương 1. Những nét chung: Trong chương này, bạn đọc sẽ được biết thêm về lịch sử ra đời của bất đẳng thức AM-GM và một số chứng minh đặc sắc cho nó.

Chương 2. Một số kĩ thuật thường sử dụng: Một trong những quan tâm của nhiều bạn đọc khi theo dõi một lời giải là tại sao có lời giải như thế? Tại sao lại thêm số này, bớt số kia? Tại sao bài tập này lại dùng được AM-GM?

Chương này sẽ giúp các bạn giải tỏa thắc mắc đó. Với mỗi kĩ thuật, trước tiên chúng tôi giới thiệu cách phân tích và định hướng trong việc tìm tòi lời giải, tiếp theo là vận dụng những lí thuyết ấy để giải quyết nhiều lớp bài toán cơ bản, và sau cùng là các bài tập áp dụng.

Chương 3. Các bài toán tổng hợp: Trong thực tế giải toán, các bất đẳng thức ta gặp thường rất đa dạng và không rơi vào *dạng* như các bài toán ở chương 2, lúc này ta cần phải phối hợp khéo léo các kĩ thuật mới giải được chúng. Vậy ở chương 3, một lần nữa bạn sẽ ôn lại những kiến thức cơ bản được hệ thống từ chương trước, sau đó là rèn luyện tư duy ứng biến linh hoạt một cách linh hoạt trước những vấn đề đòi hỏi sự sáng tạo.

Phụ lục 1. Một số chuyên đề nâng cao: Gồm 2 phần.

- + Sắp thứ tự các biến – Đơn giản mà hiệu quả.
- + Những bài toán lí thú xoay quanh một đại lượng hoán vị.

Phụ lục 2. Các kết quả và kí hiệu cơ bản được dùng trong sách: Để giúp độc giả tiết kiệm thời gian của mình, chúng tôi đã hệ thống lại các kết quả và kí hiệu (không kèm theo chứng minh) được dùng trong cuốn sách này.

Phụ lục 3. Một số chia sẻ cùng bạn đọc: Đây là điểm nhấn quan trọng, cũng là phần kết của cuốn sách với những kinh nghiệm toán học, kinh nghiệm thành công mà chúng tôi đã học hỏi, tích lũy trong một thời gian dài, nay xin được trải lòng cùng bạn đọc. Phần này gồm có các mục sau:

- + *Toán học và cuộc sống;*
- + *Tản mạn về bất đẳng thức;*
- + *Đốt đèn suy nghĩ về thành công đối với các bạn trẻ.*

Nhân đây, nhóm tác giả xin được bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới thầy Trần Hữu Hiệp (THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam), thầy Trần Phương (Phó Giám đốc Trung tâm Hỗ trợ & Phát triển tài năng), các anh Nguyễn Văn Dũng (Học viên Kỹ thuật Quân sự), Trần Quang Hùng (Khối Phổ thông Chuyên Toán – Tin, Đại học Khoa học tự nhiên HN) đã dành thời gian để đọc bản thảo và đưa ra những góp ý tích cực. Xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Nhà giáo Hoàng Kiều cùng chủ Nguyễn Đình Sơn – Giám đốc Nhà sách Hồng Ân, đã quan tâm, giúp đỡ chúng tôi ngay từ những ngày đầu tiên cho tới khi ấn phẩm đặc biệt này ra đời. Cuối cùng, xin cảm ơn bạn Nguyễn Hồng Nhung (Học viện Công Nghệ Hoàng Gia Melbourne) đã nhiệt tình trong việc tìm kiếm, cung cấp cho chúng tôi những tài liệu lịch sử toán học quý giá và bạn Hoàng Kiều Nam đã đóng góp những bài toán và lời giải thú vị.

Mặc dù được biên soạn một cách công phu nhưng chắc chắn thiếu sót là điều khó tránh khỏi. Nhóm tác giả hi vọng sẽ nhận được nhiều ý kiến phản hồi từ bạn đọc để cuốn sách có thể hoàn thiện hơn nữa trong lần tái bản tiếp theo.

Mọi thư từ góp ý vui lòng liên hệ:

Công Ty Đào Tạo & Tư Vấn Giáo Dục Tia Sáng.

Địa chỉ: Số 4 – tổ 16A – Khuong Trung – Thanh Xuân – Hà Nội.

Điện thoại: 091 2772 656

Email: tiasanggiaoduc@gmail.com

CÁC TÁC GIẢ

Lời tựa

"Một cuốn sách trong những cuốn sách mà tôi thích".
Làm thế nào để giải được đúng, giải nhanh một bài toán, nhất là bất đẳng thức? Các em học sinh sẽ tìm được câu trả lời ở chương II và phần Phụ lục cuối sách.

Với những người dạy Toán, chúng ta sẽ thấy thêm những gợi ý cho học trò của mình và cho chính mình, bởi một vấn đề chắc không chỉ có một cách giải quyết duy nhất, vậy thì: nếu ta lại nhìn vấn đề ấy theo một hướng khác thì sao? Chương III sẽ mang đến thêm những bài toán để ta tập dượt và suy ngẫm.

Tôi quý trọng hai tác giả trẻ này. Mặc dù họ chưa thực sự là những người thầy giáo, nhưng cách trình bày theo định hướng sư phạm đã và sẽ làm cho họ sớm trưởng thành và những cuốn sách của họ sau này sẽ càng hữu ích hơn với số đông độc giả.

Trần Hữu Hiệp

Nguyên Tổ trưởng Tổ Toán THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam

NHỮNG NÉT CHUNG

*"This, therefore, is Mathematics:
 She reminds you of the invisible forms of the soul;
 she gives life to her own discoveries;
 she awakens the mind and purifies the intellect;
 she brings to light our intrinsic ideas;
 she abolishes oblivion and ignorance which are ours by birth..."*
Diadochus Proclus

I GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Trong chương trình Toán phổ thông hiện nay, chúng ta đều biết đến bất đẳng thức sau:

Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm, thì

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Bất đẳng thức này có tên gọi chính xác là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân* (*Inequality of Arithmetic Mean and Geometric Mean*). Ở nhiều nước trên thế giới, người ta gọi bất đẳng thức này theo kiểu viết tắt là *bất đẳng thức AM-GM* (*Arithmetic Mean - Geometric Mean*).

Ở nước ta, bất đẳng thức này được gọi theo tên của nhà Toán học người Pháp *Augustin-Louis Cauchy* (1789 – 1857), tức là *bất đẳng thức Cauchy*. Thật ra, đây là một cách gọi tên không chính xác vì Cauchy không phải là người đề xuất ra bất đẳng thức này mà chỉ là người đưa ra một phép chứng minh đặc sắc cho nó. Vậy bất đẳng thức AM-GM đã ra đời và phát triển như thế nào? Câu hỏi mang tính lịch sử này đã thu hút được nhiều sự quan tâm của nhà Toán học hiện đại.

G. H. Hardy (1877 – 1947), một nhà toán học xuất sắc người Anh nổi tiếng với bài luận *A Mathematician's Apology*, hay với phương pháp *Hardy Littlewood circle* – một trong những công cụ thông dụng nhất hiện nay trong lĩnh vực Giải tích số, được coi là người tiên phong trong việc hệ thống và đưa ra những nghiên cứu về nguồn gốc các bất đẳng thức kinh điển.

Tiếp theo ta cần nhắc tới đóng góp của *D. S. Mitrinovic* (1908 – 1995) – nhà Toán học người Serbia với tham vọng thống kê và tập hợp *tất cả* các bất đẳng thức sơ cấp. Ông là một trong những thành viên sáng lập Hiệp hội Khoa học Serbia, được biết đến với câu danh ngôn độc đáo: “*There are no equalities, even in the human life, the inequalities are always met*” (tạm dịch “*Không có gì là bằng thức, thậm chí cả trong đời sống con người - bất đẳng thức luôn luôn hiện hữu*”).

Trong cuốn sách này, nhóm tác giả đã tham khảo, tổng hợp nhiều tư liệu lịch sử liên quan đến bất đẳng thức của những nhà Toán học trên, từ đó xâu chuỗi và xin được chia sẻ lại cùng bạn đọc.

Từ thời xa xưa, người cổ đại đã biết tới bất đẳng thức tam giác như một vấn đề xuất phát từ thực tế. Ít lâu sau, *Euclid* (Oclit) – vị “cha đẻ của hình học” đã sử dụng ý tưởng từ phương pháp hình học để chứng minh bất đẳng thức AM-GM tổng quát với $n = 2$ (AM-GM được coi là *bất đẳng thức nguyên thủy thứ hai* sau bất đẳng thức tam giác).

Vào thời kì cận đại, *Cauchy* (Côsi) được xem như người đầu tiên phát hiện và đưa ra phép chứng minh tài tình cho *bất đẳng thức AM-GM tổng quát* dựa trên phép quy nạp Toán học. Nhưng một điều ít người biết là trên thực tế, trước đó, vào năm 1729, *C. Maclaurin* (1698 – 1746), nhà toán học nổi tiếng người Scotland đã chứng minh được bất đẳng thức này. Ông có nhiều đóng góp lớn trong lĩnh vực bất đẳng thức. Tuy nhiên ông không chú trọng về việc đặt tên những bất đẳng thức tổng quát mình tìm được. Có lẽ vì vậy mà lịch sử bất đẳng thức AM-GM lại ghi dấu ấn của Cauchy chứ không phải là Maclaurin.

Xét về ý nghĩa Toán học, bất đẳng thức AM-GM được coi là một trong bốn câu nổi quan trọng cho sự phát triển bất đẳng thức từ thời đại của *Newton* đến đầu thế kỉ 20.

Trong cuốn sách “*Means and their Inequalities*” (Springer Publishing House 1/1988) của nhóm tác giả *P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, P. M. Vasic*, họ đã đưa ra trên 50 cách chứng minh cho bất đẳng thức AM-GM.

Sau đây là một số chứng minh thông dụng và phổ cập nhất hiện nay.

Cách 1. Đặt $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\alpha^n \geq x_1 x_2 \cdots x_n. \quad (2)$$

Với một bất đẳng thức tổng quát thì phép quy nạp Toán học có lẽ là con đường đầu tiên và khả thi nhất mà chúng ta nghĩ tới. Thật vậy, ta sẽ sử dụng phép quy nạp để chứng minh (2).

Cơ sở: Với $n = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả thiết quy nạp: Giả sử bất đẳng thức đúng với n ($n \geq 1$), tức: Với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, thì

$$\alpha^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_n.$$

Quy nạp: Xét $n+1$ số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, ta có

$$(n+1)\alpha = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}.$$

Nếu tất cả các số đều bằng α thì ta có đẳng thức và từ đó suy ra ngay điều phải chứng minh. Xét các trường hợp còn lại, dễ thấy tồn tại ít nhất một số nhỏ hơn α và một số lớn hơn α . Không mất tính tổng quát, giả sử $x_n > \alpha$ và $x_{n+1} < \alpha$. Khi đó,

$$(x_n - \alpha)(\alpha - x_{n+1}) > 0. \quad (3)$$

Xét n số $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x'_n$, trong đó $x'_n = x_n + x_{n+1} - \alpha \geq x_n - \alpha > 0$.

Từ đó suy ra

$$n\alpha = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1} - \alpha) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x'_n.$$

Do α là trung bình cộng của $x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha \geq (x_1 x_2 \dots x_{n-1} x'_n) \cdot \alpha = (x_1 x_2 \dots x_{n-1})(x'_n \alpha). \quad (4)$$

Mặt khác từ (3) ta lại có

$$(x_n + x_{n+1} - \alpha)\alpha - x_n x_{n+1} = (x_n - \alpha)(\alpha - x_{n+1}) > 0,$$

suy ra

$$(x_n + x_{n+1} - \alpha)\alpha > x_n x_{n+1}, \text{ hay } x'_n \alpha > x_n x_{n+1}. \quad (5)$$

Hiển nhiên ta có $\alpha > 0$. Nếu có ít nhất một trong các số $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ bằng không, dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng và dấu bằng không xảy ra. Xét các trường hợp còn lại, kết hợp (4) và (5) thu được

$$\alpha^{n+1} > (x_1 x_2 \dots x_{n-1})(x_n x_{n+1}) = x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}.$$

Từ đó, (1) được giải quyết hoàn toàn.

Cách 2. Xét hàm $f(x) = e^{x-1} - x$ có đạo hàm

$$f'(x) = e^{x-1} - 1.$$

Dễ thấy $f'(1) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 1$ nên ta có thể kết luận $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f(1) = 0$.

Từ đó suy ra $e^{x-1} - x \geq 0$, hay $x \leq e^{x-1}$ với mọi số thực x bất kì.

Bây giờ, xét một dãy các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ với trung bình cộng

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \alpha.$$

Áp dụng bất đẳng thức $x \leq e^{x-1}$ vừa chứng minh ở trên, ta có

$$\frac{x_1}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{\alpha} \leq e^{\frac{x_1}{\alpha}-1} \cdot e^{\frac{x_2}{\alpha}-1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{x_n}{\alpha}-1} = e^{\frac{x_1}{\alpha}-1 + \frac{x_2}{\alpha}-1 + \dots + \frac{x_n}{\alpha}-1},$$

tức là

$$\frac{x_1}{\alpha} \cdot \frac{x_2}{\alpha} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{\alpha} \leq e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\alpha} - n} = e^{\alpha \cdot n - n} = e^0 = 1.$$

Từ đây, ta được

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \alpha^n, \text{ hay } \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \alpha.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \alpha$.

Cách 3. Với $n = 1$ và $n = 2$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n = 2k$. Thật vậy, sử dụng kết quả trường hợp $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[2k]{x_1 x_2 \dots x_{2k}} &= \sqrt{\left(\sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} \right) \left(\sqrt[k]{x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{2k}} \right)} \\ &\leq \frac{\sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} + \sqrt[k]{x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{2k}}}{2} \\ &\leq \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{2k}}{k}}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2k}}{2k}. \end{aligned}$$

Từ trên, dễ dàng suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Đến đây, ta có tiếp tục như sau: Với mỗi n tùy ý, ta tìm được số q sao cho

$$n + q = 2^m.$$

Khi đó, với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+q} \geq 0$, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+q}}{n + q} \geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+q}}.$$

Trong bất đẳng thức này, chọn $a_1 = x_1, a_2 = x_2, \dots, a_n = x_n$ và

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+q} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

ta thu được ngay $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

Cách 4. Sử dụng đạo hàm kết hợp với quy nạp.

Với $n = 1$, ta có bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với n , ta chứng minh nó cũng đúng cho $n + 1$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_{n+1} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$.

Khi đó, dễ thấy $x_{n+1} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Ta coi x_{n+1} là biến số, còn các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ là hằng.

Xét hàm số

$$f(x_{n+1}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} - x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x_{n+1}) &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n \\ &\geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}{n+1} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n \\ &\geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n = 0. \end{aligned}$$

Do đó $f(x_{n+1})$ là hàm đồng biến trên miền $\left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, +\infty \right)$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^{n+1} - x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \left[\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n \right] \\ \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) \left[\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n \right] = 0.$$

Như vậy, ta có

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} \geq x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1},$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}}.$$

Vậy bất đẳng thức (1) cũng đúng với $n+1$, nghĩa là cũng đúng với mọi số tự nhiên n .

Cách 5. Để thấy (1) hiển nhiên đúng với $n=1$, do đó ta chỉ cần xét trường hợp $n \geq 2$. Ngoài ra, ta thấy rằng nếu trong x_i có một số bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, do vậy chỉ cần xét $x_i > 0$. Khi đó, bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{A_n}{G_n} \geq 1,$$

trong đó $A_n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n$ và $G_n = x_1 x_2 \dots x_n$.

Ta sẽ chứng minh: $\frac{A_n}{G_n} \geq \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}$. (6)

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{nx_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \left[\frac{n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})}{(n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} \right]^{n-1} \leq 1.$$

Đặt $a = \frac{nx_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$ và $b = \frac{n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})}{(n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}$ thì ta có

$$a, b > 0 \text{ và } a + (n-1)b = n.$$

Bất đẳng thức trên trở thành $ab^{n-1} \leq 1$.

Thay $a = n - (n - 1)b$, ta được

$$\begin{aligned} [n - (n - 1)b]b^{n-1} &\leq 1, \\ n(b^n - b^{n-1}) - (b^n - 1) &\geq 0, \\ nb^{n-1}(b - 1) - (b - 1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b + 1) &\geq 0, \\ (b - 1)[nb^{n-1} - (b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + b + 1)] &\geq 0, \\ (b - 1)[(n - 1)(b^{n-1} - b^{n-2}) + (n - 2)(b^{n-2} - b^{n-3}) + \dots + (b - 1)] &\geq 0, \\ (b - 1)^2[(n - 1)b^{n-2} + (n - 2)b^{n-3} + \dots + 2b + 1] &\geq 0. \end{aligned}$$

Do bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta suy ra (6) cũng đúng.

Bây giờ, sử dụng liên tiếp (6), ta được

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} \geq \dots \geq \frac{A_2}{G_2} \geq \frac{A_1}{G_1} = 1.$$

2 CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP CỦA AM-GM

Bất đẳng thức AM-GM có nhiều ý nghĩa và ứng dụng trong việc giải toán bất đẳng thức. Ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có thể giải quyết được nhiều lớp bài toán tìm cực trị và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số mà không cần dùng tới kiến thức Giải tích cao cấp.

Trước tiên, chúng ta quan tâm nhiều nhất đến hai trường hợp riêng của bất đẳng thức AM-GM là

• *Trường hợp $n = 2$.* Lúc này bất đẳng thức được viết lại thành: Nếu a, b là các số thực không âm, thì

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bất đẳng thức này còn được viết ở hai dạng khác tương đương là

$$ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2, \quad (a + b)^2 \geq 4ab, \quad a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}.$$

• *Trường hợp $n = 3$.* Ta có bất đẳng thức AM-GM cho ba biến không âm: Nếu a, b, c là các số thực không âm, thì

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Trong thực tế áp dụng, ta còn sử dụng một dạng khác tương đương của bất đẳng thức này là

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$$

Sau đây là 1 chuỗi đánh giá được thiết lập dựa trên bất đẳng thức AM-GM.
Với mọi số thực a, b, c , ta luôn có

$$(i) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$(ii) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$(iii) \quad (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$(iv) \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$$

$$(v) \quad (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Chứng minh

(i) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ hai số dạng $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad b^2 + c^2 \geq 2bc, \quad c^2 + a^2 \geq 2ca.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca),$$

từ đó suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

(ii) Bất đẳng thức này tương đương với

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Đây chính là bất đẳng thức vừa chứng minh ở phần (i).

(iii) Sử dụng phép khai triển tương tự như trên.

(iv) Để ý rằng $abc(a+b+c) = (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab)$. Vậy nếu ta đặt $x = ab, y = bc, z = ca$ thì khi đó, bất đẳng thức (iv) sẽ trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Một lần nữa, ta lại thu được bất đẳng thức (i), chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi $ab = bc = ca$, tức $a = b = c$, hoặc $b = c = 0$, hoặc $c = a = 0$, hoặc $a = b = 0$.

(v) Tương tự như (iv), đặt $x = ab, y = bc, z = ca$. Lần này ta thu được bất đẳng thức tương tự ở với (iii) là

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

Đẳng thức xảy ra khi $ab = bc = ca$, tức $a = b = c$, hoặc $b = c = 0$, hoặc $c = a = 0$, hoặc $a = b = 0$.

3 BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM SUY RỘNG

Trong cách chứng minh thứ hai của bất đẳng thức AM-GM mà ta đã trình bày ở phần 1 có sử dụng bất đẳng thức sau: Với mọi số thực x bất kì, ta có

$$e^{x-1} \geq x.$$

Sử dụng kết quả này, ta còn có thể suy ra một kết quả khác tổng quát hơn, đó là bất đẳng thức AM-GM suy rộng:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Khi đó ta có

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \geq a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n}.$$

Chứng minh

Nếu $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$ thì ta có $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, và bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n > 0$.

Đặt $a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n > 0$. Ta có: $a = a^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$,

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_1} \left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_2} \dots \left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_n} \leq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức $x \leq e^{x-1}$, ta có: $\frac{a_1}{a} \leq e^{\frac{x_1}{a} - 1}$,

từ đó suy ra: $\left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_1} \leq e^{\frac{x_1^2}{a} - x_1}$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_2} \leq e^{\frac{x_2^2}{a} - x_2}, \dots, \left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_n} \leq e^{\frac{x_n^2}{a} - x_n}.$$

Nhân các bất đẳng thức trên lại theo về, ta suy ra

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_1} \left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_n} \leq e^{\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n}{a} - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} = e^{1-1} = 1.$$

Bất đẳng thức AM-GM suy rộng được chứng minh.

Nhận xét. Ngoài cách chứng minh như trên, ta cũng có thể sử dụng quy nạp. Bạn đọc có thể tự thử sức mình với cách chứng minh này.

4 SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KINH ĐIỂN KHÁC

Có rất nhiều bất đẳng thức kinh điển (mà chúng ta vẫn thường hay sử dụng) có thể được suy ra từ bất đẳng thức AM-GM. Dưới đây, chúng ta sẽ sử dụng AM-GM để chứng minh lại các kết quả kinh điển đó.

4.1. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz được phát biểu như sau:

Với hai dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2). \quad (1)$$

Trong thế giới của những bất đẳng thức thì AM-GM và Cauchy-Schwarz được xem là hai bất đẳng thức kinh điển và thông dụng nhất. Chúng thường được sử dụng trong việc giải toán và chứng minh bất đẳng thức.

Và một điều đặc biệt là, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz lại có thể được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức AM-GM. Sau đây là chứng minh (bằng cách sử dụng AM-GM) của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ thì ta có $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ và (1) hiển nhiên đúng.

Tương tự như vậy với trường hợp $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$.

Bây giờ, ta xét trường hợp $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ và $\sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$. Lấy căn bậc hai hai

vế của (1), sau đó chia cả hai vế cho $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}$, ta được

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \right| \leq 1.$$

Tôi đây, sử dụng tính chất về dấu giá trị tuyệt đối kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| |b_i|}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

4.2. Chứng minh bất đẳng thức Holder

Ở trên, ta đã sử dụng thành công AM-GM để chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Có một điểm đáng chú ý là, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz mới chỉ cho phép ta so sánh các đại lượng với lũy thừa 2. Vậy trong trường hợp các số mũ khác thì sao?

Xuất phát từ câu hỏi này, nhà Toán học người Đức *Otto Ludwig Holder* (1859 – 1937) đã tìm được dạng mở rộng cho bất đẳng thức này. Và tên ông đã được dùng để đặt cho bất đẳng thức tổng quát đó – *bất đẳng thức Holder*.

Cho m, n là hai số nguyên dương và x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) là các số thực dương tùy ý. Giả sử $w_1, w_2, \dots, w_n$ là các số dương sao cho

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} (x_{11} + \dots + x_{m1})^{w_1} (x_{12} + \dots + x_{m2})^{w_2} \dots (x_{1n} + \dots + x_{mn})^{w_n} &\geq \\ &\geq x_{11}^{w_1} x_{12}^{w_2} \dots x_{1n}^{w_n} + x_{21}^{w_1} x_{22}^{w_2} \dots x_{2n}^{w_n} + \dots + x_{m1}^{w_1} x_{m2}^{w_2} \dots x_{mn}^{w_n}. \end{aligned}$$

Chứng minh

Đặt $y_i = x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{mi}$ và $y_{ji} = \frac{x_{ji}}{y_i}$ với

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \text{ thì ta có } y_{1i} + y_{2i} + \dots + y_{mi} = 1$$

và

$$\begin{aligned} x_{11}^{w_1} x_{12}^{w_2} \dots x_{1n}^{w_n} + x_{21}^{w_1} x_{22}^{w_2} \dots x_{2n}^{w_n} + \dots + x_{m1}^{w_1} x_{m2}^{w_2} \dots x_{mn}^{w_n} &= \\ &= y_{11}^{w_1} y_{12}^{w_2} \dots y_{1n}^{w_n} (y_{11}^{w_1} y_{12}^{w_2} \dots y_{1n}^{w_n} + y_{21}^{w_1} y_{22}^{w_2} \dots y_{2n}^{w_n} + \dots + y_{m1}^{w_1} y_{m2}^{w_2} \dots y_{mn}^{w_n}). \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$y_{11}^{w_1} y_{12}^{w_2} \dots y_{1n}^{w_n} + y_{21}^{w_1} y_{22}^{w_2} \dots y_{2n}^{w_n} + \dots + y_{m1}^{w_1} y_{m2}^{w_2} \dots y_{mn}^{w_n} \leq 1.$$

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng, ta được

$$y_{11}^{w_1} y_{12}^{w_2} \cdots y_{1n}^{w_n} \leq w_1 y_{11} + w_2 y_{12} + \cdots + w_n y_{1n},$$

$$y_{21}^{w_1} y_{22}^{w_2} \cdots y_{2n}^{w_n} \leq w_1 y_{21} + w_2 y_{22} + \cdots + w_n y_{2n},$$

.....

$$y_{m1}^{w_1} y_{m2}^{w_2} \cdots y_{mn}^{w_n} \leq w_1 y_{m1} + w_2 y_{m2} + \cdots + w_n y_{mn}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế, ta suy ra

$$\begin{aligned} y_{11}^{w_1} y_{12}^{w_2} \cdots y_{1n}^{w_n} + y_{21}^{w_1} y_{22}^{w_2} \cdots y_{2n}^{w_n} + \cdots + y_{m1}^{w_1} y_{m2}^{w_2} \cdots y_{mn}^{w_n} &\leq \\ &\leq w_1 (y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{m1}) + \cdots + w_n (y_{1n} + y_{2n} + \cdots + y_{mn}) \\ &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức Holder được chứng minh.

4.3. Chứng minh bất đẳng thức Minkowski

Trong phần trên, ta đã chứng minh được bất đẳng thức Holder bằng cách sử dụng AM-GM. Và từ bất đẳng thức Holder, ta có thể suy ra được một kết quả kinh điển khác – bất đẳng thức Minkowski:

Cho m, n là hai số nguyên dương và x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) là các số thực dương tùy ý.

$$\text{Khi đó với mọi } p > 1, \text{ ta có: } \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } q = \frac{p}{p-1} \text{ thì ta có } q > 1 \text{ và } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Do đó, theo bất đẳng thức Holder,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^p &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m a_{ij} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^{p-1} \right] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^{p-1} \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^p \right]^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \right] = \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Bất đẳng thức Minkowski được chứng minh.

MỘT SỐ KỸ THUẬT THƯỜNG SỬ DỤNG

*"Each problem that I solved became a rule,
which served afterwards to solve other problems"*

Rene Descartes

1 NHỮNG KỸ NĂNG CƠ BẢN NHẤT CẦN CÓ

Để sử dụng thành công bất đẳng thức AM-GM, đầu tiên độc giả cần trang bị cho mình đầy đủ công cụ cơ bản (gồm những biến thể AM-GM thường dùng). Sau đó là việc rèn luyện cách nhìn tổng quan về từng lớp bài toán cũng như những phương pháp, những kỹ thuật cụ thể cho từng dạng. Có những bài toán thoát nhìn có thể ra ngay lời giải, nhưng cũng có không ít bài toán sẽ làm tổn của bạn hàng ngày, hàng tuần lễ, thậm chí lâu hơn nữa.

Trong cuốn sách này, các vấn đề được trình bày từ đơn giản đến phức tạp, phù hợp với lối tư duy phát triển phổ biến hiện nay. Sau đây là những ví dụ đậm chất "nguyên thủy", được coi như màn khởi động nhẹ nhàng cho cuộc hành trình khám phá thế giới bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh

$$xy(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, ta có

$$xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2} \frac{[2xy + (x^2 + y^2)]^2}{4} = \frac{(x+y)^4}{8} = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. □

Ví dụ 2. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh

$$x^3 y^3 (x^3 + y^3) \leq 2.$$

Lời giải

Do $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x^2 - xy + y^2)$ nên ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh

$$x^3 y^3 (x^2 - xy + y^2) \leq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 4 số dạng: $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$,

ta có: $x^3y^3(x^2 - xy + y^2) = (x)(xy)(xy)(x^2 - xy + y^2)$

$$\leq \left[\frac{xy + xy + xy + (x^2 - xy + y^2)}{4}\right]^4 = \left[\frac{(x+y)^2}{4}\right]^4 = 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. □

Nhận xét. Từ ví dụ 1 và ví dụ 2, một cách tự nhiên, ta nghĩ tới bài toán tổng quát sau: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 2$ và hằng số $k \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng

$$x^k y^k (x^k + y^k) \leq 2.$$

Bài toán này xin được dành lại cho bạn đọc thử sức. (Gợi ý: Ta có thể dùng phép quy nạp toán học để chứng minh kết quả này).

Ví dụ 3. Cho $c > 0$ và $a, b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$P = \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{b-c}{b}} \leq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$P \leq \frac{\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}}{2} = \frac{\frac{c}{b} + 1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + 1 - \frac{c}{b}}{2} = 1.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Ví dụ, đẳng thức có thể xảy ra khi $a = b = 2c$. □

Ví dụ 4. Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{x^3 + 3yzt} + \frac{y^3}{y^3 + 3ztx} + \frac{z^3}{z^3 + 3txy} + \frac{t^3}{t^3 + 3xyz} \geq 1.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$, dễ thấy

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^3 + 3yzt} + \frac{y^3}{y^3 + 3ztx} + \frac{z^3}{z^3 + 3txy} + \frac{t^3}{t^3 + 3xyz} &\geq \\ &\geq \frac{x^3}{x^3 + (y^3 + z^3 + t^3)} + \frac{y^3}{y^3 + (z^3 + t^3 + x^3)} + \\ &+ \frac{z^3}{z^3 + (t^3 + x^3 + y^3)} + \frac{t^3}{t^3 + (x^3 + y^3 + z^3)} = 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t > 0$. □

Ví dụ 5. Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn

$$(a + b + c)(b + c + d)(c + d + a)(d + a + b) > 0.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\sqrt{a(b+c+d)} \leq \frac{a+(b+c+d)}{2},$$

suy ra:
$$\frac{2\sqrt{a(b+c+d)}}{a+b+c+d} \leq 1.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này cho $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \geq 0$, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \geq \frac{2a}{a+b+c+d}. \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d}, \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d},$$

$$\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}.$$

Cộng theo về bốn bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \\ & \geq \frac{2a}{a+b+c+d} + \frac{2b}{a+b+c+d} + \frac{2c}{a+b+c+d} + \frac{2d}{a+b+c+d} = 2. \end{aligned}$$

Phép chứng minh đến đây được hoàn tất.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong a, b, c, d có hai số bằng nhau và hai số bằng 0. $\square$

Nhận xét. Bạn đọc cũng có thể nhận ra đánh giá (1) bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \frac{2a}{a+(b+c+d)}. \quad (2)$$

Tuy nhiên, cách trình bày này không phù hợp với chương trình sách giáo khoa của nước ta, vì nếu $a = 0$ thì sẽ không tồn tại đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}}.$$

Và cũng chính vì lý do như vậy, chúng tôi đã chọn cách trình bày khả rườm rà như trên để tránh được sự cố ngoài ý muốn này. Mặc dù như thế, ý tưởng của chúng ta vẫn là xuất phát từ (2).

Ví dụ 6. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} > 0.$$

Từ đó suy ra

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. $\square$

Ví dụ 7. Cho $x, y > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)} \geq 8$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)} &= \frac{x^3}{y-1} + \frac{y^3}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{x^3}{y-1} \cdot \frac{y^3}{x-1}} \\ &= \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, lại dễ ý rằng nếu sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ hai số dạng

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ thì}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= \sqrt{1 \cdot (x-1)} \leq \frac{1+(x-1)}{2} = \frac{x}{2}, \\ \sqrt{y-1} &= \sqrt{1 \cdot (y-1)} \leq \frac{1+(y-1)}{2} = \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Nhân hai bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\sqrt{(x-1)(y-1)} \leq \frac{xy}{4},$$

$$\text{suy ra} \quad \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} \geq 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta dễ dàng thu được điều phải chứng minh.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x^3}{y-1} = \frac{y^3}{x-1} \\ x=2, y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2. \quad \square$$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta luôn có

$$\frac{a^{11}}{bc} + \frac{b^{11}}{ca} + \frac{c^{11}}{ab} + \frac{3}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^9 + b^9 + c^9 + 9}{2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^{11}}{bc} + abc \geq 2a^6.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, ta suy ra

$$\frac{a^{11}}{bc} + \frac{b^{11}}{ca} + \frac{c^{11}}{ab} \geq 2(a^8 + b^8 + c^8) - 3abc.$$

Vậy chỉ cần chứng minh được

$$2(a^8 + b^8 + c^8) - 3abc + \frac{3}{a^2b^2c^2} \geq \frac{a^6 + b^6 + c^6 + 9}{2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$3(a^6 + b^6 + c^6) + \frac{6}{a^2b^2c^2} - 6abc \geq 9.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq 3a^2b^2c^2.$$

Do đó, bài toán quy về chứng minh

$$9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \geq 9 \text{ với } t = abc > 0.$$

Đây là một kết quả đúng, vì theo AM-GM ta có

$$\begin{aligned} 9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t &\geq 9t^2 + \frac{6}{t^2} - 3(t^2 + 1) = 6\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 3 \\ &\geq 6 \cdot 2\sqrt{t^2 \cdot \frac{1}{t^2}} - 3 = 12 - 3 = 9. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 9. Cho các số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2}{abcd} \geq 64.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2 \geq 64abcd.$$

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM dạng $(x+y)^2 \geq 4xy$, ta có

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4d(a+b+c),$$

$$(a+b+c)^2 \geq 4c(a+b), (a+b)^2 \geq 4ab.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo về, ta suy ra

$$(a+b)^2(a+b+c)^2(a+b+c+d)^2 \geq 64abcd(a+b)(a+b+c). \quad (1)$$

Từ đó, bằng cách đơn giản cả hai vế của (1) cho $(a+b)(a+b+c)$, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d = a + b + c \\ c = a + b \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow d = 2c = 4b = 4a > 0. \quad \square$$

Ví dụ 10. Cho các số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}} + \frac{16abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \geq 5.$$

Lời giải

$$\text{Để ý rằng: } a+b+c+d = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+a}{2},$$

do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2\sqrt[4]{abcd}} + \frac{b+c}{2\sqrt[4]{abcd}} + \frac{c+d}{2\sqrt[4]{abcd}} + \frac{d+a}{2\sqrt[4]{abcd}} + \\ & + \frac{16abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \geq 5, \end{aligned}$$

hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM bộ bốn số thì

$$\begin{aligned} VT & \geq 5 \sqrt[4]{\frac{a+b}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{b+c}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{c+d}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{d+a}{2\sqrt[4]{abcd}} \cdot \frac{16abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}} \\ & = 5. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d > 0$. $\square$

Ví dụ 11. Cho $x > 0$ và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương tùy ý không lớn hơn x .

Chứng minh rằng

$$\frac{x^{n+1}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} - (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \geq \frac{x^n}{n}.$$

Lời giải

Đặt $t = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, $0 < t \leq x$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) & \leq \left[\frac{(x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_n)}{n} \right]^n \\ & = (x - t)^n. \end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được: $\frac{x^{n+1}}{nt} - (x-t)^n \geq \frac{x^n}{n}$.

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\frac{x^n(x-t)}{nt} \geq (x-t)^n,$$

$$nt(x-t)^{n-1} \leq x^n.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} nt(x-t)^{n-1} &= \frac{n}{n-1} \cdot (n-1)t \cdot (x-t)^{n-1} \\ &\leq \frac{n}{n-1} \left[\frac{(n-1)t + (n-1)(x-t)}{n} \right]^n = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} x^n \leq x^n. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = x$. $\square$

BÀI TẬP

1. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \frac{8}{9}(a+b)(b+c)(c+a).$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$2^{a^2} + 2^{b^2} + 2^{c^2} \geq 2^{ab} + 2^{bc} + 2^{ca}.$$

4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}.$$

5. Chứng minh rằng với $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ là các số thực dương, ta có

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) &\geq \\ &\geq (axm + byn + czp)^3. \end{aligned}$$

6. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=3$ thì

$$\frac{a^2b}{2a+b} + \frac{b^2c}{2b+c} + \frac{c^2a}{2c+a} \leq \frac{3}{2}.$$

7. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right).$$

8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

2 KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI

Trong bất đẳng thức, “kỹ thuật chọn điểm rơi” là một kỹ thuật tối quan trọng. Ý tưởng chính là việc xác định được dấu đẳng thức xảy ra khi nào để ta có thể sử dụng những đánh giá hợp lý. Bạn hãy tưởng tượng nếu bạn là một du khách nước ngoài, muốn biết đường đến hồ Gươm nhưng lại cầm trên tay tấm bản đồ TP Hồ Chí Minh và cố gắng tìm kiếm. Điều này là vô ích. Trong bất đẳng thức cũng như vậy, bất kì đánh giá nào (trong chuỗi đánh giá của bạn) không “bao toàn” được dấu bằng của bài toán thì chứng minh của bạn sẽ bị phủ nhận hoàn toàn. Hãy xét những ví dụ sau để hiểu rõ hơn điều chúng tôi muốn đề cập.

Ví dụ 2.2.1. Cho $x \geq 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$y = 3x + \frac{1}{2x}.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Lời giải sai. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, “dễ thấy”

$$y = 3x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt{6}.$$

Vậy ta có kết luận $\min y = \sqrt{6}$.

Nguyên nhân. Lời giải trên sơ dĩ sai vì trong đánh giá trên, dấu bằng của bài toán chỉ xảy ra khi $3x = \frac{1}{2x}$, tức $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Tuy nhiên, giá trị này lại

không nằm trong miền xác định của bài toán là $x \geq 1$ (vì $\frac{1}{\sqrt{6}} < 1$). Nói

cách khác, người đưa ra lời giải này đã chọn sai “điểm rơi” của bài toán.

Sau đây là lời giải đúng.

Lời giải đúng. Dự đoán bất đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Để “bảo toàn” được dấu bằng khi sử dụng AM-GM, ta sẽ chọn hằng số α sao cho

$$\alpha x = \frac{1}{2x}.$$

Cho $x = 1$, ta thu được $\alpha = \frac{1}{2}$. Từ đó, có lời giải,

$$y = 3x + \frac{1}{2x} = \frac{5x}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) \geq \frac{5x}{2} + 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{5x}{2} + 1 \geq \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

Vậy $\min y = \frac{7}{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x = 1$. $\square$

Ví dụ 2. Cho $a \geq 10, b \geq 100$ và $c \geq 1000$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Bài toán này thực chất có thể tách thành ba bài toán nhỏ là

- Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_1 = a + \frac{1}{a}$ với $a \geq 10$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_2 = b + \frac{1}{b}$ với $b \geq 100$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $P_3 = c + \frac{1}{c}$ với $c \geq 1000$.

Trước hết, ta xét biểu thức $P_1 = a + \frac{1}{a}$.

Dự đoán $\min P_1 = \frac{101}{10}$ đạt được khi $a = 10$. Khi đó, ta sẽ chọn α sao cho

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{a}.$$

Với $a = 10$, ta có ngay $\alpha = 100$.

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= \frac{99a}{100} + \left(\frac{a}{100} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{99a}{100} + 2\sqrt{\frac{a}{100} \cdot \frac{1}{a}} \\ &= \frac{99a}{100} + \frac{1}{5} \geq \frac{99 \cdot 10}{100} + \frac{1}{5} = \frac{101}{10}. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chỉ ra được

$$P_2 \geq 100 + \frac{1}{100}, \quad P_3 \geq 1000 + \frac{1}{1000}.$$

Từ đó, ta đi đến kết luận: $\min P = 1110 + \frac{111}{1000}$,

đạt được khi và chỉ khi $a = 10, b = 100$ và $c = 1000$. $\square$

Ví dụ 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$, khi đó

$$\begin{cases} a = b = c = \frac{1}{3} \\ a + b = b + c = c + a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Từ đó, đề “bảo toàn” được dấu bằng cho bài toán, ta sẽ đánh giá như sau.

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} + \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} + \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \leq 2.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} &\leq \frac{\frac{2}{3} + (a+b)}{2}, & \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} &\leq \frac{\frac{2}{3} + (b+c)}{2}, \\ \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} &\leq \frac{\frac{2}{3} + c+a}{2}. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế với chú ý $a + b + c = 1$, ta thu được ngay điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 4.

(a) Cho $x \geq 1$ và $y \geq 1$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy.$$

(b) Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right).$$

Phân tích & định hướng lời giải

(a) Ý tưởng đầu tiên chúng ta nghĩ tới là làm thế nào để phá bỏ được lớp căn thức ở vế trái (vì biểu thức bên vế phải không chứa căn). Một cách tự nhiên, ta nhớ lại bất đẳng thức AM-GM bộ hai số dạng

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Thật vậy, để ý rằng $\sqrt{y-1} = \sqrt{1 \cdot (y-1)} \leq \frac{1+(y-1)}{2} = \frac{y}{2}$.

Suy ra: $x\sqrt{y-1} \leq \frac{xy}{2}$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có: $y\sqrt{x-1} \leq \frac{xy}{2}$.

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1 = y - 1$ và $1 = x - 1$, tức $x = y = 2$.

(b) Nhận thấy $A = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$ là một biểu thức đối xứng chứa

x^2, y^2 ở dưới mẫu (tức là $xy \neq 0$) nên ta dự đoán dấu bằng sẽ xảy ra khi

$$x = y = \frac{1}{2},$$

khi đó $A = 9$. Sau đây, ta sẽ chứng minh nhận định này là đúng, tức

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \geq 9.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 9x^2y^2,$$

hay tương đương $1 \geq x^2 + y^2 + 8x^2y^2$.

Để ý rằng $1 \geq (x + y)^2$ nên ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh

$$(x + y)^2 \geq x^2 + y^2 + 8x^2y^2.$$

Sau khi thu gọn, ta viết được bất đẳng thức lại thành

$$2xy(1 - 4xy) \geq 0,$$

dùng vì theo AM-GM, ta có

$$0 < xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Bài toán được giải quyết xong.

Vậy ta kết luận $\min A = 9$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. $\square$

Ví dụ 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + xy = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Sai lầm thường gặp. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^2 + 1 \geq 2x, \quad y^2 + 1 \geq 2y, \quad x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta suy ra

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy = 8.$$

Do đó

$$P = x^2 + y^2 \geq 7.$$

Kết luận: $\min P = 7$.

Nhận xét. Lời giải trên là sai vì ta chỉ chứng minh được $P > 7$ chứ không phải $P \geq 7$. Thật vậy, nếu xét tới dấu bằng thì để thỏa mãn những đánh giá trên, ta phải có $x = y = 1$ và $x + y + xy = 8$. Tuy nhiên, điều này là không thể xảy ra, hay nói một cách khác $P > 7$.

Bạn đọc lưu ý rằng khi kết luận $\min$ -giá trị nhỏ nhất (hay $\max$ -giá trị lớn nhất) của 1 biểu thức là một hằng số nào đó thì nhất định phải chỉ ra được sự tồn tại của dấu bằng, đó là điều quan trọng nhất. Và sau đây là lời giải đúng.

Lời giải đúng. Để ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$8 = x + y + xy \leq x + y + \frac{(x+y)^2}{4} = t + \frac{t^2}{4},$$

trong đó $t = x + y$.

Từ đây ta suy ra $t^2 + 4t - 32 \geq 0$, tức $t \leq -8 \vee t \geq 4$.

Và do đó $t^2 \geq 16$. Mặt khác, ta lại có

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{t^2}{2} \geq \frac{16}{2} = 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \\ x + y + xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Vậy ta kết luận min $P = 8$. □

Ví dụ 6. Cho các số thực a, b thỏa mãn các điều kiện

$$0 \leq a \leq 3, 8 \leq b \leq 11 \text{ và } a + b = 11.$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích: $P = ab$.

Phân tích & định hướng lời giải

Từ các giả thiết $0 \leq a \leq 3, 8 \leq b \leq 11$ và $a + b = 11$, ta dự đoán P sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $a = 3$ và $b = 8$ (khi đó, $8a = 3b$). Vậy ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM-GM một cách khéo léo như sau

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{24} \cdot (8a) \cdot (3b) \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{(8a + 3b)^2}{4} = \frac{[3(a + b) + 5b]^2}{96} \\ &= \frac{(33 + 5a)^2}{96} \leq \frac{(33 + 5 \cdot 3)^2}{96} = 24. \end{aligned}$$

Vậy ta kết luận được $\max P = 24$, đạt được khi và chỉ khi $a = 3, b = 8$. □

Ví dụ 7. Cho các số thực $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 3$ thỏa mãn $a + b + c = 6$.

Chứng minh rằng: $abc \leq \frac{27}{4}$.

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{3}{2}, c = 3$. Khi đó, $a + b = c$.

Vì vậy, sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$, ta có

$$abc \leq \frac{c(a + b)^2}{4} = \frac{a + b}{4} \cdot c \cdot (a + b) \leq \frac{a + b}{4} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{4} = \frac{9}{4}(a + b).$$

Mặt khác, theo giả thiết thì $a + b + c = 6$ và $c \geq 3$ nên ta dễ dàng suy ra $a + b \leq 3$. Từ đó

$$abc \leq \frac{9}{4}(a + b) \leq \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{4}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Nhận xét. Với đa số những biểu thức ba biến đối xứng thì giá trị nhỏ nhất (và cả giá trị lớn nhất) của chúng thường đạt được khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$.

Trong bài toán này, để dự đoán min của P , ta sẽ thử chọn $a = b = c = \frac{2}{3}$, sau đó so sánh với trường hợp $a = b = 1, c = 0$ (trường hợp này tam giác của ta được gọi là tam giác suy biến). Thật thú vị khi trong bài toán này, ở cả hai trường hợp ta đều thu được $P = 8$.

Vậy ta sẽ thử chứng minh

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 8,$$

hay là (bước này được gọi là đồng bậc hoá bất đẳng thức)

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a + b + c)^3.$$

Ta có

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)] + 6abc,$$

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)] + 6abc &\leq \\ &\leq 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc, \end{aligned}$$

hay tương đương

$$\begin{aligned} P &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - ab(a + b - c) - bc(b + c - a) - ca(c + a - b) \geq 0. \end{aligned}$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$$a + b - c \geq 0, \quad b + c - a \geq 0, \quad c + a - b \geq 0.$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned} ab(a + b - c) + bc(b + c - a) + ca(c + a - b) &\leq \\ &\leq \frac{(a + b)^2}{4}(a + b - c) + \frac{(b + c)^2}{4}(b + c - a) + \frac{(c + a)^2}{4}(c + a - b) \\ &= \frac{(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - c(a + b)^2 - b(c + a)^2 - a(b + c)^2}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(a^3 + b^3 + c^3) + 2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] - 6abc}{4}$$

$$= \frac{(a^3 + b^3 + c^3) + [ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] - 3abc}{2}.$$

Suy ra

$$P \geq a^3 + b^3 + c^3 - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + \sum ab(a+b) - 3abc}{2}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)}{2} = \frac{P}{2}.$$

Do vậy, $P \geq 0$. Bài toán được giải quyết xong.

Vậy ta đi đến kết luận $\min P = 8$, đạt được khi $a = b = c = \frac{2}{3}$ hoặc khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị tương ứng. $\square$

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 2$.
Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^3y + y^3z + z^3x} + \sqrt{xy^3 + yz^3 + zx^3} \leq 2.$$

(Nguyễn Anh Cường)

Phân tích & định hướng lời giải

Để ý rằng dấu đẳng thức xảy ra ví dụ khi $x = y = 1, z = 0$. Khi đó,

$$\sqrt{x^3y + y^3z + z^3x} = \sqrt{xy^3 + yz^3 + zx^3}.$$

Vì vậy, ta hoàn toàn có thể sử dụng đánh giá $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ (hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AM-GM) để loại bỏ căn thức mà vẫn giữ nguyên được dấu bằng của bài toán. Vậy ta đã quy được bài toán về chứng minh

$$x^3y + y^3z + z^3x + xy^3 + yz^3 + zx^3 \leq 2,$$

hay tương đương

$$xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) \leq 2.$$

Mặt khác, dễ thấy

$$xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) \leq$$

$$\leq xy(x^2 + y^2 + z^2) + yz(y^2 + z^2 + x^2) + zx(z^2 + x^2 + y^2)$$

$$= (xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2.$$

Tới đây, áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, ta được

$$\begin{aligned}(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) &= \frac{1}{2} \cdot 2(xy + yz + zx) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{[2(xy + yz + zx) + (x^2 + y^2 + z^2)]^2}{4} \\ &= \frac{(x + y + z)^4}{8} = \frac{2^4}{8} = 2.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

Ví dụ 10. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác sao cho

$$5 \cos A + 6 \cos B + 7 \cos C = 9.$$

Chứng minh rằng: $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{7}{16}$.

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Đây là một bài toán rất đặc biệt. Tuy giả thiết cũng như bất đẳng thức cần chứng minh chứa những hệ số và số mũ hoàn toàn lệch nhau nhưng đẳng

thức lại xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Trước hết, ta sẽ “đại số hóa” bất đẳng

thức lượng giác này bằng phép đặt ẩn phụ như sau.

Đặt $x = \sin \frac{A}{2}, y = \sin \frac{B}{2}$ và $z = \sin \frac{C}{2}$ (dễ thấy $x, y, z > 0$). Khi đó, ta có một hệ quả quen thuộc là

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Ngoài ra từ giả thiết ta dễ dàng suy ra

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 = \frac{9}{2} \quad (\text{do } \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}).$$

Quay trở lại bài toán, ta cần chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{7}{16}$.

Đầu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{2}$ nên sử dụng bất đẳng thức M-GM kết hợp kỹ thuật chọn điểm rơi, ta có

$$\frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{2} + \frac{1}{16} \geq 3\sqrt{\frac{y^3}{2} \cdot \frac{y^3}{2} \cdot \frac{1}{16}} = \frac{3}{4}y^2 \Rightarrow y^3 \geq \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{16},$$

$$z^3 + \frac{1}{16} \geq 2\sqrt{z^3 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow z^3 \geq \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{16}.$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại theo vế, thu được

$$y^3 + z^3 \geq \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}.$$

Sử dụng đánh giá này kết hợp với (1), ta được

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &\geq x^3 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8} \\ &= x^3 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 9}{2} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{9}{4}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{5}{4} \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều. $\square$

Nhận xét. Bất đẳng thức (1) có thể được chứng minh bằng cách sử dụng AM-GM như sau: Do $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1$

nên ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$xyz = \sqrt{x^2 y^2 z^2} \leq \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3}.$$

Kết hợp với trên, ta thu được: $x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3} \geq 1,$

từ đó dễ dàng suy ra (1).

Trên đây, chúng ta đã được tiếp xúc với những bài toán mà ở đó việc dự đoán điểm rơi có thể được thực hiện khá dễ dàng. Tuy nhiên, trong thực tế, việc giải một bài toán không phải lúc nào cũng suôn sẻ như vậy. Có những bài toán mà nếu chỉ bằng quan sát và cảm nhận thì ta không thể nào dự đoán được điểm rơi sẽ là tại đâu (vì đôi lúc điểm rơi có thể là những điểm có giá

trị lẻ). Trong những trường hợp như thế, cách tốt nhất để vượt qua khó khăn chính là *giả định* điểm rơi sẽ đạt được tại một bộ nào đó rồi bằng những suy luận thích hợp, ta tìm cách đánh giá và chọn lựa bộ số cho thích hợp (có thể bạn sẽ phải giải nhiều phương trình, hệ phương trình thì mới chọn được bộ thích hợp). Để rõ hơn về ý tưởng này, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 11. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Để tìm min P , ta mong muốn có một bất đẳng thức dạng

$$x^2 + y^2 + 2z^2 \geq k(xy + yz + zx),$$

để từ đó sử dụng giả thiết $xy + yz + zx = 1$ và suy ra kết quả nếu dấu bằng có thể xảy ra. Bất đẳng thức này có dạng giống với kết quả cơ bản

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Một bất đẳng thức đã quá quen thuộc và chắc hẳn rằng mỗi chúng ta ai cũng biết được cách chứng minh, đó là thực hiện việc ghép cặp rồi sử dụng bất đẳng thức AM-GM

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx.$$

Từ đây gợi cho ta một điều: Tại sao lại không thử ghép cặp như thế cho bài toán này rồi sử dụng AM-GM? Có thể thấy được cơ sở của việc ghép cặp cho bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ là dựa trên hai yếu tố:

- Vế trái có dạng tổng của các bình phương, còn vế phải có dạng tổng của các tích. Chính từ điều đó gợi cho ta nghĩ đến việc sử dụng đánh

giá quen thuộc $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ (bất đẳng thức AM-GM cho hai số).

- Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Như vậy, muốn áp dụng kĩ thuật tương tự vào bài toán này, ta cần biết được dấu đẳng thức sẽ xảy ra khi nào. Tuy nhiên, việc quan sát bài toán chỉ cho ta một dữ kiện duy nhất, đó là ta có thể dự đoán được khi P đạt min thì dấu bằng sẽ xảy ra khi $x = y$ (do vai trò đối xứng của chúng), có nghĩa là ta vẫn chưa biết được giá trị cụ thể của x, y, z là bao nhiêu.

Lúc này ta làm như sau: Giả sử rằng khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì

$$x = y = a > 0, \quad z = b > 0, \quad (a^2 + 2ab = xy + yz + zx = 1).$$

(Ta chỉ cần xét miền số dương, vì khi thay (x, y, z) bởi $(-x, -y, -z)$ thì bài toán vẫn không đổi). Khi đó, $bx = by = az$ và để đảm bảo được dấu đẳng thức của bài toán thì cách sử dụng AM-GM sau là tự nhiên nhất

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad (1)$$

$$abyz \leq \frac{b^2 y^2 + a^2 z^2}{2}, \quad (2)$$

$$abzx \leq \frac{a^2 z^2 + b^2 x^2}{2}. \quad (3)$$

Cái mà ta mong đợi là đánh giá làm sao để có thể tận dụng được giả thiết

$$xy + yz + zx = 1.$$

Do đó, nếu cộng trực tiếp các bất đẳng thức (1), (2), (3) theo vế thì ta vẫn chưa thu được điều gì vì hệ số của xy, yz, zx chưa bằng nhau, ta vẫn chưa thể sử dụng được giả thiết. Như vậy, ta cần thêm một bước chuyển nhỏ để giúp đưa hệ số của xy, yz, zx về bằng nhau, đó là nhân cả hai vế của (1) cho ab , khi đó

$$abxy \leq \frac{ab(x^2 + y^2)}{2}. \quad (4)$$

Cộng ba bất đẳng thức (2), (3), (4) lại theo vế, ta suy ra

$$\begin{aligned} ab &= ab(xy + yz + zx) \leq \frac{ab(x^2 + y^2) + (b^2 y^2 + a^2 z^2) + (a^2 z^2 + b^2 x^2)}{2} \\ &= \frac{(ab + b^2)(x^2 + y^2) + 2a^2 z^2}{2}, \end{aligned}$$

tức $2ab \leq (ab + b^2)(x^2 + y^2) + 2a^2 z^2. \quad (5)$

Đến đây thì ý tưởng đã rõ, nếu ta chọn các số a, b sao cho hệ số của z^2 gấp 2 lần hệ số của x^2, y^2 , tức $2a^2 = 2(ab + b^2)$, thì vế phải của (5) sẽ có dạng của biểu thức P , cụ thể là

$$\begin{aligned} 2ab &\leq (ab + b^2)(x^2 + y^2) + 2(ab + b^2)z^2 \\ &= (ab + b^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) = (ab + b^2)P. \end{aligned}$$

Và ta sẽ thu được cái mình cần, đó là một đánh giá cho P với dấu đẳng thức có thể xảy ra, tức ta sẽ tìm được min P . Như vậy, các số a, b thích hợp mà ta đã *giả định* ở trên chính là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + 2ab = 1 \\ a^2 = ab + b^2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này (có thể sử dụng phương pháp thế, từ phương trình đầu suy ra $b = \frac{1-a^2}{2a}$, thay vào phương trình thứ hai sẽ tìm được

nghiệm), ta tìm được $a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}, b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}$. Từ đó ta suy ra

$$P \geq \frac{2ab}{b^2+ab} = \frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a} = \sqrt{5}-1,$$

với đẳng thức xảy ra khi $x = y = a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ và $z = b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}$. $\square$

Nhận xét. Mặc dù phải trải qua một quá trình dài kết hợp với nhiều suy luận như trên, ta mới đến được lời giải cho bài toán, nhưng khi trình bày lời giải thì ta không cần phải viết lại quy trình tìm ra và như thế nó sẽ trở nên khá ngắn gọn (chứ không phải dài dòng như ở trên). Ví dụ, ở bài này ta

có thể viết lại lời giải như sau: Đặt $a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} > 0$ và $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}} > 0$.

Khi đó dễ thấy $a^2 + 2ab = 1$ và $a^2 = ab + b^2$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$ab(x^2 + y^2) \geq 2abxy, \quad b^2y^2 + a^2z^2 \geq 2abyz, \quad b^2x^2 + a^2z^2 \geq 2abxz.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 2ab &= 2ab(xy + yz + zx) \leq ab(x^2 + y^2) + (b^2y^2 + a^2z^2) + (b^2x^2 + a^2z^2) \\ &= (ab + b^2)(x^2 + y^2) + 2a^2z^2 = a^2(x^2 + y^2) + 2a^2z^2 = a^2P, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$P \geq \frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a} = \sqrt{5}-1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = a$ và $z = b$.

Ví dụ 12. Cho x, y, z, t là các số thực thỏa mãn $xy + yz + zt + tx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + t^2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Ở bài này, nếu quan sát kỹ một chút, bạn đọc sẽ nhận thấy

$$xy + yz + zt + tx = (x+z)(y+t),$$

và qua đó nhận ra được vai trò của x và z trong bài toán là đối xứng (vì vai trò của chúng trong P cũng đối xứng). Như vậy, ta có thể dự đoán được khi P đạt min thì $x = z$. Nhưng cũng như bài trên, đây là dữ kiện duy nhất về điểm rơi mà ta có thể thu thập được từ việc quan sát bài toán. Do đó, ta cần sử dụng kỹ thuật *giả định* về điểm rơi rồi bằng những phân tích hợp lý đưa đến cách đánh giá và chọn lựa bộ số cho thích hợp.

Giả sử khi P đạt min thì $x = z = a > 0, y = b > 0$ và $t = c > 0$. Khi đó

$$bx = bz = ay, \quad cx = cz = at,$$

và ta nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$abxy \leq \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{2}, \quad (1)$$

$$abyz \leq \frac{a^2y^2 + b^2z^2}{2}, \quad (2)$$

$$aczt \leq \frac{c^2z^2 + a^2t^2}{2}, \quad (3)$$

$$actx \leq \frac{a^2t^2 + c^2x^2}{2}. \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta suy ra

$$abcxy \leq \frac{c(b^2x^2 + a^2y^2)}{2}, \quad (5)$$

$$abcyz \leq \frac{c(a^2y^2 + b^2z^2)}{2}, \quad (6)$$

$$abczt \leq \frac{b(c^2z^2 + a^2t^2)}{2}, \quad (7)$$

$$abctx \leq \frac{b(a^2t^2 + c^2x^2)}{2}. \quad (8)$$

Cộng các bất đẳng thức (5), (6), (7), (8) lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} abc &= abc(xy + yz + zt + tx) \\ &\leq \frac{c(b^2x^2 + a^2y^2) + c(a^2y^2 + b^2z^2) + b(c^2z^2 + a^2t^2) + b(a^2t^2 + c^2x^2)}{2} \\ &= \frac{(b^2c + bc^2)(x^2 + z^2) + 2a^2cy^2 + 2a^2bt^2}{2}, \end{aligned}$$

tức

$$(b^2c + bc^2)(x^2 + z^2) + 2a^2cy^2 + 2a^2bt^2 \geq 2abc. \quad (9)$$

Như vậy để tìm min P , ta chỉ cần chọn các số a, b, c thích hợp sao cho hệ số của x^3, y^3, t^3 chia nhau theo tỉ lệ $5 : 4 : 1$, tức là

$$\frac{b^2c + bc^2}{5} = \frac{2a^2c}{4} = \frac{2a^2b}{1},$$

Mặt khác, ta có đẳng thức xảy ra khi $x = z = a, y = b, t = c$, mà theo giả thiết thì $xy + yz + zt + tx = 1$ nên ta phải có: $ab + ba + ac + ca = 1$.

Và như vậy, ta đưa được bài toán về việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{bc(b+c)}{5} = \frac{a^2c}{2} = 2a^2b \\ a(b+c) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (10)$$

Giải hệ này, ta tìm được $a = \frac{1}{\sqrt[3]{50}}, b = \frac{1}{\sqrt[3]{200}}$ và $c = \frac{4}{\sqrt[3]{200}}$.

Khi đó, bất đẳng thức (9) trở thành

$$10a^2b(x^2 + z^2) + 8a^2by^2 + 2a^2b^2t^2 \geq 2abc,$$

suy ra $P = 5x^2 + 5z^2 + 4y^2 + t^2 \geq \frac{2abc}{2a^2b} = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt[3]{4}} = 2\sqrt[3]{2}$.

Đây chính là đáp số của bài toán, vì ta có đẳng thức xảy ra khi

$$x = z = a = \frac{1}{\sqrt[3]{50}}, \quad y = b = \frac{1}{\sqrt[3]{200}}, \quad t = c = \frac{4}{\sqrt[3]{200}}. \quad \square$$

Nhận xét 1. Ta có thể giải hệ (10) như sau: Sử dụng tính chất tỉ lệ thức

$$\frac{bc(b+c)}{5} = \frac{a^2c}{2} = 2a^2b = \frac{a^2b}{\frac{1}{2}} = \frac{a^2c + a^2b}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2a^2(b+c)}{5} = \frac{a}{5}.$$

Từ đó suy ra: $c = \frac{\frac{a}{5}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2}{5a}, \quad b = \frac{\frac{a}{5}}{2a^2} = \frac{a}{10}.$

Thay vào phương trình $bc(b+c) = a$, ta được

$$\frac{2}{5a} \cdot \frac{1}{10a} \cdot \left(\frac{2}{5a} + \frac{1}{10a} \right) = a,$$

ta tìm được ngay $a = \frac{1}{\sqrt[3]{50}}$. Từ đó dễ dàng tính được các giá trị của b, c .

Nhận xét 2. Một cách tổng quát, ta chứng minh được kết quả sau: Với mọi $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ và $m, n > 0$, thì

$$x^2 + my^2 + z^2 + nt^2 \geq \sqrt{\frac{2mn}{m+n}}(xy + yz + zt + tx).$$

Ví dụ 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^3.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Quan sát bài toán, điều trước tiên mà ta thấy được, đó là có thể dự đoán ngay rằng min P sẽ đạt được khi $a = b$ (do vai trò đối xứng của chúng).

Lại quan sát tiếp, ta thấy rằng giả thiết bài toán liên quan đến những biểu thức bậc nhất, còn P lại có lũy thừa 2 và 3, do vậy ta nghĩ ngay đến việc sử dụng AM-GM để chuyển những biểu thức này về dạng bậc nhất (cụ thể, với lũy thừa 2, ta sử dụng AM-GM hai số sẽ đưa được về dạng bậc nhất và với lũy thừa 3, việc áp dụng AM-GM bộ ba số sẽ giúp ta chuyển nó về dạng bậc nhất). Điều đáng nói là cũng như hai ví dụ trước, ở bài này ta vẫn không thể dự đoán được *điểm rơi* của nó là tại đâu. Do vậy, cách tốt nhất để vượt qua khó khăn lúc này chính là sử dụng *điểm rơi giả định*.

Giả sử tại $a = b = x > 0$ và $c = y > 0$ ($2x + y = 3$) thì P đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$a^2 + x^2 \geq 2ax, \quad (1)$$

$$b^2 + x^2 \geq 2bx, \quad (2)$$

$$c^3 + y^3 + y^3 \geq 3y^2c. \quad (3)$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại, ta suy ra được

$$(a^2 + b^2 + c^3) + 2x^2 + 2y^3 \geq 2x(a + b) + 3y^2c,$$

tức

$$P \geq [2x(a + b) + 3y^2c] - 2x^2 - 2y^3.$$

Khi đứng trước một bài toán, điều mà ta mong muốn là làm sao để có thể tận dụng được tối đa giả thiết của đề bài. Ở bài này cũng vậy, sẽ là vô nghĩa nếu giả thiết $a + b + c = 3$ không sử dụng được vào đây. Do đó, ý tưởng của ta là chọn các số x, y thích hợp sao cho ta có thể sử dụng được giả thiết. Muốn vậy thì hệ số của $a + b$ và c phải bằng nhau, tức là

$$2x = 3y^2.$$

Vậy điểm rơi thật sự của bài toán chính là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x = 3y^2 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta tìm được $x = \frac{19 - \sqrt{37}}{12}$, $y = \frac{\sqrt{37} - 1}{6}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &\geq 2x(a + b + c) - 2x^2 - 2y^3 = 6x - 2x^2 - 2y^3 \\ &= 6\left(\frac{19 - \sqrt{37}}{12}\right) - 2\left(\frac{19 - \sqrt{37}}{12}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{37} - 1}{6}\right)^3 = \frac{541 - 37\sqrt{37}}{108} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = x = \frac{19 - \sqrt{37}}{12}$ và $c = y = \frac{\sqrt{37} - 1}{6}$. $\square$

Ví dụ 14. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2a^3 + 3b^3 + 4c^3.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Cũng giống như bài trước, ý tưởng của ta cho bài này đó là tìm cách đánh giá AM-GM giúp đưa từ lũy thừa 3 về lũy thừa 2 (và bất đẳng thức thích hợp đó chính là AM-GM cho ba số, cụ thể là dạng $x^3 + x^3 + y^3 \geq 3x^2y$).

Ở bài này không có sự đối xứng nào nên ta không cần phải phân tích gì thêm mà cứ *giả định* ngay rằng P đạt min khi $a = x, b = y$ và $c = z$. Khi đó, vì $a, b, c > 0$ và $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$ nên ta phải có

$$x, y, z > 0 \text{ và } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1. \quad (1)$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$a^3 + a^3 + x^3 \geq 3xa^2,$$

$$b^3 + b^3 + y^3 \geq 3yb^2,$$

$$c^3 + c^3 + z^3 \geq 3zc^2.$$

Đến đây, nếu cộng trực tiếp ba bất đẳng thức trên lại với nhau, ta sẽ chẳng thu được điều gì quan trọng, vì hệ số của a^3, b^3, c^3 trong bất đẳng thức nhận được sẽ khác với hệ số của chúng trong P (mà ta lại cần tìm min P). Như vậy, ta cần một phép chuyển nhỏ để giúp đưa hệ số của a^3, b^3, c^3 về dạng giống như của chúng trong P .

Ta viết các bất đẳng thức trên lại thành

$$2a^3 + x^3 \geq 3xa^2, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2}(2b^3 + y^3) \geq \frac{9}{2}yb^2, \quad (3)$$

$$2(2c^3 + z^3) \geq 6zc^2. \quad (4)$$

Cộng ba bất đẳng thức (2), (3), (4) lại theo vế, ta suy ra được

$$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + x^3 + \frac{3}{2}y^3 + 2z^3 \geq 3\left(xa^2 + \frac{3}{2}yb^2 + 2zc^2\right),$$

hay là
$$P \geq 3\left(xa^2 + \frac{3}{2}yb^2 + 2zc^2\right) - x^3 - \frac{3}{2}y^3 - 2z^3.$$

Ta cần sử dụng giả thiết để suy ra kết quả bài toán, do đó các số x, y, z thích hợp phải là những số sao cho hệ số của a^2, b^2, c^2 tương ứng tạo thành tỉ lệ $1:2:3$, tức là

$$\frac{x}{1} = \frac{\frac{3}{2}y}{2} = \frac{2z}{3}.$$

Vậy ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ x = \frac{3}{4}y = \frac{2z}{3} \end{cases}$$

Giải hệ này, ta tìm được $x = \frac{6}{\sqrt{407}}, y = \frac{8}{\sqrt{407}}, z = \frac{9}{\sqrt{407}}$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &\geq 3x(a^2 + 2b^2 + 3c^2) - x^3 - \frac{3}{2}y^3 - 2z^3 = 3x - x^3 - \frac{3}{2}y^3 - 2z^3 \\ &= 3 \cdot \frac{6}{\sqrt{407}} - \left(\frac{6}{\sqrt{407}}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{8}{\sqrt{407}}\right)^3 - 2\left(\frac{9}{\sqrt{407}}\right)^3 = \frac{12}{\sqrt{407}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{6}{\sqrt{407}}, b = \frac{8}{\sqrt{407}}$ và $c = \frac{9}{\sqrt{407}}$. □

Ví dụ 15. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b^2 + c^3 = \frac{325}{9}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^3 + c^4.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Giả sử P đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = x, b = y$ và $c = z$. Khi đó ta phải có

$$x + y^2 + z^3 = \frac{325}{9}.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$a^2 + x^2 \geq 2xa,$$

$$b^3 + b^3 + y^3 \geq 3yb^2,$$

$$c^4 + c^4 + c^4 + z^4 \geq 3zc^3,$$

từ đó suy ra

$$a^2 + x^2 \geq 2xa,$$

$$\frac{1}{2}(2b^3 + y^3) \geq \frac{3}{2}yb^2,$$

$$\frac{1}{3}(3c^4 + z^4) \geq \frac{4}{3}zc^3.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có

$$a^2 + b^3 + c^4 + x^2 + \frac{y^3}{2} + \frac{z^4}{3} \geq 2xa + \frac{3}{2}yb^2 + \frac{4}{3}zc^3,$$

$$\text{tức } P \geq \left(2xa + \frac{3}{2}yb^2 + \frac{4}{3}zc^3 \right) - x^2 - \frac{y^3}{2} - \frac{z^4}{3}.$$

Để sử dụng giả thiết, ta cần chọn x, y, z sao cho: $2x = \frac{3}{2}y = \frac{4}{3}z$.

$$\text{Khi đó, ta được hệ phương trình } \begin{cases} x + y^2 + z^3 = \frac{325}{9} \\ 2x = \frac{3}{2}y = \frac{4}{3}z \end{cases}.$$

Giải hệ này, ta tìm được $x = 2, y = \frac{8}{3}$ và $z = 3$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &\geq 2x(a + b^2 + c^3) - x^2 - \frac{y^3}{2} - \frac{z^4}{3} = \frac{650}{9}x - x^2 - \frac{y^3}{2} - \frac{z^4}{3} \\ &= \frac{650}{9} \cdot 2 - 2^2 - \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^3}{2} - \frac{3^4}{3} = \frac{2807}{27}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2, b = \frac{8}{3}$ và $c = 3$. □

Ví dụ 16. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$2x + 4y + 7z = 2xyz.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z.$$

(Vietnamese IMO TST 2001)

Phân tích & định hướng lời giải

Khi giải bài này, một cách tự nhiên, ta mong muốn có một đánh giá ở dạng thuần nhất (vì thông thường, ở dạng này bất đẳng thức sẽ dễ đánh giá hơn các dạng không thuần nhất) như sau

$$(x + y + z)^2(2x + 4y + 7z) \geq kxyz,$$

đề từ đó, sử dụng được giả thiết $2x + 4y + 7z = 2xyz$ kết hợp với việc đẳng thức có thể xảy ra (ta cần có điều này), ta suy ra ngay kết quả cần tìm.

Bây giờ, ta quan sát tiếp bất đẳng thức thuần nhất trên và thấy rằng: về trái có dạng tích của các tổng, còn về phải lại là tích của các biến số. Chính từ dữ kiện này đã gợi cho ta nghĩ đến việc *sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho từng tổng ở bên về trái để chuyển đổi chúng về dạng tích* (vì bản chất của AM-GM là như vậy).

Mặc dù đã phân tích đến đây, thế nhưng vẫn có nhiều bạn mắc phải sai lầm phổ biến sau: *Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có*

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}, \quad 2x + 4y + 7z \geq 3\sqrt[3]{(2x)(4y)(7z)} = 3\sqrt[3]{56xyz}.$$

Do đó

$$(x + y + z)^2(2x + 4y + 7z) \geq \left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2 \cdot 3\sqrt[3]{56xyz} = 27\sqrt[3]{56xyz}.$$

Từ đây sử dụng giả thiết $2x + 4y + 7z = 2xyz$, ta suy ra

$$(x + y + z)^2 \geq \frac{27\sqrt[3]{56xyz}}{2x + 4y + 7z} = \frac{27\sqrt[3]{56xyz}}{2xyz} = \frac{27\sqrt[3]{56}}{2}.$$

Lấy căn bậc hai hai vế, ta được

$$x + y + z \geq \sqrt{\frac{27\sqrt[3]{56}}{2}}.$$

Đây chính là kết quả cần tìm.

Như đã nói ở các ví dụ trước, lời giải trên không đúng bởi vì đẳng thức không thể xảy ra. Thật vậy, ta có bất đẳng thức $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ xảy ra dấu bằng khi $x = y = z$, trong khi đó $2x + 4y + 7z \geq 3\sqrt[3]{56xyz}$ thì lại đạt được đẳng thức chỉ khi $2x = 4y = 7z$.

Mặt khác, hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = y = z \\ 2x = 4y = 7z \end{cases}$$

lại không có nghiệm dương nên không tồn tại đẳng thức cho đánh giá

$$x + y + z \geq \sqrt{\frac{27\sqrt[3]{56}}{2}},$$

hay nói một cách khác, ta chỉ có dấu ">" chứ không thể có dấu "=".

Tóm lại, có thể nói rằng việc biết được *điểm rơi* chính là chìa khóa quan trọng để giải quyết được bài toán này. Thế nhưng, dù quan sát bài toán kỹ đến đâu ta vẫn không thể dự đoán được *điểm rơi* sẽ là tại đâu (chẳng có sự đối xứng, hoán vị hay dấu hiệu đặc biệt nào). Do đó, cách tốt nhất ở đây chính là sử dụng *điểm rơi giả định* để suy ra cách đánh giá thích hợp.

Giả sử P đạt min khi $x = a, y = b$ và $z = c$. Khi đó, ta phải có

$$a, b, c > 0 \text{ và } 2a + 4b + 7c = 2abc. \quad (1)$$

Để thấy khi P đạt min thì $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 1$ và ta có thể viết các biểu thức $x + y + z, 2x + 4y + 7z$ lại thành

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \cdot \frac{x}{a} + b \cdot \frac{y}{b} + c \cdot \frac{z}{c}, \\ 2x + 4y + 7z &= 2a \cdot \frac{x}{a} + 4b \cdot \frac{y}{b} + 7c \cdot \frac{z}{c}. \end{aligned}$$

(Ta tách như thế này để đưa từ trường hợp đẳng thức với các biến lệch nhau về trường hợp các biến bằng nhau, như thế thì việc xét sẽ dễ dàng hơn). Ta cần sử dụng AM-GM để biến đổi tổng thành tích, thế nhưng các hệ số a, b, c và $2a, 4b, 7c$ ở đây ta lại chưa biết chúng có phải là số tự nhiên hay không. Do đó, muốn chuyển tổng thành tích thì ta không thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng thông thường mà phải là dạng suy rộng, và để đảm bảo được đẳng thức, cách đánh giá hợp lý nhất chính là

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{x}{a} + b \cdot \frac{y}{b} + c \cdot \frac{z}{c} &\geq (a + b + c) \left[\left(\frac{x}{a} \right)^a \left(\frac{y}{b} \right)^b \left(\frac{z}{c} \right)^c \right]^{\frac{1}{a+b+c}}, \\ 2a \cdot \frac{x}{a} + 4b \cdot \frac{y}{b} + 7c \cdot \frac{z}{c} &\geq (2a + 4b + 7c) \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{2a} \left(\frac{y}{b} \right)^{4b} \left(\frac{z}{c} \right)^{7c} \right]^{\frac{1}{2a+4b+7c}}. \end{aligned}$$

Từ hai đánh giá này suy ra

$$(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geq$$

$$\geq (a+b+c)^2(2a+4b+7c) \left[\left(\frac{x}{a} \right)^a \left(\frac{y}{b} \right)^b \left(\frac{z}{c} \right)^c \right]^{\frac{2}{a+b+c}} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{2a} \left(\frac{y}{b} \right)^{4b} \left(\frac{z}{c} \right)^{7c} \right]^{\frac{1}{2a+4b+7c}}$$

$$= A \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2a}{a+b+c} \cdot \frac{2a}{2a+4b+7c}} \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2b}{a+b+c} \cdot \frac{4b}{2a+4b+7c}} \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2c}{a+b+c} \cdot \frac{7c}{2a+4b+7c}}$$

với $A = (a+b+c)^2(2a+4b+7c)$.

Cái mà ta cần là một đánh giá dạng $(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geq kxyz$ để có thể từ đó sử dụng giả thiết mà suy ra kết quả bài toán. Do đó, ta phải chọn các số x, y, z thích hợp sao cho số mũ của chúng bằng 1, tức là

$$\begin{cases} \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2a}{2a+4b+7c} = 1 \\ \frac{2b}{a+b+c} + \frac{4b}{2a+4b+7c} = 1 \\ \frac{2c}{a+b+c} + \frac{7c}{2a+4b+7c} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta tìm được $a=3, b=\frac{5}{2}$ và $c=2$. Lúc này ta có

$$(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geq (a+b+c)^2(2a+4b+7c) \left(\frac{x}{a} \right) \left(\frac{y}{b} \right) \left(\frac{z}{c} \right),$$

suy ra

$$(x+y+z)^2 \geq \frac{(a+b+c)^2(2a+4b+7c)xyz}{abc(2x+4y+7z)} = (a+b+c)^2 = \left(\frac{15}{2} \right)^2.$$

Lấy căn bậc hai hai vế, ta thu được

$$x+y+z \geq \frac{15}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=a=3, y=b=\frac{5}{2}$ và $z=c=2$. □

Nhận xét. Hệ $\{(1), (2)\}$ có thể giải như sau: Đặt

$$A = \frac{1}{a+b+c}, \quad B = \frac{1}{2a+4b+7c}.$$

Khi đó, từ (2) ta được

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2(A+B)} \\ b = \frac{1}{2(A+2B)} \\ c = \frac{1}{2A+7B} \end{cases}$$

Do đó

$$\frac{1}{A} = a + b + c = \frac{1}{2(A+B)} + \frac{1}{2(A+2B)} + \frac{1}{2A+7B}$$

Xem đây là một phương trình theo B ($B > 0$). Ta thấy vế trái không phụ thuộc vào B , còn vế phải lại là một hàm giảm theo B . Do đó, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải là nghiệm duy nhất. Mặt khác, dễ thấy $B = \frac{A}{4}$ thỏa mãn. Như vậy, từ phương trình trên, ta có $A = 4B$. Khi đó

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2(A+B)} = \frac{1}{10B} \\ b = \frac{1}{2(A+2B)} = \frac{1}{12B} \\ c = \frac{1}{2A+7B} = \frac{1}{15B} \end{cases}$$

Mà $2a + 4b + 7c = 2abc$ (theo (1)) nên ta có

$$2 \cdot \frac{1}{10B} + 4 \cdot \frac{1}{12B} + 7 \cdot \frac{1}{15B} = 2 \cdot \frac{1}{10B} \cdot \frac{1}{12B} \cdot \frac{1}{15B},$$

từ đó suy ra $B = \frac{1}{30}$ và $a = 3, b = \frac{5}{2}, c = 2$.

Ví dụ 17. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3x + 2y + z.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2xyz = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 + 5 \cdot z^2 \geq 12 \sqrt[12]{(x^2)^3 (y^2)^4 (z^2)^5} = 12 \sqrt[12]{x^3 y^4 z^5},$$

từ đó suy ra

$$x^3 y^2 z \geq 6^6.$$

Từ kết quả này, sử dụng bất đẳng thức AM-GM thêm một lần nữa, ta được

$$P = 3 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z \geq 6 \sqrt[6]{x^3 y^2 z} \geq 6 \sqrt[6]{6^6} = 36.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 6$. □

Ví dụ 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$4a + 3b + 4c = 22.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a + b + c + \frac{1}{3a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Phân tích & định hướng lời giải

Quan sát bài toán, ta thấy giả thiết là tổng của những đại lượng bậc nhất còn biểu thức cần tìm cực trị lại có chứa các phân thức. Như vậy, ý tưởng của ta cho bài này đó là tìm cách đánh giá đưa những phân thức về dạng bậc nhất. Có như vậy mới có thể sử dụng được giả thiết của bài toán.

Ngoài ra, có thể thấy công cụ thích hợp được dùng để đánh giá ở đây chính là bất đẳng thức AM-GM (chắc hẳn bạn đọc đều biết đến đánh giá

quen thuộc $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$. Từ bất đẳng thức này, ta có $\frac{1}{x} \geq 2 - x$.

Đây là một ví dụ cụ thể nhất của việc chuyển từ phân thức về dạng bậc nhất thông qua AM-GM).

Do không thể dự đoán được điểm rơi của bài toán là ở đâu nên ta sẽ sử dụng kỹ thuật *điểm rơi giả định* để giải bài này.

Giả sử P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = x, b = y$ và $c = z$. Khi đó ta có

$$x, y, z > 0 \text{ và } 4x + 3y + 4z = 22.$$

Ta thấy với $a = x, b = y, c = z$ thì

$$\frac{1}{3a} = \frac{1}{3x} = \frac{a}{3x^2}, \quad \frac{2}{b} = \frac{2}{y} = \frac{2b}{y^2}, \quad \frac{3}{c} = \frac{3}{z} = \frac{3c}{z^2}.$$

Do đó, các đánh giá sau sẽ đảm bảo được điều kiện đẳng thức:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3a} + \frac{a}{3x^2} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{3a} \cdot \frac{a}{3x^2}} = \frac{2}{3x}, \\ \frac{2}{b} + \frac{2b}{y^2} &\geq 2\sqrt{\frac{2}{b} \cdot \frac{2b}{y^2}} = \frac{4}{y}, \\ \frac{3}{c} + \frac{3c}{z^2} &\geq 2\sqrt{\frac{3}{c} \cdot \frac{3c}{z^2}} = \frac{6}{z}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{3a} \geq \frac{2}{3x} - \frac{a}{3x^2}, \quad \frac{2}{b} \geq \frac{4}{y} - \frac{2b}{y^2}, \quad \frac{3}{c} \geq \frac{6}{z} - \frac{3c}{z^2}.$$

Và như vậy, ta đã chuyển được các phân thức về dạng bậc nhất và thu được

$$\begin{aligned} P &\geq a + b + c + \left(\frac{2}{3x} - \frac{a}{3x^2} \right) + \left(\frac{4}{y} - \frac{2b}{y^2} \right) + \left(\frac{6}{z} - \frac{3c}{z^2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3x^2} \right) a + \left(1 - \frac{2}{y^2} \right) b + \left(1 - \frac{3}{z^2} \right) c + \frac{2}{3x} + \frac{4}{y} + \frac{6}{z}. \end{aligned}$$

Vấn đề còn lại là ta phải chọn các số x, y, z thích hợp làm sao để có thể sử dụng được giả thiết $4a + 3b + 4c = 22$. Muốn vậy thì các hệ số của a, b, c trong đánh giá trên phải lập thành tỉ lệ $4 : 3 : 4$, tức là

$$\frac{1 - \frac{1}{3x^2}}{4} = \frac{1 - \frac{2}{y^2}}{3} = \frac{1 - \frac{3}{z^2}}{4}.$$

Vậy, điểm rơi thực sự của bài toán chính là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 22 \\ \frac{1 - \frac{1}{3x^2}}{4} = \frac{1 - \frac{2}{y^2}}{3} = \frac{1 - \frac{3}{z^2}}{4}. \end{cases} \quad (1)$$

Giải hệ này, ta tìm được $x = 1, y = 2$ và $z = 3$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &\geq \left(1 - \frac{1}{3} \right) a + \left(1 - \frac{2}{2^2} \right) b + \left(1 - \frac{3}{3^2} \right) c + \frac{2}{3} + \frac{4}{2} + \frac{6}{3} \\ &= \frac{4a + 3b + 4c}{6} + \frac{14}{3} = \frac{22}{6} + \frac{14}{3} = \frac{25}{3}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = x = 1, b = y = 2$ và $c = z = 3$. □

Nhận xét 1. Hệ (1) có thể được giải như sau: Đặt

$$k = \frac{1 - \frac{1}{3x^2}}{4} = \frac{1 - \frac{2}{y^2}}{3} = \frac{1 - \frac{3}{z^2}}{4},$$

ta có $k < \frac{1}{4}$ và

$$x = \frac{1}{\sqrt{3(1-4k)}}, \quad y = \sqrt{\frac{2}{1-3k}}, \quad z = \sqrt{\frac{3}{1-4k}}.$$

Do $4a + 3b + 4c = 22$ nên

$$\frac{4}{\sqrt{3(1-4k)}} + 3\sqrt{\frac{2}{1-3k}} + 4\sqrt{\frac{3}{1-4k}} = 22.$$

Ta thấy đây là một phương trình theo ẩn k . Hơn nữa, với $k < \frac{1}{4}$ thì vế trái là một hàm đồng biến theo k , còn vế phải là hằng. Do đó, nghiệm nếu có của phương trình trên cũng sẽ là nghiệm duy nhất của nó. Mặt khác, dễ thấy với $k = \frac{1}{6}$ thì phương trình được thỏa mãn. Vậy ta có $k = \frac{1}{6}$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên. Từ đây, dễ dàng tính được $x = 1, y = 2, z = 3$.

Nhận xét 2. Qua các ví dụ trên, ta có thể thấy được một số lợi ích từ việc sử dụng kĩ thuật chọn điểm rơi như sau:

- Nó giúp ta tìm được điểm rơi của bài toán, từ đó đưa đến lời giải thành công.
- Rèn luyện kĩ năng tính toán và đặc biệt là khả năng giải phương trình-hệ phương trình, một dạng toán thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi, thi Đại học.

Ta kết lại phần này bằng một ví dụ hay và khó, và chúng tôi sẽ chỉ trình bày lời giải của nó. Việc bình luận và phân tích nguồn gốc ý tưởng xin được dành lại cho bạn đọc.

Ví dụ 19. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) là các số thực thỏa mãn

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n+1}}.$$

Lời giải

Đặt $x_k = \frac{\sin \frac{(k+1)\pi}{n+1}}{\sin \frac{k\pi}{n+1}}$ với $k = 1, 2, \dots, n-1$. Dễ thấy $x_k > 0$ với mọi k .

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x_1 a_1^2 + \frac{1}{x_1} a_2^2 \geq 2a_1 a_2,$$

$$x_2 a_2^2 + \frac{1}{x_2} a_3^2 \geq 2a_2 a_3,$$

...

$$x_{n-2} a_{n-2}^2 + \frac{1}{x_{n-2}} a_{n-1}^2 \geq 2a_{n-2} a_{n-1},$$

$$x_{n-1} a_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}} a_n^2 \geq 2a_{n-1} a_n.$$

Cộng $n-1$ bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} x_1 a_1^2 + \left(\frac{1}{x_1} + x_2 \right) a_2^2 + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-2}} + x_{n-1} \right) a_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}} a_n^2 &\geq \\ &\geq 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n) = 2. \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác, từ định nghĩa của x_i , ta có

$$x_1 = \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\sin \frac{\pi}{n+1}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}}{\sin \frac{\pi}{n+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1},$$

$$\frac{1}{x_{n-1}} = \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{n+1} + \sin \pi}{\sin \frac{n\pi}{n+1}} = \frac{2 \sin \frac{n\pi}{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}}{\sin \frac{n\pi}{n+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}$$

và với mọi $k = 1, 2, \dots, n-2$, thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_k} + x_{k+1} &= \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{n+1}} + \frac{\sin \frac{(k+2)\pi}{n+1}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{n+1}} = \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1} + \sin \frac{(k+2)\pi}{n+1}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{n+1}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{(k+1)\pi}{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}}{\sin \frac{(k+1)\pi}{n+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Do vậy

$$x_1 = \frac{1}{x_1} + x_2 = \dots = \frac{1}{x_{n-2}} + x_{n-1} = \frac{1}{x_{n-1}} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Sử dụng đẳng thức này, kết hợp với đánh giá (*), ta có

$$2 \cos \frac{\pi}{n+1} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq 2,$$

từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP

1. Cho $x \geq 3$. Chứng minh rằng: $x + \frac{1}{x} \geq \frac{10}{3}$.

2. Cho $x \geq 2$. Chứng minh rằng: $x + \frac{1}{x^2} \geq \frac{9}{4}$.

3. Cho các số thực dương a, b bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{8ab}{(a+b)^2} \geq 4.$$

4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\sqrt{a(b+3c)} + \sqrt{b(c+3a)} + \sqrt{c(a+3b)} \leq 6.$$

5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\frac{a^2}{b+2} + \frac{b^2}{c+2} + \frac{c^2}{a+2} \geq 1.$$

6. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 20$. Chứng minh

$$a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13.$$

7. Cho m, n là các hằng số dương và x, y, z là các số thực thay đổi sao cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + my^2 + nz^2.$$

8. Chứng minh rằng nếu a, b là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 5$, thì

$$a^3 + b^3 \geq 9.$$

9. Cho a, b, c là ba số dương và $a \geq \max\{b, c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a}{b} + 2\sqrt{1 + \frac{b}{c}} + 3\sqrt{1 + \frac{c}{a}}.$$

10. Cho a, b, c là các hằng số dương và x, y, z là những số dương thay đổi sao cho $ax + by + cz = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + z$.
11. Chứng minh rằng với mọi $0 \leq x \leq 1$, ta đều có

$$x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right) \leq 16.$$

(Olympic 30/4, 1996)

3 KỸ THUẬT GHEP ĐỐI XỨNG

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật “ghep đối xứng” để bài toán trở nên đơn giản hơn.

Ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp phải hai dạng toán sau.

- **Dạng 1.** Chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$.

Ý tưởng. Nếu ta chứng minh được $X + Y \geq 2A$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $Y + Z \geq 2B$ và $Z + X \geq 2C$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

Trong những bài toán tổng quát hơn nữa, ta sẽ chỉ ra

$$mX + nY + pZ \geq (m + n + p)A,$$

$$mY + nZ + pX \geq (m + n + p)B,$$

$$mZ + nX + pY \geq (m + n + p)C$$

Từ đó cộng chúng lại và rút gọn, thu được điều phải chứng minh. Ở ý tưởng đơn giản trên, ta đã áp dụng cách làm tổng quát với $m = n = 1$ và $p = 0$.

- **Dạng 2.** Chứng minh $XYZ \geq ABC$ với $X, Y, Z \geq 0$.

Ý tưởng. Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2$ và $ZX \geq C^2$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi lấy căn bậc 2, ta có

$$XYZ \geq \sqrt{A^2 B^2 C^2} = |ABC| \geq ABC.$$

Ví dụ 1. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hồ Chí Minh 2008 - 2009)

Lời giải

Bài toán này có dạng $X + Y + Z \geq A + B + C$ với

$$X = \frac{ab}{c}, \quad Y = \frac{bc}{a}, \quad Z = \frac{ca}{b}, \quad A = a, \quad B = b, \quad C = c.$$

Để ý rằng 2 biểu thức $\frac{ab}{c}$ và $\frac{bc}{a}$ là đối xứng với b (tức vai trò của a và c là như nhau). Do đó, sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, ta sẽ thử chứng minh

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b.$$

Từ đó, bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Ví dụ 2. Cho a, b, c là ba số không âm. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{bc^3} + \sqrt[4]{ca^3}.$$

Lời giải

Áp dụng ý tưởng ban đầu, ta sẽ thử chứng minh $a + b \geq 2\sqrt[4]{ab^3}$. Tuy nhiên, bất đẳng thức này không phải luôn đúng (phản ví dụ là $a = \frac{3}{2}, b = 1$). Vì vậy, ta sẽ phải sử dụng bài toán tổng quát với $m = 3, n = 1, p = 0$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bốn số, ta có

$$a + b + b + b \geq 4\sqrt[4]{a \cdot b \cdot b \cdot b} = 4\sqrt[4]{ab^3},$$

$$b + c + c + c \geq 4\sqrt[4]{b \cdot c \cdot c \cdot c} = 4\sqrt[4]{bc^3},$$

$$c + a + a + a \geq 4\sqrt[4]{c \cdot a \cdot a \cdot a} = 4\sqrt[4]{ca^3}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế sau đó chia cả hai vế cho 4, ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

Với mọi số thực dương a, b, c , luôn có

$$a + b + c \geq \sqrt[n]{ab^{n-1}} + \sqrt[n]{bc^{n-1}} + \sqrt[n]{ca^{n-1}}.$$

Ví dụ 3. Cho x, y, z là ba số dương và $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt[n]{\frac{x}{y}} + y\sqrt[n]{\frac{y}{z}} + z\sqrt[n]{\frac{z}{x}} \geq x + y + z.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho n số, ta có

$$\underbrace{x\sqrt[n]{\frac{x}{y}} + x\sqrt[n]{\frac{x}{y}} + \dots + x\sqrt[n]{\frac{x}{y}}}_{n-1} + \sqrt[n]{xy^{n-1}} \geq n\sqrt[n]{\left(x\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right)^{n-1} \sqrt[n]{xy^{n-1}}} = nx,$$

$$\underbrace{y\sqrt[n]{\frac{y}{z}} + y\sqrt[n]{\frac{y}{z}} + \dots + y\sqrt[n]{\frac{y}{z}}}_{n-1} + \sqrt[n]{yz^{n-1}} \geq n\sqrt[n]{\left(y\sqrt[n]{\frac{y}{z}}\right)^{n-1} \sqrt[n]{yz^{n-1}}} = ny,$$

$$\underbrace{z\sqrt[n]{\frac{z}{x}} + z\sqrt[n]{\frac{z}{x}} + \dots + z\sqrt[n]{\frac{z}{x}}}_{n-1} + \sqrt[n]{zx^{n-1}} \geq n\sqrt[n]{\left(z\sqrt[n]{\frac{z}{x}}\right)^{n-1} \sqrt[n]{zx^{n-1}}} = nz.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\begin{aligned} (n-1) \left(x\sqrt[n]{\frac{x}{y}} + y\sqrt[n]{\frac{y}{z}} + z\sqrt[n]{\frac{z}{x}} \right) &\geq \\ &\geq n(x+y+z) - \left(\sqrt[n]{xy^{n-1}} + \sqrt[n]{yz^{n-1}} + \sqrt[n]{zx^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Mặt khác, lại kết hợp với kết quả tổng quát ở ví dụ 2.3.2, đó là

$$\sqrt[n]{xy^{n-1}} + \sqrt[n]{yz^{n-1}} + \sqrt[n]{zx^{n-1}} \leq x + y + z.$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} (n-1) \left(x\sqrt[n]{\frac{x}{y}} + y\sqrt[n]{\frac{y}{z}} + z\sqrt[n]{\frac{z}{x}} \right) &\geq n(x+y+z) - (x+y+z) \\ &= (n-1)(x+y+z), \end{aligned}$$

hay

$$x\sqrt[n]{\frac{x}{y}} + y\sqrt[n]{\frac{y}{z}} + z\sqrt[n]{\frac{z}{x}} \geq x + y + z.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z > 0$.

□

Ví dụ 4. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta đều có

$$x^n y + y^n z + z^n x \geq xy + yz + zx.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho $n+1$ số kết hợp với giả thiết $xyz = 1$,

$$\begin{aligned} x^n y + x^n y + \underbrace{y^n z + yz + yz + \cdots + yz}_{n-2} &\geq (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt[n+1]{(x^n y)^2 (y^n z) (yz)^{n-2}} \\ &= (n+1)xy. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} y^n z + y^n z + \underbrace{z^n x + zx + zx + \cdots + zx}_{n-2} &\geq (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt[n+1]{(y^n z)^2 (z^n x) (zx)^{n-2}} \\ &= (n+1)yz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^n x + z^n x + \underbrace{x^n y + xy + xy + \cdots + xy}_{n-2} &\geq (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \sqrt[n+1]{(z^n x)^2 (x^n y) (xy)^{n-2}} \\ &= (n+1)zx. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta thu được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. $\square$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta có

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Lời giải

Nếu $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) > 0$.

Đề ý rằng bất đẳng thức có dạng $XYZ \geq ABC$, vì vậy sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, ta chỉ cần chứng minh

$$b^2 \geq (a+b-c)(b+c-a).$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, suy ra

$$(a+b-c)(b+c-a) \leq \frac{[(a+b-c) + (b+c-a)]^2}{4} = b^2.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

í dụ 6. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 2$.

Chứng minh rằng

$$xyz \leq \frac{1}{8}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 2$, kết hợp với bất đẳng thức

M-GM ta suy ra

$$\frac{1}{1+x} \geq \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}},$$

tức là

$$\frac{1}{1+x} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+z)(1+x)}}, \quad \frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo về, ta thu được

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq \frac{8xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)},$$

từ đó suy ra

$$xyz \leq \frac{1}{8}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} = \frac{z}{1+z} \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}. \quad \square$$

í dụ 7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$,

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}} + \sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}} \geq 3.$$

Lời giải

Để ý rằng nếu sử dụng AM-GM ngay để đưa bất đẳng thức không chuẩn tắc trên về dạng đồng bậc, ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$\sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq 3. \quad (1)$$

Tuy nhiên, bất đẳng thức này không phải luôn đúng. Ta chỉ cần cho $a = b, c = 0$ sẽ thấy ngay $VT(1) = 2\sqrt{2} > 3 = VP(1)$, vô lí.

Sau đây là lời giải sử dụng ý tưởng ghép đôi xứng: Áp dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}} + \sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}} &\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}} \sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}} \sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \end{aligned}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

Bất đẳng thức này có dạng $XYZ \geq ABC$, vì vậy sử dụng kĩ thuật ghép đôi xứng, ta chỉ cần chứng minh

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq (a+b)^2.$$

Thật vậy, khai triển và rút gọn, ta thu được

$$(ab-1)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c , ta đều có

$$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^3+abc}} + \frac{b+c}{\sqrt[3]{b^3+abc}} + \frac{c+a}{\sqrt[3]{c^3+abc}} \geq 3\sqrt[3]{4}. \quad (1)$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Để thấy (1) có thể viết lại thành

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)^3}{a^3+abc}} + \sqrt[3]{\frac{(b+c)^3}{b^3+abc}} + \sqrt[3]{\frac{(c+a)^3}{c^3+abc}} \geq 3\sqrt[3]{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta sẽ đưa bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3 \geq 64abc(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab).$$

Với một bất đẳng thức bậc cao (bậc 9) như thể này, rõ ràng ngoài ý tưởng sử dụng kỹ thuật ghép đôi xứng, ta gần như không còn con đường nào khác.

Tuy nhiên, những cách ghép thông thường sẽ không đem lại hiệu quả. Hãy để ý sự tính tế trong "bước đột phá" sau.

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$64abc(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leq (a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4.$$

Sử dụng kỹ thuật ghép đôi xứng, ta sẽ chứng minh

$$(a+b)^2(a+c)^2 \geq 4a(b+c)(a^2+bc).$$

Thật vậy, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì theo AM-GM thì

$$(a+b)^2(a+c)^2 = [(a^2+bc) + a(b+c)]^2 \geq 4a(b+c)(a^2+bc).$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Ví dụ 9. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{1+3a^2} + \sqrt[3]{1+3b^2} + \sqrt[3]{1+3c^2} \geq 2 \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \right).$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Với bài toán này, việc xuất hiện căn bậc ba ở hai vế khiến công việc của ta trở nên khá khó khăn. Điều đầu tiên là phải tìm cách loại bỏ hai lớp căn thức. Vẫn là ghép đôi xứng, nhưng lần này ta sẽ ghép như thế nào?

Hãy xét lời giải sau. Nếu ta chứng minh được

$$\sqrt[3]{1+3a^2} \geq 2\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}},$$

thì bài toán coi như giải quyết xong.

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$1+3a^2 - \frac{8a}{b+c} \geq 0. \quad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết $ab + bc + ca = 3$, suy ra: $a = \frac{3-bc}{b+c}$.

Thay $a = \frac{3-bc}{b+c}$ vào (1), ta được: $1 + \frac{3(3-bc)^2}{(b+c)^2} - \frac{8(3-bc)}{(b+c)^2} \geq 0$.

hay tương đương

$$(b+c)^2 + 3(3-bc)^2 - 8(3-bc) \geq 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}(b+c)^2 + 3(3-bc)^2 - 8(3-bc) &\geq 4bc + 3(3-bc)^2 - 8(3-bc) \\ &= 3b^2c^2 - 6bc + 3 = 3(bc-1)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Từ đó, chứng minh được hoàn tất

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 10. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \geq \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sau khi nhân chéo, bất đẳng thức đề bài có thể viết lại thành

$$\begin{aligned}(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)(a+b)(b+c)(c+a) &\geq \\ &\geq 8abc(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2).\end{aligned}$$

Sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, ta sẽ chứng minh

$$(c^2+ab)(a+b) \geq 2\sqrt{ab(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, dễ thấy

$$(c^2+ab)(a+b) = a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) \geq 2\sqrt{ab(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Từ đó, bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI TẬP

1. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

3. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 &\geq \\ &\geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).\end{aligned}$$

4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + ab + bc}} + \sqrt{\frac{b^2 + 2c^2}{b^2 + bc + ca}} + \sqrt{\frac{c^2 + 2a^2}{c^2 + ca + ab}} \geq 3.$$

5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \geq 3.$$

6. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{1}{3} \geq \frac{8}{9} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

7. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\left(a + \frac{bc}{a} \right) \left(b + \frac{ca}{b} \right) \left(c + \frac{ab}{c} \right) \geq 4\sqrt{(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)}.$$

8. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$(1 + a + b + c)(1 + ab + bc + ca) \geq 4\sqrt{2(a+bc)(b+ca)(c+ab)}.$$

9. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+c+a} + \frac{1}{2c+a+b} \leq \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a}.$$

4 KỸ THUẬT THÊM - BỚT

Nếu ở ba phần đầu tiên, độc giả được rèn luyện thói quen định hướng dựa vào “bề ngoài” của một bài toán thì từ đây, ta sẽ bắt gặp những lớp bất đẳng thức phong phú hơn – những bất đẳng thức mà lời giải cho chúng luôn đòi hỏi một tầm nhìn bao quát cũng như sự đột phá ý tưởng.

Kỹ thuật thêm bớt là một minh chứng rõ ràng nhất cho lối tư duy sử dụng những “yếu tố ngoại cảnh” trong việc giải quyết vấn đề.

Ngay sau đây, chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với kỹ thuật này, nhưng không phải bằng một ví dụ đơn giản như mọi khi mà thay vào đó sẽ là một ví dụ tương đối khó để hiểu sự khác biệt về tầm nhìn sẽ mang lại hai kết quả khác nhau như thế nào.

Ví dụ 1. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{a(a+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{b(b+2c)}} + \frac{1}{\sqrt{c(c+2a)}} \right] \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Trên thực tế, không ít học sinh khi gặp bài toán này đã suy nghĩ như sau: Căn bậc hai ở biểu thức về phải khiến ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $2\sqrt{xy} \leq x + y$ để phá căn. Để ý rằng

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a(a+2b)}} = 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{3}{a+2b}} \leq \frac{1}{a} + \frac{3}{a+2b},$$

suy ra

$$2\sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{a(a+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{b(b+2c)}} + \frac{1}{\sqrt{c(c+2a)}} \right] \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left(\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \right).$$

Vậy chúng mình sẽ hoàn tất nếu chỉ ra được

$$\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \geq \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a}.$$

Và tới khi biết bất đẳng thức thu được này không phải luôn đúng thì có hai cách nghĩ chúng tôi thường thấy ở đa số học sinh như sau.

• Thử nhất: *Chịu. Hết cách rồi. Chỉ có một con đường như vậy thôi. Không thể có con đường khác được. Tôi sẽ không suy nghĩ nữa.*

• Thử hai: *Đề sai (!)*

Nhưng rõ ràng, luôn luôn có những vấn đề cần đến sự sáng tạo. Khi những ý tưởng cũ không còn phù hợp với những bài toán mới, chúng ta phải thay đổi. Thay đổi tư duy, tâm nhìn, dẫn đến thay đổi hành động và từ đó thay đổi được kết quả. Để ý rằng việc không định một cách chắc chắn "chỉ có một con đường cực như vậy" là một việc làm vô nghĩa. Mục đích của chúng ta là giải quyết bài toán chứ không phải là "chứng minh con đường của mình đúng, con đường của người khác sai". Đây là một lối tư duy rất phổ biến ở chính đối tượng học sinh khá giỏi. Những khi gặp khó khăn như vậy, ta thực sự cần những ý tưởng đột phá để vượt qua rào cản tư duy thông thường. Hãy xét lời giải sau.

Vấn sử dụng bất đẳng thức AM-GM, nhưng lần này lại để ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a(a+2b)}} &= 2\sqrt{\frac{3}{2a+b} \cdot \frac{2a+b}{a(a+2b)}} \leq \frac{3}{2a+b} + \frac{2a+b}{a(a+2b)}, \\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{b(b+2c)}} &= 2\sqrt{\frac{3}{2b+c} \cdot \frac{2b+c}{b(b+2c)}} \leq \frac{3}{2b+c} + \frac{2b+c}{b(b+2c)}, \\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{c(c+2a)}} &= 2\sqrt{\frac{3}{2c+a} \cdot \frac{2c+a}{c(c+2a)}} \leq \frac{3}{2c+a} + \frac{2c+a}{c(c+2a)}.\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2a+b}{a(a+2b)} + \frac{2b+c}{b(b+2c)} + \frac{2c+a}{c(c+2a)}. \quad (1)$$

Sử dụng kỹ thuật ghép đôi xứng với $m=2, n=1, p=0$, ta sẽ chỉ ra

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{3(2a+b)}{a(a+2b)},$$

hay tương đương

$$(a+2b)^2 \geq 3b(2a+b).$$

Đây là một kết quả đúng vì theo AM-GM, ta có

$$(a+2b)^2 = \left(\frac{2a+b}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{2a+b}{2} \cdot \frac{3b}{2} = 3b(2a+b).$$

Hoàn toàn tương tự,

$$\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3(2b+c)}{b(b+2c)}, \quad \frac{2}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{3(2c+a)}{c(c+2a)}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta thu được (1).

Từ đó có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số thực dương tùy ý a, b, c ta luôn có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0.$$

Mong muốn triệt tiêu "dấu trừ" dẫn ta tới ý tưởng sau: Để ý rằng

$$\frac{a-b}{b+c} + 1 = \frac{c+a}{b+c}, \quad \frac{b-c}{c+a} + 1 = \frac{a+b}{c+a}, \quad \frac{c-a}{a+b} + 1 = \frac{b+c}{a+b}.$$

Vậy sau khi thêm bớt như vậy, ta đã quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3.$$

Mặt khác, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b}} = 3.$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số thực dương tùy ý a, b, c, d , ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\frac{a-d}{b+d} + \frac{d-b}{c+b} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{d+a} \geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Sử dụng kĩ thuật thêm bớt, ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a-d}{b+d} + 1 \right) + \left(\frac{d-b}{c+b} + 1 \right) + \left(\frac{b-c}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c-a}{d+a} + 1 \right) \geq 4,$$

$$\frac{a+b}{d+b} + \frac{d+c}{c+b} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+d}{d+a} \geq 4,$$

$$(a+b) \left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a} \right) + (c+d) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d} \right) \geq 4.$$

Mặt khác, sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$(a+b) \left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a} \right) \geq (a+b) \cdot \frac{2}{\sqrt{(d+b)(c+a)}} \geq \frac{4(a+b)}{(d+b) + (c+a)},$$

$$\text{suy ra } (a+b) \left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{4(a+b)}{a+b+c+d}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$(c+d) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d} \right) \geq \frac{4(c+d)}{a+b+c+d}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có ngay điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d > 0$. $\square$

Ví dụ 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbitt's Inequality)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng kỹ thuật thêm bớt, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) &\geq \frac{9}{2}, \\ (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) &\geq \frac{9}{2}, \\ [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) &\geq 9. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned} (a+b) + (b+c) + (c+a) &\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}, \\ \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \end{aligned}$$

Nhân hai bất đẳng thức này lại về theo vế, ta suy ra

$$S \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} = 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. $\blacksquare$

Cách 2. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a+b+c$, ta thu được

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) (a+b+c) &\geq \frac{3}{2} (a+b+c), \\ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + a+b+c &\geq \frac{3}{2} (a+b+c), \\ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &\geq \frac{a+b+c}{2}, \\ \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \right) + \left(\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \right) + \left(\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \right) &\geq a+b+c. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a.$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b, \quad \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có ngay điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương tùy ý a, b, c ta luôn có

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Phân tích & định hướng lời giải

Đây là một bất đẳng thức hoán vị rất nổi tiếng thường được biết tới với lời giải sử dụng Cauchy-Schwarz. Trong cuốn sách này, chúng tôi sẽ giới thiệu tới độc giả một lời giải bằng kỹ thuật thêm bớt kết hợp chọn điểm rơi khá độc đáo mà ít người biết đến.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM bộ hai số dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{a+b}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4a(a+b+c)}{3(a+b)(a+c)} \cdot \frac{3(a+c)}{2(a+b+c)}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{4a(a+b+c)}{3(a+b)(a+c)} + \frac{3(a+c)}{2(a+b+c)} \right]. \end{aligned}$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng chúng lại, ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)} + \frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)} \right] + \\ &+ \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\frac{c+a}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} \right) \leq \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Do $\frac{c+a}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} = 2$ nên ta có

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \left[\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)} + \frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)} \right] + \frac{3}{2\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}},$$

hay tương đương

$$\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)} + \frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{9}{4}.$$

Quy đồng mẫu số, ta thu được

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a),$$

hay

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Do $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ nên ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Nhận xét. Ta có thể tổng kết lại hiệu quả trong việc sử dụng các kĩ thuật ở bước đánh giá đầu tiên:

- Áp dụng AM-GM đã giúp loại bỏ được lớp căn thức – vật cản quan trọng của bài toán.
- Kĩ thuật thêm bớt đã đưa bất đẳng thức hoán vị ban đầu về một bất đẳng thức đối xứng đơn giản hơn.
- Chọn điểm rơi cho ta bảo toàn dấu bằng cũng như bậc của bài toán (lưu ý rằng đây là một bất đẳng thức đồng bậc, không sử dụng chuẩn hóa trong lời giải nên mọi đánh giá đều phải dựa trên tính đồng bậc của nó).

Ví dụ 6. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$2(ab + bc + ca) + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Dễ thấy theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} ab + bc + ca + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &= \left(ab + \frac{1}{ab} \right) + \left(bc + \frac{1}{bc} \right) + \left(ca + \frac{1}{ca} \right) \\ &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} + 2\sqrt{bc \cdot \frac{1}{bc}} + 2\sqrt{ca \cdot \frac{1}{ca}} = 6. \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $ab + bc + ca \geq 3$ nữa là đủ. Tuy nhiên, bất đẳng thức này lại không đúng vì

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3.$$

Rõ ràng, nếu giữ nguyên “hiện trạng” của bài toán, ta sẽ cảm thấy bế tắc vì cách làm thông thường đã không phát huy được hiệu quả. Khi ấy, ta sẽ thử sử dụng phép thêm bớt để chuyển bài toán về một bất đẳng thức tương đương nhưng có nhiều ý tưởng giải quyết hơn.

Để ý rằng $a + b + c = 3$ suy ra

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9,$$

nên ta nghĩ tới việc cộng thêm đại lượng $a^2 + b^2 + c^2$ vào cả hai vế của bất đẳng thức để bài. Thật vậy, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a + b + c)^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9 + (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\frac{3}{abc} \geq a^2 + b^2 + c^2,$$

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3.$$

Mặt khác, lại sử dụng kỹ thuật thêm bớt kết hợp với bổ đề quen thuộc

$$abc(a + b + c) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3},$$

ta có

$$\begin{aligned} abc(a^2 + b^2 + c^2) &= \frac{1}{3} abc(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\leq \frac{1}{9} (ab + bc + ca)^2 (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(ab + bc + ca)^2 (a^2 + b^2 + c^2) \leq 27.$$

Quả thực, bất đẳng thức cuối này đúng vì sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số dạng

$$xyz \leq \frac{(x + y + z)^3}{27},$$

$$\text{ta có } (ab + bc + ca)^2 (a^2 + b^2 + c^2) =$$

$$= (ab + bc + ca)(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\leq \frac{[2(ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2)]^3}{27} = \frac{(a + b + c)^6}{27} = 27.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 7. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

(Russian MO 2002)

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt, ta có bất đẳng thức tương đương với

$$2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 2(ab + bc + ca),$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca),$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq (a + b + c)^2 = 9.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9,$$

hay là

$$(a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a}) + (b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b}) + (c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c}) \geq 9.$$

Điều này là hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = 3a,$$

$$b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geq 3\sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = 3b,$$

$$c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = 3c.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + \frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $ab + bc + ca$ và để ý rằng

$$\begin{aligned} (ab + bc + ca) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) &= \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + \left(\frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} \right), \end{aligned}$$

ta viết được bất đẳng thức lại thành

$$a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} \right) \geq 2(ab + bc + ca) + (a - c)^2,$$

$$b^2 + \frac{ab^2}{c} + \frac{a^2c}{b} + \frac{bc^2}{a} \geq 2ab + 2bc,$$

$$\left(\frac{bc^2}{a} + ab - 2bc \right) + \left(\frac{ab^2}{c} + \frac{a^2c}{b} + b^2 - 3ab \right) \geq 0.$$

Đây là một kết quả đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\frac{bc^2}{a} + ab \geq 2\sqrt{\frac{bc^2}{a} \cdot ab} = 2bc,$$

$$\frac{ab^2}{c} + \frac{a^2c}{b} + b^2 \geq 3\sqrt{\frac{ab^2}{c} \cdot \frac{a^2c}{b} \cdot b^2} = 3ab.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2 + ca}{c^2 + a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2 + ab}{a^2 + b^2}} \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a + b + c}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải

Ta sẽ cố gắng làm thế nào để một trong hai vế của bất đẳng thức đề bài trở nên đơn giản hơn. Muốn vậy, nên thử cho $\sqrt[3]{abc}$ "nhảy" sang bên vế trái, tức ta sẽ chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{abc(b^2 + c^2)}} + \sqrt[3]{\frac{b^2 + ca}{abc(c^2 + a^2)}} + \sqrt[3]{\frac{c^2 + ab}{abc(a^2 + b^2)}} \geq \frac{9}{a + b + c}.$$

Mặt khác, sử dụng kỹ thuật thêm bớt kết hợp với bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{abc(b^2 + c^2)}} &= \frac{a^2 + bc}{\sqrt[3]{a(b^2 + c^2) \cdot b(a^2 + bc) \cdot c(a^2 + bc)}} \\ &\geq \frac{a^2 + bc}{a(b^2 + c^2) + b(a^2 + bc) + c(a^2 + bc)} \\ &= \frac{3}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt[3]{\frac{b^2 + ca}{abc(c^2 + a^2)}} \geq \frac{3(b^2 + ca)}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}$$

và

$$\sqrt[3]{\frac{c^2 + ab}{abc(a^2 + b^2)}} \geq \frac{3(c^2 + ab)}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{abc(b^2 + c^2)}} + \sqrt[3]{\frac{b^2 + ca}{abc(c^2 + a^2)}} + \sqrt[3]{\frac{c^2 + ab}{abc(a^2 + b^2)}} &\geq \\ &\geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}. \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)} \geq \frac{1}{a + b + c},$$

hay

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)(a + b + c) &\geq \\ &\geq 3[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)]. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)(a + b + c) &= \\ &= (a^3 + b^3 + c^3) + 2[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)] + 3abc, \end{aligned}$$

do đó bất đẳng thức trên có thể viết gọn lại thành

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a). \quad (1)$$

Trong ví dụ 2.2.8, ta đã chứng minh được bất đẳng thức này cho trường hợp a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Do đó, ở đây ta chỉ cần chứng minh nó cho trường hợp ngược lại.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Do a, b, c không là ba cạnh của một tam giác nên $a \geq b + c$. Khi đó, $bc(b + c) \leq abc$ và do $c^3 > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$a^3 + b^3 + 2abc \geq ab(a + b) + ac(a + c),$$

hay là

$$(a + b)(a - b)^2 + ac(2b - a - c) \geq 0.$$

Do $a - b \geq c$ nên

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)^2 + ac(2b-a-c) &\geq (a+b)(a-b)c + ac(2b-a-c) \\&= c(a^2 - b^2) + ac(2b-a-c) \\&= c(2ab - b^2 - ac) \\&= c[b(a-b) + a(b-c)] \geq 0.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Nhận xét. Bất đẳng thức (1) là trường hợp riêng $r = 1$ của một kết quả tổng quát mà chúng ta vẫn biết đến với cái tên *bất đẳng thức Schur* như sau: Nếu a, b, c là các số thực không âm và $r > 0$, thì

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Do (1) có bậc là 3 nên (1) còn được gọi là *bất đẳng thức Schur bậc 3*.

Ngoài cách chứng minh như trên, ta còn có một số cách chứng minh khác cho bất đẳng thức (1) như sau,

Cách 2. Do

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a),$$

nên ta có bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 + [a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] + 3abc &\geq \\&\geq 2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)],\end{aligned}$$

và do $a^3 + a^2(b+c) + abc = a(a+b)(a+c)$ nên ta có

$$\begin{aligned}a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) &\geq \\&\geq 2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)],\end{aligned}$$

hay là (chia cả hai vế của bất đẳng thức cho $(a+b)(b+c)(c+a)$)

$$\begin{aligned}2\left[\frac{ab}{(a+c)(b+c)} + \frac{bc}{(b+a)(b+c)} + \frac{ca}{(c+b)(c+a)}\right] &\leq \\&\leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned}VT &\leq ab\left[\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2}\right] + bc\left[\frac{1}{(b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right] + \\&+ ca\left[\frac{1}{(c+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ab+ca}{(b+c)^2} + \frac{ab+bc}{(c+a)^2} + \frac{bc+ca}{(a+b)^2} \\
 &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.
 \end{aligned}$$

Cách 3. Ta có

$$\begin{aligned}
 (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) &= \\
 &= [ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] - (a^3 + b^3 + c^3 + 2abc),
 \end{aligned}$$

do đó bất đẳng thức (1) còn có thể viết lại thành

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Đây chính là kết quả của ví dụ 5 mà ta đã chứng minh ở phần trước.

BÀI TẬP

1. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 19.$$

2. Chứng minh rằng với các số dương a, b, c có tổng bằng 3, thì

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0.$$

3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} + \frac{1}{1+ab} \geq \frac{9}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}.$$

5 KỸ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ

Thế giới bất đẳng thức tồn tại một quy luật rất quan trọng là “Trong một dạng cụ thể thì những bất đẳng thức càng nhiều biến càng khó”. Điều này cũng đồng nghĩa với việc khẳng định “Bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nếu ta đưa được một bất đẳng thức nhiều biến về dạng ít biến hơn”.

Kỹ thuật đặt ẩn phụ (hay còn gọi là phép “đổi biến”) chính là một công cụ hữu ích để thực hiện ý tưởng này.

Ví dụ 1. Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 3.$$

(ĐTTS lớp 10 phổ thông chuyên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội 2000 - 2001)

Lời giải

Đề ý rằng bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2} \geq 5.$$

Đặt $t = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2}$ thì ta có $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4}{t}$.

Và như vậy, bài toán được đưa về dạng một biến đơn giản là

$$t + \frac{4}{t} \geq 5.$$

Ta có phân tích

$$t + \frac{4}{t} - 5 = \frac{t^2 - 5t + 4}{t} = \frac{(t-1)(t-4)}{t},$$

do đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(t-1)(t-4)}{t} \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta dễ thấy $t \geq 4$. Suy ra $t-1 > 0, t-4 \geq 0$.

Từ đó ta được

$$\frac{(t-1)(t-4)}{t} \geq 0.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$. □

Ví dụ 2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\frac{3}{xy + yz + zx} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} \geq 14.$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Trần Phú, Hải Phòng 2003 - 2004)

Lời giải

Đề ý rằng nếu đặt $t = xy + yz + zx$ thì ta suy ra ngay

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 1 - 2t.$$

Mặt khác, lại theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$xy + yz + zx \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2,$$

suy ra

$$\begin{aligned}t &= xy + yz + zx = \frac{2(xy + yz + zx) + (xy + yz + zx)}{3} \\&\leq \frac{2(xy + yz + zx) + (x^2 + y^2 + z^2)}{3} = \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vậy với phép đặt ẩn phụ này, ta đã quy được một bài toán ba biến về dạng một biến đơn giản là, chứng minh

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{1-2t} \geq 14 \text{ với } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}.$$

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng biến đổi tương đương. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$3(1-2t) + 2t \geq 14t(1-2t),$$

$$3 - 4t \geq 14t - 28t^2,$$

$$3 - 18t + 28t^2 \geq 0,$$

$$3(1-3t)^2 + t^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Ví dụ 3. Cho $a, b, c, d > 0$ thoả mãn $ab = cd = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(c+d) + 4 \geq 2(a+b+c+d).$$

(ĐTTS lớp 10 phổ thông năng khiếu, ĐHQG, TP Hồ Chí Minh 2007)

Lời giải

Để ý rằng nếu đặt $x = a + b, y = c + d$ thì bất đẳng thức bốn biến cần chứng minh tương đương đã được quy về dạng hai biến đơn giản hơn là

$$xy + 4 \geq 2(x + y).$$

Do $xy + 4 - 2(x + y) = x(y - 2) + 2(2 - y) = (x - 2)(y - 2)$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$(y - 2)(x - 2) \geq 0.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM kết hợp với giả thiết, ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2, \quad c + d \geq 2\sqrt{cd} = 2,$$

suy ra

$$x - 2 \geq 0 \text{ và } y - 2 \geq 0.$$

Từ đó ta có

$$(y - 2)(x - 2) \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Dấu bằng xảy ra chỉ khi $a = b = c = d = 1$. □

Nhận xét. Qua những ví dụ trên, ta thấy việc đặt ẩn phụ dường như rất tự nhiên và “đơn giản”, chỉ cần dựa vào dạng biểu thức ở đề bài. Tuy nhiên, có không ít những bài toán đòi hỏi sự khéo léo hơn trong việc biến đổi, thêm bớt để từ đó có thể áp dụng được kỹ thuật đặt ẩn phụ một cách hiệu quả. Sau đây là những ví dụ điển hình cho điều chúng tôi muốn chia sẻ.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

Lời giải

Cộng thêm cả hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh với $a + b + c$, ta thu được

$$\left(\frac{a^2 + bc}{b + c} + a \right) + \left(\frac{b^2 + ca}{c + a} + b \right) + \left(\frac{c^2 + ab}{a + b} + c \right) \geq 2(a + b + c).$$

Mặt khác lại dễ ý rằng

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + a = \frac{a^2 + bc + a(b + c)}{b + c} = \frac{(a + b)(a + c)}{b + c},$$

suy ra bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(a + b)(a + c)}{b + c} + \frac{(b + c)(b + a)}{c + a} + \frac{(c + a)(c + b)}{a + b} \geq 2(a + b + c). \quad (1)$$

Tại đây, đặt $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ thì (1) trở thành

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y} \cdot \frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = x + y + z. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{(a + b + c)^3}{27abc} + \frac{6(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} \geq 3.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b+c)^3}{9abc} + \frac{18(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 9,$$

hay là

$$2 \left(\frac{3a}{a+b+c} \cdot \frac{3b}{a+b+c} + \frac{3b}{a+b+c} \cdot \frac{3c}{a+b+c} + \frac{3c}{a+b+c} \cdot \frac{3a}{a+b+c} \right) + \frac{3}{\frac{3a}{a+b+c} + \frac{3b}{a+b+c} + \frac{3c}{a+b+c}} \geq 9.$$

Tới đây, để ý rằng nếu đặt $x = \frac{3a}{a+b+c}, y = \frac{3b}{a+b+c}, z = \frac{3c}{a+b+c}$ thì ta có $x+y+z=3$ và bất đẳng thức trên sau phép đổi biến sẽ trở thành

$$\frac{3}{xyz} + 2(xy+yz+zx) \geq 9.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{3}{xyz} + (x+y+z)^2 \geq 9 + x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{xyz} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow xyz(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3.$$

Bất đẳng thức này đã được đề cập tới ở ví dụ 6 trang 71.

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Giả sử xét bài toán gốc, ta chuẩn hóa $a+b+c=3$ thì được

$$\frac{1}{abc} + \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \geq 3, \text{ hay } \frac{3}{abc} + 2(ab+bc+ca) \geq 9.$$

Đây cũng chính là bất đẳng thức thu được sau quá trình đổi biến. Nói cách khác, ý tưởng đặt ẩn phụ này là lời giải thích cho một tính chất quan trọng của phép chuẩn hóa, đó là “với những bất đẳng thức đồng bậc không điều kiện, ta hoàn toàn có thể giả sử $a+b+c=k$ ”.

Ví dụ 6. Cho $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1.$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá 2005 - 2006)

Lời giải

Với giả thiết x, y, z đều lớn hơn 2, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn. Hãy xét lời giải sau.

Đặt $x = a + 2, y = b + 2, z = c + 2$ với $a > 0, b > 0, c > 0$. Bài toán được quy về chứng minh

$$abc \leq 1,$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1.$$

Đến đây, đặt tiếp $m = \frac{a}{a+2}, n = \frac{b}{b+2}, p = \frac{c}{c+2}$ thì có $m + n + p = 1$

và

$$\frac{1}{m} = \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{m} - 1 = \frac{n+p}{m} \Rightarrow a = \frac{2m}{n+p}.$$

Tương tự

$$b = \frac{2n}{p+m}, \quad c = \frac{2p}{m+n}.$$

Do đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n} \leq 1,$$

hay tương đương

$$(m+n)(n+p)(p+m) \geq 8mnp.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(m+n)(n+p)(p+m) \geq 2\sqrt{mn} \cdot 2\sqrt{np} \cdot 2\sqrt{pm} = 8mnp.$$

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = n = p$, tức $x = y = z = 3$. $\square$

Cách khác. Sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+2} &= 1 - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b+2} \right) \\ &= \frac{a}{2(a+2)} + \frac{b}{2(b+2)} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}}. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}}, \quad \frac{1}{a+2} \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}}.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo về, ta được

$$\frac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)} \geq \frac{abc}{(a+2)(b+2)(c+2)},$$

từ đó suy ra

$$abc \leq 1.$$

Nhận xét. Thủ thuật đổi biến $a = \frac{2m}{n+p}$, $b = \frac{2n}{p+m}$, $c = \frac{2p}{m+n}$ khi các số thực a, b, c thỏa mãn

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$$

là một thủ thuật rất thường được sử dụng trong các bài toán bất đẳng thức. Nó giúp ta đưa bài toán trở về dạng đơn giản hơn, từ đó có được nhiều ý tưởng hơn cho bài toán.

Ví dụ 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$ab + bc + ca + abc = 4.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3.$$

Lời giải

Giả thiết đã cho có thể được viết lại như sau

$$abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8 = 12 + \sum ab + 4(a + b + c),$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (c+2)(a+2),$$

$$1 = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}.$$

Theo bài trước, tồn tại các số dương m, n, p sao cho

$$a = \frac{2m}{n+p}, \quad b = \frac{2n}{p+m}, \quad c = \frac{2p}{m+n}.$$

Thay vào, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m}} + \sqrt{\frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n}} + \sqrt{\frac{2p}{m+n} \cdot \frac{2m}{n+p}} \leq 3,$$

hay tương đương

$$2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} + 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+n}} + 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} \leq 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} &\leq \frac{m}{m+p} + \frac{n}{n+p}, \\ 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+n}} &\leq \frac{n}{m+n} + \frac{p}{m+n}, \\ 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} &\leq \frac{p}{n+p} + \frac{m}{m+n}. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{m}{m+p} \cdot \frac{n}{n+p}} + 2\sqrt{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{p}{m+n}} + 2\sqrt{\frac{p}{n+p} \cdot \frac{m}{m+n}} &\leq \\ &\leq \frac{m+n}{m+n} + \frac{n+p}{n+p} + \frac{m+p}{m+p} = 3. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} + \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{c+a}{b}\right)^3}} + \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^3}} \geq 1. \quad (1)$$

Đặt $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$ thì (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, thì

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(x^2-x+1)}} \geq \frac{1}{\frac{(1+x) + (x^2-x+1)}{2}} = \frac{2}{x^2+2}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{y^2+2} + \frac{1}{z^2+2} \geq \frac{1}{2},$$

hay tương đương
$$\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2} + \frac{1}{\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+2} + \frac{1}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, lại theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, dễ thấy

$$\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2} = \frac{a^2}{(b+c)^2+2a^2} \geq \frac{a^2}{2(b^2+c^2)+2a^2} = \frac{a^2}{2(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\frac{1}{\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+2} = \frac{b^2}{(c+a)^2+2b^2} \geq \frac{b^2}{2(c^2+a^2)+2b^2} = \frac{b^2}{2(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\frac{1}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+2} = \frac{c^2}{(a+b)^2+2c^2} \geq \frac{c^2}{2(a^2+b^2)+2c^2} = \frac{c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có ngay điều phải chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. $\square$

Ví dụ 9. Cho các số thực dương a, b, c bất kì. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}} + \sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}} + \sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}} \geq 3\sqrt{2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Đặt $x = a(b^2+c^2)$, $y = b(c^2+a^2)$, $z = c(a^2+b^2)$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh chính là

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{y+z}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z+x}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{z}}}$$

Vậy ta cần chỉ ra được $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq 8$.

Điều này một lần nữa lại đúng theo bất đẳng thức AM-GM vì

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq \frac{2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx}}{xyz} = 8.$$

Chứng minh hoàn tất.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Nhận xét. Chắc chắn sẽ có lúc độc giả tự hỏi liệu kĩ thuật này có phát huy được cho những bài toán với những dấu bằng “đặc biệt” hay không? Có lẽ ví dụ sau đây sẽ là câu trả lời sức tích nhất.

Ví dụ 10. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca) > 0.$$

Chứng minh rằng
$$\frac{|a-b|}{\sqrt{2ab+c^2}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{2bc+a^2}} + \frac{|c-a|}{\sqrt{2ca+b^2}} \geq 2.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Ta thấy ngay đẳng thức không thể xảy ra khi $a = b = c$. Mặt khác, với những giả thiết đặc biệt như trên thì việc khai thác nó đòi hỏi phải có sự tinh tế nhất định. Lời giải của chúng tôi như sau.

Để ý rằng từ giả thiết bài toán, ta suy ra được

$$2ab + c^2 = (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

nên từ đây ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2,$$

với $x = (a-b)^2, y = (b-c)^2, z = (c-a)^2$.

Để thấy $y+z > 0, z+x > 0, x+y > 0$. Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{x(y+z)} \leq \frac{x+(y+z)}{2},$$

suy ra

$$1 \geq \frac{2\sqrt{x(y+z)}}{x+y+z}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này cho $\sqrt{\frac{x}{y+z}}$, ta được

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{x+y+z}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z}, \quad \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z} = 2.$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 4c > 0$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị tương ứng. $\square$

Nhận xét. Ngoài ra, độc giả có thể tham khảo thêm những ứng dụng thú vị khác của kĩ thuật đặt ẩn phụ qua một chuyên đề rất độc đáo mang tên “những bất đẳng thức kì lạ” – được đề cập trong cuốn sách “Về đẹp bất đẳng thức qua các kì thi Olympic” của các tác giả Trần Phương – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh.

BÀI TẬP

1. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \sqrt{3(a^3 + b^3 + c^3)}.$$

3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{3\sqrt{3abc(a+b+c)}(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)^3}.$$

4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^m b^m}{c^{m+n}} + \frac{b^m c^m}{a^{m+n}} + \frac{c^m a^m}{b^{m+n}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

5. Chứng minh rằng với mọi số thực bất kì a, b, c ta luôn có

$$(a+b)^3(b-c)^3 + (b+c)^3(c-a)^3 + (c+a)^3(a-b)^3 \geq 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2).$$

6. Cho a, b, c là các số thực không âm tùy ý. Chứng minh rằng

$$a^2 b^3 (a-b)^2 + b^2 c^3 (b-c)^2 + c^2 a^3 (c-a)^2 \geq (a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2.$$

7. Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a-b} \right)^2 + \left(\frac{b}{b-c} \right)^2 + \left(\frac{c}{c-a} \right)^2 \geq 1.$$

(IMO 2008)

8. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2}}.$$

9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})^2 \geq 27.$$

10. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 10.$$

Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{27}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a}{b^3 + ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a + b^3} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right).$$

Tương tự

$$\frac{b}{c^3 + bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + 1 \right), \quad \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + 1 \right).$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại về theo về, ta được

$$\frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4}.$$

Và như thế, bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(\frac{1}{a} + a \right) + \left(\frac{1}{b} + b \right) + \left(\frac{1}{c} + c \right) \geq 3 + a + b + c = 6.$$

Đây là một kết quả đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{1}{a} + a \geq 2, \quad \frac{1}{b} + b \geq 2, \quad \frac{1}{c} + c \geq 2.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Nhận xét. Qua những ví dụ trên, nếu để ý kĩ, độc giả sẽ thấy dường như hiệu quả đáng kể nhất của kĩ thuật AM-GM ngược dấu chính là giúp chuyển các bất đẳng thức hoàn vi về dạng đối xứng đơn giản chỉ sau một bước “đem”.

Tuy nhiên, không có nghĩa là sau khi sử dụng AM-GM ngược dấu, “bắt buộc” ta phải quy được bài toán về dạng đối xứng mới là thành công. Sau đây, hãy đến với những ví dụ đặc biệt hơn để hiểu rõ hơn điều chúng tôi muốn đề cập.

Ví dụ 5. Cho các số dương x, y, z có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3 y}{x^2 + 1} + \frac{y^3 z}{y^2 + 1} + \frac{z^3 x}{z^2 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng kĩ thuật AM-GM ngược đầu, ta có

$$\frac{x^2y}{x^2+1} = x^2y - \frac{x^2y}{x^2+1} \geq x^2y - \frac{x^2y}{2x} = x^2y - \frac{xy}{2}.$$

Tương tự,

$$\frac{y^2z}{y^2+1} \geq y^2z - \frac{yz}{2}, \quad \frac{z^2x}{z^2+1} \geq z^2x - \frac{zx}{2}.$$

Suy ra ta cần chứng minh

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq \frac{3}{2} + \frac{xy + yz + zx}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, dễ thấy

$$\frac{x^2y + y^2z + z^2x}{2} \geq \frac{3xyz}{2} = \frac{3}{2}.$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq xy + yz + zx.$$

Thật vậy, lại sử dụng AM-GM kết hợp với giả thiết $xyz = 1$, ta có

$$x^2y + x^2y + y^2z \geq 3\sqrt[3]{x^2y \cdot x^2y \cdot y^2z} = 3xy,$$

$$y^2z + y^2z + z^2x \geq 3\sqrt[3]{y^2z \cdot y^2z \cdot z^2x} = 3yz,$$

$$z^2x + z^2x + x^2y \geq 3\sqrt[3]{z^2x \cdot z^2x \cdot x^2y} = 3zx.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo về rồi rút gọn, suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. $\square$

Ví dụ 6. Cho các số dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Sử dụng phép tách

$$\frac{1+a}{1+b} = 1 + a - \frac{b(1+a)}{1+b},$$

ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$\frac{b(1+a)}{1+b} + \frac{c(1+b)}{1+c} + \frac{a(1+c)}{1+a} \geq 3.$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{b(1+a)}{1+b} + \frac{c(1+b)}{1+c} + \frac{a(1+c)}{1+a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b(1+a)}{1+b} \cdot \frac{c(1+b)}{1+c} \cdot \frac{a(1+c)}{1+a}} \\ &= 3\sqrt[3]{abc} = 3.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3 + 16} + \frac{b}{c^3 + 16} + \frac{c}{a^3 + 16} \geq \frac{1}{6}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật AM-GM ngược dấu, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^3 + 16} &= \frac{1}{16} \left(a - \frac{ab^3}{b^3 + 16} \right) = \frac{1}{16} \left(a - \frac{ab^3}{b^3 + 2^3 + 2^3} \right) \\ &\geq \frac{1}{16} \left(a - \frac{ab^3}{12b} \right) = \frac{1}{16} \left(a - \frac{ab^2}{12} \right).\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b}{c^3 + 16} \geq \frac{1}{16} \left(b - \frac{bc^2}{12} \right) \text{ và } \frac{c}{a^3 + 16} \geq \frac{1}{16} \left(c - \frac{ca^2}{12} \right).$$

do đó bài toán quy về chứng minh

$$\frac{1}{16} \left(3 - \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{12} \right) \geq \frac{1}{6},$$

hay tương đương

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 4.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c . Hiển nhiên có

$$a(b-c)(b-a) \leq 0,$$

do đó

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc = b(a+c)^2 + a(b-a)(b-c) \leq b(a+c)^2.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$b(c+a)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (c+a) \cdot (c+a) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2b + (c+a) + (c+a)}{3} \right]^3 = 4.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (0, 1, 2)$ hoặc các bộ hoán vị tương ứng. $\square$

Nhận xét. Ở bài toán này, dấu đẳng thức không xảy ra khi $a = b = c = 1$ mà lại xảy ra khi $(a, b, c) = (0, 1, 2)$ và các hoán vị tương ứng. Tương chừng như với dấu bằng đặc biệt như thế, ta sẽ phải sử dụng tới những công cụ mạnh hơn, hiện đại hơn để giải quyết. Nhưng thực tế một lần nữa lại khẳng định những công cụ mạnh nhất đôi khi không phải là công cụ tốt nhất và khả thi nhất. Điều này làm chúng tôi chợt nhớ tới một câu nói nổi tiếng: “Kẻ mạnh đôi khi không phải kẻ chiến thắng, mà kẻ chiến thắng mới là kẻ mạnh”. Vì vậy, ta không nên nghĩ hay cố gắng so sánh “phương pháp hiện đại” cũng như “phương pháp cổ điển”, cái nào mạnh hơn, chặt hơn. Bởi lẽ đơn giản “độ mạnh tương đối” đó chỉ có ý nghĩa trong từng bài toán cụ thể mà thôi.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 4$, ta có

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$

2. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d , ta luôn có

$$\frac{a^4}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4}{c^3 + 2d^3} + \frac{d^4}{d^3 + 2a^3} \geq \frac{a + b + c + d}{3}.$$

3. Cho các số thực dương a, b, c và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a + 2b^3} + \frac{b^2}{b + 2c^3} + \frac{c^2}{c + 2a^3} \geq 1.$$

4. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{d^2 + 1} \geq 2.$$

5. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{d^2+1} + \frac{d+1}{a^2+1} \geq 4.$$

CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

*"In theory, there is no difference between theory and practice.
But in practice, there is."*
Yogi Berra

BÀI 1 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b bất kì ta luôn có

$$(a) \quad (a^2 + b^2)(a + b) \geq 4ab(a + b - \sqrt{ab});$$

$$(b) \quad (a^2 + b^2)(a + b) \geq 4ab[2(a + b) - 3\sqrt{ab}].$$

(Hoàng Kiều Nam)

Lời giải

(a) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM trực tiếp dạng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{ab}(a + b - \sqrt{ab}).$$

Mặt khác, lại sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$, ta có

$$2\sqrt{ab}(a + b - \sqrt{ab}) \leq 2 \cdot \frac{[\sqrt{ab} + (a + b - \sqrt{ab})]^2}{4} = \frac{(a + b)^2}{2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{(a + b)^2}{2} \leq a^2 + b^2$, hay

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{2} \geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$.

(b) Đây là kết quả mạnh hơn so với (a). Tương tự như bước đầu ở câu (a), ta sẽ chứng minh

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{ab}[2(a + b) - 3\sqrt{ab}]. \quad (1)$$

Tôi đây, nếu đặt $a = x^2, b = y^2$ thì (1) trở thành

$$x^4 + y^4 \geq 2xy(2x^2 + 2y^2 - 3xy).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 \geq 2xy(2x^2 + 2y^2 - 4xy),$$

$$(x^2 - y^2)^2 \geq 2xy(x - y)^2,$$

$$(x - y)^2 \left[(x + y)^2 - 2xy \right] \geq 0$$

$$(x - y)^2(x^2 + y^2) \geq 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$. □

BÀI 2 Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\frac{n^n}{2^{n-1}} \geq n! \geq \frac{4^{n-1}}{n}$
(Hoàng Kiều Nam)

Lời giải

Với $n = 1$, bất đẳng thức kép này hiển nhiên đúng. Sau đây, ta sẽ xét trường hợp $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức ở vế phải, tức

$$n! \geq \frac{4^{n-1}}{n}.$$

Để ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM bộ hai số dạng $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có

$$1 + \frac{n^2}{4} = 1^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \geq 2 \cdot 1 \cdot \frac{n}{2} = n,$$

suy ra
$$\frac{n^2}{4} \geq n - 1.$$

Hoàn toàn tương tự, ta thiết lập được chuỗi bất đẳng thức

$$\frac{(n-1)^2}{4} \geq n-2,$$

.....

$$\frac{(n-k)^2}{4} \geq n-k-1,$$

.....,

$$\frac{2^2}{4} \geq 1.$$

Nhân $n-1$ bất đẳng thức được thiết lập ở trên lại theo vế, ta thu được

$$\frac{[n(n-1) \cdots 2]^2}{4^{n-1}} \geq (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

suy ra

$$\frac{n^2 \cdot [(n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1]}{4^{n-1}} \geq 1.$$

Do $(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \frac{n!}{n}$ nên từ trên ta có $\frac{n \cdot n!}{4^{n-1}} \geq 1$, hay $n! \geq \frac{4^{n-1}}{n}$.

Bất đẳng thức ở về phải đã được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 1$ hoặc $n = 2$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở về trái là

$$\frac{n^n}{2^{n-1}} \geq n!$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, ta có

$$1 \cdot (n-1) \leq \frac{(1+n-1)^2}{4} = \frac{n^2}{4}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$2 \cdot (n-2) \leq \frac{n^2}{4},$$

.....

$$k \cdot (n-k) \leq \frac{n^2}{4},$$

.....

$$(n-1) \cdot [n - (n-1)] \leq \frac{n^2}{4}.$$

Nhân $n-1$ bất đẳng thức được thiết lập ở trên lại theo về và lấy căn bậc hai, ta thu được

$$(n-1)! \leq \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}. \quad (1)$$

Từ đó nhân cả hai vế của (1) với n , suy ra

$$n! \leq \frac{n^n}{2^{n-1}}.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 1$ hoặc $n = 2$. □

BÀI 3 Cho a và b là các số dương thỏa mãn $a^4 + b^4 = 2$. Chứng minh

$$\frac{5a^2}{b} + \frac{3b^3}{a^2} \geq 8.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$5a^4 + 3b^4 \geq 8a^2b.$$

Để ý rằng

$$5a^4 + 3b^4 = (a^4 + b^4) + 4a^4 + 2b^4 = 2(2a^4 + b^4 + 1),$$

do vậy bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$a^4 + a^4 + b^4 + 1 \geq 4a^2b,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. □

BÀI 4 Cho a, b là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Chứng minh

$$7a + 5b + 12ab \leq 9.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 7a + 5b + 12ab - 9 &\leq 7\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 5\left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + 12ab - 9 \\ &= 7a^2 + 5b^2 + 12ab - 6 \\ &= (9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6) - 2(a^2 + b^2 - 2ab) \\ &\leq -2(a - b)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$. □

BÀI 5 Cho a và b là các số không âm thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh

$$3(a^3 + b^4) + 2a^4b^4 \leq 8.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab$, $a^3 + 2 \geq 3a$ và $b^3 + 2 \geq 3b$. Mặt khác, do $a^3 + b^3 = 2$, nên có thể suy ra ngay

$$ab \leq 1, \quad 3a \leq 4 - b^3, \quad 3b \leq 4 - a^3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} 3(a^4 + b^4) + 2a^4b^4 &= 3a \cdot a^3 + 3b \cdot b^3 + 2a^3b^3 \cdot ab \\ &\leq (4 - b^3)a^3 + (4 - a^3)b^3 + 2a^3b^3 = 4(a^3 + b^3) = 8. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. $\square$

BÀI 6 Cho a và b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$ab + \max\{a, b\} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

(Phạm Văn Thuận)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b\}$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$ab \leq \frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}}, \quad a \leq \frac{4a^2 + 3}{4\sqrt{3}}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} ab + \max\{a, b\} &= ab + a \leq \frac{2(a^2 + 3b^2) + (4a^2 + 3)}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{6(a^2 + b^2) + 3}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b) là một hoán vị của $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $\square$

BÀI 7 Cho a, b các số dương thỏa mãn $a^3 + b^5 \leq a^2 + b^2$. Chứng minh

$$b - \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Để ý rằng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$, nên bằng cách sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM-GM (để bảo toàn dấu bằng của bài toán), ta sẽ làm giảm bậc của a^3, b^5 xuống a^2, b^2 như sau

$$2a^3 + 1 = a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2, \quad 2b^5 + 3 = b^5 + b^5 + 3 \geq 5b^2.$$

Do đó

$$a^3 + b^5 \geq \frac{3a^2 - 1}{2} + \frac{5b^2 - 3}{2}.$$

Kết hợp với giả thiết đã cho, ta được

$$a^2 + b^2 \geq \frac{3a^2 - 1}{2} + \frac{5b^2 - 3}{2},$$

$$a^2 + 3b^2 \leq 4,$$

$$a^2 + b^2 \leq 4 - 2b^2 \leq 4 - 2(2b - 1) - 2(b - 1)^2 \leq 6 - 4b,$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{6 - 4b}.$$

Từ đây ta suy ra

$$b - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2} \leq b - \frac{1}{6 - 4b} - \frac{1}{2} = -\frac{2(b - 1)^2}{3 - 2b} \leq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. $\square$

BÀI 8 Cho a và b là các số dương thỏa mãn $a^9 + b^9 = 2$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq 2.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải

Cách 1. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^3 + b^3 \geq 2ab,$$

hay $(a^3 + b^3)^3 \geq 8a^3b^3.$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với $3(a^3 + b^3) > 0$, ta thu được

$$3(a^3 + b^3)^4 \geq 24a^3b^3(a^3 + b^3).$$

Đề ý rằng $3a^3b^3(a^3 + b^3) = (a^3 + b^3)^3 - (a^9 + b^9) = (a^3 + b^3)^3 - 2$, nên ta chỉ cần chứng minh

$$3(a^3 + b^3)^4 \geq 8[(a^3 + b^3)^3 - 2],$$

hay $3(a^3 + b^3)^4 + 16 \geq 8(a^3 + b^3)^3.$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 3(a^3 + b^3)^4 + 16 &= (a^3 + b^3)^4 + (a^3 + b^3)^4 + (a^3 + b^3)^4 + 2^4 \\ &\geq 4\sqrt[4]{(a^3 + b^3)^{12} 2^4} = 8(a^3 + b^3)^3. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. $\blacksquare$

Cách 2. Sau khi thuần nhất hóa, ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$a^3 + b^3 \geq 2ab\sqrt{\frac{a^9 + b^9}{2}},$$

hay tương đương

$$(a^3 + b^3)^9 \geq 2^9 a^9 b^9 (a^9 + b^9).$$

Do $a^9 + b^9 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$ nên ta cần chứng minh

$$(a^3 + b^3)^8 \geq 2^9 a^9 b^9 (a^6 - a^3b^3 + b^6).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a^9 b^9 (a^6 - a^3b^3 + b^6)} &= \sqrt[4]{(a^3 b^3)^3 (a^6 - a^3b^3 + b^6)} \\ &\leq \frac{3a^3 b^3 + (a^6 - a^3b^3 + b^6)}{4} = \frac{(a^3 + b^3)^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } a^9 b^9 (a^6 - a^3b^3 + b^6) \leq \left[\frac{(a^3 + b^3)^2}{4} \right]^4 = \frac{(a^3 + b^3)^8}{2^9}.$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

BÀI 9 Cho a và b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{9a^2 + b^2}} + \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{9a^2 + b^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

(Jack Garfunkel)

Lời giải

Do $a \leq |a|$ và $b \leq |b|$, nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|b|}{\sqrt{9a^2 + b^2}} + \frac{2|a||b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{9a^2 + b^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Đặt $a^2 = x$ và $b^2 = 3y^2$. Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành

$$P = 2\sqrt{\frac{x}{x+3y}} + 2\sqrt{\frac{y}{y+3x}} + 4\sqrt{\frac{xy}{(x+3y)(y+3x)}} \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sqrt{\frac{x}{x+3y}} \leq \frac{x}{x+y} + \frac{x+y}{x+3y}, \quad 2\sqrt{\frac{y}{y+3x}} \leq \frac{y}{x+y} + \frac{x+y}{y+3x}.$$

và
$$4\sqrt{\frac{xy}{(x+3y)(y+3x)}} \leq \frac{8xy}{(x+3y)(y+3x)} + \frac{1}{2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta nhận thấy

$$P \leq \frac{3}{2} + \frac{x+y}{x+3y} + \frac{x+y}{y+3x} + \frac{8xy}{(x+3y)(y+3x)},$$

và do đó chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$\frac{x+y}{x+3y} + \frac{x+y}{y+3x} + \frac{8xy}{(x+3y)(y+3x)} \leq \frac{3}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - \frac{x+y}{x+3y} - \frac{x+y}{y+3x} - \frac{8xy}{(x+3y)(y+3x)} &= \frac{3}{2} - \frac{4(x+y)^2 + 8xy}{(x+3y)(y+3x)} \\ &= \frac{(x-y)^2}{2(x+3y)(y+3x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $b = \sqrt{3}a > 0$. □

BÀI 10 Cho a và b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3a}} \right) \leq 2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a+3b} \right)$$

và
$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2b}{a+3b} \right).$$

Cộng hai kết quả trên lại, ta thu được

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{3}{2} \right).$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{3}{2} \right).$$

Do vậy, dễ dàng nhận thấy

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3a}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + 3 \right) = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. □

BÀI 11 Cho x và y là hai số thực dương thỏa mãn

$$x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} = 4.$$

Tìm giá trị lớn nhất của x^2y .

(Michael Rozenberg)

Lời giải

Từ giả thiết đã cho, ta dễ dàng nhận thấy $x + y < 4$. Do đó, nó có thể được viết lại thành

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 = (4 - x - y)^2.$$

Từ đây, bằng một số biến đổi, ta có

$$(x + 4)^2 + 2(y + 2)^2 = 40,$$

hay

$$2 \left(2 + \frac{x}{2} \right)^2 + (2 + y)^2 = 20.$$

Tới đây, sử dụng lần lượt các bất đẳng thức AM-GM và Holder, ta có

$$\left(2 + \frac{x}{2} \right)^2 + \left(2 + \frac{x}{2} \right)^2 + (2 + y)^2 \geq 3 \left[\left(2 + \frac{x}{2} \right)^2 (2 + y) \right]^{\frac{2}{3}} \geq 3 \left(2 + \sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}} \right)^2.$$

Từ đó suy ra

$$20 \geq 3 \left(2 + \sqrt[3]{\frac{x^2y}{4}} \right)^2.$$

hay

$$x^2y \leq 32 \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2y = 4 \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right)$. □

BÀI 12 Cho a và b là các số không âm thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$a^a b^b + 3ab \leq 4.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng, ta có:

$$\frac{a}{a+b} \cdot a + \frac{b}{a+b} \cdot b \geq a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}.$$

Mà $a + b = 2$ nên ta có: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq a^{\frac{a}{2}} b^{\frac{b}{2}}.$

$$\text{Từ đó suy ra: } a^a b^b \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 = \left(\frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} \right)^2 = (2 - ab)^2.$$

Do vậy,

$$a^a b^b + 3ab - 4 \leq (2 - ab)^2 + 3ab - 4 = ab(ab - 1) \leq 0,$$

$$\text{vì } ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = 1.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$, hoặc $a = 2$ và $b = 0$, hoặc $a = 0$ và $b = 2$. $\square$

BÀI 13 Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a + b^2 + c^3 + \frac{1}{abc}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 17 số, ta có

$$\begin{aligned} P &= 6 \cdot \frac{a}{6} + 3 \cdot \frac{b^2}{3} + 2 \cdot \frac{c^3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{6abc} \geq 17 \sqrt[17]{\left(\frac{a}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{b^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6abc}\right)^6} \\ &= \frac{17}{\sqrt[17]{6^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 6^6}} = \frac{17}{\sqrt[17]{2^{14} \cdot 3^{15}}}. \end{aligned}$$

Ta chú ý tới cách xét dấu bằng của bài toán. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{6} = \frac{b^2}{3} = \frac{c^3}{2} = \frac{1}{6abc} \quad \text{hay} \quad a = 2b^2 = 3c^3 = \frac{1}{abc}.$$

Tôi đây, đặt $a = 2b^2 = 3c^3 = \frac{1}{abc} = t^6$, suy ra a, b, c sẽ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} a = 2b^2 = 3c^3 = t^6 \\ \frac{1}{abc} = t^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t^6, b = \frac{t^3}{\sqrt{2}}, c = \frac{t^2}{\sqrt[3]{3}} \\ \frac{1}{abc} = t^6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = t^6, b = \frac{t^3}{\sqrt{2}}, c = \frac{t^2}{\sqrt[3]{3}} \\ \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}}{t^{11}} = t^6 \end{cases}$$

Từ đó, ta có dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(t^6, \frac{t^3}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt[3]{3}}\right)$

với $t = \sqrt[11]{72}$. Vậy kết luận được mình $P = \frac{17}{\sqrt[17]{2^{14}} \cdot 3^{16}}$. $\square$

BÀI 14 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta luôn có

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geq \frac{a+b+c+d}{abcd}.$$

(Austrian MO 2005)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} &\geq \frac{3}{abc}, \\ \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} &\geq \frac{3}{bcd}, \\ \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{a^3} &\geq \frac{3}{cda}, \\ \frac{1}{d^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} &\geq \frac{3}{dab}. \end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta thu được

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geq \frac{1}{abc} + \frac{1}{bcd} + \frac{1}{cda} + \frac{1}{dab} = \frac{a+b+c+d}{abcd}.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d > 0$. $\square$

BÀI 15 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{(4a+b+c)(b+c)} + \frac{ca}{(4b+c+a)(c+a)} + \frac{ab}{(4c+a+b)(a+b)} \leq \frac{1}{4}$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Để ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{bc}{(4a+b+c)(b+c)} &= \frac{bc}{4a(b+c) + (b+c)^2} \leq \frac{bc}{4a(b+c) + 4bc} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{bc}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \frac{ca}{(4b+c+a)(c+a)} &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{ca}{ab+bc+ca}, \\ \frac{ab}{(4c+a+b)(a+b)} &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{ab}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại, thu được

$$\frac{bc}{(4a+b+c)(b+c)} + \frac{ca}{(4b+c+a)(c+a)} + \frac{ab}{(4c+a+b)(a+b)} \leq \frac{1}{4}.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$ hoặc $a=b>0, c=0$ và các hoán vị bất kì. $\square$

BÀI 16 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{a+b}{2\sqrt[3]{abc}} + \frac{b+c}{2\sqrt[3]{abc}} + \frac{c+a}{2\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &\geq 4 \sqrt[4]{\frac{a+b}{2\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{b+c}{2\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{c+a}{2\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = 4. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

BÀI 17 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}.$$

(Turkish TST 2007)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} ab + 2c^2 + 2c &= ab + 2c^2 + 2c(a + b + c) = (a + 2c)(b + 2c) \\ &= \frac{(ab + 2bc)(ab + 2ac)}{ab} \leq \frac{[(ab + 2bc) + (ab + 2ac)]^2}{4ab} \\ &= \frac{(ab + bc + ca)^2}{ab}, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} \geq \frac{ab}{(ab + bc + ca)^2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} \geq \frac{bc}{(ab + bc + ca)^2}, \quad \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{ca}{(ab + bc + ca)^2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} &\geq \\ &\geq \frac{ab + bc + ca}{(ab + bc + ca)^2} = \frac{1}{ab + bc + ca}. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

BÀI 18 Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c , ta đều có

$$(a^2 + b^2)^2 \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b + c).$$

(British MO 2007)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} &(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b + c) \\ &= [(a + b - c)(a + b + c)][(b + c - a)(c + a - b)] \end{aligned}$$

$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \leq \left[\frac{[(a+b)^2 - c^2] + [c^2 - (a-b)^2]}{2} \right]^2 \\ = (a^2 + b^2)^2.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2$, hay $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

BÀI 19 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 2abc + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

(Hoàng Kiều Nam)

Lời giải

Bất đẳng thức này là làm mạnh của bất đẳng thức AM-GM bộ ba số dạng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Với kết quả làm mạnh này, ta có thể chứng minh như sau:

Cách 1. Để ý rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{abc(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca},$$

nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 2abc + \frac{abc(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}.$$

Chia cả hai vế của bất đẳng thức trên cho abc , ta được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq 2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca},$$

hay

$$(a^3 + b^3 + c^3)(ab + bc + ca) \geq abc(a + b + c)^2.$$

Sử dụng hệ quả quen thuộc của bất đẳng thức AM-GM là

$$abc(a + b + c) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3},$$

ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (ab + bc + ca)(a + b + c).$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \leq \frac{(a + b + c)^3}{3}$$

và

$$\begin{aligned} 3(a^3 + b^3 + c^3) &= 3(a + b + c)^3 - 9(a + b)(b + c)(c + a) \\ &\geq 3(a + b + c)^3 - 9 \left[\frac{(a + b) + (b + c) + (c + a)}{3} \right]^3 \\ &= \frac{(a + b + c)^3}{3} \geq (ab + bc + ca)(a + b + c). \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. ■

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 2abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + a^2 + b^2 + c^2,$$

hay tương đương

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 2(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2.$$

Mặt khác, theo hệ quả quen thuộc của bất đẳng thức AM-GM thì

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

nên ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}.$$

Suy ra chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a + b + c} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3 + b^3 + c^3 + ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a),$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow [a^3 + b^3 - ab(a+b)] + [b^3 + c^3 - bc(b+c)] + [c^3 + a^3 - ca(c+a)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \geq 0.$$

Vì bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được bài toán tổng quát là: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Khi đó, với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, ta có

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \geq (n-1)a_1 a_2 \dots a_n + \frac{a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \dots + a_n^{m-1}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

BÀI 20 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2 + bc}{b + ca} + \frac{b^2 + ca}{c + ab} + \frac{c^2 + ab}{a + bc} \geq 3.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Do giả thiết $a + b + c = 3$ nên ta sẽ quy bài toán về dạng chứng minh bất đẳng thức đồng bậc là

$$\frac{a^2 + bc}{b(a+b+c) + 3ca} + \frac{b^2 + ca}{c(a+b+c) + 3ab} + \frac{c^2 + ab}{a(a+b+c) + 3bc} \geq 1.$$

Mặt khác, dễ ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} 3(b+ca) &= b(a+b+c) + 3ca \leq b(a+b+c) + ca + c^2 + a^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca, \end{aligned}$$

nên ta có

$$\frac{a^2 + bc}{b(a+b+c) + 3ca} \geq \frac{a^2 + bc}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}.$$

Từ đó dễ dàng suy ra

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + bc}{b(a+b+c) + 3ca} + \frac{b^2 + ca}{c(a+b+c) + 3ab} + \frac{c^2 + ab}{a(a+b+c) + 3bc} \\ \geq \frac{(a^2 + bc) + (b^2 + ca) + (c^2 + ab)}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} = 1. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

BÀI 21 Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta đều có

$$(a+b)^3(b-c)^3 + (b+c)^3(c-a)^3 + (c+a)^3(a-b)^3 \\ \geq 3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2),$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Đặt $x = (a+b)(b-c)$, $y = (b+c)(c-a)$, $z = (c+a)(a-b)$.

Khi đó, bất đẳng thức trên chính là

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz,$$

hay tương đương

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, dễ thấy

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được: $x + y + z \geq 0$,

tức là $(a+b)(b-c) + (b+c)(c-a) + (c+a)(a-b) \geq 0$.

Bất đẳng thức này có thể thu gọn lại thành: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo AM-GM.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 22 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$ab + bc + ca + \frac{1}{abc} \geq abc + 3.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc,$$

suy ra

$$abc \leq \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9} = \frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$ab + bc + ca + \frac{1}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{3} + 3.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{1}{abc} \geq 3.$$

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa, ta được

$$\frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{1}{abc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{9abc}}.$$

Mà $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 9abc$ (kết quả quen thuộc), nên kết hợp với trên, suy ra

$$\frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{ab+bc+ca}{3} + \frac{1}{abc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9abc}{9abc}} = 3.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

BÀI 23 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)} + \frac{b^2+3c^2}{bc^2(4-bc)} + \frac{c^2+3a^2}{ca^2(4-ca)} \geq 4.$$

(Turkish MO 2007)

Lời giải

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)} &= \frac{(a^2+b^2)+2b^2}{ab^2(4-ab)} \geq \frac{2ab+2b^2}{ab^2(4-ab)} \\ &= \frac{2(a+b)}{ab(4-ab)} \geq \frac{4}{\sqrt{ab(4-ab)}}. \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{ab(4-ab)}} + \frac{1}{\sqrt{bc(4-bc)}} + \frac{1}{\sqrt{ca(4-ca)}} \geq 1.$$

Mặt khác, lại sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ bốn số, ta có

$$\begin{aligned} 3ab \cdot (4-ab)^2 &= 3ab \cdot (4-ab) \cdot (4-ab) \cdot (4-ab) \\ &\leq \left[\frac{3ab+3(4-ab)}{4} \right]^4 = 3^4. \end{aligned}$$

tức $ab(4-ab)^3 \leq 3^3$, suy ra $\sqrt[3]{ab(4-ab)} \leq 3$. Từ đây, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{ab(4-ab)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ab(4-ab)}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{bc(4-bc)}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{bc}} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{ca(4-ca)}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ca}}.$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[3]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[3]{ca}} \geq 3.$$

Thật vậy, điều này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM bộ ba số,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[3]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[3]{ca}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{bc}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ca}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}} = 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

BÀI 24 Cho x, y, z là các số thực bất kì thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ và (a, b, c) là một hoán vị tùy ý của (x, y, z) . Chứng minh rằng

$$\frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} + \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} + \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq 12.$$

(Moldovan TST 2009)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM (với chú ý rằng $x, y \geq \frac{1}{2}$), ta có

$$\begin{aligned} 4xy + 5z &\leq 2(x^2 + y^2) + 5\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) = 5(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{5}{4} - 3x^2 - 3y^2 \\ &\leq 5(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{5}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{20(a^2 + b^2 + c^2) - 1}{4}. \end{aligned}$$

Từ đây, do $60a^2 - 1 > 0$ nên ta dễ dàng suy ra

$$\frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} \geq \frac{4(60a^2 - 1)}{20(a^2 + b^2 + c^2) - 1}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} \geq \frac{4(60b^2 - 1)}{20(a^2 + b^2 + c^2) - 1},$$

$$\frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y} \geq \frac{4(60c^2 - 1)}{20(a^2 + b^2 + c^2) - 1}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\frac{60a^2 - 1}{4xy + 5z} + \frac{60b^2 - 1}{4yz + 5x} + \frac{60c^2 - 1}{4zx + 5y}$$

$$\geq \frac{4(60a^2 - 1) + 4(60b^2 - 1) + 4(60c^2 - 1)}{20(a^2 + b^2 + c^2) - 1} = 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$. □

BÀI 25 Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng

$$(a^2 - b^2)(b - c) + c^2(1 - c) \leq \frac{108}{529}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bốn số với chú ý $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ ta có

$$(a^2 - b^2)(b - c) + c^2(1 - c) = a^2(b - c) + b^2(c - b) + c^2(1 - c)$$

$$\leq 0 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot (2c - 2b) + c^2(1 - c)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\frac{b + b + (2c - 2b)}{3} \right]^3 + c^2(1 - c)$$

$$= c^2 \left(1 - \frac{23}{27}c \right).$$

Mặt khác lại theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$c^2 \left(1 - \frac{23}{27}c \right) = \left(\frac{54}{23} \right)^2 \cdot \left(\frac{23}{54}c \right) \cdot \left(\frac{23}{54}c \right) \cdot \left(1 - \frac{23}{27}c \right)$$

$$\leq \left(\frac{54}{23} \right)^2 \left[\frac{\frac{23}{54}c + \frac{23}{54}c + \left(1 - \frac{23}{27}c \right)}{3} \right]^3 = \frac{108}{529}.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = \frac{12}{23}, c = \frac{18}{23}$. □

BÀI 26 Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}} \geq \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right). \quad (1)$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{\frac{a}{b+c}}, y = \sqrt{\frac{b}{c+a}}, z = \sqrt{\frac{c}{a+b}}$. Bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{1}{xyz} \geq \frac{4}{3}(x+y+z) \quad \text{hay là} \quad 3xyz(x+y+z) \leq \frac{9}{4}.$$

Sử dụng đánh giá cơ bản

$$3xyz(x+y+z) \leq (xy+yz+zx)^2,$$

ta đưa được bài toán về chứng minh

$$(xy+yz+zx)^2 \leq \frac{9}{4} \quad \text{hay} \quad xy+yz+zx \leq \frac{3}{2}.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$xy = \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right).$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$xy+yz+zx \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+c}{a+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+b}{a+b} \right) = \frac{3}{2}.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

BÀI 27 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$4 \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} \right) \leq 3 \left(2 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

(International competition SRMC 2006)

Lời giải

Do $abc = 1$ nên tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$.

Thay vào bất đẳng thức đã cho, ta viết được nó lại thành

$$4 \left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} + \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} \right) \leq 3 \left(2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{4(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}} \leq 3 \left[\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \right]^{\frac{2}{3}},$$

$$xyz(x+y+z)^3 \leq \frac{27}{64} (x+y)^2 (y+z)^2 (z+x)^2.$$

Sử dụng đánh giá quen thuộc

$$\frac{8}{9} (x+y+z)(xy+yz+zx) \leq (x+y)(y+z)(z+x),$$

ta đưa được bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$3xyz(x+y+z) \leq (xy+yz+zx)^2,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Chứng minh hoàn tất.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

BÀI 28 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq \frac{1}{3} abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}(a^2 - ab + b^2) &= \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}{\sqrt{2}-1} + \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab}{\sqrt{2}+1} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab}{\sqrt{2}+1}} \\ &= 2\sqrt{a^4 + b^4}, \end{aligned}$$

từ đây suy ra

$$a^2 - ab + b^2 \geq \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b^4 + c^4}{2}} \cdot \sqrt{\frac{c^4 + a^4}{2}} \geq \frac{1}{3} abc(a^3 + b^3 + c^3),$$

hay tương đương

$$9(a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) \geq 8a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3)^2.$$

Đến đây, sử dụng lần lượt các bất đẳng thức cơ bản

$$9(u+v)(v+w)(w+u) \geq 8(u+v+w)(uv+vw+wu), \quad \forall u, v, w \geq 0,$$

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 \geq uvw(u+v+w), \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R},$$

ta có

$$9(a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) \geq 8(u^4 + b^4 + c^4)(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)$$

và

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \geq a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Từ hai đánh giá này suy ra

$$9(a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) \geq 8a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2),$$

và như thế ta chỉ còn phải chứng minh

$$(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^3 + b^3 + c^3)^2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

Nhận xét. Ở trên, chúng ta đã chứng minh được bất đẳng thức phụ

$$a^2 - ab + b^2 \geq \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}$$

bằng một cách sử dụng AM-GM khá lạ mắt.

Ngoài ra, ta cũng có thể dễ dàng suy ra được bất đẳng thức này từ khai triển

$$2(a^2 - ab + b^2)^2 = (a^4 + b^4) + (a - b)^4.$$

BÀI 29 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3}.$$

(Polish MO 2010)

Lời giải

Từ giả thiết dễ dàng suy ra $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 1$,

nên ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức đồng bậc là

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

Sử dụng kỹ thuật ghép đôi xứng, ta sẽ chỉ ra rằng

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} \geq \frac{\sqrt{3}a^4}{a^3 + b^3 + c^3},$$

hay $3a^2(b^4 + b^2c^2 + c^4) \leq (a^3 + b^3 + c^3)^2, \quad (1)$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM ba số, ta có

$$3a^2b^4 = 3(ab)(ab)(b^2) \leq a^3b^3 + a^3b^3 + b^6,$$

$$3a^2c^4 = 3(ac)(ac)(c^2) \leq a^3c^3 + a^3c^3 + c^6,$$

$$3a^2b^2c^2 = 3(a^2)(bc)(bc) \leq a^6 + b^3c^3 + b^3c^3.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được bất đẳng thức (1).

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

BÀI 30 Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn

$$a + b + c + d = 4.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải

Với mọi $x, y > 0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^2 + y^2 = \frac{2xy(x^2 + y^2)}{2xy} \leq \frac{(2xy + x^2 + y^2)^2}{2xy} = \frac{(x + y)^4}{8xy}.$$

Sử dụng kết quả này, ta thu được

$$a^2 + c^2 \leq \frac{(a + c)^4}{8ac} = \frac{(a + c)^4 bd}{8abcd} \leq \frac{(a + c)^4 (b + d)^2}{32abcd}.$$

Hoàn toàn tương tự,

$$b^2 + d^2 \leq \frac{(b + d)^4}{8bd} = \frac{(b + d)^4 ca}{8abcd} \leq \frac{(b + d)^4 (c + a)^2}{32abcd}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq \frac{(a+c)^2(b+d)^2[(a+c)^2 + (b+d)^2]}{32abcd}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(a+c)(b+d)}{abcd} \geq \frac{(a+c)^2(b+d)^2[(a+c)^2 + (b+d)^2]}{32abcd},$$

hay

$$(a+c)(b+d)[(a+c)^2 + (b+d)^2] \leq 32.$$

Đến đây, lại sử dụng kết quả trên ta có điều phải chứng minh.

Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. $\square$

BÀI 31 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta đều có

$$\frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + \frac{b^n c^m}{a^{n+m}} + \frac{c^n a^m}{b^{n+m}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đơn giản hơn ở vế phải, đó là

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} = \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế rồi chia cả hai vế của bất đẳng thức mới thu được cho 3, ta có ngay (1).

Sau đây, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức còn lại là

$$\frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + \frac{b^n c^m}{a^{n+m}} + \frac{c^n a^m}{b^{n+m}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho $2n + m$ số hạng, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + \frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + \frac{b^n c^m}{a^{n+m}} + \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n-1 \text{ lần}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{3n-3} \\ & \geq (2n + m)^{2n+m} \sqrt[2n+m]{\left(\frac{a^n b^m}{c^{n+m}}\right)^2 \left(\frac{b^n c^m}{a^{n+m}}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}} = (2n + m)^{2n+m} \sqrt[2n+m]{\left(\frac{b}{c}\right)^{2n+m}} \\ & = (2n + m) \cdot \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{b^n c^m}{a^{n+m}} + \frac{c^n a^m}{b^{n+m}} + (m - n) \cdot \frac{b}{c} + (3n - 3) \cdot 1 \geq (2n + m) \cdot \frac{c}{a}, \\ & 2 \cdot \frac{c^n a^m}{b^{n+m}} + \frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + (m - n) \cdot \frac{c}{a} + (3n - 3) \cdot 1 \geq (2n + m) \cdot \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta thu được

$$\frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + \frac{b^n c^m}{a^{n+m}} + \frac{c^n a^m}{b^{n+m}} + 3(n - 1) \geq n \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right). \quad (2)$$

Mặt khác, lại theo bất đẳng thức AM-GM, dễ thấy

$$3(n - 1) \leq (n - 1) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right). \quad (3)$$

Nên từ (2) và (3) dễ dàng suy ra $\frac{a^n b^m}{c^{n+m}} + \frac{b^n c^m}{a^{n+m}} + \frac{c^n a^m}{b^{n+m}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI 32 Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng với mọi $k > 0$,

$$(b + c)^k \sqrt[k]{\frac{bc + 1}{a^2 + 1}} + (c + a)^k \sqrt[k]{\frac{ca + 1}{b^2 + 1}} + (a + b)^k \sqrt[k]{\frac{ab + 1}{c^2 + 1}} \geq 6.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & a \left(\sqrt[k]{\frac{ca + 1}{b^2 + 1}} + \sqrt[k]{\frac{ab + 1}{c^2 + 1}} \right) + b \left(\sqrt[k]{\frac{ab + 1}{c^2 + 1}} + \sqrt[k]{\frac{bc + 1}{a^2 + 1}} \right) \\ & + c \left(\sqrt[k]{\frac{bc + 1}{a^2 + 1}} + \sqrt[k]{\frac{ca + 1}{b^2 + 1}} \right) \geq 6. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$k \cdot \sqrt[k]{\frac{ca+1}{b^2+1}} + k \cdot \sqrt[k]{\frac{ab+1}{c^2+1}} + \frac{b^2+1}{ab+1} + \frac{c^2+1}{ac+1} \geq 2(k+1),$$

từ đó suy ra

$$\sqrt[k]{\frac{ca+1}{b^2+1}} + \sqrt[k]{\frac{ab+1}{c^2+1}} \geq \frac{2(k+1)}{k} - \frac{1}{k} \left(\frac{b^2+1}{ab+1} + \frac{c^2+1}{ac+1} \right)$$

dẫn đến

$$a \left(\sqrt[k]{\frac{ca+1}{b^2+1}} + \sqrt[k]{\frac{ab+1}{c^2+1}} \right) \geq \frac{2(k+1)}{k} a - \frac{1}{k} \left[\frac{a(b^2+1)}{ab+1} + \frac{a(c^2+1)}{ac+1} \right].$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\begin{aligned} \sum a \left(\sqrt[k]{\frac{ca+1}{b^2+1}} + \sqrt[k]{\frac{ab+1}{c^2+1}} \right) &\geq \frac{2(k+1)}{k} \sum a - \frac{1}{k} \sum \left[\frac{a(b^2+1)}{ab+1} + \frac{a(c^2+1)}{ac+1} \right] \\ &= \frac{6(k+1)}{k} - \frac{1}{k} \left[\sum \frac{a(b^2+1)}{ab+1} + \sum \frac{a(c^2+1)}{ac+1} \right] \\ &= \frac{6(k+1)}{k} - \frac{1}{k} \left[\sum \frac{a(b^2+1)}{ab+1} + \sum \frac{b(a^2+1)}{ab+1} \right] \\ &= \frac{6(k+1)}{k} - \frac{1}{k} \sum \frac{a(b^2+1) + b(a^2+1)}{ab+1} \\ &= \frac{6(k+1)}{k} - \frac{1}{k} \sum (a+b) = \frac{6(k+1)}{k} - \frac{6}{k} = 6. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

BÀI 33 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

(a) $x^n y + y^n z + z^n x \geq xy + yz + zx$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $x^n y + y^n z + z^n x \geq x + y + z$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

(a) Với $n = 1$, bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên đúng. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp $n \geq 2$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho $n+1$ số với lưu ý $xyz = 1$, thu được

$$\begin{aligned} x^n y + x^n y + y^n z + \underbrace{yz + \dots + yz}_{n-2} &\geq (n+1)^n \sqrt[n]{(x^n y)^2 (y^n z) (yz)^{n-2}} \\ &= (n+1)^n \sqrt[n]{(xy)^{n+1} (xyz)^{n-1}} = (n+1)xy, \end{aligned}$$

$$y^n z + y^n z + z^n x + \underbrace{zx + \dots + zx}_{n-2} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt{(y^n z)^2 (z^n x) (zx)^{n-2}}$$

$$= (n+1)^{n+1} \sqrt{(yz)^{n+1} (xyz)^{n-1}} = (n+1)yz,$$

$$z^n x + z^n x + x^n y + \underbrace{xy + \dots + xy}_{n-2} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt{(z^n x)^2 (x^n y) (xy)^{n-2}}$$

$$= (n+1)^{n+1} \sqrt{(zx)^{n+1} (xyz)^{n-1}} = (n+1)zx.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế và rút gọn, ta thu được ngay điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

(b) Theo câu (a), ta có: Với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, thì

$$a^n b + b^n c + c^n a \geq ab + bc + ca.$$

Sử dụng kết quả này với $n = 2, a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{z}$ và $c = \frac{1}{y}$, ta được

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 \cdot \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x + y + z}{xyz} = x + y + z.$$

Mặt khác,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 \cdot \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{zx^2} + \frac{1}{yz^2} + \frac{1}{xy^2}$$

$$= \frac{y^2 z}{y^2 z^2 x^2} + \frac{x^2 y}{x^2 y^2 z^2} + \frac{z^2 x}{z^2 x^2 y^2}$$

$$= y^2 z + x^2 y + z^2 x.$$

Do vậy, kết hợp với trên ta có

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x \geq x + y + z,$$

suy ra bất đẳng thức (b) đúng với $n = 2$.

Xét trường hợp $n \geq 3$. Do $xyz = 1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$x^n y + y^n z + z^n x \geq xyz(x + y + z),$$

hay là

$$\frac{x^{n-1}}{z} + \frac{z^{n-1}}{y} + \frac{y^{n-1}}{x} \geq x + y + z.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ $n-2$ số, ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{x^{n-1}}{z} + z + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-3} &\geq (n-1)\sqrt[n]{\frac{x^{n-1}}{z} \cdot z \cdot 1^{n-3}} = (n-1)x, \\ \frac{z^{n-1}}{y} + y + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-3} &\geq (n-1)\sqrt[n]{\frac{z^{n-1}}{y} \cdot y \cdot 1^{n-3}} = (n-1)z, \\ \frac{y^{n-1}}{x} + x + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-3} &\geq (n-1)\sqrt[n]{\frac{y^{n-1}}{x} \cdot x \cdot 1^{n-3}} = (n-1)y.\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\frac{x^{n-1}}{z} + \frac{z^{n-1}}{y} + \frac{y^{n-1}}{x} + 3(n-3) \geq (n-2)(x+y+z), \quad (1)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta dễ dàng nhận thấy

$$3 = 3\sqrt[3]{xyz} \leq x + y + z.$$

Do đó, kết hợp với (1) (chú ý rằng $n-3 \geq 0$), ta được

$$\frac{x^{n-1}}{z} + \frac{z^{n-1}}{y} + \frac{y^{n-1}}{x} + (n-3)(x+y+z) \geq (n-2)(x+y+z),$$

từ đó suy ra

$$\frac{x^{n-1}}{z} + \frac{z^{n-1}}{y} + \frac{y^{n-1}}{x} \geq x + y + z.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. $\square$

Nhận xét. Sử dụng kết quả bài toán này, ta có thể chứng minh được một kết quả thú vị khác là: Với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và với mọi số nguyên dương n , thì

$$\begin{aligned}(a) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &\geq \frac{\sqrt[n]{a}}{b} + \frac{\sqrt[n]{b}}{c} + \frac{\sqrt[n]{c}}{a}; \\ (b) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &\geq \frac{a}{\sqrt[n]{b}} + \frac{b}{\sqrt[n]{c}} + \frac{c}{\sqrt[n]{a}}.\end{aligned}$$

BÀI 34 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} + \frac{2}{abc} \geq \frac{3(a^4 + b^4 + c^4) + 11}{4}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$7 \cdot \frac{a^7}{bc} + \frac{1}{abc} \geq 8 \sqrt[8]{\left(\frac{a^7}{bc}\right)^7 \cdot \frac{1}{abc}} = 8 \sqrt[8]{\frac{a^{49}}{(bc)^8}} = \frac{8a^6}{bc}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta suy ra

$$7 \left(\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} \right) + \frac{3}{abc} \geq 8 \left(\frac{a^6}{bc} + \frac{b^6}{ca} + \frac{c^6}{ab} \right).$$

Mặt khác, cũng theo AM-GM thì $4 \cdot \frac{a^6}{bc} + b^4 + c^4 \geq 6a^4$, do đó

$$4 \left(\frac{a^6}{bc} + \frac{b^6}{ca} + \frac{c^6}{ab} \right) \geq 4(a^4 + b^4 + c^4).$$

Từ đây kết hợp với đánh giá ở trên, ta có

$$7 \left(\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} \right) + \frac{3}{abc} \geq 8(a^4 + b^4 + c^4),$$

suy ra

$$\frac{21}{32} \left(\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} \right) + \frac{9}{32abc} \geq \frac{3}{4}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Sử dụng bất đẳng thức này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} + \frac{2}{abc} \geq \frac{21}{32} \left(\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} \right) + \frac{9}{32abc} + \frac{11}{4}.$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{11}{32} \left(\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} \right) + \frac{55}{32abc} &\geq \frac{11}{4}, \\ \frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} + \frac{5}{abc} &\geq 8. \end{aligned}$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa, ta được

$$\frac{a^7}{bc} + \frac{b^7}{ca} + \frac{c^7}{ab} + 5 \cdot \frac{1}{abc} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{a^7}{bc} \cdot \frac{b^7}{ca} \cdot \frac{c^7}{ab} \cdot \left(\frac{1}{abc} \right)^5} = 8.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

BÀI 35 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} + 3\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} \leq 4.$$

(Polish Mathematical Olympiad 2005)

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$9\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} + 3\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} \leq 12.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 9\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} &= 9\sqrt[9]{\frac{2a}{a+b} \cdot \left[\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}\right]^2 \cdot 1^6} \\ &\leq \frac{2a}{a+b} + 2 \cdot \frac{3(a+b)}{2(a+b+c)} + 6 \cdot 1 \\ &= \frac{2a}{a+b} + \frac{3(a+b)}{a+b+c} + 6 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} &= 3\sqrt[3]{\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{3c}{a+b+c} \cdot 1} \\ &\leq \frac{2b}{a+b} + \frac{3c}{a+b+c} + 1. \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

BÀI 36 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)(a+b+c) \geq abc(ab^2 + bc^2 + ca^2)^2.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)^2 \leq (a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3)(b + c + a).$$

Từ đó suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \geq abc(a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3).$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3}{a^3b^3c^3} = \frac{1}{a^3b} + \frac{1}{b^3c} + \frac{1}{c^3a}.$$

đúng, vì theo AM-GM ta có

$$\frac{1}{a^3b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right), \quad \frac{1}{b^3c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{b^4} + \frac{1}{c^4} \right), \quad \frac{1}{c^3a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{3}{c^4} + \frac{1}{a^4} \right).$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

BÀI 37 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} + \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4.$$

(Bùi Ngọc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{(b^2 - bc + c^2)(a^2 + bc)} \leq \frac{(b^2 - bc + c^2) + (a^2 + bc)}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

từ đó suy ra

$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} = \frac{b^2 - bc + c^2}{\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 - bc + c^2)}} \geq \frac{2(b^2 - bc + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} \\ & \geq \frac{2(b^2 - bc + c^2) + 2(c^2 - ca + a^2) + 2(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ & = 4 - \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2}, \end{aligned}$$

hay tương đương

$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} + \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ (và các hoán vị). $\square$

BÀI 38 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 1 + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 1 &\geq 2\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} = \frac{2a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc) \cdot a(b+c)}} \\ &\geq \frac{4a(b+c)}{(a^2+bc) + a(b+c)} = \frac{4a(b+c)}{(a+b)(a+c)}, \end{aligned}$$

suy ra

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} \geq \frac{4a(b+c)}{(a+b)(a+c)} - 1.$$

Từ đánh giá này và hai đánh giá tương tự, ta suy ra

$$\begin{aligned} &\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \\ &\geq \frac{4a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{4b(c+a)}{(b+c)(b+a)} + \frac{4c(a+b)}{(c+a)(c+b)} - 3 \\ &= \frac{4[a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2]}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 3 \\ &= \frac{4[(a+b)(b+c)(c+a) + 4abc]}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 3 \\ &= 1 + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

BÀI 39 Cho $0 < x < 1$. Chứng minh rằng

$$x + \frac{1}{x^x} < 2.$$

(OIMU 2008)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng, ta có

$$\frac{1}{x^x} = \left(\frac{1}{x}\right)^x \cdot 1^{1-x} \leq x \cdot \frac{1}{x} + (1-x) \cdot 1 = 2-x.$$

Từ đó suy ra

$$x + \frac{1}{x^x} \leq 2.$$

Do $0 < x < 1$ nên đẳng thức không thể xảy ra, do vậy ta có

$$x + \frac{1}{x^2} < 2.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

BÀI 40 Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 6$, ta có

$$a^b + a^c + b^c + b^a + c^a + c^b \geq \frac{36abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 6 số, ta có

$$\begin{aligned} a^b + a^c + b^c + b^a + c^a + c^b &\geq 6\sqrt[6]{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} = 6\sqrt[6]{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} \\ &= 6\sqrt[6]{\frac{a^6b^6c^6}{a^ab^bc^c}} = \frac{6abc}{\sqrt[6]{a^ab^bc^c}}. \end{aligned}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$\sqrt[6]{a^ab^bc^c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6},$$

hay

$$a^ab^bc^c \leq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} \right)^6.$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng dạng

$$a^xb^yc^z \leq \left(\frac{xa + yb + zc}{x + y + z} \right)^{x+y+z}, \quad \forall a, b, c, x, y, z > 0,$$

$$\text{ta có} \quad a^ab^bc^c \leq \left(\frac{a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c}{a + b + c} \right)^{a+b+c} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} \right)^6.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. $\square$

BÀI 41 Cho các số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + cd} + \frac{b^2 + c^2 + d^2}{bc + cd + da} + \frac{c^2 + d^2 + a^2}{cd + da + ab} + \frac{d^2 + a^2 + b^2}{da + ab + bc} \geq 4. \quad (1)$$

(Kazakhstan NMO 2009)

Lời giải

Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM cho bộ bốn số, ta có

$$VT(1) \geq 4 \sqrt[4]{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)(c^2 + d^2 + a^2)(d^2 + a^2 + b^2)}{(ab + bc + cd)(bc + cd + da)(cd + da + ab)(da + ab + bc)}}$$

Vậy ta cần chỉ ra

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)(c^2 + d^2 + a^2)(d^2 + a^2 + b^2)}{(ab + bc + cd)(bc + cd + da)(cd + da + ab)(da + ab + bc)} \geq 1.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) \geq (ab + bc + cd)^2,$$

$$(b^2 + c^2 + d^2)(c^2 + d^2 + a^2) \geq (bc + cd + da)^2,$$

$$(c^2 + d^2 + a^2)(d^2 + a^2 + b^2) \geq (cd + da + ab)^2,$$

$$(d^2 + a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (da + ab + bc)^2.$$

Nhân bốn bất đẳng thức trên lại theo về và lấy căn bậc hai, ta suy ra ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$. $\square$

BÀI 42 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, bất đẳng thức sau đúng:

$$2\sqrt{2}(a + b + c) \geq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} + 3\sqrt{2}\sqrt{abc}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$3\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ \leq 2\sqrt{2}(a + b + c). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned} (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2ab}) + (\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{2bc}) + (\sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{2ca}) \\ \leq 2\sqrt{2}(a + b + c). \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2ab} \leq \sqrt{2[(a^2 + b^2) + 2ab]} = \sqrt{2}(a + b).$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{2bc} \leq \sqrt{2}(b + c), \quad \sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{2ca} \leq \sqrt{2}(c + a).$$

Bằng cách cộng ba bất đẳng thức này lại với nhau, ta thu được ngay bất đẳng thức (1) ở trên. Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 43 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = ab + bc + ca$.
Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{2}}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+1}{2} + \frac{a^2+1}{a+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{a+1}{2} + \frac{(a+1)^2 - 2a}{a+1} \right] \\ &= \frac{3}{4}(a+1) - \frac{a}{a+1}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$a + b + c \geq \frac{3}{4}(a+1) + \frac{3}{4}(b+1) + \frac{3}{4}(c+1) - \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} - \frac{c}{c+1},$$

hay

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{a+b+c-1}{4} \geq 2.$$

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(a+1) + b(b+1) + c(c+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b+c) - 2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b+c) - 2(a+b+c)} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c-1} = 1 + \frac{1}{a+b+c-1}, \end{aligned}$$

ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{a+b+c-1} + \frac{a+b+c-1}{4} \geq 2 - 1 = 1.$$

Để thấy bất đẳng thức này đúng theo AM-GM.

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

BÀI 44 Cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$.

Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{a_2^2 + 1}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n^2 + 1}{2}}.$$

(Gabriel Dospinescu)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, với mỗi i ($1 \leq i \leq n$), ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a_i^2 + 1}{2}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a_i + 1}{2} + \frac{a_i^2 + 1}{a_i + 1} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{a_i + 1}{2} + \frac{(a_i + 1)^2 - 2a_i}{a_i + 1} \right] \\ &= \frac{3}{4}(a_i + 1) - \frac{a_i}{a_i + 1}, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i^2 + 1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{4}(a_i + 1) - \frac{a_i}{a_i + 1} \right] = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{3}{4}n - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1}.$$

Bài toán được đưa về chứng minh

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{3}{4}n - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1}.$$

Bất đẳng thức này có thể thu gọn lại thành

$$\sum_{i=1}^n a_i + 4 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1} \geq 3n,$$

tương đương

$$\sum_{i=1}^n \left[(a_i + 1) + \frac{4a_i}{a_i + 1} \right] \geq 4n.$$

Đây là một kết quả đúng, vì theo AM-GM ta có

$$\sum_{i=1}^n \left[(a_i + 1) + \frac{4a_i}{a_i + 1} \right] \geq \sum_{i=1}^n 4\sqrt{a_i} = 4 \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \geq 4n \sqrt{\prod_{i=1}^n \sqrt{a_i}} = 4n.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. □

BÀI 45 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{3\sqrt{3abc(a+b+c)}(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)^3}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$ và $c = \frac{1}{z}$. Bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{y^2 z^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2 x^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{3\sqrt{3(xy+yz+zx)}(xy+yz+zx)^2}{4(x+y+z)^3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{y^2 z^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2 x^2}{(z+x)^2} + \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2} &\geq \frac{(yz+zx+xy)^2}{(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2} \\ &= \frac{(yz+zx+xy)^2}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)} \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(yz+zx+xy)^2}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)} \geq \frac{3\sqrt{3(xy+yz+zx)}(xy+yz+zx)^2}{4(x+y+z)^3},$$

hay tương đương

$$4(x+y+z)^3 \geq 27(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng cách sử dụng AM-GM như sau

$$\begin{aligned} &27(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2 \\ &= \frac{27}{2} \cdot 2(xy+yz+zx) \cdot (x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2 \\ &\leq \frac{27}{2} \left[\frac{2(xy+yz+zx) + 2 \cdot (x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{3} \right]^3 \\ &= 2 \left[x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) \right]^3 = 2(x+y+z)^6. \end{aligned}$$

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 46 Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta đều có

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3 \geq 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4.$$

(George Tsintsifas)

Lời giải

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}, d = \frac{1}{t}$ và thay vào trên, ta có thể viết lại bất đẳng thức đã cho như sau

$$(x+y)^3(y+z)^3(z+t)^3(t+x)^3 \geq 16(xyz + yzt + ztx + txy)^4,$$

tương đương

$$\begin{aligned} (x+y)^4(y+z)^4(z+t)^4(t+x)^4 \\ \geq 16(xyz + yzt + ztx + txy)^4(x+y)(y+z)(z+t)(t+x). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (x+y)(y+z)(z+t)(t+x) &\leq \left[\frac{(x+y) + (y+z) + (z+t) + (t+x)}{4} \right]^4 \\ &= \frac{(x+y+z+t)^4}{16}. \end{aligned}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(x+y)(y+z)(z+t)(t+x) \geq (x+y+z+t)(xyz + yzt + ztx + txy).$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$(xz - yt)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$. □

BÀI 47 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{8(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{11}{4(ab+bc+ca)},$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $ab+bc+ca$ và chú ý rằng

$$\frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2} = \frac{a}{b+c} + \frac{bc}{(b+c)^2},$$

ta viết được nó lại thành

$$\begin{aligned} \left[\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right] + \left[\frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} \right] + \\ + \frac{8(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^4} \geq \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}&\frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} + \frac{ab}{(a+b)^2} \\ &\geq \frac{bc}{2(b^2+c^2)} + \frac{ca}{2(c^2+a^2)} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)} \\ &= \left[\frac{bc}{2(b^2+c^2)} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{ca}{2(c^2+a^2)} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{ab}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{4} \right] - \frac{3}{4} \\ &= \frac{(b+c)^2}{4(b^2+c^2)} + \frac{(c+a)^2}{4(c^2+a^2)} + \frac{(a+b)^2}{4(a^2+b^2)} - \frac{3}{4} \\ &\geq \frac{[(b+c) + (c+a) + (a+b)]^2}{4(b^2+c^2) + 4(c^2+a^2) + 4(a^2+b^2)} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} + \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} + \frac{8(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^4} \geq \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2}.$$

Do

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 2 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{8(ab+bc+ca)} + \frac{a^2+b^2+c^2}{4(ab+bc+ca)} + \frac{1}{2},$$

nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b+c)^2}{8(ab+bc+ca)} + \frac{(a+b+c)^2}{8(ab+bc+ca)} + \frac{a^2+b^2+c^2}{4(ab+bc+ca)} \\ &+ \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} + \frac{8(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)^4} \geq \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2},\end{aligned}$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Phép chứng minh hoàn tất.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ (và các hoán vị). $\square$

BÀI 48 Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức cho $2(a+b+c)$, ta viết được nó lại thành

$$\frac{2(a+b+c)}{2a+b} + \frac{2(a+b+c)}{2b+c} + \frac{2(a+b+c)}{2c+a} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Do $\frac{2(a+b+c)}{2a+b} = 1 + \frac{b}{2a+b} + \frac{2c}{2a+b}$ nên ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} + \frac{a}{a+2c} \right) + 2 \left(\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \right) + 3 \\ & \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} + \frac{a}{a+2c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{b(b+2a) + c(c+2b) + a(a+2c)} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} & \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(2b+c) + b(2c+a) + c(2a+b)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + 4 \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}},$$

hay

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + 2 \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM,

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + 1 + 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}},$$

ta đưa được bài toán về chứng minh

$$3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}},$$

hay tương đương

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(ab+bc+ca)(a+b+c).$$

Đây là một kết quả quen thuộc. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 49 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d có tổng bình phương bằng 4, ta đều có

$$a^3bc + b^3cd + c^3da + d^3ab \leq 4.$$

Lời giải

Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} a^3bc + c^3da &= ac(a^2b + c^2d) \leq ac\sqrt{(a^4 + c^4)(b^2 + d^2)} \\ &= \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{2a^2c^2(a^4 + c^4)} \leq \frac{(a^2 + c^2)^2 \sqrt{b^2 + d^2}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$b^3cd + d^3ab \leq \frac{(b^2 + d^2)^2 \sqrt{a^2 + c^2}}{2\sqrt{2}}.$$

Do vậy, chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$(a^2 + c^2)^2 \sqrt{b^2 + d^2} + (b^2 + d^2)^2 \sqrt{a^2 + c^2} \leq 8\sqrt{2}.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng đánh giá sau cho các số không âm x, y :

$$\begin{aligned} x^4y + y^4x &= xy(x^3 + y^3) = xy(x^2 - xy + y^2)(x + y) \\ &\leq \frac{[xy + (x^2 - xy + y^2)]^2}{4} (x + y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} (x + y) \\ &\leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ta dễ dàng suy ra được kết quả của bài toán đã cho.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. □

BÀI 50 Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$(a) \sqrt{a^2 + a} + \sqrt{b^2 + b} + \sqrt{c^2 + c} \geq 3\sqrt{2};$$

$$(b) \sqrt[3]{5a^3 + 3a} + \sqrt[3]{5b^3 + 3b} + \sqrt[3]{5c^3 + 3c} \geq 6.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

(a) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{a^2 + a} \geq \sqrt{2\sqrt{a^2 \cdot a}} = \sqrt{2a^{\frac{3}{2}}}.$$

Từ đó suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}} \geq 3.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}}}{3} \right)^{\frac{8}{3}} \geq \frac{ab + bc + ca}{3}. \quad (1)$$

Và do đây là một bất đẳng thức thuần nhất với a, b, c nên ta có thể bỏ qua giả thiết ban đầu $ab + bc + ca = 3$ và chuẩn hóa cho

$$a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}} = 3.$$

Khi đó, ta viết được (1) lại thành

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

Đặt $x = a^{\frac{3}{4}}, y = b^{\frac{3}{4}}, z = c^{\frac{3}{4}}$. Khi đó $x + y + z = 3$ và ta phải chứng minh

$$(ab)^{\frac{4}{3}} + (bc)^{\frac{4}{3}} + (ca)^{\frac{4}{3}} \leq 3.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned} (ab)^{\frac{4}{3}} + (bc)^{\frac{4}{3}} + (ca)^{\frac{4}{3}} &\leq ab \cdot \frac{a+b+1}{3} + bc \cdot \frac{b+c+1}{3} + ca \cdot \frac{c+a+1}{3} \\ &= ab \cdot \frac{4-c}{3} + bc \cdot \frac{4-a}{3} + ca \cdot \frac{4-b}{3} \\ &= \frac{4(ab+bc+ca) - 3abc}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức Schur

$$(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

ta suy ra

$$4(ab+bc+ca) - 3abc \leq 9.$$

Kết hợp với đánh giá ở trên, ta có ngay: $(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{9}{3} = 3$.

Phép chứng minh được hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

(b) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt[3]{5a^3 + 3a} \geq \sqrt[3]{8\sqrt[3]{(a^3)^5 a^3}} = 2a^{\frac{3}{4}}.$$

Do đó

$$\sqrt[3]{5a^3 + 3a} + \sqrt[3]{5b^3 + 3b} + \sqrt[3]{5c^3 + 3c} \geq 2 \left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}} \right). \quad (2)$$

Mặt khác, theo chứng minh trong phần (a) ở trên, ta đã chứng minh được

$$a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}} \geq 3. \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) lại, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

BÀI 51 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\sqrt[3]{a + bc} + \sqrt[3]{b + ca} + \sqrt[3]{c + ab} \geq \sqrt[3]{2(ab + bc + ca)}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Để ý rằng

$$\begin{aligned} & (a + bc)(b + ca) + (b + ca)(c + ab) + (c + ab)(a + bc) \\ &= ab + c(a^2 + b^2) + abc^2 + bc + a(b^2 + c^2) + a^2bc + ca + b(c^2 + a^2) + cab^2 \\ &= (ab + bc + ca) + c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + abc(a + b + c) \\ &= (ab + bc + ca) + c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + 3abc \\ &= (ab + bc + ca) + (a + b + c)(ab + bc + ca) = 4(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Do đó, nếu ta đặt $x = \frac{a + bc}{2}, y = \frac{b + ca}{2}, z = \frac{c + ab}{2}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \geq xy + yz + zx. \quad (1)$$

Trong bài 50, ta đã chứng minh được

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}}}{3} \right)^{\frac{4}{3}} \geq \frac{ab + bc + ca}{3}, \quad \forall a, b, c > 0.$$

Mà theo bất đẳng thức Holder thì

$$\left(\frac{a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{4}}}{3}\right)^{\frac{8}{3}} \leq \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}}{3}\right) \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{8}{3}}.$$

Do đó

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}}{3}\right) \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{6}{3}} \geq \frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Từ bất đẳng thức này, ta thấy rằng nếu $a+b+c \leq 3$ thì bất đẳng thức sau sẽ được thỏa mãn

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geq ab+bc+ca.$$

Sử dụng nhận xét này, ta suy ra bất đẳng thức (1) sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$x+y+z \leq 3.$$

Tuy nhiên điều này là hiển nhiên vì

$$\begin{aligned} x+y+z &= \frac{a+bc}{2} + \frac{b+ca}{2} + \frac{c+ab}{2} = \frac{3}{2} + \frac{ab+bc+ca}{2} \\ &\leq \frac{3}{2} + \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{3}{2} + \frac{9}{6} = 3. \end{aligned}$$

Phép chứng minh đến đây được hoàn tất.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

BÀI 52 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}(ab+bc+ca)\sqrt{ab+bc+ca} \geq (a+bc)(b+ca)(c+ab).$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Áp dụng đánh giá cơ bản

$$xyz \leq \frac{(xy+yz+zx)^2}{3(x+y+z)}, \quad \forall x, y, z > 0$$

cho $x=a+bc, y=b+ca, z=c+ab$, ta được

$$\begin{aligned} &(a+bc)(b+ca)(c+ab) \\ &\leq \frac{[(a+bc)(b+ca) + (b+ca)(c+ab) + (c+ab)(a+bc)]^2}{3[(a+bc) + (b+ca) + (c+ab)]} \quad (*). \end{aligned}$$

Theo bài 51, ta có

$$(a+bc)(b+ca) + (b+ca)(c+ab) + (c+ab)(a+bc) = 4(ab+bc+ca).$$

Từ đây, kết hợp với (*), ta suy ra

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) \leq \frac{16(ab+bc+ca)^2}{3(3+ab+bc+ca)}.$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}(ab+bc+ca)\sqrt{ab+bc+ca} \geq \frac{16(ab+bc+ca)^2}{3(3+ab+bc+ca)}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(ab+bc+ca) + 3 \geq 2\sqrt{3(ab+bc+ca)},$$

hiển nhiên đúng theo AM-GM.

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

BÀI 53 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$(1+a+b+c)(1+ab+bc+ca) \geq 4\sqrt{2(a+bc)(b+ca)(c+ab)}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Để ý rằng

$$\begin{aligned} & (1+a+b+c)(1+ab+bc+ca) \\ &= (1+a)(1+b)(1+c) + (a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Từ đây sử dụng bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned} & (1+a+b+c)(1+ab+bc+ca) \geq \\ & \geq 2\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Như thế, ta cần phải chứng minh

$$(1+a)(1+b)(1+c)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+bc)(b+ca)(c+ab).$$

Đến đây, ta tiếp tục sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\begin{aligned} (1+a)(b+c) &= (b+ca) + (c+ab) \geq 2\sqrt{(b+ca)(c+ab)}, \\ (1+b)(c+a) &= (a+bc) + (c+ab) \geq 2\sqrt{(a+bc)(c+ab)}, \\ (1+c)(a+b) &= (a+bc) + (b+ca) \geq 2\sqrt{(a+bc)(b+ca)}. \end{aligned}$$

Nhân ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta thu được điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

BÀI 54 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \sqrt{3} \left(\frac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + \frac{b + 2c}{\sqrt{b^2 + 2c^2}} + \frac{c + 2a}{\sqrt{c^2 + 2a^2}} \right) \geq 13.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} &= \frac{\sqrt{3}(a + 2b)^2}{\sqrt{3(a^2 + 2b^2)}(a + 2b)} \geq \frac{2\sqrt{3}(a + 2b)^2}{3(a^2 + 2b^2) + (a + 2b)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(a + 2b)^2}{2a^2 + 2ab + 5b^2}, \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned} &\sqrt{3} \left(\frac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + \frac{b + 2c}{\sqrt{b^2 + 2c^2}} + \frac{c + 2a}{\sqrt{c^2 + 2a^2}} \right) \\ &\geq 3 \left[\frac{(a + 2b)^2}{2a^2 + 2ab + 5b^2} + \frac{(b + 2c)^2}{2b^2 + 2bc + 5c^2} + \frac{(c + 2a)^2}{2c^2 + 2ca + 5a^2} \right]. \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta lại có

$$\begin{aligned} &\frac{(a + 2b)^2}{2a^2 + 2ab + 5b^2} + \frac{(b + 2c)^2}{2b^2 + 2bc + 5c^2} + \frac{(c + 2a)^2}{2c^2 + 2ca + 5a^2} \\ &\geq \frac{[(a + 2b) + (b + 2c) + (c + 2a)]^2}{(2a^2 + 2ab + 5b^2) + (2b^2 + 2bc + 5c^2) + (2c^2 + 2ca + 5a^2)} \\ &= \frac{9(a + b + c)^2}{7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (*), ta suy ra

$$\begin{aligned} &\sqrt{3} \left(\frac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + \frac{b + 2c}{\sqrt{b^2 + 2c^2}} + \frac{c + 2a}{\sqrt{c^2 + 2a^2}} \right) \\ &\geq \frac{27(a + b + c)^2}{7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)}. \end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \frac{27(a + b + c)^2}{7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)} \geq 13. \quad (**)$$

Đặt $x = a^2 + b^2 + c^2$ và $y = ab + bc + ca$. Bất đẳng thức (***) trở thành

$$\frac{4x}{y} + \frac{27(x+2y)}{7x+2y} \geq 13. \quad (***)$$

Do $\frac{4x}{y} = \frac{4x}{y} + \frac{8}{7} - \frac{8}{7} = \frac{4(7x+2y)}{7y} - \frac{8}{7}$ và

$$\frac{27(x+2y)}{7x+2y} = \frac{27(x+2y)}{7x+2y} - \frac{27}{7} + \frac{27}{7} = \frac{27 \cdot 12y}{7(7x+2y)} + \frac{27}{7}$$

nên bất đẳng thức (***) có thể viết lại là

$$\frac{4}{7} \left(\frac{7x+2y}{y} + \frac{81y}{7x+2y} \right) \geq 13 - \frac{27}{7} + \frac{8}{7} = \frac{72}{7},$$

hay tương đương

$$\frac{7x+2y}{y} + \frac{81y}{7x+2y} \geq 18.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo AM-GM.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 55 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a(b+c)^2}{2a+b+c} + \frac{b(c+a)^2}{2b+c+a} + \frac{c(a+b)^2}{2c+a+b} \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

(Nguyễn Văn Quý)

Lời giải

Bình phương hai vế của bất đẳng thức đề bài và sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, ta có

$$\left[\frac{a(b+c)^2}{2a+b+c} + \frac{b(c+a)^2}{2b+c+a} + \frac{c(a+b)^2}{2c+a+b} \right]^2 \geq 3 \sum \frac{ab(b+c)^2(c+a)^2}{(2a+b+c)(2b+c+a)}.$$

Vậy ta cần chỉ ra

$$\sum \frac{ab(b+c)^2(c+a)^2}{(2a+b+c)(2b+c+a)} \geq abc(a+b+c),$$

hay

$$\sum \frac{(b+c)^2(c+a)^2}{c(2a+b+c)(2b+c+a)} \geq a+b+c.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned} & \sum \frac{(b+c)^2(c+a)^2}{c(2a+b+c)(2b+c+a)} \\ & \geq \frac{[(b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) + (a+b)(b+c)]^2}{\sum c(2a+b+c)(2b+c+a)} \\ & = \frac{[a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)]^2}{\sum c(2a+b+c)(2b+c+a)}. \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\frac{[a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)]^2}{\sum c(2a+b+c)(2b+c+a)} \geq a+b+c. \quad (1)$$

Để hạn chế khối lượng tính toán, ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó, nếu đặt $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$ thì dễ thấy

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2 + ab + bc + ca = 9 + q$$

và

$$\begin{aligned} \sum c(2a+b+c)(2b+c+a) &= \sum c(3+a)(3+b) \\ &= 9(a+b+c) + 6(ab+bc+ca) + 3abc \\ &= 27 + 6q + 3r. \end{aligned}$$

Do vậy, (1) được viết lại thành

$$\frac{(9+q)^2}{27+6q+3r} \geq 3,$$

hay tương đương
$$\frac{q^2 - 9r}{27 + 6q + 3r} > 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì theo AM-GM thì

$$\begin{aligned} q^2 - 9r &= (ab + bc + ca)^2 - 9abc \\ &= (ab + bc + ca)^2 - 3abc(a+b+c) \geq 0. \end{aligned}$$

Phép chứng của ta được hoàn tất tại đây.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$. □

Nhận xét. Bài toán trên có tồn tại dạng phát biểu khác dưới dạng hình học là: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác có diện tích S . Khi đó, ta có

$$\frac{2a^2(b+c-a)}{b+c} + \frac{2b^2(c+a-b)}{c+a} + \frac{2c^2(a+b-c)}{a+b} \geq 4\sqrt{3}S.$$

Từ đó, ta có thể suy ra hệ quả yếu hơn nhưng rất quen thuộc đó chính là bất đẳng thức Hadwiger-Finsler trong tam giác:

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S.$$

Bạn đọc hãy chứng minh nhận xét trên.

BÀI 56 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có:

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2} \leq \frac{1}{8}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (a+b)(a+b+2c) &= \frac{1}{2} \cdot (2a+2b) \cdot (a+b+2c) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{(2a+2b) + (a+b+2c)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{1}{8} (3a+3b+2c)^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2} \leq \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b=2c$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ cùng đến với bất đẳng thức về bên trái. Có hai cách chứng minh bất đẳng thức này như sau.

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{(a+c)(b+c)}{ab} = 1 + \frac{c(a+b+c)}{ab} \geq 1 + \frac{c(a+b+c)}{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2},$$

suy ra

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \leq \frac{(a+b)^2}{(a+b+2c)^2}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta được

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{c}{a+b} \cdot \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \leq \frac{c}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b+2c)^2},$$

từ đó suy ra, bất đẳng thức đã cho sẽ được chứng minh nếu ta có

$$\frac{c(a+b)}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}$$

hay là

$$(a+b+2c)^3 \geq c(3a+3b+2c)^2. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned} c(3a+3b+2c)^2 &= \frac{1}{8} \cdot 8c \cdot (3a+3b+2c)^2 \leq \frac{1}{8} \left[\frac{8c + 2(3a+3b+2c)}{3} \right]^3 \\ &= (a+b+2c)^3, \end{aligned}$$

suy ra (1) đúng. Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Cách 2. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(a+b+2c)}.$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &= \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc}{abc} \\ &= \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 2, \end{aligned}$$

do vậy ta có

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 2 \geq \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(a+b+2c)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 2 &= \frac{(a+b)^2}{c(a+b)} + \frac{(b+c)^2}{a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{b(c+a)} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} \\ &\geq \frac{\left[(a+b) + (b+c) + (c+a) + a + b \right]^2}{c(a+b) + a(b+c) + b(c+a) + a^2 + b^2} \\ &= \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(a+b+2c)}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

BÀI 57 Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \geq -\frac{9}{16\sqrt{2}}.$$

(IMO 2006)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \leq \frac{9}{16\sqrt{2}}.$$

Do tính hoán vị vòng quanh nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, dễ thấy $(a-c)(b-c) \geq 0$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $(x+y)^2 \geq 4xy$ và $x^2 + y^2 \geq 2xy$, ta có

$$\begin{aligned} \left[3(a^2 + b^2 + c^2)\right]^2 &= \left[2(a-b)^2 + (a+b+c)^2 + 2(a-c)(b-c)\right]^2 \\ &\geq 4\left[2(a-c)(b-c)\right]\left[2(a-b)^2 + (a+b+c)^2\right] \\ &\geq 8(a-c)(b-c) \cdot 2\sqrt{2}(a-b)(a+b+c), \end{aligned}$$

suy ra $3^2 \geq 16\sqrt{2}(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c),$

hay $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \leq \frac{9}{16\sqrt{2}}.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Với giả thiết $c = \min\{a, b, c\}$, ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6\sqrt{2}}, b = \frac{1}{2\sqrt{3}}, c = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}. \quad \square$$

BÀI 58 Cho $a, b, c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{19(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca)}{a + b + c} \geq 36.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 19(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) &= 2 \cdot 8(a^2 + b^2 + c^2) + 3(a+b+c)^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{8(a^2 + b^2 + c^2)^2 \cdot 3(a+b+c)^2} \\ &= 12\sqrt[3]{3(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$12\sqrt[3]{3(a^2 + b^2 + c^2)^2(a + b + c)^2} \geq 36(a + b + c).$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 9(a + b + c),$$

hay là

$$4(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + abc).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên cho $4(a + c)^2$, ta được

$$16(a^2 + b^2 + c^2)^2(a + c)^2 \geq 4 \cdot (a + c)^2(a + b + c) \cdot 3(a^3 + b^3 + c^3 + abc).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned} 4 \cdot (a + c)^2(a + b + c) \cdot 3(a^3 + b^3 + c^3 + abc) \\ \leq \left[(a + c)^2(a + b + c) + 3(a^3 + b^3 + c^3 + abc) \right]^2. \end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức trên sẽ được chứng minh nếu ta có

$$4(a + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + c)^2(a + b + c) + 3(a^3 + b^3 + c^3 + abc).$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta viết được nó lại thành

$$(a - b)(b - c)(3b - a - c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này chỉ đúng khi $3b \geq a + c$.

Bây giờ, ta xét trường hợp nó không đúng, tức là khi $3b < a + c$. Khi đó, cũng bằng cách sử dụng AM-GM tương tự như trên nhưng thay vì nhân cho $4(a + c)^2$ rồi đánh giá AM-GM thì lúc này, ta lại nhân cho $4(a + b)^2$.

Với cách đánh giá như vậy, bất đẳng thức cuối cùng mà ta thu được là

$$(a - c)(b - c)(a + b - 3c) \geq 0,$$

và đây là một kết quả đúng, bởi vì ta có $(a - c)(b - c) \geq 0$ và

$$a + b - 3c \geq a + c - 3c > 3b - 3c \geq 0.$$

Phép chứng minh đến đây được hoàn tất. Với giả thiết $a \geq b \geq c$, ta có đẳng thức xảy ra khi $a = 2$ và $b = c = 1$. $\square$

BÀI 59 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab(a + b)} + \sqrt{bc(b + c)} + \sqrt{ca(c + a)} \geq \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{ab + bc + ca}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left[\sqrt{ab(a+b)} + \sqrt{bc(b+c)} + \sqrt{ca(c+a)} \right]^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

hay là

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$+ 2 \left[\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)} + \sqrt{b^2ca(b+c)(b+a)} + \sqrt{c^2ab(c+a)(c+b)} \right] \geq 3(ab+bc+ca).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)} + \sqrt{b^2ca(b+c)(b+a)} + \sqrt{c^2ab(c+a)(c+b)} \\ & \geq 3\sqrt{\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)}\sqrt{b^2ca(b+c)(b+a)}\sqrt{c^2ab(c+a)(c+b)}} \\ & = 3\sqrt{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2 \cdot 8abc} = 6abc. \end{aligned}$$

Từ đó, bài toán được quy về chứng minh

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 12abc \geq 3(ab+bc+ca). \quad (*)$$

Để ý rằng $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 12abc$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca) + 9abc,$$

do vậy bất đẳng thức (*) có thể viết lại thành

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) + 9abc \geq 3(ab+bc+ca),$$

$$\text{hay tương đương } a+b+c + \frac{9abc}{ab+bc+ca} \geq 3.$$

Do tính đối xứng giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó $ab+bc+ca \leq 3ab$, suy ra

$$\frac{9abc}{ab+bc+ca} \geq 3c.$$

Từ đây sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned} a+b+c + \frac{9abc}{ab+bc+ca} & \geq a+b+c + 3c = a+b+4c \\ & = \frac{(a+b) + 2(a+c) + 2(b+c)}{3} + \frac{8}{3}c \\ & \geq \frac{(a+b) + 2(a+c) + 2(b+c)}{3} \\ & \geq \sqrt[3]{4(a+b)(a+c)(b+c)} = \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, c = 0$ (và các hoán vị). $\square$

BÀI 60 Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & [11(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca)](ab + bc + ca)^2 \\ & \geq \frac{27}{4}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2. \end{aligned}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & 4[11(a+b+c)^2 - 17(ab+bc+ca)](ab+bc+ca)^2 \\ & \geq 27[(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc]^2, \end{aligned}$$

tương đương với

$$\begin{aligned} & 17(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 + 54abc(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ & \geq 68(ab+bc+ca)^3 + 27a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, dễ dàng nhận thấy

$$3abc(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 27a^2b^2c^2.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & 17(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 + 51abc(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ & \geq 68(ab+bc+ca)^3. \quad (*) \end{aligned}$$

Nếu $ab+bc+ca=0$ thì ta có $a=b=c=0$ và bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Xét trường hợp ngược lại

$$ab+bc+ca > 0.$$

Khi đó, chia cả hai vế của bất đẳng thức (*) cho $17(ab+bc+ca)$, ta được

$$(a+b+c)^2 + \frac{3abc(a+b+c)}{ab+bc+ca} \geq 4(ab+bc+ca).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\frac{3abc(a+b+c)}{ab+bc+ca} \geq \frac{9abc}{a+b+c},$$

nên chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$(a+b+c)^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca),$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc ba dạng phân thức.

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = b, c = 0$ (và các hoán vị tương ứng). $\square$

Nhận xét. Từ bài này, ta suy ra được 1 kết quả yếu hơn như khá đẹp mắt là

$$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2 \geq \frac{27}{64}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

BÀI 61 Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)(ab + bc + ca)^2.$$

(Nguyễn Huy Tùng)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Nếu $a + b = 0$ thì ta có $a = b = c = 0$ và bất đẳng thức là hiển nhiên. Xét trường hợp $a + b > 0$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq \frac{1}{4} \left[(a+b) + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{a+b} \right]^2.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[(a+b) + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{a+b} \right]^2 (ab + bc + ca)^2 \\ \leq (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2, \end{aligned}$$

hay tương đương

$$\begin{aligned} \left(a+b + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{a+b} \right) (ab + bc + ca) \\ \leq 2(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 + c^2 + ac + bc - ab}{a+b} \\ &= a+b + \frac{c^2 + ac + bc - ab}{a+b}, \end{aligned}$$

do vậy bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} 2(a+b)(b+c)(c+a) - 2(a+b)(ab + bc + ca) \\ \geq \frac{(c^2 + ac + bc - ab)(ab + bc + ca)}{a+b}, \end{aligned}$$

và sau khi thu gọn, ta được

$$2c^2(a+b) \geq \frac{(c^2 + ac + bc - ab)(ab + bc + ca)}{a+b}.$$

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa, ta được

$$\begin{aligned} & (c^2 + ac + bc - ab)(ab + bc + ca) \\ & \leq \frac{[(c^2 + ac + bc - ab) + (ab + bc + ca)]^2}{4} = \frac{c^2(2a + 2b + c)^2}{4}, \end{aligned}$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} & 2c^2(a+b) - \frac{(c^2 + ac + bc - ab)(ab + bc + ca)}{a+b} \\ & \geq 2c^2(a+b) - \frac{c^2(2a + 2b + c)^2}{4(a+b)} \geq 2c^2(a+b) - \frac{c^2 \left(2a + 2b + \frac{a+b}{2}\right)^2}{4(a+b)} \\ & = 2c^2(a+b) - \frac{25}{16}c^2(a+b) = \frac{7}{16}c^2(a+b) \geq 0. \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow a = b = c$. $\square$

BÀI 62 Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2 + bc} + \frac{b^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{2\sqrt[3]{abc}}.$$

(Michael Rozenberg, Phạm Hữu Thức)

Lời giải

Để ý rằng
$$\frac{a^2}{a^2 + bc} = 1 - \frac{bc}{a^2 + bc},$$

do vậy bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\left(\frac{bc}{a^2 + bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} + \frac{ab}{c^2 + ab} \right) + \frac{a + b + c}{2\sqrt[3]{abc}} \geq 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a^2 + bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} + \frac{ab}{c^2 + ab} & \geq \frac{(bc + ca + ab)^2}{bc(a^2 + bc) + ca(b^2 + ca) + ab(c^2 + ab)} \\ & = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + abc(a + b + c)} \\ & = 1 + \frac{abc(a + b + c)}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + abc(a + b + c)}. \end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{abc(a+b+c)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)} + \frac{a+b+c}{2\sqrt[3]{abc}} \geq 2.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} & \frac{abc(a+b+c)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)} + \frac{a+b+c}{2\sqrt[3]{abc}} \\ &= \frac{abc(a+b+c)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)} + 3 \cdot \frac{a+b+c}{6\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq 4\sqrt[4]{\frac{abc(a+b+c)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)} \cdot \left(\frac{a+b+c}{6\sqrt[3]{abc}}\right)^3} \\ &= 2\sqrt[4]{\frac{2(a+b+c)^4}{27[b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)]}}. \end{aligned}$$

Vậy bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)^4 \geq 27[b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+abc(a+b+c)]. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản

$$(u+v+w)^2 \geq 3(uv+vw+wu), \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}$$

kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2(a+b+c)^4 &= 2[(a^2+2bc)+(b^2+2ca)+(c^2+2ab)]^2 \\ &\geq 6\sum (a^2+2bc)(b^2+2ca) \\ &= 6\sum [a^2b^2+2c(a^3+b^3)+4abc^2] \\ &= 6\sum a^2b^2+12\sum c(a^3+b^3)+24abc\sum c \\ &= 6\sum a^2b^2+12\sum ab(a^2+b^2)+24abc\sum a \\ &\geq 6\sum a^2b^2+12\sum ab(2ab)+24abc\sum a \\ &= 30(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+24abc(a+b+c). \end{aligned}$$

Mặt khác, lại có

$$\begin{aligned} & 30\sum a^2b^2+24abc(a+b+c)-27[\sum a^2b^2+abc(a+b+c)] \\ &= 3[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)] \\ &= \frac{3}{2}[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Kết hợp hai đánh giá này lại, ta thu được ngay (1).

Phép chứng minh đến đây được hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

□

BÀI 63 Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$ và $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[4]{b^2 + 6bc + c^2}}{b + c} + \frac{\sqrt[4]{c^2 + 6ca + a^2}}{c + a} + \frac{\sqrt[4]{a^2 + 6ab + b^2}}{a + b} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Cách 1. Do tính đối xứng giữa a, b, c nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, dễ thấy

$$\begin{aligned} a(a^2 + 6ac + c^2) &= a^3 + 3a^2c + 3a^2c + ac^2 \\ &\geq a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 \\ &= (a + c)^4, \end{aligned}$$

từ đó dẫn đến

$$\frac{a^2 + 6ac + c^2}{(a + c)^4} \geq \frac{1}{a(a + c)} \geq \frac{1}{a(a + c) + \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}. \quad (1)$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^2 + 6bc + c^2}{(b + c)^4} \geq \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2}. \quad (2)$$

Đặt $x = a + \frac{c}{2}$ và $y = b + \frac{c}{2}$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^2 + 6ab + b^2}{(a + b)^4} \geq \frac{x^2 + 6xy + y^2}{(x + y)^4}. \quad (3)$$

Để ý rằng $\frac{a^2 + 6ab + b^2}{(a + b)^4} = \frac{2}{(a + b)^2} - \frac{(a - b)^2}{(a + b)^4}$,

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$2 \left[\frac{1}{(a + b)^2} - \frac{1}{(x + y)^2} \right] \geq \frac{(a - b)^2}{(a + b)^4} - \frac{(x - y)^2}{(x + y)^4}.$$

Do $a - b = x - y$ nên ta có

$$2 \left[\frac{1}{(a + b)^2} - \frac{1}{(x + y)^2} \right] \geq \frac{(a - b)^2}{(a + b)^4} - \frac{(a - b)^2}{(x + y)^4}.$$

Sử dụng hằng đẳng thức $u^4 - v^4 = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2)$, ta có thể phân tích nhân tử và viết được bất đẳng thức trên thành

$$\left| \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \right| \left[2 - (a-b)^2 \left| \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right| \right] \geq 0,$$

và đây là một kết quả đúng, bởi vì ta có $\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{(x+y)^2}$ và

$$(a-b)^2 \left| \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right| \leq \frac{2(a-b)^2}{(a+b)^2} \leq 2.$$

Bây giờ, từ (1), (2) và (3), ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt[4]{x^2 + 6xy + y^2}}{x+y} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

với $x, y > 0$ và $x + y = 2$.

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2y^2}} + \frac{\sqrt[4]{x^2 + 6xy + y^2}}{2} \right) \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}}} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \frac{2}{\sqrt{\frac{x+y}{2}}} = 2 - \frac{2}{\sqrt[4]{2}}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2y^2}} + \frac{\sqrt[4]{x^2 + 6xy + y^2}}{2} &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[4]{2x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2y^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^2 + 6xy + y^2}}{2}} \\ &= 3 \sqrt[3]{\frac{x^2 + 6xy + y^2}{64x^2y^2}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{8xy}{64x^2y^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{8xy}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{2(x+y)^2}} = \frac{3}{\sqrt[4]{2}}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai đánh giá này lại, ta thu được kết quả như trên.

Phép chứng minh được hoán tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ (hoặc các hoán vị). ■

Cách 2. Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}$ và $z = \sqrt{c}$. Ta phải chứng minh: Nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, thì

$$\frac{\sqrt[4]{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt[4]{y^4 + 6y^2z^2 + z^4}}{y^2 + z^2} + \frac{\sqrt[4]{z^4 + 6z^2x^2 + x^4}}{z^2 + x^2} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, với mọi $u, v \geq 0$, ta có

$$(u^4 + v^4)(u + v)^2 \geq (u^2 + v^2)^3.$$

Từ đây suy ra, nếu $u + v > 0$ thì

$$\frac{\sqrt[4]{u^4 + v^4}}{u^2 + v^2} \geq \frac{1}{\sqrt{u + v} \sqrt[4]{u^2 + v^2}}. \quad (4)$$

Ta sẽ sử dụng đánh giá này để chứng minh bất đẳng thức trên.

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức (4), ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{y^4 + 6y^2z^2 + z^4}}{y^2 + z^2} &= \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(y+z)^4 + (y-z)^4}}{(y+z)^2 + (y-z)^2} \\ &\geq \frac{2}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y+z) + (y-z)} \sqrt[4]{(y+z)^2 + (y-z)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2y} \sqrt[4]{2(y^2 + z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{y} \sqrt[4]{2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sqrt[4]{x^4 + 6x^2z^2 + z^4}}{x^2 + z^2} \geq \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[4]{2 - y^2}}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}}{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt[4]{(x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}}{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt[4]{4xy(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt[4]{\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^3}}. \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ còn phải chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[4]{2 - y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y} \sqrt[4]{2 - x^2}} + \sqrt[4]{\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^3}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}},$$

hay tương đương

$$\left| \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2(2-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2y^2(2-x^2)}} + \sqrt[4]{\frac{4xy}{(x^2+y^2)^3}} \right| + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \left| \frac{1}{\sqrt[4]{x^2(2-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y^2(2-x^2)}} \right| \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \left| \frac{1}{\sqrt[4]{x^2(2-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y^2(2-x^2)}} \right| &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \frac{2}{\sqrt[8]{x^2(2-x^2)y^2(2-y^2)}} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \frac{2}{\sqrt[8]{\left[\frac{x^2+(2-x^2)}{2}\right]^2 \left[\frac{y^2+(2-y^2)}{2}\right]^2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt[4]{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt[4]{2x^2(2-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2y^2(2-x^2)}} + \sqrt[4]{\frac{4xy}{(x^2+y^2)^3}} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[12]{xy(x^2+y^2)^3(2-x^2)(2-y^2)}} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[12]{\frac{x^2+y^2}{2}(x^2+y^2)^3(2-x^2)(2-y^2)}} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[12]{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+z^2)(2-x^2)(2-y^2)}} \\ &= \frac{3}{\sqrt[12]{(x^2+y^2)^2(4-2x^2)(2-y^2)}} = \frac{3\sqrt[12]{2}}{\sqrt[12]{(x^2+y^2)^2(4-2x^2)(4-2y^2)}} \\ &\geq \frac{3\sqrt[12]{2}}{\sqrt[12]{\frac{2(x^2+y^2)+(4-2x^2)+(4-2y^2)}{4}}} = \frac{3}{\sqrt[4]{2}}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai đánh giá này lại, ta thu được ngay kết quả như trên.
 Phép chứng minh được hoàn tất. ■

Cách 3. Trước hết ta sẽ chứng minh kết quả sau: Với mọi $a, b \geq 0$, thì

$$(a^3 + 6ab + b^3)(a^2 + b^2) \geq (a+b)^4. \quad (5)$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}(a^2 + 6ab + b^2)(a^2 + b^2) &= (a+b)^2(a^2 + b^2) + 4ab(a^2 + b^2) \\ &\geq (a+b)^2(a^2 + b^2) + 4ab \cdot \frac{(a+b)^2}{2} = (a+b)^4.\end{aligned}$$

Bây giờ, từ (5), ta suy ra được

$$\frac{\sqrt[4]{a^2 + 6ab + b^2}}{a+b} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{a^2 + b^2}}.$$

Thiết lập hai đánh giá tương tự, ta quy được bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt[4]{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{c^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^2 + b^2}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Do tính đối xứng giữa a, b, c nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, dễ thấy

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{b^2 + c^2} &\leq \sqrt[4]{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{b + \frac{c}{2}}, \\ \sqrt[4]{c^2 + a^2} &\leq \sqrt[4]{\left(c + \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{c + \frac{a}{2}}, \\ \sqrt[4]{a^2 + b^2} &\leq \sqrt[4]{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Vậy nếu đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}$ thì bài toán sẽ quy về chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ với } x, y \geq 0 \text{ và } x + y = 2.$$

Tôi đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM với chú ý

$$xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \cdot 2xy \cdot (x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2xy + (x^2 + y^2)}{2} \right]^2 = 2$$

và

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = 2,$$

ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} &\geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2xy}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{xy}} \\
&\geq 2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2xy}(x^2+y^2)}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{xy}} \\
&\geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

BÀI 64 Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$, bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{(x+y+z)^3}{xyz} \geq 27 \left(\frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} - 1 \right).$$

(Bao Qian Liu)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y+z)^3}{xyz} - 27 &\geq 27 \left(\frac{x+z}{x+y} + \frac{x+y}{x+z} - 2 \right), \\
\frac{(x+y+z)^3 - 27xyz}{xyz} &\geq \frac{27(y-z)^2}{(x+y)(x+z)}.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 - 27xyz &= \left[x + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + \sqrt{yz} + \sqrt{yz} \right]^3 - 27xyz \\
&\geq 27 \cdot \left[x + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \right] \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{yz} - 27xyz \\
&= 27yz(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2.
\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{27yz(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2}{xyz} \geq \frac{27(y-z)^2}{(x+y)(x+z)},$$

hay là

$$27(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y)(x+z)} \right] \geq 0.$$

Đây là một kết quả đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y)(z+x)} \leq \frac{(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(\sqrt{x}\sqrt{z} + \sqrt{y}\sqrt{x})^2} = \frac{1}{x}.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. □

BÀI 65 Cho các số không âm a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$(a + b + c + d)^3 \geq 4[a(c + d)^2 + b(d + a)^2 + c(a + b)^2 + d(b + c)^2].$$

Lời giải

Cách 1. Để ý rằng

$$\begin{aligned} & 2(abc + bcd + cda + dab) \\ &= ad(b + c) + dc(a + b) + cb(d + a) + ba(c + d), \\ & a(c^2 + d^2) + b(d^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + d(b^2 + c^2) \\ &= a^2(b + c) + b^2(c + d) + c^2(d + a) + d^2(a + b). \end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức này suy ra

$$\begin{aligned} P &= a(c + d)^2 + b(d + a)^2 + c(a + b)^2 + d(b + c)^2 \\ &= [a(c^2 + d^2) + b(d^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + d(b^2 + c^2)] \\ &\quad + 2(abc + bcd + cda + dab) \\ &= [a^2(b + c) + b^2(c + d) + c^2(d + a) + d^2(a + b)] \\ &\quad + [ad(b + c) + dc(a + b) + cb(d + a) + ba(c + d)] \\ &= a(a + d)(b + c) + b(b + a)(c + d) + c(c + b)(d + a) + d(d + c)(a + b) \\ &= (a + c)(a + d)(b + c) + (b + d)(b + a)(c + d). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (a + d)(b + c) &\leq \frac{[(a + d) + (b + c)]^2}{4} = \frac{(a + b + c + d)^2}{4}, \\ (b + a)(c + d) &\leq \frac{[(b + a) + (c + d)]^2}{4} = \frac{(a + b + c + d)^2}{4}. \end{aligned}$$

Do đó

$$P \leq (a+c) \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{4} + (b+d) \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{4} \\ = \frac{(a+b+c+d)^3}{4}.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức này cho 4, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. ■

Cách 2. Ta sẽ chỉ ra rằng, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, chúng ta chỉ cần xét nó trong trường hợp $(a-c)(b-d) \geq 0$ là đủ. Thật vậy, giả sử

$$(a-c)(b-d) < 0.$$

Khi đó, nếu đặt $a_1 = b, b_1 = c, c_1 = d, d_1 = a$ thì ta vẫn có một bất đẳng thức tương tự như bất đẳng thức ban đầu (nhưng với biến a_1, b_1, c_1, d_1) là

$$4[a_1(c_1 + d_1)^2 + b_1(d_1 + a_1)^2 + c_1(a_1 + b_1)^2 + d_1(b_1 + c_1)^2] \\ \leq (a_1 + b_1 + c_1 + d_1)^3.$$

Nhưng lúc này ta lại có $(a_1 - c_1)(b_1 - d_1) = -(a-c)(b-d) > 0$. Chính từ điều này đã cho phép ta giải thích cho lý luận "ta chỉ cần xét bài toán với $(a-c)(b-d) \geq 0$ là đủ" ở trên.

Bây giờ, với giả thiết $(a-c)(b-d) \geq 0$, sử dụng AM-GM, ta có

$$(a+b+c+d)^3 = [(a+d) + (b+c)]^2 (a+b+c+d) \\ \geq 4(a+d)(b+c)(a+b+c+d) \\ = 4[(a+d)(b+c)^2 + (b+c)(a+d)^2] \\ = 4[a(b+c)^2 + b(d+a)^2 + c(d+a)^2 + d(b+c)^2].$$

Như vậy, bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu ta có

$$a(b+c)^2 + c(a+d)^2 \geq c(a+b)^2 + a(c+d)^2.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$(b+d)(a-c)(b-d) \geq 0,$$

đúng do ta có $(a-c)(b-d) \geq 0$.

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. □

BÀI 66 Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$81(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \leq 8(a + b + c)^4.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Do $abc = 1$ nên ta có

$$a^2 + 1 = a^2 + \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = \sqrt[3]{a^2} \left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right),$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \\ &= \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right) \left(\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right) \left(\sqrt[3]{c^4} + \sqrt[3]{a^2 b^2} \right) \\ &= \left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right) \left(\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right) \left(\sqrt[3]{c^4} + \sqrt[3]{a^2 b^2} \right). \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho có thể viết lại là

$$81 \left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right) \left(\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right) \left(\sqrt[3]{c^4} + \sqrt[3]{a^2 b^2} \right) \leq 8(a + b + c)^4.$$

Và vì đây là một bất đẳng thức thuần nhất với a, b, c nên giả thiết $abc = 1$ được cho ban đầu không còn tác động đến kết quả nữa, ta có thể bỏ qua nó và chuẩn hóa cho $a + b + c = 3$. Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành

$$81 \left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right) \left(\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right) \left(\sqrt[3]{c^4} + \sqrt[3]{a^2 b^2} \right) \leq 8 \cdot 3^4,$$

hay tương đương

$$P = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right) \left(\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right) \left(\sqrt[3]{c^4} + \sqrt[3]{a^2 b^2} \right)} \leq 2.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{\left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^2 c^2} \right) + \left(\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right) + \left(\sqrt[3]{c^4} + \sqrt[3]{a^2 b^2} \right)}{3} \\ &= \frac{\left(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4} \right) + \left(\sqrt[3]{a^2 b^2} + \sqrt[3]{b^2 c^2} + \sqrt[3]{c^2 a^2} \right)}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo AM-GM thì

$$\sqrt[3]{a^4} \leq \frac{a^2 + a + a}{3}, \quad \sqrt[3]{b^2 c^2} \leq \frac{bc + bc + 1}{3}.$$

Do đó, kết hợp với trên ta được

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{(a^2 + 2a) + (b^2 + 2b) + (c^2 + 2c) + (2ab + 1) + (2bc + 1) + (2ca + 1)}{9} \\ &= \frac{(a + b + c)^2 + 2(a + b + c) + 3}{9} = \frac{3^2 + 2 \cdot 3 + 3}{9} = 2. \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = c = 1$. $\square$

BÀI 67 Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + 2b + 3c = 4$. Chứng minh rằng

$$(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) \leq 32.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}[(a+2b)(b+2c)(c+2a) - 9abc] \\ &= (a+2b)(2c^2+ab) + (b+2c)(2a^2+bc) + (c+2a)(2b^2+ca) \\ &\geq 3\sqrt[3]{(a+2b)(b+2c)(c+2a)(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)}. \end{aligned}$$

Mà $(a+2b)(b+2c)(c+2a) - 9abc \leq (a+2b)(b+2c)(c+2a)$ nên từ trên ta suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(a+2b)(b+2c)(c+2a)(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)} \\ & \leq \frac{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}{2}, \end{aligned}$$

hay là

$$(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) \leq \frac{(a+2b)^2(b+2c)^2(c+2a)^2}{8}.$$

Từ đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$(a+2b)^2(b+2c)^2(c+2a)^2 \leq 32 \cdot 8,$$

hay tương đương $(a+2b)(b+2c)(c+2a) \leq \sqrt{32 \cdot 8} = 16$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa, ta được

$$\begin{aligned} (a+2b)(b+2c)(c+2a) &= \frac{1}{4} \cdot (a+2b) \cdot (4b+8c) \cdot (c+2a) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{(a+2b) + (4b+8c) + (c+2a)}{3} \right]^3 \\ &= \frac{(a+2b+3c)^3}{4} = 16. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$ và $c = 0$. ■

Cách 2. Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $a \geq b$.

Ta có để ý rằng

$$2a^2 + bc \leq 2a^2 + ac \leq 2(a+c)^2.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned}(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) &\leq \frac{(2b^2 + ca + 2c^2 + ab)^2}{4} = \frac{[2(b^2 + c^2) + a(b + c)]^2}{4} \\ &\leq \frac{[2(b + c)^2 + a(b + c)]^2}{4} = \frac{(b + c)^2(a + 2b + 2c)^2}{4} \\ &\leq \frac{(b + c)^2(a + 2b + 3c)^2}{4} = 4(b + c)^2.\end{aligned}$$

Kết hợp hai đánh giá trên lại, ta được

$$(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) \leq 8(a + c)^2(b + c)^2.$$

Như vậy, bất đẳng thức (với $a \geq b$) sẽ được chứng minh nếu ta có

$$(a + c)^2(b + c)^2 \leq \frac{32}{8} = 4,$$

hay là

$$(a + c)(b + c) \leq 2.$$

Đây là một kết quả đúng, bởi vì theo AM-GM ta có

$$\begin{aligned}(a + c)(b + c) &= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot (2b + 2c) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(a + c) + (2b + 2c)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{(a + 2b + 3c)^2}{8} = 4.\end{aligned}$$

Tóm lại, ta đã giải quyết xong được bài toán cho trường hợp $a \geq b$, và ta có thể phát biểu lại điều mà ta vừa chứng minh như sau: Với mọi bộ số không âm x, y, z thỏa mãn $x \geq y$, ta có

$$(2x^2 + yz)(2y^2 + zx)(2z^2 + xy) \leq \frac{(x + 2y + 3z)^6}{128}. \quad (1)$$

Bây giờ, ta xét trường hợp $a < b$. Khi đó, áp dụng (1) với $(x, y, z) = (b, a, c)$ (rõ ràng bộ này thỏa mãn điều kiện $x \geq y$), ta có ngay

$$\begin{aligned}(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) &= (2x^2 + yz)(2y^2 + zx)(2z^2 + xy) \\ &\leq \frac{(x + 2y + 3z)^6}{128} = \frac{(2a + b + 3c)^6}{128}.\end{aligned}$$

Mà $a < b$ nên $2a + b + 3c < a + 2b + 3c = 4$. Kết hợp với trên, ta suy ra

$$(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) < \frac{(a + 2b + 3c)^6}{128} = 32.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

BÀI 68 Giả sử a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$ và không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{b+c}} + \frac{bc}{\sqrt{c+a}} + \frac{ca}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{b+c}{2\sqrt{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}},$

suy ra $\frac{1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{b+c}{4\sqrt{2}} = \frac{6-(b+c)}{4\sqrt{2}},$

Từ đây dẫn đến $\frac{ab}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{6ab - ab(b+c)}{4\sqrt{2}}.$

Sử dụng đánh giá này và hai đánh giá tương tự, ta đưa được bài toán về chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$\begin{aligned} & [6ab - ab(b+c)] + [6bc - bc(c+a)] + [6ca - ca(a+b)] + 4 \\ & \geq 2(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Ta có: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$
 $= 3(ab+bc+ca) - abc,$

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & [6ab - ab(b+c)] + [6bc - bc(c+a)] + [6ca - ca(a+b)] + 4 \\ & \geq 6(ab+bc+ca) - 2abc, \end{aligned}$$

và sau khi thu gọn, ta được

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4. \quad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức này như sau: Do tính hoán vị vòng quanh giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử b nằm giữa a và c . Khi đó dễ thấy $(b-a)(b-c) \leq 0$, do vậy

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc &= b(a+c)^2 + a(b-a)(b-c) \leq b(a+c)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (a+c)^2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2b + 2 \cdot (a+c)^2}{3} \right]^3 = \frac{4}{27} (a+b+c)^3 = 4. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$, hoặc $a = 0, b = 1, c = 2$ (và các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 69 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(2 + ab^2)^2(2 + bc^2)^3(2 + ca^2)^2 \leq 3456.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Trong bài 68, ta đã chứng minh được $ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 4 - abc$ (xem bất đẳng thức (1)), và bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq 4 - abc.$$

Sử dụng hai đánh giá này và bất đẳng thức cơ bản

$$abc \leq \frac{(a + b + c)^3}{27} = 1,$$

ta được

$$\begin{aligned} & (2 + ab^2)(2 + bc^2)(2 + ca^2) \\ &= 8 + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 2abc(a^2b + b^2c + c^2a) + a^3b^3c^3 \\ &\leq 8 + 4(4 - abc) + 2abc(4 - abc) + a^3b^3c^3 \\ &= 4(6 + abc) + a^2b^2c^2(abc - 2) \\ &\leq 4(6 + abc). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} (2 + ab^2)^2(2 + bc^2)^3(2 + ca^2)^2 &= \left[(2 + ab^2)(2 + bc^2)(2 + ca^2)\right]^2(2 + bc^2) \\ &\leq \left[4(6 + abc)\right]^2(2 + bc^2) \\ &= 16(6 + abc)^2(2 + bc^2). \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$(6 + abc)^2(2 + bc^2) \leq \left[\frac{2 \cdot (6 + abc) + (2 + bc^2)}{3}\right]^3 = \frac{[14 + bc(c + 2a)]^3}{27}$$

và

$$\begin{aligned} bc(c + 2a) &= \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot c \cdot (c + 2a) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2b + c + (c + 2a)}{3}\right]^3 \\ &= \frac{4}{27}(a + b + c)^3 = 4, \end{aligned}$$

do đó

$$(6 + abc)^2(2 + bc^2) \leq \frac{(14 + 4)^3}{27} = 216.$$

Kết hợp với đánh giá ở trên, ta được

$$(2 + ab^2)^2(2 + bc^2)^3(2 + ca^2)^2 \leq 16 \cdot 216 = 3456.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = 0, b = 1, c = 2$. $\square$

BÀI 70 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$a\sqrt{1+b^3} + b\sqrt{1+c^3} + c\sqrt{1+a^3} \leq 5.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$a\sqrt{1+b^3} = a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq a \cdot \frac{(b+1) + (b^2-b+1)}{2} = \frac{a(b^2+2)}{2}.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng chúng lại, ta thu được

$$\begin{aligned} a\sqrt{1+b^3} + b\sqrt{1+c^3} + c\sqrt{1+a^3} &\leq \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 + 2(a+b+c)}{2} \\ &\leq \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{2} + 3. \end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 4.$$

Đây là hệ quả của bất đẳng thức $ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4$ đã được chứng minh ở bài 68. Vậy bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (0, 1, 2)$ và các hoán vị tương ứng. $\square$

BÀI 71 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(ab^3 + bc^3 + ca^3)(ab + bc + ca) \leq 16.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(ab^3 + bc^3 + ca^3)^2 (ab + bc + ca)^2 \leq 16^2 = 256.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$(ab^3 + bc^3 + ca^3)^2 (ab + bc + ca)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot 2(ab + bc + ca)^2 \cdot (ab^3 + bc^3 + ca^3)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{2(ab + bc + ca)^2 + 2 \cdot (ab^3 + bc^3 + ca^3)^2}{3} \right]^3 \\
&= \frac{4}{27} [(ab + bc + ca)^2 + (ab^3 + bc^3 + ca^3)^2]^3.
\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$(ab + bc + ca)^2 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \leq \sqrt[3]{\frac{256 \cdot 27}{4}} = 12.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&(ab + bc + ca)^2 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \\
&= (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a + b + c) + (ab^3 + bc^3 + ca^3) \\
&= (a^2b^2 + ab^3) + (b^2c^2 + bc^3) + (c^2a^2 + ca^3) + 2abc(a + b + c) \\
&= ab^2(a + b) + bc^2(b + c) + ca^2(c + a) + 2abc(a + b + c) \\
&= ab^2(3 - c) + bc^2(3 - a) + ca^2(3 - b) + 6abc \\
&= 3(ab^2 + bc^2 + ca^2) - abc(a + b + c) + 6abc \\
&= 3(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc).
\end{aligned}$$

Vì vậy, bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq \frac{12}{3} = 4.$$

Đây là một kết quả quen thuộc và nó đã được chứng minh trong bài 68.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = 1, c = 2$ (hoặc các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 72 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq \frac{4}{3} \left(\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab} \right).$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Cách 1. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}} \geq \frac{4}{3} \left(\frac{yz}{x^2+yz} + \frac{zx}{y^2+zx} + \frac{xy}{z^2+xy} \right).$$

Do $\frac{yz}{x^2 + yz} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + yz}$ nên ta có

$$\frac{4}{3} \left(\frac{x^2}{x^2 + yz} + \frac{y^2}{y^2 + zx} + \frac{z^2}{z^2 + xy} \right) + \sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}} \geq 4.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + yz} + \frac{y^2}{y^2 + zx} + \frac{z^2}{z^2 + xy} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{(x^2 + yz) + (y^2 + zx) + (z^2 + xy)} \\ &= \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx} + 1 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} &= \frac{x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 2xyz}{xyz} \\ &= \frac{y^2 + z^2}{yz} + \frac{z^2 + x^2}{zx} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 \\ &= \frac{y^2 + z^2}{yz} + 2 + \frac{z^2 + x^2}{zx} + 2 + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 - 4 \\ &= \frac{(y+z)^2}{yz} + \frac{(z+x)^2}{zx} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 4 \\ &\geq \frac{[(y+z) + (z+x) + (x+y)]^2}{yz + zx + xy} - 4 \\ &= \frac{4(x+y+z)^2}{xy + yz + zx} - 4 = \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} + 4. \end{aligned}$$

Từ hai đánh giá trên, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{4}{3} \left(\frac{B}{A+B} + 1 \right) + \sqrt[3]{\frac{4A}{B}} + 4 \geq 4,$$

với $A = x^2 + y^2 + z^2, B = xy + yz + zx$.

Bất đẳng thức trên có thể viết lại thành: $\frac{4B}{A+B} + 3\sqrt[3]{\frac{4(A+B)}{B}} \geq 8$,

đúng vì theo AM-GM ta có

$$\frac{4B}{A+B} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4(A+B)}{B}} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{4B}{A+B} \cdot \left[\sqrt[3]{\frac{4(A+B)}{B}} \right]^3} = 4\sqrt[4]{4^2} = 8.$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 4 \left(\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab} \right).$$

Trước hết, để phá căn của biểu thức vế trái, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM-GM bỏ bốn số như sau

$$\begin{aligned} & 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ & \geq 4\sqrt[4]{\left[\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \right]^3 \cdot \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = 8, \end{aligned}$$

suy ra

$$3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 8 - \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh

$$\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq 2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(1 - \frac{bc}{a^2+bc}\right) + \left(1 - \frac{ca}{b^2+ca}\right) + \left(1 - \frac{ab}{c^2+ab}\right) + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq 2,$$

hay là

$$\frac{bc}{bc+a^2} + \frac{ca}{ca+b^2} + \frac{ab}{ab+c^2} \geq 1 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{bc}{bc+a^2} + \frac{ca}{ca+b^2} + \frac{ab}{ab+c^2} & \geq \frac{(bc+ca+ab)^2}{bc(bc+a^2) + ca(ca+b^2) + ab(ab+c^2)} \\ & = 1 + \frac{abc(a+b+c)}{a^3b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Để thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$1 + \frac{abc(a+b+c)}{a^3b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c)} \geq 1 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

hay

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) \geq 4 \left[\sum a^3b^2 + abc(a+b+c) \right]. \quad (1)$$

Lại để ý rằng

$$\begin{aligned}
 & (a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c) \\
 &= [(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc](a+b+c) \\
 &= (a+b+c)^2(ab+bc+ca) - abc(a+b+c) \quad (2) \\
 &= (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) + 2(ab+bc+ca)^2 - abc(a+b+c) \\
 &= ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) + 2\sum a^2b^2 + 4abc\sum a.
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Điều này là hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$ab(a^2+b^2) \geq ab \cdot 2ab = 2a^2b^2,$$

$$bc(b^2+c^2) \geq bc \cdot 2bc = 2b^2c^2,$$

$$ca(c^2+a^2) \geq ca \cdot 2ca = 2c^2a^2.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự, ta chứng minh được kết quả tổng quát như sau: Với mọi $a, b, c, n > 0$, ta có

$$\sqrt[n]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}} \geq \frac{2}{n} \left(\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab} \right) + \frac{n-3}{n}.$$

BÀI 73 Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$, ta có

$$x + y + z \geq \frac{4xyz}{(x+y)(x+z)} + \frac{(x+y)^2 + (x+z)^2}{2x+y+z}.$$

(Bao Qian Liu)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x+y) + (x+z) - \frac{(x+y)^2 + (x+z)^2}{(x+y) + (x+z)} \geq x + \frac{4xyz}{(x+y)(x+z)},$$

hay là

$$\frac{2(x+y)(x+z)}{(x+y) + (x+z)} \geq x + \frac{4xyz}{(x+y)(x+z)}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên cho $(x+y)(x+z)$ và chú ý rằng

$$\frac{4xyz[(x+y)+(x+z)]}{(x+y)(x+z)} = \frac{4xyz}{x+z} + \frac{4xyz}{x+y},$$

ta viết được nó lại thành

$$2(x+y)(x+z) \geq x(2x+y+z) + \frac{4xyz}{x+y} + \frac{4xyz}{x+z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{4xyz}{x+y} \leq \frac{4xyz}{2\sqrt{xy}} = 2\sqrt{xyz} \leq (x+y)z,$$

$$\frac{4xyz}{x+z} \leq \frac{4xyz}{2\sqrt{xz}} = 2y\sqrt{xz} \leq y(x+z).$$

Do đó

$$\begin{aligned} x(2x+y+z) + \frac{4xyz}{x+y} + \frac{4xyz}{x+z} &\leq x(2x+y+z) + z(x+y) + y(x+z) \\ &= 2(x^2 + xy + yz + zx) = 2(x+y)(x+z). \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. □

BÀI 74 Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + d = 4$.

Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c+d+4} + \frac{bc}{d+a+4} + \frac{cd}{a+b+4} + \frac{da}{b+c+4} + \frac{\sqrt{abcd}}{3} \leq 1.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Nếu trong bốn số a, b, c, d có ba số bằng 0 thì bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng. Xét trường hợp ngược lại, tức là

$$(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b) > 0.$$

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+d+4} &= \frac{1}{(b+c+d) + (c+d+a)} \leq \frac{1}{2\sqrt{(b+c+d)(c+d+a)}} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} \right). \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{ab}{c+d+4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{b+c+d} + \frac{ab}{c+d+a} \right).$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{bc}{d+a+4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{d+a+b} + \frac{bc}{c+d+a} \right),$$

$$\frac{cd}{a+b+4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{cd}{a+b+c} + \frac{cd}{d+a+b} \right),$$

$$\frac{da}{b+c+4} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{da}{b+c+d} + \frac{da}{a+b+c} \right).$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{a+b+4} + \frac{bc}{b+c+4} + \frac{cd}{c+d+4} + \frac{da}{d+a+4} \\ & \leq \frac{1}{4} \left[\frac{a(b+d)}{b+c+d} + \frac{b(c+a)}{c+d+a} + \frac{c(d+b)}{d+a+b} + \frac{d(a+c)}{a+b+c} \right]. \end{aligned}$$

Mà

$$\frac{a(b+d)}{b+c+d} = \frac{a(b+c+d-c)}{b+c+d} = a - \frac{ac}{b+c+d},$$

nên ta có

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{a+b+4} + \frac{bc}{b+c+4} + \frac{cd}{c+d+4} + \frac{da}{d+a+4} \\ & \leq \frac{a+b+c+d}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{ac}{b+c+d} + \frac{bd}{c+d+a} + \frac{ca}{d+a+b} + \frac{db}{a+b+c} \right) \\ & = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{ac}{b+c+d} + \frac{bd}{c+d+a} + \frac{ca}{d+a+b} + \frac{db}{a+b+c} \right). \end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{ac}{b+c+d} + \frac{bd}{c+d+a} + \frac{ca}{d+a+b} + \frac{db}{a+b+c} \geq \frac{4}{3} \sqrt{abcd}.$$

Đây là một kết quả đúng, vì theo AM-GM ta có

$$\begin{aligned} & \frac{ac}{b+c+d} + \frac{bd}{c+d+a} + \frac{ca}{d+a+b} + \frac{db}{a+b+c} \\ & \geq 4 \sqrt[4]{\frac{ac}{b+c+d} \cdot \frac{bd}{c+d+a} \cdot \frac{ca}{d+a+b} \cdot \frac{db}{a+b+c}} \\ & = \frac{4\sqrt{abcd}}{\sqrt{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)}} \\ & \geq \frac{16\sqrt{abcd}}{(b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) + (a+b+c)} \\ & = \frac{16\sqrt{abcd}}{3(a+b+c+d)} = \frac{4}{3} \sqrt{abcd}. \end{aligned}$$

Phép chứng minh trên đây được hoán tất. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$, hoặc $a = b = 2, c = d = 0$ (và các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 75 Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(x+1)^2(y+z)} + \frac{1}{(y+1)^2(z+x)} + \frac{1}{(z+1)^2(x+y)} \leq \frac{3}{8}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(x+1)^2 = (x^2+1) + 2x \geq 2\sqrt{2x(x^2+1)}, \quad y+z \geq 2\sqrt{yz},$$

từ đó suy ra
$$\frac{1}{(x+1)^2(y+z)} \leq \frac{1}{4\sqrt{2xyz(x^2+1)}} = \frac{1}{4\sqrt{2(x^2+1)}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Do $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad y = \sqrt{\frac{c}{b}} \quad \text{và} \quad z = \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad \text{Khi đó, bất đẳng thức trên được viết lại thành}$$

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \right)^2 &\leq [(a+c) + (b+a) + (c+b)] \times \\ &\times \left[\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \right] \\ &= \frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Do đó, (1) sẽ được chứng minh nếu ta có

$$\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{2}$$

hay tương đương

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a).$$

Đây là một kết quả quen thuộc.

Vậy bất đẳng thức của ta đã được chứng minh xong.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. ■

Cách 2. Đặt $x = a^3, y = b^3$ và $z = c^3$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2(y+z)} &= \frac{1}{(a^3+1)^2(b^3+c^3)} = \frac{a^3b^3c^3}{(a^3+abc)^2(b^3+c^3)} \\ &= \frac{ab^3c^3}{(a^2+bc)^2(b^3+c^3)}. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{ab^3c^3}{(a^2+bc)^2(b^3+c^3)} + \frac{bc^3a^3}{(b^2+ca)^2(c^3+a^3)} + \frac{ca^3b^3}{(c^2+ab)^2(a^3+b^3)} \leq \frac{3}{8}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(a^2+bc)(b+c) = b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) \geq 2\sqrt{bc(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

từ đó suy ra

$$\frac{1}{(a^2+bc)^2(b+c)} \leq \frac{b+c}{4bc(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.$$

Sử dụng đánh giá này kết hợp với bất đẳng thức cơ bản

$$2(b^2-bc+c^2) \geq b^2+c^2,$$

ta được

$$\begin{aligned} \frac{ab^3c^3}{(a^2+bc)^2(b^3+c^3)} &\leq \frac{ab^2c^2(b+c)}{4(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2-bc+c^2)} \\ &\leq \frac{ab^2c^2(b+c)}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho sẽ được chứng minh nếu ta có

$$\begin{aligned} \frac{ab^2c^2(b+c)}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)} + \frac{bc^2a^2(c+a)}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)(c^2+a^2)} + \\ + \frac{ca^2b^2(a+b)}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)(a^2+b^2)} \leq \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$4abc[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] \leq 3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2),$$

hay tương đương

$$\frac{4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]}{abc} \leq 3 \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab} \cdot \frac{b^2 + c^2}{bc} \cdot \frac{c^2 + a^2}{ca}.$$

Do $\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2 + \frac{(a-b)^2}{ab}$ và

$$\frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{abc} = 6 + \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca}$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$3(2+m)(2+n)(2+p) \geq 4(6+m+n+p),$$

trong đó $m = \frac{(a-b)^2}{ab}$, $n = \frac{(b-c)^2}{bc}$ và $p = \frac{(c-a)^2}{ca}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 3(2+m)(2+n)(2+p) &= 3(2+m)(4+2n+2p+np) \\ &\geq 3(2+m)(4+2n+2p) \\ &= 3[8+4(m+n+p)+m(2n+2p)] \\ &\geq 3[8+4(m+n+p)] = 24+12(m+n+p) \\ &\geq 24+4(m+n+p) = 4(6+m+n+p). \end{aligned}$$

Phép chứng minh trên đây được hoàn tất. ■

Cách 3. Đặt $x = a^2$, $y = b^2$ và $z = c^2$ với $a, b, c > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(a^2+1)^2(b^2+c^2)} + \frac{1}{(b^2+1)^2(c^2+a^2)} + \frac{1}{(c^2+1)^2(a^2+b^2)} \leq \frac{3}{8}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2+1)(b^2+c^2)} &\geq ab+c = \frac{1}{c}+c = \frac{c^2+1}{c}, \\ \sqrt{(a^2+1)(c^2+b^2)} &\geq ac+b = \frac{1}{b}+b = \frac{b^2+1}{b}. \end{aligned}$$

Nhân hai bất đẳng thức này lại theo vế, ta suy ra

$$(a^2+1)(b^2+c^2) \geq \frac{(b^2+1)(c^2+1)}{bc},$$

từ đó dẫn đến

$$\frac{1}{(a^2+1)^2(b^2+c^2)} \leq \frac{bc}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)},$$

Sử dụng đánh giá này và hai đánh giá tương tự, ta đưa được bài toán về chứng minh kết quả mạnh hơn

$$\frac{bc}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \frac{ca}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \frac{ab}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leq \frac{3}{8}.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$3(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8(ab+bc+ca).$$

Để ý rằng

$$[(a-1)(b-1)][(b-1)(c-1)][(c-1)(a-1)] = (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0,$$

do đó trong ba số $(a-1)(b-1)$, $(b-1)(c-1)$, $(c-1)(a-1)$ phải có ít nhất một số không âm. Và vì đây là một bất đẳng thức đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$, hay là $a+b \leq 1+ab$. Từ đây ta được

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= ab+c(a+b) \leq ab+c(1+ab) \\ &= ab+c+1 = \frac{1}{c}+c+1. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$(a^2+1)(b^2+1) \geq 2a \cdot 2b = \frac{4}{c}.$$

Vậy ta chỉ còn phải chứng minh

$$\frac{3(c^2+1)}{c} \geq 2\left(c + \frac{1}{c} + 1\right),$$

hay là

$$c + \frac{1}{c} \geq 2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo AM-GM. □

Nhận xét. Bất đẳng thức (1) mà ta sử dụng trong cách 1 ở trên còn có một chứng minh khác như sau: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2a}{a+b}} &= \sqrt{\frac{3a(b+c)}{2(ab+bc+ca)}} \cdot \sqrt{\frac{4(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{3a(b+c)}{2(ab+bc+ca)} + \frac{4(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)} \right]. \end{aligned}$$

Từ đánh giá này và hai đánh giá tương tự, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{3a(b+c)}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3b(c+a)}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3c(a+b)}{2(ab+bc+ca)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{4(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)} + \frac{4(ab+bc+ca)}{3(b+c)(c+a)} + \frac{4(ab+bc+ca)}{3(c+a)(a+b)} \right] \\ & = \frac{1}{2} \left[3 + \frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \right]. \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ còn phải chứng minh

$$\frac{1}{2} \left[3 + \frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \right] \leq 3,$$

hay là

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a).$$

Đây là một kết quả quen thuộc.

BÀI 76 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \leq 1.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & a(a+2)(c+2) + b(b+2)(a+2) + c(c+2)(b+2) \\ & \leq (a+2)(b+2)(c+2). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & a(a+2)(c+2) + b(b+2)(a+2) + c(c+2)(b+2) \\ & = a(ac + 2a + 2c + 4) + b(ab + 2b + 2a + 4) + c(bc + 2c + 2b + 4) \\ & = (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) \\ & = (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6 + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) \end{aligned}$$

và

$$(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8,$$

do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc \leq 2.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c . Khi đó, dễ thấy

$$(b-a)(b-c) \leq 0,$$

dẫn đến

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc &= b(a^2 + c^2) + a(b-a)(b-c) \leq b(a^2 + c^2) \\ &= \sqrt{b^2(a^2 + c^2)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2b^2 \cdot (a^2 + c^2)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{2b^2 + 2 \cdot (a^2 + c^2)}{3} \right]^3} = 2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$, hoặc $a = 0, b = 1, c = \sqrt{2}$ (hoặc các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 77 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^2 + 3b^2} + \frac{bc}{b^2 + 3c^2} + \frac{ca}{c^2 + 3a^2} \leq \frac{3}{4}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{ab}{a^2 + 3b^2} = \frac{ab}{(a^2 + b^2) + 2b^2} \leq \frac{ab}{2\sqrt{(a^2 + b^2) \cdot 2b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Đây là một kết quả quen thuộc (xem lại phần chứng minh bài 75).

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

BÀI 78 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta luôn có

$$\left[\frac{8ab^2}{(a+b)^3} \right]^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{8bc^2}{(b+c)^3} \right]^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{8ca^2}{(c+a)^3} \right]^{\frac{3}{2}} \leq 3.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(ab)^3 \cdot (a^2 - ab + b^2) \leq \left[\frac{3 \cdot ab + (a^2 - ab + b^2)}{4} \right]^4 = \frac{(a+b)^6}{4^4},$$

từ đó suy ra

$$a^3 b^3 (a^3 + b^3) = (a+b) \left[(ab)^3 (a^2 - ab + b^2) \right] \leq (a+b) \frac{(a+b)^6}{4^4} = \frac{(a+b)^9}{4^4},$$

tức là

$$(a+b)^3 \geq \sqrt[3]{4^4 a^3 b^3 (a^3 + b^3)} = 2^{\frac{8}{3}} ab \sqrt[3]{a^3 + b^3}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta được

$$\left[\frac{8ab^2}{(a+b)^3} \right]^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{8ab^2}{2^{\frac{8}{3}} ab \sqrt[3]{a^3 + b^3}} \right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2b^3}{a^3 + b^3}}.$$

Và như thế, bài toán được quy về chứng minh

$$\sqrt{\frac{b^3}{a^3 + b^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{b^3 + c^3}} + \sqrt{\frac{a^3}{c^3 + a^3}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Đặt $x = b^3, y = a^3, z = c^3$, bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Đây chính là bất đẳng thức (1) đã được chứng minh trong bài 75.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được kết quả sau

$$\left(\frac{2ab^2}{a^3 + b^3} \right)^{\frac{9}{2}} + \left(\frac{2bc^2}{b^3 + c^3} \right)^{\frac{9}{2}} + \left(\frac{2ca^2}{c^3 + a^3} \right)^{\frac{9}{2}} \leq 3.$$

BÀI 79 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 2$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2 \geq a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{c^2 + a^2} + c\sqrt{a^2 + b^2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{b^2 + c^2} \leq \frac{1}{2} \left(b + c + \frac{b^2 + c^2}{b + c} \right) = b + c - \frac{bc}{b + c}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{c^2 + a^2} + c\sqrt{a^2 + b^2} \\ & \leq a \left(b + c - \frac{bc}{b + c} \right) + b \left(c + a - \frac{ca}{c + a} \right) + c \left(a + b - \frac{ab}{a + b} \right) \\ & = 4 - abc \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right). \end{aligned}$$

Mặt khác, theo các bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \geq \frac{(1 + 1 + 1)^2}{(a + b) + (b + c) + (c + a)} = \frac{9}{2(a + b + c)}.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{c^2 + a^2} + c\sqrt{a^2 + b^2} \leq 2 - \frac{9abc}{2(a + b + c)}.$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2 - \frac{9abc}{2(a + b + c)}.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức Schur bậc ba (dạng phân thức), ta lại có

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 2(ab + bc + ca) - \frac{9abc}{a + b + c} = 4 - \frac{9abc}{a + b + c} > 0.$$

Như vậy, phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\sqrt{4 - \frac{9abc}{a + b + c}} \geq 2 - \frac{9abc}{2(a + b + c)}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{9abc}{a + b + c}} \left(2 - \sqrt{4 - \frac{9abc}{a + b + c}} \right) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng do $\sqrt{4 - \frac{9abc}{a + b + c}} \leq \sqrt{4} = 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là một hoán vị của bộ $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. ■

Cách 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2) &= (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \\ &\geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \geq 2a^2(b^2 + c^2), \end{aligned}$$

suy ra $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq a\sqrt{b^2 + c^2}.$

Như vậy, bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu ta có

$$b\sqrt{a^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2} \leq 2. \quad (1)$$

Do $a \geq c$ nên

$$a^2 + c^2 \leq a^2 + ac \leq a^2 + ac + \frac{c^2}{4} = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Tương tự, do $a \geq b$ nên: $a^2 + b^2 \leq \left(a + \frac{b}{2}\right)^2.$

Từ đó suy ra

$$b\sqrt{a^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2} \leq b\left(a + \frac{c}{2}\right) + c\left(a + \frac{b}{2}\right) = ab + bc + ca = 2.$$

Vậy (1) đúng. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

BÀI 80 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta luôn có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9}{4} \cdot \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{15}{4}.$$

(Bùi Ngọc Anh)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3\right) - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3}\right) \geq 0.$$

Đề ý rằng

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1 - \frac{b}{a}\right) \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)(b-c)}{ac}, \end{aligned}$$

$$1 - \frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^3+b^3+c^3} \\ = \frac{(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)(b-c)]}{a^3+b^3+c^3}.$$

Do vậy, bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$$

trong đó

$$M = \frac{1}{ab} - \frac{3}{4} \cdot \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}, \quad N = \frac{1}{ca} - \frac{3}{4} \cdot \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

Do $(a-b)^2 \geq 0$ và $(a-c)(b-c) \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $M \geq 0$ và $N \geq 0$ là đủ. Mặt khác, lại có $c = \min\{a, b, c\}$, nên $N \geq M$. Vậy ta chỉ cần chứng minh được $M \geq 0$ là bài toán được giải quyết xong.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ \geq (a+b+c)^3 - 3 \left[\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} \right]^3 \\ = \frac{(a+b+c)^3}{9},$$

suy ra

$$\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3} \leq \frac{\sqrt[3]{9(a^3+b^3+c^3)}}{a^3+b^3+c^3} = \sqrt[3]{\frac{9}{(a^3+b^3+c^3)^2}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{(a^3+b^3)^2}} \\ \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4a^3b^3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{1}{ab} < \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{ab},$$

do đó

$$M \geq \frac{1}{ab} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{ab} \right) = \frac{1}{ab} - \frac{1}{ab} = 0.$$

Bài toán được giải quyết xong.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI 81 Cho $x \geq y \geq z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(x+z)^2}{xz} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}}.$$

(Hoàng Kiều Nam)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} + 3 \geq 2\sqrt{3} \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}}.$$

Vậy ta có thể quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{(x+z)^2}{xz} \geq \frac{2}{3} \left[\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} + 3 \right].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(x+z)^2}{xz} - 4 \geq \frac{2}{3} \left[\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} - 3 \right]$$

Hay
$$\frac{(x-z)^2}{xz} \geq \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{3(xy+yz+zx)}.$$

Mặt khác, do giả thiết $x \geq y \geq z > 0$ nên hiển nhiên ta có

$$0 \leq y-z \leq x-z, \quad 0 \leq x-y \leq x-z.$$

Suy ra
$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \leq 3(x-z)^2.$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(x-z)^2}{xz} \geq \frac{(x-z)^2}{xy+yz+zx}.$$

Điều này là hiển nhiên đúng vì $xz \leq xy+yz+zx$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z > 0$. □

BÀI 82 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2) + 2abc} \sum \frac{b+c-2a}{a(b+c)}.$$

(Virgil Nicula)

Lời giải

Để ý rằng $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b - \frac{2ab}{a+b}$ nên suy ra

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} = 2 \left(a+b+c - \frac{ab}{a+b} - \frac{bc}{b+c} - \frac{ca}{c+a} \right).$$

Mặt khác,

$$2abc \sum \frac{b+c-2a}{a(b+c)} = 2(ab+bc+ca) - 4abc \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right).$$

Do đó, sau khi bình phương hai vế của bất đẳng thức đề bài và rút gọn, ta sẽ thu được

$$\begin{aligned} \sum a^2 + 4 \sum \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} + \frac{16abc(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} &\geq \\ &\geq 2 \sum ab + 4abc \sum \frac{1}{b+c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, ta có

$$\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{4a^2 b^2}{(a+b)^2} \geq 2ab.$$

Thiết lập hai đánh giá tương tự và cộng chúng lại, ta thu được

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2} + 4 \sum \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} \geq 2(ab+bc+ca),$$

hay

$$4 \sum \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} \geq 2(ab+bc+ca) - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2}.$$

Vậy ta sẽ quy (1) về việc chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{2} + \frac{16abc(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4abc \sum \frac{1}{b+c}.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\sum a^2 - \sum ab \right) + 4abc \left[\frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \sum \frac{1}{b+c} \right] &\geq 0, \\ \frac{1}{2} \left(\sum a^2 - \sum ab \right) + 4abc \left[\frac{4(ab+bc+ca) - (\sum a^2 + 3 \sum ab)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right] &\geq 0, \\ \left(\sum a^2 - \sum ab \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right] &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

và

$$\frac{1}{2} - \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{2} - \frac{4abc}{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}} = 0.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI 83 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$(a+b+c)^2(a+b)(b+c)(c+a) \geq 24abc(a^2+b^2+c^2).$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{24(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2},$$

tương đương

$$\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 \right] - 8 \left[\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1 \right] \geq 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 &= \frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{abc}, \\ \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} - 1 &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Do đó, (1) có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0,$$

trong đó

$$S_a = \frac{1}{bc} - \frac{8}{(a+b+c)^2}, \quad S_b = \frac{1}{ca} - \frac{8}{(a+b+c)^2}, \quad S_c = \frac{1}{ab} - \frac{8}{(a+b+c)^2}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta thấy ngay

$$S_a \geq S_b \geq S_c.$$

Mặt khác, sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{16}{(a+b+c)^2} \geq \frac{2}{a\sqrt{bc}} - \frac{16}{(a+b+c)^2} \\ &\geq \frac{4}{a(b+c)} - \frac{16}{(a+b+c)^2} \geq \frac{16}{[a+(b+c)]^2} - \frac{16}{(a+b+c)^2} = 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $2S_a \geq 2S_b \geq S_b + S_c \geq 0$. Sử dụng kết quả này với chú ý rằng $(a-c)^2 \geq (a-b)^2$, ta được

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = 2b = 2c$ (và các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 84 Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{6}{x+y+z} \geq 5.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Đặt $x = a^3, y = b^3, z = c^3$. Khi đó, ta có $abc = 1$ và

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{6}{x+y+z} &= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{6}{a^3+b^3+c^3} \\ &= \frac{abc}{a^3} + \frac{abc}{b^3} + \frac{abc}{c^3} + \frac{6abc}{a^3+b^3+c^3} \\ &= \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{6abc}{a^3+b^3+c^3}. \end{aligned}$$

Do vậy, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{6abc}{a^3+b^3+c^3} \geq 5,$$

hay tương đương

$$\frac{a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} - \frac{2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2 \\ &= (ab + bc + ca)[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c)] \\ &= \frac{1}{2}(ab + bc + ca)[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2] \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2], \end{aligned}$$

do vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{ab+bc+ca}{2a^2b^2c^2} \sum a^2(b-c)^2 - \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3} \sum (b-c)^2 \geq 0,$$

$$\text{hay là } \sum [(a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ca) - 2b^2c^2(a+b+c)](b-c)^2 \geq 0.$$

Đặt $S_a = (a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ca) - 2b^2c^2(a+b+c)$ và S_b, S_c tương tự.

Ta phải chứng minh

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Không mất tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy: $S_a \geq S_b \geq S_c$.

Lại có

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= 2(a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ca) - 2a^2(b^2+c^2)(a+b+c) \\ &\geq 2(a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ca) - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a+b+c) \\ &= 2 \left[\sum ab(a^3+b^3) + abc \sum a^2 - \sum a^2b^2(a+b) - abc \sum bc \right] \geq 0, \end{aligned}$$

vì ta có

$$\sum ab(a^3+b^3) = \sum ab(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq \sum ab(a+b)(ab)$$

và

$$abc \sum a^2 = abc \sum \frac{b^2+c^2}{2} \geq abc \sum bc.$$

Suy ra $2S_b \geq 2S_c \geq S_b + S_c \geq 0$. Từ đây, với chú ý ở bất đẳng thức

$$(a-c)^2 \geq (a-b)^2,$$

ta có

$$\begin{aligned} S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 &\geq S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \\ &\geq S_b(a-b)^2 + S_c(a-b)^2 \\ &= (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. □

BÀI 85 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{9}{4}abc \geq \frac{21}{4}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Do $a + b + c = 3$, nên ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng chuẩn tắc

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{81abc}{4(a+b+c)^2} \geq \frac{7}{4}(a+b+c).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left[\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - (a+b+c) \right] - \frac{3}{4} \left[(a+b+c) - \frac{27abc}{(a+b+c)^2} \right] \geq 0. \quad (1)$$

Do $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - (a+b+c) = \frac{a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2}{2abc}$ và

$$\begin{aligned} a+b+c - \frac{27abc}{(a+b+c)^2} &= \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3 \left[\sum ab(a+b) - 6abc \right]}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(a+b+c) \sum (a-b)^2 + 3 \sum c(a-b)^2}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{\sum (a+b+7c)(a-b)^2}{2(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức (1) có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{a}{bc} - \frac{3(7a+b+c)}{4(a+b+c)^2}, \quad S_b = \frac{b}{ca} - \frac{3(7b+c+a)}{4(a+b+c)^2}, \\ S_c &= \frac{c}{ab} - \frac{3(7c+a+b)}{4(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta sẽ chứng minh

$$S_a \geq S_b \geq S_c.$$

Vì vậy, ta chứng minh $S_b \geq S_c$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{b}{ca} - \frac{3(7b+c+a)}{4(a+b+c)^2} &\geq \frac{c}{ab} - \frac{3(7c+a+b)}{4(a+b+c)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{b}{ca} - \frac{c}{ab} &\geq \frac{3(7b+c+a)}{4(a+b+c)^2} - \frac{3(7c+a+b)}{4(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 - c^2}{abc} \geq \frac{9(b - c)}{2(a + b + c)^2}.$$

Do $b \geq c$ nên

$$2(b + c)(a + b + c)^2 \geq 9abc.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2(b + c)(a + b + c)^2 \geq 2(b + c) \cdot 4a(b + c) = 8a(b + c)^2 \geq 8a \cdot 4bc > 9abc.$$

Vậy $S_b \geq S_c$. Tương tự, ta cũng có $S_a \geq S_c$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} S_b + S_c &= \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} - \frac{3(4b + 4c + a)}{2(a + b + c)^2} \geq 2\sqrt{\frac{b}{ca} \cdot \frac{c}{ab}} - \frac{3(4b + 4c + a)}{2(a + b + c)^2} \\ &= \frac{2}{a} - \frac{3(4b + 4c + a)}{2(a + b + c)^2} = \frac{(a - 2b - 2c)^2}{2a(a + b + c)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó ta suy ra $2S_a \geq 2S_b \geq S_c + S_c \geq 0$, hay là $S_a \geq S_b \geq 0$. Từ đây, với chú ý rằng $(a - c)^2 \geq (a - b)^2$, ta có

$$\begin{aligned} S_a(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 + S_c(a - b)^2 &\geq S_b(a - c)^2 + S_c(a - b)^2 \\ &\geq (S_b + S_c)(a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = 4b = 4c$ (và các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 86 Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$33 + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)}{xyz} \geq \frac{14(x + y + z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

(Trần Quốc Anh, Micheal Rozenberg)

Lời giải

Để phá bỏ lớp căn thức ở vế phải, ta sẽ đặt $x = a^3, y = b^3$ và $z = c^3$ với $a, b, c > 0$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$33 + \frac{(a^6 + b^6 + c^6)(a^3 + b^3 + c^3)}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{14(a^3 + b^3 + c^3)}{abc},$$

hay tương đương

$$\frac{(a^6 + b^6 + c^6)(a^3 + b^3 + c^3)}{a^3 b^3 c^3} - 9 \geq 14 \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - 3 \right).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{(a^6 + b^6 + c^6)(a^3 + b^3 + c^3)}{a^3 b^3 c^3} - 9 \\
 &= \frac{(a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3 b^3 c^3) + [\sum a^3(b^6 + c^6) - 6a^3 b^3 c^3]}{a^3 b^3 c^3} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(a^3 + b^3 + c^3) \sum (b^3 - c^3)^2 + \sum a^3(b^3 - c^3)^2}{a^3 b^3 c^3} \\
 &= \frac{\sum (3a^3 + b^3 + c^3)(b^3 - c^3)^2}{2a^3 b^3 c^3}
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - 3 &= \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{abc} \\
 &= \frac{(a + b + c)[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2]}{2abc}
 \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức trên có thể được viết lại dưới dạng

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0,$$

trong đó

$$S_a = (b^3 + c^3 + 3a^3)(b^2 + bc + c^2)^2 - 14a^2 b^2 c^2 (a + b + c),$$

$$S_b = (c^3 + a^3 + 3b^3)(c^2 + ca + a^2)^2 - 14a^2 b^2 c^2 (a + b + c),$$

$$S_c = (a^3 + b^3 + 3c^3)(a^2 + ab + b^2)^2 - 14a^2 b^2 c^2 (a + b + c).$$

Ta sẽ chứng minh nếu $b \geq c > 0$ thì $S_c \leq S_b$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned}
 & (c^3 + a^3 + 3b^3)(c^2 + ca + a^2)^2 \leq (a^3 + b^3 + 3c^3)(a^2 + ab + b^2)^2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{c^3 + a^3 + 3b^3}{a^3 + b^3 + 3c^3} - 1 \leq \frac{(a^2 + ab + b^2)^2}{(c^2 + ca + a^2)^2} - 1 \\
 & \Leftrightarrow \frac{2(b^3 - c^3)}{a^3 + b^3 + 3c^3} \leq \frac{(b - c)(a + b + c)(2a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)}{(c^2 + ca + a^2)^2} \\
 & \Leftrightarrow \frac{2(b^2 + bc + c^2)}{a^3 + b^3 + 3c^3} \leq \frac{(a + b + c)(2a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)}{(c^2 + ca + a^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Do $b \geq c$ nên

$$2a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac \geq 2(a^2 + ac + c^2).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{b^2 + bc + c^2}{a^3 + b^3 + 3c^3} \leq \frac{a + b + c}{a^3 + ac + c^3},$$

hay

$$(a^3 + ac + c^3)(b^2 + bc + c^2) \leq (a^3 + b^3 + 3c^3)(a + b + c). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(a^3 + b^3 + 3c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + \sqrt{3}c^2)^2 \geq \left(a^2 + b^2 + \frac{3}{2}c^2\right)^2. \quad (2)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} (a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2) &\leq \left(a^2 + \frac{a^2 + c^2}{2} + c^2\right) \left(b^2 + \frac{b^2 + c^2}{2} + c^2\right) \\ &= \frac{9}{4}(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) \\ &\leq \frac{9}{4} \left[\frac{(a^2 + c^2) + (b^2 + c^2)}{2} \right]^2 \\ &= \left[\frac{3}{4}(a^2 + b^2) + \frac{3}{2}c^2 \right]^2 \leq \left(a^2 + b^2 + \frac{3}{2}c^2\right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3), ta suy ra được (1). Hay nói cách khác, khẳng định “nếu $b \geq c$ thì $S_b \leq S_c$ ” là đúng.

Quay trở lại bài toán, do tính đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, sử dụng kết quả trên, ta dễ thấy

$$S_c \geq S_b \geq S_a.$$

Vậy nếu ta chỉ ra rằng

$$S_a + S_b \geq 0, \quad (4)$$

thì bài toán sẽ được giải quyết xong. Thật vậy, nếu $S_a + S_b \geq 0$ thì ta có

$$2S_c \geq 2S_b \geq S_a + S_b \geq 0.$$

Mà $(a - c)^2 \geq (b - c)^2$ (do $a \geq b \geq c$) nên

$$\begin{aligned} S_c(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 + S_a(a - b)^2 &\geq S_a(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 \\ &\geq S_a(b - c)^2 + S_b(b - c)^2 \\ &= (S_a + S_b)(b - c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, vấn đề còn lại chỉ là chứng minh được (4). Ta có

$$S_a + S_b = \left(\sum a^3 \right) \left[(b^2 + bc + c^2)^2 + (a^2 + ac + c^2)^2 \right] - 16a^2b^2c^2(a+b+c) \\ + 2 \left[a^3(b^2 + bc + c^2)^2 + b^3(a^2 + ac + c^2)^2 - 6a^2b^2c^2(a+b+c) \right].$$

Do đó, có thể thấy (4) được suy ra trực tiếp từ hai bất đẳng thức

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left[(b^2 + bc + c^2)^2 + (a^2 + ac + c^2)^2 \right] \geq 16a^2b^2c^2(a+b+c) \quad (5)$$

và

$$a^3(b^2 + bc + c^2)^2 + b^3(a^2 + ac + c^2)^2 \geq 6a^2b^2c^2(a+b+c). \quad (6)$$

Chứng minh (5). Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức AM-GM dạng

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy,$$

ta có

$$(b^2 + bc + c^2)^2 + (c^2 + ca + a^2)^2 \geq \frac{\left[(b^2 + bc + c^2) + (c^2 + ca + a^2) \right]^2}{2} \\ = \frac{\left[a^2 + b^2 + c^2 + c(a+b+c) \right]^2}{2} \\ \geq 2c(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Sử dụng đánh giá này, ta chỉ cần chứng minh

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 8a^2b^2c.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 5 số, ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} + c^3 \geq \frac{5}{\sqrt[5]{16}} \sqrt[5]{a^6b^6c^3}, \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + c^2 \geq \frac{5}{\sqrt[5]{16}} \sqrt[5]{a^4b^4c^2},$$

từ đó suy ra

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{25}{\sqrt[5]{256}} a^2b^2c > 8a^2b^2c.$$

Chứng minh (6). Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$a^3(b^2 + bc + c^2)^2 + b^3(a^2 + ac + c^2)^2 - 6a^2b^2c^2(a+b+c) \\ \geq a^3(3bc)^2 + b^3(3ca)^2 - 6a^2b^2c^2(a+b+c) \\ = 9a^3b^2c^2 + 9b^3c^2a^2 - 6a^2b^2c^2(a+b+c) = 3a^2b^2c^2(a+b-2c) \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z > 0$. □

BÀI 87 Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{3}{5}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{3}{5}} \geq 3.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{2a}{\sqrt[5]{[a(b+c)]^2 \cdot (b+c) \cdot 2^2}} \geq \frac{10a}{2 \cdot a(b+c) + (b+c) + 2 \cdot 2}.$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$10 \sum \frac{a}{2a(b+c) + b+c+4} \geq 3.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{2a(b+c) + b+c+4} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a[2a(b+c) + b+c+4]} \\ &= \frac{9}{2 \sum a^2(b+c) + 2(ab+bc+ca) + 12}. \end{aligned}$$

Và một lần nữa, ta lại làm mạnh được bất đẳng thức đã cho, đó là đưa nó về chứng minh

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + (ab+bc+ca) \leq 9.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned} 3[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] + (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ \leq (a+b+c)^3. \end{aligned}$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc.$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc ba. Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

BÀI 88 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta luôn có

$$\frac{1}{(3a+2b+c)^2} + \frac{1}{(3b+2c+a)^2} + \frac{1}{(3c+2a+b)^2} \leq \frac{1}{4(ab+bc+ca)}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\frac{1}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4xy}$, ta có

$$\frac{1}{(3a+2b+c)^2} = \frac{1}{[(a+2b)+(c+2a)]^2} \leq \frac{1}{4(a+2b)(c+2a)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{(a+2b)(c+2a)} + \frac{1}{(b+2c)(a+2b)} + \frac{1}{(c+2a)(b+2c)} \leq \frac{1}{ab+bc+ca},$$

hay

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a) \geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Khai triển và rút gọn, ta thu được bất đẳng thức tương đương

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Do tính hoán vị vòng quanh của bài toán nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử b là số hạng nằm giữa a và c . Khi đó, ta dễ thấy đánh giá

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

chỉ khi và chỉ khi $c \geq b \geq a$. Như vậy, nếu $c \geq b \geq a$ thì bài toán của ta sẽ được chứng minh xong.

Xét trường hợp $a \geq b \geq c$, lúc này chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\frac{1}{(3a+2b+c)^2} = \frac{1}{[(a+b+c)+(2a+b)]^2} \leq \frac{1}{4(a+b+c)(2a+b)}.$$

Với việc sử dụng đánh giá này, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \right) \leq \frac{1}{ab+bc+ca},$$

hay tương đương

$$\begin{aligned} & (2a+b)(2b+c)(2c+a)(a+b+c) \\ & \geq (ab+bc+ca)[2(a^2+b^2+c^2) + 7(ab+bc+ca)]. \end{aligned}$$

Do $a \geq b \geq c$ nên

$$(2a+b)(2b+c)(2c+a) \geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

và ta chỉ cần chứng minh được

$$3(a+b+c)^2 \geq 2(a^2+b^2+c^2) + 7(ab+bc+ca).$$

Thu gọn lại, ta thu được một bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo AM-GM.

Bài toán được chứng minh xong.

Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

BÀI 89 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 11$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt[3]{a^2 + 3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b^2 + 3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c^2 + 3} \geq \frac{23}{5\sqrt[3]{2}}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Trước hết, ta sẽ chứng minh: Với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, thì

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (1)$$

Đặt $b = \sqrt[n]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3}{n}}$ và $b_1 = \frac{a_1}{b}, b_2 = \frac{a_2}{b}, \dots, b_n = \frac{a_n}{b}$.

Khi đó ta có $b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3 = n$ và (1) được viết lại thành

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n,$$

và bất đẳng thức này có thể được chứng minh khá dễ dàng bằng AM-GM

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_n &\leq \frac{b_1^3 + 1 + 1}{3} + \frac{b_2^3 + 1 + 1}{3} + \dots + \frac{b_n^3 + 1 + 1}{3} \\ &= \frac{(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3) + 2n}{3} = n. \end{aligned}$$

Quay trở lại bài toán, áp dụng (1) ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^2 + 3} &= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{\frac{a^2 + 1}{2} + 1}{2}} \geq \sqrt[3]{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{a^2 + 1}{2}} + 1}{2}, \\ \sqrt[3]{b^2 + 3} &= \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{\frac{5 \cdot \frac{b^2 + 1}{5} + 1 + 1}{7}} \geq \sqrt[3]{7} \cdot \frac{5\sqrt[3]{\frac{b^2 + 1}{5}} + 1 + 1}{7}, \\ \sqrt[3]{c^2 + 3} &= \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{\frac{5 \cdot \frac{c^2 + 1}{10} + 1}{6}} \geq \sqrt[3]{12} \cdot \frac{5\sqrt[3]{\frac{c^2 + 1}{10}} + 1}{6}. \end{aligned}$$

Từ đây, bằng cách đặt: $P = \sqrt[3]{a^2+3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b^2+3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c^2+3}$,

ta được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{2}} + 1 \right) + \frac{1}{5\sqrt[3]{2}} \left(5\sqrt[3]{\frac{b^2+1}{5}} + 2 \right) + \frac{1}{5\sqrt[3]{2}} \left(5\sqrt[3]{\frac{c^2+1}{10}} + 1 \right) \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+1}{10}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+1}{20}} \right) + \frac{8}{5\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a^2+1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+1}{10}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+1}{20}} &\geq 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2+1}{10}} \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2+1}{20}}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{800}}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$3\sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{800}} + \frac{8}{5\sqrt[3]{2}} \geq \frac{23}{5\sqrt[3]{2}}.$$

Bằng một số biến đổi đơn giản, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 100.$$

Do $(b^2+1)(c^2+1) = (bc-1)^2 + (b+c)^2$ nên

$$(a^2+1)[(b+c)^2 + (bc-1)^2] \geq 100.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} (a^2+1)[(b+c)^2 + (bc-1)^2] &\geq [a(b+c) + (bc-1)]^2 = (ab+bc+ca-1)^2 \\ &\geq (11-1)^2 = 100. \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=2$ và $c=3$. □

Nhận xét. Thật ra, bất đẳng thức (1) mà ta đã sử dụng để giải bài toán trên là một trường hợp riêng của bất đẳng thức trung bình lũy thừa như sau: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm. Khi đó với mọi $s \geq r > 0$, ta có

$$\left(\frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n} \right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (1) chính là trường hợp ứng với $s=3, r=1$ của (2).

Để chứng minh (2), ta có thể sử dụng cách chứng minh tương tự như (1).

BÀI 90 Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}.$$

(Jack Garfunkel)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c . Khi đó, ta có hai trường hợp xảy ra.

- **Trường hợp 1.** $a \leq b \leq c$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \right)^2 &\leq (a+b+c) \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right). \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{25}{16}.$$

Bất đẳng thức này đúng do ta có

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} - \frac{3}{2} = \frac{(b-c)(c-a)(b-a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \leq 0.$$

- **Trường hợp 2.** $a \geq b \geq c$. Trong trường hợp này, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}} \leq \frac{b^2}{(b+c)\sqrt{a+b}} + \frac{1}{4} \sqrt{a+b}.$$

Từ đó, bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^2}{(b+c)\sqrt{a+b}} + \frac{1}{4} \sqrt{a+b} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^2}{(b+c)\sqrt{a+b}} &= \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b(b+c) - bc}{(b+c)\sqrt{a+b}} \\ &= \sqrt{a+b} - \frac{bc}{(b+c)\sqrt{a+b}}, \end{aligned}$$

do vậy bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\frac{c}{\sqrt{c+a}} - \frac{bc}{(b+c)\sqrt{a+b}} \leq \frac{5}{4}(\sqrt{a+b+c} - \sqrt{a+b}),$$

hay tương đương

$$\frac{c}{\sqrt{c+a}} - \frac{bc}{(b+c)\sqrt{a+b}} \leq \frac{5c}{4(\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b})}.$$

Mà $c \geq 0$ nên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{b}{(b+c)\sqrt{a+b}} + \frac{5}{4(\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b})},$$

hay là

$$\frac{b\sqrt{a+c}}{(b+c)\sqrt{a+b}} + \frac{5\sqrt{a+c}}{4(\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b})} \geq 1.$$

Do $a \geq b \geq c$ nên ta có các đánh giá

$$\begin{aligned} \frac{b\sqrt{a+c}}{(b+c)\sqrt{a+b}} &= \frac{b}{b+c} \sqrt{1 - \frac{b-c}{a+b}} \geq \frac{b}{b+c} \sqrt{1 - \frac{b-c}{b+b}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{2(b+c)}} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{a+c}}{4(\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a+b})} &\geq \frac{5\sqrt{a+c}}{4\sqrt{2[(a+b+c) + (a+b)]}} \\ &= \frac{5}{8} \sqrt{1 - \frac{2b-c}{2a+2b+c}} \\ &\geq \frac{5}{8} \sqrt{1 - \frac{2b-c}{2b+2b+c}} = \frac{5}{8} \sqrt{\frac{2(b+c)}{4b+c}}. \end{aligned}$$

Và như vậy, bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$\sqrt{\frac{b}{2(b+c)}} + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{2(b+c)}{4b+c}} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{b}{2(b+c)}} + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{2(b+c)}{4b+c}} &\geq 2 \sqrt{\frac{b}{2(b+c)}} \cdot \frac{5}{8} \sqrt{\frac{2(b+c)}{4b+c}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{5}{8} \frac{b}{4b+c}} \geq 2 \sqrt{\frac{5}{8} \frac{b}{4b+b}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1.
 \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3b$ và $c = 0$ (hoặc các hoán vị tương ứng). $\square$

BÀI 91 Cho các số thực t, s, k , trong đó $t \geq 0, s \geq 1$ và $k \geq 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$kt^{s+k} - (s+k)t^k + s \geq (t-1)^2.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$kt^{s+k} + 2t + s - 1 \geq (s+k)t^k + t^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng với chú ý rằng

$$\frac{1}{s+k-1} > 0, \quad \frac{s+k-2}{s+k-1} \geq 0, \quad \frac{1}{s+k-1} + \frac{s+k-2}{s+k-1} = 1,$$

ta được

$$\frac{1}{s+k-1} \cdot t^{s+k} + \frac{s+k-2}{s+k-1} \cdot t \geq (t^{s+k})^{\frac{1}{s+k-1}} \cdot t^{\frac{s+k-2}{s+k-1}} = t^2.$$

Bài toán được suy ra về chứng minh

$$kt^{s+k} + 2t + s - 1 \geq (s+k)t^k + \left(\frac{1}{s+k-1} \cdot t^{s+k} + \frac{s+k-2}{s+k-1} \cdot t \right).$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$\left(k - \frac{1}{s+k-1} \right) t^{s+k} + \left(2 - \frac{s+k-2}{s+k-1} \right) t + s - 1 \geq (s+k)t^k.$$

Tới đây, tiếp tục sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng một lần nữa (lần này chú ý rằng

$$k - \frac{1}{s+k-1} \geq 0, \quad 2 - \frac{s+k-2}{s+k-1} > 0, \quad s-1 \geq 0,$$

$$\left(k - \frac{1}{s+k-1} \right) + \left(2 - \frac{s+k-2}{s+k-1} \right) + (s-1) = s+k,$$

ta được

$$\left(k - \frac{1}{s+k-1}\right) \cdot t^{s+k} + \left(2 - \frac{s+k-2}{s+k-1}\right) \cdot t + (s-1) \cdot 1$$

$$\geq (s+k) \left[(t^{s+k})^{\frac{1}{s+k-1}} \cdot t^{\frac{s+k-2}{s+k-1}} \cdot 1^{s-1} \right]^{\frac{1}{s+k}} = (s+k)t^k.$$

Bài toán được chứng minh xong. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$, hoặc $t = 0$ và $s = 1$, hoặc $s = k = 1$. $\square$

BÀI 92 Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \ln 2.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n+n}\right) > n - \ln 2,$$

tương đương

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} + \dots + \frac{n+(n-1)}{n+n} > n - \ln 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} + \dots + \frac{n+(n-1)}{n+n} > n \sqrt[n]{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \dots \frac{n+(n-1)}{n+n}}$$

$$= n \sqrt[n]{\frac{n}{n+n}} = \frac{n}{2}.$$

Do đó, bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$\frac{n}{2} \geq n - \ln 2 \quad \text{hay là} \quad \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{\ln 2}{n}.$$

Đặt $t = \frac{1}{2}$, $0 < t < 1$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$f(t) = \frac{1}{2^t} + t \ln 2 - 1 \geq 0.$$

Ta có $f'(t) = -\frac{\ln 2}{2^t} + \ln 2 = \frac{(2^t - 1) \ln 2}{2^t} > 0$, suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0, 1)$.

Do đó $f(t) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Nhận xét. ln 2 chính là hằng số tốt nhất để bất đẳng thức

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < k$$

đúng. Bạn đọc hãy thử chứng minh kết quả này.

BÀI 93 Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.
Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a} \geq 3.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $x + y + z \geq \sqrt{3(xy + yz + zx)}$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a} \\ & \geq \sqrt{3 \left(\frac{ab+1}{a+b} \cdot \frac{bc+1}{b+c} + \frac{bc+1}{b+c} \cdot \frac{ca+1}{c+a} + \frac{ca+1}{c+a} \cdot \frac{ab+1}{a+b} \right)}. \end{aligned}$$

Vậy bài toán quy về chứng minh

$$\frac{ab+1}{a+b} \cdot \frac{bc+1}{b+c} + \frac{bc+1}{b+c} \cdot \frac{ca+1}{c+a} + \frac{ca+1}{c+a} \cdot \frac{ab+1}{a+b} \geq 3,$$

hay

$$\frac{\sum (1+ca)(1+ab)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3.$$

Mặt khác lại dễ ý rằng với $ab + bc + ca = 1$ thì

$$\begin{aligned} & \sum (1+ca)(1+ab)(b+c) \\ & = 2(a+b+c) + \sum a(b^2 + c^2) + 6abc + 2abc(ab + bc + ca) \\ & = 2(a+b+c)(ab + bc + ca) + \sum a(b^2 + c^2) + 8abc \\ & = 3(a+b)(b+c)(c+a) + 8abc, \end{aligned}$$

nên từ đó suy ra

$$\frac{\sum (1+ca)(1+ab)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3(a+b)(b+c)(c+a) + 8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

BÀI 94 Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in [0, 1]$, ta có

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

(USAMO 1980)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} &\leq \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+b+1} + \frac{c}{c+b+1} \\ &= \frac{a+b+c}{b+c+1} = 1 - \frac{1-a}{1+b+c}. \end{aligned}$$

Vậy bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$(1-a)(1-b)(1-c) - \frac{1-a}{1+b+c} \leq 0,$$

hay là (chú ý rằng $1-a \geq 0$)

$$(1-b)(1-c)(1+b+c) - 1 \leq 0.$$

Đây là một kết quả đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM bộ ba số,

$$(1-b)(1-c)(1+b+c) \leq \left[\frac{(1-b) + (1-c) + (1+b+c)}{3} \right]^3 = 1.$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Với giả thiết $a \geq b \geq c$, ta có đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$, hoặc khi $a = b = 1, c = 0$, hoặc khi $a = 1$ và $b = c = 0$. $\square$

BÀI 95 Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ và $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$. Chứng minh

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}.$$

(Moldovan TST 2007)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, với mọi $1 \leq i \leq n$, ta có

$$2n+1+S-a_i^3 = \sum_{j \neq i} (a_j^3 + 2) + 3 \geq 3 \sum_{j \neq i} a_j + 3 \geq 3(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{a_i}{2n+1+S-a_i^3} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Đến đây, bằng cách cộng n bất đẳng thức tương tự cho $i = 1, 2, \dots, n$, ta thu được kết quả như trên.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. $\square$

BÀI 96 Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1 + n - 1} + \frac{1}{x_2 + n - 1} + \cdots + \frac{1}{x_n + n - 1} \leq 1.$$

(Romanian TST 1999)

Lời giải

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{x_1 + n - 1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{x_2 + n - 1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{x_n + n - 1} \right) \geq 1 - \frac{n}{n-1},$$

hay là
$$\frac{x_1}{x_1 + n - 1} + \frac{x_2}{x_2 + n - 1} + \cdots + \frac{x_n}{x_n + n - 1} \geq 1.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1 + n - 1} &= \frac{x_1}{x_1 + (n-1)(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{x_1^{\frac{n-1}{n}}}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + (n-1)(x_2 x_3 \cdots x_n)^{\frac{1}{n-1}}} \\ &= \frac{x_1^{\frac{n-1}{n}}}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) \sqrt[n-1]{x_2^{\frac{n-1}{n}} x_3^{\frac{n-1}{n}} \cdots x_n^{\frac{n-1}{n}}}} \\ &\geq \frac{x_1^{\frac{n-1}{n}}}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + \left(x_2^{\frac{n-1}{n}} + x_3^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x_n^{\frac{n-1}{n}} \right)} \\ &= \frac{x_1^{\frac{n-1}{n}}}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_2^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x_n^{\frac{n-1}{n}}}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_2 + n - 1} &\geq \frac{x_2^{\frac{n-1}{n}}}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_2^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x_n^{\frac{n-1}{n}}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{x_n}{x_n + n - 1} &\geq \frac{x_n^{\frac{n-1}{n}}}{x_1^{\frac{n-1}{n}} + x_2^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x_n^{\frac{n-1}{n}}}. \end{aligned}$$

Cộng n bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\frac{x_1}{x_1 + n - 1} + \frac{x_2}{x_2 + n - 1} + \dots + \frac{x_n}{x_n + n - 1} \geq 1.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. □

BÀI 97 Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n x_i^n (1 + x_i) \geq \frac{n}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta dễ dàng chứng minh được

$$a^n + 1 \geq \frac{(a+1)^n}{2^{n-1}} \text{ với mọi } a \geq 0.$$

Từ kết quả này kết hợp với bất đẳng thức AM-GM và giả thiết đề bài, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^n (1 + x_i) &= \sum_{i=1}^n x_i^n + \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} \geq \sum_{i=1}^n x_i^n + n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^{n+1}} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^n + n = \sum_{i=1}^n (x_i^n + 1) \geq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^n (x_i + 1)^n \\ &\geq \frac{n}{2^{n-1}} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (x_i + 1)^n} = \frac{n}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^n (1 + x_i). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. □

BÀI 98 Cho $n \geq 3$ là một số tự nhiên cho trước và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-2+a_1+a_2} + \frac{1}{n-2+a_2+a_3} + \dots + \frac{1}{n-2+a_n+a_1} \leq 1.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Đặt $r = \frac{n-2}{n}$. Nhận xét rằng ta có thể thu được kết quả bài toán bằng cách cộng n bất đẳng thức sau lại với nhau

$$\frac{n-2}{n-2+a_1+a_2} \leq \frac{a_3^r + a_4^r + \dots + a_n^r}{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r},$$

$$\frac{n-2}{n-2+a_2+a_3} \leq \frac{a_1^r + a_4^r + \dots + a_n^r}{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r},$$

.....

$$\frac{n-2}{n-2+a_n+a_1} \leq \frac{a_2^r + a_3^r + \dots + a_{n-1}^r}{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, những bất đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự. Bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$(a_1 + a_2)(a_3^r + a_4^r + \dots + a_n^r) \geq (n-2)(a_1^r + a_2^r).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a_3^r + a_4^r + \dots + a_n^r \geq (n-2)(a_3 a_4 \dots a_n)^{\frac{r}{n-2}} = \frac{n-2}{(a_1 a_2)^{\frac{r}{n-2}}}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$a_1 + a_2 \geq (a_1 a_2)^{\frac{r}{n-2}} (a_1^r + a_2^r),$$

hay tương đương

$$a_1 + a_2 \geq (a_1 a_2)^{\frac{1}{n}} \left(a_1^{\frac{n-2}{n}} + a_2^{\frac{n-2}{n}} \right).$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có thể viết lại nó dưới dạng

$$\left(a_1^{\frac{n-1}{n}} - a_2^{\frac{n-1}{n}} \right) \left(a_1^{\frac{1}{n}} - a_2^{\frac{1}{n}} \right) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. □

BÀI 99 Cho a, b, c và x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4.$$

Chứng minh rằng

$$abcxyz < \frac{1}{36}.$$

(Vasile Cirtoaje, Mircea Lasca)

Lời giải

Sử dụng giả thiết kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned}
& 4(ab + bc + ca)(xy + yz + zx) \\
&= [(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)][(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \\
&= 20 - (a + b + c)^2(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2(a^2 + b^2 + c^2) \\
&\leq 20 - 2(a + b + c)(x + y + z)\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} = 4,
\end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$(ab + bc + ca)(xy + yz + zx) \leq 1.$$

Mặt khác, bằng cách nhân tương ứng hai bất đẳng thức cơ bản

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c), \quad (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z),$$

ta được

$$(ab + bc + ca)^2(xy + yz + zx)^2 \geq 36abcxyz.$$

Kết hợp với trên, ta suy ra

$$1 \geq (ab + bc + ca)^2(xy + yz + zx)^2 \geq 36xyz,$$

hay

$$abcxyz \leq \frac{1}{36}.$$

Để có đẳng thức xảy ra, ta cần có

$$(ab + bc + ca)^2 = 3abc(a + b + c)$$

và

$$(xy + yz + zx)^2 = 3xyz(x + y + z).$$

Nhưng, từ hai phương trình này ta suy ra $a = b = c$ và $x = y = z$, và nó không thỏa mãn giả thiết của bài toán

$$(a + b + c)(x + y + z) = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 4.$$

Do vậy, đẳng thức không thể xảy ra, tức ta phải có

$$abcxyz < \frac{1}{36}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

BÀI 100 Cho a, b, c, d, e là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} - \sqrt[5]{abcde} \geq \frac{1}{20} \cdot \frac{\sum (a - b)^2}{a + b + c + d + e}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Sử dụng tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a + b + c + d + e = 5$.
Đặt $x = \sqrt[5]{abcde}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$100(1-x) \geq \sum (a-b)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum (a-b)^2 &= 2\sum a^2 - 2\sum ab \\ &= 2\left(\sum a^2 + 2\sum ab + 2\sum ac\right) - 6\sum ab - 4\sum ac \\ &= 2\left(\sum a\right)^2 - 6\sum ab - 4\sum ac \\ &\leq 50 - 50\sqrt[5]{a^2b^2c^2d^2e^2} = 50 - 50x^2.\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$100(1-x) \geq 50 - 50x^2.$$

Bất đẳng thức này đúng vì sau khi thu gọn, ta được

$$50(x-1)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e$. □

***"Tell me and I forget.
Teach me and I remember.
Involve me and I learn."***

(Benjamin Franklin)

SẮP THỨ TỰ CÁC BIẾN ĐƠN GIẢN MÀ HIỆU QUẢ

*"The essence of mathematics is not to make simple things complicated,
but to make complicated things simple."*
S. Gudder

Cuộc sống hàng ngày của chúng ta gồm một chuỗi công việc và sự kiện diễn ra liên tục. Chính vì vậy, dựa trên những đánh giá, những so sánh để nhận biết điều gì là quan trọng, điều gì là ưu tiên hàng đầu sẽ giúp tiết kiệm được nhiều thời gian và công sức. Nói cách khác, nếu rèn luyện tốt thói quen tư duy sắp xếp hợp lý thì hiệu quả công việc của chúng ta sẽ tiến đến giá trị tối ưu. Đó chính là nguồn cảm hứng cũng như thông điệp mà hai tác giả muốn gửi tới bạn đọc qua chuyên đề này.

BÀI 1 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2$.
Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \leq 2.$$

Phân tích & định hướng lời giải

Với bài toán "đặc biệt" này, dấu bằng đạt được chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ (hoặc các hoán vị), chứ không phải khi $a = b = c = \frac{2}{3}$. Có khá nhiều ý tưởng "hiện đại" được đưa ra để giải quyết nó. Ví dụ như:

- Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng chuẩn tắc là:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \leq \frac{(a + b + c)^9}{32}.$$

Sau đó sử dụng phép khai triển trực tiếp... Tuy nhiên, công việc này thực sự sẽ làm mất rất nhiều thời gian. Điều đó dẫn người ta đến con đường thứ hai "ngắn gọn" hơn, đó là:

- Giữ nguyên bài toán và sử dụng phương pháp *pqr* (tức đa thức đối xứng). Nhưng quá thực, lời giải này vẫn đòi hỏi không ít bở dẻ, khi trình bày sẽ phải xây dựng lại phương pháp... Đó cũng là lý do vì sao hướng giải quyết sau đây được coi là lời giải "đẹp" nhất cho tới giờ phút này.

Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c . Ta sẽ thống nhất cách viết tắt là $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, dễ dàng nhận thấy

$$b^2 + c^2 \leq \left(b + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Thật vậy, khai triển và rút gọn thì bất đẳng thức này tương đương với $c^2/4 + c(b-c) \geq 0$ (hiển nhiên đúng do $c \geq 0$ và $c \leq b$).

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$c^2 + a^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Mặt khác, lại dễ ý rằng

$$a^2 + b^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Do đó sử dụng ba đánh giá trên, có thể thấy ngay chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 \right] \leq 2.$$

Tới đây, nếu đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}$ thì ta đã quy được bài toán ba biến ban đầu về bài toán hai biến đơn giản hơn rất nhiều, đó là chứng minh

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2 \text{ với } x, y \geq 0 \text{ và } x + y = 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} x^2 y^2 (x^2 + y^2) &= \frac{1}{2} xy \cdot 2xy \cdot (x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2} xy \left[\frac{2xy + (x^2 + y^2)}{2} \right]^2 \\ &= 2xy \leq 2 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = 2. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Về bản chất, ở trên ta đã sử dụng ý tưởng của một trong những phương pháp “hiện đại” hiệu quả nhất, đó chính là phép “dồn biên”, hay còn gọi là “giảm biên”. Ta đã chứng minh

$$f(a, b, c) \leq f\left(a + \frac{c}{2}, b + \frac{c}{2}, 0\right) \leq 2.$$

Còn nhìn về góc độ trình bày “cổ điển” như trên thì điều thú vị ở đây là từ một bài toán có dấu bằng “bất bình thường” ($a = b = 1, c = 0$), ta đã đưa nó trở về một bài toán với dấu bằng “bình thường” (khi $x = y = 1$) để từ đó dễ dàng sử dụng AM-GM giải quyết nốt. Điểm nhấn quan trọng là việc thiết lập ba đánh giá phụ dựa vào giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Nếu độc giả để ý kỹ sẽ thấy điều đáng lưu ý nhất là cả ba đánh giá này đều “bảo toàn” được dấu bằng của bài toán. Sau đây là một số bài toán tương tự.

BÀI 2 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca > 0$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{10}{(a + b + c)^2}.$$

Lời giải

Do tính đối xứng giữa các biến nên ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, thực hiện đánh giá tương tự như bài toán 1, ta cũng có

$$a^2 + c^2 \leq x^2, \quad b^2 + c^2 \leq y^2, \quad a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2c^2 \leq x^2 + y^2$$

với $x = a + \frac{c}{2}$ và $y = b + \frac{c}{2}$. Như vậy, ta chỉ còn phải chứng minh

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq \frac{10}{(x + y)^2}. \quad (1)$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq \frac{10}{(x + y)^2},$$

hay tương đương
$$\frac{3(x^2 + y^2)}{4x^2 y^2} + \left(\frac{x^2 + y^2}{4x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \geq \frac{10}{(x + y)^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{3(x^2 + y^2)}{4x^2 y^2} \geq \frac{3 \cdot 2xy}{4x^2 y^2} = \frac{6}{4xy} \geq \frac{6}{(x + y)^2}$$

và

$$\frac{x^2 + y^2}{4x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq 2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4x^2 y^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}} = \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2}.$$

Cộng hai đánh giá này lại, ta thu được (1). Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ (hoặc các hoán vị). □

BÀI 3 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca > 0$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{11}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{32}{(a + b + c)^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}$, ta dễ thấy

$$a^2 + c^2 \leq x^2, \quad b^2 + c^2 \leq y^2,$$

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + b^2 + 2c^2 \leq x^2 + y^2.$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{11}{x^2 + y^2} \geq \frac{32}{(x + y)^2},$$

hay tương đương

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} + \frac{4}{x^2 + y^2} \right) + \frac{8}{x^2 + y^2} \geq \frac{32}{(x + y)^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} VT &\geq 2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} \cdot \frac{4}{x^2 + y^2}} + \frac{8}{x^2 + y^2} = 4 \left(\frac{1}{xy} + \frac{2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\geq 8 \sqrt{\frac{1}{xy} \cdot \frac{2}{x^2 + y^2}} = \frac{16}{\sqrt{(2xy)(x^2 + y^2)}} \geq \frac{32}{2xy + (x^2 + y^2)} = VP. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ (hoặc các hoán vị). $\square$

BÀI 4 Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng ta luôn có

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{a + b + c} \geq \sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Việc đầu tiên chúng ta cần làm đối với những bài toán chứa căn thức là “phá căn”. Có thể nói, không phá được căn đồng nghĩa với “lời giải hoàn chỉnh sẽ còn ở rất xa”. Lưu ý rằng tuy bất đẳng thức này cũng xảy ra dấu bằng khi $a = b, c = 0$ như các bất đẳng thức ở trên nhưng việc chứng minh

$$f(a, b, c) \leq f\left(a + \frac{c}{2}, b + \frac{c}{2}, 0\right)$$

ở bài toán này là vô cùng phức tạp. Khi các phương pháp mạnh nhất như khai triển, *pqr*, thậm chí dồn biến cũng không giải quyết được thì một lần nữa, ta lại thấy hiệu quả bất ngờ của những ý tưởng đơn giản nhưng đầy tinh tế. Ta cùng đến với lời giải sau.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, ta chứng minh được

$$\sqrt{a} + \frac{\sqrt{c}}{2} \geq \sqrt{a+c}, \quad \sqrt{b} + \frac{\sqrt{c}}{2} \geq \sqrt{b+c}, \quad \sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a+b}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được bài toán tổng quát: Cho các số thực không âm a, b, c và $k \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{c} + \sqrt[k]{a+b+c} \geq \sqrt[k]{a+b} + \sqrt[k]{b+c} + \sqrt[k]{c+a}.$$

Qua các ví dụ trên, độc giả có lẽ đã phần nào thấy được hiệu quả của việc sắp thứ tự các biến. Và chúng tôi tin rằng vẫn còn nhiều bất ngờ thú vị khác đang chờ độc giả trong phần tiếp theo của chuyên đề này.

BÀI 5 Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn

$$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0.$$

Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left| \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right| \geq \frac{9}{2}.$$

(Đào Hải Long)

Phân tích & định hướng lời giải

Một kinh nghiệm mà chúng tôi muốn chia sẻ ở đây, đó là với hầu hết các bất đẳng thức đối xứng ba biến thì đẳng thức chỉ xảy ra khi có ít nhất hai biến bằng nhau hoặc ít nhất một biến bằng 0, tức là khi

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ hoặc } abc = 0.$$

Điều đó cũng dẫn tới phương pháp xác định dấu bằng đơn giản và hiệu quả nhất là cho hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0, đưa về bài toán hai biến đơn giản hơn. Ta sẽ làm mẫu bằng chính bài toán này, rõ ràng điều

kiện để bài tương đương với $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Vì vậy, ta sẽ thử cho một biến bằng 0 để tìm ra dấu đẳng thức. Không mất tính tổng quát, giả sử chọn $b = 0$. Bất đẳng thức đề bài trở thành

$$(a^2 + c^2) \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(a-c)^2} \right] \geq \frac{9}{2},$$

hay tương đương

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 + c^2}{(a-c)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2.$$

Mặt khác, $\frac{a^2 + c^2}{(a-c)^2} - \frac{1}{2} = \frac{(a+c)^2}{2(a-c)^2} \geq 0$, suy ra $\frac{a^2 + c^2}{(a-c)^2} \geq \frac{1}{2}$.

Từ đó, dễ thấy

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 + c^2}{(a-c)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{a^2} \\ a+c=0 \end{cases}$, tức $a = -c$.

Vậy qua bước “nhập” trên, ta đã xác định được dấu bằng của bài toán là khi $a = -c \neq 0, b = 0$. Từ đó dẫn đến lời giải sau.

Để ý rằng

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3} \\ &\geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3}. \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq \frac{27}{2}. \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b > c$. Khi đó, nếu đặt $x = a - b$ và $y = b - c$ thì $c - a = -(x + y)$ và $x, y > 0$. Bất đẳng thức (1) trở thành

$$\left[x^2 + y^2 + (x+y)^2 \right] \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right] \geq \frac{27}{2}. \quad (2)$$

Mặt khác, chính vì dấu đẳng thức xảy ra khi $a = -c \neq 0, b = 0$ nên suy ra trong bất đẳng thức (2), đẳng thức sẽ xảy ra khi $x = y > 0$. Điều này cho phép ta có thể sử dụng một cách “tự nhiên” những bất đẳng thức đơn giản để hoàn tất chứng minh. Thật vậy, (2) có thể viết lại thành

$$(x^2 + xy + y^2) \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right] \geq \frac{27}{4}. \quad (3)$$

Ta lại có

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$$

và

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \geq \frac{8}{(x+y)^2}.$$

Từ đó suy ra

$$(x^2 + xy + y^2) \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right] \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \cdot \frac{9}{(x+y)^2} = \frac{27}{4}.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. $\square$

BÀI 6 Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$.
Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right] \geq 4.$$

(Trần Nam Dũng, VMO 2008)

Phân tích & định hướng lời giải

Do đại lượng $xy + yz + zx$ là “yếu hơn” so với $x^2 + y^2 + z^2$ nên ta có thể dự đoán rằng bài toán này nhiều khả năng sẽ “khó” hơn bài toán trên. Ít nhất là về dấu bằng, lần này không xảy ra khi $x = -y, z = 0$ mà là khi

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}y, \quad z = 0 (!).$$

Ta sẽ đánh giá thế nào để “bảo toàn” được dấu bằng “ki lạ” này. Và phương pháp sắp thứ tự các biến một lần nữa lại phát huy hiệu quả, đem lại lời giải đơn giản đến bất ngờ!

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Để ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} &= \frac{2z^2 + x^2 + y^2 - 2zx - 2zy}{(y-z)^2(z-x)^2} \\ &= \frac{(x-y)^2 + 2(z-x)(z-y)}{(y-z)^2(z-x)^2} \\ &= \frac{(x-y)^2}{(y-z)^2(z-x)^2} + \frac{2}{(z-x)(z-y)}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \\ = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{(y-z)^2(z-x)^2} + \frac{2}{(z-x)(z-y)}.\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{(y-z)^2(z-x)^2} \geq \frac{2}{(z-y)(z-x)}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{(z-x)(z-y)}.$$

Chúng mình sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$(z-x)(z-y) \leq xy + yz + zx.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$z(2x + 2y - z) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng do $z = \min\{x, y, z\}$.

Với giả thiết $z = \min\{x, y, z\}$, ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z = 0 \\ (x-y)^2 = (z-y)(z-x) \end{cases}$$

tức là

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta tìm được $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}y$ và $z = 0$. □

BÀI 7 Chứng minh rằng với mọi số thực không âm x, y, z , ta luôn có

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 4(x + y + z)(x - y)(y - z)(z - x).$$

(Phan Thành Nam)

Phân tích & định hướng lời giải

Ở bài toán này, tạm thời ta chưa cần để ý tới dấu bằng, chỉ cần dự đoán đẳng thức sẽ xảy ra khi một biến bằng 0 là đủ.

Bây giờ, quan sát sơ bộ, nhận xét: biểu thức vế trái có dạng bình phương, còn biểu thức vế phải có sự xuất hiện của con số 4. Một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay tới bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab$.

Tuy nhiên, nếu sử dụng nó thì a, b ở đây sẽ là gì? Câu trả lời là trước tiên, ta phải chọn a, b sao cho chúng là những đại lượng đồng bậc (vì bất đẳng thức đã cho là đồng bậc). Áp dụng cụ thể ở đây, ta nhận thấy a, b phải là những biểu thức bậc hai. Điều đó dẫn đến lời giải sau.

Do vai trò của các biến x, y, z có tính hoán vị vòng quanh nên ta cần xét hai trường hợp là $x \geq y \geq z$ và $x \leq y \leq z$.

Nếu $x \geq y \geq z$ thì $(x - y)(y - z)(z - x) \leq 0$ nên khi đó, bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng. Xét trường hợp còn lại $x \leq y \leq z$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $4ab \leq (a + b)^2$, ta có

$$\begin{aligned} & 4(x + y + z)(x - y)(y - z)(z - x) \\ &= 4(x + y + z)(y - x) \cdot (z - y)(z - x) \\ &\leq [(x + y + z)(y - x) + (z - y)(z - x)]^2. \end{aligned}$$

Từ đó bài toán được quy về chứng minh

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq (x + y + z)(y - x) + (z - y)(z - x).$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$x(2x + 2z - y) \geq 0 \text{ (đúng do } z \geq y \geq x \geq 0 \text{)}.$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Với giả thiết y là số nằm giữa x và z , ta có đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} (x + y + z)(y - x) = (z - y)(z - x) \\ x = 0 \end{cases}, \text{ tức } y = (\sqrt{2} - 1)z, x = 0. \quad \square$$

Nhận xét. Nếu đọc giả để ý thì sẽ thấy điều thú vị là trong hai bài toán vừa rồi, con số 4 xuất hiện một cách “không tình cờ” chút nào, dường như nó đã trở thành “dấu hiệu” mang tính “quy luật” cho một lớp những bài toán tương tự.

BÀI 8 Chứng minh rằng với mọi số thực không âm x, y, z , ta luôn có

$$(x + 2y + z)(x + y + z)^2 \geq 4(x + y)(y + z)(z + x).$$

Phân tích & định hướng lời giải

Nếu trước đó là những bài toán đối xứng, hoán vị với cả ba biến x, y, z thì giờ đây, ta bắt gặp một bài toán chỉ đối xứng với hai biến là x và z .

Dùng phương pháp dự đoán quen thuộc (đã trình bày ở bài 5), nhận thấy dấu bằng xảy ra khi $y = 0, x = z$. Ý tưởng đầu tiên của ta có lẽ là sử dụng đánh giá đơn giản $y \geq 0$ để đưa về chứng minh bất đẳng thức đối xứng

$$(x + y + z)^3 \geq 4(x + y)(y + z)(z + x).$$

Nhưng thật đáng tiếc vì đánh giá này đem lại cho ta một bất đẳng thức sai (chẳng hạn chỉ cần cho $a = b = c = 1$, ta thấy ngay $VT = 27 < VP = 32$).

Sau đây là lời giải đúng.

Do vai trò của x và z trong bất đẳng thức trên là như nhau nên ta hoàn toàn có thể giả sử $x \geq z$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z).$$

Sử dụng đánh giá này, dễ thấy chúng mình sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$x(x + 2y + z) \geq (x + y)(z + x).$$

Bất đẳng thức này tương đương với $y(x - z) \geq 0$ (đúng do $x \geq z$).

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = z = \frac{1}{2}$ và $y = 0$. □

Nhận xét. Khi đọc lời giải bài toán này, học sinh thường hỏi chúng tôi vì sao lại sử dụng bất đẳng thức $(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z)$ mà không phải là $(x + y + z)^2 \geq 4y(z + x)$ hay $(x + y + z)^2 \geq 4z(x + y)$. Câu trả lời thực ra rất đơn giản. Nếu đánh giá $(x + y + z)^2 \geq 4y(z + x)$ thì dấu đẳng thức sẽ không được bảo toàn. Nên nhớ dấu bằng xảy ra khi $x = z = \frac{1}{2}, y = 0$.

Mặt khác, với giả sử $x \geq z$ thì hiển nhiên là $x(y + z) \geq z(x + y)$ nên đánh giá $(x + y + z)^2 \geq 4x(y + z)$ khi đó sẽ “chặt” hơn và hiệu quả đem lại chắc chắn sẽ tốt hơn.

Tất nhiên, do vai trò của x và z là như nhau nên nếu ta giả sử ngược lại là $z \geq x$ thì khi đó sẽ phải sử dụng đánh giá $(x + y + z)^2 \geq 4z(x + y)$.

BÀI 9 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 4$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$ab - bc + ca \leq 2.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Hiển nhiên là do $bc \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $a(b + c) \leq 8$ là đủ.

Mặt khác, lại dễ ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, thì

$$\begin{aligned} a(b+c) &\leq a\left(b + \frac{3c}{2}\right) = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(b + \frac{3c}{2}\right) \leq 2 \cdot \frac{\left[\frac{a}{2} + \left(b + \frac{3c}{2}\right)\right]^2}{4} \\ &= \frac{(a+2b+3c)^2}{8} = 2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ bc=0 \\ ca=0 \\ \frac{a}{2}=b+\frac{3c}{2} \end{cases}, \text{ tức } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}. \quad \square$$

BÀI 10 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Những bài toán hoán vị thường gây cho chúng ta nhiều khó khăn khi tiếp cận hơn là những bài toán đối xứng. Chính vì vậy, việc sử dụng đánh giá phụ để quy về dạng đối xứng là một trong những cách làm phổ biến để giải quyết nhiều lớp bài toán hoán vị.

Để ý rằng, nếu coi $P = (a-b)(b-c)(c-a)$ thì

$$P \leq |P| = \sqrt{P^2}.$$

Tức là chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng $P^2 \leq \frac{27}{4}$, hay

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \leq \frac{27}{4}.$$

Rõ ràng, việc sử dụng đánh giá hiển nhiên trên đã giúp ta quy được bất đẳng thức hoàn vị đã cho về dạng đối xứng đơn giản hơn.

Và điều thú vị ở đây là với một bất đẳng thức đối xứng, ta hoàn toàn có thể giả sử $a \geq b \geq c$ (không mất tính tổng quát). Khi đó, dễ thấy

$$(b-c)^2 \leq b^2 \text{ và } (c-a)^2 \leq a^2.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 b^2 (a-b)^2 \leq \frac{27}{4},$$

hay tương đương

$$4a^3 b^2 (a-b)^2 \leq 27.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số dạng $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$, ta có

$$\begin{aligned} 4a^3 b^2 (a-b)^2 &= (2ab)(2ab)(a^2 - 2ab + b^2) \leq \left[\frac{2(2ab) + (a^2 - 2ab + b^2)}{3} \right]^3 \\ &= \left[\frac{a^2 + 2ab + b^2}{3} \right]^3 = \frac{(a+b)^6}{3^3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, lại thấy ngay $a+b \leq a+b+c=3$ nên từ đó, ta suy ra điều phải chứng minh. Bài toán được giải quyết xong.

Với giả thiết $a \geq b \geq c$, dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^2-2ab+b^2=2ab \Leftrightarrow (a,b,c) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}, 0 \right). \end{cases} \quad \square$$

BÀI 11 Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq 12.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Dễ thấy

$$b^2 - bc + c^2 \leq b^2, \quad c^2 - ca + a^2 \leq a^2.$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2b^2(a^2 - ab + b^2) \leq 12.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned} a^2b^2(a^2 - ab + b^2) &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3ab}{2} \cdot \frac{3ab}{2} \cdot (a^2 - ab + b^2) \\ &\leq \frac{4}{9} \left[\frac{\frac{3ab}{2} + \frac{3ab}{2} + (a^2 - ab + b^2)}{3} \right]^3 = \frac{4(a+b)^6}{3^5} \\ &\leq \frac{4(a+b+c)^6}{3^5} = 12. \end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ hoặc các hoán vị. $\square$

BÀI 12 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.
Chứng minh rằng

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \leq \frac{729\sqrt{3}}{8}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Sử dụng kết quả của bài 10, ta có

$$(a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{243}{4},$$

hay

$$(a^3 + b^3 + c^3) \cdot 3(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{729}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, ta có

$$\begin{aligned} &(a^3 + b^3 + c^3) \cdot 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\leq \frac{[a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)]^2}{4} = \frac{(a+b+c)^6}{4} = \frac{729}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ hoặc các hoán vị tương ứng. $\square$

BÀI 13 Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có

$$(a + b + c)^5 \geq 25\sqrt{5}(ab + bc + ca)(a - b)(b - c)(c - a).$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Tương tự như bước đầu của bài 10, ta sẽ quy bài toán này về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a + b + c)^{10} \geq 5^5(ab + bc + ca)^2(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó, dễ thấy

$$(b - c)^2 \leq b^2 \text{ và } (a - c)^2 \leq a^2.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^2b^2(a - b)^2(ab + bc + ca)^2 \leq \frac{(a + b + c)^{10}}{5^5}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ 5 số, ta có

$$\begin{aligned} a^2b^2(a - b)^2(ab + bc + ca)^2 &= (ab)(ab)(a - b)^2(ab + bc + ca)(ab + bc + ca) \\ &\leq \frac{[2(ab) + (a - b)^2 + 2(ab + bc + ca)]^5}{5^5}. \end{aligned}$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$$2ab + (a - b)^2 + 2(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2.$$

Đây là một kết quả đúng, vì ta có

$$\begin{aligned} 2ab + (a - b)^2 + 2(ab + bc + ca) &= a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = (2 - \sqrt{3})b$ và $c = 0$, hoặc các hoán vị tương ứng. $\square$

BÀI 14 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{5}$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \leq \sqrt{5}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 \leq 5,$$

hay

$$(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 \leq 5.$$

Sử dụng đánh giá hiển nhiên

$$\begin{aligned}(a + b)(b + c)(c + a) &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\ &\leq (a + b + c)(ab + bc + ca) = \sqrt{5}(ab + bc + ca),\end{aligned}$$

ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2(ab + bc + ca)^2 \leq 1 = \frac{(a + b + c)^{10}}{5^5}.$$

Đây chính là bất đẳng thức ở bài 13. Chứng minh hoàn tất.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = (2 - \sqrt{3})b$ và $c = 0$ hoặc các hoán

vị tương ứng. □

Nhận xét. Ta thường sử dụng những đánh giá thích hợp để quy một bài toán dạng hoán vị về dạng đối xứng. Tuy nhiên, điều này không phải luôn đúng. Có những bài toán khó đã được giải quyết theo lối “tư duy ngược lại”. Sau đây là một minh họa đặc sắc cho ý tưởng độc đáo này.

BÀI 15 Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có

$$\frac{3}{2}(a + b + c) \geq \sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức chặt và khó đã từng được giới thiệu trong nhiều sách tham khảo hiện đại nhưng tất nhiên, kèm theo nó là những chứng minh mang nặng chất “tính toán”, “máy móc”. Sau đây là lời giải của chúng tôi.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}2\sqrt{a^2 + bc} &\leq c + a + \frac{a^2 + bc}{c + a}, \\2\sqrt{b^2 + ca} &\leq b + c + \frac{b^2 + ca}{b + c}, \\2\sqrt{c^2 + ab} &\leq b + c + \frac{c^2 + ab}{b + c}.\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\begin{aligned}&2\left(\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab}\right) \\&\leq a + 2b + 3c + \frac{a^2 + bc}{a + c} + \frac{b^2 + ca + c^2 + ab}{b + c} \\&= 2a + 2b + 3c + \frac{a^2 + bc}{a + c} + \frac{b^2 + c^2}{b + c}.\end{aligned}$$

Từ đó bài toán được đưa về chứng minh

$$3(a + b + c) \geq 2a + 2b + 3c + \frac{a^2 + bc}{a + c} + \frac{b^2 + c^2}{b + c},$$

hay tương đương $a + b \geq \frac{a^2 + bc}{a + c} + \frac{b^2 + c^2}{b + c}$.

Do $a \geq b \geq c$ nên ta có

$$\frac{a^2 + bc}{a + c} \leq \frac{a^2 + ac}{a + c} = a \text{ và } \frac{b^2 + c^2}{b + c} \leq \frac{b^2 + bc}{b + c} = b.$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Với giả thiết $a \geq b \geq c$, ta có đẳng thức xảy ra khi $a = b, c = 0$. □

BÀI 16 Cho ba số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + x + y + z \geq 2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Phân tích & định hướng lời giải

Nhìn vào vế trái của bất đẳng thức đề bài, một cách tự nhiên, để phá bỏ lờn căn thức “khó chịu” ta nghĩ tới việc sử dụng AM-GM dạng

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

Liệu $a = x^2 + y^2 + z^2, b = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ có được không?

Như đã đề cập ở bài toán 7, với một bất đẳng thức đồng bậc thì khi áp dụng AM-GM, hai “đại lượng” a và b cũng phải đồng bậc. Trong khi nếu chọn như trên thì a là biểu thức bậc hai, b là biểu thức bậc không $\Rightarrow$ chưa hợp lý. Vì vậy trong bài toán này, trước tiên ta nghĩ tới việc thêm bớt $x + y + z$ (là biểu thức bậc một) như sau

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{9(x^2 + y^2 + z^2)}{x + y + z} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)(x + y + z)} \\ &\leq \frac{1}{3} \left[\frac{9(x^2 + y^2 + z^2)}{x + y + z} + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)(x + y + z) \right]. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, tới đây thì bất đẳng thức cuối ta thu được lại không còn đúng nữa (độc giả có thể tự kiểm chứng). Mặt khác, rõ ràng nếu không loại bỏ được lờp căn thức, ta không có cách nào khai thông sự “bế tắc”.

Câu hỏi đặt ra là ta sẽ vượt qua rào cản đó như thế nào? Cùng một vấn đề, cùng một công cụ nhưng cách giải quyết sau lại thể hiện một tư duy hoàn toàn mới, một tầm nhìn sáng tạo để từ đó dẫn tới hiệu quả đột phá.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử y nằm giữa x và z . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $2\sqrt{ab} \leq a + b$, ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)} &= 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} \cdot y\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)} \\ &\leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} + y\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right). \end{aligned}$$

Vậy chúng mình sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + x + y + z \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} + y\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$\frac{z^2}{x} + z \geq \frac{z^2}{y} + \frac{yz}{x} \Leftrightarrow \frac{z(x-y)(y-z)}{xy} \geq 0,$$

hiển nhiên đúng theo giả sử y là số nằm giữa x và z .

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z > 0$. □

BÀI 17 Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có

$$(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2 \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)(a + b + c).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử b là số nằm giữa a và c . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $4xy \leq (x + y)^2$, ta có

$$\begin{aligned} 4(a^2b + b^2c + c^2a)(a + b + c) &= 4 \cdot \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b} \cdot b(a + b + c) \\ &\leq \left[\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b} + b(a + b + c) \right]^2. \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b} + b(a + b + c).$$

Đề ý rằng $\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b} = a^2 + bc + \frac{c^2a}{b}$, do đó ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{b} - b(a + b + c) &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - \left(a^2 + bc + \frac{c^2a}{b} \right) - (ab + b^2 + bc) \\ &= c^2 + ca - \frac{c^2a}{b} - bc = \frac{c(a-b)(b-c)}{b} \geq 0, \end{aligned}$$

(do với giả thiết b nằm giữa a, c thì $(a-b)(b-c) \geq 0$).

Chứng minh hoàn tất.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI 18 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a^2b + b^2c + c^2a)^2 \geq abc(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là số nằm giữa b và c . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$, ta có

$$abc(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \leq \frac{[bc(a + b + c) + a(a^2 + b^2 + c^2)]^2}{4}.$$

Do đó chúng mình sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) \geq bc(a + b + c) + a(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2(a^2b + b^2c + c^2a) - bc(a + b + c) - a(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2(a^2b + b^2c + c^2a) - (abc + b^2c + bc^2) - (a^3 + ab^2 + c^2a) \\ &= 2a^2b + b^2c + c^2a - abc - bc^2 - a^3 - ab^2 \\ &= (a^2b + ca^2 - abc - a^3) + (a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2) \\ &= -a(a - b)(a - c) + (a - b)(a - c)(b - c) \\ &= -(c + a - b)(a - b)(a - c). \end{aligned}$$

Do a nằm giữa b, c nên $(a - b)(a - c) \leq 0$. Lại có $c + a - b > 0$ do a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Suy ra

$$-(c + a - b)(a - b)(a - c) \geq 0.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Nhận xét. Phương pháp sắp thứ tự các biến không chỉ phát huy hiệu quả cho những bất đẳng thức một dấu bằng (tại tâm hoặc tại biên) mà nó còn giúp giải quyết không ít những bài toán hoán vị "chật" và "khô" với hai dấu bằng. Hãy đến với những ví dụ sau để hiểu rõ hơn điều chúng tôi muốn đề cập.

BÀI 19 Cho các số không âm a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4.$$

(Vasile Cîrtoaje)

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức rất nổi tiếng với dấu bằng xảy ra không chỉ khi $a = b = c = 1$ mà còn xảy ra khi $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ và các hoán vị. Độc giả hãy chú ý tới những đánh giá khéo léo sau và tự tìm ra nguyên nhân vì sao dấu bằng của bài toán vẫn được "bảo toàn" trọn vẹn.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử b là số nằm giữa a và c . Ta sẽ chứng minh

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq b(c + a)^2.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$c(a - b)(b - c) \geq 0 \text{ (đúng theo giả sử).}$$

Vậy ta cần chỉ ra được

$$b(c + a)^2 \leq 4.$$

Và quả thật, điều này là hiển nhiên vì sử dụng bất đẳng thức AM-GM bộ ba số, ta có

$$\begin{aligned} b(c+a)^2 &= 4 \cdot b \cdot \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \leq 4 \left(\frac{b + \frac{c+a}{2} + \frac{c+a}{2}}{3} \right)^3 \\ &= \frac{4}{27} (a+b+c)^3 = 4. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Mấu chốt của lời giải này đó là bằng cách sử dụng đánh giá

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq b(c+a)^2,$$

ta đã quy được bài toán ba biến về bài toán một biến là b (vì $c+a$ hoàn toàn có thể coi là $3-b$) để giải quyết. Độc giả sẽ thấy rõ sự hiệu quả này hơn nữa qua ví dụ tiếp theo.

BÀI 20 Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leq 9.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c . Tương tự như bài 19, ta có đánh giá

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq b(c+a)^2 - abc = b(c^2 + ca + a^2).$$

Từ đó suy ra

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leq b(c^2 + ca + a^2)(ab + bc + ca).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\begin{aligned} (c^2 + ca + a^2)(ab + bc + ca) &\leq \left[\frac{(c^2 + ca + a^2) + (ab + bc + ca)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{(c+a)^2(a+b+c)^2}{4} = \frac{9}{4}(c+a)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do vậy } (a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leq \frac{9}{4}b(a+c)^2.$$

Bài toán được quy về chứng minh: $b(a+c)^2 \leq 4$.

Bất đẳng thức này đã được chứng minh ở bài 19.

Phép chứng minh hoàn tất.

Chú ý rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

BÀI 21 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{4abc}{a^2b + b^2c + c^2a + abc} \geq 2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số nằm giữa a và c . Một lần nữa, sử dụng đánh giá

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq b(c + a)^2,$$

ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{4ca}{(c + a)^2} \geq 2.$$

Do $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} - 2$ nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} \geq 4 - \frac{4ac}{(a + c)^2} = \frac{4(a^2 + ac + c^2)}{(a + c)^2},$$

hay tương đương

$$4(a^2 + ac + c^2)(ab + bc + ca) \leq (a + c)^2(a + b + c)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $4ab \leq (a + b)^2$, ta có

$$\begin{aligned} 4(a^2 + ac + c^2)(ab + bc + ca) &\leq [(a^2 + ac + c^2) + (ab + bc + ca)]^2 \\ &= [(a + c)^2 + b(a + c)]^2 \\ &= (a + c)^2(a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = b, c = 0$ (và các hoán vị tương ứng). □

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 27(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2.$$

2. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c bất kì, ta luôn có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 2(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2.$$

3. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 2. Chứng minh rằng

$$a^3(b^2 + c^2) + b^3(c^2 + a^2) + c^3(a^2 + b^2) \leq 2.$$

4. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca)^2 \left[\frac{1}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4} \right] \geq \frac{33}{16}.$$

5. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c

$$(a + b + c)^5 \geq k(a^2 + b^2 + c^2)(a - b)(b - c)(c - a).$$

6. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có

$$(a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

7. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh

$$\frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + \frac{abc}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 1.$$

8. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 4$. Chứng minh

$$(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab) \leq 32.$$

9. Cho $a, b, c \geq 0$ là các số thực không âm thỏa mãn

$$a + b + c = 3 \text{ và } ab + bc + ca > 0.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{b+c}} + \frac{bc}{\sqrt{c+a}} + \frac{ca}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}.$$

10. Cho các số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2}{abcd} \geq 64.$$

11. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$(a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab) - abc \leq \frac{108}{3125}.$$

12. Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + 1)(xy^3 + yz^3 + zx^3 + xyz) \leq (x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz)^2.$$

13. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3.$$

NHỮNG BÀI TOÁN LÍ THÚ XOAY QUANH MỘT ĐẠI LƯỢNG HOÁN VỊ

Thế giới chúng ta đang sống luôn tiềm ẩn vô vàn những quy luật tự nhiên và xã hội, khách quan cũng như chủ quan. Việc nắm bắt, vận dụng những quy luật đó đã trở thành chìa khóa giải quyết nhiều vấn đề quan trọng trong khoa học nói riêng và trong cuộc sống nói chung.

Ở lĩnh vực bất đẳng thức sơ cấp, chúng tôi đã tìm ra không ít kết quả mang tính hệ thống, từ đó chứng minh thành công sự liên quan giữa nhiều lớp bài toán. Sau đây, nhóm tác giả xin được giới thiệu tới bạn đọc một chuyên đề gồm những kết quả độc đáo với sự xuất hiện dường như “tình cờ” của một đại lượng hoán vị “kì lạ”.

BÀI 1 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + ab + bc}} + \sqrt{\frac{b^2 + 2c^2}{b^2 + bc + ca}} + \sqrt{\frac{c^2 + 2a^2}{c^2 + ca + ab}} \geq 3.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Một cách tự nhiên, điều đầu tiên ta nghĩ tới đó là phá bỏ lớp căn thức bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ ba số. Thật vậy, dễ thấy

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + ab + bc}} + \sqrt{\frac{b^2 + 2c^2}{b^2 + bc + ca}} + \sqrt{\frac{c^2 + 2a^2}{c^2 + ca + ab}} \\ & \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + ab + bc}} \sqrt{\frac{b^2 + 2c^2}{b^2 + bc + ca}} \sqrt{\frac{c^2 + 2a^2}{c^2 + ca + ab}}} \end{aligned}$$

Vậy ta sẽ quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a^2 + 2b^2)(b^2 + 2c^2)(c^2 + 2a^2)$$

$$\geq (a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab).$$

Tới đây, ta thu được một bài toán có dạng “ghép đối xứng” quen thuộc. Lại để ý rằng, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$(a^2 + 2b^2)(b^2 + 2c^2) = (b^2 + b^2 + a^2)(b^2 + c^2 + c^2) \geq (b^2 + bc + ca)^2,$$

suy ra
$$(a^2 + 2b^2)(b^2 + 2c^2) \geq (b^2 + bc + ca)^2.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$(b^2 + 2c^2)(c^2 + 2a^2) \geq (c^2 + ca + ab)^2$$

và

$$(c^2 + 2a^2)(a^2 + 2b^2) \geq (a^2 + ab + bc)^2.$$

Nhân ba bất đẳng thức vừa thiết lập lại theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta thu được ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 2 Cho các số thực dương a, b, c bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a(a^2 + ab + bc)}}{a + b} + \frac{\sqrt{b(b^2 + bc + ca)}}{b + c} + \frac{\sqrt{c(c^2 + ca + ab)}}{c + a} \leq \frac{3}{2} \sqrt{a + b + c}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Đây là một bất đẳng thức đồng bậc, cả hai vế của nó đều chứa căn. Ta sẽ ưu tiên tìm cách “khử căn” ở biểu thức của vế phức tạp hơn, trong bài toán này là vế trái. Một cách tự nhiên, ta nghĩ tới việc sử dụng AM-GM dạng

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Điều này dường như rất phù hợp với ý tưởng phá căn cũng như sự xuất hiện “tinh cờ” của con số 2 ở vế phải bài toán.

Nhưng trong dấu căn là một biểu thức bậc 3, ta không thể chọn đơn giản $x = a, y = a^2 + ab + bc$ vì lí do sau: Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Nếu sử dụng bất đẳng thức AM-GM như trên thì dấu đẳng thức sẽ phải xảy ra khi $x = y$, tức $a = a^2 + ab + bc$.

Khi đó, cho $a = b = c = 1$ chẳng hạn, ta thấy ngay $a \neq a^2 + ab + bc$, tức là dấu bằng của bài toán sẽ không được “bảo toàn”. Đó cũng chính là lí do vì sao với những bất đẳng thức đồng bậc, các đại lượng trong đánh giá của chúng ta luôn luôn phải đảm bảo điều kiện đồng bậc. Ta sẽ làm như sau.

Bước đầu tiên là nhân thêm $\sqrt{a + b + c}$ vào cả hai vế, thu được

$$\frac{\sqrt{a(a + b + c)(a^2 + ab + bc)}}{a + b} + \frac{\sqrt{b(a + b + c)(b^2 + bc + ca)}}{b + c} + \frac{\sqrt{c(a + b + c)(c^2 + ca + ab)}}{c + a} \leq \frac{3}{2}(a + b + c).$$

Tới đây, nhận thấy về phải đã mất căn, còn biểu thức trong căn của về trái có bậc chẵn (chính xác là bậc 4), điều này cho phép ta sử dụng được bất đẳng thức AM-GM một cách hợp lý như sau

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a(a+b+c)(a^2+ab+bc)}}{a+b} &\leq \frac{a(a+b+c) + (a^2+ab+bc)}{2(a+b)} \\ &= \frac{(2a+c)(a+b)}{2(a+b)} = \frac{2a+c}{2}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum \frac{\sqrt{a(a+b+c)(a^2+ab+bc)}}{a+b} &\leq \frac{2a+c}{2} + \frac{2b+a}{2} + \frac{2c+b}{2} \\ &= \frac{3}{2}(a+b+c).\end{aligned}$$

Từ đó có điều phải chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. $\square$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

BÀI 3 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}1 + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab + bc + ca)(a + b + c)} \\ \geq \frac{\sqrt[4]{(a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab)}}{(a + b + c)^2}.\end{aligned}$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Ở bài toán này, mọi việc tưởng chừng như đơn giản hơn. Biểu thức căn bậc ba ở về phải là tích của ba đại lượng đồng bậc. Vậy ta nghĩ ngay tới việc áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ ba số,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab)} \\ \leq \frac{(a^2 + ab + bc) + (b^2 + bc + ca) + (c^2 + ca + ab)}{3} = \frac{(a + b + c)^2}{3}.\end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh: $1 + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab + bc + ca)(a + b + c)} \geq \frac{4}{3}$.

Nhưng nếu bạn đọc đề ý thì thử cho $c \rightarrow 0$, bất đẳng thức trên sẽ trở thành $1 + \frac{ab^2}{ab(a+b)} \geq \frac{4}{3}$, hay $\frac{ab(2b-a)}{3ab(a+b)} \geq 0$, sai khi ta chọn $0 < 2b < a$.

Như vậy, hướng suy nghĩ “thông thường” này đã không đem lại cho ta kết quả mong muốn. Điều này đồng nghĩa với việc ta cần tìm ra một hướng đi mới để giải quyết vấn đề. Hãy xét lời giải sau.

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{1}{4} \left[(a+b+c)^2 + \frac{(a+b+c)(ab^2+bc^2+ca^2)}{ab+bc+ca} \right] \geq \sqrt[3]{(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)}.$$

Trước hết, để ý tới hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 + \frac{(a+b+c)(ab^2+bc^2+ca^2)}{ab+bc+ca} \\ = \frac{\sum (a^2+ab+bc)(c+a)(c+b)}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Mặt khác, lại theo bất đẳng thức AM-GM bộ ba số thì

$$\begin{aligned} \sum (a^2+ab+bc)(c+a)(c+b) \\ \geq 3\sqrt[3]{(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}. \end{aligned}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}}{ab+bc+ca} \geq \frac{4}{3},$$

$$\text{hay } (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq \frac{64}{27}(ab+bc+ca)^3.$$

Điều này là hiển nhiên vì theo hai kết quả quen thuộc là

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\text{và } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

thì ta có

$$\begin{aligned} (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 &\geq \frac{64}{81}(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \\ &\geq \frac{64}{81} \cdot 3(ab+bc+ca) \cdot (ab+bc+ca)^2 \\ &= \frac{64}{27}(ab+bc+ca)^3. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$. □

Nhận xét. Bài toán này có một điều đặc biệt, đó là lời giải không bắt nguồn từ vẻ phức tạp mà từ sự biến đổi của vẻ đơn giản hơn. Nói cách khác, ta đã tự phá vỡ "rào cản" của lối tư duy bình thường, thậm chí là "dám" đi ngược lại nó để tìm ra con đường thành công.

BÀI 4 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Để dàng nhận thấy theo bất đẳng thức AM-GM, hiển nhiên có

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1,$$

nên để thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$\frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab} \leq 1.$$

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt, ta có thể viết lại bất đẳng thức trên trở thành

$$\left(\frac{bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{ab}{c^2 + ca + ab} \right) + \left(\frac{a^2}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ca + ab} \right) \geq 2.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{ab}{c^2 + ca + ab} \\ & \geq \frac{(bc + ca + ab)^2}{bc(a^2 + ab + bc) + ca(b^2 + bc + ca) + ab(c^2 + ca + ab)} \\ & = \frac{(bc + ca + ab)^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 + 2abc(a + b + c)} = 1 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ca + ab} \\ & \geq \frac{(a + b + c)^2}{(a^2 + ab + bc) + (b^2 + bc + ca) + (c^2 + ca + ab)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI 5 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{ab}{a^2+bc+b^2} + \frac{bc}{b^2+ca+c^2} + \frac{ca}{c^2+ab+a^2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Ở bài toán này, không thể sử dụng phương pháp thêm bớt như trên. Vì những ý tưởng thông thường không gợi cho ta bất cứ giải pháp nào khả thi.

Chúng tôi xin chia sẻ với bạn đọc một kinh nghiệm, đó là khi cảm thấy những con đường mình lựa chọn dường như đã trở thành những "lối mòn tư duy", không mang lại một dấu hiệu khả quan nào thì đừng do dự, hãy mạnh dạn sử dụng sự sáng tạo để tìm ra con đường mới phù hợp cho chính mình.

Trong trường hợp cụ thể này, chúng ta cần xem xét tới những yếu tố "ngoại cảnh" có thể thêm vào.

Để ý rằng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{ab}{a^2+bc+b^2} = \frac{ab(c^2+bc+a^2)}{(a^2+bc+b^2)(c^2+bc+a^2)} \leq \frac{ab(c^2+bc+a^2)}{(ac+bc+ab)^2}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{bc}{b^2+ca+c^2} = \frac{bc(a^2+ca+b^2)}{(b^2+ca+c^2)(a^2+ca+b^2)} \leq \frac{bc(a^2+ca+b^2)}{(ab+ca+bc)^2},$$

$$\frac{ca}{c^2+ab+a^2} = \frac{ca(b^2+ab+c^2)}{(c^2+ab+a^2)(b^2+ab+c^2)} \leq \frac{ca(b^2+ab+c^2)}{(bc+ab+ca)^2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{a^2+bc+b^2} + \frac{bc}{b^2+ca+c^2} + \frac{ca}{c^2+ab+a^2} \\ & \leq \frac{ab(c^2+bc+a^2) + bc(a^2+ca+b^2) + ca(b^2+ab+c^2)}{(ab+bc+ca)^2} \\ & = \frac{(a^3b+b^3c+c^3a) + 2abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2}. \end{aligned}$$

Vậy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a^3b + b^3c + c^3a) + 2abc(a + b + c)}{(ab + bc + ca)^2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca},$$

tương đương với

$$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + 2abc(a + b + c).$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq abc(a + b + c),$$

hay là

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Bài toán được giải quyết xong.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Nhận xét. Sau đây, ta sẽ đến với hai thử thách “cùng dạng” nhưng khó hơn (vì nếu dùng cách giải trên sẽ bị ngược dấu ngay).

BÀI 6 Nếu a, b, c là các số thực dương, thì

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{ab}{b^2 + bc + c^2} + \frac{bc}{c^2 + ca + a^2} + \frac{ca}{a^2 + ab + b^2}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Để ý rằng

$$\frac{a^2}{ab + bc + ca} - \frac{ab}{b^2 + bc + c^2} = \frac{ca(ca - b^2)}{(b^2 + bc + c^2)(ab + bc + ca)}.$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ca(ca - b^2)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{ab(ab - c^2)}{c^2 + ca + a^2} + \frac{bc(bc - a^2)}{a^2 + ab + b^2} \geq 0.$$

Lại có

$$\frac{ca(ca - b^2)}{b^2 + bc + c^2} = \frac{c^2a(a + b + c)}{b^2 + bc + c^2} - ca,$$

nên ta có thể viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng

$$\frac{c^2a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a^2b}{c^2 + ca + a^2} + \frac{b^2c}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{c^2a}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^2b}{c^2+ca+a^2} + \frac{b^2c}{a^2+ab+b^2} \\ & \geq \frac{(ca+ab+bc)^2}{a(b^2+bc+c^2) + b(c^2+ca+a^2) + c(a^2+ab+b^2)} \\ & = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

BÀI 7 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a^3}{a^2+ab+bc} + \frac{b^3}{b^2+bc+ca} + \frac{c^3}{c^2+ca+ab}.$$

Lời giải

Để ý rằng

$$2(a^2+ab+bc) = (a^2+2bc) + (a^2+2ab),$$

nên sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$, ta có

$$\frac{a^2}{a^2+ab+bc} = \frac{2a^2}{(a^2+2bc) + (a^2+2ab)} \leq 2a^2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{a^2+2ab} \right),$$

hay

$$\frac{a^2}{a^2+ab+bc} \leq \frac{a^2}{2(a^2+2bc)} + \frac{a}{2(a+2b)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^2}{b^2+bc+ca} \leq \frac{b^2}{2(b^2+2ca)} + \frac{b}{2(b+2c)}$$

và

$$\frac{c^2}{c^2+ca+ab} \leq \frac{c^2}{2(c^2+2ab)} + \frac{c}{2(c+2a)}.$$

Từ đó, bài toán quy về chứng minh

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \right) + \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \right) \\ & \leq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này chính là tổng của hai bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, \quad (1)$$

$$\frac{a}{a + 2b} + \frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2a} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}. \quad (2)$$

Chứng minh (1).

Do $\frac{a^2}{ab + bc + ca} - \frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2(a - b)(a - c)}{(ab + bc + ca)(a^2 + 2bc)}$ nên bất đẳng

thức (1) có thể được viết lại thành

$$\frac{a^2(a - b)(a - c)}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2(b - c)(b - a)}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2(c - a)(c - b)}{c^2 + 2ab} \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó dễ thấy

$$\frac{c^2(c - a)(c - b)}{c^2 + 2ab} \geq 0,$$

do vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{a^2(a - b)(a - c)}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2(b - c)(b - a)}{b^2 + 2ca} \geq 0$,

hay

$$(a - b) \left[\frac{a^2(a - c)}{a^2 + 2bc} - \frac{b^2(b - c)}{b^2 + 2ca} \right] \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có $a - b \geq 0$ và

$$\frac{a^2(a - c)}{a^2 + 2bc} - \frac{b^2(b - c)}{b^2 + 2ca} \geq \frac{a^2(a - c)}{a^2 + 2bc} - \frac{b^2(a - c)}{b^2 + 2ca} = \frac{2c(a^3 - b^3)(a - c)}{(a^2 + 2bc)(b^2 + 2ca)} \geq 0.$$

Chứng minh (2).

Ta có $\frac{a}{a + 2b} = 1 - \frac{2b}{a + 2b}$, do vậy bất đẳng thức (2) có thể viết lại thành

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2 \left(\frac{b}{a + 2b} + \frac{c}{b + 2c} + \frac{a}{c + 2a} \right) \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, dễ thấy

$$\begin{aligned} \frac{b}{a + 2b} + \frac{c}{b + 2c} + \frac{a}{c + 2a} &\geq \frac{(b + c + a)^2}{b(a + 2b) + c(b + 2c) + a(c + 2a)} \\ &= \frac{(a + b + c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{2(a + b + c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)} \geq 3.$$

Đặt $x = a^2 + b^2 + c^2$ và $y = ab + bc + ca$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{x}{y} + \frac{2(x + 2y)}{2x + y} \geq 3,$$

hay tương đương

$$\frac{(2x - y)(x - y)}{y(2x + y)} \geq 0.$$

Đây là một kết quả đúng vì ta có

$$x = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq y.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

BÀI 8 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab) \geq (ab + bc + ca)^3,$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Nhìn vào bài toán này, chắc hẳn nhiều bạn đọc sẽ nhớ tới bất đẳng thức “tương tự” và quen thuộc hơn, đó là

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3. \quad (1)$$

Bất đẳng thức (1) có 1 lời giải bằng cách sử dụng bất đẳng thức Holder khá đẹp mắt như sau. Để ý rằng

$$\begin{aligned} & (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \\ &= (a^2 + ab + b^2)(c^2 + b^2 + bc)(ca + a^2 + c^2) \\ &\geq (ab + bc + ca)^3. \end{aligned}$$

Quay trở lại bất đẳng thức đề bài là

$$(a^2 + ab + bc)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab) \geq (ab + bc + ca)^3.$$

Với bề ngoài “tương tự”, vẫn có mũ 3 ở vế trái (là dấu hiệu đặc trưng cho ý tưởng sử dụng bất đẳng thức Holder), tuy nhiên ở đây, việc “ghép cặp” các số hạng ở vế trái trở nên khó khăn hơn rất nhiều. Và một lần nữa, phương pháp sắp thứ tự các biến lại thể hiện hiệu quả tuyệt vời đối với những bất đẳng thức hoán vị. Hãy xét lời giải sau.

Không mất tính tổng quát, giả sử b số nằm giữa a và c . Do đó

$$(a-b)(b-c) \geq 0,$$

suy ra

$$ab + bc \geq b^2 + ca.$$

Sử dụng đánh giá đơn giản này, ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$(a^2 + b^2 + ca)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab) \geq (ab + bc + ca)^3. \quad (2)$$

Mặt khác, lại dễ ý rằng theo bất đẳng thức Holder,

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + ca)(b^2 + bc + ca)(c^2 + ca + ab) \\ &= (a^2 + b^2 + ca)(b^2 + bc + ca)(ab + c^2 + ca) \\ &\geq (ab + bc + ca)^3. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Nhận xét. Điểm nhân của phép chứng minh trên là việc sử dụng đánh giá $ab + bc \geq b^2 + ca$ đã đem lại sự đột phá, khai thông thể bế tắc ban đầu khi ta cảm thấy khó khăn khi “cố gắng ghép cặp” các số hạng để sử dụng bất đẳng thức Holder.

BÀI 9 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có:

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \right) \\ & \geq \frac{a^2}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ca + ab} + 1. \end{aligned}$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Đây là một bất đẳng thức bậc cao và khá “chặt”. Việc tìm ra sự liên hệ giữa các đại lượng và móc nối chúng vào với nhau là chìa khóa để giải quyết những bài toán như thế này.

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 2 + \frac{b(c+a)}{a^2 + ab + bc} + \frac{c(a+b)}{b^2 + bc + ca} + \frac{a(b+c)}{c^2 + ca + ab} \\ & \geq 4 \left(\frac{b}{a+2b} + \frac{c}{b+2c} + \frac{a}{c+2a} \right). \end{aligned}$$

Lại dễ ý rằng $2 = \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{ab + bc + ca}$ nên ta có thể viết lại bất đẳng thức trên thành

$$\left[\frac{b(c+a)}{a^2+ab+bc} + \frac{c(a+b)}{b^2+bc+ca} + \frac{a(b+c)}{c^2+ca+ab} \right] + \left[\frac{b(c+a)+c(a+b)+a(b+c)}{ab+bc+ca} \right] \geq 4 \left(\frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} + \frac{a}{a+2c} \right).$$

Tới đây, sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, dễ thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{b(c+a)}{a^2+ab+bc} + \frac{b(c+a)}{ab+bc+ca} \geq \frac{4b}{b+2a},$$

hay

$$\frac{1}{a^2+ab+bc} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{4}{(c+a)(b+2a)}.$$

Đây là một kết quả đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+ab+bc} + \frac{1}{ab+bc+ca} &\geq \frac{4}{(a^2+ab+bc) + (ab+bc+ca)} \\ &= \frac{4}{(c+a)(b+2a)}. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

□

BÀI 10 Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta đều có

$$\frac{a}{a^2+ab+bc} + \frac{b}{b^2+bc+ca} + \frac{c}{c^2+ca+ab} \geq \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^3}.$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức ta cho với $a+b+c$, ta được

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a^2}{a^2+ab+bc} + \frac{b^2}{b^2+bc+ca} + \frac{c^2}{c^2+ca+ab} \right) \\ &+ \left[\frac{a(b+c)}{a^2+ab+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+bc+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ca+ab} \right] \geq \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{a^2+ab+bc} + \frac{b^2}{b^2+bc+ca} + \frac{c^2}{c^2+ca+ab} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a^2+ab+bc) + (b^2+bc+ca) + (c^2+ca+ab)} = 1 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & \frac{a(b+c)}{a^2+ab+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+bc+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ca+ab} \\ & \geq \frac{[a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)]^2}{a(b+c)(a^2+ab+bc) + b(c+a)(b^2+bc+ca) + c(a+b)(c^2+ca+ab)} \\ & = \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}. \end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được

$$1 + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{9(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2},$$

hay tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{2^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \\ & \geq \frac{(1+2)^2}{(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}, \end{aligned}$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

BÀI 11 Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{a(b+c)}{a^2+ab+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+bc+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ca+ab} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

(Trần Quốc Anh)

Phân tích & định hướng lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, dễ thấy

$$\frac{a^2}{a^2+ab+bc} + \frac{b^2}{b^2+bc+ca} + \frac{c^2}{c^2+ca+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1,$$

hay nói cách khác: $1 \leq \frac{a^2}{a^2+ab+bc} + \frac{b^2}{b^2+bc+ca} + \frac{c^2}{c^2+ca+ab}.$

Vậy ta sẽ quy bài toán về chứng minh

$$\begin{aligned} & \left[\frac{a^2}{a^2+ab+bc} + \frac{b^2}{b^2+bc+ca} + \frac{c^2}{c^2+ca+ab} \right] + \\ & + \left[\frac{a(b+c)}{a^2+ab+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+bc+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ca+ab} \right] \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}, \end{aligned}$$

tương đương với

$$(a+b+c) \left(\frac{a}{a^2+ab+bc} + \frac{b}{b^2+bc+ca} + \frac{c}{c^2+ca+ab} \right) \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}},$$

tức
$$\frac{a}{a^2+ab+bc} + \frac{b}{b^2+bc+ca} + \frac{c}{c^2+ca+ab} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Tới đây, để phá lớp căn thức bậc 3 ở vế phải, ta sẽ sử dụng phương pháp chuẩn hóa. Hoàn toàn có thể giả sử $abc = 1$. Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{a}{a^2+ab+bc} + \frac{b}{b^2+bc+ca} + \frac{c}{c^2+ca+ab} \leq 1. \quad (1)$$

Mặt khác, do $abc = 1$ nên tồn tại phép đổi biến $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

Khi đó, (1) trở thành bất đẳng thức đồng bậc là

$$\frac{x^2y}{x^3+y^3+xyz} + \frac{y^2z}{y^3+z^3+xyz} + \frac{z^2x}{z^3+x^3+xyz} \leq 1. \quad (2)$$

Sử dụng bổ đề đơn giản $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$, ta có

$$\frac{x^2y}{x^3+y^3+xyz} \leq \frac{x^2y}{xy(x+y)+xyz} = \frac{x}{x+y+z}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x^2y}{x^3+y^3+xyz} + \frac{y^2z}{y^3+z^3+xyz} + \frac{z^2x}{z^3+x^3+xyz} \\ & \leq \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2} \geq \sum \frac{1}{a^2+ab+bc} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$(4a+5b)(4b+5c)(4c+5a) = 729.$$

Chứng minh rằng

$$abc(a^2+bc+ca)(b^2+ca+ab)(c^2+ab+bc) \leq 27.$$

3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \geq \sum \frac{a}{a^2+2bc} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

4. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \geq \sum \frac{a}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta đều có

$$\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \geq \sum \frac{a}{a^2+ab+bc} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

6. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \geq \sum \frac{a}{a^2+bc+b^2} \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

CÁC KẾT QUẢ VÀ KÍ HIỆU ĐƯỢC DÙNG TRONG SÁCH

1 BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm, thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Từ bất đẳng thức AM-GM, ta có các hệ quả sau đây rất hay được sử dụng trong chứng minh bất đẳng thức:

- (i) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- (ii) $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- (iii) $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc$ với mọi $a, b, c \geq 0$.

2 BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM SUY RỘNG

Cho các số thực dương $w_1, w_2, \dots, w_n$ thỏa mãn $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$.

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm, thì

$$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

3 BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó, ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

4 BẤT ĐẲNG THỨC TRUNG BÌNH LŨY THỪA

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm. Khi đó với mọi $s \geq r > 0$, ta có

$$\left(\frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n} \right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

5 BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Cho x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) là các số thực không âm. Khi đó

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^m x_{ij}^{\frac{1}{m}} \right).$$

Một cách tổng quát, nếu $p_1, p_2, \dots, p_m$ là các số thực dương thỏa mãn

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \text{ thì ta có } \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^{p_i} \geq \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^m x_{ij}^{p_i} \right).$$

6 BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

Cho x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) là các số thực không âm. Nếu $p \geq 1$, thì

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

7 BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Cho các số thực không âm a, b, c . Nếu $r \geq 0$, thì

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = 0$ và $b = c$, hoặc $b = 0$ và $c = a$, hoặc $c = 0$ và $a = b$.

Hai trường hợp hay được sử dụng nhất của bất đẳng thức này là $r = 1$ (lúc này ta gọi là bất đẳng thức Schur bậc ba bởi vì nó có dạng bậc ba) và $r = 2$ (bất đẳng thức Schur bậc bốn).

Trong trường hợp $r = 1$, ta có các dạng tương đương sau:

$$(a) \quad a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a);$$

$$(b) \quad 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a+b+c)^3;$$

$$(c) \quad a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca);$$

$$(d) \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Trong trường hợp $r = 2$, ta cũng có các dạng tương đương

$$(a) \quad \sum a^4 + abc \sum a \geq \sum ab(a^2 + b^2);$$

$$(b) \quad 6abc \sum a \geq (2 \sum ab - \sum a^2)(\sum a^2 + \sum ab).$$

8 CÁC KÍ HIỆU VỀ TỔNG VÀ TÍCH

• $\sum_{cyc}$: Tổng hoán vị, cyc là viết tắt của *cyclic*. Ví dụ:

+ Với ba biến a, b, c , ta có $\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$.

+ Với bốn biến a, b, c, d , ta có $\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$.

+ Một cách tổng quát thì

$$\sum_{cyc} f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + f(a_2, a_3, \dots, a_1) + \dots + f(a_n, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Trong toàn bộ cuốn sách này, ta dùng $\sum$ thay cho $\sum_{cyc}$ và trong một số trường hợp có nhiều biến, ta dùng $\sum_{a, b, c}$ để kí hiệu tổng hoán vị của ba biến a, b, c .

- $\sum_{sym}$: Tổng đối xứng, *sym* là viết tắt của *symmetric*. Ví dụ:

+ Với ba biến a, b, c , ta có

$$\sum_{sym} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c.$$

+ Với bốn biến a, b, c, d , ta có

$$\sum_{sym} a^3b = a^3(b+c+d) + b^3(c+d+a) + c^3(d+a+b) + d^3(a+b+c).$$

- $\prod_{cyc}$: Tích hoán vị, *cyc* là viết tắt của *cyclic*. Ví dụ:

+ Với ba biến a, b, c , ta có $\prod_{cyc} (a+b) = (a+b)(b+c)(c+a)$.

+ Với bốn biến a, b, c, d , ta có

$$\prod_{cyc} (a+b) = (a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

+ Một cách tổng quát thì

$$\prod_{cyc} f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdots f(a_n, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Trong toàn bộ cuốn sách này, ta dùng $\prod$ thay cho $\prod_{cyc}$ và trong một số trường hợp có nhiều biến, ta dùng $\prod_{a, b, c}$ để kí hiệu tích hoán vị của ba biến a, b, c .

- $\prod_{sym}$: Tích đối xứng, *sym* là viết tắt của *symmetric*. Ví dụ:

+ Với ba biến a, b, c , ta có

$$\prod_{sym} (a^2 + b) = (a^2 + b)(b^2 + c)(c^2 + a)(b^2 + a)(c^2 + b)(a^2 + c).$$

+ Với bốn biến a, b, c, d , ta có

$$\prod_{sym} (a+b) = (a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d).$$

CHIA SẺ CÙNG BẠN ĐỌC

*"Learning is not attained by chance.
It must be sought for with ardor and attended to with diligence."
Alfred Rényi*

1 TOÁN HỌC & CUỘC SỐNG

Trong suốt thời học sinh, chúng tôi luôn cố gắng đi tìm lời giải đáp hợp lý cho một chuỗi câu hỏi đại loại như "Ta học Toán để làm gì? Tại sao từ lớp 1 đến lớp 12 đều phải học Toán? Tại sao dù vào ngôi trường Đại học nào đi chăng nữa, trong nước hay ngoài nước, ta cũng vẫn phải học Toán đại cương? Liệu tư duy Toán học là thật sự cần thiết hay chỉ là màn tự khen của dân trong nghề? ...".

Đường như bất cứ học sinh nào cũng từng tự đặt ra những câu hỏi như vậy. Vì một lẽ đơn giản, ban cứ thử tưởng tượng xem. Đôi khi, ta không biết mục đích của những thứ mình đang làm, thậm chí là đã, đang và sẽ làm hàng ngày. Điều đó thật phi lý. Chẳng phải mọi thứ đều có nguyên do của nó sao? Và con đường đi tìm đáp án cho những câu hỏi này thật sự thú vị đối với chúng tôi.

Sự tương quan kì diệu giữa Toán học và cuộc sống.

Thật vậy, bạn có ngạc nhiên không nếu chúng tôi chia sẻ một định nghĩa rằng: *"Toán học là thứ ngôn ngữ thể hiện cuộc sống một cách ngắn gọn và logic nhất. Vì thế, lợi ích của việc học Toán trước tiên và quan trọng nhất chính là trang bị kiến thức cần thiết giúp học sinh nhận biết được thế giới bên ngoài cả về định tính cũng như định lượng, từ đó nâng cao tư duy, tầm nhìn, phát triển những kĩ năng phân tích, xử lý tình huống cho học sinh trước khi các em bước ra xã hội."*

Độc giả hãy thử đọc câu chuyện có thực sau và cùng suy ngẫm.

Từ lớp 1, tại sao học sinh lại học đếm đầu tiên? Vì đơn giản, đứa trẻ nào lại không tò mò khi ai đó hỏi "Gia đình cháu có mấy người?", hay "Nhà cháu có mấy anh chị em?"... Bì cũng là một câu bé như vậy.

Muốn biết được câu trả lời, Bì phải học đếm, trước tiên là đếm số lượng bằng đầu ngón tay.

Nhưng khi leo cầu thang ở nhà, cậu bé lại tự hỏi "Không biết cầu thang có bao nhiêu bậc nhỉ? Nhiều quá, không đếm bằng ngón tay được. Mình muốn biết chính xác cơ. Phải làm sao bây giờ nhỉ?". Đường như đọc được suy nghĩ của Bi, mẹ bắt đầu dạy cậu về những con số. Cậu bé rất thích thú vì những câu hỏi của mình được giải đáp đầy đủ và rõ ràng. Niềm đam mê Toán học, sự ham hiểu biết bắt đầu bùng lên trong cậu.

Một ngày kia, bà ngoại đến chơi. Bà mang cho cậu hai chiếc bánh ngọt. "Cháu vẫn còn một cái ở nhà nữa. Vậy là tất cả cháu có ba chiếc" - cậu bé nói.

Khi ấy, người mẹ ngồi bên cạnh và hỏi cậu rằng "Giống như lần trước con có hai chiếc bánh, mẹ tặng con thêm một chiếc nữa. Tất cả cũng là ba chiếc phải không nào? Vậy con có muốn biết trong toán học điều đó được biểu thị thế nào không?"

"Mẹ chia sẻ cho con ngay đi" - Cậu bé hào hứng.

"Những nhu cầu, hiện tượng cho nhận trong cuộc sống chính là nguồn gốc của phép cộng trong toán học. Con sẽ hiểu diễn những điều trên bằng phép cộng. Chú ý nhé: $1 + 2 = 3$, và $2 + 1 = 3$. Vậy thì rõ ràng $1 + 2 = 2 + 1$. Đây là tính chất giao hoán - một tính chất quan của phép cộng mà con vừa thấy được cách chứng minh qua thực tế đó." - Người mẹ giải thích.

Cậu bé vừa ăn bánh vừa nghiền ngẫm những câu nói của mẹ. "Cho và nhận" ... Mình nhận rồi, nhưng nếu mình cho thì sao nhỉ?

Sau khi ăn xong chiếc bánh cũng là lúc cậu tự tìm ra câu trả lời. "Con hay nghe các anh lớp trên nói đến cộng và trừ. Nhận là cộng, vậy chắc cho sẽ là trừ phải không mẹ?".

"Con trai mẹ thông minh lắm. Và con hãy nhớ một bài học rằng trong cuộc sống, hãy chan hòa với thiên nhiên, yêu thương quan tâm tới tất cả mọi người. Chia sẻ hạnh phúc của mình và con sẽ nhận lại được những điều kì diệu" - Người mẹ dịu dàng tâm sự.

...

Qua câu chuyện này, ta có thể thấy được phương pháp giáo dục hiệu quả thực sự là thế nào. Người mẹ đã kích thích trí tò mò của con trai mình, thể hiện một cách tự nhiên về sự gắn gũi giữa Toán học và cuộc sống, khéo léo mở rộng cho con những bài học đáng quý để từ đó khơi dậy niềm đam mê, sự ham hiểu biết của đứa trẻ.

Mỗi con người đều cần li do để thức dậy vào mỗi buổi sáng. Chúng ta có thể mơ ước trở thành một nhà văn, một doanh nhân, hay một nghệ sĩ. Điều đó rất đáng trân trọng, nhất là khi chúng ta cố gắng hết mình để vươn tới thành công. Và Toán học, không phải là "vật cản" hay "thủ tục" để chúng ta đến với ước mơ ấy. Toán học chính là "đôi cánh" cho chúng ta bay nhanh hơn, tiết kiệm nhiều thời gian hơn. Bởi đó là nền tảng của tư duy logic, tư duy ứng biến tình huống, giải quyết vấn đề cũng như chìa khóa để mở cánh cửa Đại học, tiếng nói chung của tầng lớp trí thức.

Đó chính là li do vì sao những con người phi thường, những nhà hiền triết của mọi thời đại như *Archimede, Galileo, Leonardo Da Vinci, Pythagore, Euclid* ... luôn có một điểm chung: họ đều là những nhà Toán học!

Lại nói về *Bill Gates*, chắc hẳn ai cũng biết ông đã từng học Đại học Havard nên có lẽ không ai dám khẳng định rằng *Bill Gates* không giỏi Toán.

Cuối cùng, xin được nhắc lại câu nói nổi tiếng của *Albert Einstein* thay cho lời kết của bài viết: "*Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas*". (Toán học thuần túy, theo cách của riêng nó, là thi ca của tư duy logic).

2 BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN HỌC

Qua bài viết trước, hẳn độc giả sẽ đồng ý với chúng tôi rằng "Toán học" thật ra không hề xa lạ như nhiều người vẫn tưởng.

Tất nhiên, đây là một lĩnh vực rộng lớn nên việc chọn lọc kiến thức lại càng trở nên quan trọng.

"... Vì việc nhận thức một sự vật này phụ thuộc vào việc nhận thức một sự vật khác... nên ta có thể nhận biết ngay rằng liệu trước hết nghiên cứu một sự vật khác nào đó có lợi hay không, cụ thể là nghiên cứu sự vật gì theo trình tự nào ... " (Descartes – Các quy tắc chỉ đạo của trí tuệ).

Bạn có tò mò muốn biết vì sao chúng tôi cũng như rất nhiều người làm Toán lại đam mê Bất đẳng thức đến vậy?

Li do đầu tiên có lẽ là nguồn gốc tự nhiên của nó.

Xã hội thông tin cùng nền kinh tế thị trường đã tạo nên sự cạnh tranh cũng như mâu thuẫn về lợi ích giữa từng cá nhân, từng nhóm người. Đó là một trong những tiền đề quan trọng tạo nên phép so sánh hiện đại. Trong cuộc sống, điều này được thể hiện rõ rệt qua những vấn đề hàng ngày như "Phương pháp nào tốt hơn?", "Dự án nào khả thi hơn?", hay "Ai là người giàu nhất thế giới?" ...

Đổi với Toán học, phép so sánh hay nói cách khác là chuỗi quan hệ giữa những con số, những đại lượng, những biểu thức từ phức tạp đến đơn giản, đã được thể hiện rất rõ trong lĩnh vực mang tên **Bất đẳng thức**.

Bất đẳng thức là khởi nguồn, là công cụ cơ bản nhất cho việc phát triển các phương pháp tối ưu ứng dụng vào mọi mặt của đời sống.

Thật vậy, một điều hiển nhiên là ngày hôm nay, gần như ai trong chúng ta cũng sở hữu một chiếc điện thoại di động, và gần như gia đình nào cũng sở hữu một chiếc tivi. Nhưng ít ai biết rằng trước khi có sự "giúp đỡ" của Toán học, các nhà quản lý truyền thông đã từng phải đau đầu với bài toán sau:

Tìm phương án sắp xếp tối ưu các trạm phát sóng (trạm trung chuyển) với lưu ý:

- Nếu mật độ thưa quá sẽ dẫn đến mức độ phủ sóng thấp.
- Nhưng nếu mật độ dày quá thì chi phí sẽ tăng cao, mặt khác dễ xảy ra hiện tượng nhiễu sóng (do giao thoa).

Bằng cách sử dụng Li thuyết luồng cực đại, một nhóm nghiên cứu đã giúp tiết kiệm được 70% chi phí xây dựng các trạm thu phát, hơn thế nữa còn tăng 40% chất lượng sóng – điều mà chắc chắn các nhà kinh doanh không thể làm được nếu chỉ dựa vào kinh nghiệm hay cảm tính.

Rõ ràng, ứng dụng là yếu tố quan trọng trong việc thúc đẩy sự phát triển của nhiều ngành Toán học.

- Bài toán tìm nghiệm cực trị chính là nguồn gốc của Giải tích (đạo hàm) và Li thuyết biến phân.
- Khoa học về du hành vũ trụ đã làm nảy sinh lĩnh vực điều khiển tối ưu.
- Hay nhu cầu đo đạc một cách chính xác những vùng đất rộng lớn có hình thù đặc biệt làm xuất hiện phương pháp Bình phương tối thiểu sau đó là Hình học vi phân ...

Quay trở lại vấn đề Bất đẳng thức sơ cấp, có một điều thật đáng suy nghĩ, đó là trên thực tế, 90% học sinh yêu thích Bất đẳng thức mà chúng tôi từng biết đều rơi vào tình trạng: ngày nào cũng học, sách nào cũng đọc, phương pháp nào cũng thuộc, nhưng... gặp một dạng Toán "lạ" một chút cũng không giải được! Giống như không ít bạn trẻ luôn thắc mắc rằng: "Vì sao có rất nhiều việc người khác làm được mà mình lại không làm được?"

Nếu vậy, ngày hôm nay chúng tôi sẽ hỏi lại rằng "Tại sao có những bài toán bạn vừa nhìn đã biết cách làm, nhưng có những bài toán phải nghĩ mất 15 phút, thậm chí có nhiều bài toán bạn nghĩ cả ngày vẫn không giải quyết được?"

Chiếc chìa khóa thành công ở đây chính là *kiến thức và tầm nhìn*.

Trong Bất đẳng thức nói chung, có rất nhiều bài toán không có lời giải trong một thời gian dài. Đó là do “những ý tưởng cũ không còn phù hợp với những bài toán mới”.

Ta không thể học thuộc hết các bài toán, các lời giải và tự khẳng định mình là một “chuyên gia”. Con đường hiệu quả nhất chỉ có thể là tìm hiểu ngọn nguồn vấn đề và phương thức tư duy logic. Hãy thử mở rộng tầm nhìn của mình, bạn sẽ một lần nữa thấy được mối tương quan kì diệu giữa Toán học và cuộc sống.

Khi nhìn vào một bất đẳng thức	Khi nhìn vào một vấn đề
Đánh giá tổng quan về tính đúng sai, độ khó, độ chặt của bài toán.	Đánh giá tổng quan về độ khả thi, mức độ công việc (dự án, công trình ...).
Phân tích về các đại lượng, mối liên hệ giữa các đại lượng trong bất đẳng thức đó (so sánh đại lượng nào mạnh hơn ...).	Phân tích về những yếu tố cấu thành nên vấn đề, xem xét mối liên quan giữa chúng (để có một góc nhìn cụ thể hơn).
Thử sử dụng những phương pháp quen thuộc, những đánh giá thường gặp (dựa vào kiến thức và kinh nghiệm).	Thử sử dụng những phương pháp giải quyết quen thuộc từ trước (dựa vào kiến thức và kinh nghiệm).

Và nếu các bước trên vẫn chưa đến kết quả cuối cùng, thì đó là lúc bạn cần vượt qua rào cản tư duy của mình. Hãy sử dụng sự khác biệt tính tế về tầm nhìn để tìm ra con đường riêng, và quan trọng hơn, hãy giữ vững niềm tin, dũng cảm vượt qua khó khăn, thử thách trên con đường ấy để đến được với thành công thật sự. Đó chính một trong những bài học tuyệt vời nhất mà chúng tôi muốn chia sẻ cùng bạn đọc.

3 ĐÔI ĐIỀU SUY NGHĨ VỀ THÀNH CÔNG ĐỐI VỚI CÁC BẠN TRẺ —

$$CQ + PQ > IQ$$

Chỉ số thông minh (IQ – intelligence quotient) là quan trọng nhưng chỉ số hiếu học (CQ – curiosity quotient) và chỉ số đam mê (PQ – passion quotient) ngày nay còn quan trọng hơn.

T. Friedman đã đề cập tới “bất đẳng thức quan trọng nhất trong cuộc sống” trên ở cuốn sách “Thế giới phẳng” nổi tiếng.

Quả thực, những con người ham học hỏi và giàu đam mê hoàn toàn có thể tự học, tự làm việc và tự tạo động lực cho mình. Đó chính là lí do họ trở nên thành công.

Nhưng ngày hôm nay, dường như thế hệ học sinh, sinh viên của chúng ta đã quên đi hai điều *thực sự quan trọng*. Đó chính là *tính mục đích và sự kiên trì trong cuộc sống*.

Đừng nên làm bất cứ điều gì mà bạn không biết hay chưa từng nghĩ tới mục đích của nó. Chúng ta cần lí do rõ ràng cho từng công việc hàng ngày để đảm bảo những việc làm đó đều mang một ý nghĩa, một giá trị nhất định. Đưa ra một cái đích rõ ràng, sau đó vạch ra con đường khả thi để vươn tới là việc làm cần thiết.

Điều kiện cần để có những mục tiêu phù hợp với mình đó là bạn cần trang bị một tầm nhìn bao quát đi kèm với sự ham học hỏi. Học hỏi ở đây là học hỏi từ những người thành công – những con người tích cực chứ không phải những kẻ tiêu cực.

Vì dụ, trong số 10 người cùng ngành nhận xét về thành công của một cá nhân nào đó, xin chắc chắn với bạn rằng sẽ có 9 người nói rằng: “Anh ấy giỏi thật. Nhưng mình chắc chắn mình không làm được vì:

- Anh ấy có một tri tuệ siêu phàm. Chúng ta thì không.
- Anh ấy có nhiều tiền, nhiều mối quan hệ. Chúng ta thì không.
- Anh ấy là người luôn gặp may mắn ...”

Quả thực, có hàng trăm, hàng nghìn lí do để những người thất bại tự trị hoãn thành công của mình. Mỗi khi bạn nhìn thấy ai đó thành công, bạn sẽ dễ dàng nghĩ rằng họ ít gặp phải vấn đề và ít trở ngại hơn người bình thường. Có thể sự tài năng, may mắn đã giúp họ leo lên thành công qua quãng đời đầy khó nhọc đó một cách dễ dàng. Mọi thứ dường như đều xảy ra theo những gì Thượng Đế định sẵn cho họ. Nhưng thực tế đã chứng minh rằng:

“Không có giới hạn tư duy nào của con người ngoài giới hạn do chính con người đặt ra” (Napoleon Hill).

Những người thành công nhất lại chính là những người đã từng thất bại nhiều nhất. Và một trong những yếu tố quan trọng nhất làm nên điều kì diệu chính là sự kiên trì, đúng như câu nói: “Kẻ thất bại luôn luôn bỏ cuộc sớm, người thành công kiên nhẫn đến cuối cùng”.

Dường như khi còn trẻ, ai cũng có ước mơ, hoài bão nhưng không nhiều người dám theo đuổi, duy trì ngọn lửa của mình đến cùng. Đa phần những người thất bại mất rất nhiều thời gian chỉ để làm theo những điều mà ngoại cảnh tác động. Câu chuyện sau đây là một minh họa đặc sắc cho kết quả của việc không kiên trì với chính kiến của bản thân.

Có hai cha con nhà nọ dắt một con lừa ra chợ bán. Cha ngồi lên lưng lừa, con đi bộ theo sau.

Người bên đường thấy thế liền nói: "Cha gì mà không biết thương con, để cho con mình phải đi bộ!". Nghe vậy người cha liền nhảy xuống lưng lừa nhường cho con cưỡi lừa.

Đi một chốc hai cha con lại nghe người hai bên đường chỉ trích: "Đứa con thật vô ý, ngồi ung dung trên lưng lừa trong khi cha lại đi bộ". Nghe như vậy hai cha con lại bảo nhau: chỉ còn một cách để cho thiên hạ khỏi nói, là hai ta cùng cưỡi lừa.

Thế là hai cha con cùng leo lên lưng lừa. Nhưng đi được một đoạn họ tiếp tục nghe một lời nhận xét khác: "Đừng nên ngược đãi gia súc như vậy, làm sao con lừa có thể chịu đựng được sức nặng thế chứ". Nghe thấy hai cha con lập tức nhảy xuống khỏi lưng lừa.

Đi được một quãng, lần này lại có người khác phê bình: "Thật đại dốt, có lừa mà không dám cưỡi lại phải đi bộ". Hai cha con không biết nghĩ sao cho phải, đành nai lưng khiêng con lừa đến chợ!

Đôi khi chúng ta sẽ bị ảnh hưởng rất nhiều bởi những ý kiến trái chiều ngoài cuộc sống. Dĩ nhiên cần phải biết lắng nghe những đóng góp xây dựng của người có thiện chí. Tuy nhiên, bên cạnh đó chúng ta không nên dễ mình bị rung động bởi những lời dèm pha thiếu nền tảng từ đó dẫn đến những quyết định sai lầm. Đừng lo sợ các ngọn gió của nghịch cảnh. Hãy nhớ rằng một con diều bay lên được vì ngược chiều gió chứ không phải vì cùng chiều gió.

Cuối cùng, xin chúc các bạn học sinh, sinh viên sau khi đọc xong cuốn sách này sẽ có đủ niềm tin vượt qua mọi thử thách để đến với thành công trên con đường mình đã chọn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, George Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1967.
- [2] Phan Huy Khải, *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức*, Tập 1, Nhà xuất bản Hà Nội, 1998.
- [3] Nguyễn Cang, Nguyễn Đăng Phát, *Giới thiệu tóm tắt cuộc đời và sự nghiệp các nhà Toán học*, Nhà xuất bản Trẻ, 2001.
- [4] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.
- [5] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University Press, 2004.
- [6] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL Publishing House, 2006.
- [7] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.
- [8] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức: Định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản, Giáo dục, 2006.
- [9] Vo Quoc Ba Can, *On a Class of Three-Variable Inequalities*, Mathematical Reflections, Issue 2, 2007.
- [10] Pham Kim Hung, *Secrets in Inequalities*, Volume 1: Basic Inequalities, GIL Publishing House, 2007.
- [11] Pham Văn Thuận, Lê Vĩ, *Bất đẳng thức suy luận và khám phá*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.
- [12] Vo Quoc Ba Can, Cosmin Pohoata, *Old and New Inequalities*, Volume 2, GIL Publishing House, 2008.
- [13] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2009.

- [14] Vasile Cîrtoaje, Vo Quoc Ba Can, Tran Quoc Anh, *Inequalities with Beautiful Solutions*, GIL Publishing House, 2009.
- [15] Trần Phương, *Những viên kim cương trong bất đẳng thức Toán học*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2009.
- [16] Trần Phương, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Vẻ đẹp bất đẳng thức trong các kỳ thi Olympic Toán học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2010.
- [17] Vasile Cîrtoaje, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Phân loại và phương pháp giải toán bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2010.
- [18] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2010.
- [19] *Crux Mathematicorum*.
- [20] *Mathematical Reflections*.
- [21] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*.
- [22] *Mathlinks Inequality Forum*,
 [Online: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=32>]

Mục lục

Lời nói đầu	3
Lời tựa	5
Chương 1. Những nét chung	7
1. Giới thiệu về bất đẳng thức AM-GM	7
2. Các dạng thường gặp của AM-GM	13
3. Bất đẳng thức AM-GM suy rộng	15
4. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM để chứng minh một số bất đẳng thức kinh điển khác	16
4.1. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	16
4.2. Chứng minh bất đẳng thức Holder	17
4.3. Chứng minh bất đẳng thức Minkowski	18
Chương 2. Một số kĩ thuật thường sử dụng	19
1. Những kĩ năng cơ bản nhất cần có	19
2. Kĩ thuật chọn điểm rơi	27
3. Kĩ thuật ghép đối xứng	55
4. Kĩ thuật thêm bớt	63
5. Kĩ thuật đặt ẩn phụ	75
6. Kĩ thuật AM-GM ngược dấu	87
Chương 3. Các bài toán tổng hợp	93
Chuyên đề 1. Sắp thứ tự các biến: Đơn giản mà hiệu quả	206
Chuyên đề 2. Những bài toán lí thú xoay quanh 1 đại lượng hoàn vị	228
Các kết quả và kí hiệu được dùng trong sách	243
1. Bất đẳng thức AM-GM	243
2. Bất đẳng thức AM-GM suy rộng	243
3. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	243
4. Bất đẳng thức trung bình lũy thừa	244
5. Bất đẳng thức Holder	244
6. Bất đẳng thức Minkowski	244
7. Bất đẳng thức Schur	244
8. Các kí hiệu về tổng và tích	245
Chia sẻ cùng bạn đọc	247
1. Toán học & cuộc sống	247
2. Bất đẳng thức Toán học	249
3. Điều kiện suy nghĩ về thành công đối với các bạn trẻ	251
Tài liệu tham khảo	254



good is NOT enough

CHÚNG TÔI LUÔN TIN RẰNG
TỐT CHƯA BAO GIỜ LÀ ĐỦ
BẠN LUÔN XỨNG ĐÁNG VỚI
NHỮNG ĐIỀU TỐT ĐẸP HƠN

MỌI Ý KIẾN ĐÓNG GÓP

VUI LÒNG GỬI VỀ

SUPPORT@BOOKBOOMING.COM