Trần Phương

SỔ TAY ĐẠI SỐ CẤP III

Các Phương pháp
và Kỹ thuật Chứng minh

bất đẳng thức

Tập 1

TRẦN PHƯƠNG

Sổ tay Đại số cấp III

CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tập 1

- 280 BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC
- 130 BẤT ĐẲNG THỨC TRONG BỘ ĐỀ THI TUYỂN SINH
- 15 KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

NHÀ XUẤT BẢN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

CHÚ DẪN MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

1 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$

$$\sum_{m,n,p,q} f(m) = f(m) + f(n) + f(p) + f(q)$$

$$VD : \sum_{a,b,c} \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

2 $\forall \triangle ABC$ với góc (A, B, C) và cạnh (a, b, c) ta qui ước

$$\sum_{A,B,C} f(A) = f(A) + f(B) + f(C)$$

$$\sum_{a,b,c} g(a) = g(a) + g(b) + g(c)$$

$$VD : \quad \sum_{A,B,C} \sin A = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\sum_{a,b,c} \frac{Aa + Bb}{A + B} = \frac{Aa + Bb}{A + B} + \frac{Bb + Cc}{B + C} + \frac{Cc + Aa}{C + A}$$

3. [8III.2] : Đề số 8 câu III phần 2
CMR : Chứng minh rằng
BĐT : Bất đẳng thức
dpcm : Điều phải chứng minh
TB : Trung bình
gt : giả thiết
VT : Vế trái
dt : diện tích
ĐK : Điều kiện
CĐ, CT : Cực đại, cực tiểu
BCS : Bunhiacôpski

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Trong chương trình toán học phổ thông, bất đẳng thức là phần gây cho học sinh, ngay cả học sinh khá và giỏi, nhiều bối rối nhất. Tuy nhiên, đây cũng là phần quyến rũ những học sinh say mê với toán học và mong giỏi toán vì nó đòi hỏi phải động não, tìm tòi và sáng tạo.

Để giúp các em học sinh làm quen rồi đi đến thích thú các bài toán bất đẳng thức, tác giả Trần Phương viết cuốn sách nhỏ này với mục đích cung cấp cho các em học sinh một vài phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức.

Ở tập 1, cách phân loại phương pháp và kỹ thuật chủ yếu dựa trên 130 bài của Bộ đề tuyển sinh(với gần một nửa là cách giải hay khác với cách giải của Bộ đề), sau đó bổ sung 150 bài để giúp các em nắm sâu hơn về kỹ năng và phương pháp. Với mục tiêu học sinh nắm chắc cách giải bài toán bất đẳng thức trong Bộ đề nên có một vài kỹ thuật đưa ra chỉ là sự phân loại theo Bộ đề.

Trong tập 1 này, bất đẳng thức Côsi được viết khá kỹ với 15 kỹ thuật. Đặt biệt các học sinh giỏi cấp toàn quốc không thể bỏ qua kỹ thuật 15, mà nhờ đó có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức

$$a^b + b^a > 1 \qquad \forall a, b > 0$$

bằng cách sử dụng bất đẳng thức Côsi, chứ không sử dụng bất đẳng thức Becnuli như thường thấy trong các sách đã xuất bản.

Ở phần cuối của sách có giới thiệu 17 bất đẳng thức của các nhà toán học trên thế giới, trong đó có bất đẳng thức

Niutơn-Mac Loranh. Bất đẳng thức Niutơn-Mac Loranh, trong các tài liệu xuất bản hiện nay thường dựa vào định lý Lagrange để chứng minh, tuy nhiên các bạn có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp bất đẳng thức Côsi (Trong tập 2 sẽ trình bày)

Để sử dụng tốt cuốn sách này, các em học sinh nên đọc cả phần bình luận minh hoa cho các kỹ thuật. Còn một số kỹ thuật khác tác giả muốn dành cho các em học sinh tự rút ra nhận xét và kết luận. Cũng cần nói thêm để các em học sinh lưu ý, sách còn cung cấp lời giải đúng cho đề thi tuyển sinh số 33III.2.

Vì sách được viết nhằm xoay quanh 130 đề bất đẳng thức trong Bộ đề thi tuyển sinh nên chưa thể cung cấp đầy đủ các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

Nhà xuất bản TP. Hồ Chí Minh trân trọng giới thiệu cuốn sách này và hy vọng nó sẽ giúp ích cho các em học sinh cuối cấp 3 đang chuẩn bị thi vào đại học. Mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn đọc.

NHÀ XUẤT BẢN TP. HỒ CHÍ MINH

§1. 15 KĨ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I – BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Dạng tổng quát (n số) : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ ta có

1.1. Dạng 1 : $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$

1.2. Dạng 2 : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$

1.3. Dạng 3 : $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1x_2 \ldots x_n$

1.4. Dấu bằng $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

1.5. Hệ quả 1 : Nếu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ – const thì

$\mathrm{Max}(x_1x_2 \ldots x_n) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{S}{n}$

1.6. Hệ quả 2 : Nếu $x_1x_2 \ldots x_n = P$ – const thì

$\mathrm{Min}(x_1+x_2+\ldots+x_n) = n\sqrt[n]{P}$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$

2. Dạng cụ thể (2 số, 3 số)

$n = 2$: $\forall x, y \geq 0$ khi đó	$n = 3$: $\forall x, y, z \geq 0$ khi đó
2.1 $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\dfrac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
2.2 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$	$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$
2.3 $\left(\dfrac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy$	$\left(\dfrac{x + y + z}{3}\right)^3 \geq xyz$
2.4 Dấu bằng $\Leftrightarrow x = y$	Dấu bằng $\Leftrightarrow x = y = z$

3. Bình luận

Dạng 2 và dạng 3 khi đặt cạnh dạng 1 có vẻ tầm thường nhưng lại giúp nhận dạng khi sử dụng BĐT Côsi. Đặc biệt có thể sử dụng BĐT Côsi từ TB nhân sang TB cộng ngay cả khi không có căn thức.

Ví dụ. CMR $16ab(a-b)^2 \leqslant (a+b)^4 \ \forall a, b \geqslant 0$

Giải : $16ab(a-b)^2 = 4(4ab)(a-b)^2 \overset{\text{(Côsi)}}{\leqslant} 4\left[\dfrac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2$

$$= 4\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$$

II – CÁC KĨ THUẬT SỬ DỤNG

1. Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân

1.1 CMR : $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqslant 8a^2b^2c^2 \ \forall a, b, c$

Giải :

Sai lầm thường gặp

Sử dụng : $\forall x, y$ thì $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$

$\leftrightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Do đó

$$\times\begin{cases} a^2+b^2 \geqslant 2ab \text{ Đúng} \\ b^2+c^2 \geqslant 2bc \text{ Đúng} \\ c^2+a^2 \geqslant 2ca \text{ Đúng} \end{cases} \qquad \textit{Ví dụ}: \begin{cases} 1 \geqslant -5 \text{ Đúng} \\ 2 \geqslant -3 \text{ Đúng} \\ 3 \geqslant 2 \text{ Đúng} \end{cases}$$

$$\overline{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqslant 8a^2b^2c^2 \text{ Sai}} \qquad \overline{6 \geqslant 30 \text{ Sai}}$$

Lời giải đúng :

Sử dụng BĐT Côsi : $x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ ta có

$$\times\begin{cases} a^2+b^2 \geqslant 2|ab| \geqslant 0 \\ b^2+c^2 \geqslant 2|bc| \geqslant 0 \\ c^2+a^2 \geqslant 2|ca| \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\overline{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqslant 8\,|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2}$$

Bình luận :

- Chỉ nhân các vế của các BĐT cùng chiều (kết quả được BĐT cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.
- Nói chung ta ít gặp các bài toán sử dụng ngay BĐT Côsi như bài toán trên mà thường phải biến đổi bài toán đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng BĐT Côsi

1.2 CMR $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2 \ \forall a, b \geq 0$

Giải

Ta có $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 = \left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\right]^4 = \left[(a+b)+2\sqrt{ab}\right]^4 \geq$

$\overset{\text{Côsi}}{\geq} \left[2\sqrt{(a+b).(2\sqrt{ab})}\right]^4 = 2^4.2^2\,ab(a+b)^2 = 64ab(a+b)^2$

1.3 [49III.3] : Cho $x_1x_2 > 0$; $x_1z_1 \geq y_1^2$; $x_2z_2 \geq y_2^2$;

CMR : $(x_1+x_2)(z_1+z_2) \geq (y_1+y_2)^2$

Giải

Từ (gt) suy ra x_1, x_2, z_1, z_2 cùng dấu $\Rightarrow x_1z_2 \geq 0$ và $x_2z_1 \geq 0$.
Ta có $(x_1+x_2)(z_1+z_2) = x_1z_1+x_2z_2+x_1z_2+x_2z_1 \geq y_1^2+y_2^2+x_1z_2+x_2z_1$

$\overset{\text{(Côsi)}}{\geq} y_1^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1z_2)(x_2z_1)} \geq y_1^2+y_2^2+2\sqrt{y_1^2y_2^2}$

$=(|y_1|+|y_2|)^2 \geq (y_1+y_2)^2$

1.4 CMR : $(1+a+b)(a+b+ab) \geq 9ab \ \forall a, b \geq 0$

Ta có $(1+a+b)(a+b+ab) \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 3\sqrt[3]{a.b}\ \sqrt[3]{a.b\,ab} = 9ab$

1.5 [148II.2] CMR : $3a^3+7b^3 \geq 9ab^2 \ \forall\ a, b \geq 0$

Giải

$3a^3+7b^3 \geq 3a^3+6b^3 = 3a^3+3b^3+3b^3 \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 3\sqrt[3]{3a^3.3b^3.3b^3} = 9ab^2$

1.6 87Vb

Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \geq 3 \end{cases}$ *CMR :* $abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Giải

Từ (gt) suy ra $\dfrac{1}{1+a} \geq \left(1-\dfrac{1}{1+b}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+c}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+d}\right) =$

$= \dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d} \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$

Tương tự và dẫn đến :

$$\times\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+b} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+c} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{dab}{(1+d)(1+a)(1+b)}} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+d} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geqslant 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

Suy ra : $\boxed{abcd \leqslant \dfrac{1}{81}}$

1.7 Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots a_n > 0 \ (3 \leqslant n \in \mathbf{N}) \\ \dfrac{1}{1+a_1} + \dots + \dfrac{1}{1+a_n} \geqslant n-1 \end{cases}$

CMR : $a_1a_2 \dots a_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^n}$

Giải

$$\frac{1}{1+a_1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{1+a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{1+a_n}\right) =$$

$$\frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} \geqslant$$

$$\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_2 \dots a_n}{(1+a_2)\dots(1+a_n)}}$$

Tương tự và dẫn đến :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a_1} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_2 \ldots a_n}{(1+a_2)\ldots(1+a_n)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+a_2} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_1a_3 \ldots a_n}{(1+a_1)(1+a_3)\ldots(1+a_n)}} \geq 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ \dfrac{1}{1+a_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_1a_2 \ldots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{n-1})}} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} \geq (n-1)^n \frac{a_1a_2 \ldots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

Suy ra : $a_1a_2 \ldots a_n \leq \dfrac{1}{(n-1)^n}$

1.8 CMR : $1975\sqrt[1975]{a} + 1995\sqrt[1995]{b} \geq 3970\sqrt[3970]{ab}$ $\forall a, b \geq 0$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3970 số trong đó gồm :

1975 số có dạng $\sqrt[1975]{a}$ và 1995 số có dạng $\sqrt[1995]{b}$ ta có

$$1975\sqrt[1975]{a} + 1995\sqrt[1995]{b} = \underbrace{\sqrt[1975]{a} + \ldots + \sqrt[1975]{a}}_{1975} + \underbrace{\sqrt[1995]{b} + \ldots + \sqrt[1995]{b}}_{1995}$$

$$\geq (1975 + 1995)\sqrt[1975+1995]{\underbrace{\sqrt[1975]{a} \ldots \sqrt[1975]{a}}_{1975} . \underbrace{\sqrt[1995]{b} \ldots \sqrt[1995]{b}}_{1995}}$$

$$= 3970\sqrt[3970]{ab}$$

1.9 : CMR : $m\sqrt[m]{a} + n\sqrt[n]{b} \geq (m+n)\sqrt[m+n]{ab}$ $\forall a, b, \geq 0$; $1 \leq m, n \in \mathbf{N}$

Sử dụng BĐT Côsi cho $(m + n)$ số trong đó gồm : m số $\sqrt[m]{a}$ và n số $\sqrt[n]{b}$ ta có

$$m\sqrt[m]{a} + n\sqrt[n]{b} = \underbrace{\sqrt[m]{a} + \ldots + \sqrt[m]{a}}_{m} + \underbrace{\sqrt[n]{b} + \ldots + \sqrt[n]{b}}_{n} \geq$$

$$\geq (m+n)\sqrt[m+n]{\sqrt[m]{a}\ldots\sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\ldots\sqrt[n]{b}} = = (m+n)\sqrt[m+n]{ab}$$

1.10 Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ CMR $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8 \quad (1)$

Giải

$$VT(1) = \frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c}$$

$$\overset{(\text{Côsi})}{\geq} \frac{2\sqrt{bc}}{a}.\frac{2\sqrt{ca}}{b}.\frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$$

1.11. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \ldots a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \end{cases}$

CMR $\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n-1)^n \qquad (1)$

$VT(1) = \frac{1-a_1}{a_1}.\frac{1-a_2}{a_2}\ldots\frac{1-a_n}{a_n}$. Theo BĐT Côsi ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1-a_1}{a_1} = \dfrac{a_2 + \ldots + a_n}{a_1} \geq \dfrac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_2\ldots a_n}}{a_1} > 0 \\ \dfrac{1-a_2}{a_2} = \dfrac{a_1 + a_3 + \ldots + a_n}{a_2} \geq \dfrac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_3\ldots a_n}}{a_2} > 0 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{1-a_n}{a_n} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{a_n} \geq \dfrac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}}{a_n} > 0 \end{cases}$$

$$VT(1) = \frac{1-a_1}{a_1}\ldots\frac{1-a_n}{a_n} \geq (n-1)^n.\frac{a_1a_2\ldots a_n}{a_1a_2\ldots a_n} = (n-1)^n$$

1.12 CMR : $\left(1 + \dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq (1+a)(1+b)(1+c)$

$\geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3 \geq 8\sqrt{abc}\ \forall a, b, c \geq 0$

1.13 Cho $a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$. *CMR* :

$$\left(1 + \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq (1+a_1)\ldots(1+a_n) \geq$$

$$\geq (1 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^n \geq 2^n.\sqrt{a_1 \ldots a_n}$$

Trong đánh giá từ TB cộng sang TB nhân có một kĩ thuật nhỏ hay được sử dụng. Đó là kĩ thuật tách nghịch đảo.

2. Kĩ thuật tách nghịch đảo

2.1 : CMR $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2\ \forall ab > 0$

Giải : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \overset{(\text{Côsi})}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}} = 2$

2.2. CMR $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \geq 2\ \forall\ ab \neq 0$

Vì $\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a} = 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{b}{a}$ cùng dấu. *Do đó*

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \overset{(\text{Côsi})}{\geq} 2\sqrt{\left|\frac{1}{b}\right| . \left|\frac{b}{a}\right|} = 2$$

2.3. CMR : $\log_{1993}1994 > \log_{1994}1995$

Giải :

Theo BĐT Côsi thì

$\log_{1993}1994 + \log_{1994}1993 \geq 2\sqrt{\log_{1993}1994 . \log_{1994}1993} = 2 \quad (1)$

Mà $\log_{1994}1995 + \log_{1994}1993 = \log_{1994}(1995.1993)$

$= \log_{1994}(1994 + 1)(1994 - 1) = \log_{1994}(1994^2 - 1)$

$< \log_{1994}1994^2 = 2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\rightarrow \log_{1993}1994 > \log_{1994}1995$

2.4. a) *CMR* : $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)\ \forall 2 \le n \in \mathbf{N}$

b) CMR : $\log_{a-x}a > \log_a(a+x)\ \forall a, x \in \mathbf{R}$ thỏa $1 < a - x < a$

Giải

b) $\log_{a-x}a + \log_a(a-x) \geq 2\sqrt{\log_{a-x}a \cdot \log_a(a-x)} = 2$ (1)

$\log_a(a+x) + \log_a(a-x) = \log_a(a^2 - x^2) < \log_a a^2 = 2$ (2)

Từ (1) và (2) → (đpcm).

2.5. *(109I.I)* Tìm Min $y = \left| \log_{x^2+1}(3 - x^2) + \log_{3-x^2}(x^2+1) \right|$

Giải :

Giả sử hàm số được xác định. Khi đó vì $\log_{x^2+1}(3 - x^2)$ cùng dấu $\log_{3-x^2}(x^2+1)$

nên $y = \left|\log_{x^2+1}(3 - x^2)\right| + \left|\log_{3-x^2}(x^2+1)\right| \geq$

$$\geq 2\sqrt{\left|\log_{x^2+1}(3-x^2)\right| \left|\log_{3-x^2}(x^2+1)\right|} = 2$$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow x = \pm 1$. Khi đó $y = 2 \rightarrow$ Min $y = 2$

2.6. *CMR* : $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2\ \forall a \in \mathbf{R}$

Giải :

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a^2+1)+1}{\sqrt{a^2+1}} =$$

$$= \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2$$

2.7. *CMR* : $\dfrac{a^2+b^2}{a-b} = 2\sqrt{2}\ \forall \begin{cases} a > b \\ ab = 1 \end{cases}$

Giải :

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b} \overset{(ab=1)}{=} (a-b)+\frac{2}{a-b} \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 2\sqrt{(a-b)\cdot\frac{2}{a-b}} = 2\sqrt{2}$$

2.8. *CMR* : $a + \dfrac{1}{b(a-b)} \geqslant 3 \ \forall \ a > b > 0$

Giải :

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \overset{(\text{Côsi})}{\geqslant} 3\sqrt[3]{b(a-b)\frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

2.9. *CMR* : $a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geqslant 3 \ \forall \ a > b \geqslant 0$ (VĐ Nam Tư 79)

Giải :

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \frac{b+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} -$$

$$-1 \overset{(\text{Côsi})}{\geqslant} 4\sqrt[4]{(a-b)\frac{b+1}{2}\cdot\frac{b+1}{2}\cdot\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}} - 1 = 4 - 1 = 3$$

2.10. *CMR* : $a + \dfrac{1}{b(a-b)^2} \geqslant 2\sqrt{2} \ \forall \ a > b > 0$

Giải :

$$VT = b + \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} + \frac{1}{b(a-b)^2} \overset{(\text{Côsi})}{\geqslant} 4\sqrt[4]{b\,\frac{a-b}{2}\,\frac{a-b}{2}\,\frac{1}{b(a-b)}} = 2\sqrt{2}$$

2.11. *CMR* : $\dfrac{2a^3+1}{4b(a-b)} \geqslant 3 \ \forall \ \begin{cases} a \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{b} > 1 \end{cases}$

Theo BĐT Cô Si ta có $4b(a-b) \leqslant 4\left[\dfrac{b+(a-b)}{2}\right]^2 = 4\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$$\Rightarrow \frac{2a^3+1}{4b(a-b)} \geqslant \frac{2a^3+1}{a^2} = \frac{a^3+a^3+1}{a^2} =$$

$$= a + a + \frac{1}{a^2} \geqslant 3\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\frac{1}{a^2}} = 3$$

2.12. Cho $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n > 0$ và $1 \leqslant k \in \mathbb{Z}$. *CMR*

$$a_1 + \frac{1}{a_n(a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k} \geqslant \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

Giải

$$VT = a_n + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) +$$

$$+ \frac{1}{a_n(a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k}$$

$$= a_n + \underbrace{\frac{a_1 - a_2}{k} + \ldots + \frac{a_1 - a_2}{k}}_{k \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{a_2 - a_3}{k} + \ldots + \frac{a_2 - a_3}{k}}_{k \text{ số hạng}} + \ldots + \underbrace{\frac{a_{n-1} - a_n}{k} + \ldots + \frac{a_{n-1} - a_n}{k}}_{k \text{ số hạng}}$$

$$+ \frac{1}{a_n(a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k} \overset{(\text{Côsi})}{\geqslant}$$

$$[(n-1)k+2] \sqrt[(n-1)k+2]{a_n \left(\frac{a_1 - a_2}{k}\right)^k \ldots \left(\frac{a_{n-1} - a_n}{k}\right)^k \frac{1}{a_n (a_1 - a_2)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k}} =$$

$$[(n-1)k+2] \sqrt[(n-1)k+2]{\left(\frac{1}{k}\right)^{(n-1)k}} = \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

> **Bình luận :** Kĩ thuật tách nghịch đảo là kĩ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để khi chuyển sang TB nhân thì các phần chứa biến số bị triệt tiêu chỉ còn lại hằng số.

3. Kỹ thuật đánh giá từ TB nhân sang TB cộng

3.1. CMR :

$$30\sqrt{(a+1)(b-1)} + 4\sqrt{(b+1)(c-1)}$$

$$+ 1994\sqrt{(c+1)(a-1)} < 1012a + 17b + 999c \quad \forall a, b, c \geqslant 1$$

Giải : Theo BĐT Cô Si ta có

$$30\sqrt{(a+1)(b-1)} \leqslant 30\left[\frac{(a+1)+(b-1)}{2}\right] = 15(a+b)$$

$$+\begin{cases} 4\sqrt{(b+1)(c-1)} \leq 4\left[\dfrac{(b+1)+(c-1)}{2}\right] = 2(b+c) \\ 1994\sqrt{(c+1)(a-1)} \leq 1994\left[\dfrac{(c+1)+(a-1)}{2}\right] = 997(c+a) \end{cases}$$

$$30\sqrt{(a+1)(b-1)} + 4\sqrt{(b+1)(c-1)} + 1994\sqrt{(c+1)(a-1)} \leq$$

$$\leq 1012a + 17b + 999c$$

3.2. CMR : $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}\ \forall\ a, b, c, d > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \leq 1.$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{b}{b+d}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c} + \frac{b+d}{b+d}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

3.3. CMR : $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}\ \forall \begin{cases} a > c > 0 \\ b > c > 0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \sqrt{\dfrac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\dfrac{c(b-c)}{ab}} \leq 1$. Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a} + \frac{b}{b}\right] = 1$$

3.4. CMR $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\ \forall\ a, b, c, \geq 0$

$$\leftrightarrow \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{1.1.1} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1.$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{3}\left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c}\right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

3.5. [109Va] CMR $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$

$\forall a_i, b_i > 0 \ (i = \overline{1, n})$

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} \leq 1$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{n}\left[\frac{a_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n}{a_n+b_n}\right] + \frac{1}{n}\left[\frac{b_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{b_n}{a_n+b_n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n+b_n}{a_n+b_n}\right] = \frac{1}{n}\cdot n = 1$$

3.6. CMR : $\frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \leq 1 \ \forall\ 3 \leq n \in \mathbf{N}$

$$\leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{n!}} + \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} \leq 1$$

$$\leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}...\frac{1}{n}} + \sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}...\frac{n-1}{n}} \leq 1$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ... + \frac{n-1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot(n-1) = 1 \rightarrow \text{(đpcm)}$$

3.7. CMR : $16ab(a-b)^2 \leq (a+b)^4 \ \forall\ a, b \geq 0$

Giải

Ta có $16ab(a-b)^2 = 4.(4ab)(a-b)^2 \leq 4\left[\frac{4ab + (a-b)^2}{2}\right]^2$

$$= 4\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$$

3.8. $\left[1461\right]$: CMR : $-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}$ (1)

Giải

$$\leftrightarrow \left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \leq \frac{1}{2} \leftrightarrow |(a+b)(1-ab)| \leq \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2} \quad (2)$$

Ta có VT (2) $= \sqrt{(a+b)^2(1-ab)^2} \overset{(Côsi)}{\leq} \frac{(a+b)^2+(1-ab)^2}{2} =$

$$= \frac{a^2+b^2+1^2+a^2b^2}{2} = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2}$$

$\rightarrow$ (2) đúng $\rightarrow$ (1) đúng

3.9. $\left[100II.2\right]$: CMR $\forall$ a, b, c $\in$ (0, 1) luôn $\exists$ 1 BĐT sai

$$\begin{cases} a(1-b) > \frac{1}{4} \\ b(1-c) > \frac{1}{4} \\ c(1-a) > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cách 1 : Không mất tính tổng quát giả sử a = max(a, b, c)

$\rightarrow c(1-a) \leq c(1-c) \leq \left[\frac{c+(1-c)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} \rightarrow$ BĐT $c(1-a) > \frac{1}{4}$ sai

Cách 2 : Giả sử cả 3 BĐT đều đúng. Khi đó

$$a(1-b)\,b(1-c)\,c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad (1)$$

Ta có VT (1) = a(1 − a) b(1 − b) c(1 − c)

$$\overset{(Côsi)}{\leq} \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 \left[\frac{b+(1-b)}{2}\right]^2 \left[\frac{c+(1-c)}{2}\right]^2$$

$\leftrightarrow$ VT (1) $\leq \left(\frac{1}{4}\right)^3$ (2) $\Rightarrow$ (1) và

(2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Giả sử sai $\Rightarrow$ (đpcm)

3.10. *[131.2]* : Cho a, b $\geq$ 1.

CMR $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}$

Giải : Ta có :

$$\left(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b}\right)^2 = \log_2 a + \log_2 b + 2\sqrt{\log_2 a \,.\, \log_2 b} \leq$$

$$\overset{\text{(Côsi)}}{\leq} \log_2 a + \log_2 b + \log_2 a + \log_2 b = 2(\log_2 a + \log_2 b) = 2\log_2 ab =$$

$$= 4\log_2\sqrt{ab} \leq 4\log_2 \frac{a+b}{2} = \left[2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}\right]^2 \rightarrow \text{(đpcm)}$$

3.11. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* 16abc $\leq$ a + b

Giải

$$16abc \overset{\text{(Côsi)}}{\leq} 16\left[\frac{a+b}{2}\right]^2 = 4(a+b).(a+b) \,.\, c \leq$$

$$\overset{\text{(Côsi)}}{\leq} 4(a+b) \,.\, \left[\frac{(a+b)+c}{2}\right]^2 = 4(a+b)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (a+b)$$

3.12. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* abc (a + b)(b + c)(c + a) $\leq \frac{8}{729}$

Giải

$$abc(a+b)(b+c)(c+a) \overset{\text{(Côsi)}}{\leq} \left[\frac{a+b+c}{3}\right]^3 \left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3 = \frac{8}{729}$$

3.13. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* ab + bc + ca − abc $\leq \frac{8}{27}$ (1)

Giải

VT (1) = $1 + ab + bc + ca - abc - a - b - c = (1-a)(1-b)(1-c)$

$$\overset{\text{(Côsi)}}{\leq} \left[\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

3.14. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* $0 \leq ab + bc + ca - 2abc \leq \dfrac{7}{27}$

(VD Toán Quốc tế 84 - Bài 1 : CHLB Đức)

Giải

Theo (gt) $\Rightarrow a, b, c \in [0, 1]$ do đó

$$ab + bc + ca - 2abc \geq 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} - 2abc$$

$$= 3(abc)^{2/3} - 2abc \geq 3(abc)^{1} - 2abc = abc \geq 0$$

Ta sẽ chứng minh :

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc \ \forall\ a, b, c \in [0, 1]$

Nếu có 2 thừa số ở VT ≤ 0 ví dụ

$$\begin{cases} a+b-c \leq 0 \\ b+c-a \leq 0 \end{cases} \rightarrow 2b \leq 0 \text{ Vô lý}$$

Nếu có đúng 1 thừa số ở VT $\leq 0 \rightarrow$ (đpcm).

Giả sử cả 3 thừa số ở VT đều > 0. Khi đó

$$VT = \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\,.\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq$$

$$\leq \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\,.\,\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{}\,.\,\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}$$

$= abc$ (đpcm)

Mà $a + b + c = 1 \rightarrow abc \geq (1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c)$

$\Leftrightarrow abc \geq 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 8abc$

$\Rightarrow ab + bc + ca - 2abc \leq \dfrac{1}{4}(1 + abc) \leq$

$\leq \dfrac{1}{4}\left[1 + \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3\right] = \dfrac{7}{27}$

4. Kỹ thuật nhân thêm hằng số

4.1. CMR : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leqslant ab \ \forall \ a, b \geqslant 1$

Giải

$$+\begin{cases} a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1).1} \leqslant a.\dfrac{(b-1)+1}{2} = \dfrac{ab}{2} \\ b\sqrt{a-1} = b\sqrt{(a-1).1} \leqslant b.\dfrac{(a-1)+1}{2} = \dfrac{ab}{2} \end{cases}$$

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leqslant \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$$

4.2 Cho $\begin{cases} a, b, c \geqslant 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leqslant \sqrt{6}$

Giải

$$+\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt{(a+b)\dfrac{2}{3}} \leqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \dfrac{(a+b)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt{(b+c)\dfrac{2}{3}} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{(b+c)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt{(c+a)\dfrac{2}{3}} \leqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \dfrac{(c+a)+\dfrac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2(a+b+c)+2}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 = \sqrt{6}$$

4.3. *144 II.1* Cho $\begin{cases} a \geqslant 3 \\ b \geqslant 4 \\ c \geqslant 2 \end{cases}$

Tìm $\text{Maxf} = \dfrac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{2\sqrt{2}}$

Giải

$$ab\sqrt{c-2} = \frac{ab}{2}\sqrt{(c-2)2} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(c-2)+2}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{2}}$$

$$bc\sqrt{a-3} = \frac{bc}{\sqrt{3}}\sqrt{(a-3)3} \leqslant \frac{bc}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(a-3)+3}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{3}}$$

$$ca\sqrt{b-4} = \frac{ca}{\sqrt{4}}\sqrt{(b-4)4} \leqslant \frac{ca}{\sqrt{4}}\cdot\frac{(b-4)+4}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{4}}$$

Suy ra : $f = \dfrac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4}}$

Dấu bằng $\leftrightarrow \begin{cases} c-2=2 \\ a-3=3 \\ b-4=4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=6 \\ b=8 \end{cases}$

Vậy Maxf $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4}$

4.4. [*103 II.3*] Cho $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$

Tìm Max $A = (3-x)(4-y)(2x+3y)$

Giải

$$A = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$$

$$\overset{(\text{CôSi})}{\leqslant} \left[\frac{(6-2x)+(12-3y)+(2x+3y)}{3}\right]^3 = 36$$

Dấu bằng $\leftrightarrow 6-2x = 12-3y = 2x+3y = 6 \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

$\rightarrow$ Max $A = 36$

4.5. Cho $x, y > 0$. Tìm Min $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^3}{xy^2}$

Giải

$$xy^2 = \frac{1}{16}(4x)(2y)(2y) \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{16}\left(\frac{4x+2y+2y}{3}\right)^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}(x+y)\right]^3 = \frac{4}{27}(x+y)^3$$

Suy ra $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^3}{xy^2} \geq \dfrac{(x+y)^3}{\frac{4}{27}(x+y)^3} = \dfrac{4}{27} \rightarrow \text{Min } f(x, y) = \dfrac{4}{27}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow 4x = 2y = 2y \leftrightarrow \boxed{y = 2x > 0}$

4.6. Cho x, y, z > 0. Tìm Min $f(x, y, z) = \dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$

Giải

$$xy^2z^3 = \frac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}(6x).(3y)(3y).(2z)(2z)(2z) \leq$$

$$\leq \frac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}\left[\frac{6x+3y+3y+2z+2z+2z}{6}\right]^6$$

$$\leftrightarrow xy^2z^3 \leq \frac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}(x+y+z)^6$$

Suy ra $f(x, y, z) = \dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geq \dfrac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3} = \dfrac{1}{432}$

$\rightarrow \text{Min } f(x, y, z) = \dfrac{1}{432}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow 6x = 3y = 2z > 0$

4.7. Cho $x_1, x_2, \ldots x_n > 0$. Tìm $\text{Min} f = \dfrac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{1+2+\ldots+n}}{x_1x_2^2x_3^3 \ldots x_n^n}$

Bạn đọc tự giải

4.8 : *CMR* : $A = \sin^2x \cos x \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

Giải

$$A^2 = \sin^4x\cos^2x = \frac{1}{2}\sin^2x \cdot \sin^2x \cdot (2\cos^2x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2x+\sin^2x+2\cos^2x}{3}\right]^3 = \frac{1}{2}\left[\frac{2(\sin^2x+\cos^2x)}{3}\right]^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Suy ra $A \leq |A| \leq \sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

4.9. CMR : $A = \sin^m x.\cos^n x \leq \sqrt{\frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}}$ $\forall\ 1 \leq m, n \in \mathbb{Z}$

Giải

$$A^2 = \sin^{2m}x.\cos^{2n}x = \frac{1}{n^m.m^n}\underbrace{(n\sin^2x)\ ...\ (n\sin^2x)}_{m}.\underbrace{(m\cos^2x)\ ...\ (m\cos^2x)}_{n}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\leq} \frac{1}{m^n.n^m}\left[\frac{(n\sin^2x)+...+(n\sin^2x)+(m\cos^2x)+...+(m\cos^2x)}{m+n}\right]^{m+n}$$

$$= \frac{1}{m^n.n^m}\left[\frac{mn(\sin^2x+\cos^2x)}{m+n}\right]^{m+n} = \frac{1}{m^n.n^m}\left[\frac{mn}{m+n}\right]^{m+n} = \frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

Suy ra $A \leq |A| \leq \sqrt{\frac{m^m\ n^n}{(m+n)^{m+n}}}$

4.10. CMR $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$

Với $n = 1, 2$ thử trực tiếp thấy (1) đúng

Với $n \geq 3$ ta có

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}.\sqrt{n}.\underbrace{1\ ...\ 1}_{n-2}} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+1\ ...+1}^{n-2}}{n}$$

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{n} \leq \frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n} < \frac{n+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

4.10. CMR : $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall\ 1 \leqslant n \in \mathbf{N}$

Với $n = 1, 2, 3, 4$ thử trực tiếp thấy (1) đúng

Với $n \geqslant 5$ thì $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \ldots 1}_{n-4}} \overset{\text{CôSi}}{\leqslant}$

$$\leqslant \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{2} + \dfrac{\sqrt{n}}{2} + 2 + 2 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-4}}{n} = \frac{\sqrt{n} + 4 + n - 4}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

4.12. CMR : $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\ \forall\ m < n \in \mathbf{N}$

Giải

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Ta có :

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} = \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right) \ldots \left(1+\frac{1}{m}\right)}_{m \text{ số}} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \ldots 1}_{n-m}}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\leqslant} \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right) + \ldots + \left(1+\frac{1}{m}\right) + 1 + \ldots + 1}{n} = \frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right) + n - m}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

4.13. CMR : $S = 1 + \sqrt{\dfrac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{3+1}{3}} + \ldots + \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}} < n + 1$

Giải

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k} \cdot 1 \ldots 1} \leqslant \frac{\dfrac{k+1}{k} + 1 + \ldots + 1}{k} = 1 + \frac{1}{k^2}$$

Do đó $S \leqslant n + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$

Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Suy ra :

$$S \leqslant n + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= n + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= n + 1 - \frac{1}{n} < n + 1$$

Bình luận : Để sử dụng BĐT Cô Si từ TB nhân sang TB cộng ta cần chú ý : Chỉ số căn là bao nhiêu thì số các số hạng ở trong căn là bấy nhiêu. Nếu số các số hạng nhỏ hơn chỉ số căn thì phải nhân thêm (hằng số) để số các số hạng bằng chỉ số căn

5 Kĩ thuật ghép đối xứng

Phép cộng : $\begin{cases} 2(x+y+z) = (x+y) + (y+z) + (z+x) \\ x + y + z = \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân : $\begin{cases} x^2y^2z^2 = (xy).(yz).(zx) \\ xyz = \sqrt{xy}.\sqrt{yz}.zx \end{cases}$ $(x, y, z \geqslant 0)$

5.1. CMR $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c \ \forall \ a, b, c > 0$

Giải : Áp dụng BĐT Cô Si ta có

$$+\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) \geqslant \sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}} = c \\ \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geqslant \sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}} = a \\ \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geqslant \sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}} = b \end{cases}$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c$$

5.2. *CMR* : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}\ \forall\ abc \neq 0$

Giải

Áp dụng BĐT Cô Si ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{c^2}} = \left|\dfrac{a}{c}\right| \geq \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}\cdot\dfrac{c^2}{a^2}} = \left|\dfrac{b}{a}\right| \geq \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{b^2}} = \left|\dfrac{c}{b}\right| \geq \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

$$\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \left|\dfrac{a}{c}\right| + \left|\dfrac{b}{a}\right| + \left|\dfrac{c}{b}\right| \geq \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}$$

5.3. *CMR* : $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}\ \forall a, b, c, \geq 0$

Giải

$$+\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)(2ab - ab) = (a+b)ab \\ b^3 + c^3 = (b+c)(b^2 + c^2 - bc) \geq (b+c)(2bc - bc) = (b+c)bc \\ c^3 + a^3 = (c+a)(c^2 + a^2 - ca) \geq (c+a)(2ca - ca) = (c+a)ca \end{cases}$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a \cdot b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca$$

$$\leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

$$\overset{\text{CôSi)}}{\geq} a^2 . 2\sqrt{bc} + b^2 . 2\sqrt{ca} + c^2 . 2\sqrt{ab} = 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

5.4. *CMR* : $tg^2\dfrac{A}{2} + tg^2\dfrac{B}{2} + tg^2\dfrac{C}{2} \geq 1\ \forall\Delta ABC$

Giải

Ta có $\dfrac{1}{tg\dfrac{C}{2}} = cotg\dfrac{C}{2} = tg\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{tg\dfrac{A}{2} + tg\dfrac{B}{2}}{1 - tg\dfrac{A}{2}\,tg\dfrac{B}{2}}$

$\rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$. Mặt khác

$$+\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geq \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

5.5 (108.III) Cho ΔABC. CMR a) $(p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{1}{8}abc$

b) $\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Giải

Ta có $p - a = \frac{b + c - a}{2} > 0$ nên theo BĐT Côsi ta có

a)
$$\times\begin{cases} 0 \leq \sqrt{(p - a)(p - b)} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{(p - a) + (p - b)}{2} = \frac{c}{2} \\ 0 \leq \sqrt{(p - b)(p - c)} \leq \frac{(p - b) + (p - c)}{2} = \frac{a}{2} \\ 0 \leq \sqrt{(p - c)(p - a)} \leq \frac{(p - c) + (p - a)}{2} = \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq (p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{1}{8}abc$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \geq \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}} = \dfrac{2}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} \geq \dfrac{1}{\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-c}+\dfrac{1}{p-a}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{(p-c)(p-a)}} \geq \dfrac{1}{\dfrac{(p-c)+(p-a)}{2}} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

5.6 94.III.1 Cho ΔABC.

CMR $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$

Giải

Theo BĐT Cô si ta có:

$$\times \begin{cases} 0 \leq \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \dfrac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c \\ 0 \leq \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \dfrac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a \\ 0 \leq \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \dfrac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b \end{cases}$$

$$0 \leq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

6. Kĩ thuật sử dụng công thức diện tích tam giác

1) $S = \frac{1}{2}ah_a$ 4) $S = \frac{abc}{4R}$

2) $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ 5) $S = pr$

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 6) $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

6.1 94.III.2 ΔABC. *CMR* $R \geq 2r (1)$

Giải

Ta có $\begin{cases} S = \dfrac{abc}{4R} \\ S = pr \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{abc}{4S} \\ r = \dfrac{S}{p} \end{cases}$ Do đó

$$1) \leftrightarrow \frac{abc}{4S} \geq \frac{2S}{p} \leftrightarrow abc \geq \frac{8S^2}{p} \leftrightarrow abc \geq \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$\leftrightarrow abc \geq 8 . \frac{b+c-a}{2} . \frac{c+a-b}{2} . \frac{a+b-c}{2} = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

Theo 94III.1 thì BĐT cuối đúng $\rightarrow$ (1) đúng (đpcm)

6.2 115V.a Cho ΔABC. CMR : $4r.r_c \leq c^2$

Giải

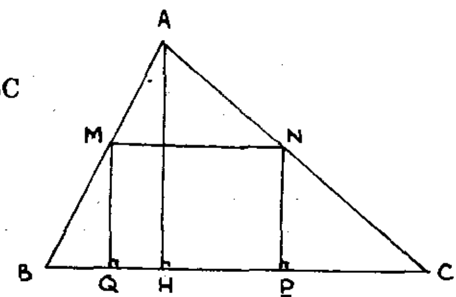
Ta có $\begin{cases} S = pr \\ S = (p - a)r_c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{S}{p} \\ r_c = \dfrac{S}{p - c} \end{cases}$ Do đó

$$4r.r_c = 4 . \frac{S}{p} . \frac{S}{p - c} = 4\frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{p(p - c)}$$

$$= 4(p - a)(p - b) \leq 4\left[\frac{(p - a)(p - b)}{2}\right]^2 = 4\left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2$$

6.3 53III. Bộ đề cũ : CMR : dt$\Delta \geq 2$ diện tích hình vuông nội tiếp Δ

Giải



Ta sẽ chứng minh : dtABC $\geq$ 2dt hình vuông (MNPQ)

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}AH . BC \geq 2MN.PQ$$

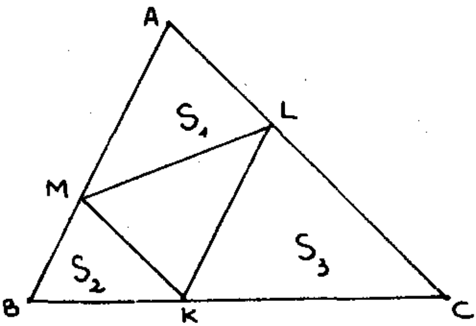
$$\leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{MN}{BC} . \frac{MQ}{AH}$$

Thật vậy ta có

$$\frac{MN}{BC}\cdot\frac{MQ}{AH}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\leqslant\frac{1}{AB^2}\left(\frac{AM+BM}{2}\right)^2=\frac{1}{AB^2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

6.4 : 101V.Bộ đề cũ . Cho ΔABC có diện tích bằng 1. Lấy các điểm K, L, M $\in$ BC, CA, AB. CMR : trong các ΔALM, BMK, CKL luôn có ít nhất 1 Δ có diện tích $\leqslant \frac{1}{4}$

Giải :



Gọi diện tích các ΔABC, ALM, BMK, CKL lần lượt là S, S_1, S_2, S_3.

Giả sử trong các ΔALM, BMK, CKL không có Δ nào có diện tích $\leqslant \frac{1}{4}$ suy ra

$$\boxed{S_1S_2S_3 > \left(\frac{1}{4}\right)^3} \qquad (1)$$

Mặt khác :

$$\times\begin{cases} S_1 = \dfrac{S_1}{S} = \dfrac{\frac{1}{2}AM.AL\sin A}{\frac{1}{2}AB.AC\sin A} = \dfrac{AM.AL}{AB.AC} \\ S_2 = \dfrac{S_2}{S} = \dfrac{\frac{1}{2}BM.BK\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC\sin B} = \dfrac{BM.BK}{BA.BC} \\ S_3 = \dfrac{S_3}{S} = \dfrac{\frac{1}{2}CK.CL\sin C}{\frac{1}{2}CB.CA\sin C} = \dfrac{CK.CL}{CB.CA} \end{cases}$$

$$S_1S_2S_3 = \frac{AM.BM}{AB^2}\cdot\frac{BK.CK}{BC^2}\cdot\frac{CL.AL}{CA^2}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{1}{AB^2}\left(\frac{AM + BM}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{BC^2}\left(\frac{BK + CK}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{CA^2}\left(\frac{CL + AL}{2}\right)^2$$

$$\leftrightarrow \quad \boxed{S_1S_2S_3 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3} \quad (2)$$

Ta thấy (1) và (2) mâu thuẫn nhau. Vậy điều giả sử là sai. Vậy trong các ΔAML, BMK, CKL luôn có ít nhất 1Δ có diện tích $\leq \frac{1}{4}$

6.5 : Cho ΔABC có diện tích S

CMR : $S \leq \frac{1}{6}[r(r_a + r_b + r_c) + r_ar_b + r_br_c + r_cr_a]$

Giải

Ta có $S = pr$; $S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

$\Rightarrow S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)r.r_a.r_b.r_c = S^2r.r_a.r_b.r_c \Rightarrow S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$+\begin{cases} S = \sqrt{(r.r_a).(r_b.r_c)} \leq \frac{1}{2}(r.r_a + r_br_c) \\ S = \sqrt{(r.r_b).(r_c.r_a)} \leq \frac{1}{2}(r.r_b + r_cr_a) \\ S = \sqrt{(r.r_c).(r_a.r_b)} \leq \frac{1}{2}(r.r_c + r_ar_b) \end{cases}$$

$$3S = 3\sqrt{rr_ar_br_c} \leq \frac{1}{2}[r(r_a+r_b+r_c) + r_ar_b + r_br_c + r_cr_a]$$

$$\leftrightarrow S = \leq \frac{1}{6}[r(r_a + r_b + r_c) + r_ar_b + r_br_c + r_cr_a]$$

6.6 Cho ΔABC. CMR : $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \leq \frac{9R^2}{4S}$

Giải :

$$S\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right) = S.\left(\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c}\right) =$$

$$= \frac{S^2}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{r}{p-c}\right) = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)$$

$= (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b) \overset{\text{(Dễ c/m)}}{\leq} \frac{1}{3}[(p-a)+(p-b)+(p-c)]^2$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)^2 \overset{\text{Ta sẽ c/m}}{\geq} \frac{9R^2}{4} \leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 27R^2$

$\leftrightarrow [2R(\sin A + \sin B + \sin C)]^2 \leq 27R^2 \leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng (xem thêm phương pháp 6 : Qui nạp Côsi)

6.7 $[$***141IV.b***$]$ *:* Δ có cạnh a, b, c diện tích S.

CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Giải :

Ta có $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p}\,.\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{p}.\sqrt{\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3} = \sqrt{p}.\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$

$\overset{\text{(BCS)}}{\leq} \frac{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} \leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

6.8 : Δ có cạnh a, b, c diện tích S, trung tuyến m_a, m_b, m_c.

CMR : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$

Giải :

Theo 6.7 ta có $S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$

Mặt khác :

$$+\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \end{cases}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Do đó $S \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{4\sqrt{3}} = \dfrac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3\sqrt{3}}$

Vậy $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$

6.9 : CMR : $(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27S^2 \ \forall\Delta ABC$

Giải

Theo bài 6.8 ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{9}{4}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad (1)$$

Mặt khác : $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{c}h_c$ do đó

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = 4S^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 12S^2.\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \quad (2)$$

Nhân các vế của (1) và (2) suy ra

$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27S^2$$

6.10 : ΔABC. *CMR :* $bc\cot g\frac{A}{2} + ca\cot g\frac{B}{2} + ab\cot g\frac{C}{2} \geq 12S$

Giải :

$$VT = \frac{2S\cot g\frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{2S\cot g\frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{2S\cot g\frac{C}{2}}{\sin C}$$

$$= S\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right) \geq S.\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$$

$$= \frac{3S}{\left[\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right]^2} \geq \frac{3S}{\left[\dfrac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}\right]^2}$$

Áp dụng BĐT Jensen

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq 3\sin\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3} = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

ta có
$$\frac{3S}{\left[\dfrac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}\right]^2} \geq \frac{3S}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 12S \text{ (đpcm)}$$

> **Bình luận :** Diện tích tam giác là chiếc cầu nối các mối quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác.

7. Kỹ thuật cặp nghịch đảo 3 số

Nội dung : Ta có

$$\boxed{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \quad \forall\, x, y, z > 0 \qquad (*)}$$

Thật vậy : $VT \geq 3\sqrt[3]{xyz}\,.\,3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}} = 9$

Bất đẳng thức này chứng minh rất dễ nhưng nó có ý nghĩa rất lớn trong vai trò nhận dạng và đưa các bài toán xa lạ trở thành bài toán quen biết.

Các ví dụ sau đây sẽ minh chứng điều đó.

7.1. 103 IV. Bộ đề cũ . CMR : $h_a + h_b + h_c \geq 9r \ \forall \ \Delta ABC$

Giải

$$\Leftrightarrow \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \geq 9\frac{S}{p}$$

$$\Leftrightarrow 2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Điều này đúng theo BĐT (*)

7.2. CMR : $r_a + r_b + r_c \geq 9r \ \forall \ \Delta ABC$

Giải

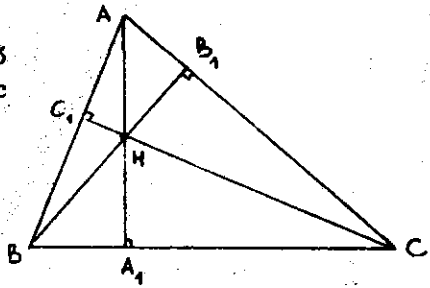
$$\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \geq 9\frac{S}{p} \Leftrightarrow p\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right) \geq 9$$

$$\leftrightarrow [(p-a)+(p-b)+(p-c)]\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right] \geqslant 9.$$

Đúng theo BĐT (*)

7.3. [114 V a] ΔABC nhọn có đường cao AA_1, BB_1, CC_1 và trực tâm H.

CMR : $\dfrac{AH}{A_1H}+\dfrac{BH}{B_1H}+\dfrac{CH}{C_1H} \geqslant 6$



Giải

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{AH}{A_1H}\right)+\left(1+\frac{BH}{B_1H}\right)+\left(1+\frac{CH}{C_1H}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow \frac{AA_1}{HA_1}+\frac{BB_1}{HB_1}+\frac{CC_1}{HC_1} \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}AA_1 \,.\, BC}{\frac{1}{2}HA_1 \,.\, BC}+\frac{\frac{1}{2}BB_1 \,.\, CA}{\frac{1}{2}HB_1 \,.\, CA}+\frac{\frac{1}{2}CC_1 \,.\, AB}{\frac{1}{2}HC_1 \,.\, AB} \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow \frac{dt(ABC)}{dt(HBC)}+\frac{dt(ABC)}{dt(HCA)}+\frac{dt(ABC)}{dt(HAB)} \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow [dt(HBC)+dt(HCA)+dt(HAB)]\left[\frac{1}{dt(HBC)}+\frac{1}{dt(HCA)}+\frac{1}{dt(HAB)}\right] \geqslant 9$$

Điều này đúng theo BĐT (*) $\rightarrow$ (đpcm)

7.4. CMR : $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c} \geqslant 6\ \forall a, b, c > 6$

Giải

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c} \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$ Đúng theo BĐT (*)

7.5. CMR : $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}$ $\forall a, b, c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geqslant 9.$$

Đúng theo BĐT (*)

7.6. CMR : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$ $\forall a, b, c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geqslant \frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geqslant 9.$$

Đúng theo BĐT (*).

7.7. CMR : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \geqslant \dfrac{a+b+c}{2}$ $\forall a, b, c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)+\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\leftrightarrow a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+c\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

$$\leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] \geqslant 9$$

Đúng theo BĐT (*) $\rightarrow$ (đpcm).

7.8. CMR : $\log_{b+c}a^2 + \log_{c+a}b^2 + \log_{a+b}c^2 \geqslant 3 \ \forall a, b, c > 2$

Giải : Vì b, c > 2 $\rightarrow$ bc > 2.max(b, c) $\geqslant$ b + c

$$\text{Do đó } \log_{b+c}a^2 = \frac{\ln a^2}{\ln(b+c)} \geqslant \frac{\ln a^2}{\ln(bc)} = \frac{2\ln a}{\ln b + \ln c}$$

Từ đó ta có : $\log_{b+c}a^2 + \log_{c+a}b^2 + \log_{a+b}c^2 \geqslant$

$$\geqslant \frac{2\ln a}{\ln b + \ln C} + \frac{2\ln b}{\ln c + \ln a} + \frac{2\ln c}{\ln a + \ln b} \geqslant 2 . \frac{3}{2} = 3$$

(Ở đây ta sử dụng bài 7.6 : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2} \ \forall x, y, z > 0$)

7.9. CMR : $2\left(\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b}\right) \geqslant \frac{9}{a+b+c} \ \forall a, b, c > 1$

(Vô Địch Nam Tư 70)

Giải

$$\leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left[\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b}\right] \geqslant 9$$

Theo BĐT Cô Si ta có :

$$\times \begin{cases} (b+c) + (c+a) + (a+b) \geqslant 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \\ \dfrac{\log_b c}{b+c} + \dfrac{\log_c a}{c+a} + \dfrac{\log_a b}{a+b} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{\log_b c \cdot \log_c a \cdot \log_a b}{(b+c)(c+a)(a+b)}} \end{cases}$$

$$[(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left[\frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a} + \frac{\log_a b}{a+b}\right] \geqslant 9\sqrt[3]{\log_b b} = 9$$

$\rightarrow$ (đpcm)

7.10. *CMR* : $2\left(\dfrac{m^{x_1-x_2}}{b+c}+\dfrac{m^{x_2-x_3}}{c+a}+\dfrac{m^{x_3-x_1}}{a+b}\right) \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}\ \forall a, b, c, m > 1$

Giải

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{m^{x_1-x_2}}{b+c}+\frac{m^{x_2-x_3}}{c+a}+\frac{m^{x_3-x_1}}{a+b}\right] \geqslant 9\ (*)$$

Ta có

$$VT\ (*) \geqslant 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}\,.\,3\sqrt[3]{\frac{m^{x_1-x_2}.m^{x_2-x_3}.m^{x_3-x_1}}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

$$= 9\sqrt[3]{m^{x_1-x_1}} = 9\sqrt[3]{m^0} = 9 \rightarrow \text{(dpcm)}$$

7.11. Cho $\begin{cases} a, b, c \\ a+b+c=1 \end{cases}$ *CMR* $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{9}{2}$

Giải

$$\leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geqslant 9$$

Đúng theo BĐT (*).

7.12. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leqslant 1 \end{cases}$. *CMR* : $\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab} \geqslant 9$

Theo BĐT (*) thì

$$[(a^2+2bc)+(b^2+2ca)+(c^2+2ab)]\left[\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right] \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right) \geqslant 9$$

Mà $0 < (a+b+c)^2 \leqslant 1 \rightarrow \dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab} \geqslant 9$

7.13. Cho ΔABC. *CMR* : $\displaystyle\sum_{A,B,C}\frac{1}{(1+2\cos A+4\cos A\cos B)} \geqslant 1$

Giải :

Theo BĐT (*) thì

$$\sum_{A,B,C}(1+2\cos A+4\cos A\cos B)\,.\sum_{A,B,C}\frac{1}{1+2\cos A+4\cos A\cos B}\geq 9$$

Mà $\sum_{A,B,C}(1+2\cos A+4\cos A\cos B)=3+2\sum_{A,B,C}\cos A+4\sum_{A,B,C}\cos A\cos B$.

Dễ dàng c/m được : $\sum_{A,B,C}\cos A=\cos A+\cos B+\cos C\leq\dfrac{3}{2}$

Mặt khác dễ dàng ta chứng minh được

$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leq(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$

$\rightarrow 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)\leq$

$\leq(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leq\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

Do đó $\sum_{A,B,C}(1+2\cos A+4\cos A\cos B)\leq 3+2\,.\dfrac{3}{2}+3=9$

Vậy thì : $\sum_{A,B,C}\dfrac{1}{1+2\cos A+4\cos A\cos B}\geq 1.$

8. Kỹ thuật cặp nghịch đảo n số :

$$\boxed{(X_1+\ldots+X_n)\left(\frac{1}{X_1}+\ldots+\frac{1}{X_n}\right)\geq n^2\ \forall\ X_1\ \ldots\ X_n>0}\quad(**)$$

Đặt $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Hãy chứng minh các BĐT sau $\forall a_1, a_2, \ldots a_n>0$

8.1. CMR: $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{S-a_i}{a_i}\geq n^2-n$

Giải

$$\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{S-a_i}{a_i}\right)\geq n^2-n+n=n^2$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{S}{a_i} \geqslant n^2 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$$ Đúng theo BĐT (**)

8.2. *CMR* : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S-a_i} \geqslant \frac{n^2}{(n-1)S}$

Giải

Theo BĐT (**) ta có $\sum_{i=1}^{n} (S-a_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S-a_i} \geqslant n^2$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n} (S-a_i) = nS - \sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1)S.$

Vậy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S-a_i} \geqslant \frac{n^2}{(n-1)S}$

8.3. *CMR* : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$

Giải

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i}{S-a_i}\right) \geqslant \frac{n}{n-1} + n = \frac{n^2}{n-1}$$

$$\leftrightarrow (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{S}{S-a_i} \geqslant n^2 \leftrightarrow (n-1)S \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S-a_i} \geqslant n^2$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (S-a_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S-a_i} \geqslant n^2.$$ Đúng theo BĐT (**)

8.4. *CMR* : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{S-a_i} \geqslant \frac{S}{n-1}$

Giải

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{a_i^2}{S-a_i}\right) \geqslant \frac{S}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{S}{n-1} + S$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\left(1 + \frac{a_i}{S - a_i}\right) \geqslant \frac{nS}{n-1} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i S}{S - a_i} \geqslant \frac{nS}{n-1}$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$$ Đúng theo 8.3 (đpcm).

8.5. CMR : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{S - a_i}} \geqslant 2 \ (n \geqslant 2)$

Giải

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{S - a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{(S - a_i)a_i}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\dfrac{(S - a_i) + a_i}{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{S} = \frac{2}{S}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{2}{S}.S = 2$$

8.6. Cho $\begin{cases} a_1, \ldots a_n < 0 \\ a_1 + \ldots + a_n = 1 \end{cases}$ *CMR :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2 - a_i} \geqslant \frac{n}{2n-1}$

(Vô địch UCRAINA)

Giải

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i}{2 - a_i}\right) \geqslant \frac{n}{2n-1} + n = \frac{2n^2}{2n-1}$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2 - a_i} \geqslant \frac{2n^2}{2n-1} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant \frac{n^2}{2n-1}$$

$$\leftrightarrow (2n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n^2 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (2 - a_i) . \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n^2$$

Bất đẳng thức này đúng theo (**) → (đpcm).

9. Kĩ thuật đánh giá mẫu số

9.1 : CMR : $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab}\leq\dfrac{a+b+c}{2abc}\quad\forall\ a,\ b,\ c>0$

Giải Áp dụng BĐT Cô Si ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{a^2+bc}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{a^2bc}}=\dfrac{1}{2a\sqrt{bc}}=\dfrac{\sqrt{bc}}{2abc}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(b+c)}{2abc}\\[2ex]\dfrac{1}{b^2+ca}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{b^2ca}}=\dfrac{1}{2b\sqrt{ca}}=\dfrac{\sqrt{ca}}{2abc}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(c+a)}{2abc}\\[2ex]\dfrac{1}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{c^2ab}}=\dfrac{1}{2c\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{2abc}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{2abc}\end{cases}$$

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a)+\frac{1}{2}(a+b)}{2abc}=\frac{a+b+c}{2abc}$$

9.2. CMR : $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{abc}\quad\forall a,\ b,\ c>0$

Giải $\forall\ x,\ y>0$ thì

$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)\geq(x+y)(2xy-xy)=(x+y)xy$

Do đó :

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\dfrac{1}{(a+b)ab+abc}=\dfrac{1}{bc(a+b+c)}\\[2ex]\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\dfrac{1}{(b+c)bc+abc}=\dfrac{1}{bc(a+b+c)}\\[2ex]\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{(c+a)ca+abc}=\dfrac{1}{ca(a+b+c)}\end{cases}$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq$$

$$\leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc} \quad \text{(đpcm)}$$

9.3 : CMR $$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} + \frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} + \frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} + \frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

$\forall a, b, c, d > 0$ (1)

Giải : $\forall\ x, y, z > 0$ ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + \frac{1}{2}(y^4 + z^4) + \frac{1}{2}(z^4 + x^4) \geq$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \frac{1}{2}(x^2y^2 + y^2z^2) + \frac{1}{2}(y^2z^2 + z^2x^2) + \frac{1}{2}(z^2x^2 + x^2y^2)$$

$$\geq \sqrt{(x^2y^2)(y^2z^2)} + \sqrt{(y^2z^2)(z^2x^2)} + \sqrt{(z^2x^2)(x^2y^2)}$$

$$= y^2xz + z^2xy + x^2yz$$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz\,(x + y + z)$. Từ đó ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} \leq \dfrac{1}{abc(a+b+c)+abcd} = \dfrac{1}{abc(a+b+c+d)} \\ \dfrac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} \leq \dfrac{1}{bcd(b+c+d)+abcd} = \dfrac{1}{bcd(a+b+c+d)} \\ \dfrac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} \leq \dfrac{1}{cda(c+d+a)+abcd} = \dfrac{1}{cda(a+b+c+d)} \\ \dfrac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \dfrac{1}{dab(d+a+b)+abcd} = \dfrac{1}{dab(a+b+c+d)} \end{cases}$$

$$VT(1) \leq \frac{1}{abc(a+b+c+d)} + \frac{1}{bcd(a+b+c+d)} + \frac{1}{cda(a+b+c+d)} + \frac{1}{dab(a+b+c+d)}$$

$$\leftrightarrow VT\ (1) \leq \frac{a+b+c+d}{abcd(a+b+c+d)} = \frac{1}{abcd}$$

9.4. Cho $a_1, a_2, \dots a_n > 0$ $(n \geq 3)$. CMR

$$\frac{1}{a_1^n + \dots + a_{n-1}^n + a_1a_2\dots a_n} + \frac{1}{a_2^n + \dots + a_n^n + a_1a_2\dots a_n} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{a_n^n + a_1^n + \dots + a_{n-2}^n + a_1a_2\dots a_n} \leq \frac{1}{a_1a_2\dots a_n}$$

Chú ý : Kĩ thuật sử dụng Cô Si để đánh giá mẫu số rất nghệ thuật và hoàn toàn khác hẳn với các kĩ thuật ở 9.1, 9.2 và 9.3. Đề nghị bạn đọc tự giải.

9.5 [150 I. 2. Vô địch Mỹ 1980]. Cho a, b, c $\in [0,1]$. *CMR*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \quad (1)$$

Giải

Giả sử $a = \max(a, b, c)$. Khi đó ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{a}{b+c+1} = \dfrac{a}{b+c+1} \\ \dfrac{b}{c+a+1} \leq \dfrac{b}{c+b+1} \\ \dfrac{c}{a+b+1} \leq \dfrac{c}{c+b+1} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a+b+c}{b+c+1} \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 - \frac{a+b+c}{b+c+1} = \frac{1-a}{b+c+1} \quad (3)$$

Nếu $a = 1$ thì (3) đúng. Nếu $a \neq 1 \rightarrow 1 - a > 0$. Do đó (3) $\leftrightarrow (b+c+1)(1-b)(1-c) \leq 1$. Theo BĐT Cô Si :

$$(b+c+1)(1-b)(1-c) \leq \left[\frac{(b+c+1)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3 = 1 \rightarrow 3 \text{ đúng.}$$

Lấy các vế của (2) + (3) $\rightarrow$ (1) đúng (đpcm)

9.6. *CMR* $\dfrac{a_1}{a_2 + ... + a_n + 1} + ... + \dfrac{a_n}{a_1 + ... + a_{n-1} + 1} +$

$+ (1 - a_1)(1 - a_2) ... (1 - a_n) \leqslant 1 \ \forall \ a_1 ... a_n \in [0,1] \ (1)$

Giải

Giả sử $a_1 = \max(a_1, a_2, ... a_n)$. Khi đó ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2 + ... + a_n + 1} = \dfrac{a_1}{a_2 + ... + a_n + 1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_n}{a_1 + ... + a_{n-1} + 1} \leqslant \dfrac{a_n}{a_2 + ... + a_n + 1} \end{cases}$$

$$\dfrac{a_1}{a_2 + ... + a_n + 1} + ... + \dfrac{a_n}{a_1 + ... + a_{n-1} + 1} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_2 + ... + a_n + 1} \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) \leqslant 1 - \dfrac{a_1 + ... + a_n}{a_2 + ... + a_n + 1} = \dfrac{1 - a_1}{a_2 + ... + a_n + 1} \quad (3)$$

Nếu $a_1 = 1 \rightarrow (3)$ đúng. Nếu $a_1 \neq 1 \rightarrow 1 - a_1 > 0$. Do đó

$(3) \leftrightarrow (a_2 + ... + a_n + 1)(1 - a_2) ... (1 - a_n) \leqslant 1.$

Ta có VT $\leqslant \left[\dfrac{(a_2 + ... + a_n + 1) + (1 - a_2) + ... + (1 - a_n)}{n}\right]^n = 1$

$\leftrightarrow$ (3) đúng. Lấy vế của (2) + (3) $\rightarrow$ (1) đúng.

9.7 *26 II.2* Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

CMR $$\dfrac{a}{b^2 + c^2} + \dfrac{b}{c^2 + a^2} + \dfrac{c}{a^2 + b^2} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Giải

$$(1) \leftrightarrow \dfrac{a}{1 - a^2} + \dfrac{b}{1 - b^2} + \dfrac{c}{1 - c^2} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ta sẽ c/m $\dfrac{a^2}{a(1-a^2)} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

$$\leftrightarrow a(1-a^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} \leftrightarrow a^2(1-a^2)^2 \leqslant \frac{4}{27}$$

Ta có

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2}(2a^2)(1-a^2)(1-a^2) \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{2a^2+(1-a^2)+(1-a^2)}{3}\right]^3 = \frac{4}{27}$$

Tương tự $\dfrac{b^2}{b(1-b^2)} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2$; $\dfrac{c^2}{c(1-c^2)} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2$. Do đó

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow$ (1) đúng

9.8 : Cho $\begin{cases} a_1, \ldots a_n > 0 \\ a_1^{2k}+\ldots+a_n^{2k}=1 \end{cases}$ và k, m, n $\in$ **Z** .

CMR : $\dfrac{a_1^{2k-1}}{1-a_1^{2m}}+\ldots+\dfrac{a_n^{2k-1}}{1-a_n^{2n}} \geqslant \dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{a_1^{2k}}{a_1(1-a_1^{2m})}+\ldots+\frac{a_n^{2k}}{a_n(1-a_n^{2m})} \geqslant \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$$

Ta sẽ chứng minh : $\dfrac{a_1^{2k}}{a_1(1-a_1^{2m})} \geqslant \dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}.a_1^{2k}$ (1)

$$\leftrightarrow a_1(1-a_1^{2m}) \leqslant \frac{2m}{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}} \leftrightarrow a_1^{2m}(1-a_1^{2m})^{2m} \leqslant \frac{(2m)^{2m}}{(2m+1)^{2m+1}}$$

Ta có :

$$a_1^{2m}(1-a_1^{2m})^{2m} = \frac{1}{2m}(2ma_1^{2m})\underbrace{(1-a_1^{2m})(1-a_1^{2m})\dots(1-a_1^{2m})}_{2m}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\leq} \frac{1}{2m}\left[\frac{(2ma_1^{2m}) + \underbrace{(1-a_1^{2m})+\dots+(1-a_1^{2m})}_{2m}}{2m+1}\right]^{2m+1} = \frac{(2m)^{2m}}{(2m+1)^{2m+1}} \text{ (đpcm)}$$

Tương tự ta có $\dfrac{a_2^{2k}}{a_2(1-a_2^{2m})} \geq \dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}a_2^{2k}$ (2)

. . . .

$$\frac{a_n^{2k}}{a_n(1-a_n^{2m})} \geq \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}a_n^{2k} \qquad \text{(n)}$$

Cộng các vế của (1), (2),... (n) và chú ý $a_1^{2k} + \dots + a_n^{2k} = 1 \rightarrow$ (đpcm)

10. Kỹ thuật đổi biến số

Mục đích : Nhằm chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi đại số (với các biến cũ) sang trạng thái dễ biến đổi Đại số hơn (với các biến mới)

10.1 : CMR $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ $\forall a, b, c > 0$ (1)

Giải : Đặt $\begin{cases} b+c = x > 0 \\ c+a = y > 0 \\ a+b = z > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y+z-x}{2} \\ b = \dfrac{z+x-y}{2} \\ c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$(1) \leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq 3 \leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) \geq 6$$

Theo BĐT Cô Si VT $\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}} = 6$

$\rightarrow$ (đpcm)

10.3 Cho ΔABC (a, b, c).

CMR $\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a + b + c$

Giải :

Đặt $\begin{cases} b+c-a = x > 0 \\ c+a-b = y > 0 \\ a+b-c = z > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{y+z}{2} \\ b = \frac{z+x}{2} \\ c = \frac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó

(1) $\leftrightarrow \frac{(y+z)^2}{4x} + \frac{(z+x)^2}{4y} + \frac{(x+y)^2}{4z} \geq x + y + z$ (2). Ta có

VT (2) $\geq \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right)$

$\geq \sqrt{\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}} = z + x + y \leftrightarrow$ (đpcm)

10.4 : Cho Δ ABC diện tích S.

CMR : $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$ (1)

Giải

Đặt $\begin{cases} b+c-a = x > 0 \\ c+a-b = y > 0 \\ a+b-c = z > 0 \end{cases}$

$\rightarrow \sqrt{S} = \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt[4]{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{(x+y+z)xyz}$

Khi đó (1) $\leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}} = 3.\sqrt[4]{\frac{3}{(x+y+z)xyz}}$

Ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{3}{x+y+z}$

Do đó $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 4\sqrt[4]{\frac{3}{(x+y+z)xyz}}$

Suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3\sqrt[4]{\frac{3}{(x+y+z)xyz}}$ (đpcm)

10.5 ***94 III.1*** Δ ABC.

CMR $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$ (1)

Giải

Đặt $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{y+z}{2} \\ b=\frac{z+x}{2} \\ c=\frac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có (1) $\leftrightarrow xyz \leq \frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}.\frac{x+y}{2}$.

Theo BĐT Cô Si ta có

$$\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}.\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{yz}.\sqrt{zx}.\sqrt{xy} = xyz \text{ (đpcm)}$$

10.6 Cho ΔABC. *CMR* $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$ (1)

Giải

Ta có $\left.\begin{cases} S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \\ S^2 = p^2r^2 \end{cases}\right\} \rightarrow r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

Đặt $\begin{cases} p-a=x>0 \\ p-b=y>0 \\ p-c=z>0 \end{cases}$ thì (1) $\leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \geq \frac{x+y+z}{xyz}$ (2)

Ta có VT (2) $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\geq \sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{z^2}}+\sqrt{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}$$

10.7 CMR :

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

$\forall$ a, b, c, d > 0 (Dự bị quốc tế 93 - Mỹ)

Bạn đọc tự giải

Chú ý : Nếu giải bằng BCS thì dễ dàng hơn.

11. Kỹ thuật kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng

11.1. Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}+$$

$$=\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

Giải

Sai lầm thường gặp

Nhiều học sinh mắc sai lầm khi biến đổi S thành tổng 4 cặp phân số nghịch đảo và áp dụng BĐT Cô Si cho từng cặp : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 2$. Cụ thể là

$$S=\sum_{a,b,c,d}\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{a}\right)\geq\sum_{a,b,c,d}2\sqrt{\frac{a}{b+c+d}\cdot\frac{b+c+d}{a}}=8$$

Rồi vội vàng kết luận Min S = 8

Để thấy sự sai lầm ta thấy nếu S = 8 thì $\begin{cases}a=b+c+d\\b=c+d+a\\c=d+a+b\\d=a+b+c\end{cases}$

Suy ra a + b + c + d = 3(a + b + c + d) $\leftrightarrow$ a + b + c + d = 0
Vô lý vì a, b, c, d > 0

Lời giải đúng : Để tìm Min S ta cần chú ý S là một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó Min (Max) (nếu có) thường đạt được khi a = b = c = d.

Vậy đảo lại ta cho trước a = b = c = d để dự đoán Min S là bằng $\frac{4}{3} + 12 = \frac{40}{3}$ rồi sau đó đánh giá các BĐT có điều kiện dấu bằng là tập con của điều kiện a = b = c = d.

Đặt : $S_1 = \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}$.

Theo BĐT Cô Si ta có

$$S_1 = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right) \geq 6.2 = 12$$

Đặt $S_2 = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$. Suy ra

$$S_2 + 4 = \sum_{a,b,c,d} \left(1 + \frac{a}{b+c+d}\right) =$$

$$= (a+b+c+d)\left[\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c}\right]$$

$$= \frac{1}{3}[(b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) + (a+b+c)] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c}\right]$$

$$\geq \frac{1}{3} . 4\sqrt[4]{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)} \times$$

$$\times 4\sqrt[4]{\frac{1}{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)}} = \frac{16}{3}$$

$\rightarrow S_2 \geq \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$. Từ đó $S = S_2 + S_1 \geq \frac{4}{3} + 12 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = d \rightarrow \text{Min } S = 13\frac{1}{3}$

Vậy Max $S = 2\sqrt{3}$ đạt được khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$

11.2 : Tìm Min $S = \left(1 + \frac{a}{3b}\right)\left(1 + \frac{b}{3c}\right)\left(1 + \frac{c}{3a}\right)$ $\forall$ a, b, c > 0

Sai lầm thường gặp :

$$S \geq 2\sqrt{\frac{a}{3b}} \cdot 2\sqrt{\frac{b}{3c}} \cdot 2\sqrt{\frac{b}{3a}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Suy ra Min $S = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

Rõ ràng $S = \frac{8\sqrt{3}}{9} \leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = 3c \\ c = 3a \end{cases} \rightarrow a + b + c = 3\,(a + b + c)$

$\rightarrow a + b + c = 0$ Vô lý

Lời giải đúng :

$$\times \begin{cases} 1 + \frac{a}{3b} = \frac{b + b + b + a}{3b} \geq \frac{4\sqrt[4]{b.b.b.a}}{3b} = \frac{4\sqrt[4]{b^3a}}{3b} \geq 0 \\ 1 + \frac{b}{3c} = \frac{c + c + c + b}{3c} \geq \frac{4\sqrt[4]{c.c.c.b}}{3c} = \frac{4\sqrt[4]{c^3.b}}{3c} \geq 0 \\ 1 + \frac{c}{3a} = \frac{a + a + a + c}{3a} \geq \frac{4\sqrt[4]{a.a.a.c}}{3a} = \frac{4\sqrt[4]{a^3.c}}{3a} \geq 0 \end{cases}$$

$$S = \left(1 + \frac{a}{3b}\right)\left(1 + \frac{b}{3c}\right)\left(1 + \frac{c}{3a}\right) \geq \frac{4^3abc}{3^3 . abc} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$$

Vậy Min $S = \frac{64}{27}$. Dấu bằng $\leftrightarrow a = b = c$

11.3 : Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$

Tìm Max $S = \sqrt{a + b + c} + \sqrt{b + c + d} + \sqrt{c + d + a} + \sqrt{d + a + b}$

Sai lầm thường gặp : Theo BĐT Cô Si ta có

$$S \leqslant \frac{(a+b+c)+1}{2} + \frac{(b+c+d)+1}{2} + \frac{(c+d+a)+1}{2} + \frac{(d+a+b)+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[3(a+b+c+d)+4] = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{7}{2}$$

Rõ ràng $S = \frac{7}{2} \leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ b+c+d=1 \\ c+d+a=1 \\ d+a+b=d \end{cases} \rightarrow 3(a+b+c+d) = 4 \leftrightarrow 3 = 4$ Vô lý

Lời giải đúng : Theo BĐt Cô si ta có

$$+\begin{cases} \sqrt{(a+b+c) \cdot \frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(a+b+c+\frac{3}{4}}{2} \\ \sqrt{(b+c+d) \cdot \frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(b+c+d)+\frac{3}{4}}{2} \\ \sqrt{(c+d+a) \cdot \frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(c+d+a)+\frac{3}{4}}{2} \\ \sqrt{(d+a+b) \cdot \frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(d+a+b)+\frac{3}{4}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot S \leqslant \frac{1}{2}[3(a+b+c+d)+3] = 3 \rightarrow S \leqslant 2\sqrt{3}$$

Các ví dụ sau đây chúng tôi cung cấp lời giải mà không bình luận. Bạn đọc hãy suy ngẫm vì sao dẫn đến những lời giải này

11.4. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a+b=1 \end{cases}$

CMR a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{a^2+b^2} \geqslant 6$ b) $\dfrac{2}{ab} + \dfrac{3}{a^2+b^2} \geqslant 14$

a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{a^2+b^2} = \dfrac{2}{4ab} + \left(\dfrac{1}{2ab} + \dfrac{1}{a^2+b^2}\right) \overset{(\text{CôSi})}{\geqslant} \dfrac{2}{(a+b)^2} + \dfrac{2}{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}$

$$\overset{\text{CôSi}}{\geqslant} 2 + \frac{2}{\frac{[2ab + (a^2 + b^2)]}{2}} = 2 + \frac{4}{(a+b)^2} = 2 + 4 = 6$$

b) $$\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} = \frac{4}{2ab} + \frac{3}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + 3\left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \overset{\text{CôSi}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \frac{2}{(a+b)^2} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}} \overset{\text{CôSi}}{\geqslant} 2 + \frac{6}{\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}} = 2 + \frac{12}{(a+b)^2} = 14$$

11.5 : Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} \geqslant 30$ (1)

Giải : Ta có $(ab + bc + ca)\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right) \geqslant 9 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geqslant \frac{9}{ab+bc+ca}$$

Khi đó

$$VT(1) \geqslant \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$+ \frac{7}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)}} + \frac{21}{3(ab+bc+ca)^2}$$

$$\geqslant \frac{3}{\frac{(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)}{3}} + \frac{21}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{21}{(a+b+c)^2} = \frac{30}{(a+b+c)^2} = 30$$

11.6 : Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* : $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{2}{ab} + \dfrac{2}{bc} + \dfrac{2}{ca} \geqslant 81$

Bạn đọc tự giải

12. Đánh giá trên phương trình và bất phương trình

12.1 107 I : Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình :

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$$

Tìm m để $g = x_1^3 + x_2^3$ đạt a) Max, b) Min

Giải

Để pt có nghiệm thì $0 \leqslant \Delta' = 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right)$

$\leftrightarrow m^4 - 16m^2 + 48 \leqslant 0 \leftrightarrow 4 \leqslant m^2 \leqslant 12 \leftrightarrow 2 \leqslant |m| \leqslant 2\sqrt{3}$.

Khi đó

$$g = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m} = \frac{m^2 - 3}{2m}$$

$$\rightarrow g^6 = \frac{1}{(2m)^6.9.9}\underbrace{(m^2 - 3)...(m^2 - 3)}_{6\text{ số}}.9.9 \leqslant \frac{1}{2^6.3^4.m^6}\left[\frac{6(m^2-3)+9+9}{8}\right]^8$$

$$= \frac{3^4 . m^{10}}{2^{22}} \leqslant \frac{3^4 . (12)^5}{2^{22}} = \frac{3^9}{2^{12}} \rightarrow |g| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$ Từ đó

$\text{Max } g = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ khi $m = 2\sqrt{3}$ và $\text{Min } g = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$ khi $m = -2\sqrt{3}$

12.2 69II.2 : Tìm m để $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leqslant x^2 - 2x + m$ đúng $\forall x \in [-4,6]$

Giải

ĐK cần : Giả sử Bpt thỏa mãn $\forall x \in [-4,6]$

Cho $x = 1 \in [-4,6] \rightarrow 5 \leqslant m - 1 \rightarrow 5 \leqslant m - 1 \rightarrow m \geqslant 6$

Đk Đủ : Giả sử $m \geqslant 6$. Khi đó theo BĐT Cô Si ta có

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leqslant \frac{(4+x)+(6-x)}{2} = 5$$

Mặt khác $x^2 - 2x + m = x^2 - 2x + 1 + m - 1 = (x - 1)^2 + m - 1 \geq 5$

Do đó với $m \geq 6$ thì $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m$. Đáp số $m \geq 6$

12.3 : Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm thực

CMR : $|a| + |b| + |c| \geq \frac{4}{3}$

12.4 Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thực

CMR : $|a| + \frac{|b|}{2} \geq 1$

Mời các bạn đọc tự giải 2 bài 12.3 và 12.4

13. Sử dụng trong Dãy số

13.1 : Dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $\begin{cases} 0 < x_n < 1 \ \forall n \\ x_{n+1}(1 - x_n) > \frac{1}{4} \ \forall n \end{cases}$

CMR : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2}$

Giải

Theo BĐT Cô Si ta có :

$$x_{n+1} + (1 - x_n) \geq 2\sqrt{x_{n+1}(1-x_n)} > 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

suy ra $x_{n+1} - x_n \geq 0$ hay $x_n \leq x_{n+1} \ \forall n \to \{x_n\}$ đơn điệu tăng Mặt khác $0 < x_n < 1$ nên $\{x_n\}$ bị chặn trên. Từ đó ta có $\{x_n\}$ luôn có giới hạn hữu hạn. Đặt $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Ta có $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}$

$$\leftrightarrow a - a^2 \geq \frac{1}{4} \leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2}$

13.2 : Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_o = 1994 \\ x_n^2 - 2x_n \cdot x_{n+1} + 1995 = 0 (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Giải

Vì $x_n^2 - 2x_n \cdot x_{n+1} + 1995 = 0$ nên $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right)$

Mà $x_o = 1994 > 0 \Rightarrow \{x_n\}$ dương.

Theo bất đẳng thức Cô Si ta có

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{1995}{x_n}} = \sqrt{1995} \Rightarrow \{x_n\} \text{ bị chặn dưới}$$

Mặt khác $x_n \geq \sqrt{1995} \Rightarrow x_n^2 \geq 1995 \ \forall \ n = 1, 2\ldots$

Từ đó $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right) = x_n$

Vậy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới $\Rightarrow \{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn $a \geq \sqrt{1995}$. Khi đó $\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right)$

$$\leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1995}{a}\right) \leftrightarrow a^2 - 1995 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{1995}$$

Mà $a \geq \sqrt{1995} \rightarrow a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{1995}$

13.3. Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 1}{5x_n} \end{cases}$ *CMR* : $\dfrac{1}{3} < x_n \leq 2$

13.4. ***105IVa*** . Cho a, b là 2 số dương khác nhau. Người ta lập hai dãy số $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ bằng cách đặt

$$u_1 = a, v_1 = b, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

CMR : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$

14. Sử dụng trong lượng giác

14.1 [*102 II.2* .] *CMR* : nếu $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ thì $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$

Giải

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x/\cos^3 x}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \frac{1 + tg^2 x}{tg^2 x(1 - tgx)} \geq \frac{2tgx}{tg^2 x(1 - tgx)}$$

$$= \frac{2}{tgx(1 - tgx)} \geq \frac{2}{\left[\dfrac{tgx + (1 - tgx)}{2}\right]^2} = 8$$

Dấu "=" $\leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ tgx = 1 - tgx \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ tgx = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Vô nghiệm

$$\rightarrow \frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$$

14.2 [*10 II.1 – 88 II*] Giả sử Δ ABC có 3 góc nhọn

1) *CMR* : tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC

2) *CMR* : tgA + tgB + tgC $\geq 3\sqrt{3}$

3) Tìm Min P = tgA.tgB.tgC

Giải

(1) Ta có $-tgC = tg(\pi - C) = tg(A + B) = \dfrac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} \leftrightarrow$ $tgAtgBtgC - tgC = tgA + tgB \leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$

2) Áp dụng Bất đẳng thức Cô Si cho 3 số tgA, tgB, tgC > 0 ta có

$$tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$$

$$\leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^3 \geq 27\ tgA\ tgB\ tgC$$

$$\leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^3 \geq 27\ (tgA + tgB + tgC)$$

$$\leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^2 \geq 27$$

$$\leftrightarrow tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$$

3) Theo phần (1) và (2) ta có $tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow tgA = tgB = tgC \leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ $\leftrightarrow \Delta$ ABC đều. Vậy Min $(tgAtgBtgC) = 3\sqrt{3}$

14.3 118III.1

1) *CMR* $\left(1 + \dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \forall \Delta ABC$

2) *CMR* $\left(1 + \dfrac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos C}\right) \geq 27\ \forall\ \Delta ABC$ nhọn

Giải

Ta sẽ chứng minh nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq K \end{cases}$ thì

$\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) \geq \left(1 + \dfrac{3}{k}\right)^3$ (*). Thật vậy, ta có

$$VT\ (*) = 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz} \overset{(CôSi)}{\geq}$$

$$1 + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{3}{(\sqrt[3]{xyz})^2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{xyz})^3} \overset{(CôSi)}{\geq}$$

$$1 + \frac{3}{\frac{x+y+z}{3}} + \frac{3}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3} \geq$$

$$1 + \frac{9}{k} + \frac{27}{k^2} + \frac{27}{k^3} = \left(1 + \frac{3}{k}\right)^3 \quad \text{(đpcm)}$$

Sử dụng $\begin{cases} \sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(Xem thêm phương pháp 6 – Qui nạp Cô Si)

1) Ta có

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

2) Vì ΔABC nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C > 0$

Áp dụng BĐT (*) ta có

$$\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos C}\right) \geq \left(1 + \frac{3}{\frac{3}{2}}\right)^3 = (1 + 2)^3 = 27.$$

15. Kĩ thuật khoảng hữu tỉ trong tập số thực

15.1 Cho Δ ABC có các cạnh a, b, c với độ dài hữu tỉ.

CMR $\left(1 + \dfrac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \dfrac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \dfrac{a-b}{c}\right)^c \leq 1$

Giải

Đặt $a = \dfrac{m}{k}, b = \dfrac{n}{k}, c = \dfrac{p}{k}$ với $m, n, p, k \in \mathbb{Z}^+$

Khi đó : $\left(1 + \dfrac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \dfrac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \dfrac{a-b}{c}\right)^c =$

$$= \sqrt[k]{\left(1 + \frac{n-p}{m}\right)^m \left(1 + \frac{p-m}{n}\right)^n \left(1 + \frac{m-n}{p}\right)^p} \overset{\text{(CôSi)}}{\geq}$$

$$\frac{m\left(1+\frac{n-p}{m}\right)+n\left(1+\frac{p-m}{n}\right)+p\left(1+\frac{m-n}{p}\right)}{m+n+p}=\frac{m+n+p}{m+n+p}=1$$

15.2 : CMR : $a^a > \frac{1}{2}\ \forall\ a \in \mathbf{R}^+$

Giải

Rõ ràng với $a \geq 1$ thì $a^a \geq a^1 = a > \frac{1}{2}$

Xét $0 < a \leq 1$. Ta có $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

Do đó $\exists\ k \in \mathbf{Z}^+$ sao cho $a \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$

$\leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq a \leq \frac{1}{k}$ suy ra $a^a \geq \left(\frac{1}{k+1}\right)^a \geq \left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}$

Ta sẽ chứng minh $\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{2} \leftrightarrow \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} \geq \frac{1}{2}$

$\leftrightarrow \frac{1}{k+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^k \leftrightarrow 2^k \geq k+1 \leftrightarrow 2 > \sqrt[k]{k+1}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta có $\sqrt[k]{k+1} = \sqrt[k]{(k+1)\underbrace{.1\ldots1}_{(k-1)\text{ số}}}$

$$\leq \frac{(k+1)+1+\ldots+1}{k} = \frac{(k+1)+(k-1}{k} = 2$$

Từ đó ta có $a^a > \frac{1}{2}$ (Vì các dấu bằng không đồng thời xảy ra).

15.3 : CMR : $a^b + b^a > 1\ \forall\ a, b \in \mathbf{R}^+$

Bình luận : Tất cả các sách đều trình bày lời giải này dựa vào BĐT Bec-nu-li là kiến thức ngoài chương trình phổ thông. Nhờ kỹ thuật này ta dễ dàng đưa về dạng sử dụng BĐT Cô Si.

§2. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPSKI (B.C.S)

I. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPSKI

1. Dạng tổng quát : Cho $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ là 2n số thực tùy ý. Khi đó

- *Dạng 1* : $(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2$ (1)
- *Dạng 2* $\sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + \ldots + a_nb_n|$ (2)
- *Dạng 3* $\sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ (3)

Dấu bằng ở (1), (2) xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$

Dấu bằng ở (3) xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} \geq 0$

- *Hệ quả 1* : Nếu $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = C$ – const thì

$\mathrm{Min}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \dfrac{c^2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ Dấu bằng $\leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n}$

- *Hệ quả 2* : Nếu $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = c^2$ thì

$$\mathrm{Max}(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = |c|\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

Dấu bằng $\leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n} \geq 0$

$$\mathrm{Min}(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = -|C|\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

Dấu bằng $\leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n} \leq 0$

2) Dạng cụ thể

$n = 2$: $\forall$ a, b, c, d $\in$ **R**

1. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac+bd)^2$
2. $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq |ac + bd|$
3. $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$

Dấu "=" ở (1), (2) $\leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Dấu "=" ở (3) $\leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \geq 0$

$n = 3$: $\forall$ a, b, c, m, n, p $\in$ **R**

1. $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2) \geq (am+bn+cp)^2$
2. $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq |am + bn + cp|$
3. $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq am+bn+cp$

Dấu "=" ở (1), (2) $\leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

Dấu "=" ở (3) $\leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \geq 0$

II. CÁC KỸ THUẬT SỬ DỤNG BĐT BUNHIACÔPSKI (B.C.S)

Xin trích giới thiệu 5 kỹ thuật trong 10 kỹ thuật sử dụng BĐT (B.C.S)

1. Đánh giá từ vế lớn sang vế nhỏ

1.1 CMR : a) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

b) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

c) $n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \geq (a_1 + \ldots + a_n)^2$

Giải

a) $2(a^2 + b^2) = (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

b) $3(a^2+b^2+c^2) = (1^2+1^2+1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$

c) $n(a_1^2+\ldots+a_n^2) = (1^2+1^2+\ldots+1^2)(a_1^2+\ldots+a_n^2) \geq (a_1+\ldots+a_n)^2$

1.2 62 II.2 Cho $a + b = 2$. *CMR* : $a^4 + b^4 \geq 2$

Giải

$$a^4 + b^4 = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2)[(a^2)^2 + (b^2)^2] \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}[(1^2+1^2)(a^2+b^2)]^2 \geq \frac{1}{8}[(a+b)^2]^2 = \frac{1}{8}(a+b)^4 = \frac{1}{8}\cdot 2^4 = 2$$

1.3 : *CMR* : $a^4 + b^4 + c^4 \geq ab + bc + ca \ \forall\ a, b, c$

Giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)} \geq$$

$$\geq |ab + bc + ca| \geq ab + bc + ca$$

1.4 CMR : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \quad \forall abc \neq 0$

Giải

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

$$\geq \left|\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} + \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} + \frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right| \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

1.5. 138 I.2 : CMR $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \ \forall\ abc \neq 0$

Giải : Sai lầm thường gặp :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \overset{(B.C.S)}{\geq} \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2$$

$$\overset{CôSi}{\geq} \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Sai lầm là do ta đã sử dụng BĐT Cô Si cho các số $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}$ chưa chắc đã $\geq 0 \ \forall\ abc \neq 0$.

Lời giải đúng :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)\left(\left|\frac{a}{b}\right|^2 + \left|\frac{b}{c}\right|^2 + \left|\frac{c}{a}\right|^2\right)$$

$$\overset{(B.C.S)}{\geq} \frac{1}{3}\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right)^2 \overset{(CôSi)}{\geq}$$

$$\frac{1}{3}.3\sqrt[3]{\left|\frac{a}{b}\right|\left|\frac{b}{c}\right|\left|\frac{c}{a}\right|}\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)$$

$$= \left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right| \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{(đpcm)}$$

Ghi nhớ : $\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left|\frac{x}{y}\right|^2$

1.6 HS II.2 : Cho $xy + yz + zx = 4$. Tìm Min $F = x^4 + y^4 + z^4$

Giải

$$F = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4) \overset{B.C.S}{\geq} \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2+x^2) \geq \frac{1}{3}(xy+yz+zx)^2 = \frac{16}{3}$$

Suy ra Min $F = \frac{16}{3}$ đạt được với $x = y = z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

1.7 Cho $a + b + c = 6$. *CMR* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$

Giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}.6^2 = 12$$

1.8 : Cho $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) \leq \frac{4}{3}$.

CMR $a + b + c \leq 4$

Giải : *Cách 1* : Ta có

$$\frac{4}{3} \geq a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) = a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c)$$

$$= \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 - (a+b+c)$$

Suy ra $(a + b + c)^2 - 3(a + b + c) - 4 \leq 0$

$\leftrightarrow [(a + b + c) + 1] [(a + b + c) - 4] \leq 0$

$\leftrightarrow -1 \leq a + b + c \leq 4 \Rightarrow a + b + c \leq 4$

Cách 2 : $a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) \leq \frac{4}{3}$

$\leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{12}$. Do đó ta có

$$a + b + c = \left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(b - \frac{1}{2}\right) + \left(c - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \overset{(B.C.S)}{\leq}$$

$$\leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2\right]} + \frac{3}{2}$$

$$\leq \sqrt{3 \cdot \frac{25}{12}} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

1.9 94 II.2 Cho $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ u^2 + v^2 = 25 \\ xu + yv \geq 20 \end{cases}$ Tìm Max $(x + v)$

Giải

$$400 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \geq (xu + yv)^2 \geq 400 \rightarrow \begin{cases} xu + yv = 20 \\ \frac{x}{u} = \frac{y}{v} \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{xv = uy.}$ Mặt khác

$$41 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = (x^2 + v^2) + (u^2 + y^2) \geq x^2 + v^2 + 2uy =$$

$$= x^2 + v^2 + 2xv = (x + v)^2 \rightarrow x + v \leq \sqrt{41}$$

Do đó Max $(x + v) = \sqrt{41}$ xảy ra với

$$u = y = \frac{20}{\sqrt{41}},\ x = \frac{16}{\sqrt{41}},\ v = \frac{25}{\sqrt{41}}$$

2. Đánh giá từ vế nhỏ sang vế lớn

2.1 Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *CMR* : $a + 3b + 5c \leqslant \sqrt{35}$

Giải

$$a + 3b + 5c \leqslant \sqrt{(1^2 + 3^2\ 5^2)(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{35}$$

2.2 Cho $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

CMR : $(t^2 + at + b)^2 + (t^2 + ct + d)^2 \leqslant (2t^2 + 1)^2$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$+\begin{cases}(t^2 + at + b)^2 = (t.t + a.t + b.1)^2 \leqslant (t^2 + a^2 + b^2)(t^2 + t^2 + 1^2)\\(t^2 + ct + d)^2 = (t.t + c.t + d.1)^2 \leqslant (t^2 + c^2 + d^2)(t^2 + t^2 + 1^2)\end{cases}$$

$$(t^2+at+b)^2 + (t^2+ct+d)^2 \leqslant (2t^2+1)[(t^2+a^2+b^2) + (t^2+c^2+d^2)]$$

$$\leftrightarrow (t^2 + at + b)^2 + (t^2 + ct + d) \leqslant (2t^2 + 1)(2t^2 + 1) = (2t^2 + 1)^2$$

2.3. Cho $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$.

CMR : $-\sqrt{2} \leqslant x(u + v) + y(u - v) \leqslant \sqrt{2}$

Giải

$$\leftrightarrow |x(u + v) + y(u - v)| \leqslant \sqrt{2}$$

$$\leftrightarrow [x(u + v) + y(u - v)]^2 \leqslant 2$$

Ta có $[x(u + v) + y(u - v)]^2 \leqslant (x^2 + y^2)[(u + v)^2 + (u - v)^2] =$

$$= (x^2 + y^2)\ [2(u^2 + v^2)] = 2$$

Từ đó $-\sqrt{2} \leqslant x(u + v) + y(u - v) \leqslant \sqrt{2}$.

2.4 148 III ΔABC có $a^2 + b^2 \leqslant c^2$. *CMR* $0{,}4 < \dfrac{r}{h_c} < 0{,}5$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{2}{S} \overset{(1)}{<} \frac{S/P}{2S/c} = \frac{c}{2p} = \frac{c}{a + b + c} \overset{(2)}{<} \frac{1}{2}$$

Ta có (2) $\leftrightarrow 2c < a + b + c \leftrightarrow c < a + b$ đúng $\rightarrow$ (đpcm)

(1) $\leftrightarrow 2(a + b + c) < 5c \leftrightarrow 2(a + b) < 3c \leftrightarrow 4(a + b)^2 < 9c^2$

Ta có $4(a+b)^2 \leq 4(1^2+1^2)(a^2+b^2) = 8(a^2+b^2) \leq 8c^2 < 9c^2$
$\rightarrow$ (1) đúng. (đpcm)

2.5 Cho $\begin{cases} a > b\ c \\ b > c > 0 \end{cases}$ *CMR* $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \sqrt{c}\,.\,\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}\,.\,\sqrt{c}$$

$$\leq \sqrt{[(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2][(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2]} = \sqrt{ab}$$

2.6 13I.2 Cho a, b $\geq$ 1. *CMR* : $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{\log_2 a})^2 + (\sqrt{\log_2 b})^2]}$$

$$= \sqrt{2\log_2 ab} = \sqrt{4\log_2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{\log_2\sqrt{ab}} \leq 2\sqrt{\log_2\frac{a+b}{2}}$$

2.7 19 II.2 Cho ΔABC. *CMR* $\sqrt{p} \overset{(1)}{<} \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \overset{(2)}{\leq} \sqrt{3p}$

Giải : (1) : Ta có

$[\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}]^2 = (p-a) + (p-b) + (p-c)$
$+ 2[\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)}] > p$

Do đó $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

2. Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{p-a})^2 + (\sqrt{p-b})^2 + (\sqrt{p-c})^2]}$$

$$= \sqrt{3[(p-a)+(p-b)+(p-c)]} = \sqrt{3p}$$

2.8 54 I.2 Cho $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

CMR : $\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2\beta + 1} + \sqrt{4\cos^2\gamma + 1} \leq \sqrt{21}$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{4\cos^2\alpha+1}+\sqrt{4\cos\beta+1}+\sqrt{4\cos^2\gamma+1}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{4\cos^2\alpha+1})^2+(\sqrt{4\cos^2\beta+1})^2+(\sqrt{4\cos^2\gamma+1})^2]}$$

$$=\sqrt{3[4(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+3]}=\sqrt{3\,.\,7}=\sqrt{21}$$

2.9 144 III.2 Cho $\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma>0\\ \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Tìm Max $g=\sqrt{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}+\sqrt{1+\text{tg}\beta\text{tg}\gamma}+\sqrt{1+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha}$

Giải

Ta có $\dfrac{1}{\text{tg}\gamma}=\text{cotg}\gamma=\text{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}$

$\leftrightarrow 1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta=\text{tg}\gamma(\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta)\leftrightarrow \text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\text{tg}\alpha\gamma+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha=1$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$g=\sqrt{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}+\sqrt{1+\text{tg}\beta\text{tg}\gamma}+\sqrt{1+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta})^2+(\sqrt{1+\text{tg}\beta\text{tg}\gamma})^2+(\sqrt{1+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha})^2]}$$

$$=\sqrt{3[3+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\text{tg}\gamma+\text{tg}\gamma\text{tg}\alpha]}=\sqrt{3\,.\,4}=\sqrt{12}$$

$\rightarrow$ **Max** $g=\sqrt{12}$ **đạt được khi** $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$

2.10. 33 III.2 **Cho** $x^2+y^2=1$. **Tìm Max** $A=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$

(Chú ý phần min A xét ở phương pháp hàm số)

Giải

$$A=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}\leqslant\sqrt{(x^2+y^2)[(\sqrt{1+y})^2+(\sqrt{1+x})^2]}$$

$$=\sqrt{x+y+2}\leqslant\sqrt{\sqrt{(1^2+1^2)(x^2+y^2)}+2}=\sqrt{\sqrt{2}+2}$$

$\rightarrow$ **Max** $A=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **đạt được khi** $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2.11 96 II.1 Tìm Max, Min của $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

Giải

Để hàm số xác định thì $\begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1 \\ 0 \leq \sin x \leq 1 \end{cases}$. Khi đó

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x \leq (\cos x)^{\frac{1}{2}} + (\sin x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$$

Mặt khác theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \leq \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$$

Từ đó : Min $y = 1$ xảy ra với $x = 2k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Max $y = 1$ xảy ra với $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2.12 59 II.2 Tìm Max của $y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}$ với $a \geq 1$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$y = \sqrt{a+\cos x} + \sqrt{a+\sin x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{a+\cos x})^2 + (\sqrt{a+\sin x})^2]}$$

$$= \sqrt{2(2a+\cos x+\sin x)} = \sqrt{2\left[2a+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]} \leq \sqrt{2(2a+\sqrt{2})}$$

Từ đó suy ra Max $y = \sqrt{2(2a + \sqrt{2})}$ xảy ra với $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2.13 11 II.2. Tìm Max $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$. Sử dụng Gpt

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

Giải

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)[(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{4-x})^2]} = 2$$

$\rightarrow$ Max $y = 2$ đạt được $\leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{4-x} \leftrightarrow x = 3$

Mặt khác $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2$; dấu "=" $\leftrightarrow x = 3$

Từ đó suy ra pt $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

chỉ có nghiệm duy nhất $x = 3$

3. Kỹ thuật dồn phối hợp

74 III.2 : Cho $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm Max, Min của $(y - 2x + 5)$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(36x^2 + 16y^2)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] \geq (-2x + y)^2$$

$$\leftrightarrow \frac{25}{16} \geq (y - 2x)^2 \leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq y - 2x \leq \frac{5}{4}$$

$$\leftrightarrow \frac{15}{4} \leq y - 2x + 5 \leq \frac{25}{4}$$

Từ đó ta có : Max $(y - 2x + 5) = \dfrac{25}{4}$

Min $(y - 2x + 5) = \dfrac{15}{4}$

3.2 : Cho $3x - 4y = 7$. *CMR* : $3x^2 + 4y^2 \geq 7$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(3x^2 + 4y^2)\,[(\sqrt{3})^2 + (-2)^2] \geq (3x - 4y)^2 = 49$$

$$\leftrightarrow (3x^2 + 4y^2)\ (3 + 4) \geq 49 \leftrightarrow (3x^2 + 4y^2) \geq 7$$

3.3 : Cho $x^2 + 4y^2 = 1$. *CMR* : $|x - y| \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(x^2 + 4y^2)\left(1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \geq (x - y)^2$$

$$\leftrightarrow 1\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \geq (x - y)^2 \leftrightarrow |x - y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3.4 CMR : $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}\ \forall\ a, b, c \geqslant 0$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$(a^3 + b^3 + c^3)(abc + abc + abc) =$

$= [(\sqrt{a^3})^2 + (\sqrt{b^3})^2 + (\sqrt{c^3})^2]\,[(\sqrt{abc})^2 + (\sqrt{abc})^2 + (\sqrt{abc})^2]$

$\geqslant [\sqrt{a^3}\,.\,\sqrt{abc} + \sqrt{b^3}\,.\,\sqrt{abc} + \sqrt{c^3}\,.\,\sqrt{abc}]^2$

$= (a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})^2 \overset{\text{CôSi}}{\geqslant}$

$\overset{\text{CôSi}}{\geqslant} 3\sqrt[3]{(a^2\sqrt{bc})\,.\,(b^2\sqrt{ca})\,.\,(c^2\sqrt{ab})}\,.\,(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$

$= 3abc(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$

Từ đó : $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

3.5 8 III.2 Tìm Min $f = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$f = \frac{1}{5}[(-2)^2 + 1^2][(x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2]$$

$$\geqslant \frac{1}{5}[(-2)(x - 2y + 1) + 1.(2x + ay + 5)]^2$$

$$= \frac{1}{5}[(a + 4)y + 3]^2 \geqslant \left[\begin{array}{l} 0 \text{ nếu } a \neq -4 \\ \dfrac{9}{5} \text{ nếu } a = -4 \end{array}\right.$$

Từ đó : Nếu $a \neq -4 \rightarrow \text{Min } f = 0$

Nếu $a = -4 \rightarrow \text{Min } f = \dfrac{9}{5}$.

4. Đánh giá trên phương trình và bất phương trình

4.1 [67 II.2]. CMR : Nếu pt $(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2=c^2$ có nghiệm thì

$$(a+b)^2 \leqslant 3c^2$$

Giải

Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm của phương trình

$$\leftrightarrow (x_o+a)^2+(y_o+b)^2+(x_o+y_o)^2=c^2$$

Ta có $(a+b)^2 = [(x_o+a)^2+(y_o+b)+(-x_o-y_o)]^2$

$$\overset{(B.C.S)}{\leqslant} (1^2+1^2+1^2)[(x_o+a)^2+(y_o+b)^2+(-x_o-y_o)^2] = 3c^2 \text{ (đpcm)}$$

4.2 120 III.2 : CMR : Nếu pt $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ có nghiệm thì $b^2+(c-2)^2>3$

Giải

Giả sử x_o là nghiệm $\Rightarrow x_o \neq 0$ và $x_o^4+bx_o^3+cx_o^2+bx_o+1=0$

$$\leftrightarrow x_o^2+\frac{1}{x^2}+b\left(x_o+\frac{1}{x_o}\right)+c=0$$

$$\leftrightarrow \left(x_o+\frac{1}{x_o}\right)^2+b\left(x_o+\frac{1}{x_o}\right)+c-2=0$$

Đặt $t=x_o+\dfrac{1}{x_o} \Rightarrow t^2=x_o^2+\dfrac{1}{x_o^2}+2 \geqslant 2\sqrt{x_o^2\cdot\dfrac{1}{x_o^2}}+2=4$

Khi đó ta có $bt+c-2=-t^2 \Rightarrow t^4=[bt+(c-2)]^2 \overset{(BCS)}{\leqslant}$

$$\overset{(BCS)}{\leqslant} [b^2+(c-2)^2](t^2+1) \Rightarrow b^2+(c-2)^2 \geqslant \frac{t^4}{t^2+1}$$

$$\leftrightarrow b^2+(c-2)^2 \geqslant t^2-1+\frac{1}{t^2+1} > 4-1+0=3$$

Làm chặt hơn nữa : Ta có thể chứng minh $b^2+(c-2)^2 \geqslant \dfrac{16}{5}$, Thật vậy theo trên $b^2 + (c-2)^2 \geqslant \dfrac{t^4}{t^2+1} = \dfrac{t^2}{1+\dfrac{1}{t^2}}$

Mà $t^2 \geqslant 4$ do đó $b^2 + (c-2)^2 \geqslant \dfrac{t^2}{1+\dfrac{1}{t^2}} \geqslant \dfrac{4}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{16}{5}$

Ngoài ra với giả thiết đã cho ta có thể chứng minh

$$b^2 + c^2 \geqslant \frac{4}{5}$$

I 109 II.1: Giải bất phương trình $\sqrt{x-1} + x - 3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$\sqrt{x-1} + x - 3 \leqslant \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{x-1})^2 + (x-3)^2]} = \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$

Do đó bất phương trình (1) $\leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

$\leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - 3 \leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x - 1 = (x-3)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x = 2 \cup x = 5 \end{cases} \leftrightarrow x = 5$

I 134 II.2 Trọng các nghiệm của Bất phương trình $\log_{x^2+y^2}(x+y) \geqslant 1$

Tìm nghiệm để tổng $(x + 2y)$ max

Giải

(1) Nếu $x^2 + y^2 > 1$ thì Bpt

$\leftrightarrow x + y \geqslant x^2 + y^2 \leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$

Ta có $x + 2y = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2} \leqslant$

$\geqslant \sqrt{(1^2+2^2)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]} + \frac{3}{2} \leqslant \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$

$\rightarrow$ Max $(x + 2y) = \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{2}$ và $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{2y - 1}{4} = \frac{(x + 2y)_{max} - \frac{3}{2}}{1 + 4} = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 + \sqrt{10}}{10} \\ y = \dfrac{5 + 2\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Rõ ràng khi đó $\left[\dfrac{5+\sqrt{10}}{10} - \dfrac{1}{2}\right]^2 + \left[\dfrac{5+2\sqrt{10}}{10} - \dfrac{1}{2}\right]^2 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{10} = \dfrac{1}{2}$

(2) Nếu $x^2 + y^2 < 1$ thì Bpt $\leftrightarrow x + y < x^2 + y^2$

Vì $x^2 + y^2 < 1 \rightarrow y^2 < 1 \rightarrow |y| < 1$

Ta co $x + 2y = (x + y) + y \leqslant x^2 + y^2 + |y| < 1 + 1 < \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

$\rightarrow$ Max $(x + 2y) < \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$.

Kết hợp (1) và (2) $\rightarrow$ Max $(x + 2y) = \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

101 III.1 *CMR* phương trình $\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$ vô nghiệm

Giải

Ta có $\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = \sin x - \sin 3x - \sin 2x$

$= -2\cos 2x \sin x - 2\sin 2x \leqslant \sqrt{[(-2\cos 2x)^2 + (-2\sin 2x)^2]\,[\sin^2 x + 1]}$

$= \sqrt{4(\sin^2 x + 1)} \leqslant \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \dfrac{\cos 2x}{\sin x} = \dfrac{\sin 2x}{1} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \text{ hay } \cos x = 0 \\ \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{1} \end{cases}$

$\rightarrow \dfrac{-1}{\sin x} = 0$. Vô lý. Vậy phương trình vô nghiệm

Đ.6 136 II.2 Giải phương trình :

$$\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2 = 12+0{,}5\sin y \qquad (1)$$

Giải

Ta có $12+0{,}5\sin y \leqslant 12+0{,}5 = 12{,}5$

Theo BĐT Bunhiacôpski thì

$$\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{2}(1^2+1^2)\left[\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{4}{\sin^2 2x}\right]^2 \geqslant \frac{1}{2}[1+4]^2=\frac{25}{2} = 12{,}5$$

Do đó (1) $\leftrightarrow \begin{cases}\sin y = 1\\ \sin^2 2x = 1\\ \cos^2x+\dfrac{1}{\cos^2x}=\sin^2x+\dfrac{1}{\sin^2x}\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Đ.7 24 II.1 Giải phương trình

$$\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x} = 2(1+\sin^2 2x) \qquad (1)$$

Giải

Ta có $2(1+\sin^2 2x) \geqslant 2$

$$\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x} \leqslant \sqrt{(1^2+1^2)[\cos^2 3x+(\sqrt{2-\cos^2 3x})^2]} = 2$$

Do đó (1) $\leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 2x = 0\\ \cos 3x = \sqrt{2-\cos^2 3x}\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x\cos x = 0\\ \cos 3x = 1\end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0 \vee \cos x = \pm 1\\ 4\cos^3x-3\cos x = 1\end{cases} \leftrightarrow \cos x = 1 \leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$

L8 140.III. Giải phương trình

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3 \qquad (1)$$

Giải

Ta có $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \leqslant \sqrt{(1^2 + 1^2)[\sin^2 x + (\sqrt{2 - \sin^2 x})^2]} = 2$

$$\sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \leqslant |\sin x|\sqrt{2 - \sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x(2 - \sin^2 x)} \leqslant \frac{\sin^2 x + (2 - \sin^2 x)}{2} = 1$$

Suy ra $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \leqslant 3.$

Do đó (1) $\leftrightarrow$ Các điều kiện xảy ra các dấu bằng

$$\leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{2 - \sin^2 x} \\ \sin x = |\sin x| \\ \sin^2 x = 2 - \sin^2 x \end{cases} \leftrightarrow \sin x = 1 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

L9 131.II.1 Cho ΔABC thỏa mãn

$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$. *CMR* : ΔABC vuông

Giải

$VT = 3\cos B + 4\sin B + 6\sin C + 8\cos C$

$\leqslant \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 B + \sin^2 B)} + \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 15$

$$\text{Dấu "="} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4} \\ \dfrac{\sin C}{6} = \dfrac{\cos C}{8} \end{cases} \rightarrow \cot g B = tg C = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$\rightarrow B = \dfrac{\pi}{2} - C \rightarrow B + C = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$. Vậy ΔABC vuông

L10 81.III.1 Tìm Max của $y = \dfrac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$

Giải

Ta có $y\sin x + (y-1)\cos x = 2(1+y) \rightarrow 4(1+y)^2 = [y\sin x + (y-1)\cos x]^2$

$\leqslant [y^2 + (y - 1)^2][\sin^2 x + \cos^2 x] = y^2 + (y - 1)^2$

$$\leftrightarrow 2y^2 + 10y + 3 \leqslant 0 \leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{9}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{-5+\sqrt{19}}{2}.$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Max}y = \dfrac{-5+\sqrt{19}}{2} \\ \text{Min}y = \dfrac{-5-\sqrt{19}}{2} \end{cases}$$

I.11 139 II.2 : CMR $\left|\dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \leq \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3} \quad \forall x$

Giải

Đặt $y = \dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$

$\leftrightarrow (y-1)\cos 3x - a\sin 3x = 1 - 2y$

$\rightarrow (1-2y)^2 = [(y-1)\cos 3x - a\sin 3x]^2 \leqslant$

$\leqslant [(y-1)^2 + (-a)^2][\cos^2 3x + \sin^2 3x] \leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \leqslant 0$

$\rightarrow \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3} \geqslant y \geqslant \dfrac{1-\sqrt{1+3a^2}}{2} \geqslant \dfrac{-(1+\sqrt{1+3a^2})}{3}$

Do đó $|y| = \left|\dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$

5. Kỹ thuật nghịch đảo

A) ***Dạng I*** : $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{y_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad \forall y_i > 0$

Chứng minh : Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\left(\sum_{i+1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{y_i})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{y_i} \cdot \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\right)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

5.1 : *CMR* : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geqslant\dfrac{(a+b+c)}{2}\quad\forall a,\ b,\ c>0$

Giải

Theo BĐT Bunhicôpski ta có

$$[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right]\geqslant(a+b+c)^2$$

$$\rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{a+b+c}{2}$$

5.2 : *CMR* $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\geqslant a+b+c\ \forall\ \Delta ABC\ (a,\ b,\ c)$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]\left[\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\right]$$

$$\geqslant(a+b+c)^2\rightarrow\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}$$

$$\leftrightarrow\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geqslant a+b+c$$

5.3 : *CMR* : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}\ \forall\ a,\ b,\ c>0$

Giải

$$\leftrightarrow\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\geqslant\frac{3}{2}$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)]\left[\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\right]$$

$$\geqslant(a+b+c)^2$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$. Do đó

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}$$

$$\geqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)}=\frac{3}{2}$$

5.4 : CMR : $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$ $\forall$ a, b, c

Giải

$$\leftrightarrow \frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)]\left[\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}\right]$$

$$\geqslant (a^2+b^2+c^2)^2$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Do đó

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}$$

$$\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)}=\frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

5.5. : [65IVb] : Cho M là điểm cố định $\in$ tam diện vuông Oxyz.

Mặt phẳng (α) qua M cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C.

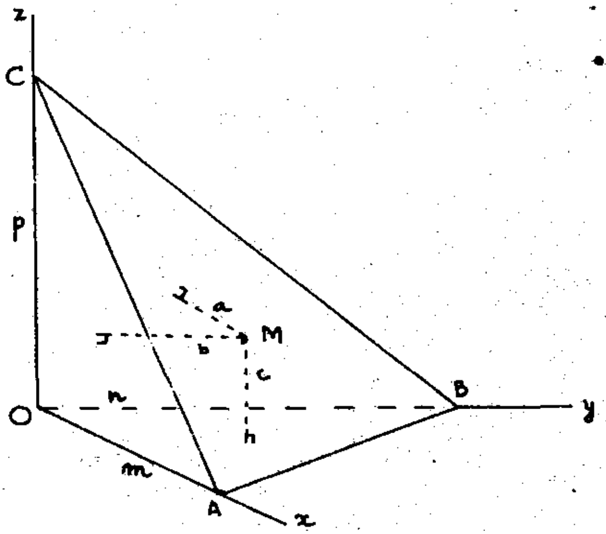
Gọi khoảng cách từ M tới các mặt a, b, c.

3) Tính OA, OB, OC để OA + OB + OC min

Giải

Đặt OA = m, OB = n, OC = p

Ta có $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}mnp$



Mặt khác $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOAC}$

$$\leftrightarrow \frac{1}{6}mnp = \frac{1}{6}(cmn + anp + bpm) \leftrightarrow 1 = \frac{cmn + anp + bpm}{mnp}$$

$$\leftrightarrow \qquad \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 1$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$OA + OB + OC = m + n + p = (m + n + p)\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 1\right)$$

$$\geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{a}/\sqrt{m}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{b}/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{c}/\sqrt{p}}$

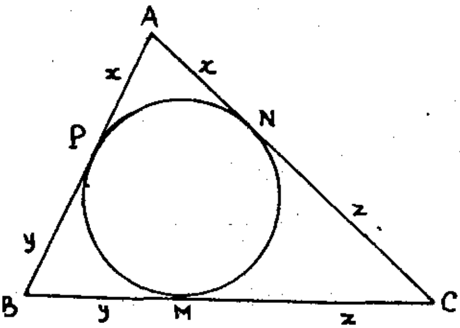
$$\leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{a}} = \frac{n}{\sqrt{b}} = \frac{p}{\sqrt{c}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ n = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ p = \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \end{cases}$$

5.6 : Cho ΔABC (a, b, c). *CMR :* $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$

(Bài 6 của Mỹ đề nghị – VDTQT lần 24 tại Pháp 1983)

Giải



Vì trong ΔABC luôn có đường tròn nội tiếp do đó luôn $\exists$ x, y, z > 0 (Độ dài các tiếp tuyến xuất phát từ đỉnh) sao cho $\begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$

Thay vào ta được BĐT cần chứng minh là

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geqslant 0$$

$$\leftrightarrow y^3z + z^3x + x^3y - xyz(x+y+z) \geqslant 0$$

$$\leftrightarrow y^3z + z^3x + x^3y \geqslant xyz(x+y+z)$$

$$\leftrightarrow \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \geqslant x + y + z$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z}\right) \geqslant (y+z+x)^2$$

Do đó $\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \geqslant x + y + z \rightarrow$ (đpcm)

B) Dạng 2 : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \ \forall\ x_i, y_i > 0$

Chứng minh : Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_iy_i})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{x_i}{y_i}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_iy_i} \cdot \sqrt{\frac{x_i}{y_i}}\right)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2$$

5.7 : CMR : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}\ \forall\ a,\ b,\ c\ >\ 0$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\left[\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right]\geq(a+b+c)^2$$

Dễ dàng chứng minh : $(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$. Do đó

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}$$

$$\leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

5.8 : CMR : $\dfrac{a}{mb+nc}+\dfrac{b}{mc+na}+\dfrac{c}{ma+nb}\geq\dfrac{3}{m+n}\ \forall a,b,c,m,n\ >\ 0$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sum a(mb+nc).\sum\frac{a}{mb+nc}\geq(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$$

Từ đó $\displaystyle\sum\frac{a}{mb+nc}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{\sum a(mb+nc)}=\frac{3(ab+bc+ca)}{(m+n)(ab+bc+ca)}$

$$\leftrightarrow\frac{a}{mb+nc}+\frac{b}{mc+na}+\frac{c}{ma+nb}\geq\frac{3}{m+n}$$

5.9 : Điểm M nằm trong ΔABC. Hạ MA_1, MB_1, $MC_1\perp$ Bc, CA, AB

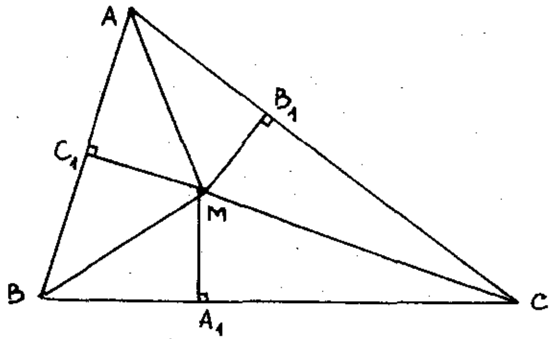
Tìm vị trí của M để $\dfrac{BC}{MA_1}+\dfrac{CA}{MB_1}+\dfrac{AB}{MC_1}$ min

(Bài 1 của Anh đề nghị - VĐTQT lần thứ 22 tại Mỹ 1981)

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\left[BC.MA_1+CA.MB_1+AB.MC_1\right]\left[\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}\right]$$



$\geq (BC + CA + AB)^2$

Mặt khác : $BC.MA_1 + CA.MB_1 + AB.MC_1$

$= 2dt(MBC) + 2dt(MCA) + 2dt(MAB) = 2dt(ABC)$

Do đó $\dfrac{BC}{MA_1} + \dfrac{CA}{MB_1} + \dfrac{AB}{MC_1} \geq \dfrac{(BC + CA + AB)^2}{2dt(ABC)} = \text{const}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{\sqrt{BC} \,.\, MA_1}{\sqrt{BC}/\sqrt{MA_1}} = \dfrac{\sqrt{CA} \,.\, MB_1}{\sqrt{CA}/\sqrt{MB_1}} = \dfrac{\sqrt{AB} \,.\, MC_1}{\sqrt{AB}/\sqrt{MC_1}}$

$\leftrightarrow MA_1 = MB_1 = MC_1 \leftrightarrow$ M là tâm nội tiếp ΔABC.

5.10 : CMR :

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3} \ \forall a, b, c, d > 0$$

(Dự bị Quốc tế 93 – Mỹ đề nghị)

Giải

Ta có $\sum a(b + 2c + 3d) \,.\, \sum \dfrac{a}{b + 2c + 3d} \geq (a + b + c + d)^2$

Ta sẽ chứng minh : :

$$\sum a(b + 2c + 3d) \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d)^2$$

$\leftrightarrow 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

$\leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0$ đúng

Từ đó $\sum \dfrac{a}{b + 2c + 3d} \geq \dfrac{(a + b + c + d)^2}{\frac{3}{2}(a + b + c + d)^2} = \dfrac{2}{3}$

5.11 : Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots a_n > 0 \\ a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 1 \end{cases}$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

CMR : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{1}{n-1}$

Giải

Theo Bunhiacôpski ta có

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(S - a_i)\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i}\Big] \geq \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big]^2$$

Mặt khác : $\sum_{i=1}^{n} a_i(S - a_i) = S.\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) - \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

$= (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Từ đó $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n-1}$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_1^2)}$

$\geq a_1a_2 = a_2a_3 + \dots + a_na_1 = 1$. Vậy thì

$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i^2}{n-1} \geq \frac{1}{n-1}$

§3. BẤT ĐẲNG THỨC TRÊBUSÉP

1. Dạng Tổng quát

(1) Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

Dạng 2 : $n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$

(2) Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

Dạng 2 : $n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$

Chứng minh : Xét hiệu Trêbưsép

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_ib_j + a_jb_j - a_ib_j - a_jb_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

Rõ ràng $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ với điều kiện (1)

và $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$ với điều kiện (2)

Từ đó → (đpcm)

2. Dạng cụ thể :

$n = 2$

a) Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $\dfrac{ab + cd}{2} \geq \dfrac{a + c}{2} \cdot \dfrac{b + d}{2}$

Dạng 2 : $2(ab + cd) \geq (a + c)(b + d)$

b) Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \leq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \geq d \end{cases}$

Dạng 1 : $\dfrac{ab + cd}{2} \leq \dfrac{a + c}{2} \cdot \dfrac{b + d}{2}$

Dạng 2 : $2(ab + cd) \leq (a + c)(b + d)$

Chứng minh

Xét hiệu Trê bư Sép

$2(ab + cd) - (a + c)(b + d)$

$= (a - c)(b - d)$

Rõ ràng $(a - c)(b - d) \geq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$

và $(a - c)(b - d) \leq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \leq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \geq d \end{cases}$

Từ đó → (đpcm)

$n = 3$

a) Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \geq d \geq f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \leq d \leq f \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $\dfrac{ab+cd+ef}{3} \geq \dfrac{a+c+e}{3} \cdot \dfrac{b+d+f}{3}$

Dạng 2 : $3(ab+cd+ef) \geq (a+c+e)(b+d+f)$

b) Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \leq d \leq f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \geq d \geq f \end{cases}$

Dạng 1 : $\dfrac{ab+cd+ef}{3} \leq \dfrac{a+c+e}{3} \cdot \dfrac{b+d+f}{3}$

Dạng 2 : $3(ab+cd+ef) \leq (a+c+e)(b+d+f)$

Chứng minh

Xét hiệu Trê bư Sép

$3(ab + cd + ef) - (a + c + e)(b + d + f) =$

$= (a - c)(b - d) + (c - e)(d - f)$

$+ (e - a)(f - b) \qquad (*)$

Rõ ràng biểu thức $(*) \geq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \geq d >= f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \leq d \leq f \end{cases}$

và biểu thức $(*) \leq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \leq d \leq f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \geq d \geq f \end{cases}$

Từ đó → (đpcm)

Chú ý : (1) Bất đẳng thức Trê bư Sép không được sử dụng trực tiếp (khi thi Đại học) mà phải chứng minh lại bằng cách xét hiệu Trêbusép.

(2) Bất đẳng thức Trê bư sép là BĐT cho dãy số sắp thứ tự, do đó nếu các số chưa sắp thứ tự thì ta phải giả sử có quan hệ thứ tự giữa các số.

3.1 (14 V b) : Cho $a + b \geqslant 2$. *CMR* $a^n + b^n \leqslant a^{n+1} + b^{n+1}$

Giải

Giả sử $a \geqslant b$. Theo (gt) $a + b \geqslant 2 > 0 \rightarrow a > -b$

Do đó $a \geqslant |b| \rightarrow a^n \geqslant |b|^n \geqslant b^n$. Như vậy $\begin{cases} a \geqslant b \\ a^n \geqslant b^n \end{cases}$

Xét hiệu :

$2(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a+b)(a^n + b^n) = 2(a.a^n + b.b^n) - (a+b)(a^n + b^n)$

$= (a - b)(a^n - b^n) \geqslant 0$. Từ đó

$$a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant \frac{a+b}{2}(a^n + b^n) \overset{(a+b) \geqslant 2)}{\geqslant} a^n + b^n$$

3.2 (7 V) : CMR : Nếu $a + b \geqslant 0$ thì

$$(a + b)(a^3 + b^3)(a^5 + b^5) \leqslant 4(a^9 + b^9)$$

Giải

Ta sẽ chứng minh $\begin{cases} \forall m, n \in \mathbf{N} \\ a + b \geqslant 0 \end{cases}$ thì

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant a^{m+n} + \frac{b^{m+n}}{2}$$

$\leftarrow 2(a^{m+n} + b^{m+n}) - (a^m + b^m)(a^n + b^n) = (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$

Giả sử $a \geqslant b$. Ta có $a + b \geqslant 0 \rightarrow a \geqslant -b$. Từ đó $a \geqslant |b|$

suy ra $\begin{cases} a^m \geqslant |b|^m \geqslant b^m \\ a^n \geqslant |b|^n \geqslant b^n \end{cases} \rightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$ (đpcm)

Áp dụng vào bài toán

$$(a + b)(a^3 + b^3)(a^5 + b^5) = 8 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5}{2}$$

$$\leqslant 8 \cdot \frac{a^4 + b^4}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5}{2} \leqslant 8 \cdot \frac{a^9 + b^9}{2} = 4(a^9 + b^9)$$

3.3. CMR : Nếu $a + b \geqslant 0$ thì $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \leqslant \frac{a^6 + b^6}{2}$

Bạn đọc tự giải

(Vô địch Ba Lan 1958 – 1959)

3.4. 18II.2 : CMR $(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)} \leqslant a^a b^b c^c \ \forall\ a,\ b,\ c > 0$

Giải

$$BĐT \leftrightarrow \ln(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)} \leqslant \ln\ (a^a b^b c^c)$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{3}\ (a + b + c)\ (\ln a + \ln b + \ln c) \leqslant a\ln a + b\ln b + c\ln c$$

$$\leftrightarrow (a + b + c)\ (\ln a + \ln b + \ln c) \leqslant 3\ (a\ln a + b\ln b + c\ln c)$$

Xét hiệu : $3(a\ln a + b\ln b + c\ln c) - (a+b+c)\ (\ln a + \ln b + \ln c)$

$= (a-b)(\ln a - \ln b) + (b-c)(\ln b - \ln c) + (c-a)(\ln c - \ln a) \quad (*)$

Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0 \to \ln a \geqslant \ln b \geqslant \ln c \to (*) \geqslant 0$

Từ đó $\to$ (đpcm)

3.5. CMR : $(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n)} \leqslant a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}\ \forall a_1 \dots a_n > 0$

Bạn đọc tự giải

3.6 149 II.2 CMR $\dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geqslant \dfrac{\pi}{3}\ \forall \Delta ABC$

Giải

$$BĐT \leftrightarrow \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geqslant \frac{A + B + C}{3}$$

$$\leftrightarrow 3(aA + bB + cC) \geqslant (a + b + c)(A + B + C)$$

Xét hiệu $3(aA + bB + cC) - (a + b + c)(A + B + C)$

$= (a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \quad (*)$

Giả sử $a \geqslant b \geqslant c \to A \geqslant B \geqslant C \to (*) \geqslant 0$

Từ đó $\to$ (đpcm)

3.7 136 II.1 – Bộ Đề 91

Cho ΔABC. *CMR* $\sum\limits_{A,B,C} \dfrac{A\sin A + B\sin B}{A+B} \geq \sum\limits_{A,B,C} \sin A$

Giải

$$\leftrightarrow 2R\left(\sum_{A,B,C} \frac{A\sin A + B\sin B}{A+B}\right) \geq 2R\left(\sum_{A,B,C} \sin A\right)$$

$$\leftrightarrow \sum_{a,b,c} \frac{Aa + Bb}{A+B} \geq \sum_{a,b,c} a = \sum_{a,b,c} \frac{a+b}{2}$$

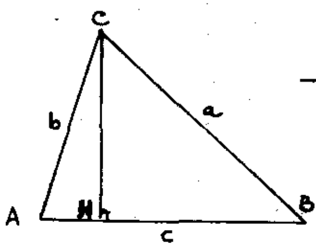
Ta có : $\sum\limits_{a,b,c} \dfrac{Aa+Bb}{A+B} - \sum\limits_{a,b,c} \dfrac{a+b}{2} = \sum\limits_{a,b,c} \left(\dfrac{Aa+Bb}{A+B} - \dfrac{a+b}{2}\right)$

$$= \sum_{a,b,c} \frac{2(Aa+Bb) - (A+B)(a+b)}{2(A+B)} = \sum_{a,b,c} \frac{(A-B)(a-b)}{2(A+B)}$$

Giả sử $a \geq b \geq c \to A \geq B \geq C \to \sum\limits_{a,b,c} \dfrac{(A-B)(a-b)}{2(A+B)} \geq 0$

Từ đó $\to$ (đpcm)

3.8. 27 II.2 : CMR : $a+b+c \geq 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)\ \forall\ \Delta ABC$



Ta có $c = a\cos B + b\cos A$ do đó BĐT

$$\to \sum_{a,b,c} (a\cos B + b\cos A) \geq \sum_{a,b,c} (a\cos A + b\cos B)$$

Xét hiệu

$$\sum_{a,b,c} (a\cos A + b\cos B) - \sum_{a,b,c} (a\cos B + b\cos A)$$

$$= \sum_{a,b,c} [a\cos A + b\cos B - a\cos B - b\cos A] = \sum_{a,b,c} (a-b)(\cos A - \cos B)$$

Giả sử $A \geq B \geq C \to \begin{cases} a \geq b \geq c \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases} \to (*) \leq 0$

Từ đó $\to$ (đpcm)

3.9. *CMR* $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \dfrac{tgA \, . \, tgB \, . \, tgC}{3}$ $\forall \Delta ABC$ nhọn

Giải

Dễ dàng chứng minh $tgA.tgB.tgC = tgA + tgB + tgC$

Do đó BĐT $\leftrightarrow 3(\sin A + \sin B + \sin C) \leq (\cos A + \cos B + \cos C)(tgA + tgB + tgC)$

$\leftrightarrow 3(\cos A.tgA + \cos B.tgB + \cos C.tgC) \leq$

$\leq (\cos A + \cos B + \cos C)(tgA + tgB + tgC)$

Xét hiệu

$$3(\cos A.tgA + \cos B.tgB + \cos C.tgC) -$$
$$- (\cos A + \cos B + \cos C)(tgA + tgB + tgC)$$

$= (\cos A - \cos B)(tgA - tgB) + (\cos B - \cos C)(tgB - tgC) +$

$+ (\cos C - \cos A)(tgC - tgA)$

Giả sử $A \geq B \geq C$. Vì ΔABC nhọn nên $\begin{cases} tgA \geq tg \geq tgC \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases}$

Do đó hiệu nói trên ≤ 0. Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

3.10. *CMR :* $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$ $\forall \Delta ABC$

Giải

Ta sẽ chứng minh

$$3(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) \leq$$
$$\leq (\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Xét hiệu

$3(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) -$

$- (\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C)$

$= (\sin A - \sin B)(\cos A - \cos B) + (\sin B - \sin C)(\cos B - \cos C) +$

$+ (\sin C - \sin A)(\cos C - \cos A)$

Giả sử $A \geq B \geq C \rightarrow \begin{cases} \sin A \geq \sin B \geq \sin C \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases} \rightarrow$ Hiệu $\leq 0 \rightarrow$ (đpcm)

Ta có :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2}{3} \, . \, 3(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)$$

$$\leqslant \frac{2}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)(\sin A + \sin B + \sin C) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) = \sin A + \sin B + \sin C \text{ (đpcm)}$$

(ở đây ta đã sử dụng BĐT $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$)

3.11. 15III.2 : CMR

$$3\sum_{A,B,C} \sin A.\sin 2A \leqslant \sum_{A,B,C} \sin A.\sum_{A,b,C} \sin 2A \ \forall \ \Delta ABC$$

Giải

Xét các khả năng sau

1) *ΔABC nhọn* : Giả sử $A \geqslant B \geqslant C \to \begin{cases} \sin A \geqslant \sin B \geqslant \sin C \\ \sin 2A \leqslant \sin 2B \leqslant \sin 2C \end{cases}$

Ta có $3\sum\limits_{A,B,C} \sin A.\sin 2A - \sum\limits_{A,B,C} \sin A.\sum\limits_{A,B,C} \sin 2A$

$$= \sum_{A,B,C} (\sin A - \sin B)(\sin 2A - \sin 2B) \leqslant 0 \to \text{(đpcm)}$$

2) ΔABC không nhọn : Giả sử $C \geqslant \frac{\pi}{2} \to A, B < \frac{\pi}{2}$

Khi đó $\begin{cases} \sin A < \sin C \\ \sin B < \sin C \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \sin A - \sin C < 0 \\ \sin B - \sin C < 0 \end{cases}$ (1). Mặt khác

$2\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = \sin 2A + (\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C)$

$= \sin 2A - 4\sin A\cos B\cos C > 0$ (2)

$2\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A = \sin 2B + (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A)$

$= \sin 2B - 4\sin B\cos A\cos C > 0$ (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta có

$$3\sum_{A,B,C} \sin A.\sin 2A - \sum_{A,B,C} \sin A \sum_{A,B,C} \sin 2A =$$

$$= \sum_{A,3,C} (\sin A - \sin B)(\sin 2A - \sin 2B)$$

$$= (\sin A - \sin C)(2\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C) +$$
$$+ (\sin B - \sin C)(2\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A)$$
$$= (\sin A - \sin C)(\sin 2A - 4\sin A\cos B\cos C) +$$
$$+ (\sin B - \sin C)(\sin 2B - 4\sin B\cos A\cos C)$$
$$< 0 \rightarrow 3\sum_{A,B,C} \sin A.\sin 2A \leqslant \sum_{A,B,C} \sin A \,.\, \sum_{A,B,C} \sin 2A$$

Tóm lại ta luôn có BĐT luôn đúng $\forall \Delta ABC$.

§4. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TAM THỨC BẬC 2

Có 8 kĩ thuật sử dụng tam thức bậc 2, ở đây xin trích 4 kĩ thuật thường được sử dụng.

1. Sơ đồ 1 : $A \geqslant B\ (\forall) \leftrightarrow A - B \geqslant 0$

Biến đổi $A - B = f(x) = ax^2 + bx + c \geqslant 0\ \forall x \leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$

4.1. 2II.1 Cho ΔABC. *CMR* $1 + \frac{1}{2}x^2 \geqslant \cos A + x(\cos B + \cos C)\ \forall x$

Giải

$$\leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\cos B + \cos C)x + 2\sin^2\frac{A}{2} \geqslant 0\ \forall x$$

Ta có :

$$\Delta = (\cos B + \cos C)^2 - 4\sin^2\frac{A}{2} = 4\cos^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) \leqslant 0$$

Do đó $\frac{1}{2}.f(x) \geqslant 0\ \forall x \leftrightarrow f(x) \geqslant 0\ \forall x \rightarrow$ (đpcm)

1.2 13.2III **Cho ΔABC.**

CMR : $pa^2 + qb^2 > pqc^2 \ \forall p, q : p + q = 1$

Giải

BĐT $\leftrightarrow pa^2 + (1 - p)b^2 - p(1 - p)c^2 > 0 \ \forall p$

$\leftrightarrow f(p) = (c^2)p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0 \ \forall p$

Ta có $\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] =$

$= (a - b - c)(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c) < 0$

Do đó $c^2.f(p) > 0 \ \forall p \leftrightarrow f(p) > 0 \ \forall p \rightarrow$ (đpcm)

1.3 23II.2 : CMR: $\forall x, y$ ta luôn có :

$x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$

Giải

BĐT $\leftrightarrow f(x) > 0 \ \forall x \ (\forall y)$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có $(\sin y + \cos y)^2 \leqslant (1 + \sin^2 y)(\cos^2 y + 1)$

Vì hệ $\begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases}$ vô nghiệm nên dấu bằng không xảy ra

Do đó $\Delta' = (\sin y + \cos y)^2 - (1 + \sin^2 y)(\cos^2 y + 1) < 0$

Vậy $f(x) = x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$ $\forall x \ (\forall y)$

15II.1 : CMR :

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e) \ \forall a, b, c, d, e$

Giải

BĐT $\leftrightarrow f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + (b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leqslant 0$ $\forall a \ (\forall b, c, d, e)$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$(b + c + d + e)^2 \leqslant (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

Do đó $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leqslant 0$

suy ra $f(a) \geqslant 0 \ \forall a \ (\forall b, c, d, e) \rightarrow$ (đpcm)

140III.1 : Cho cấp số cộng $\div$ a, b, c, d và $2m \geq |ad - bc|$

CMR : $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0 \ \forall x$ (1)

Giải

$VT = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 =$

$= (x^2 - (a + d)x + ad)[x^2 - (b + c)x + bc] + m^2$

Đặt $t = x^2 - (b + c)x + bc$. Vì $b + c = a + d$ nên

$VT(1) = f(t) = [t + (ad - bc)]t + m^2$

$\leftrightarrow f(t) = t^2 + (ad - bc)t + m^2$

Ta có $\Delta = (ad - bc)^2 - 4m^2 \leq 0$ (theo gt) $\rightarrow f(t) \geq 0 \rightarrow$ (đpcm)

83II.2 : CMR : $19x^2 + 54y^2 + 16z^2 - 16xz - 24y + 36xy \geq 0$ $\forall x, y, z$

Giải

Đặt $f(x) = 19x^2 - 2(8z - 18y)x + 54y^2 + 16z^2 - 24y$

Ta có $\Delta'x = g(y) = -702y^2 + 168y - 240z^2$

$g(y)$ có $\Delta'y = (84z)^2 - 702.240z^2 = -161424z^2 \leq 0$

$\Rightarrow \Delta'x = g(y) \leq 0 \rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x, y, z$

Tức là $19x^2 + 54y^2 + 16z^2 - 16xz - 24yz + 36xy \geq 0 \ \forall x, y, z$

2. Sơ đồ 2 $A \geq B \leftrightarrow A - B = \left[\begin{array}{l} b^2 - 4ac \\ b'^2 - ac \end{array}\right. \geq 0$

Đặt $f(x) = ax^2 + bx = c$ và chứng minh $f(x)$ có nghiệm theo tiêu chuẩn $af(\alpha) \leq 0$ hoặc $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$

2.1 : 53III.2 Cho $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$.

CMR : $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$

Giải

BĐT $\leftrightarrow \Delta' = (pq-ac-bd)^2 - (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq 0$

Theo (gt) $\rightarrow (p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0 \rightarrow \exists$ 1 biểu thức chẳng hạn $p^2 - a^2 - b^2 > 0$.

Xét $f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2)$

$\leftrightarrow f(x) = (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$

$\to f\left(\frac{q}{p}\right) = -\left[\left(\frac{aq}{p} - c\right)^2 + \left(\frac{bq}{p} - d\right)^2\right] \le 0$

$(p^2 - a^2 - b^2) f\left(\frac{q}{p}\right) \le 0 \to f(x)$ có nghiệm

Do đó $\Delta' = (pq - ac - bd)^2 - (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \ge 0$

$\leftrightarrow (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \le (pq - ac - bd)^2$

2.2 : Cho $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$. *CMR*

$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \le (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$ $_{\text{BĐT Aczela}}$

Bạn đọc tự giải tương tự với cách giải trên

2.3 : CMR :

$(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \ge 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)\ \forall a_i \in [0, 1]$

Giải

$\leftrightarrow \Delta = (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \ge 0$

Đặt $f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$

Ta có $f(1) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1) \le 0\ \forall a_i \in [0, 1]$

$\to f(x)$ có nghiệm

$\to \Delta = (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \ge 0$

$\to (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \ge 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$

2.4 : Cho $\begin{cases} 0 < a \le a_1, a_2, \dots a_n \le A \\ 0 < b \le b_1, b_2, \dots b_n \le B \end{cases}$

CMR $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$

Nhân cả 2 vế với $(ABab) > 0$ rồi chuyển vế ta có

$$BĐT \Leftrightarrow (AB + ab)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(AB \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(ab \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant 0$$

$$\text{Xét } f(X) = \left[AB \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right] X^2 - (AB + ab)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) X + \left(ab \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$\text{Đặt } f_i(X) = (ABa_i^2)X^2 - [(AB + ab)a_i b_i]X + (ab \cdot b_i^2)$$

$$\text{suy ra } f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(X)$$

Mặt khác $f_i(X) = (ABa_iX - ab b_i)(a_iX - b_i)$

$$\rightarrow f_i\left(\frac{b}{A}\right) = \frac{b}{A}(Ba_i - ab_i)(ba_i - Ab_i) \leqslant 0$$

Do đó $f\left(\frac{b}{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{b}{A}\right) \leqslant 0$. Từ đó $\rightarrow f(X)$ có nghiệm

$\rightarrow \Delta \geqslant 0 \rightarrow$ (đpcm)

3. Sơ đồ 3 : Định lí Viét

125III.1 : Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$$

CMR : $-\frac{8}{3} \leqslant x, y, z \leqslant \frac{8}{3}$

Giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y + z)^2 = 16 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$

Đặt $t = x + y + z \rightarrow |t| = 4$

Ta có $\begin{cases} y + z = t - x \\ yz = 4 - x(y + z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = t - x \\ yz = x^2 - tx + 4 \end{cases}$

Cách 1 : Theo định lí Viét thì y, z là nghiệm của phương trình

$$u^2 - (t - x)u + (x^2 - tx + 4) = 0$$

Vì y, z luôn ∃ → phương trình luôn có nghiệm, do đó

$$\Delta = (t-x)^2 - 4(x^2 - tx + 4) \geq 0 \leftrightarrow \boxed{3x^2 - 2tx + (16 - t^2) \leq 0}$$

Cách 2 : Ta có $(y + z)^2 \geq 4yz$ nên $(t - x)^2 \geq 4(x^2 - tx + 4)$

$$\boxed{\leftrightarrow 3x^2 - 2tx + (16 - t^2) \leq 0}$$

Mà $|t| = 4 \rightarrow t^2 = 6$ nên ta có $3x^2 - 2tx \leq 0$

$$\leftrightarrow x(3x - 2t) \leq 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{8}{3} \leq x \leq 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \end{array}\right. \leftrightarrow \boxed{-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}}$$

Tương tự $-\frac{8}{3} \leq y, z \leq \frac{8}{3} \rightarrow -\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$

3.2 : Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

CMR : $-\frac{4}{3} \leq x, y, z \leq \frac{4}{3}$

3.3 : Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = a \end{cases}$

CMR : $\frac{a - 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \leq x, y, z \leq \frac{a + 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}$

4. Sơ đồ 4 : Phương pháp miền giá trị

70I : Tìm miền giá trị của $y = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

Giải

$y_o \in MGT \rightarrow y_o x^2 + (y_o - 2)x + 4y_o + 1 = 0$ (*)

Nếu $y_o = 0$ thì $x = \frac{1}{2}$

Nếu $y_o \neq 0$ thì để pt (*) có nghiệm ta có

$$0 \leq \Delta = 15y_o^2 - 8y_o + 4 \leftrightarrow \frac{-4+2\sqrt{19}}{15} \leq y_o \leq \frac{-4-2\sqrt{19}}{15}$$

Từ đó $\rightarrow$ MGT là $\left[\frac{-4-2\sqrt{19}}{15}, \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}\right]$

109II.1 : Cho $y = \dfrac{x^2\cos\alpha - 2x + \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ với $\alpha \in (o, \pi)$

CMR : $\forall x$ ta có $-1 \leq y \leq 1$

Giải

$y_o \in$ MGT $\leftrightarrow (y_o - \cos\alpha)x^2 - 2(y_o\cos\alpha - 1)x + y_o - \cos\alpha = 0$

Nếu $y_o = \cos\alpha \rightarrow x = 0$

Nếu $y_o \neq \cos\alpha \rightarrow 0 \leq \Delta' = -\sin^2\alpha(y^2 - 1) \leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$

115III.1 Tìm Max $y = \left[\dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^{3/4}$

Giải

Đặt $t = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36} \rightarrow (12 - t)x^2 - 12ax - 36t = 0$ có nghiệm

$\leftrightarrow 0 \leq \Delta' = 36a^2 + 36t(12 - t)$

$\leftrightarrow 6 - \sqrt{36+a^2} \leq t \leq 6 + \sqrt{36+a^2}$

Từ đó suy ra Max $y = \left[6 + \sqrt{36+a^2}\right]^{3/4}$

75II.2 : Tìm a, b để $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ đạt Max bằng 4, Min bằng -1

Giải

$$y_o \in \text{MGT} \leftrightarrow y_o x^2 - ax + y_o - b = 0 \qquad (1)$$

Nếu $y_o = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a \neq 0,\ x = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$

Nếu $y_o \neq 0 \rightarrow$ phương trình (1) phải có nghiệm. Khi đó

$$0 \leq \Delta = -4y_o^2 + 4by_o + a^2$$

Để Max y = 4 và Min y = −1 ta phải có

phương trình $-4y_o^2 + 4by_o + a^2 = 0$ có 2 nghiệm (−1) và 4.

Khi đó $a = \pm 4$ và $b = 3$

32 IV.a : Cho phương trình :

$$x^2 + (2a - 6)x + a - 13 = 0 \quad (1 \le a < +\infty)$$

Tìm a để nghiệm lớn của phương trình nhận giá trị max

Giải

Phương trình $\leftrightarrow a(2x + 1) = -x^2 + 6x + 13$

Gọi x_o là 1 nghiệm $\to a = \dfrac{-x_o^2 + 6x_o + 13}{2x_o + 1} \ge 1$

$$\to a = \frac{-x_o^2 - 4x_o - 12}{2x_o + 1} \le 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o \le -2 \\ -\dfrac{1}{2} < x_o \le 6 \end{array}\right.$$

Do đó $\text{Max}(x_o) = 6 \to a = \dfrac{-6^2 + 6.6 + 13}{2.6 + 1} = 1$

§5. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

5.1 15II.2 : CMR :

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$ ∀a, b, c, d, e

Giải

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e)$

$$= \sum_{b,c,d,e}\left(\frac{a^2}{4} + b^2 - ab\right) = \sum_{b,c,d,e}\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 \ge 0 \to \text{(đpcm)}$$

5.2. 2III.2 : Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

CMR $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$

Giải

Ta có $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) =$

$= (1+a)(1+b)(1+c) + a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + bc + ca$

$= (1 + a)(1 + b)(1 + c) + \dfrac{(1 + a + b + c)^2}{2} \geq 0$

(Ở đây ta đã sử dụng giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ để suy ra $a^2, b^2, c^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a, b, c \Rightarrow 1 + a, 1 + b, 1 + c \geq 0$)

5.3. 1061I.2 Cho $a, b, c \in [0, 1]$.

CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

Giải

Vì $a, b, c \in [0, 1]$ nên $0 \leq a^2 \leq a \leq 1$, $0 \leq b^2 \leq b \leq 1$,

$0 \leq c^2 \leq c \leq 1$. Do đó ta có

$0 \leq (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) =$

$= 1 - (a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq$

$\leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$ (đpcm)

5.4. 128I.2 Cho $a, b, c \in [0, 2]$ và $a + b + c = 3$.

CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Giải

Đặt $\begin{cases} a = 1 + \alpha \\ b = 1 + \beta \\ c = 1 + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha, \beta, \gamma \in [-1, 1] \end{cases}$ BĐT $\leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 2$

Trong 3 số α, β, γ luôn $\exists$ 2 số hoặc cùng ≥ 0 hoặc cùng ≤ 0, giả sử 2 số đó là α, β. Khi đó

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2 \leq 2$