

## §18. PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN (MIXING VARIABLE)

### Tóm tắt nội dung:

#### I. Đặt vấn đề

#### II. Bất đẳng thức ba biến với cực trị đạt tại giá trị biến đối xứng

1. Bất đẳng thức không điều kiện
2. Dồn biến với bất đẳng thức có điều kiện
3. Dồn biến lượng giác trong tam giác

#### III. Dồn biến bằng kỹ thuật hàm số

#### IV. Bất đẳng thức ba biến với cực trị đạt được tại biên.

#### V. Định lý SMV – Bất đẳng thức bốn biến

#### VI. Dồn biến bằng hàm lồi

#### VII. Dồn biến không xác định (UMV)

#### VIII. Dồn biến về giá trị trung bình

#### IX. Dồn biến bằng quy nạp thừa

#### X. Dồn biến toàn miền (EMV)

1. EMV với biên tại 0
2. EMV với biến trong tam giác.

#### XI. Một số kiểu dồn biến đặc biệt.

#### XII. Định lý dồn biến tổng quát (GMV)

#### XIII. Nhìn lại và bài tập

### I. ĐẶT VẤN ĐỀ

• Các bạn thân mến, trong nhận thức của chúng ta có rất nhiều bất đẳng thức đặc biệt là các bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị đều có đẳng thức xảy ra khi các biến số bằng nhau. Một ví dụ kinh điển là bất đẳng thức  $AM - GM$ , chẳng hạn với  $n = 3$  ta có bất đẳng thức sau xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi  $x = y = z \geq 0$ :

**Bài 1.1.** Cho  $x, y, z \geq 0$ . Khi đó  $x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}$ .

• Số lượng các bất đẳng thức như vậy nhiều đến nỗi làm chúng ta luôn tin rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến số bằng nhau là một điều hiển nhiên. Nhận xét sai lầm này có thể thông cảm được bởi vì việc xây dựng một bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị sao cho đẳng thức vẫn có thể xảy ra tại trạng thái tất cả các biến số không bằng nhau thì đòi hỏi người làm toán phải có một trình độ rất chuyên nghiệp. Chẳng hạn dưới đây là một ví dụ tiêu biểu cho nhận xét này:

**Bài 1.2 [VMO]** Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Khi đó  $2(x + y + z) - xyz \leq 10$ .

Trong bất đẳng thức này thì dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow (x, y, z)$  là 1 hoán vị của  $(2; 2; -1)$

• Có thể nhiều bạn sẽ ngạc nhiên hơn khi biết rằng còn có những bất đẳng thức mà dấu “=” xảy ra khi các biến số đều khác nhau, chẳng hạn là ví dụ sau:

**Bài 1.3: (Jackgarfunkel)** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}$$

Ở đây, dấu đẳng thức xảy ra khi  $a = 3b > 0, c = 0$  (và các dạng hoán vị). Các bạn có thể tự hỏi là các giá trị chẳng hạn như  $(3, 1, 0)$  có gì đặc biệt mà làm cho đẳng thức xảy ra. Một cách trực giác, ta thấy dường như điều đặc biệt đó là do có một biến bằng 0. Vì giá thiết là các biến số  $a, b, c$  là các số thực không âm nên biến bằng 0 còn được gọi là biến có giá trị ở trên biên.

• Một điều thú vị nữa là các bạn sẽ còn gặp những bất đẳng thức mà dấu “=” xảy ra nhiều hơn một chỗ (không tính các hoán vị). Chúng đều là các bất đẳng thức đẹp và khó, chẳng hạn như một bài toán rất nổi tiếng sau đây:

**Bài 1.4 (Iran TST 1996)** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca) \left[ \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Ở đây, đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c > 0$  hoặc  $a = b > 0, c = 0$  (và các hoán vị). Tuy nhiên, nếu tinh ý các bạn sẽ nhận ra rằng, dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp này không nằm ngoài các trường hợp ở các ví dụ trước.

• Tóm lại, trong thế giới bất đẳng thức các trường hợp dấu “=” thường xảy ra theo một trong ba dạng sau đây:

- + Trường hợp tất cả các biến số bằng nhau ta sẽ gọi là “cực trị đạt được tại tâm”.
- + Trường hợp có một số các biến bằng nhau gọi là “cực trị đạt được có tính đối xứng”
- + Trường hợp khi có một biến có giá trị trên biên ta sẽ gọi là “cực trị đạt được tại biên”.

Phương pháp dồn biến được đặt ra để giải quyết các bất đẳng thức có dạng như trên. Bằng cách đưa về trường hợp có hai biến bằng nhau, hoặc là một biến có giá trị tại biên thì bất đẳng thức mới nhận được có số biến ít hơn nên đơn giản hơn bất đẳng thức ban đầu. Đặc biệt nếu bất đẳng thức mới chỉ còn một biến thì nó có thể được chứng minh đơn giản bằng cách khảo sát hàm một biến số.

• Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày các kỹ thuật chính của phương pháp thông qua các bài toán cụ thể. Trước hết, đối tượng rất quan trọng mà chúng tôi muốn bạn đọc nắm bắt là các bất đẳng thức với ba biến số. Sau đó là các mở rộng cho bốn biến số và cuối cùng là phương pháp dồn biến tổng quát cho  $n$  biến số. Trong phần cuối này, chúng tôi sẽ giới thiệu các kết quả “cổ điển”, rồi đến những sáng tạo nhỏ và kết thúc là những kết quả hết sức tổng quát. Tinh thần xuyên suốt của chúng tôi là muốn bạn đọc cảm nhận được tính tự nhiên của vấn đề. Qua đó, các bạn sẽ lý giải được “tại sao”, để rồi có thể tự mình bước đi trên con đường sáng tạo.



## II. BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT TẠI GIÁ TRỊ BIẾN ĐỔI XỨNG

• Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức  $f(x, y, z) \geq 0$  với  $x, y, z$  là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Khi đó ta sẽ thực hiện hai bước chính sau:

**Bước 1:** (Kỹ thuật dồn về hai biến bằng nhau) Đánh giá  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$  với  $t$  là biến sao cho bộ số  $(t, t, z)$  thỏa mãn mọi tính chất của bộ  $(x, y, z)$ .

**Bước 2:** Đánh giá  $f(t, t, z) \geq 0$ .

**Chú ý:** Đối với các bất đẳng thức đồng bậc ta có thể làm cho chứng minh đơn giản hơn bằng cách chuẩn hóa các biến trong bất đẳng thức trước khi thực hiện hai bước.

### 1. Bất đẳng thức không điều kiện:

Đối với những bất đẳng thức không có điều kiện thì dồn biến theo các đại lượng trung bình chẳng hạn  $t = \frac{x+y}{2}; t = \sqrt{xy}; t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ ... là kỹ thuật chính dùng để dồn hai biến bằng nhau.

Ta xét một số bài toán:

**Bài 2.1.** Cho  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}$  (1)

#### Chứng minh

**Cách 1:** (1)  $\Leftrightarrow f(x, y, z) = x + y + z - 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \geq 0, \forall x, y, z > 0$

**Bước 1:** Chứng minh:  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$  với  $t = \frac{x+y}{2}$ . Ta có:  $t^2 \geq xy$  suy ra:

$$f(x, y, z) - f(t, t, z) = x + y + z - 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} - [2t + z - 3 \cdot \sqrt[3]{t^2 z}] = 3(\sqrt[3]{t^2 z} - \sqrt[3]{xyz}) \geq 0$$

**Bước 2:** Chứng minh  $f(t, t, z) = 2t + z - 3 \cdot \sqrt[3]{t^2 z} \geq 0$ .

Thật vậy ta có:  $f(t, t, z) \geq 0 \Leftrightarrow (2t + z)^3 - 27t^2 z \geq 0 \Leftrightarrow (t - z)^2 (8t + z) \geq 0$  (đúng)

**Kết luận:**  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z) \geq 0$

**Cách 2:** (1)  $\Leftrightarrow f(x, y, z) = x + y + z - 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \geq 0, \forall x, y, z > 0$ .

**Bước 1:** Chứng minh:  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$  với  $t = \sqrt{xy}$ . Ta có:  $2t \leq x + y$  suy ra:

$$f(x, y, z) - f(t, t, z) = x + y + z - 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} - [2t + z - 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}] = x + y - 2t \geq 0$$

**Bước 2:** Chứng minh  $f(t, t, z) = 2t + z - 3 \cdot \sqrt[3]{t^2 z} \geq 0$ .

Thật vậy ta có:  $f(t, t, z) \geq 0 \Leftrightarrow (2t + z)^3 - 27t^2 z \geq 0 \Leftrightarrow (t - z)^2 (8t + z) \geq 0$  (đúng)

**Kết luận:**  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z) \geq 0$

**Cách 3:** **Bước 1:** Kỹ thuật chuẩn hóa theo tổng đối với bất đẳng thức đồng bậc:

Nếu  $x + y + z = k > 0$  thì (1)  $\Leftrightarrow (x + y + z)^3 \geq 27xyz \Leftrightarrow \left(\frac{x}{k} + \frac{y}{k} + \frac{z}{k}\right)^3 \geq 27 \cdot \frac{x}{k} \cdot \frac{y}{k} \cdot \frac{z}{k}$

Từ đó suy ra có thể giả sử  $x + y + z = 1$  (\*), khi đó  $(1) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 1 - 27xyz \geq 0$

**Bước 2:** Để ý rằng khi thay  $x$  và  $y$  bởi  $t = \frac{x+y}{2}$  thì điều kiện (\*) vẫn được bảo toàn tức là  $t+t+z=1$ , nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của  $xyz$ . Theo bất đẳng thức  $AM - GM$  thì  $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = t^2$ , nên  $xyz \leq t^2 z \Rightarrow f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ .

**Bước 3:** Thay  $z = 1 - 2t$  ta có:  $f(t, t, z) = 1 - 27t^2(1 - 2t) = (1 + 6t)(1 - 3t)^2 \geq 0$

Với điều kiện (\*) thì đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3t=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$ .

Vậy trong trường hợp tổng quát đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z > 0$ .

**Cách 4: Bước 1:** Kỹ thuật chuẩn hóa theo tích đối với bất đẳng thức đồng bậc:

Nếu  $xyz = k^3 > 0$  thì  $(1) \Leftrightarrow \frac{x}{k} + \frac{y}{k} + \frac{z}{k} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{k} \cdot \frac{y}{k} \cdot \frac{z}{k}}$

Từ đó suy ra có thể giả sử  $xyz = 1$  (\*), khi đó  $(1) \Leftrightarrow f(x, y, z) = x + y + z - 3 \geq 0$

**Bước 2:** Để ý rằng khi thay  $x$  và  $y$  bởi  $t = \sqrt{xy}$  thì điều kiện (\*) vẫn được bảo toàn tức là  $t.t.z=1$ , nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của  $x + y + z$ . Theo bất đẳng thức  $AM - GM$  thì  $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2t$ , nên  $x + y + z \geq 2t + z \Rightarrow f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ .

**Bước 3:** Thay  $z = \frac{1}{t^2}$  ta có:  $f(t, t, z) = 2t + \frac{1}{t^2} - 3 = \frac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2} \geq 0 \Rightarrow$  (dpcm)

Với điều kiện (\*) thì đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1 \Leftrightarrow x=y=z=1$ .

Vậy trong trường hợp tổng quát đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z > 0$ .

#### • Nhận xét:

a) Qua bốn cách làm của ví dụ trên ta thấy nếu sử dụng phương pháp dồn biến với kỹ thuật chuẩn hóa thì việc chứng minh  $f(x, y, z) \geq 0$  được qui về chứng minh hai bất đẳng thức với một biến số  $t$ :  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ ;  $f(t, t, z) \geq 0$ .

b) Nếu một bài toán đã chuẩn hóa (tức là bất đẳng thức có điều kiện) thì nó sẽ "gợi ý" cho chúng ta cách dồn biến (phải đảm bảo điều kiện). Ngược lại một bài toán chưa chuẩn hóa (bất đẳng thức không điều kiện) thì chúng ta sẽ có nhiều cách để dồn biến hơn. Khi đó ta sẽ chọn cách dồn biến sao cho bảo toàn được "nhiều" biểu thức nhất trong bất đẳng thức – điều này cũng tương đương với chuẩn hóa sao cho biểu thức có dạng đơn giản nhất. Vì thế, một sự phối hợp tốt giữa kỹ thuật chuẩn hóa và dồn biến là một điều cần thiết. Tuy nhiên, khi đã quen với những điều này thì các bạn sẽ thấy không có sự khác biệt đáng kể nào giữa chúng.

• Vì bất đẳng thức  $AM - GM$  ( $n = 3$ ) quá đơn giản nên phương pháp dồn biến có thể không để lại nhiều ấn tượng. Nhưng các bạn sẽ bị thuyết phục bởi sự hiệu quả của phương pháp dồn biến qua các ví dụ minh họa sau đây.

**Bài 2.2. [APMO 2004]** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

### Chứng minh

Do vế trái của bất đẳng thức là hàm chẵn với các biến  $a, b, c$  nên chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho các số thực  $a, b, c$  không âm.

Đặt:  $f(a, b, c) = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) - 9(ab + bc + ca)$  với  $a, b, c \geq 0$ .

$$\text{Xét hiệu: } d = f(a, b, c) - f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \left[ 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 c^2 + 4(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 9c \right].$$

Từ đó, nếu giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$  thì suy ra  $d \geq 0$  hay  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh  $f(t, t, c) \geq 0$ . Biểu diễn  $f(t, t, c)$  dưới dạng tam thức bậc 2 ẩn  $c$ :  $f(t, t, c) = (t^2 + 2)^2 c^2 - 18tc + (2t^4 - t^2 + 8)$ . Ta có:

$$\Delta' = (9t)^2 - (t^2 + 2)^2 (2t^4 - t^2 + 8) = -(t^2 - 1)^2 (2t^4 + 11t^2 + 32) \leq 0 \Rightarrow f(t, t, c) \geq 0.$$

Vậy bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

• **Nhận xét:** Việc giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$  là một thủ thuật rất thường được áp dụng để dồn biến. Cần chú ý là với bất đẳng thức ba biến đối xứng thì ta có thể giả sử  $a \leq b \leq c$  (hoặc  $a \geq b \geq c$ ), còn trong trường hợp bất đẳng thức ba biến hoán vị vòng quanh thì ta có thể giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$  (hoặc  $a = \max\{a, b, c\}$ ).

**Bài 2.3. [Việt Nam TST 1996]** Cho các số thực  $a, b, c$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$f(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4)$$

### Giải

Không giảm tính tổng quát, giả sử  $a(a+b+c) \geq 0$ . Xét hiệu:

$$f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \left[ \frac{3}{28}(b^2 + c^2) + 3a(a+b+c) + \frac{15}{56}(b+c)^2 \right] (b-c)^2 \geq 0$$

$$\text{Hay } f(a, b, c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right). \text{ Nếu } b+c=0 \text{ thì: } f(a, b, c) = \frac{3}{7}a^4 \geq 0$$

$$\text{Nếu } b+c \neq 0, \text{ chuẩn hóa } b+c=2. \text{ Khi đó: } f(a, 1, 1) = 2(a+1)^4 + 16 - \frac{4}{7}(a^4 + 2) = g(a)$$

Dễ dàng chứng minh  $g(a) \geq 0$  bằng khảo sát hàm theo biến  $a$ . Do đó  $f(a, b, c) \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 0$

**Bài 2.4.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh:

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ac} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{-8}{(a+b+c)^2}$$

### Chứng minh

Đặt  $f(a, b, c) = VT - VP$ . Ta sẽ chứng minh:  $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$ ,  $t = \frac{b+c}{2}$

Trước hết dễ thấy:  $\frac{1}{2a^2 + bc} \geq \frac{1}{2a^2 + t^2}$ . Do vậy chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{2b^2 + ac} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{2}{2t^2 + at} \Leftrightarrow (b-c)^2 (2b^2 + 2c^2 + 8bc + a^2 - 5a(b+c)) \geq 0$$

Giả sử  $a = \min\{a, b, c\} \Rightarrow$

$$2b^2 + 2c^2 + 8bc + a^2 - 5a(b+c) = 2b^2 + 2c^2 + 3bc - 4a^2 + 5(b-a)(c-a) \geq 0$$

$\Rightarrow f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$ . Mặt khác:  $f(a, t, t) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(4a^2 - 7at + 6t^2) \geq 0$  (đúng)

$\Rightarrow f(a, b, c) \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = t, c = 0$  ( $t \geq 0$ ) cùng các hoán vị.

• **Nhận xét:** Bài toán 2.4 là một ví dụ về bất đẳng thức đối xứng mà cực trị không đạt tại tâm. Chúng ta thấy rằng trong phương pháp dồn biến phần quan trọng nhất là dồn về hai biến bằng nhau, còn sau đó thì cực trị đạt tại tâm hay không tại tâm không phải là điều mấu chốt. Đây chính là điểm khác biệt của phương pháp so với việc áp dụng bất đẳng thức cổ điển và nói chung với các dạng toán mà cực trị không đạt tại tâm thì xử lý bằng bất đẳng thức cổ điển là tương đối khó khăn.

## 2. Dồn biến với bất đẳng thức có điều kiện

Khác với phần trước, ở phần này khi xét những bất đẳng thức có điều kiện, cách thức dồn biến của chúng ta sẽ có điểm khác. Chẳng hạn như với điều kiện  $ab + bc + ca = 1$ , khi chúng ta muốn dồn hai biến bằng nhau tức dồn  $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$  thì biến  $t$  ở đây không phải là một đại lượng trung bình của  $b, c$  mà là đại lượng thỏa mãn  $2at + t^2 = 1$ . Tổng quát hơn:

Để chứng minh bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  với các biến  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $g(a, b, c) = 0$  thì thực hiện bước 1 ta cần chứng minh  $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$  với  $t$  là biến thỏa mãn  $g(a, t, t) = 0$ . Sau đây là một số ví dụ tiêu biểu:

**Bài 2.5. [Tập chí THPT]** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + (b-c)^2} + \sqrt{b + (c-a)^2} + \sqrt{c + (a-b)^2} \geq \sqrt{3}$$

### Chứng minh

Đặt  $VT = f(a, b, c)$ . Giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$ . Do  $a + b + c = 1$  nên  $a \leq \frac{1}{3}$ .

Ta có:  $\sqrt{a+(b-c)^2} \geq \sqrt{a}$ . Do đó, để đơn giản ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{2(b+c)+(2a-b-c)^2} \Leftrightarrow (b-c)^2(3-8a) \geq 0$$

Do đó:  $VT \geq \sqrt{a} + \sqrt{2(1-a)+(1-3a)^2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow a(3a-1)^2(4-3a) \geq 0$  (đúng)

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}; \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\}$

**Bài 2.6.** Cho  $a+b+c \geq 3$ . Tìm tất cả các số thực  $k$  sao cho:

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) \geq (1+k)^3 \quad (1)$$

**Giải**

**Bước 1:** Trước hết, ta có vài nhận xét để đơn giản hóa bài toán.

Chọn  $c=0, a=b > \max\left\{\sqrt{k}, \frac{3}{2}\right\}$  suy ra  $k > 0$ .

Hơn nữa, nếu  $k > 0$  thỏa mãn thì mọi  $k' > k$  cũng thỏa mãn, vì:

$$\begin{aligned} (a^2+k')(b^2+k')(c^2+k') &= [(a^2+k)+k'-k][(b^2+k)+k'-k][(c^2+k)+k'-k] \\ &\geq \left(\sqrt{(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k)}+k'-k\right)^3 \geq \left(\sqrt{(1+k)^3}+k'-k\right)^3 = (1+k')^3 \end{aligned}$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm số  $k$  nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

Bây giờ ta chứng tỏ với  $k > 1$  thì các mệnh đề sau là tương đương:

- (i) (1) đúng với mọi  $a, b, c$  thực thỏa mãn  $a+b+c \geq 3$ .
- (ii) (1) đúng với mọi  $a, b, c$  không âm thỏa mãn  $a+b+c \geq 3$ .
- (iii) (1) đúng với mọi  $a, b, c$  không âm thỏa mãn  $a+b+c=3$ .
- (iv) (1) đúng với  $a=b=x, c=3-2x$ , với mọi  $x \in [0, 1]$ .

Thật vậy, chiều (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv) là hiển nhiên nên ta chỉ cần chứng minh chiều ngược lại.

Ta chứng minh (iv)  $\Rightarrow$  (iii). Giả sử  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a+b+c=3$ .

Vì tính đối xứng, ta có thể giả sử  $c \geq a, b \Rightarrow 0 \leq a+b \leq 2$ .

Đặt  $f(a, b, c) = (a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) - (1+k)^3$ . Đặt  $x = \frac{a+b}{2}$  thì  $x \in [0, 1]$  và  $c=3-2x$

Ta có:  $f(a, b, c) - f(x, x, c) = (a-b)^2 \left[ 2k - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \right] (c^2+k) \geq 0$

vì  $2k - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 2 \left[ k - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right] \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Từ đó ta có: } d &= \frac{(2t-b-c)(2t+b+c)}{(b+c)^2(2t)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(a+b)(a+c)} \\
 &= \frac{-(b-c)^2(2t+b+c)}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2(b+c)^2(2t)^2} + \frac{(b-c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \\
 &= (b-c)^2 \left( -\frac{1}{(a+b)^2(a+c)^2} - \frac{2t+b+c}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2(b+c)^2(2t)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Đến đây ta giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$  thì  $a \leq t$  và  $2t+b+c \leq (\sqrt{a+b} + \sqrt{a+c})^2$ .

$(a+b)^2(a+c)^2 \leq (b+c)^2(2t)^2$ . Do đó  $d \geq 0$  hay  $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$ .

Mặt khác, thay  $a = \frac{1-t^2}{2t}$  vào  $f(a, t, t)$  và biến đổi ta có:

$$f(t, t, c) = \frac{(1-t^2)(1-3t^2)^2}{4t^2(1+t^2)} + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4}. \text{ Bất đẳng thức được chứng minh.}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  hoặc  $a = 0, b = c = 1$  cùng các hoán vị.

• **Bình luận:** Nếu các bạn chưa thực sự thành thạo kỹ thuật này, các bạn có thể thuận nhất hóa bất đẳng thức rồi lại dồn biến như phần trước. Chẳng hạn như bất đẳng thức thuận nhất của **bài 2.8** là:  $(ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$

Tuy nhiên, nếu các bạn thử dồn biến theo các đại lượng trung bình thì các bạn sẽ thấy việc này rất phức tạp, đồng thời hiểu được nét đẹp của phép dồn biến theo điều kiện.

**Bài 2.9.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab+bc+ca+6abc=9$ .

Chứng minh rằng:  $a+b+c+3abc \geq 6$

### Chứng minh

Đặt  $f(a, b, c) = a+b+c+3abc$ . Giả sử  $t$  là biến thỏa mãn  $2at+t^2+6at^2=9$  ( $0 \leq t \leq 3$ )

Khi đó:  $d = f(a, b, c) - f(a, t, t) = (b+c-2t) + 3a(bc-t^2)$

Với điều kiện đề bài, việc đưa các biểu thức  $(b+c-2t)$ ,  $(bc-t^2)$  về dạng  $A(b-c)^2$  là khá phức tạp. Do vậy, chúng ta sẽ xử lý một cách "khéo" hơn.

Xét điều kiện:  $ab+bc+ca+6abc=2at+t^2+6at^2 \Leftrightarrow \frac{a}{6a+1}(b+c-2t)=t^2-bc$

Để ý rằng nếu  $\begin{cases} b+c-2t < 0 \\ t^2-bc < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b+c}{2} < t < \sqrt{bc} \Rightarrow \text{vô lý} \Rightarrow \begin{cases} b+c-2t \geq 0 \\ t^2-bc \geq 0 \end{cases}$

Từ đó:  $d = (b+c-2t) + 3a(bc-t^2) = (b+c-2t) \left( 1 - \frac{3a^2}{6a+1} \right)$ .

Bây giờ, ta giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$

Khi đó  $a \leq 1$  nên  $1 - \frac{3a^2}{6a+1} \geq 0$ . Vậy  $d \geq 0$  hay  $f(a, b, c) \geq f(a, 1, 1)$ .

Mặt khác thay  $a = \frac{9-t^2}{2t+6t^2}$  và biến đổi ta có:  $f(a, 1, 1) = \frac{3(3-t)(t+1)(t-1)^2}{2t+6t^2} + 6 \geq 6$ .

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$  hoặc  $a = 0, b = c = 3$  cùng các hoán vị.

### 3. Dồn biến lượng giác trong tam giác:

Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cũng là bất đẳng thức ba biến. Vì đường lối chứng minh không khác biệt gì so với bất đẳng thức đại số nên ở đây chỉ xin nêu ra một vài ví dụ để minh họa cho sức mạnh của phương pháp trong dạng bất đẳng thức này.

**Bài 2.10.** Cho  $\Delta ABC$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của:  $(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C)$

**Giải**

Giá sử  $C = \min \{A, B, C\} \Rightarrow 0 \leq C \leq \frac{\pi}{3}$  (\*). Đặt

$$f(A, B, C) = (1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C)$$

Ta sẽ chứng minh:  $f(A, B, C) \geq f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right)$  (1). Thật vậy ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B) \geq \left(1 + \cos^2 \frac{A+B}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A-B}{2} [6\cos C - \cos(A-B) - 1] \geq 0$$

(2)

Từ (\*) ta có:  $6\cos C - \cos(A-B) - 1 \geq 3 - 1 - 1 > 0 \Rightarrow (2)$  đúng

$$\Rightarrow (1) \text{ đúng hay } f(A, B, C) \geq f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right) = g(C) = \frac{1}{4}(3 - \cos C)^2(1 + \cos^2 C)$$

Để thấy  $g(C) \geq \frac{125}{64}$ . Kết hợp với (1)  $\Rightarrow f(A, B, C) \geq \frac{125}{64}$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều. Vậy  $\min f = \frac{125}{64}$

**Bài 2.11.** Cho tam giác  $ABC$  không tù. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

**Giải**

Giá sử  $A = \max \{A, B, C\}$  thì  $\frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$ . Đặt  $x = \cos \frac{B-C}{2}; x \in [0, 1]$

$$P = f(x) = \frac{\sin A + 2\cos \frac{A}{2}x}{\cos A + 2\sin \frac{A}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos \frac{3A}{2}}{\left(\cos A + 2\sin \frac{A}{2}x\right)^2} \leq 0$$



$\Rightarrow f(x)$  nghịch biến trong  $[0,1]$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{\sin A + 2\cos \frac{A}{2}}{\cos A + 2\sin \frac{A}{2}} = g(A). \text{ Ta có: } g'(A) = \frac{\sin \frac{3A}{2} - 1}{\left(\cos A + 2\sin \frac{A}{2}\right)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow g(A) \text{ nghịch biến trong } \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow g(A) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}; B = C = \frac{\pi}{4}$  và các hoán vị. Vậy  $\min P = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Bài 2.12.** Cho tam giác ABC không tù. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{\sin A \sin B}{\sin C}\right)^2 + \left(\frac{\sin B \sin C}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{\sin A \sin C}{\sin B}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta giả sử  $\frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$ . Ta viết bất đẳng thức trên dưới dạng:

$$f^2(A, B, C) \geq \frac{9}{4} + 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

Trong đó:  $f(A, B, C) = \frac{\sin A \sin B}{\sin C} + \frac{\sin A \sin C}{\sin B} + \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$

Xét hiệu:  $d = f(A, B, C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{B-C}{2}}{\sin A} \left(\frac{4\sin^2 A \sin^2 \frac{A}{2}}{\sin B \sin C} - \frac{1}{2}\right)$

Vì  $\frac{\pi}{2} > A \geq \frac{\pi}{3}$  nên  $\frac{4\sin^2 A \sin^2 \frac{A}{2}}{\sin B \sin C} \geq 16\sin^4 \frac{A}{2} \geq 1$ . Vì vậy  $d \geq 0$

Chú ý rằng:  $\sin^2 B + \sin^2 C \leq 2\cos^2 \frac{A}{2}$  nên ta chỉ cần chứng minh:

$$f^2\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) \geq \frac{9}{4} + 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \Leftrightarrow \cos A (\cos A + 1)(2\cos A - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì  $\frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$ . Từ đây ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  là tam giác đều hoặc tam giác vuông cân.

**Nhận xét:** Sử dụng đẳng thức:  $\frac{\sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{\cot B + \cot C}$  và  $\sum \cot B \cot C = 1$  thì bất đẳng thức trên tương đương với Bất đẳng thức Iran 1996:

$$(ab + bc + ca) \left[ \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

### III. DỒN BIẾN BẰNG KỸ THUẬT HÀM SỐ

Đây là một kỹ thuật rất quan trọng của phương pháp dồn biến. Vì thế chúng tôi giới thiệu nó ở ngay sau phần cơ bản nhất. Trong mục II, chúng ta thấy rằng để chứng tỏ  $f(x, y, z) \geq f(t, t, t)$  ta xét hiệu  $d = f(x, y, z) - f(t, t, t)$  rồi tìm cách đánh giá  $d \geq 0$ . Cách làm này phù hợp với  $f$  là các hàm đa thức, phân thức đơn giản nên dễ biến đổi đại số. Trong trường hợp  $f$  là các hàm khó biến đổi đại số, chẳng hạn:  $f(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$  (với  $k > 0$ ) thì ta phải sử dụng kỹ thuật hàm số để chứng minh các đánh giá trung gian bằng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số. Để bạn đọc dễ hình dung ta có thể mô tả kỹ thuật này như sau: Giả sử cần chứng minh  $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$  với  $t = \frac{y+z}{2}$ , ta xét hàm:  $g(s) = f(x, t+s, t-s)$  với  $s \geq 0$ .

Sau đó chứng minh  $g$  tăng  $\forall s \geq 0$  (thường sử dụng đạo hàm), suy ra  $g(s) \geq g(0)$ . Một trong những ví dụ quen thuộc với các bạn là dồn biến bằng hàm lồi, tuy nhiên dưới đây chúng ta sẽ quan sát kỹ thuật dồn biến trong bối cảnh tổng quát hơn, còn vấn đề về hàm lồi sẽ được trở lại ở một mục khác trong bài toán với  $n$  biến.

Chúng tôi nhấn mạnh rằng, đây là một kỹ thuật khó, bởi nó chứa đựng những nét rất tinh tế của phương pháp dồn biến. Những ví dụ sau đây thể hiện rất rõ vẻ đẹp và sức mạnh của phương pháp dồn biến.

**Bài 3.1:** Cho  $k \geq 0$  và  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\} \quad (*)$$

#### Chứng minh

**Bước 1:** Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi  $2 = \frac{3}{2^k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$

Các bạn hãy suy nghĩ tại sao bất đẳng thức đúng cho trường hợp này lại dẫn đến bất đẳng thức đúng cho trường hợp tổng quát.

**Chú ý:** Với  $k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$  thì đẳng thức xảy ra tại  $a = b = c > 0$  hoặc  $\begin{cases} a = b, c = 0 \\ b = c, a = 0 \\ c = a, b = 0 \end{cases}$

**Bước 2:** Không mất tổng quát có thể giả sử  $a + b + c = 1$  và  $b \geq c \geq a$ .

Đặt  $t = \frac{b+c}{2}$  và  $m = \frac{b-c}{2}$ , suy ra  $b = t + m$ ,  $c = t - m$ ,  $a = 1 - 2t$ . Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow f(m) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + \left(\frac{t+m}{1-t-m}\right)^k + \left(\frac{t-m}{1+m-t}\right)^k \geq 2 \text{ với } k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$$

Vì  $c \geq a$  nên  $3t - 1 \geq m \geq 0$ , và  $1 \geq b + c = 2t$  nên  $\frac{1}{2} \geq t \geq \frac{1}{3}$ .

Ta sẽ khảo sát  $f(m)$  trên miền  $m \in [0, 3t - 1]$  với  $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  là hằng số.

$$\text{Ta có: } f'(m) = \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} - \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} \geq \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow g(m) = [\ln(t-m) - \ln(t+m)] - \frac{1+k}{1-k} [\ln(1-t-m) - \ln(1-t+m)] \geq 0$$

$$\text{Ta có: } g'(m) = \left( \frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m} \right) + \frac{1+k}{1-k} \left( \frac{1}{1-t-m} + \frac{1}{1-t+m} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2t}{(t-m)(t+m)} + \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{2(1-t)}{(1-t-m)(1-t+m)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-t}{t^2-m^2} + \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{1-t}{(1-t)^2-m^2} \geq 0 \quad (1)$$

Do  $k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$  nên  $\frac{1+k}{1-k} \geq 2$  suy ra để chứng minh (1) ta cần chứng minh

$$\frac{-t}{t^2-m^2} + \frac{2(1-t)}{(1-t)^2-m^2} \geq 0 \Leftrightarrow u(m) = -t + 4t^2 - 3t^3 + 3tm^2 - 2m^2 \geq 0$$

$$\text{Ta có: } u'(m) = 2(3t-2)m < 0 \quad \forall t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow u(m) \geq u(3t-1) = 2(3t-1)(2t-1)^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow (1) \text{ đúng} \Rightarrow g'(m) \geq 0 \Rightarrow g(m) \text{ đồng biến} \Rightarrow g(m) \geq g(0) = 0 \Rightarrow f'(m) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(m) \text{ đồng biến} \Rightarrow f(m) \geq f(0) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k.$$

**Bước 3:** Ta cần chứng minh  $f(0) = h(t) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \geq 2, \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$

$$h'(t) = \frac{2kt^{k-1}}{(1-t)^{k+1}} - \frac{k}{2^k} \cdot \frac{(1-2t)^{k-1}}{t^{k+1}} \leq 0 \Leftrightarrow 2^{k+1}t^{2k} \leq [(1-t)(1-2t)]^{k-1} \quad (2)$$

Trong bất đẳng thức cuối, vế trái là hàm đồng biến theo  $t$  và vế phải là hàm nghịch biến theo  $t$ , và lưu ý là  $t \leq \frac{1}{3}$  nên để chứng minh (2) ta cần chứng minh:

$$2^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \leq \left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\right]^{k-1}. \text{ Bất đẳng thức này đúng nên } h(t) \text{ nghịch biến, suy ra}$$

$$h(t) \geq h\left(\frac{1}{3}\right) = 2. \text{ Bài toán được giải quyết trọn vẹn!}$$

**Nhận xét:** Để thấy được nét đẹp của bài toán này, ta xét các trường hợp đặc biệt.

a) Trường hợp  $k = 1$ , ta thu được bất đẳng thức Nesbit:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Có 45 cách chứng minh bất đẳng thức này (Xem §24.3). Ví dụ 1 cách tiêu biểu là:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \\ &= (a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq (a+b+c) \frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

b) Trường hợp  $k = \frac{1}{2}$ , ta thu được bất đẳng thức sau:  $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$

Đây là một bài toán khá thú vị với một lời giải đơn giản sử dụng **AM – GM**:

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{2a}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

c) Trường hợp  $k \geq \frac{2}{3}$ , ta có bất đẳng thức sau:  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

Đây cũng là một bài toán rất hay đã được đăng trên nhiều tạp chí toán học. Mặc dù  $k = \frac{2}{3}$  không phải là hằng số tốt nhất, nhưng nó mang lại cho chúng ta 1 lời giải rất đẹp:

$$a+b+c = a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3a}{a+b+c} \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

**Bài 3.2.** Cho  $k > 0$ ,  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \max \left\{ 3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \right\} \quad (1)$$

### Chứng minh

Không mất tổng quát, có thể giả sử  $b \geq c$  (việc lấy  $a = \min\{a, b, c\}$  hay  $a = \max\{a, b, c\}$  sẽ được lựa chọn để phù hợp với các biến đổi tiếp theo).

Đặt  $t = \frac{b+c}{2}$  và  $m = \frac{b-c}{2}$  suy ra  $b = t + m$ ,  $c = t - m$ . Khi đó:

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow f(m) = a^k \left[ (t+m)^k + (t-m)^k \right] + (t^2 - m^2)^k \leq \max \left\{ 3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \right\}$$

Ta khảo sát  $f(m)$  với  $m \in [0, t]$ . Ta có:

$$f'(m) = ka^k \left[ (t+m)^{k-1} - (t-m)^{k-1} \right] - 2km(t^2 - m^2)^{k-1}$$

$$f'(m) \geq 0 \Leftrightarrow g(m) = a^k \left[ (t-m)^{1-k} - (t+m)^{1-k} \right] - 2m \geq 0$$

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi  $k > 1$  (khi  $k \leq 1$  thì bài toán đơn giản).

$$\text{Ta có: } g''(m) = a^k k(k-1) \left[ (t-m)^{-k-1} - (t+m)^{-k-1} \right] > 0$$

$\Rightarrow g'(m)$  đồng biến nên  $g'(m) = 0$  có tối đa một nghiệm trên  $(0, t)$ .

Vì  $g(0) = 0, g(t) = +\infty$  nên chỉ có hai khả năng:  $g(m) > 0, \forall m \in (0; t]$  hoặc  $g(m) = -0+, \forall m \in [0, t]$

$\Leftrightarrow f'(m) > 0, \forall m \in (0; t]$  hoặc  $f'(m) = -0+, \forall m \in [0, t]$

$\Leftrightarrow f(m)$  đi lên hoặc  $f(m)$  đi xuống rồi lại đi lên.

Trong cả 2 trường hợp thì cực đại cũng đạt ở biên do đó  $f(m) \leq \max\{f(0), f(t)\}$

$$\text{Với } m = t \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(t) = (ab)^k \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$$

$$\text{Với } m = 0 \Rightarrow b = c = t \Rightarrow f(0) = 2t^k a^k + t^{2k} = 2t^k (3-2t)^k + t^{2k} = h(t)$$

$$\text{Ta có: } h'(t) = 2k(3-2t)^k t^{k-1} - 4k(3-2t)^{k-1} t^k + 2kt^{2k-1}$$

$$h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3-2t}{t}\right)^k - 2\left(\frac{3-2t}{t}\right)^{k-1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow u(x) = x^k - 2x^{k-1} + 1 \geq 0 \text{ với } x = \frac{3-2t}{t}$$

Ta có:  $u'(x) = [kx - 2(k-1)]x^{k-2}$ . Vì  $u'(x)$  có tối đa một nghiệm trên  $\mathbb{R}^+$  nên  $u(x)$  có tối đa 2 nghiệm trong  $\mathbb{R}^+$ , trong đó một nghiệm là  $x = 1$ . Từ đó, ta sẽ giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$ .

Khi đó ta chỉ việc xét khi  $t \geq 1$  và tương ứng sẽ là  $x \leq 1$ .

Vì  $u(x)$  chỉ có tối đa 1 nghiệm trong  $(0, 1)$  nên  $h'(t)$  chỉ có tối đa 1 nghiệm trong  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ .

Chú ý là  $h'(1) = 0, h'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ . Do đó, chỉ có hai khả năng hoặc  $h(t)$  đồng biến trên  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

hoặc  $h(t)$  có dạng  $(-0+)$  với  $t \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ . Trong cả 2 trường hợp thì  $h(t)$  luôn đạt max tại

$$\text{hai biên nên } h(t) \leq \max\left\{f(1), f\left(\frac{3}{2}\right)\right\} = \max\left\{3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right\}$$

• **Nhận xét:** Ở đây chúng tôi không giả thiết  $a = \min\{a, b, c\}$  ngay từ đầu là muốn nhấn mạnh rằng việc dồn về hai biến bằng nhau luôn thực hiện được mà không cần thứ tự giữa các biến số. Chính vì lý do này nên sau khi chứng minh:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a, b, c) \leq \max\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}, f(a, t, t)\right\} \text{ với } t = \frac{b+c}{2} \\ f(a, b, c) \leq \max\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}, f(t, t, c)\right\} \text{ với } t = \frac{a+b}{2} \end{array} \right. \quad (*)$$

ta có thể làm tiếp theo bằng cách khác mà không cần khảo sát hàm 1 biến số.

Với mỗi  $a, b, c$  cố định, xét dãy số được xác định bởi qui tắc sau:

$$(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c); (a_{2n-1}, b_{2n-1}, c_{2n-1}) = \left( a_{2n-2}, \frac{b_{2n-2} + c_{2n-2}}{2}, \frac{b_{2n-2} + c_{2n-2}}{2} \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{và } (a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}) = \left( \frac{a_{2n-1} + b_{2n-1}}{2}, \frac{a_{2n-1} + b_{2n-1}}{2}, c_{2n-1} \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\text{Khi đó ta có: } f(a, b, c) \leq \max \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{2k}, f(a_n, b_n, c_n) \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Do  $a + b + c = 3$  nên dễ thấy các dãy  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  đều hội tụ về 1, khi đó:

$$f(a, b, c) \leq \max \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{2k}, f(1, 1, 1) \right\} = \max \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{2k}, 3 \right\} \quad (\text{đpcm})$$

• **Bình luận:** Kỹ thuật chuyển qua giới hạn này có thể tổng quát lên thành hai định lý dồn biến tổng quát là *SMV* và *UMV* mà chúng tôi sẽ giới thiệu ở phần sau. Mặt khác nếu kết hợp tính liên tục của hàm số với một kỹ thuật khác, chúng ta còn đạt được một kết quả tổng quát hơn so với hai định lý *SMV* và *UMV*, đó là định lý *GMV*.

Ngoài ra, sau khi có (\*), ta còn có một cách khác để đạt được điều phải chứng minh mà chỉ cần sử dụng một số hữu hạn lần thay thế. Tuy nhiên, để khỏi trùng lặp chúng tôi sẽ giới thiệu nó trong mục bất đẳng thức bốn biến và các mục sau đó, khi mà nó thực sự cần thiết. Còn trong trường hợp ba biến, chúng tôi sẽ chỉ sử dụng cách tiếp cận đơn giản nhất (dồn về 1 biến rồi khảo sát), nhằm giữ được tính trong sáng của phương pháp.

Chúng tôi hi vọng rằng, sau khi đọc kỹ hai bài toán trên, thì các bạn có thể sử dụng kỹ thuật hàm số để dồn biến theo những cách khác nhau. Ví dụ tiếp theo minh họa cho kiểu dồn biến về trung bình nhân.

**Bài 3.3.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \leq 8(a+b+c)^4$$

$$\text{b) } 64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \leq (a+b+c)^6$$

### Chứng minh

a) Đặt  $f(a, b, c) = 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ . Ta có thể giả sử  $a \geq b$ .

Xét hàm số  $g(t) = f\left(ta, \frac{b}{t}, c\right)$  với  $t \in \left[\sqrt{\frac{b}{a}}, 1\right]$ .

$$\text{Ta có: } g'(t) = 32\left(a - \frac{b}{t^2}\right)\left(ta + \frac{b}{t} + c\right)^3 - 81\left(a - \frac{b}{t^2}\right)\left(ta + \frac{b}{t}\right)(1+c^2)$$

Vì  $t \in \left[ \sqrt{\frac{b}{a}}, 1 \right]$  nên  $g'(t) \geq 0$  nếu  $32(d+c)^3 \geq 81d(1+c^2)$  với  $d = ta + \frac{b}{t}$

Thật vậy:  $32(d+c)^3 \geq 32d(d^2 + 2dc + 3c^2) \geq 32d(3\sqrt{d^4c^2} + 3c^2) > 81d(1+c^2)$  (vì  $d^2c \geq 4$ )

Vậy  $g'(t) \geq 0$  với  $t \in \left[ \sqrt{\frac{b}{a}}, 1 \right] \Rightarrow g(t)$  đồng biến trên  $\left[ \sqrt{\frac{b}{a}}, 1 \right]$

$\Rightarrow g(1) \geq g\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ , tức là  $f(a, b, c) \geq f(s, s, c)$  với  $s = \sqrt{ab}$ .

Phần còn lại là chứng minh  $f(s, s, c) \geq 0$  với  $s^2c = 1$ .

Thay  $s = \frac{1}{\sqrt{c}}$ , ta được:  $f(s, s, c) = f\left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, c\right) = 8\left(\frac{2}{\sqrt{c}} + c\right)^4 - 81\left(1 + \frac{1}{c}\right)^2(1+c^2)$

$$= \left(\frac{\sqrt{c}-1}{c}\right)^2 \left(8c^5 + 16c^{\frac{9}{2}} + 24c^4 + 96c^{\frac{9}{2}} + 87c^3 + 78c^{\frac{5}{2}} + 99c^2 + 120c^{\frac{3}{2}} - 21c + 94\sqrt{c} + 47\right) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

**b)** Đặt  $f(a, b, c) = (a+b+c)^6 - 64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)$

Giả sử  $a \geq b \geq c$ . Xét hàm số  $g(t) = f\left(ta, \frac{b}{t}, c\right)$  với  $t \in \left[\sqrt{\frac{b}{a}}, 1\right]$ . Ta có:

$$g'(t) = 6\left(a - \frac{b}{t^2}\right)\left(ta + \frac{b}{t} + c\right)^5 - 192\left(a - \frac{b}{t^2}\right)\left(t^2a^2 + ab + \frac{b^2}{t^2}\right)(1+c^3)$$

Vì  $t \in \left[\sqrt{\frac{b}{a}}, 1\right]$  nên  $g'(t) \geq 0$  nếu  $\left(ta + \frac{b}{t} + c\right)^5 \geq 32\left(t^2a^2 + ab + \frac{b^2}{t^2}\right)(1+c^3)$

Đặt  $d = t^2a^2 + ab + \frac{b^2}{t^2}$ , ta có:  $\left(ta + \frac{b}{t} + c\right)^5 \geq 3\left(ta + \frac{b}{t} + c\right)^4$

$$= 3\left(d + 2ab + 2tac + 2 \cdot \frac{bc}{t}\right)^2 \geq 3(d+6)^2 \geq 72d > 32d(1+c^3) \quad (\text{vì } c \leq 1)$$

Vậy  $g'(t) \geq 0$  với  $t \in \left[\sqrt{\frac{b}{a}}, 1\right]$ , suy ra  $g$  đồng biến trên  $\left[\sqrt{\frac{b}{a}}, 1\right]$ , do đó  $g(1) \geq g\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ ,

tức là  $f(a, b, c) \geq f(s, s, c)$  với  $s = \sqrt{ab}$ .



Cuối cùng ta chứng minh  $f(s, s, c) \geq 0$  với  $s^2c = 1$ . Thay  $s = \frac{1}{\sqrt{c}}$ , ta được:

$$\begin{aligned} f(s, s, c) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, c\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{c}} + c\right)^6 - 64\left(1 + \frac{1}{c\sqrt{c}}\right)^2 (1 + c^3) \\ &= c^6 + 12c^4\sqrt{c} - 4c^3 + 32c\sqrt{c} + 112 + \frac{64}{c\sqrt{c}} > 0 \text{ vì } c \leq 1. \text{ Bài toán chứng minh xong.} \end{aligned}$$

**Bài 3.4.** Cho  $a, b, c \geq 0, a + b + c = 1$ . Tìm số thực  $k > 0$  lớn nhất sao cho:

$$\sqrt{a + k(b-c)^2} + \sqrt{b + k(c-a)^2} + \sqrt{c + k(a-b)^2} \leq \sqrt{3} \quad (1)$$

**Giải**

• **Bước 1:** Cho  $a = 1, b = c = 0$  vào (1) suy ra  $k \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ta sẽ chứng minh với  $k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  thì bất đẳng thức (1) đúng.

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = \sqrt{a + k(b-c)^2} + \sqrt{b + k(c-a)^2} + \sqrt{c + k(a-b)^2}$$

Không mất tổng quát, có thể giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Ta sẽ chứng minh  $f(a, b, c) \leq f(a, t, t)$  (2) với  $t = \frac{b+c}{2}$ . Đặt  $b = t + s, c = t - s$ , do  $a + b + c = 1$  nên  $a = 1 - 2t$ , và từ  $a \geq b \geq c \geq 0$  suy ra  $1 \geq 3t + s \geq 4s \geq 0$ .

Xét  $f(a, b, c) = g(s) = \sqrt{1 - 2t + 4ks^2} + \sqrt{t + s + k(3t - s - 1)^2} + \sqrt{t - s + k(3t + s - 1)^2}$ , trong

đó  $s \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$  và  $t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ . Để chứng minh (2) ta cần chứng minh  $g(s) \leq g(0)$ , muốn

vậy ta sẽ chứng minh  $g(s)$  nghịch biến. Ta có:

$$g'(s) = \frac{4ks}{\sqrt{1 - 2t + 4ks^2}} + \frac{1 + 2k - 6kt + 2ks}{2\sqrt{t + s + k(3t - s - 1)^2}} + \frac{-1 - 2k + 6kt + 2ks}{2\sqrt{t - s + k(3t + s - 1)^2}}$$

Do  $1 - 2t + 4ks^2 \geq t - s + k(3t + s - 1)^2 \Leftrightarrow (1 + s - 3t)(3kt + 3ks + 1 - k) \geq 0$  (đúng)

nên để có  $g'(s) \leq 0$  ta chỉ cần  $\frac{1 + 2k - 6kt + 2ks}{2\sqrt{t + s + k(3t - s - 1)^2}} + \frac{-1 - 2k + 6kt + 10ks}{2\sqrt{t - s + k(3t + s - 1)^2}} \leq 0$

$$\Leftrightarrow (1+2k-6kt-10ks)^2(t+s+k(3t-s-1))^2 \geq (1+2k-6kt+2ks)^2(t-s+k(3t+s-1))^2$$

$$\Leftrightarrow h(s) = 1 - 24k^2t - 30kt + 72k^2t^2 + 144k^2ts + 144k^3t - 432k^3t^2 + 6k - 32k^2s - 8ks + 40k^2s^2$$

$$+ 16k^3s - 16k^3 + 80k^3s^2 + 48k^3s^3 - 96k^3ts + 432k^3t^3 + 144k^3t^2s - 240k^3ts^2 \geq 0$$

Ta có:

$$h'(s) = 144k^2t - 32k^2 - 8k + 80k^2s + 16k^3 + 160k^3s + 144k^3s^2 - 96k^3t + 144k^3t^2 - 480k^3ts$$

$$h''(s) = 80k^2 + 160k^3 + 288k^3s - 480k^3t \geq 0 \quad \forall s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad (\text{vì } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]).$$

Do đó  $h'(s)$  đồng biến nên  $h'(s) \leq h'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ , suy ra  $h(s) \geq h\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ . Vậy  $g'(s) \leq 0$  nên  $g$  nghịch biến, suy ra:

$$f(a, b, c) = g(s) \leq g(0) = f(a, t, t) \quad \text{với } t = \frac{b+c}{2}.$$

• **Bước 2:** Bây giờ ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $b = c$ , nghĩa là:

$$\sqrt{a} + \sqrt{2(1-a) + k(1-3a)^2} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 2(1-a) + k(1-3a)^2 \leq (\sqrt{3} - \sqrt{a})^2$$

$$\Leftrightarrow k(1-3a)^2 \leq (1 - \sqrt{3a})^2 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3a})^2 [k(1 + \sqrt{3a})^2 - 1] \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì  $(1 + \sqrt{3a})^2 \leq (1 + \sqrt{3})^2 = \frac{1}{k}$ .

Vậy số thực dương  $k$  lớn nhất thỏa mãn bài toán là  $k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Bình luận:** Nói chung, chúng ta sẽ gặp khó khăn khi làm quen với kỹ thuật này. Con đường để chinh phục một bất đẳng thức sẽ có nhiều chông gai thử thách, đòi hỏi chúng ta phải có một sự kiên trì liên tục. Sau đây là một bài toán mà có thể lời giải của nó sẽ khiến nhiều bạn "khiếp sợ", tuy nhiên chúng tôi hi vọng với sự nỗ lực của bản thân các bạn sẽ tìm thấy vẻ đẹp trong sáng của nó ẩn đằng sau những kỹ thuật tính toán lảo lộn.

**Bài 3.5.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Tìm giá trị lớn nhất của:  $S = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} + \frac{ca}{3+b^2}$

**Giải**

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Đặt  $a = s + t$ ,  $b = s - t$  thì biểu thức  $S$  trở thành:  $f(t) = \frac{c(s-t)}{3+(s+t)^2} + \frac{c(s+t)}{3+(s-t)^2} + \frac{s^2-t^2}{3+c^2}$

Ta khảo sát  $f(t)$  trên miền  $t \in [0, s - c]$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(t) &= \frac{-c}{3+(s+t)^2} - \frac{2c(s^2-t^2)}{[3+(s+t)^2]^2} + \frac{c}{3+(s-t)^2} + \frac{2c(s^2-t^2)}{[3+(s-t)^2]^2} - \frac{2t}{3+c^2} \\ &= \frac{4cst}{uv} + \frac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} - \frac{2t}{3+c^2}, \forall t \in (0, s-c) \text{ với } u=3+(s+t)^2, v=3+(s-t)^2 \end{aligned}$$

Giả sử ta đã chứng minh được  $f'(t) < 0, \forall t \in (0, s-c)$  (điều này sẽ được chứng minh sau), khi đó ta có:  $f(t) \leq f(0) = \frac{2cs}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+c^2} = \frac{2s(3-2s)}{3+s^2} + \frac{s^2}{3+(3-2s)^2} = g(s)$  (1)

Xét  $g(s)$  với  $s \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ . Ta có:

$$g'(s) = \frac{24s-12s^2}{[3+(3-2s)^2]^2} + \frac{18-24s-6s^2}{(3+s^2)^2} = \frac{108(s^2-3s+4)(s-1)^2(-s^2-3s+6)}{[3+(3-2s)^2]^2(3+s^2)^2}$$

$$\text{Để thấy } s^2-3s+4 > 0 \text{ và } -s^2-3s+6 = \left(\frac{\sqrt{33}-3}{2} - s\right)\left(s + \frac{\sqrt{33}+3}{2}\right)$$

nên  $g'(s)$  dương trên  $(1, s_0)$  và âm trên  $\left(s_0; \frac{3}{2}\right)$  với  $s_0 = \frac{\sqrt{33}-3}{2} = 1,372281323...$

$$\text{Vậy } \forall s \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \text{ ta có: } g(s) \leq g(s_0) = \frac{11\sqrt{33}-45}{24} \quad (2)$$

Trong (1) và (2), dấu "=" xảy ra đồng thời tại  $t=0$  và  $s=s_0$ , tức là  $a=b=s_0$  và  $c=3-2s_0$ .

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là } \frac{11\sqrt{33}-45}{24} = 0,757924546...$$

$$\text{đạt được khi } a=b=\frac{\sqrt{33}-3}{2}=1,372281323..., c=6-\sqrt{33}=0,255437353...$$

Để kết thúc, ta chứng minh  $f'(t) < 0, \forall t \in (0, s-c)$ . Ta sẽ chứng minh:

$$\text{Với } t \in (0, s-c) \text{ thì } \frac{4cs}{uv} < \frac{1}{3+c^2} \quad (3) \text{ và } \frac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} \leq \frac{1}{3+c^2} \quad (4)$$

**Chứng minh (3):** Vì  $c+2s=1$  và  $s>1$  nên  $cs < 1$ .

Hơn nữa  $u=3+(s+t)^2 > 4, v=3+(s-t)^2 > 3+c^2$  nên ta thu được (3)

**Chứng minh (4):** Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$u^2v^2 = [3+(s+t)^2]^2 [3+(s-t)^2]^2 \geq 16(s^2-t^2)^2$$

$$\text{và } 2cs(u+v)(3+c^2) = 4cs(3+s^2+t^2)(3+c^2) \leq \left(\frac{4cs+3+s^2+t^2+3+c^2}{3}\right)^3$$

Thay  $c = 3 - 2s$  vào, lưu ý là  $t \leq s - c = 3s - 3$ , ta có:

$4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2 \leq 4(3 - 2s)s + 6 + s^2 + (3s - 3)^2 + (3 - 2s)^2 = 12 + 6(s - 1)(s - 2) \leq 12$  suy ra  $2cs(u + v)(3 + c^2) < 4^3$ .

$$\text{Vậy: } \frac{8cs(s^2 - t^2)(u + v)}{u^2 v^2} = 4 \cdot \frac{s^2 - t^2}{u^2 v^2} \cdot \frac{2cs(u + v)(3 + c^2)}{3 + c^2} \leq 4 \cdot \frac{1}{4^4} \cdot \frac{4^3}{3 + c^2} = \frac{1}{3 + c^2}$$

Từ (3), (4)  $\Rightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (0, s - c)$ : Vậy  $\text{Max } S = \frac{11\sqrt{33} - 45}{24} = 0.757924546\dots$

• **Nhận xét:** Cách làm này vẫn có thể áp dụng được cho bài toán:

**Bài 3.6.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S(a, b, c) = \frac{bc}{a^2 + k} + \frac{ca}{b^2 + k} + \frac{ab}{c^2 + k} \text{ với hằng số } k \geq 3.$$

**Giải**

Tuy nhiên, sau khi đưa được về 1 biến thì với  $k$  tổng quát việc khảo sát hàm số là khá phức tạp, mặc dù việc này luôn thực hiện được về mặt nguyên tắc.

Từ bài toán này, chúng ta có thể phát triển thành bài toán sau:

**Bài 3.7.** Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a + b + c = 3$  và  $S(a, b, c) = \frac{bc}{a^2 + k} + \frac{ca}{b^2 + k} + \frac{ab}{c^2 + k}$

$$\text{Tìm tất cả } k \text{ sao cho } S(a, b, c) \leq S(1, 1, 1) = \frac{3}{1 + k}$$

**Giải**

Trước hết, từ  $S(1, 1, 1) \geq S\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$  suy ra  $k \geq 3$ . Như nhận xét ở trên, bằng dồn biến ta

sẽ quy được về trường hợp  $a = b \geq c$  và  $S_{\max} = \max \left\{ \frac{3}{1 + k}, S(s_0, s_0, 3 - s_0) \right\}$

với  $s_0$  là nghiệm lớn nhất của phương trình  $6s^3 + (7k - 9)s^2 - 18ks + k^2 + 9k$ .

Vậy ta cần tìm tất cả  $k \geq 3$  thỏa mãn bất phương trình:  $S(s_0, s_0, 3 - s_0) \leq \frac{3}{1 + k}$

Từ đó ta tìm được tất cả các giá trị của  $k$  là  $[3, k_0]$  với  $k_0 = 3,2690313\dots$  (Trong đó  $k$  là nghiệm của một phương trình bậc cao). Trong các bài toán về dồn biến, chúng ta sẽ thường xuyên gặp tình huống như vậy: sau khi dồn về 1 biến sẽ phải khảo sát hàm số khá phức tạp. Chính vì vậy, đối với các bài toán mà cực trị đạt được phức tạp (đặc biệt là các bài kiểu như tìm hằng số tốt nhất) thì dồn biến gần như là con đường duy nhất.

#### IV. BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT ĐƯỢC TẠI BIÊN

Nếu như trong phần trước chúng ta có thể hiểu "dồn biến" là "đẩy hai biến lại gần nhau" thì trong trường hợp này ta phải hiểu "dồn biến" nghĩa là "đẩy một biến ra biên".

Xét bất đẳng thức  $f(x, y, z) \geq 0$  với  $x, y, z \geq 0$ , ta sẽ chứng minh  $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$ , trong đó  $s, t$  là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến  $a, b, c$ . Thích hợp ở đây chính là việc bộ số  $(0, s, t)$  phải thỏa mãn tất cả các điều kiện của  $(a, b, c)$ , đồng thời hiệu  $d = f(x, y, z) - f(0, s, t) \geq 0$  cần đơn giản nhất có thể.

Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng  $f(0, s, t) \geq 0$ .

Trước hết, để các bạn làm quen với cách dồn biến "mới mẻ" này, chúng tôi xin trở lại một ví dụ ở phần trước.

**Bài 4.1. [Bất đẳng thức Schur]** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$$

#### Chứng minh

Nhận xét là ngoài điểm  $a = b = c$ , đẳng thức còn đạt tại  $a = b, c = 0$  (và các hoán vị).

Do đó, kỹ thuật dồn biến ra biên có khả năng thành công !

Đặt  $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b)$

Ta hi vọng sẽ có  $f(a, b, c) \geq f(0, a+b, c)$ . Xét hiệu:

$$d = f(a, b, c) - f(0, a+b, c) = ab(5c - 4a - 4b)$$

Như vậy là ta không thể có  $d \geq 0$ , cho dù có thể sắp tính thứ tự của  $a, b, c$ .

Thật đáng tiếc! Tuy nhiên, nếu các bạn dừng lại ở đây thì còn đáng tiếc hơn. Thay vì bỏ dỡ, ta hãy xem lại vì sao không thể có  $d \geq 0$ . Nếu tinh ý, các bạn có thể thấy là  $f(a, b, c)$  sẽ nhỏ đi khi hai biến tiến lại gần nhau (đó chính là lý do mà ta có thể dồn về hai biến bằng nhau như trong II.), còn ở đây khi thay bộ  $(a, b, c)$  bởi  $(0, a+b, c)$  thì "đường như" các biến càng cách xa nhau. Đó chính là lý do cách dồn biến ở trên thất bại. Từ đó, ta nảy ra ý là thay  $(a, b, c)$  bởi  $(0, b + \frac{a}{2}, c + \frac{a}{2})$  và xét hiệu:

$$d_a = f(a, b, c) - f(0, b + \frac{a}{2}, c + \frac{a}{2}) = a(a+b-2c)(a+c-2b)$$

Điều thú vị là ta có thể giả sử  $d_a \geq 0$ . Thật vậy, điều này cũng nhờ việc sắp thứ tự nhưng không phải là giữa các biến  $a, b, c$  mà là giữa các hiệu  $d_a, d_b, d_c$  (trong đó  $d_b, d_c$  là hai hiệu tương tự như  $d_a$ ). Vì tính đối xứng nên ta có thể giả sử  $d_a = \max\{d_a, d_b, d_c\}$ .

Khi đó nếu  $d_a < 0$  thì  $0 > d_a d_b d_c = abc(b+c-2a)^2(c+a-2b)^2(a+b-2c)^2$  và mâu thuẫn

Vậy  $d_a \geq 0$  nên  $f(a, b, c) \geq f(0, s, t)$  với  $s = b + \frac{a}{2}, t = c + \frac{a}{2}$ . Cuối cùng, ta thấy

$$f(0, s, t) = t^3 + s^3 - t^2 s - ts^2 = (t+s)(t-s)^2 \geq 0 \text{ và chứng minh được hoàn tất.}$$

• **Bình luận:** Nếu như cách chứng minh dồn về hai biến bằng nhau rất tự nhiên thì cách dồn một biến ra biên là một kết quả thực sự bất ngờ và độc đáo. Hơn nữa bài toán sau đây sẽ khẳng định kỹ thuật dồn biến ra biên là con đường tắt yếu.

**Bài 4.2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$  (\*). Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$

### Chứng minh

Đẳng thức không xảy ra tại tâm, mà tại  $a = b = 1, c = 0$  và các hoán vị.

Xét trường hợp riêng  $c = 0$ , cần chứng minh:  $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$ , với  $ab = 1$ .

$$\text{Đặt } s = a + b \Rightarrow s \geq 2\sqrt{ab} = 2. \text{ Khi đó } A = s + \frac{1}{s} = \left(\frac{s}{4} + \frac{1}{s}\right) + \frac{3s}{4} \geq 2\sqrt{\frac{s}{4} \cdot \frac{1}{s}} + \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2}$$

Vậy bây giờ ta chỉ cần dồn một biến về 0 là hoàn thành chứng minh.

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}. \text{ Ta hy vọng } f(a, b, c) \geq f\left(a+b, \frac{1}{a+b}, 0\right)$$

(chú ý là cách lấy này nhằm đảm bảo điều kiện  $ab + bc + ca = 1$ ).

$$\text{Xét hiệu: } f(a, b, c) - f\left(a+b, \frac{1}{a+b}, 0\right) =$$

$$= \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a + \frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{b + \frac{1-ab}{a+b}} \right) - \left( \frac{1}{a+b} + a+b + \frac{1}{a+b + \frac{1}{a+b}} \right)$$

$$= \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2} = \frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} - \frac{2+(a+b)^2}{1+(a+b)^2}$$

$$= \frac{[2+a^2+b^2][1+(a+b)^2] - (1+a^2)(1+b^2)[2+(a+b)^2]}{(1+a^2)(1+b^2)[1+(a+b)^2]}$$

$$= \frac{2ab - a^2b^2[2+(a+b)^2]}{(1+a^2)(1+b^2)[1+(a+b)^2]} = \frac{ab[2(1-ab) - ab(a+b)^2]}{(1+a^2)(1+b^2)[1+(a+b)^2]}$$

Ta thấy  $d \geq 0$  nếu  $2(1-ab) \geq ab(a+b)^2$ . Từ đó, ta giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ ,

$$\text{khi đó: } 2(1-ab) = 2c(a+b) \geq (a+b)^2 \geq ab(a+b)^2 \Rightarrow d \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Nhận xét:** Bài toán 4.2 là một bài toán hay nhưng chỉ là một hệ quả đơn giản của bất đẳng thức rất nổi tiếng Iran TST 1996. Thật vậy, với giả thiết  $ab + bc + ca = 1$  thì từ kết quả của bất đẳng thức Iran TST 1996 ta có ngay:

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)^2 = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

vì  $a+b+c = (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$ .

Từ nhận xét trên, ta nhớ lại là trong II., bất đẳng thức Iran 1996 đã được giải bằng kỹ thuật dồn về hai biến bằng nhau. Một câu hỏi tự nhiên là: Bất đẳng thức Iran 1996 có thể giải bằng cách dồn 1 biến ra biên không? Câu hỏi này sẽ được trả lời sau khi chúng ta xem xét bài toán sau đây:

**Bài 4.3.** Cho  $a, b, c \geq 0$ ,  $ab + bc + ca = 1$  (\*). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

### Chứng minh

Ban đầu ta cũng xét trường hợp riêng  $c = 0$ , cần chứng minh:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ với } ab = 1$$

Điều này hoàn toàn đơn giản xin nhường cho bạn đọc.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh  $f(a, b, c) \geq f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right)$ .

Để ý rằng biểu thức  $f(a, b, c)$  trong bài toán 4.3 khá phức tạp nên dồn biến bằng cách xét hiệu trực tiếp là rất khó khăn. Nhưng may mắn rằng  $f(a, b, c)$  lại có thể biểu diễn về các biến  $x = a+b$  và  $c$  như sau:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{(c+a)} + \sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{2c+a+b+2\sqrt{c^2+1}}}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2c+x+2\sqrt{c^2+1}}}{\sqrt{c^2+1}} = g(c) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } g'(c) = \frac{1 - cx - c^2 - c\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{(c^2+1)^3(2c+x+2\sqrt{c^2+1})}} \leq 0$$

Do đó,  $g(c)$  nghịch biến. Chú ý rằng:  $cx = ca + cb \leq ca + cb + ab = 1 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{x}$ .

$$\text{Do đó: } g(c) \geq g\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \Rightarrow f(a, b, c) \geq f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = 0, b = c = 1$  và các hoán vị.



• Kỹ thuật đẩy biên ra biên ở trên có một điều rất đáng chú ý là tuy ý đồ là dồn hai biên bằng nhau hoặc dồn một biên về 0 nhưng biên mà chúng ta sử dụng với biên lại là  $\left(\frac{4-x^2}{4x} \leq c \leq \frac{1}{x}, x=a+b\right)$ . Ý tưởng này xuất phát từ sự tương ứng của bộ hai biên  $(x=a+b, c)$  và bộ ba biên  $(a, b, c)$ .

• Thủ thuật biến đổi biểu thức với  $a, b, c$  về biểu thức với  $a+b, c$  là một kỹ thuật rất tinh tế. Các bạn hãy chú ý rằng, một bất đẳng thức có điều kiện ba biến số cũng tương đương với một bất đẳng thức hai biến số. Và kỹ thuật biến đổi trên đã giúp chúng ta sử dụng một cách triệt để nhất điều kiện khi đưa bất đẳng thức về hai biên. Từ ý tưởng đó, chúng ta có một cách chứng minh "bất ngờ" với bất đẳng thức Iran 1996.

Với điều kiện  $ab+bc+ca=1$ . Đặt  $x=a+b$ . Ta có:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2+2c^2+4cx-2}{(c^2+1)^2} = g(c). \text{ Bất đẳng thức lại được quy về 2 biến.}$$

$$\text{Đạo hàm hàm } g(c) \text{ ta có: } g'(c) = -\frac{4[cx^2 + (3c^2-1)x + c^3 - 3c]}{(c^2+1)^3}$$

Nhìn vào biểu thức trên, ta thấy việc đánh giá ngay  $g'(c) \leq 0$  là không thể.

Do vậy chúng ta sẽ phân ra hai trường hợp:

**Trường hợp 1:**  $c \geq 1$ . Khi đó:  $c \geq x \geq 1$

Xét điều kiện:  $1 = ab + bc + ca \leq \frac{x^2}{4} + cx \Leftrightarrow x^2 \geq 4 - 4cx$ . Do đó:

$$cx^2 + (3c^2 - 1)x + c^3 - 3c \geq c(4 - cx) + (3c^2 - 1)x + c^3 - 3c = c^3 + c - c^2x - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g'(c) \leq 0. \text{ Từ đó: } g(c) \leq g\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right).$$

**Trường hợp 2:**  $c \leq 1$ . Theo trên ta có:  $x^2 \geq 4 - 4cx \Leftrightarrow c \geq \frac{4-x^2}{4x}$ .

Bây giờ, chúng ta sẽ tiếp tục đạo hàm đến cấp 2:

$$g''(c) = \frac{4[(5c^2-1)x^2 + 12c(c^2-1)x + 3c^4 - 18c^2 + 3]}{(c^2+1)^3}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } g''(c) \leq 0 \Leftrightarrow h(x) = (5c^2-1)x^2 + 12c(c^2-1)x + 3c^4 - 18c^2 + 3 \leq 0$$

$$\text{Vì } h(x) \text{ là tam thức bậc 2 với hệ số dương nên: } h(x) \leq \max\left\{h(0), h\left(\frac{1}{c}\right)\right\}.$$

$$\text{Mà: } h(0) = 3c^4 - 18c^2 + 3 \leq 0; h\left(\frac{1}{c}\right) = 3c^4 - 6c^2 - \frac{1}{c^2} - 4 \leq 0. \text{ Do vậy } h(x) \leq 0 \Leftrightarrow g''(c) \leq 0$$

**Nhận xét:**

• Kỹ thuật đẩy biên ra biên ở trên có một điều rất đáng chú ý là tuy ý đồ là dồn hai biên bằng nhau hoặc dồn một biên về 0 nhưng biên mà chúng ta sử dụng với biên lại là

$\left(\frac{4-x^2}{4x} \leq c \leq \frac{1}{x}, x=a+b\right)$ . Ý tưởng này xuất phát từ sự tương ứng của bộ hai biên  $(x=a+b, c)$  và bộ ba biên  $(a, b, c)$ .

• Thủ thuật biến đổi biểu thức với  $a, b, c$  về biểu thức với  $a+b, c$  là một kỹ thuật rất tinh tế. Các bạn hãy chú ý rằng, một bất đẳng thức có điều kiện ba biến số cũng tương đương với một bất đẳng thức hai biến số. Và kỹ thuật biến đổi trên đã giúp chúng ta sử dụng một cách triệt để nhất điều kiện khi đưa bất đẳng thức về hai biến. Từ ý tưởng đó, chúng ta có một cách chứng minh "bất ngờ" với bất đẳng thức Iran 1996.

Với điều kiện  $ab+bc+ca=1$ . Đặt  $x=a+b$ . Ta có:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2+2c^2+4cx-2}{(c^2+1)^2} = g(c). \text{ Bất đẳng thức lại được quy về 2 biến.}$$

$$\text{Đạo hàm hàm } g(c) \text{ ta có: } g'(c) = -\frac{4[cx^2 + (3c^2-1)x + c^3 - 3c]}{(c^2+1)^3}$$

Nhìn vào biểu thức trên, ta thấy việc đánh giá ngay  $g'(c) \leq 0$  là không thể.

Do vậy chúng ta sẽ phân ra hai trường hợp:

**Trường hợp 1:**  $c \geq 1$ . Khi đó:  $c \geq x \geq 1$

Xét điều kiện:  $1 = ab + bc + ca \leq \frac{x^2}{4} + cx \Leftrightarrow x^2 \geq 4 - 4cx$ . Do đó:

$$cx^2 + (3c^2 - 1)x + c^3 - 3c \geq c(4 - cx) + (3c^2 - 1)x + c^3 - 3c = c^3 + c - c^2x - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g'(c) \leq 0. \text{ Từ đó: } g(c) \leq g\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right).$$

**Trường hợp 2:**  $c \leq 1$ . Theo trên ta có:  $x^2 \geq 4 - 4cx \Leftrightarrow c \geq \frac{4-x^2}{4x}$ .

Bây giờ, chúng ta sẽ tiếp tục đạo hàm đến cấp 2:

$$g''(c) = \frac{4[(5c^2-1)x^2 + 12c(c^2-1)x + 3c^4 - 18c^2 + 3]}{(c^2+1)^3}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } g''(c) \leq 0 \Leftrightarrow h(x) = (5c^2-1)x^2 + 12c(c^2-1)x + 3c^4 - 18c^2 + 3 \leq 0$$

Vì  $h(x)$  là tam thức bậc 2 với hệ số dương nên:  $h(x) \leq \max\left\{h(0), h\left(\frac{1}{c}\right)\right\}$ .

$$\text{Mà: } h(0) = 3c^4 - 18c^2 + 3 \leq 0; h\left(\frac{1}{c}\right) = 3c^4 - 6c^2 - \frac{1}{c^2} - 4 \leq 0. \text{ Do vậy } h(x) \leq 0 \Leftrightarrow g''(c) \leq 0$$

Suy ra:  $g(c) \leq \max \left\{ g\left(\frac{1}{x}\right), g\left(\frac{4-x^2}{4x}\right) \right\} \Leftrightarrow f(a, b, c) \leq \max \left\{ f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right), f(t, t, c) \right\}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với 2 biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

Trường hợp 2 biến bằng nhau đã được chứng minh ở trên.

Trong trường hợp còn lại, ta giả sử  $c = 0$ . Bài toán trở thành:

Cho  $ab = 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow ab(a-b)^2(8a^2 + 8b^2 + 15) \geq 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

• Với các bài toán trên, chúng tôi muốn bạn đọc có một cảm giác dễ dàng đối với kỹ thuật dồn biến về biên. Tuy nhiên, trong các bài này thì kỹ thuật dồn hai biến bằng nhau vẫn phát huy tác dụng, do đó không khỏi khó khăn trong việc thuyết phục bạn đọc về sức mạnh của kỹ thuật dồn biến ra biên. Vì thế với các bài toán sau đây, các bạn sẽ thấy kỹ thuật dồn về hai biến bằng nhau hoàn toàn bế tắc, đơn giản vì đẳng thức đạt được khi các biến đôi một khác nhau.

**Bài 4.4.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$  (1)

#### Chứng minh

Trước khi tấn công bài này, ta cần xem dấu bằng xảy ra trong trường hợp nào.

Do  $a = b = c$  không thỏa mãn nên một cách tự nhiên ta nghĩ đến trường hợp biên là  $c = 0$ , khi đó bất đẳng thức (1) trở thành  $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b}$  (2)

Chuẩn hóa  $a + b = 1$ . Ta có (1)  $\Leftrightarrow 1 - b + \sqrt{b} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  (đúng)

Vậy đẳng thức xảy ra khi  $a = 3b > 0, c = 0$  (và các hoán vị).

Do dấu bằng xảy ra khi cả ba biến rời nhau nên không thể thực hiện phương pháp dồn về hai biến bằng nhau. Ta sẽ thực hiện theo phương pháp dồn một biến về biên.

Không mất tổng quát có thể giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Chuẩn hóa cho  $a + b + c = 1$ .

Đặt  $t = \frac{a+c}{2}$  và  $s = \frac{a-c}{2}$ , thì  $a = t + s, c = t - s, b = 1 - 2t$ .

Khi đó bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow f(s) = \frac{t+s}{\sqrt{s+1-t}} + \frac{1-2t}{\sqrt{1-t-s}} + \frac{t-s}{\sqrt{2t}} \leq \frac{5}{4}$  (3)

Ta sẽ chứng minh  $f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\}$  với  $s \in [0, t]$ .

Ta có:  $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s+1-t}} - \frac{t+s}{2(s+1-t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-2t}{2(1-t-s)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2t}}$

Vì chưa xác định được dấu của  $f'(s)$  nên ta đạo hàm tiếp

$f''(s) = -\frac{1}{(s+1-t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(t+s)}{4(s+1-t)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(1-2t)}{4(1-t-s)^{\frac{5}{2}}}$ . Sử dụng  $b = 1-2t \geq 0$  suy ra

$$f'''(s) = \frac{9}{4(s+1-t)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15(t+s)}{8(s+1-t)^{\frac{7}{2}}} + \frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{\frac{7}{2}}} = \frac{18+3s-33t}{8(s+1-t)^{\frac{7}{2}}} + \frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{\frac{7}{2}}} > 0$$

Do  $f'''(s) > 0 \quad \forall s \in [0; t]$  nên theo định lí **Rolle** thì phương trình  $f'(s) = 0$  có tối đa hai nghiệm trên  $[0; t]$ . Mặt khác dễ dàng chứng minh  $f'(0) \leq 0$  và  $f'(t) \geq 0$ , nên  $f'(s)$  chỉ có thể đổi dấu tối đa một lần trên  $(0, t)$ , và hơn nữa  $f'(s)$  chỉ có thể có một trong các dạng sau:  $f'(s) > 0, \forall s \in (0; t)$  hoặc  $f'(s) < 0, \forall s \in (0, t)$  hoặc  $f'(s)$  có dạng  $-0+$  trên  $(0, t)$ . Tuy nhiên trong cả 3 trường hợp thì  $f(s)$  cũng chỉ có thể đạt cực đại tại biên. Từ đó suy ra  $f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\} \quad \forall s \in [0; t]$ .

Dễ dàng chứng minh  $f(0) \leq \frac{5}{4}$  và  $f(t) \leq \frac{5}{4}$  nên  $f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\} \leq \frac{5}{4}$ .

• **Chú ý:** Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

"Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $k \notin (0, 1)$ . Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{(a+b)^k} + \frac{b}{(b+c)^k} + \frac{c}{(c+a)^k} \leq C_k (a+b+c)^{1-k} \text{ với } C_k = 1+k-k^2."$$

• Trong trường hợp ba biến, thông thường chúng ta cố định một biến và thay thế hai biến còn lại. Tuy nhiên, đôi khi chúng ta có thể làm khác hơn bằng cách chỉ thay thế một biến hoặc thay thế cả ba biến. Ví dụ đơn giản sau đây minh họa cho những cách dồn biến đặc sắc đó.

**Bài 4.5.** Cho  $a, b, c \geq 0$ , chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

**Chứng minh**

Đặt  $f(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ . Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ . Nếu  $a \geq b \geq c$  thì hiển nhiên  $f(a, b, c) \geq 0$ , do đó ta chỉ cần xét khi  $b \geq a \geq c$ . Ta có:

$$f(a, b, c) - f(a, b, 0) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 4(b-a)c(a^2 + ab + b^2 - 3c^2) \geq 0$$

Cuối cùng, vì  $f(a, b, 0) = (a^2 + b^2)^2 - 4(b^2 - a^2)ab = (a^2 + 2ab - b^2)^2 \geq 0$  nên bài toán chứng minh xong. Bất đẳng thức xảy ra khi  $(a, b, c) = ((\sqrt{3}-1)t, t, 0)$ ,  $t \geq 0$  và các hoán vị.

• Bài toán 4.3 là một ví dụ về sự cần thiết trong việc sử dụng phương pháp dồn biến ra biên đối với bất đẳng thức hoán vị. Tuy nhiên với bất đẳng thức đối xứng thì sao? Liệu có thể xảy ra dấu bằng khi không có hai biến bằng nhau.

Chúng ta xét ví dụ sau đây để làm rõ vấn đề này.

**Bài 4.6.** Cho  $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq 36(ab + bc + ca)$$

**Chứng minh**

Không mất tổng quát, ta có thể giả sử  $a \geq b \geq c$ .

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = 36(ab + bc + ca) - (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$$

$$\Rightarrow f(a, b + c, 0) = 36a(b + c) - [a^3 + (b + c)^3]a^3(b + c)^3$$

Ta sẽ chứng minh  $f(a, b, c) \geq f(a, b + c, 0)$ . Thật vậy, ta có:

$$\begin{cases} 36(ab + bc + ca) = 36a(b + c) + 36bc \geq 36a(b + c) \\ (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \leq [a^3 + (b + c)^3]a^3(b + c)^3 \end{cases} \Rightarrow f(a, b, c) \geq f(a, b + c, 0)$$

Phần còn lại ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp  $c = 0$ , hay

$$36ab \geq a^3b^3(a^3 + b^3) \Leftrightarrow 36 \geq a^2b^2(a^3 + b^3) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = ab \text{ thì } (1) \Leftrightarrow t^2(27 - 9t) \leq 36 \Leftrightarrow \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{2} + 4 \geq 3t^2 \text{ đúng theo AM - GM.}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow c = 0, a + b = 3$  và  $ab = 2 \Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = 0$  và các hoán vị.

Trên đây là các bài toán ba biến, bây giờ chúng ta sẽ xét một bài toán  $n$  biến.

**Bài 4.7.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i + x_j)$

**Giải**

$$\text{Xét: } f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, 0, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 2x_i x_j [2 - 3(x_i + x_j)]$$

$$\text{Do đó nếu } 3(x_i + x_j) \leq 2 \text{ thì } f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, 0, \dots, x_n)$$

Xét tất cả các bộ số  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sao cho  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt  $\max f$ . Trong đó ta chọn ra bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  sao cho số phần tử dương trong bộ số đó là ít nhất (luôn có thể chọn được vì số số dương là hữu hạn)

$$\text{Giả sử } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0 \text{ và } a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

$$\text{Nếu } k \geq 3, \text{ thì } 1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{a_2 + a_3}{2} + a_2 + a_3 = \frac{3}{2}(a_2 + a_3) \Leftrightarrow 2 \geq 3(a_2 + a_3)$$

$$\text{Do đó: } f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) \Rightarrow f(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) = \max f$$

$$\Rightarrow \text{Vô lý (do bộ số } (a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) \text{ có số số dương ít hơn bộ số } (a_1, a_2, \dots, a_n))$$

$$\text{Vậy } k \leq 2. \text{ Khi đó } \max f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max a_1 a_2 (a_1 + a_2) \text{ với } a_1 + a_2 = 1.$$

$$\text{Mà } a_1 a_2 (a_1 + a_2) = a_1 (1 - a_1) \leq \frac{1}{4} \text{ (AM - GM). Do đó } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: } x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \dots = x_n = 0.$$

**V. ĐỊNH LÝ SMV – BẤT ĐẲNG THỨC BỐN BIẾN**

Trước tiên, chúng ta xem xét ví dụ "kính điển" sau đây:

**Bài 5.1. [IMOSL, Việt Nam đề nghị]** Cho  $a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 1$ .

Chứng minh rằng:  $abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$  (1)

**Chứng minh**

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$  hoặc  $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$  (và các hoán vị).

Do đó, những đánh giá thông thường rất dễ rơi vào bế tắc.

Đặt  $f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - kabcd$  với  $k = \frac{176}{27}$ . Ta có:

$$f(a, b, c, d) = ab(c + d - kcd) + cd(a + b)$$

Từ đó, ta hi vọng có  $f(a, b, c, d) \leq f(t, t, c, d)$  với  $t = \frac{a+b}{2}$ . Vì  $0 \leq ab \leq t^2$  nên để có điều này ta cần  $c + d - kcd \geq 0$ . Trong trường hợp ngược lại, nghĩa là nếu  $c + d - kcd < 0$  thì đánh giá trực tiếp  $f(a, b, c, d)$  ta có:

$$f(a, b, c, d) = ab(c + d - kcd) + cd(a + b) \leq cd(a + b) \leq \left[ \frac{c+d+(a+b)}{3} \right]^3 = \frac{1}{27}$$

Vậy ta có thể giả sử là luôn có  $f(a, b, c, d) \leq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)$ . Điều này có nghĩa là ta đã thực hiện được việc dồn biến như trên mà không cần thêm bất cứ giả thiết nào cho 2 biến  $a, b$ . Do đó nhờ tính đối xứng ta có thể dồn 2 biến bất kì trong 4 biến về bằng nhau. Từ đó, đặt thêm  $s = \frac{c+d}{2}$  ta có:  $f(a, b, c, d) \leq f(t, t, c, d) \leq f(t, t, s, s) = f(t, s, t, s)$

$$\leq f\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, t, s\right) \leq f\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Nhận xét:** Trong lời giải trên, thực chất là cứ mỗi bước ta lại phân ra hai trường hợp: có một trường hợp thì dồn biến được và một trường hợp mà bất đẳng thức hiệp nhiên đúng. Do đó, lời giải không khỏi có phần rối rắm. Bạn đọc nên trình bày lại bằng cách phản chứng (giả sử có  $(a_0, b_0, c_0, d_0)$  sao cho  $f(a_0, b_0, c_0, d_0) > \frac{1}{27}$ ) sẽ gọn gàng và chặt chẽ hơn. Một cách trình bày khác là gộp cả hai trường hợp lại:

$$f(a, b, c, d) \leq \max\left\{\frac{1}{27}, f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)\right\} \quad (1)$$

Việc chứng minh bài toán là khá dễ dàng nhờ kết quả (1), tuy nhiên thông thường thì (1) rất khó có được. Tiếp theo ta xét bài toán:

**Bài 5.2.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ . Chứng minh rằng:

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + na_1 a_2 \dots a_n \geq n^2$$

**Chứng minh**

Với  $n = 2$  và  $n = 3$  thì bài toán quá đơn giản. Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán với  $n = 4$  hay chứng minh với  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$  thì:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$$

**Chứng minh**

Giả sử  $a \leq b \leq c \leq d$ . Đặt  $f(a, b, c, d) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd - 16$ .

$$\text{Xét hiệu: } f(a, b, c, d) - f(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}) = \left(\frac{3}{2} - ab\right)(c-d)^2$$

Vì  $a \leq b \leq c \leq d$  nên  $ab \leq \sqrt{abcd} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = 1$ . Do đó:  $f(a, b, c, d) \geq f(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2})$

Thế  $c + d = 4 - a - b$  ta cần chứng minh:

$$f(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}) = 3\left(a^2 + b^2 + \frac{(4-a-b)^2}{2}\right) + (4-a-b)^2 ab - 16 \geq 0$$

Đặt  $x = \frac{a+b}{2}$ ,  $y = ab$  thì bất đẳng thức trên  $\Leftrightarrow h(y) = (2x^2 - 8x + 5)y + (3x - 2)^2 \geq 0$

Nếu  $2x^2 - 8x + 5 \geq 0$  thì bất đẳng thức đúng. Nếu  $2x^2 - 8x + 5 \leq 0$  thì do  $y \leq x^2$  nên:

$$h(y) = (2x^2 - 8x + 5)x^2 + (3x - 2)^2 = 2(x-1)^2(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$  hoặc  $a = 0, b = c = d = \frac{4}{3}$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Lời giải của hai bài toán 5.1 và 5.2 với  $n = 4$  đều rất đẹp và đơn giản, tuy nhiên, chúng ta có thể thấy những kỹ thuật sử dụng trong lời giải không mang tính đường lối, khó có thể áp dụng cho các bài toán bốn biến khác và là bất khả thi khi chứng minh với  $n$  biến. Vì vậy chúng ta cần chứng minh phương pháp tổng quát hơn, và phương pháp đó sẽ được giới thiệu ngay sau đây:

### 1. Phương pháp dồn biến mạnh [SMV – Strongly Mixing Variables]

#### Định lý [SMV]

Cho: •  $D \in \mathbb{R}^n$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq \alpha, \sum x_i \geq \alpha, \sum x_i = ns = \text{const}\}$  và  $s_0 = (s, s, \dots, s) \in D$

• Phép biến đổi  $T: D \rightarrow D$  như sau: với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ ,  $a \neq s_0$ ,

ta chọn ra 2 chỉ số  $i \neq j$  nào đó (tùy theo hàm  $f$  bên dưới) sao cho  $a_i \neq a_j$ , rồi thay  $a_i, a_j$  bởi trung bình cộng của chúng.

•  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số liên tục thỏa mãn:  $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$ .



Khi đó:  $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$  (Phép chứng minh định lý sẽ được giới thiệu ở phần sau).

Bây giờ với tư tưởng của định lý SMV, chúng ta xét bài toán 5.2 với  $n \geq 4$

Đặt  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + na_1a_2 \dots a_n - n^2$  và giả sử rằng  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

Xét hiệu:  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f\left(a_1, \frac{a_2 + a_n}{2}, a_3, \dots, a_{n-1}, \frac{a_2 + a_n}{2}\right) = (a_2 - a_n)^2 \left(\frac{n-1}{2} - \frac{n}{4} a_1 a_3 \dots a_{n-1}\right)$

Do đó, nếu  $\frac{2(n-1)}{n} \geq a_1 a_3 \dots a_{n-1}$  thì  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(a_1, \frac{a_2 + a_n}{2}, a_3, \dots, a_{n-1}, \frac{a_2 + a_n}{2}\right)$ .

Mà ta có:  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2a_1 + \frac{n-2}{n-3}(a_3 + \dots + a_{n-1})$

$$\geq (n-2) \cdot \sqrt[n-2]{2a_1 a_3 \dots a_{n-1} \left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n-3}} \Leftrightarrow \frac{n^{n-2}(n-3)^{n-3}}{2(n-2)^{2n-5}} \geq a_1 a_3 \dots a_{n-1}$$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{2(n-1)}{n} \geq \frac{n^{n-2}(n-3)^{n-3}}{2(n-2)^{2n-5}} \Leftrightarrow 4(n-1)(n-2)^{2n-5} \geq n^{n-1} \cdot (n-3)^{n-3}$

Ta có:  $(n-2)^{2n-4} = \left(\frac{n-3+n-1}{2}\right)^{2(n-2)} \geq (n-3)^{n-2} (n-1)^{n-2}$  (AM - GM)

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh:  $4(n-3)(n-1)^{n-1} \geq n^{n-1}(n-2) \Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} - 1 + \frac{1}{n-3} \geq 0$

Mà điều này hiển nhiên đúng do:  $4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \geq 4\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-1} = \frac{27}{16} > 1$

Vậy  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(a_1, \frac{a_2 + a_n}{2}, a_3, \dots, a_n\right)$ . Theo định lý SMV ta chỉ cần chứng minh bất

đẳng thức trong trường hợp  $a_1 = n - (n-1)x, a_2 = a_3 = \dots = a_n = x$  với  $0 \leq x \leq \frac{n}{n-1}$ .

Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$(n-1)\left[(n-(n-1)x)^2 + (n-1)x^2\right] + nx^{n-1}(n-(n-1)x) - n^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)x^n - nx^{n-1} - (n-1)^2 x^2 + 2(n-1)^2 x + 2n - n^2 \leq 0$$

Đặt  $g(x) = (n-1)x^n - nx^{n-1} - (n-1)^2 x^2 + 2(n-1)^2 x + 2n - n^2 \leq 0$ . Ta có:

$$g'(x) = n(n-1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} - 2(n-1)^2 x + 2(n-1)^2 = (n-1)(x-1)[nx^{n-2} - 2(n-1)]$$

Do đó  $g'(x)$  có hai nghiệm là  $x=1$  và  $x = \sqrt[n-2]{\frac{2(n-1)}{n}} \geq 1$ .

Từ đó lập bảng biến thiên ta có:  $g(x) \leq \max\left\{g(1), g\left(\frac{n}{n-1}\right)\right\}$

Mặt khác dễ thấy:  $g(0) = g\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$  nên ta có  $g(x) \leq 0$ . Bất đẳng thức được chứng minh.



Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  hoặc  $a_1 = 0, a_2 = \dots = a_n = \frac{n}{n-1}$ .

Chắc hẳn, qua ví dụ trên, các bạn đã phần nào hình dung được sức mạnh và nét tinh tế của *SMV*. Tiếp theo, chúng ta sẽ quay lại Bài 5.1 với việc áp dụng *SMV*.

Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử  $a \leq b \leq c \leq d$ .

$$\text{Xét } f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd = ac(b+d) + bd\left(a+c - \frac{176}{27}ac\right)$$

Từ giả thiết suy ra:

$$a+c \leq \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c} \geq 8 \geq \frac{176}{27} \Rightarrow f(a, b, c, d) \leq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)$$

Theo định lý *SMV*, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $a=1-3t, b=c=d=t$ .

Thế  $a=1-3t$  vào ta cần chứng minh:

$$3at^2 + t^3 \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}at^3 \Leftrightarrow (1-3t)(4t-1)^2(11t+1) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$  hoặc  $a=b=c=\frac{1}{3}, d=0$  cùng các hoán vị.

Qua việc sử dụng *SMV* với hai bài toán, một bài  $n$  biến và một bài 4 biến, các bạn có thể thấy rõ một điều, bước xét điều kiện để có thể dồn biến được của bài toán 4 biến là rất đơn giản, trong khi với  $n$  biến lại rất phức tạp. Đó chính là lý do mà dồn biến với định lý *SMV* là lựa chọn "hoàn hảo" cho bài toán bốn biến (tất nhiên phải trong điều kiện có thể dồn biến), và ngược lại bất đẳng thức bốn biến cũng chính là ứng dụng lớn nhất của *SMV*. Chúng ta sẽ quay lại bài 5.2 để khẳng định điều này.

Dựa vào lời giải, ta thấy điều kiện để  $f(a, b, c, d) \geq f\left(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$  là  $ab \leq \frac{3}{2}$ .

Và trong lời giải đó, khi giả sử  $a \leq b \leq c \leq d$  thì ta có ngay  $ab \leq 1$ . Tuy nhiên, nếu chú ý hơn, các bạn có thể thấy rằng  $ac \geq ab$  và  $ac \leq 1$ . Do vậy, ta có thể 2 biến  $b$  và  $d$  và từ đó áp dụng định lý *SMV* ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp ba biến bằng nhau. Khái quát lên, chúng ta có thể thấy rằng mọi bài toán bốn biến đối xứng nếu

ta có:  $f(a, b, c, d) \geq f\left(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$  với  $a \leq b \leq c \leq d$  thì ta cũng có

$f(a, b, c, d) \geq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)$ , do vậy chỉ cần chứng minh bài toán với ba biến bằng

nhau. Tính chất này không phải lúc nào cũng có với  $n$  biến, hoặc nếu có thì chứng minh không phải điều đơn giản. Vì vậy, tiếp theo chúng tôi sẽ chỉ nêu ứng dụng của *SMV* trong các bài toán bốn biến.

**Bài 5.3.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  và  $a+b+c+d=4$ .

Chứng minh rằng:  $abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \leq 8$

**Chứng minh**

Đặt  $f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2$ .

Giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$ . Xét hiệu:  $f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) - f(a, b, c, d)$

$$= \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \left\{ (b+d) + \left[\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + ac\right] (b^2 + d^2) - 2b^2 d^2 \right\}$$

$$\geq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 (b+d+4abcd-2b^2 d^2) \geq 0 \quad (\text{do } abcd \geq b^2 d^2)$$

Vì vậy:  $f(a, b, c, d) \leq f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$ . Theo định lý **SMV** ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $a=b=c=x, d=4-3x, 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ :

$$x^3 + 3x^2(3-3x) + 3x^4(4-3x)^2 + x^6 \leq 8 \Leftrightarrow (x-1)^2(28x^4 - 16x^3 - 12x^2 - 8) \leq 0$$

Đễ dàng chứng minh:  $28x^4 - 16x^3 - 12x^2 - 8 \leq 0$  với  $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ .

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=d=1$ .

**Bài 5.4.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c+d=1$ .

Chứng minh rằng:  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \frac{148}{27}abcd \geq \frac{1}{27}$

#### Chứng minh

Giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$  và đặt  $f(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \frac{148}{27}abcd - \frac{1}{27}$

Xét hiệu  $d = f(a, b, c, d) - f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) = \left[\frac{7}{8}(a-c)^2 + 3ac - \frac{37}{27}bd\right](a-b)^2$

Vì  $ac \geq bd \Rightarrow d \geq 0 \Rightarrow f(a, b, c, d) \geq f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$ .

Do đó, theo định lý **SMV**, ta chỉ cần xét trường hợp  $a=b=c=\frac{1-d}{3}$ . Khi đó:

$$f(a, b, c, d) = \frac{(1-d)^4}{27} + d^4 + \frac{148d(1-d)^3}{729} - \frac{1}{27} = \frac{2d(4d-1)^2(19d+20)}{729} \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$  hoặc  $a=b=c=\frac{1}{3}, d=0$  và các hoán vị.

**Bài 5.5.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  và  $a+b+c+d=4$ . Chứng minh rằng:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

#### Chứng minh

Đặt  $f(a, b, c, d) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$

và giả sử  $a \leq b \leq c \leq d$ . Xét hiệu:  $P = f(a, b, c, d) \geq f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$ .

Ta sẽ chứng minh  $P \geq 0$ . Thật vậy, dễ thấy  $a+c \leq 2$  nên

$$(1+a^2)(1+c^2) - \left[1 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right]^2 = (a-c)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{(a+c)^2 + 4ac}{16}\right) \geq 0$$

Mà theo **AM - GM** thì:  $(1+a)(1+c) \leq \left(1 + \frac{a+c}{2}\right)^2$ .

Do đó:  $f(a, b, c, d) \geq f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $a=b=c=x, c=4-3x$ :

$$\begin{aligned} f(x, x, x, 4-3x) &= (1+x^2)^3 [1 + (4-3x)^2] - (1+x)^3 (5-3x) \\ &= (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1)(9x^2 - 24x + 17) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(5-3x) \\ &= 9x^8 - 24x^7 + 44x^6 - 72x^5 + 81x^4 - 68x^3 + 54x^2 - 36x + 12 \\ &= (9x^6 - 6x^5 + 23x^4 - 20x^3 + 18x^2 - 12x + 12)(x-1)^2 \\ &= [x^4(3x-1)^2 + 2x^4 + 5x^2(2x-1)^2 + 10x^2 + 3(x-2)^2](x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=d=1$

**Bài 5.6 [Bất đẳng thức Tukervic]** Cho  $a, b, c, d \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \quad (1)$$

#### Chứng minh

Giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$ . Xét  $f(a, b, c, d) = LS(1) - RS(1)$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2c^2 - b^2d^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

$$\Rightarrow f(a, b, c, d) - f(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d) = (a-c)^2((a+c)^2 - b^2 - d^2) \geq 0$$

Do đó theo định lý **S.M.V.**, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi  $a=b=c=t$ .

$$\text{Khi đó bất đẳng thức} \Leftrightarrow 3t^4 + d^4 + 2t^3d \geq 3t^4 + 3t^2d^2 \Leftrightarrow d^4 + t^3d + t^3d \geq 3t^2d^2$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức **AM - GM**.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=d$  hoặc  $a=b=c, d=0$  và các hoán vị

**Bài 5.7.** Cho  $x, y, z, t \geq 0$  thỏa mãn  $x+y+z+t=4$ .

Chứng minh rằng:  $(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) \leq 125 + 131xyzt$

#### Chứng minh

Đặt:  $f(x, y, z, t) = (1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) - 131xyzt$

Không mất tính tổng quát ta giả sử  $x \geq y \geq z \geq t$ . Khi đó:

$$f(x, y, z, t) - f\left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}, t\right) = \frac{(x-z)^2}{4} (131yt - 9(1+3y)(1+3t))$$

Vì  $x \geq y \geq z \geq t$  nên  $y+t \leq 2$ . Do đó dễ thấy:  $9(1+3y)(1+3t) \geq 131yt$

Vậy ta có  $f(x, y, z, t) \leq f\left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}, t\right)$ . Theo định lý S.M.V thì bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu  $x = y = z = a \geq 1 \geq t = 4 - 3a$ :

$$(1+3a)^3(1+3(4-3a)) \leq 125+131a^3(4-3a) \Leftrightarrow (a-1)^2(3a-4)(50a+28) \leq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi  $x = y = z = t = 1$  hoặc  $x = y = z = \frac{4}{3}, t = 0$  và các hoán vị.

• Đến đây chúng ta tạm thời kết thúc phần dồn biến cho bất đẳng thức "cụ thể" (có ba hoặc bốn biến) để bước sang phần dồn biến cho bất đẳng thức  $n$  biến. Như chúng ta sẽ thấy, đây là một lĩnh vực khó hơn hẳn. Tuy nhiên các kỹ thuật chính đều đặt nền tảng thông qua việc khảo sát bất đẳng thức "cụ thể", mà đặc biệt là những tư tưởng mạnh mẽ khi khảo sát bất đẳng thức bốn biến.

## VI. DỒN BIẾN BẰNG HÀM LÒI

Hàm lồi là một công cụ cơ bản để dồn biến các bất đẳng thức "dạng cổ điển".

Để bạn đọc tiện theo dõi chúng tôi xin nhắc lại các kiến thức cơ bản sau đây:

**1. Định nghĩa:** Một hàm số  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là lồi nếu:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \forall x, y \in [a, b], \forall t \in [0, 1]$$

**2. Tính chất:**

**2.1.** Giả sử  $f$  là hàm có đạo hàm đến cấp 2 trên khoảng  $(a, b)$ , khi đó  $f$  lồi trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi  $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ .

**2.2.** Nếu hàm  $f$  lồi trên  $[a, b]$  thì  $f$  liên tục trên  $[a, b]$ . Ngược lại, nếu  $f$  liên tục trên  $[a, b]$  thì  $f$  lồi trên  $[a, b] \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in (a, b)$ .

**2.3.** Bất đẳng thức Jensen: Giả sử  $f$  là hàm số lồi trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có

$$(i) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$$

(ii) Với  $x_i$  là  $n$  số thuộc đoạn  $[a, b]$  và  $\lambda_i$  là  $n$  số không âm có tổng bằng 1 ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Các bạn có thể thấy tính chất 2.2 và mở rộng ra là bất đẳng thức **Jensen** có ứng dụng trực tiếp vào phương pháp dồn biến đặc biệt là các bất đẳng thức cổ điển. Một số các bài toán khó với các dạng toán này là sự kết hợp giữa phương pháp hàm lồi và các phương pháp khác trên các miền xác định khác nhau. Ta xét ví dụ minh họa tiêu biểu sau đây:

**Bài 6.1. [Vô định Ba Lan 1992]** Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t}{1+t^2}, \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } f \text{ lõm hay } -f \text{ lồi. Ta có: } -f''(t) = \frac{2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$$

nên  $-f''(t) \geq 0, \forall t \in [0, \sqrt{3}]$ . Vậy nếu  $x, y, z \in [0, \sqrt{3}]$  thì bài toán được giải quyết.

Trong trường hợp còn lại thì chắc chắn ta sẽ có dấu bất đẳng thức thực sự. Do vậy cứ việc chia thành nhiều trường hợp con để xét. Để đơn giản, ta giả sử  $x \geq y \geq z$ .

Do  $x + y + z = 1$  và  $x, y, z$  không đồng thời  $\in [0, 1]$  nên  $z < 0$ , suy ra  $f(z) < 0$ .

$$\text{Nếu } y < \frac{1}{2} \text{ thì } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} < \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 0 = \frac{9}{10} \text{ nên ta chỉ cần xét khi } y \geq \frac{1}{2}$$

Nếu  $0 \geq z \geq -\frac{1}{2}$  thì cùng với  $y \geq \frac{1}{2}$  ta có:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{x}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{4}{5}z = \frac{4}{5} < \frac{9}{10},$$

do đó, ta chỉ cần xét khi  $z < -\frac{1}{2}$

$$\text{Nếu } -\frac{1}{2} > z \geq -3 \text{ thì: } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Nếu  $z < -3$  thì:  $2x \geq x + y = 1 - z \geq 4$  nên  $x \geq 2$  và do đó:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} < \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{9}{10} \text{ (đpcm).}$$

**Nhận xét:** Ngoài phương pháp dồn ba biến chúng ta còn có thể giải bài toán bằng phương pháp dồn theo hai biến bằng nhau. Thật vậy, nếu có hai trong ba biến  $x, y, z$  thuộc đoạn  $[0, \sqrt{3}]$  thì sử dụng hàm lồi ta dồn được hai biến này về bằng nhau, khi đó bài toán đưa về một biến số và dễ dàng được chứng minh. Việc xét các trường hợp còn lại là hoàn toàn đơn giản. Mặc dù dồn biến bằng hàm lồi là một công cụ tốt, nhưng điểm yếu của nó là chỉ áp dụng được cho các bất đẳng thức với các biến số nằm trong các biểu thức độc lập nhau (để có thể viết thành dạng  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ ).

Nhưng đây là điều không phải luôn có trong bất đẳng thức. Tuy nhiên chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp dồn biến cho dạng tổng quát  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mà không có tính chất trên. Một điều cũng cần chú ý: mục đích của dồn biến bằng hàm lồi là để dồn các biến về bằng nhau. Và điều bất ngờ là kỹ thuật dồn biến ra biên cũng có thể thực hiện thông qua hàm lồi. Các bạn có thể thấy ngay điều đó qua kết quả sau đây:

**Định lý:** Cho  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi. Khi đó:  $f(x) \leq \text{Max}\{f(a), f(b)\}, \forall x \in [a, b]$

**Chứng minh:** Vì  $f$  liên tục nên  $f$  đạt giá trị lớn nhất tại  $x_0 \in [a, b]$ .

Xét khi  $|x_0 - a| \leq |x_0 - b| \Rightarrow x_1 = 2x_0 - a \in [a, b]$ .

Theo định nghĩa hàm lồi ta có:  $f(a) + f(x_1) \geq 2f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) = 2f(x_0)$

suy ra  $f(a) = f(x_0)$ . Với  $|x_0 - b| \leq |x_0 - a|$  thì chứng minh tương tự.

**Bài 6.2. [USA TST 2004]** Cho  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 \geq a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}$$

**Chứng minh**

Đặt  $f(b) = a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} - 2(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2$

Ta có  $f'(b) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{abc}}{3b^2} > 0$  nên  $f(b) \leq \max\{f(a), f(c)\}$ . Mặt khác:

$$f(a) = 2a + c - 3\sqrt[3]{a^2c} - 2(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 = -(c + 3\sqrt[3]{a^2c} - 4\sqrt{ac}) \leq 0 \quad (\text{theo AM - GM})$$

$$f(c) = a + 2c - 3\sqrt[3]{ac^2} - 2(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 = -(a + 3\sqrt[3]{ac^2} - 4\sqrt{ac}) \leq 0 \quad (\text{theo AM - GM})$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài toán trên có thể tổng quát lên  $n$  biến với cách giải tương tự như sau:

**Bài 6.3.** Cho  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(n-1)(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n})^2 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Tiếp theo chúng tôi sẽ dẫn ra đây 2 bài toán mà chúng thực sự là các bài toán khó cho dù giải bằng biến đổi đại số hay quy nạp.

**Bài 6.4.** Cho  $0 < p < q$  và  $n$  số thực  $x_i \in [p, q]$ . Chứng minh rằng:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq n^2 + \left[ \frac{n^2}{4} \right] \frac{(p-q)^2}{pq}$$

trong đó kí hiệu  $[x]$  là chi phần nguyên của  $x$

**Chứng minh**

Từ giả thiết  $x_i \in [p, q]$ , ta dễ dàng đoán rằng: giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi  $x_i \in \{p, q\} \quad \forall i$ .

Khi đó, giả sử trong  $n$  số  $x_i$  có  $k$  số  $p$  và  $n-k$  số  $q$  thì biểu thức bên vế trái bằng:

$$[kp + (n-k)q] \left( \frac{k}{p} + \frac{n-k}{q} \right) = k^2 + (n-k)^2 + k(n-k) \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right)$$

$$= n^2 + k(n-k) \frac{(p-q)^2}{pq} = n^2 + \frac{1}{4} [n^2 - (n-2k)^2]$$

Vì  $k$  nguyên nên  $n^2 - (n-2k)^2 \leq n^2$  ( $n$  chẵn) và  $n^2 - (n-2k)^2 \leq n^2 - 1$  ( $n$  lẻ).

Từ đó, ta thu được bất đẳng thức ban đầu và chỉ ra luôn trường hợp dấu bằng xảy ra.

Đến đây, ta chợt nhận ra: Mấu chốt của vấn đề chỉ là nhận xét: "Giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi  $x_i = p$  hoặc  $x_i = q$  với mọi  $i$ ". Và nhận xét này có thể chứng minh rất dễ. Thật vậy, với mọi  $i$ , ta xem về trái là một hàm theo  $x_i$  và kí hiệu là  $f(x_i)$ , ta sẽ chứng tỏ:

$$f(x_i) \leq \max\{f(p), f(q)\}, \text{ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x_i \in \{p, q\}.$$

Ta có:  $f(x) = Ax + \frac{B}{x} + C$ . Có thể sử dụng đạo hàm để ra ngay kết quả và chỉ ra luôn dấu bằng xảy ra khi  $x_i \in \{p, q\}$ . Song ở đây, chúng tôi trình bày một cách sơ cấp hơn.

$$\text{Đề ý: } f(x_i) - f(p) = (x_i - p) \left( A - \frac{B}{x_i p} \right); f(x_i) - f(q) = (x_i - q) \left( A - \frac{B}{x_i q} \right)$$

Từ đó nếu  $f(x_i) > \max\{f(p), f(q)\}$  thì  $x_i \notin \{p, q\}$  và  $A - \frac{B}{x_i p} > 0, A - \frac{B}{x_i q} < 0$

$$\Rightarrow \frac{B}{x_i p} < A < \frac{B}{x_i q} \text{ mâu thuẫn } p < q. \text{ Vậy } f(x_i) \leq \max\{f(p), f(q)\}.$$

Xét trường hợp dấu bằng xảy ra: Giả sử  $f(x_i) = \max\{f(p), f(q)\}$  mà  $x_i \notin \{p, q\}$ .

Nếu  $f(x_i) = f(p)$  thì  $A = \frac{B}{x_i p} > \frac{B}{x_i q}$ , khi đó  $f(x_i) - f(q) < 0$  (mâu thuẫn).

Nếu  $f(x_i) = f(q)$  thì  $A = \frac{B}{x_i q} < \frac{B}{x_i p}$ , khi đó  $f(x_i) - f(p) < 0$  (mâu thuẫn).

Vậy  $f(x_i) = \max\{f(p), f(q)\}$  tương đương với  $x_i \in \{p, q\}$

**Nhận xét:** (Bài toán mở rộng) Cho  $a_i \in [a, A], b_i \in [b, B]$  với  $0 < a \leq A$  và  $0 < b \leq B$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $T = \frac{(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)}{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}$

Bài toán trên mang ý nghĩa là tìm chặn trên của bất đẳng thức **Buniakowski**

và nhà toán học **Polya** đã cho một chặn trên của  $T$  là:  $\frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2$ .

Một điều rất tự nhiên được đặt ra là chặn trên của bất đẳng thức **AM - GM** là gì?

Chúng ta sẽ được biết ngay kết quả với bài toán sau đây:

**Bài 6.5.** Cho  $0 < p < q$ , và  $n$  số thực  $x_i \in [p, q]$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } T = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \leq n + \left[ \frac{n}{2} \right] \frac{(p-q)^2}{pq}$$

### Chứng minh

Theo nhận xét trên về hàm  $f(x) = Ax + \frac{B}{x} + C$  ta có:

Với mọi  $i$ , thay  $x_i$  bởi  $p$  hoặc  $x_i$  bởi  $q$  thì luôn có ít nhất một trường hợp làm tăng giá trị của  $T$  và khi  $T$  không tăng lên nữa thì các giá trị  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{p, q\}$ .

Sau hữu hạn phép thay thế trên ta có  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{p, q\}$ . Nếu  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = q$  thì  $T = n$  chỉ là giá trị nhỏ nhất của  $T$ , nên để tìm cận trên của  $T$  ta chỉ cần xét khi tồn tại  $x_i = p$ . Do  $T$  là biểu thức hoán vị vòng quanh của  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nên không mất tính tổng quát có thể giả sử  $x_1 = p$ . Khi đó cho dù  $x_3 = p$  hay  $x_3 = q$  ta thay  $x_2 = q$  thì  $T$  vẫn không giảm. Sau khi thay  $x_2 = q$  ta lại thay  $x_3 = p$  thì  $T$  vẫn không giảm...

Cứ như vậy ta thay xen kẽ  $p, q$  cho các  $x_i$  với qui tắc thay  $x_{2k} = q; x_{2k+1} = p$  cho đến  $x_n$  thì  $T$  vẫn không giảm. Kết thúc quá trình thay thế, ta nhận được:

$$T = n \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) \quad (n \text{ chẵn}) \text{ và } T = \frac{n-1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) + 1 \quad (n \text{ lẻ}) \text{ hay } T = n + \left[ \frac{n}{2} \right] \frac{(p-q)^2}{pq}, \quad \forall n$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x_i \in \{p, q\}$  và xen kẽ kể từ  $x_1$  tới  $x_n$  (không kể vòng  $x_n, x_1$ ).

**Bình luận:** Như vậy, chúng ta thấy ý tưởng dồn biến đã xuất hiện từ rất sớm ngay trong cách tiếp cận cổ điển. Mặc dù bất đẳng thức cổ điển không phải là một công cụ mạnh nhưng dựa vào đó ta mới có thể "*đứng trên vai những người khổng lồ*". Chúng ta đã gặp lại hai kỹ thuật dồn biến quan trọng ở các mục trước là: Dồn biến về tâm và dồn biến ra biên. Đặc biệt trong trường hợp cực trị đạt được tại tâm thì hàm lồi còn cho ta một kiểu dồn biến nữa rất thú vị mà chúng ta sẽ tìm hiểu ở mục sau.

## VII. DỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH – UMV [UNDERFINE MIXING VARIABLES]

Phương pháp dồn biến với hàm lồi mà chúng ta vừa xét có một tầm ảnh hưởng khá lớn, tuy nhiên, yếu điểm của nó là không giải quyết được những bất đẳng thức mà hàm số của các biến không ở dạng tường minh, hay việc tính đạo hàm là quá phức tạp. Và phương pháp dồn biến không xác định *UMV* sẽ giúp tháo gỡ yếu điểm đó.

### Định lý UMV:

Cho  $D \subset \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $D$  đóng và bị chặn. Gọi  $\Lambda$  là tập hợp các phần tử trong  $D$  có  $t$  thành phần bằng 0 và  $n - t$  thành phần bằng nhau ( $t \geq 0$ ).

• Xét hai phép biến đổi  $T_1, T_2 : D \rightarrow D$  như sau: Với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Lambda$ , chọn ra hai chỉ số  $i \neq j$  sao cho  $a_i = \min\{a_t > 0, t = 1, \dots, n\}$  và  $a_j = \max\{a_t, t = 1, \dots, n\}$ , sau đó thay  $a_i, a_j$  bởi  $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$  (ứng với  $T_1$ ) và  $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$  (ứng với  $T_2$ ).

• Giả sử  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục thỏa mãn:  $f(a) \geq \min\{f(T_1(a)), f(T_2(a))\}, \forall a \in D$



Khi đó ta có  $f(x) \geq \min_{y \in A} \{f(y)\}, \forall x \in D$

Nội dung của định lý có vẻ khá trừu tượng, tuy nhiên thực chất lại rất "giản dị".

Chúng ta bắt đầu xem xét **UMV** bằng bài toán.

**Bài 7.1.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 4(a+b+c) \geq 8(ab+bc+ca) \quad (1)$$

### Chứng minh

Đặt  $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 4(a+b+c) - 8(ab+bc+ca)$

Đầu tiên, chúng ta thử dồn biến hai biến bằng nhau, xét hiệu:

$$f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = (3b+3c-9a+8) \frac{(b-c)^2}{4}$$

Rõ ràng chúng ta chưa thể có kết luận gì. Chúng ta tiếp tục thử dồn một biến về 0:

$$f(a, b, c) - f(a, b+c, 0) = -(3b+3c-9a+8)bc$$

Rõ ràng, biểu thức  $(3b+3c-9a+8)$  hoặc âm, hoặc không âm, hay là ta có:

$$f(a, b, c) \geq \min \left\{ f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right); f(a, b+c, 0) \right\}$$

Áp dụng định lý **U.M.V**:  $f(a, b, c) \geq \min \{f(x, x, x); f(y, y, 0); f(z, 0, 0)\}$

với  $x = \frac{a+b+c}{3}; y = \frac{a+b+c}{2}; z = a+b+c$

Mặt khác:  $f(z, 0, 0) = z^3 + 4z \geq 0$ ;  $f(x, x, x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2 \geq 0$

$f(y, y, 0) = 2y^3 - 8y^2 + 8y = 2y(y-2)^2 \geq 0 \Rightarrow f(a, b, c) \geq 0$ .

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0); (1, 1, 1); (2, 2, 0)$ .

**Nhận xét:** Các bạn có thể nhận thấy rõ ràng ý nghĩa của **UMV** qua bài toán trên, khi mà việc hai kiểu dồn biến thông thường là dồn hai biến bằng nhau và đẩy biến ra biên không đạt hiệu quả. Nhưng sự liên hệ giữa hai kỹ thuật đó đã giúp chúng ta sử dụng **UMV** một cách hết sức hiệu quả.

**Bài 7.2.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c+d=4$ .

Chứng minh rằng:  $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}) \geq abc + bcd + cda + dab + 4$

### Chứng minh

Đặt  $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}) - abc - bcd - cda - dab - 4$ . Xét các hiệu:

$$\begin{aligned} \bullet f(a, b, c, d) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) &= 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{2(a+b)}) + (c+d)\left(\frac{(a+b)^2}{4} - ab\right) \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \left[ c+d - \frac{8}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2(a+b)})} \right] = \frac{(a-b)^2}{4} (c+d - X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(a, b, c, d) - f(a+b, 0, c, d) \\ = 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}) - (c+d) = ab \left[ \frac{4}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})} - c-d \right] = ab(Y - c-d) \end{aligned}$$

Để dàng chứng minh:  $\frac{4}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b})} \geq \frac{8}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2(a+b)})}$

hay  $Y \geq X$  nên  $\begin{cases} c+d \leq Y \\ c+d \geq X \end{cases} \Rightarrow f(a, b, c) \geq \min \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right); f(a+b, 0, c, d) \right\}$

Áp dụng định lý **U.M.V** ta có:

$$f(a, b, c, d) \geq \min \left\{ f(1, 1, 1, 1); f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right); f(2, 2, 0, 0); f(4, 0, 0, 0) \right\} = 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow (a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1); (4, 0, 0, 0)$

Bây giờ chúng ta sẽ trở lại Bài toán 5.2 với việc áp dụng **UMV**.

**Bài 7.3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ . Chứng minh rằng:

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + na_1 a_2 \dots a_n \geq n^2$$

### Chứng minh

Đặt:  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + na_1 a_2 \dots a_n$ . Ta có:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \dots, a_n\right) = \frac{n(a_1-a_2)^2}{4} \left( \frac{2(n-1)}{n} - a_3 a_4 \dots a_n \right)$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(0, a_1+a_2, a_3, \dots, a_n) = -na_1 a_2 \left( \frac{2(n-1)}{n} - a_3 a_4 \dots a_n \right)$$

$$\Rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \min \left\{ f\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \dots, a_n\right), f(0, a_1+a_2, a_3, \dots, a_n) \right\}$$

Theo định lý **UMV**, ta chỉ cần chứng minh bài toán khi có ít nhất một trong  $n$  số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bằng 0 hoặc tất cả các số đều bằng 1. Trong các trường hợp này bất đẳng thức đều dễ dàng chứng minh.

**Nhận xét:** Với việc áp dụng **UMV** lần lượt với các bài toán ba biến, bốn biến,  $n$  biến, chúng tôi muốn đề cập đến một đặc trưng của **UMV** là không hề phụ thuộc vào số biến của bất đẳng thức. Đặc điểm này có được vì dồn biến **UMV** sử dụng với hai biến bất kỳ. Đây là một điểm rất quan trọng, khiến cho rất nhiều bài toán tổng quát phức tạp trở nên đơn giản với **UMV**. Sau đây là một trong những ví dụ điển hình nhất.

**Bài 7.4.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $S = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$

**Giải**

Đặt  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$

Xét các hiệu:

$$\bullet f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(0, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n) = -a_1 a_2 \left[ 2 - a_3 a_4 \dots a_n \left( \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \right]$$

(\*)

$$\begin{aligned} \bullet f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \dots, a_n\right) \\ = \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} \left[ 2 - a_3 a_4 \dots a_n \left( \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \right] \quad (**) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \min \left\{ f(0, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n), f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \dots, a_n\right) \right\}$$

Do vậy, áp dụng định lý **UMV** ta có:  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \min_{k=1, n} f\left(\frac{n}{k}, \frac{n}{k}, \dots, \frac{n}{k}, 0, 0, \dots, 0\right)$

Hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức là:  $\min \left\{ 2n, \frac{n^2}{n-1} + \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n-1} \cdot \frac{n^2}{n-2} \right\}$

## VIII. ĐỒN BIẾN VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Cho đến bây giờ, trong phương pháp dồn biến của chúng ta, số lần thực hiện thao tác dồn biến luôn là hữu hạn, nhờ đó lời giải là rõ ràng và hoàn toàn sơ cấp. Đây là một điều rất tốt mà chúng tôi muốn duy trì tiếp tục trong mục này. Bây giờ, chúng tôi giới thiệu thêm một cách dồn biến nữa dành cho hàm lồi. Ta sẽ gọi đây là kỹ thuật dồn biến về giá trị trung bình. Chúng ta sẽ mở đầu bằng hai định lý sau:

**Định lý 1:** Cho  $f$  là hàm lồi  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta có:  $f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a+b-x), \forall x \in [a, b]$

**Chứng minh**

Vì  $x \in [a, b]$  nên  $x = ta + (1-t)b$  với  $t \in [0, 1]$ . Khi đó:  $a+b-x = (1-t)a + tb$ .

Áp dụng định nghĩa hàm lồi, ta có:  $f(x) + f(a+b-x) = f[ta + (1-t)b] + f[(1-t)a + tb] \\ \leq [tf(a) + (1-t)f(b)] + [(1-t)f(a) + tf(b)] = f(a) + f(b)$

**Định lý 2:** (bất đẳng thức **Jensen**) Cho  $f$  là hàm số lồi  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Khi đó:

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  ta có:  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = n f(T)$

**Chứng minh**

Ta cho thực hiện thuật toán sau:

- **Bước 1:** Nếu  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  (\*) thì bất đẳng thức đúng.
- **Bước 2:** Nếu điều kiện (\*) không thỏa mãn thì không mất tính tổng quát có thể giả sử  $x_1 > T > x_2$ .

Khi đó thay bộ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bởi bộ  $(T, x_1 + x_2 - T, \dots, x_n)$  thì nhận được bộ mới cũng có trung bình cộng là  $T$ , và theo định lí 1 thì giá trị của hàm  $f$  được tăng lên. Mặt khác, mỗi lần thực hiện bước 2 thì số biến bằng  $T$  tăng lên ít nhất là 1, do đó sau nhiều nhất là  $(n-1)$  lần thực hiện bước 2, ta sẽ nhận được các số thỏa mãn (\*). Chú ý là trong quá trình thay thế thì biểu thức  $f$  luôn được tăng lên, do vậy ta có đpcm.

**Bình luận:** Trong các bất đẳng thức cho  $n$  biến số ( $n \geq 4$ ) thì kỹ thuật dồn biến về giá trị trung bình ưu việt hơn hẳn so với dồn biến về tâm. Thật vậy, nếu dồn biến về tâm thì giả sử ta dồn được hai biến về bằng nhau thì cũng chưa thu được gì đáng kể, và trong trường hợp đó thì sau hữu hạn lần dồn biến vẫn không thể đưa được về trường hợp một biến (chứ chưa nói là đưa được về trường hợp các biến bằng nhau). Tuy nhiên, nếu sử dụng kỹ thuật dồn biến về giá trị trung bình (hoặc dồn biến ra biên) thì tình hình lại khác: sau mỗi lần dồn biến thì số lượng biến có giá trị cố định tăng lên (là giá trị trung bình hoặc giá trị tại biên), do đó chỉ cần hữu hạn lần dồn biến ta sẽ đưa được tất cả các biến về các giá trị cố định và bài toán xem như giải quyết xong.

Trong mục này, chúng tôi tiếp tục giới thiệu hai bài toán khác, mà trong đó ý tưởng dồn biến về giá trị trung bình đã cho lời giải bất ngờ.

**Bài 8.1.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  và  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\text{Với } k = 4(n-1) \text{ ta luôn có: } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n + \frac{k}{n} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Với  $n = 1, n = 2$  thì bài toán đơn giản, nên dưới đây ta xét khi  $n \geq 3$ .

Trước hết, ta khảo sát các trường hợp có thể dồn biến và rút ra:

**Mệnh đề 1:** Đặt  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ . Khi đó ta có:

(i) Nếu  $a_1 \leq x \leq a_2$  và  $a_1 a_2 \leq 1$  thì  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(x, \frac{a_1 a_2}{x}, a_3, \dots, a_n\right)$

(ii) Nếu  $(1-a_1)(1-a_2) \left[ ka_1a_2 - \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1 \right) \right] \geq 0$  thì

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, \dots, a_n)$$

(iii) Nếu  $a_1, a_2 \geq 1 \geq a_3$  thì:  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \min\{f(1, a_1a_2, a_3, \dots, a_n), f(1, a_2, a_1a_3, a_1a_i, \dots, a_n)\}$

**Chứng minh**

(i) Ta có:

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f\left(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, \dots, a_n\right) &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{a_1a_2} + \frac{k}{A+a_1+a_2} - \frac{k}{A+x+\frac{a_1a_2}{x}} \\ &= \frac{(x_1-a_1)(x-a_2) \left[ (A+a_1+a_2) \left( A+x+\frac{a_1a_2}{x} \right) - ka_1a_2 \right]}{xa_1a_2(A+a_1+a_2) \left( A+x+\frac{a_1a_2}{x} \right)} \text{ trong đó } A = \sum_{i=3}^n a_i \end{aligned}$$

Theo AM - GM:  $(A+a_1+a_2) \left( A+x+\frac{a_1a_2}{x} \right) \geq n^2 \geq 4(n-1) = k \geq ka_1a_2 \Rightarrow$  (đpcm).

(ii) Cũng từ đẳng thức ở trên cho  $x=1$  ta có:  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(1, a_1a_2, a_3, \dots, a_n) =$

$$= \frac{(1-a_1)(1-a_2) \left[ ka_1a_2 - (A+a_1+a_2)(A+a_1a_2+1) \right]}{a_1a_2(A+a_1+a_2)(A+a_1a_2+1)} \text{ và ta có đpcm.}$$

(iii) Xét hai trường hợp:  $(1-a_1)(1-a_2) \left[ ka_1a_2 - \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1 \right) \right] \geq 0$

TH 1: Nếu  $ka_1a_2 \geq \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1 \right)$  thì theo (ii):  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(1, a_1a_2, a_3, \dots, a_n)$

TH 2: Nếu  $ka_1a_2 \leq \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1 \right)$  thì vì  $a_3 \leq 1 \leq a_2$  nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \neq 1,3} a_i + a_1a_3 + 1}{a_1a_3} &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i - a_1 - a_3 + 1}{a_1a_3} + 1 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i - a_1 - a_2 + 1}{a_1a_2} + 1 = \frac{\sum_{i=3}^n a_i + a_1a_2 + 1}{a_1a_2} \\ \Rightarrow ka_1a_3 &\leq \sum_{i=1}^n a_i \left( \sum_{i \neq 1,3} a_i + a_1a_3 + 1 \right) \text{ và theo (ii): } f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(1, a_2, \dots, a_1a_i, \dots, a_n). \end{aligned}$$

**Ý nghĩa:** Mệnh đề 1 giúp chúng ta đưa bài toán về 1 biến.

**Mệnh đề 2:** Ta sẽ luôn đưa được bất đẳng thức (1) với các biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  và  $a_1a_2 \dots a_n = 1$  về trường hợp có  $n-1$  biến bằng nhau và  $\leq 1$ .

### Chứng minh

• **Bước 1:** Đưa về trường hợp có  $n-1$  biến  $\leq 1$ .

Giả sử còn có nhiều hơn 1 biến lớn hơn 1, mà ta có thể giả sử là  $a_1, a_2$ . Thì sử dụng mệnh đề 1

(iii) ta luôn có thể thay bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  bởi 1 bộ khác, vẫn có tích bằng 1, làm cho  $f$  không

tăng, và hơn nữa có số biến bằng 1 tăng lên ít nhất là 1. Do đó sau nhiều nhất  $(n-1)$  lần thay thế ta sẽ nhận được bộ gồm  $(n-1)$  biến  $\leq 1$ .

• **Bước 2:** Đưa  $(n-1)$  biến  $\leq 1$  về bằng nhau.

Giả sử  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq 1$  là  $(n-1)$  biến có trung bình nhân là  $x$ . Nếu  $(n-1)$  biến này chưa bằng nhau thì  $a_1 < x < a_{n-1}$  và dùng mệnh đề 1 (i) ta có thể thay bộ

$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  bởi  $\left(x, a_2, \dots, \frac{a_1 a_{n-1}}{x}, a_n\right)$ . Khi đó  $f$  không giảm và số biến bằng  $x$

tăng lên ít nhất là 1. Ta cũng lưu ý là  $\frac{a_1 a_{n-1}}{x} \leq \frac{a_1}{x} \leq 1$  (vì  $a_1$  là số nhỏ nhất trong  $n-1$

số  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ) nên  $a_1 \leq x$ , do đó việc thay thế này vẫn đảm bảo  $n-1$  biến đều  $\leq 1$ ,

điều đó cho phép việc thay thế có thể thực hiện liên tiếp. Vậy sau hữu hạn (không quá  $n-1$ ) lần thay thế ta sẽ có  $n-1$  biến  $\leq 1$  đều bằng nhau. Cuối cùng, ta giải quyết bài toán 1 biến, tức là chứng minh:

$$f\left(x, x, \dots, x, \frac{1}{x^{n-1}}\right) \geq f(1, 1, \dots, 1) \text{ với } x \leq 1$$

$$\text{Đặt } g(x) = f\left(x, x, \dots, x, \frac{1}{x^{n-1}}\right) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{k}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}} \text{ với } x \in (0, 1]$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = -\frac{n-1}{x^2} + (n-1)x^{n-2} - \frac{k \left[ \frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{x^n} \right]}{\left[ (n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}} \right]^2} = (n-1) \frac{x^n - 1}{x^2} \left[ \frac{(n-1)x^n - 1}{(n-1)x^n + 1} \right]^2$$

Do  $k=4(n-1)$  nên  $g'(x) \leq 0$  với  $x \in (0, 1]$ , suy ra  $g(x) \geq g(1)$  và ta có đpcm.

**Bài 8.2.** Cho  $n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$(1+a_1^2)(1+a_2^2)\dots(1+a_n^2) \leq \frac{2^n}{n^{2n-2}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{2n-2}$$

### Chứng minh

Với  $n=1, n=2$  thì đơn giản nên ta chứng minh cho  $n \geq 3$ . Ta thấy bài toán tương đương với  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$  và cũng tương đương với  $g(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$ , trong đó:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{2n-2} - (1+a_1^2)(1+a_2^2)\dots(1+a_n^2) \text{ và}$$

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \ln k + (2n-2) \ln(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \ln(1+a_1^2) - \ln(1+a_2^2) - \dots - \ln(1+a_n^2)$$

Ở đây  $k = \frac{2^n}{n^{2n-2}}$ . Khảo sát sơ bộ các trường hợp có thể dồn biến, ta xét các mệnh đề sau đây:

**Mệnh đề 1:**

(i) Nếu  $a_1 \geq 1 \geq a_2, a_3$  thì:  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \min\{f(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n), f(a_1, 1, a_2 a_3, \dots, a_n)\}$

(ii) Nếu  $a_1 = \max \{a_i\}_{i=1}^n$  và  $a_1 \geq x \geq a_2 \geq 1$  thì:  $g(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq g\left(x, \frac{a_1 a_2}{x}, a_3, \dots, a_n\right)$

Chứng minh

$$\begin{aligned} (i) \text{ Xét các hiệu } f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n) &= \\ &= k s^{2n-2} - k u^{2n-2} + \left[ 2(1 + a_1^2 a_2^2) - (1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \right] (1 + a_3^2) \dots (1 + a_n^2) \\ &\quad (\text{với } s = a_1 + a_2 + \dots + a_n, u = 1 + a_1 a_2 + \dots + a_n) \\ &= k(a_1 + a_2 - 1 - a_1 a_2)(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + \dots + u^{2n-3}) + (1 - a_1^2)(1 - a_2^2)(1 + a_3^2) \dots (1 + a_n^2) \\ &= -(1 - a_1)(1 - a_2) \left[ k(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + \dots + u^{2n-3}) - (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2) \dots (1 + a_n^2) \right] \end{aligned}$$

Sử dụng lại đẳng thức ở trên với  $a_3$  đổi chỗ cho  $a_1$ , ta có:

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, 1, a_2 a_3, \dots, a_n) &= \\ &= -(1 - a_2)(1 - a_3) \left[ k(s^{2n-3} + s^{2n-4}v + \dots + v^{2n-3}) - (1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2) \dots (1 + a_n^2) \right] \\ &\quad (\text{với } v = 1 + a_1 + a_2 a_3 + a_4 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức ở trên, ta thấy:

- Nếu  $k(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + \dots + u^{2n-3}) - (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2) \dots (1 + a_n^2) \geq 0$  (2)  
thì  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n)$
- Nếu  $k(s^{2n-3} + s^{2n-4}v + \dots + v^{2n-3}) - (1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2) \dots (1 + a_n^2) \leq 0$  (3)  
thì  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(a_1, 1, a_2 a_3, \dots, a_n)$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh trong 2 bất đẳng thức (2) và (3) có ít nhất một bất đẳng thức đúng là xong. Chẳng hạn, ta giả sử (2) sai, và sẽ chứng minh (3) đúng.

Muốn vậy, ta chỉ cần chứng minh:  $u \geq v$  và  $(1 + a_1)(1 + a_3^2) \leq (1 + a_2)(1 + a_1^2)$  là xong.

Thật vậy ta có:  $u - v = a_3 + a_1 a_2 - a_1 - a_2 a_3 = (1 - a_2)(a_1 - a_3) \geq 0$

$$(1 + a_1)(1 + a_3^2) - (1 + a_2)(1 + a_1^2) = (a_3 - a_1)(a_1 a_3 + a_1 + a_3 - 1) \leq 0$$

Vậy mệnh đề (i) chứng minh xong.

(ii) Với việc xuất hiện hàm  $\ln$  ta không thể xét hiệu rồi biến đổi, mà thay vào đó ta dùng đạo hàm.

$$\begin{aligned} \text{Xét: } g(t) &= \ln k + 2(n-1) \ln \left( t a_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + \dots + a_n \right) \\ &\quad - \ln(1 + t^2 a_1^2) - \ln \left( 1 + \frac{a_2^2}{t^2} \right) - \ln(1 + a_3^2) \dots - \ln(1 + a_n^2) \text{ với } t \in \left[ \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } g'(t) &= \frac{2(n-1)\left(a_1 - \frac{a_2}{t^2}\right)}{ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + \dots + a_n} - \frac{2ta_1^2 - \frac{2a_2^2}{t^3}}{(1+t^2a_1^2)\left(1+\frac{a_2^2}{t^2}\right)} = \\ &= 2\left(a_1 - \frac{a_2}{t^2}\right) \left[ \frac{n-1}{ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + \dots + a_n} - \frac{ta_1 + \frac{a_2}{t}}{(1+t^2a_1^2)\left(1+\frac{a_2^2}{t^2}\right)} \right] \end{aligned}$$

Vì  $t \in \left[\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1\right]$  nên  $a_1 - \frac{a_2}{t^2} \geq 0$ . Do đó, gọi  $T$  là thừa số còn lại, ta chỉ cần chứng minh  $T$

$\geq 0$  là có thể suy ra  $g$  đồng biến trên  $\left[\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1\right]$

Để viết cho gọn, ta đặt  $c = \sqrt{(1+t^2a_1^2)\left(1+\frac{a_2^2}{t^2}\right)}$ ,  $d = ta_1 + \frac{a_2}{t}$

Ta có:  $T \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n-1}{d+a_3+\dots+a_n} \geq \frac{d}{c^2} \Leftrightarrow (n-1)c^2 \geq d^2 + d(a_3+\dots+a_n)$

Vì  $c \geq d$  (bất đẳng thức **Buniakowski**) nên để có bất đẳng thức trên ta chỉ cần:

$(n-2)c \geq a_3 + \dots + a_n$ . Điều này đúng vì  $c > a_1a_2 \geq a_1 \geq \max\{a_3, \dots, a_n\}$ .

Lấy  $t_0 = \max\left\{x, \frac{a_1a_2}{x}\right\} \cdot \frac{1}{a_1}$  thì  $t_0 \in \left[\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1\right]$ ,  $t_0a_1 = \max\left\{x, \frac{a_1a_2}{x}\right\}$ ,  $\frac{a_2}{t_0} = \min\left\{x, \frac{a_1a_2}{x}\right\}$

Vì  $g$  đồng biến trên  $\left[\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1\right]$  nên  $g(1) \geq g(t_0)$  và ta có (đpcm).

Vậy mệnh đề (ii) chứng minh xong. Mệnh đề 1 chứng minh xong.

Trở lại bài toán, ta sẽ nói là bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  được thay thế bởi bộ  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  nếu  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(b_1, b_2, \dots, b_n)$  hoặc  $g(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq g(b_1, b_2, \dots, b_n)$

**Mệnh đề 2:** Luôn đưa được về trường hợp có  $n-1$  biến bằng nhau  $\geq 1$ .

### Chứng minh

• **Bước 1:** Đưa về trường hợp có  $n-1$  biến  $\geq 1$ .

Giả sử còn có 2 biến  $a_2, a_3 < 1$ . Khi đó phải có 1 biến  $> 1$ , mà ta có thể giả sử là  $a_1$ . Sử dụng mệnh đề 1 (i), ta có thể thay bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  bởi bộ  $(1, a_1a_2, a_3, \dots, a_n)$  hoặc bộ  $(a_1, 1, a_2a_3, \dots, a_n)$ . Chú ý là cho dù thay bởi bộ nào, thì số các biến bằng 1 cũng tăng lên ít nhất là 1. Do đó, động tác thay thế này sẽ phải dừng lại sau không quá  $n-1$  lần. Khi đó, ta sẽ có  $n-1$  biến  $\geq 1$ .



• **Bước 2:** Ta chứng minh luôn có thể thay  $n-1$  biến  $\geq 1$  bởi trung bình nhân của chúng.

Thật vậy, giả sử  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq 1 \geq a_n$  và đặt  $x = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \geq 1$ .

Nếu trong  $n-1$  biến đầu tiên vẫn còn biến khác  $x$  thì  $a_1 > x > a_{n-1}$ .

Sử dụng mệnh đề (ii) ta có thể thay bộ  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  bởi bộ  $(x, a_3, \dots, \frac{a_1 a_2}{x}, a_n)$ .

Chú ý là  $\frac{a_1 a_{n-1}}{x} \geq a_{n-1} \geq 1$  (vì  $a_1$  là số lớn nhất trong các số  $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$  nên  $a_1 > x$ ) cho nên

việc thay thế này vẫn đảm bảo  $n-1$  biến đầu tiên  $\geq 1$  (để có thể thay thế liên tiếp).

Chú ý rằng sau khi thay thế thì số biến bằng  $x$  tăng lên ít nhất là 1.

Do đó, sau không quá  $n-1$  lần thay thế thì cả  $n-1$  biến đầu tiên đều bằng  $x$ .

Cuối cùng ta giải quyết bài toán 1 biến.

Xét hàm số  $h(x) = g\left(x, x, \dots, x, \frac{1}{x^{n-1}}\right)$

$$= \ln k + 2(n-1) \ln \left[ (n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}} \right] - (n-1) \ln(1+x^2) - \ln \left( 1 + \frac{1}{x^{2n-2}} \right) \text{ với } x \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } h'(x) &= 2(n-1) \frac{\frac{n-1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}}}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}} - \frac{2(n-1)x}{1+x^2} - \frac{-\frac{2(n-1)}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n-2}}} \\ &= \frac{2(n-1)}{x} \left[ \frac{(n-1)(x^n - 1)}{(n-1)x^n + 1} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{2n-2}} \right] = \frac{2(n-1)}{x} \left[ \frac{(n-1)(x^n - 1)}{(n-1)x^n + 1} - \frac{x^{2n} - 1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})} \right] \end{aligned}$$

Chú ý là  $x \geq 1$  nên để có  $h'(x) \geq 0$  ta chỉ cần:  $\frac{n-1}{(n-1)x^n + 1} \geq \frac{x^n + 1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$

Ta có điều này bằng đánh giá đơn giản:  $\frac{n-1}{(n-1)x^n + 1} \geq \frac{1}{x^n + 1} \geq \frac{x^n + 1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$

(đầu  $\geq$  thứ hai là do bất đẳng thức **Buniakowski**)

Vậy với  $x \geq 1$  thì  $h'(x) \geq 0$  nên  $h(x)$  đồng biến, suy ra  $h(x) \geq h(1) = 0$  và ta có (dpcm).

Vậy bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  với  $n \geq 3$

(còn với  $n = 1, n = 2$  thì có đẳng thức).

**Nhận xét:**

• Bài toán này là của tác giả Phạm Kim Hùng đặt ra dưới dạng bài toán mở và chứng minh trên đây của chúng tôi là chứng minh đầu tiên cho nó.

• Ở đây việc xét đồng thời 2 hàm  $f, g$  cho phép ta mở rộng khả năng dồn biến: khi thì xét  $f$  đơn giản hơn, khi thì xét  $g$  đơn giản hơn. Trong bài toán 1 thì vì vấn đề đơn giản hơn nên chỉ cần một hàm  $f$  là đủ.

## IX. DÒN BIẾN BẢNG QUY NẠP THỪA

Trong các kỹ thuật dồn về  $(n-1)$  biến bằng nhau, chúng ta cần phải nhắc đến kỹ thuật quy nạp thừa đã được **Phạm Kim Hùng** giới thiệu trong cuốn sách **Sáng tạo bất đẳng thức**. Có thể hình dung về ý tưởng dồn biến bằng quy nạp thừa như sau. Giả sử ta cần chứng minh một bất đẳng thức của  $n$  biến  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có điều kiện ràng buộc là  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , trong đó đẳng thức xảy ra khi  $n$  biến bằng nhau. Chính đẳng thức ràng buộc này không cho phép chúng ta giải bài toán bằng quy nạp. Tuy nhiên, nếu chúng ta sửa điều kiện ràng buộc lại thành  $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$  thì khi đó ta có thể giả sử, chẳng hạn  $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  để có  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} \geq 1$  và ta có thể dùng giả thiết cho  $n-1$  biến này để quy về trường hợp  $n-1$  biến bằng nhau. Sau đây là một ví dụ đặc sắc cho kĩ thuật này.

**Bài toán. [Phạm Kim Hùng]** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  và  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}, \forall k > 0$

**Chứng minh**

• Ta chứng minh kết quả tổng quát hơn:

Với  $k > 0$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương có tích  $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$  thì:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{(1+\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_n})^k}\right\} \quad (1)$$

• Chứng minh quy nạp theo  $n$ .

Với  $n=1$ : (1) hiển nhiên đúng! Giả sử đã chứng minh (1) đúng tới  $n$  ( $n \geq 1$ ), ta sẽ chứng minh (1) đúng với  $n+1$ .

Gọi  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  là các số thực dương có tích bằng  $s^{n+1}$  với  $s \geq 1$ , ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_{n+1})^k} \geq \min\left\{1, \frac{n+1}{(1+s)^k}\right\} \quad (2)$$

Trong phần dưới đây ta xem như  $s$  cố định. Trước hết, ta hãy đơn giản hóa bài toán.

• **Mệnh đề:** Lấy  $k_0 = \frac{\ln(n+1)}{\ln(1+s)}$  (nghĩa là  $\frac{n+1}{(1+s)^{k_0}} = 1$ )

Giả sử (2) đúng với  $k = k_0$ , thế thì (2) đúng với mọi  $k > 0$ . Hơn nữa, ta chỉ có  $k_0 \geq n$  trong trường hợp  $n = k_0 = s = 1$  và khi đó thì (2) cũng đúng!

**Chứng minh:** (2) đúng với  $k = k_0$  nghĩa là  $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^{k_0}} \geq 1 = \frac{n+1}{(1+s)^{k_0}}$

Nếu  $k > k_0$  thì ta đánh giá:  $\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^k}}{n+1} \geq \left( \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^{k_0}}}{n+1} \right)^{\frac{k}{k_0}} \geq \left( \frac{\frac{n+1}{(1+s)^{k_0}}}{n+1} \right)^{\frac{k}{k_0}} = \frac{1}{(1+s)^k}$

Nếu  $k < k_0$  thì ta đánh giá:  $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^k} \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^{k_0}} \geq 1$

Hơn nữa, nếu  $k_0 \geq n$  thì:  $n+1 = (1+s)^{k_0} \geq 1+k_0s \geq 1+n$  (vì  $k_0 \geq n \geq 1$  và  $s \geq 1$ )

suy ra  $n = k_0 = s = 1$ , khi đó (2) hiển nhiên đúng.

• Trở lại bài toán của chúng ta. Mệnh đề trên cho phép ta chỉ cần chứng minh (2) với  $k = k_0$ , hơn nữa, chỉ cần xét trường hợp  $k_0 < n$ . Từ giờ trở đi để đơn giản kí hiệu, ta sẽ

kí hiệu  $k$  thay vì  $k_0$  nghĩa là  $k = \frac{\ln(n+1)}{\ln(1+s)}$ .

Giả sử  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n+1}$ , khi đó  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương có tích  $\geq 1$ , do đó

theo giả thiết quy nạp ta có  $\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min \left\{ 1, \frac{n}{(1+a)^k} \right\}$  với

$$a = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq s$$

Hơn nữa  $a_{n+1} = \frac{s^{n+1}}{a^n}$ . Do đó để có (2) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{n}{(1+a)^k} + \frac{1}{\left(1 + \frac{s^{n+1}}{a^n}\right)^k} \geq \min \left\{ 1, \frac{n+1}{(1+s)^k} \right\} = 1 \quad (3)$$

• Nhắc lại là ta đã xem như  $s$  cố định. Ta xem vế trái của (3) như là hàm theo  $a$  và kí hiệu là  $f(a)$ .

Để chứng minh (3), ta sẽ khảo sát  $f$  với  $a \in \mathbb{R}^+$ . Ta có:  $f'(a) = \frac{-kn}{(1+a)^{k+1}} + \frac{kn \frac{s^{n+1}}{a^{n+1}}}{\left(1 + \frac{s^{n+1}}{a^n}\right)^{k+1}}$

$$f'(s) \geq 0 \Leftrightarrow g(a) = (n+1)[\ln(s) - \ln(a)] + (k+1) \left[ \ln(1+a) - \ln \left( 1 + \frac{s^{n+1}}{a^n} \right) \right] \geq 0$$

$$\text{Ta có: } g'(a) = \frac{-(n-k)a^{n+1} - (n+1)a^n + (n+1)ks^{n+1}a + (kn-1)s^{n+1}}{a(1+a)(a^n + s^{n+1})}$$

$$g'(a) \geq 0 \Leftrightarrow h(a) = -(n+k)a^{n+1} - (n+1)a^n + (n+1)ks^{n+1}a + (kn-1)s^{n+1} \geq 0.$$

$$\text{Ta có: } h'(a) = (n+1)[-(n-k)a^n - na^{n-1} + ks^{n+1}]$$

Lưu ý là  $k < n$  nên  $h'(a)$  đổi dấu từ dương sang âm trên  $\mathbb{R}^+$ . Hơn nữa  $h(0) > 0$  nên  $h(a)$  cũng đổi dấu từ dương sang âm trên  $\mathbb{R}^+$ . Vì  $g'(a) = 0$  cùng dấu với  $h(a)$  nên  $g(a) = 0$  có tối đa 2 nghiệm trên  $\mathbb{R}^+$ . Vậy  $f'(a) = 0$  có tối đa 2 nghiệm trên  $\mathbb{R}^+$ . Hơn nữa,  $f'(s) = 0$  và  $\lim_{a \rightarrow 0^+} f(a) = n \geq 1 = f(s) = \lim_{a \rightarrow +\infty} f(a)$  nên nghiệm còn lại của  $f'(a) = 0$  trên  $\mathbb{R}^+$  là  $a_0 \in (s, +\infty)$ .

Suy ra  $f(a)$  tăng trên  $(s, a_0)$  và giảm trên các khoảng  $(0, s)$  và  $(a_0, \infty)$ .

Từ đó suy ra  $f(a) \geq f(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \forall a \in \mathbb{R}^+$ . Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

**X. DÒN BIẾN TOÀN MIỀN – EMV [ENTIRELY MIXING VARIABLES]**

Tất cả những kỹ thuật dồn biến mà chúng ta vừa xét đều có một đặc điểm chung là khi thực hiện phép dồn biến:  $f(a, b, c) \geq f(a', b', c')$  thì bộ ba số  $(a, b, c)$  và  $(a', b', c')$  đều có một đại lượng đặc trưng giống nhau, chẳng hạn như tổng, tích...

Phương pháp **EMV** cũng có đại lượng đặc trưng không đổi sau khi dồn biến. Tuy nhiên, sự khác biệt hoàn toàn so với các phương pháp dồn biến trước là: “Đại lượng đặc trưng không đổi khi sử dụng **EMV** là hiệu các biến, tức là các đại lượng  $a-b, b-c, c-a$ ”.

Tư tưởng chủ đạo của **EMV** là chứng minh khi tăng hoặc giảm các biến đi cùng một đại lượng, bất đẳng thức yếu đi hoặc không đổi. Từ đó chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp một biến ở biên.

Chú ý rằng nếu sử dụng **EMV** trong bất đẳng thức  $n$  biến, khi dồn một biến về biên, thì bất đẳng thức còn  $n-1$  biến, tuy nhiên, nếu số biến còn lại vẫn  $\geq 3$  thì việc chứng minh là khá phức tạp. Vì vậy chúng tôi chỉ nêu những ứng dụng của **EMV** trong bất đẳng thức ba biến.

**1. EMV với biên tại 0:**

Bất đẳng thức với biến số có biên tại 0 chiếm một số lượng đáng kể trong bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức ba biến nói riêng. Ở phần IV, ta đã xét đến một kỹ thuật để đẩy biến về biên tại 0. Và bây giờ phương pháp **EMV** sẽ cho ta một cách tiếp cận khác về kỹ thuật này. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một bất đẳng thức khá nổi tiếng:

**Bài 10.1.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} \right) \geq \frac{9}{2}$$

**Chứng minh**

Vì  $VT(a, b, c) \leq VT(|a|, |b|, |c|)$  nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $a \geq b \geq 0, c \leq 0$ . Trước hết ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3} \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3}$$

Do vậy chỉ cần chứng minh:

$$((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \left( \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} \right) \geq \frac{27}{2} \quad (1)$$

Đặt  $VT(1) = f(a, b, c)$ . Chú ý rằng bất đẳng thức trên chỉ gồm các đại lượng đặc trưng của **EMV** do đó  $f(a, b, c) = f(a-x, b-x, c-x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Do vậy ta có thể giả sử một biến

bằng 0, ở đây ta sẽ chọn biến  $b$ , tức chọn  $x=b$  vì khi đó bộ số  $(a-b, 0, c-b)$  mới thỏa mãn  $a-b \geq 0, c-b \leq 0$ .

Tiếp theo ta cần chứng minh:  $((a-c)^2 + c^2 + a^2) \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right) \geq \frac{27}{2}$  (2)

Sử dụng các bất đẳng thức:  $c^2 + a^2 \geq \frac{(a-c)^2}{2}, \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{8}{(c-a)^2}$ .

Ta có: VT (2)  $\geq \left(1 + \frac{1}{2}\right) (a-c)^2 \frac{(1+8)}{(a-c)^2} = \frac{27}{2}$ . Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=t, b=0, c=-t$  với  $t \in \mathbb{R}^*$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Phương pháp *EMV* trong bài toán này được sử dụng một cách khá độc đáo, khi mà biểu thức không đối khi dùng *EMV*.

Tiếp theo ta sẽ lại quay lại bất đẳng thức *Schur* một lần nữa.

**Bài 10.2. (Bất đẳng thức Schur)** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \quad (1)$$

#### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow f(a, b, c) = (b+c-a)(b-c)^2 + (a+c-b)(a-c)^2 + (a+b-c)(b-a)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh:  $f(a, b, c) \geq f(a-x, b-x, c-x), \forall x \in [0, \min\{a, b, c\}]$ .

Điều này hiển nhiên đúng vì:  $b+c-a \geq b+c-a-x = b-x+c-x-a+x$  và các kết quả tương tự. Theo kết quả của **Bài toán 4.1** thì bất đẳng thức đúng trong trường hợp một biến bằng 0. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

**Nhận xét:** Lời giải của ví dụ trên đã sử dụng dồn biến toàn miền với dạng *SOS* là:

$$S_a(a, b, c)(b-c)^2 + S_b(a, b, c)(c-a)^2 + S_c(a, b, c)(a-b)^2 \geq 0$$

Đây là một kỹ thuật khá hiệu quả vì nó giúp ta loại bỏ một chương ngại bậc 2 là  $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ . Do đó chỉ cần chứng minh:

$$S_g(a, b, c) \geq S_g(a-x, b-x, c-x), g \in \{a, b, c\}$$

Tuy nhiên không phải lúc nào vấn đề cũng đơn giản như vậy, điều này sẽ được thể hiện rõ qua bài toán sau.

**Bài 10.3.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$  (1)

#### Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) + 3$$

$$\Leftrightarrow \sum \left( \frac{1}{bc} - \frac{2}{(a+b)(a+c)} \right) (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum a(b+c)(a^2 + ab + ac - bc)(b-c)^2 \geq 0$$

Đến đây, các bạn có thể nhận thấy ngay rằng kỹ thuật ở bài trước không còn tác dụng gì trong bài toán này. Vì vậy, chúng ta cần đến một kiểu biến đổi thích hợp hơn. Hãy chú ý rằng, trong phương pháp *EMV*, các đại lượng  $a-b, b-c, c-a$  xuất hiện càng nhiều thì phương pháp càng hiệu quả.

Với tư tưởng đó, chúng ta bắt đầu biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \sum a(b+c)(a^2+ab+ac-bc)(b-c)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2\sum a^3(b+c)(b-c)^2 - \sum a(b+c)(a-b)(a-c)(b-c)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2\sum a^3(b+c)(b-c)^2 + (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Thật may mắn là từ biến đổi trên ta có thể thấy rằng bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Nhận xét:** Biến đổi về biểu thức có chứa  $(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$  là một ý tưởng rất đẹp và hiệu quả, các bạn có thể thấy rõ độ mạnh của biểu thức trong đánh giá  $\approx 0$ . Và các bạn sẽ thấy rõ hơn nữa vai trò của nó khi chúng ta quay trở lại bất đẳng thức Iran.

**Bài 10.4. [Iran TST 1996]** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right] \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Có thể nói, bài toán trên là một trong những bất đẳng thức được nghiên cứu nhiều nhất với rất nhiều lời giải. Và thật “ngạc nhiên” khi bài toán này cũng không nằm ngoài phạm vi ảnh hưởng của *EMV*.

Đầu tiên, chúng ta sẽ biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$\begin{aligned} \sum \frac{bc+ca+ab}{(b+c)^2} - \frac{9}{4} &= \sum \frac{4b(a-b)+4c(a-c)+(b-c)^2}{4(b+c)^2} \\ &= \sum (b-c)\left(\frac{c}{(c+a)^2} - \frac{b}{(b+a)^2}\right) + \frac{1}{4} \sum \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} = \sum \left(\frac{bc-a^2}{(a+b)^2(a+c)^2} + \frac{1}{4(b+c)^2}\right)(b-c)^2 \\ &= \sum \frac{(a-b)(a-c)(a^2+bc+3ab+3ac)}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}(b-c)^2 + \sum \frac{bc(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2} \\ &= \sum \frac{bc(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2} - \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy bất đẳng thức (1)} &\Leftrightarrow \sum \frac{bc(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2} \geq \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2} \\ &\Leftrightarrow 4\sum bc(b^2-c^2)^2 \geq (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \end{aligned}$$

Vậy rõ ràng, ta chỉ cần xét bài toán khi một biến bằng 0 và trường hợp này đã được chứng minh ở phần trước. Không dừng lại ở đây, nhìn vào phép biến đổi nêu trên ta thấy rằng hoàn toàn có thể làm chặt bất đẳng thức thêm nữa:

**Bài 10.5.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{15(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}$$

**Chứng minh**

Từ kết quả trên, ta chỉ cần chứng minh với  $c = 0$ :

$$ab \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{15(a-b)^2}{4(a+b)^2} \Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

**Chú ý:** Cách trình bày trên là để thể hiện tư tưởng của *EMV*, ngoài ra các bạn có thể trực tiếp thấy rằng bất đẳng thức tương đương với:

$$[ab(a+b)^2 - 4(a-c)^2(b-c)^2](a-b)^2 + ca(c^2 - a^2)^2 + bc(b^2 - c^2)^2 \geq 0$$

Điều này thì hiển nhiên đúng do:  $a \geq a - c \geq 0, b \geq b - c \geq 0$  (khi giả sử  $a \geq b \geq c$ )

Qua các bài toán trên, ta có thể thấy được hiệu quả của phương pháp *EMV* trong chứng minh bất đẳng thức đối xứng ba biến. Tuy nhiên, bất đẳng thức hoán vị mới là ứng dụng lớn nhất của *EMV*.

**Bài 10.6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh:  $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$

**Chứng minh**

Trước tiên, muốn sử dụng kỹ thuật dồn biến toàn miền, ta phải loại bỏ điều kiện bằng cách thuần nhất hóa bất đẳng thức hay đưa bài toán trở thành:

$$\text{Cho } a, b, c \geq 0. \text{ Chứng minh rằng: } a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow 8\sum a^3 - 6abc - 3\sum bc(b+c) + 27\sum bc(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(a, b, c) = \sum (a + 4b + 4c)(b - c)^2 + 27(a - b)(b - c)(c - a) \geq 0$$

Rõ ràng ta có:  $f(a, b, c) \geq f(a - x, b - x, c - x), \forall x \in [0, \min\{a, b, c\}]$

$$\text{Vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi } c = 0: a^2b \leq \frac{4}{27}(a+b)^3$$

$$\text{Áp dụng AM - GM ta có: } a^2b = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \leq 4 \left( \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}(a+b)^3$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$  hoặc  $a = 2, b = 1, c = 0$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Trong quá trình dồn biến toàn miền trong bài này, xuất hiện một biểu thức đáng chú ý là  $(a-b)(b-c)(c-a)$ . Vai trò của nó chính là làm mất tính hoán vị trong phần còn lại của bất đẳng thức, dẫn đến việc biến đổi về dạng *SOS* thuận lợi hơn.



ở biên. Tuy nhiên, biên trong bài toán này liệu có giống với các bài toán trước không? Chúng ta sẽ cùng nhau xem xét vấn đề này.

Trước hết, ta thử với  $x = k = \min\{a, b, c\}$  tức cho một biến bằng 0, chẳng hạn  $c = 0$ .

Khi đó:  $f(a, b, 0) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ . Không thể có kết luận gì về max trong trường hợp này.

Ta nhận thấy rằng, khi ta cho biến  $c = 0$  sẽ khiến  $a = b$  vì  $0 = c \geq |a - b|$ , và khi đó  $f(a, b, c) = 2$ . Việc đó đã làm biểu thức  $f(a, b, c)$  yếu đi rất nhiều, thể hiện ở việc không thể tìm được max  $f(a, b, 0)$ .

Do vậy chúng ta cần tìm một biên thích hợp hơn. Chú ý rằng, khi  $a = \max\{a, b, c\}$  thì điều kiện cần và đủ để  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến) là  $a \leq b + c$ . Do vậy ta nhận thấy ngay rằng  $b + c$  chính là biên của biến  $a$ . Từ đó, ta bắt đầu quá trình đẩy  $a$  về  $b + c$ .

Xét đẳng thức:  $a - x = b - x + c - x \Leftrightarrow x = b + c - a \geq 0$

Do đó ta nghĩ đến việc cho  $x = k = b + c - a$ , tức là cho  $a = b + c$ . Khi đó:

$$f(b + c, b, c) = 1 + \frac{b}{2c + b} + \frac{c}{2b + c} = 2 - \frac{3bc}{(2b + c)(2c + b)} \leq 2$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b, c = 0$ . Vậy  $\max f(a, b, c) = 2$

**Bài 10.10.** Cho  $a, b, c \in [2, 3]$ . Chứng minh rằng:

$$(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 6 \left( \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \right) \quad (1)$$

### Chứng minh

Để thực hiện phép dồn biến toàn miền, trước hết ta phải biến đổi điều kiện đề bài cho thích hợp. Chú ý rằng với mọi  $x, y, z \in [2, 3]$  thì  $x + y \geq z, 3x \geq 2y$ . Do vậy, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với điều kiện  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn bất đẳng thức ràng buộc  $3 \min\{a, b, c\} \geq 2 \max\{a, b, c\}$  (\*). Khi đó,

$$(1) \Leftrightarrow \sum \left( \frac{1}{bc} - \frac{3}{(a+b)(a+c)} \right) (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum a(b+c)(a^2 + ab + ac - 2bc)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum a^2(3a - b - c)(b+c)(b-c)^2 - 2 \sum a(b+c)(a-b)(a-c)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum a^2(3a - b - c)(b+c)(b-c)^2 + 2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Đặt  $f(a, b, c) = VT(2)$  và giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ .

Ta sẽ chứng minh:  $f(a, b, c) \geq f(a - x, b - x, c - x)$ , trong đó  $(a - x, b - x, c - x)$  lập thành 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện (\*).

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , ta có  $(b - x) + (c - x) \geq (a - x)$  và  $3(c - x) \geq 2(a - x)$ ,

tức là  $x \in [0, 3c - 2a]$ . Do đó ta chỉ cần xét trường hợp  $3c = 2a$ .

Việc hoàn thiện chứng minh xin dành cho bạn đọc.



**Bài 10.11:** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$  (1)

**Chứng minh**

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow 7\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 6\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow 7(a-b)(b-c)(c-a) + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0$

Từ đó, ta chỉ cần minh bất đẳng thức với  $c = a + b$ , tức là:

$7ab(b-a) + (a+b)(a-b)^2 + a^3 + b^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^3 + 2b^3 - 7ab^2 + 7a^2b \geq 0$

$\Leftrightarrow 2b\left(b - \frac{7}{4}a\right)^2 + \frac{7}{8}a^2b + 2a^3 \geq 0$ . Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$

**Nhận xét:** Sử dụng *EMV* ta dễ dàng giải quyết được bài toán tổng quát:

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(k+1)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq k\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) + 3$$

**Bài 10.12.** Cho  $a, b, c$  là độ dài cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

Chứng minh rằng:  $9 \leq \frac{a+5b}{b+c} + \frac{b+5c}{c+a} + \frac{c+5a}{a+b} \leq 9,5$  (1)

**Chứng minh**

Ta chứng minh:  $\frac{a+5b}{b+c} + \frac{b+5c}{c+a} + \frac{c+5a}{a+b} \geq 9 \Leftrightarrow \sum (b+c)(b-c)^2 \geq 10(a-b)(b-c)(c-a)$

Dễ dàng nhận ra rằng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $a = b + c$ , tức là:

$$(b+c)(b-c)^2 + (2b+c)c^2 + (b+2c)b^2 \geq 10bc(c-b)$$

$$\Leftrightarrow 2b^3 + 11b^2c - 9bc^2 + 2c^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2c\left(c - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}b^2c + 2b^3 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Mặt khác:  $\frac{a+5b}{b+c} + \frac{b+5c}{c+a} + \frac{c+5a}{a+b} = \sum \frac{(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)} + \frac{5(a-b)(b-c)(c-a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = f(a, b, c)$

Dễ thấy  $f(a, b, c) \leq f(c, b, a)$  nếu  $a \leq b \leq c$ . Do vậy ta chỉ cần xét khi  $a \geq b \geq c$ .

Khi đó hiển nhiên:  $f(a, b, c) \leq f(a-x, b-x, c-x)$ ,  $\forall x \in [0, b+c-a]$ .

Từ đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $a = b + c$ , tức là:

$$\frac{6b+c}{b+c} + \frac{b+5c}{2c+b} + \frac{6c+5b}{2b+c} \leq 9,5 \Leftrightarrow bc(b+11c) \geq 0. \text{ Bất đẳng thức được chứng minh.}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b, c=0$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Chắc hẳn các bạn đều đã nhận sự điều rất thú vị ở bài toán này, đó chính là tính 2 chiều trong đánh giá lại được giải quyết trọn vẹn bằng **EMV**.

**Bài 10.13.** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + a + b + c$  (1)

### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - \frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{a} - \frac{c^2}{b}\right) + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} - 2(a+b+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{abc} + \frac{(b+c)(b-c)^2}{bc} + \frac{(a+c)(a-c)^2}{ac} + \frac{(b+a)(b-a)^2}{ba} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a-b)(b-c)(c-a) + \frac{a(b+c)(b-c)^2 + b(a+c)(a-c)^2 + a(b+a)(b-a)^2}{a+b+c} \geq 0 \quad (2)$$

Giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Khi đó:  $\frac{a(b+c)}{a+b+c} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b+c-2x}}$ ,  $\forall x \in [0, a+b-c]$

và các bất đẳng thức tương tự, suy ra chỉ cần chứng minh (2) với  $c = a+b$ , tức là:

$$3ab(b-a) + \frac{a^3(2b+a) + b^3(2a+b) + (a+b)^2(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^3b - a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - ab - b^2)^2 + 2ab^3 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$

**Nhận xét:** Sử dụng **EMV** ta dễ dàng giải quyết được bài toán tổng quát:

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(k+1)\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq k\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right) + a + b + c$$

**Bài 10.14.** Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

Chứng minh rằng:  $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + 20 \leq 16\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$  (1)

### Chứng minh

Chúng ta nhận thấy rằng, đẳng thức của (1) không xảy ra khi  $a=b=c$ . Do vậy rõ ràng những đường lối biến đổi đã ta đã từng dùng không có tác dụng. Và vì vậy, ở bài toán này, chúng ta sẽ biến đổi theo một cách khác.

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} \leq \frac{8(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

Vì  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác nên  $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca \leq 0$ , do đó

nếu  $a \geq b \geq c$  thì bất đẳng thức đúng. Xét  $c \geq b \geq a$ , bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)}{ab+ac+bc} \geq 8(a-b)(b-c)(c-a)$$

Xét  $0 \leq x \leq a+b-c$  và  $f(x) = (a+b-2x)(b+c-2x)(a+c-2x) +$

$$+ \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \left( 3x - a - b - c + \frac{1}{\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{c-x}} \right)$$

Để thấy  $f(0) = VT(1)$ . Mặt khác ta có:

$$f'(x) = -24x^2 + 16(a+b+c)x - 2(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 3bc)$$

$$+ \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \left[ 3 - \frac{\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(b-x)^2} + \frac{1}{(c-x)^2}}{\left( \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{c-x} \right)^2} \right]$$

$$\leq -24x^2 + 16(a+b+c)x - 2(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 3bc) + \frac{4}{3}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\leq -24(a+b-c)^2 + 16(a+b+c)(a+b-c)$$

$$- 2(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 3bc) + \frac{4}{3}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$= \frac{2}{3}[-59c^2 + 59c(a+b) - 11(a^2 + b^2) - 37ab] = \frac{2}{3}[-59(c-b)(c-a) - 11(a-b)^2] \leq 0$$

Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trong với  $0 \leq x \leq a+b-c$ , nên  $f(0) \geq f(a+b-c)$  do đó ta chỉ cần chứng minh (1) với  $c = a+b$ , tức là chứng minh:

$$\frac{(a+b)(2a+b)(2b+a)}{a^2 + b^2 + 3ab} 4ab \geq 8ab(b-a) \Leftrightarrow 4a^3 + 3a^2b + 11ab^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b, c = 0$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Có thể nói, sức mạnh của dồn biến toàn miền đã được thể hiện đầy đủ trong bài toán trên. Các bạn hãy để ý rằng, bước đánh giá  $f(a, b, c) \geq f(a-x, b-x, c-x)$  ở các bài toán trước đều khá lỏng, còn trong bài toán này, độ chặt của đánh giá thể hiện ở quá trình chứng minh  $f'(x) \leq 0$ .

#### XI. MỘT SỐ KIỂU DÒN BIẾN ĐẶC BIỆT

Một trong những đặc điểm hấp dẫn nhất của phương pháp dồn biến là tính đa dạng trong kỹ thuật xử lý. Và điều này sẽ được thể hiện rõ qua một số bài toán được giải bằng những kỹ thuật dồn biến đặc biệt.

**Bài 11.1.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x + y + z = 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 3 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Trước hết ta sẽ chứng minh bổ đề:

Nếu  $ab \geq 0$ ;  $a, b, a+b \geq -1$  thì  $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$

Thật vậy, bình phương 2 vế bất đẳng thức trên

$$2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 2+a+b+2\sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow (1+a)(1+b) \geq 1+a+b \Leftrightarrow ab \geq 0$$

Trở lại bài toán, trong 3 số  $x+y^2, y+z^2, z+x^2$  phải tồn tại ít nhất hai số hạng cùng dấu, nên không mất tính tổng quát ta giả sử  $(x+y^2)(y+z^2) \geq 0$ . Khi đó, theo nhận xét trên thì

$$\begin{aligned} VT(1) &\geq 1 + \sqrt{1+x+y^2+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} = 1 + \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2})^2 + y^2} + \sqrt{(\sqrt{1+z})^2 + x^2} \\ &\geq 1 + \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + (x+y)^2} = 1 + \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + z^2} \end{aligned}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh  $(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + z^2 \geq 4$

$$\Leftrightarrow 2z^2 + 2\sqrt{1-z^3} \geq 2 \Leftrightarrow 1-z^2 \geq 1-2z^2+z^4 \Leftrightarrow z^2(z^2-1) \leq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì  $-1 \leq z \leq 1$ , ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z=0$ .

**Bài 11.2.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$ ;  $a+b+c+d=3$ . Tìm max:

$$ab(a+2b+3c) + bc(b+2c+3d) + cd(c+2d+3a) + da(d+2a+3b)$$

**Giải**

Dễ dàng chứng minh:  $f(a, b, c, d) \leq f(a, b, c, d, 0)$  ( $d = \min\{a, b, c, d\}$ )

Bài toán trở thành: Cho  $a, b, c, d \geq 0$ ;  $a+b+c+d=3$ . Tìm max:

$$f(a, b, c) = ab(a+2b+3c) + bc(b+2c) = (2a+c)b^2 + (a+2c)(a+c)b$$

Ta có:  $f(a, b, c) - f(a+c, b, 0) = bc(a+c-b)$ ;  $f(a, b, c) - f(0, b, a+c) = ab(b-a-c)$

Do đó:  $f(a, b, c) \leq \max\{f(a+c, b, 0), f(0, b, a+c)\}$

Mặt khác ta có:  $f(a+c, b, 0) = 2(a+c)b^2 + (a+c)^2b = 2(3-b)b^2 + (3-b)^2b = g(b)$

$$f(0, b, a+c) = (a+c)b^2 + 2(a+c)^2b = (a+c)(3-a-c)^2 + 2(a+c)^2(3-a-c) = g(a+c)$$

trong đó  $g(x) = 9x - x^3 = -(x-\sqrt{3})^2(x+2\sqrt{3}) + 6\sqrt{3} \leq 6\sqrt{3}$ ,  $x \geq 0$ .

Do đó:  $f(a, b, c) \leq \max\{f(a+c, b, 0), f(0, b, a+c)\} = 6\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=3-\sqrt{3}, b=\sqrt{3}, c=d=0$  và các hoán vị. Vậy  $\max f(a, b, c) = 6\sqrt{3}$

**Bài 11.3.** Cho  $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ . Chứng minh rằng:  $8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 5\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) + 9$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } f(x, y, z) = 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 5\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) - 9.$$

Giả sử  $x = \max\{x, y, z\}$ . Ta có:

$$f(x, y, z) - f(x, \sqrt{xz}, z) = 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - 2\sqrt{\frac{x}{z}}\right) - 5\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} - 2\sqrt{\frac{z}{x}}\right) = \frac{(y - \sqrt{xz})^2 (8x - 5z)}{xyz} \geq 0$$

$\Rightarrow f(x, y, z) \geq f(x, \sqrt{xz}, z)$ . Bây giờ đặt  $t = \sqrt{\frac{x}{z}}, 1 \leq t \leq 2$  thì:

$$\begin{aligned} f(x, \sqrt{xz}, z) &= 8\left(2\sqrt{\frac{x}{z}} + \frac{z}{x} - 3\right) - 5\left(2\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{x}{z} - 3\right) = 8\left(2t + \frac{1}{t^2} - 3\right) - 5\left(\frac{2}{t} + t^2 - 3\right) \\ &= \frac{8}{t^2}(t-1)^2(2t+1) - \frac{5}{t}(t-1)^2(t+2) = \frac{(t-1)^2(8+6t-5t^2)}{t^2} = \frac{(t-1)^2(4+5t)(2-t)}{t^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$  hoặc  $(x, y, z) = \left(2, 1, \frac{1}{2}\right); \left(1, \frac{1}{2}, 2\right); \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$

## XII. ĐỊNH LÝ DÒN BIẾN TỔNG QUÁT [GMV – GENERAL MIXING VARIABLES]

Trong mục này, chúng tôi sẽ giới thiệu định lý **GMV** (General Mixing Variables) dùng để dòn biến cho  $n$  số. Đây là một định lý rất tổng quát, bao gồm gần như toàn bộ các khả năng dòn biến.

1. Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

**Định nghĩa 1:**

- Không gian  $\mathbb{R}^n$  là tập hợp các bộ thứ tự  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i$ .
- Một dãy  $\{x_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m})\}$  trong  $\mathbb{R}^n$  gọi là hội tụ về  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  nếu từng dãy  $x_{i,m}$  hội tụ về  $z_i$  khi  $m \rightarrow \infty, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .
- Cho  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Một hàm số  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gọi là liên tục trên  $D$  nếu: với mọi dãy  $\{x_m\} \subset D$  và với mọi  $z \in D$  sao cho  $\{x_m\}$  hội tụ về  $z$  thì ta đều có:  $f(x_m)$  hội tụ về  $f(z)$ .

**Định nghĩa 2:** Cho  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Ta nói:

- $D$  đóng nếu với mọi dãy  $\{x_m\} \subset D$  và với mọi  $z \in \mathbb{R}^n$  sao cho  $\{x_m\}$  hội tụ về  $z$  thì ta đều có  $z \in D$ .
- $D$  bị chặn nếu tồn tại số thực  $M$  sao cho:  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  thì  $|x_i| \leq M, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Chúng ta có kết quả căn bản sau đây (sẽ chứng minh ở cuối mục này).

**Định lý Weierstrass:** Cho  $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$  và  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục. Thì  $f$  đạt giá trị nhỏ nhất trên  $D$ , nghĩa là tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho:  $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$ . Chúng ta cũng có kết quả tương tự với giá trị lớn nhất.

• **Bình luận:** Định lý này là một mở rộng của một kết quả quen thuộc: "Cho  $[a, b]$  là 1 khoảng đóng trong  $\mathbb{R}$  và  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục thì  $f$  có giá trị nhỏ nhất trên  $[a, b]$ ". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng.

**2. Định lý GMV:** Ta sẽ luôn giả thiết rằng:

- $D$  là 1 tập con trong  $\mathbb{R}^n$ , và  $\Lambda$  là 1 tập con đóng của  $D$ .
- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số liên tục liên tục sao cho  $f$  có giá trị nhỏ nhất trên  $\Lambda$ .
- $T_1, \dots, T_k: D \rightarrow D$  là các phép biến đổi sao cho  $T_1(x) = \dots = T_k(x) = x, \forall x \in \Lambda$ .

Ta sẽ đặt ra các tiêu chuẩn để giá trị nhỏ nhất của  $f$  trên  $\Lambda$  cũng chính là giá trị nhỏ nhất của  $f$  trên  $D$ . Ta có

**Định lý GMV1:** Nếu

- $f(x) \geq \min_{j=1,k} \{f(T_j(x))\}, \forall x \in D \setminus \Lambda$
  - $\forall j = \overline{1, k}, \forall x \in D$  ta có  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_j^m(x) \in \Lambda$ , trong đó  $T_j^0(x) = x, T_j^m(x) = T_j(T_j^{m-1}(x))$
- thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ .

Hơn nữa, đẳng thức không xảy ra trên  $D \setminus \Lambda$  nếu  $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

**Định lý GMV2:** Nếu

- $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ .
- $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ , hơn nữa đẳng thức không xảy ra trên  $D \setminus \Lambda$ .

**Định lý GMV3:** Nếu

- $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ .
- $f(x) \geq \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$
- Tồn tại các hàm số  $h_j$  liên tục  $D \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn:  $h_j(x) > h_j(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ .

**Chứng minh**

**Chứng minh GMV1:** Lấy  $x \in D$  tùy ý. Ta có:  $f(x) \geq \min_{j=1,k} f(T_j(x))$  và bằng quy nạp suy ra  $f(x) \geq \min_{j=1,k} f(T_j^m(x)), \forall x \in D$ . Do  $f$  liên tục và  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_j^m(x) \in \Lambda$  nên:

$$f(x) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \min_{j=1,k} f(T_j^m(x)) \right) = \min_{j=1,k} f \left( \lim_{m \rightarrow \infty} T_j^m(x) \right) \geq \min_{y \in \Lambda} f(y)$$

Hơn nữa, nếu  $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x))$  thì do  $f(T_j(x)) \geq \min_{y \in \Lambda} f(y)$  nên  $f(x) > \min_{y \in \Lambda} f(y)$ .

**Chứng minh GMV2:** Do Định lý *Weierstrass*, tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D.$$

Nếu  $x_0 \notin \Lambda$  thì  $f(x_0) > \min_{j=1,k} f(T_j(x_0))$ , mâu thuẫn. Vậy  $x_0 \in \Lambda$  và ta có đpcm.

**Chứng minh GMV3:** Lấy  $y_0 \in \Lambda$  sao cho  $f(y_0) = \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}$ . Giả sử phản chứng rằng tồn tại  $z \in D$  sao cho  $f(z) < f(y_0)$ . Do  $h_j(x)$  bị chặn dưới trên  $D$  nên bằng cách cộng thêm một hằng số khi cần, ta có thể giả sử  $h_j(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall j=1, \dots, k$ .

Chọn  $\varepsilon > 0$  đủ nhỏ ta có:  $f(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^k h_j(z) < f(y_0)$ .

Đặt  $g(x) = \min_{j=1,k} \{f(x) + \varepsilon h_j(x)\}, \forall x \in D$  thì  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và hơn nữa

$$g(x) > \min_{j=1,k} g(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda \text{ và } g(z) < f(y_0) \leq \min_{y \in \Lambda} \{g(y)\}.$$

Điều này mâu thuẫn với định lý 2.

• **Bình luận:** Tuy hình thức phát biểu ngắn gọn nhưng GMV có tầm ứng dụng cực kì rộng rãi. Cứ mỗi một (hay một vài) phép biến đổi  $T$  thích hợp là ta lại có một tiêu chuẩn dồn biến. Chẳng hạn, ta có ngay hai hệ quả sau đây.

**Hệ quả 1:** [Phạm Kim Hùng, SMV-Strongly Mixing Variables] Cho:

- $D \subset \mathbb{R}^n$  là một tập đóng, bị chặn và  $s_0 = (s, s, \dots, s) \in D$ .
- Phép biến đổi  $T$  như sau: với mỗi bộ  $n$  số  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ , ta chọn ra số lớn nhất và số nhỏ nhất rồi thay thế bằng trung bình cộng của chúng. Giả sử rằng  $T: D \rightarrow D$ .
- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số liên tục, đối xứng thỏa mãn:  $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$ .

Khi đó:  $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$ .

**Chứng minh:** Chọn  $h(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2$  thì dễ thấy  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và

$h(a) > h(T(a)), \forall a \in D \setminus \{s_0\}$ . Áp dụng **GMV3** ta có đpcm.

• **Ghi chú:**

Ta cũng có thể áp dụng **GMV1**, khi đó chỉ cần kiểm tra với mọi  $a \in D$  thì

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T^m(a) = s_0.$$

Sự kiện này khá rõ ràng về mặt trực giác, và đề nghị bạn đọc tự chứng minh. Với cách làm này, chúng ta có thể bỏ qua giả thiết  $D$  đóng và bị chặn (nghĩa là Hệ quả 1 ở trên đúng với mọi tập con  $D$  của  $\mathbb{R}^n$  sao cho  $T(D) \subset D$ ).

**Hệ quả 2:** [Đinh Ngọc An, UMV – Undefined Mixing Variables] Cho:

•  $D \subset \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = \text{const} \right\}$ . Gọi  $\Lambda$  là tập hợp các phần tử trong  $D$

có  $t$  thành phần bằng 0 và  $n - t$  thành phần bằng nhau ( $t \geq 0$ ).

•  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục, đối xứng thỏa mãn:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \min \left\{ f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \dots, a_n\right), f(0, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n) \right\}$$

Thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$

**Chứng minh:** Chọn 2 phép biến đổi  $T_1, T_2 : D \rightarrow D$  như sau:  $T_1(a) = T_2(a) = a, \forall a \in \Lambda$  và với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Lambda$ , chọn ra 2 chỉ số  $i \neq j$  sao cho  $a_i = \min\{a_t > 0, t = 1, \dots, n\}$  và  $a_j = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , ứng với  $T_1$  ta thay  $a_i, a_j$  bởi trung bình cộng của chúng, ứng với  $T_2$  ta thay  $a_i, a_j$  bởi  $(0, a_i + a_j)$ . Thì ta có  $f(a) \geq \min\{f(T_1(a)), f(T_2(a))\}, \forall a \in D$ .

Chọn  $h_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2$  và  $h_2(a_1, a_2, \dots, a_n) = -\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  thì  $h_1, h_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$

liên tục và  $h_j(a) > h_j(T_j(a)), \forall a \in D \setminus \{s_0\}, \forall j = 1, 2$ . Áp dụng **GMV3** ta có điều phải chứng minh.

• **Ghi chú:** Ta cũng có thể kiểm tra với mọi  $a \in D$  thì  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_1^m(a) = (s, s, \dots, s)$  và

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_2^m(a) = (0, \dots, 0, r, \dots, r) \text{ rồi áp dụng GMV1.}$$

3. Sau đây chúng ta sẽ dẫn ra vài ứng dụng cụ thể.

**Bài 12.1. (Bất đẳng thức AM – GM)** Cho  $n$  số thực không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Chứng minh rằng:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

### Chứng minh

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể giả sử  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$  và chứng minh  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ .

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi  $x_i \leq n, \forall i$ .

Xét  $D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in [0, n], x_1 x_2 \dots x_n = 1\}$  thì dễ thấy  $D$  đóng và bị chặn.

Xét  $\Lambda = \{x_0 = (1, 1, 1, \dots, 1)\}$ . Xét  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục như sau:



Với mỗi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  thì  $f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ .

Xét  $T: D \setminus \Lambda \rightarrow D$  như sau: Với mỗi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \setminus \Lambda$  thì tồn tại  $x_i \neq x_j$  và ta đặt  $T(x)$  là bộ thu được từ  $x$  sau khi thay  $x_i$  và  $x_j$  bởi trung bình nhân của chúng, khi đó dễ thấy  $f(x) - f(T(x)) = (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 > 0$ . Vậy ta có thể áp dụng GMV2 để suy ra  $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D$ , hơn nữa dấu " $=$ " chỉ xảy ra khi  $x = x_0$ .

**Bài 12.2.** Cho  $k > 0$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  và  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ .

Chứng minh rằng:  $(x_2 x_3 \dots x_n)^k + (x_1 x_3 \dots x_n)^k + \dots + (x_1 x_2 \dots x_{n-1})^k \leq \max \left\{ n, \left( \frac{n}{n-1} \right)^k \right\}$

### Chứng minh

Đặt  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 x_3 \dots x_n)^k + (x_1 x_3 \dots x_n)^k + \dots + (x_1 x_2 \dots x_{n-1})^k$ .

Không giảm tổng quát, giả sử  $x_1 \leq x_2$ . Khi đó  $x_1 = s - t, x_2 = s + t$  với  $t \in [0, s]$ .

Xét  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(t) = A[(s+t)^k + (s-t)^k] + B(s^2 - t^2)^k$

với  $A = (x_3 \dots x_n)^k$ ,  $B = (x_4 x_5 \dots x_n)^k + (x_3 x_5 \dots x_n)^k + \dots + (x_3 x_4 \dots x_{n-1})^k$ .

Ta có:  $g'(t) = Ak[(s+t)^{k-1} - (s-t)^{k-1}] - 2Bkt(s^2 - t^2)^{k-1} \geq 0$

$$\Leftrightarrow h(t) = (s-t)^{1-k} - (s+t)^{1-k} - \frac{2Bt}{A} \geq 0$$

$$h'(t) = (k-1)[(s-t)^{-k} + (s+t)^{-k}] - \frac{2B}{A}, \quad h''(t) = k(k-1)[(s-t)^{-k-1} - (s+t)^{-k-1}] > 0$$

Vậy  $h(t)$  lồi, hơn nữa  $0 = h(0), \lim_{t \rightarrow s} h(t) = +\infty$ . Do đó, hoặc là  $h(t)$  sẽ luôn dương trên  $(0, s)$ , hoặc là  $h(t)$  đổi dấu từ âm sang dương trên  $(0, s)$ . Mà  $g'(t)$  cùng dấu với  $h(t)$  nên ta suy ra  $g(t) \leq \max\{g(0), g(s)\}$ . Từ đó, ta có:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max \left\{ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\right), f(0, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) \right\}$$

Áp dụng **UMV** ta có điều phải chứng minh.

• **Nhận xét:** Ta thấy rằng nếu giữa các biến chỉ có một đẳng thức ràng buộc thì ta có thể cố định  $(n-2)$  biến và cho 2 biến biến thiên vẫn có thể bảo toàn ràng buộc đó. Khi đó, Hệ quả 3 cho phép chúng ta thay vì quan sát sự biến thiên của cả  $n$  biến, có thể chỉ cần quan sát sự biến thiên của 2 biến. Trong trường hợp giữa các biến có nhiều đẳng thức ràng buộc hơn thì số biến cho biến thiên phải nhiều hơn để bảo toàn các ràng buộc đó. Nếu như phần lớn các bất đẳng thức mà chúng ta đã gặp chỉ có một đẳng thức ràng buộc các biến thì các bất đẳng thức mà giữa các biến có nhiều đẳng thức ràng buộc vẫn là một dạng toán lạ và nói chung là rất khó. Chúng ta dẫn ra hai bài toán như vậy.

**Bài 12.3.** Cho  $n \geq 3$ , xét tập hợp  $D$  gồm tất cả các bộ  $n$  số thực dương thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$ ,  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = B$ . trong đó  $A, B$  là các hằng số dương cho trước thỏa mãn  $nB > A^2$ . Chứng minh rằng:

- a) Trong  $D$  có duy nhất một phần tử  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  sao cho  $b_2 = b_3 = \dots = b_n$ .  
 b) Biểu thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$  đạt giá trị lớn nhất trong  $D$  khi và chỉ khi  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một hoán vị của  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

### Chứng minh

- a) Giả sử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  thỏa  $a_2 = a_3 = \dots = a_n$ , để  $a \in D$  ta cần  $a_1, a_2 > 0$ ,  
 $a_1 + (n-1)a_2 = A$ ,  $a_1^2 + (n-1)a_2^2 = B$ . Suy ra  $a_2$  là nghiệm dương của phương trình  
 $(A - (n-1)a_2)^2 = B - (n-1)a_2^2 \Leftrightarrow n(n-1)a_2^2 - 2A(n-1)a_2 - B = 0$ .  
 Phương trình này có 1 nghiệm dương duy nhất và ta có đpcm.

b)

- **Bước 1:** Ta chứng minh cho trường hợp  $n = 3$ . Sử dụng hằng đẳng thức

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1 a_2 a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)[3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (a_1 + a_2 + a_3)^2]$$

Suy ra  $f(a_1, a_2, a_3) = 3a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{2}A(3B - A)$ , cho nên  $f(a_1, a_2, a_3)$  đạt giá trị lớn nhất trên  $D$  khi và chỉ khi có 2 trong 3 biến  $a_i$  bằng nhau (các bạn có thể chứng minh điều này bằng cách khảo sát đưa về khảo sát hàm một biến – xem chuyên đề phương pháp ABC của Nguyễn Anh Cường ở chương sau).

- **Bước 2:** Bây giờ xét trường hợp  $n$  tổng quát. Lấy  $\Lambda$  là tập hợp tất cả các bộ  $n$  số trong  $D$  sao cho có  $(n-1)$  số bằng nhau. Xét phép biến đổi  $T: D \setminus \Lambda \rightarrow D$  như sau. Giả sử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Lambda$ , ta luôn có thể chọn ra 3 số, mà không giảm tổng quát có thể giả sử là  $(a_1, a_2, a_3)$ , sao cho chúng đôi một phân biệt. Khi đó, tồn tại duy nhất bộ 3 số thực dương  $(e_1, e_2, e_3)$  sao cho  $e_1 + e_2 + e_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ,  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ . Phép biến đổi  $T$  là thay thế  $(a_1, a_2, a_3)$  bởi  $(e_1, e_2, e_3)$ . Rõ ràng  $T(a) \in D$ , và áp dụng trường hợp  $n = 3$  ta được  $f(T(a)) > f(a)$ . Suy ra giá trị nhỏ nhất của  $f(a)$  đạt được khi và chỉ khi  $a \in \Lambda$ .

**Bài 12.4.** Cho  $n \geq 3$ , xét tập hợp  $D$  gồm tất cả các bộ  $n$  số thực dương có tổng bằng  $A$  và có tích bằng  $B$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số dương cho trước thỏa mãn  $A^n > n^n B$ . Chứng minh rằng:

- a) Trong  $D$  có đúng 2 phần tử  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  sao cho

$$b_1 > b_2 = b_3 = \dots = b_n \text{ và } c_1 < c_2 = c_3 = \dots = c_n.$$

- b) Biểu thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$  đạt giá trị lớn nhất (tương ứng nhỏ nhất) trong  $D$  khi và chỉ khi  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một hoán vị của  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  (tương ứng  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ).

Chứng minh

a) Giả sử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  thỏa  $a_2 = a_3 = \dots = a_n$ , để  $a \in D$  ta cần  $a_1, a_2 > 0$ ,

$a_1 + (n-1)a_2 = A$ ,  $a_1 a_2^{n-1} = B$ . Suy ra  $a_2$  là nghiệm dương của phương trình

$$A - (n-1)a_2 = \frac{B}{a_2^{n-1}} \Leftrightarrow (n-1)a_2^n - Aa_2^{n-1} + B = 0. \text{ Xét đa thức } d(x) = (n-1)x^n - Ax^{n-1} + B,$$

$$d'(x) = (n-1)x^{n-2}(nx - A) \Rightarrow d(x) \text{ nghịch biến trên } \left(0; \frac{A}{n}\right) \text{ và đồng biến trên } \left(\frac{A}{n}; \infty\right).$$

Hơn nữa,  $d(0) = B > 0 > -\left(\frac{A}{n}\right)^n + B = d\left(\frac{A}{n}\right)$  nên đa thức  $d(x)$  có đúng 2 nghiệm dương,

một nghiệm thuộc  $\left(0; \frac{A}{n}\right)$  và một nghiệm thuộc  $\left(\frac{A}{n}; \infty\right)$ . Từ đó ta có đpcm.

b)

• **Bước 1:** Ta chứng minh cho trường hợp  $n = 3$ . Trước hết, ta sẽ chứng tỏ với mọi  $a = (a_1, a_2, a_3) \in D$  thì  $a_i \in [c_1, b_1]$  với  $i = 1, 2, 3$ . Ta chứng minh với  $i = 1$  là đủ.

$$\text{Ta có: } \frac{4B}{a_1} = 4a_2a_3 \leq (a_2 + a_3)^2 = (A - a_1)^2 \Leftrightarrow a_1(A - a_1)^2 \geq 4B$$

Đa thức  $g(x) = x(A-x)^2 - 4B$  có 3 nghiệm, trong đó 2 nghiệm nhỏ hơn là  $b_1$  và  $c_1$

Thật vậy, vì  $b_1 + 2b_2 = A, b_1b_2^2 = B \Rightarrow (A - b_1)^2 = 4b_2^2 = \frac{4B}{b_1}$  nên  $b_1$  là nghiệm của  $g(x)$

và tương tự với  $c_1$ , hơn nữa theo định lý **Vi-et** tổng 3 nghiệm là  $2A > 2b_1 + c_1$  (nếu

$$\text{ngược lại } 2A \leq 2b_1 + c_1 \Rightarrow c_1 \geq 2A - 2b_1 = 4b_2 \Rightarrow c_2 = \frac{b_1b_2^2}{c_1c_2} \leq \frac{b_1b_2^2}{c_1^2} \leq \frac{b_1}{16}, \text{ mâu thuẫn}$$

với  $3c_2 \geq c_1 + 2c_2 = A > b_1$ ) nên nghiệm thứ ba lớn hơn  $b_1$ .

Vậy  $g(a_1) \geq 0 \Leftrightarrow a_1 \in [c_1, b_1]$ . Đặc biệt, ta có  $b_2, c_2 \in [c_1, b_1] \Rightarrow c_1 < b_2 < c_2 < b_1$ .

$$\text{Bây giờ ta có } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + (a_2 + a_3)^2 - 2a_2a_3 = a_1^2 + (A - a_1)^2 - \frac{2B}{a_1}.$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = x^2 + (A-x)^2 - \frac{2B}{x} \text{ với } x \in [c_1, b_1]. \text{ Ta có: } h'(x) = \frac{2(2x^2 - Ax + B)}{x^2}$$

Như trong phần ghi chú, ta thấy phương trình  $h'(x) = 0$  có đúng 2 nghiệm dương là  $b_2$

và  $c_2$ , hơn nữa  $h'(x)$  âm trên  $(b_2, c_2)$  và dương trên  $(c_1, b_2) \cup (c_2, b_1)$ . Mặt khác, nếu

$a_1 \in \{b_1, b_2\}$  thì  $(a_1, a_2, a_3)$  là một hoán vị của  $(b_1, b_2, b_3)$  nên

$$h(b_1) = f(b_1, b_2, b_3) = h(b_2), \text{ tương tự } h(c_1) = f(c_1, c_2, c_3) = h(c_2). \text{ Từ đó suy ra}$$

$$f(c_1, c_2, c_3) \leq f(a_1, a_2, a_3) \leq f(b_1, b_2, b_3)$$

Hơn nữa, đẳng thức chỉ xảy ra khi  $(a_1, a_2, a_3)$  là một hoán vị của  $(b_1, b_2, b_3)$  hoặc  $(c_1, c_2, c_3)$  tương ứng (đpcm).

• **Bước 2:** Bây giờ xét trường hợp  $n$  tổng quát. Ta chứng minh cho trường hợp giá trị nhỏ nhất, còn trường hợp giá trị lớn nhất hoàn toàn tương tự. Lấy  $\Lambda$  là tập hợp tất cả các hoán vị của  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , nghĩa là tập hợp tất cả các bộ  $n$  số trong  $D$  sao cho có  $(n-1)$  số bằng nhau và lớn hơn số còn lại. Xét phép biến đổi  $T: D \setminus \Lambda \rightarrow D$  như sau.

Giả sử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Lambda$ , ta luôn có thể chọn ra 3 số, mà không giảm tổng quát có thể giả sử là  $(a_1, a_2, a_3)$ , sao cho không rơi vào trường hợp 2 số bằng nhau và lớn hơn số còn lại.

Khi đó, tồn tại duy nhất bộ 3 số thực dương  $(e_1, e_2, e_3)$  sao cho  $e_1 < e_2 = e_3$ .

$e_1 + e_2 + e_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ,  $e_1 e_2 e_3 = a_1 a_2 a_3$ . Phép biến đổi  $T$  là thay thế  $(a_1, a_2, a_3)$  bởi  $(e_1, e_2, e_3)$ . Rõ ràng  $T(a) \in D$ , và áp dụng trường hợp  $n=3$  ta được  $f(T(a)) > f(a)$ .

Suy ra giá trị nhỏ nhất của  $f(a)$  đạt được khi và chỉ khi  $a \in \Lambda$ .

Đó chính là điều phải chứng minh.

• Để kết thúc mục này, chúng tôi dẫn ra một chứng minh cho Định lý **Weierstrass**.

**Định nghĩa 3:** Cho 1 dãy số  $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$  (trong  $\mathbb{R}$  hoặc trong  $\mathbb{R}^n$ ). Một dãy  $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$  được gọi là một dãy con của dãy  $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$  nếu  $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$  là một dãy tăng ngặt các số nguyên dương.

\*Ví dụ:  $\{a_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$  là một dãy con của dãy  $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ . Dưới đây các cận của chỉ số sẽ được bỏ qua nếu không gây hiểu lầm.

**Bổ đề 1: [Weierstrass]** Mỗi dãy  $\{a_m\}$  bị chặn trong  $\mathbb{R}$  thì có một dãy con hội tụ.

**Chứng minh:** Sử dụng kết quả “Mọi dãy số thực đơn điệu và bị chặn thì hội tụ” thì ta chỉ cần chứng minh có một dãy con đơn điệu.

Xét tập  $T = \{m \in \mathbb{Z}^+ \mid \exists m' > m : a_{m'} \geq a_m\}$

Nếu  $T$  hữu hạn thì dãy  $\{a_m\}$  sẽ giảm kể từ 1 chỉ số nào đó. Nếu  $T$  vô hạn thì ta sẽ trích được 1 dãy con tăng. Trong cả hai trường hợp thì ta luôn có 1 dãy con đơn điệu.

**Bổ đề 2: [Weierstrass]** Mỗi dãy  $\{a_m\}$  bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$  thì có một dãy con hội tụ.

• **Chứng minh:** Xét  $\{a_m = (x_{1,m}, \dots, x_{n,m})\}$  là một dãy bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ . Khi đó dãy  $\{x_{1,m}\}$  bị chặn trong  $\mathbb{R}$  nên có 1 dãy con  $\{x_{1,m_{k_1}}\}$  hội tụ. Dãy  $\{x_{2,m_{k_1}}\}$  cũng bị chặn trong  $\mathbb{R}$  nên có 1

dãy con  $\{x_{2, m_{k_2}}\}$  hội tụ. Bằng cách lấy "dãy con của dãy con" liên tiếp như vậy, cuối cùng ta thu được dãy con  $\{a_{m_k} = (x_{1, m_k}, \dots, x_{n, m_k})\}$  mà  $\forall i = \overline{1, n}$ , ta có dãy  $\{x_{i, m_k}\}$  hội tụ trong  $\mathbb{R}$ . Điều đó cũng có nghĩa là dãy  $\{a_{m_k}\}$  hội tụ trong  $\mathbb{R}^n$ .

**Bổ đề 3:** (Tính đầy đủ của  $\mathbb{R}$ ) Cho  $A$  là 1 tập bị chặn trong  $\mathbb{R}$ . Thì tồn tại  $M \in \mathbb{R}$  sao cho:  $M \leq A$  (nghĩa là  $M \leq a, \forall a \in A$ ) và có một dãy  $\{a_k\}$  trong  $A$  hội tụ về  $M$ . Ta sẽ kí hiệu  $M = \inf A$ .

**Chứng minh:** Ta chứng minh rằng  $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a - \varepsilon \leq A$ . Giả sử ngược lại. Khi đó lấy  $x_1 \in A$  tùy ý, bằng quy nạp ta xây dựng được dãy  $\{x_m\}$  trong  $A$  sao cho

$$x_{m+1} \leq x_m - \varepsilon, \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

Khi đó ta có:  $x_m \leq x_1 - (m-1)\varepsilon, \forall m \in \mathbb{Z}^+$  và điều này mâu thuẫn với  $A$  bị chặn dưới.

Như vậy,  $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ , tồn tại  $a_m \in A$  sao cho  $a_m - \frac{1}{m} \leq A$ . Vì dãy  $\{a_m\}$  bị chặn nên có dãy con  $\{a_{m_k}\}$  hội tụ về  $M$  trong  $\mathbb{R}$ . Ta chứng minh  $M \leq A$  nữa là xong. Thật vậy, lấy  $a \in A$  bất kì thì  $a_{m_k} - \frac{1}{m_k} \leq a, \forall k \in \mathbb{Z}^+$  nên cho  $k \rightarrow \infty$  suy ra  $M \leq a$ .

**Chứng minh định lý Weierstrass:** Xét  $A = f(D)$ . Ta chứng minh  $A$  có phần tử nhỏ nhất.

Ta sẽ chỉ ra  $A$  có tính chất sau: nếu dãy  $\{a_m\}$  chứa trong  $A$  và  $a_m \rightarrow \alpha$  thì  $\alpha \in A$ . Thật vậy, theo định nghĩa ta có  $x_m \in D$  sao cho  $f(x_m) = a_m \rightarrow \alpha$ . Vì dãy  $\{x_m\}$  bị chặn (chứa trong  $D$ ) nên có dãy con  $\{x_{m_k}\}$  hội tụ về  $c$  trong  $\mathbb{R}^n$ . Vì  $D$  đóng nên  $c \in D$ . Vì  $f(x_m) \rightarrow \alpha$  nên  $f(x_{m_k}) \rightarrow \alpha$ . Mặt khác, vì  $\{x_{m_k}\} \rightarrow c$  và  $f$  liên tục nên  $f(x_{m_k}) \rightarrow f(c)$ . Vì giới hạn là duy nhất nên  $f(c) = \alpha$ .

Bây giờ, ta thấy  $A$  bị chặn dưới (vì từ lập luận trên với  $\alpha = -\infty$  ta sẽ gặp mâu thuẫn).

Do đó tồn tại  $M = \inf A$ . Do định nghĩa  $\inf$  và tính chất của  $A$  vừa chỉ ra ở trên, suy ra  $M \in A$ .

Vậy  $A$  có phần tử nhỏ nhất là  $M$ . Định lý chứng minh xong.

**XIII. NHÌN LẠI VÀ BÀI TẬP**

Các bạn thân mến, có lẽ bây giờ là lúc tạm dừng để nhìn lại hành trình vừa qua. Như chúng tôi đã nói trong VI., dồn biến đã được biết đến từ rất sớm thông qua hàm lồi và dẫn đến các kết quả tuyệt đẹp. Bất đẳng thức **Jensen** có thể xem như một tiêu chuẩn để dồn biến về tâm một cách toàn cục. Về các kết quả này, các bạn có thể tìm đọc một cách rất đầy đủ trong cuốn bất đẳng thức nổi tiếng của ba nhà toán học **Hardy – Polya – Littlewood**.

Ở trên, việc giới thiệu nhiều kỹ thuật dồn biến cho bất đẳng thức ba biến không đơn thuần chỉ là liệt kê tất cả các kỹ thuật dồn biến mà quan trọng hơn là để các bạn nắm được tư tưởng của phương pháp. Và cũng giống như nhiều phương pháp khác, có khi chúng ta không thể tiếp cận ngay bài toán bằng phương pháp dồn biến, mà cần phải biến đổi đến tình huống thích hợp. Ví dụ sau sẽ minh họa cho điều này.

**Bài 13.1. [VME0 I]** Tìm tất cả các số thực  $k$  sao cho tồn tại  $c_k > 0$  thỏa mãn:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq c_k (x+y+z)^k, \forall a, b, c > 0$$

Với các giá trị  $k$  tìm được, hãy xác định hằng số  $c_k$  tốt nhất.

Bằng giới hạn ta dễ dàng tìm được  $k \in [0, 2]$ , song tìm hằng số tốt nhất có vẻ phức tạp hơn nhiều. Các bạn có thể thử để thấy những trở ngại khi chúng ta dồn các biến  $x, y, z$ .

Tuy nhiên, bằng cách đổi biến  $x = \tan \alpha, y = \tan \beta, z = \tan \gamma$  với  $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \frac{\pi}{2})$  thì thật bất ngờ, ta dễ dàng dồn về một biến bằng cách thay  $\alpha, \beta, \gamma$  bằng trung bình cộng của chúng. Phần còn lại của bài toán chỉ là khảo sát hàm một biến, hoặc đơn giản là áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** suy rộng.

Đọc xong phần bất đẳng thức ba biến, có lẽ bạn đọc sẽ có cảm giác là hình như mọi bất đẳng thức đều có thể chuyển về trường hợp hai biến bằng nhau hoặc một biến đạt giá trị tại biên. Phải nói rằng điều này đúng cho hầu hết các bất đẳng thức mà chúng ta đã gặp. Tuy nhiên, ngay sau đây chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một ví dụ nằm ngoài "thông lệ" đó. Trong ví dụ này, thậm chí bất đẳng thức đang xét là đa thức đối xứng thuần nhất ba biến.

**Bài 13.2.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 6abc)^2 + [(a+b+c)^3 - 36abc]^2 \geq 0$$

Chỉ xảy ra dấu "=" trong trường hợp  $(a, b, c) = (t, 2t, 3t), t \geq 0$  (và các hoán vị).

Còn với những bất đẳng thức hoán vị thì trường hợp đẳng thức không xảy ra tại một trong ba trường hợp có thể dồn biến được khá phổ biến, điển hình như bài toán:

**Bài 13.3.** Cho các số thực:  $a, b, c$ . CMR:  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + bc^3 + c^3a)$

Ngoài trường hợp  $a = b = c$  thì đẳng thức còn xảy ra khi  $a = \sin^2 \frac{4\pi}{7}, b = \sin^2 \frac{2\pi}{7}, c = \sin^2 \frac{\pi}{7}$

Trong trường hợp này thì rõ ràng những kiểu dồn biến chúng ta vừa xét không thể áp dụng trực tiếp được.

Trong trường hợp  $n$  biến tổng quát thì việc dồn biến trở nên cực kì khó khăn. Trong trường hợp đẳng thức xảy ra khi  $n$  biến bằng nhau thì bất đẳng thức Jensen cho phép dồn một lúc cả  $n$  biến nhưng đáng tiếc nó chỉ giải quyết được một lượng khá nhỏ các bất đẳng thức, một kỹ thuật tốt hơn là dồn  $(n - 1)$  biến bằng nhau trước như trong VII. Các kỹ thuật này rất tốt ở chỗ nó chỉ cần dồn biến hữu hạn lần.

Bây giờ ta phải đối mặt với khả năng cực trị đạt tại cá tâm và biên. Rõ ràng khả năng dồn về một biến là không cao. Do đó chúng ta hi vọng vào điều tốt nhất là có một cách dồn biến toàn cục, đại loại như bất đẳng thức Jensen. Với mục tiêu đó, hai định lý tuyệt đẹp sớm ra đời phải kể đến là định lý **SMV** (dồn biến mạnh) và **UMV** (dồn biến không xác định). Hai định lý này có thể gọi là "anh em song sinh". **SMV** dùng để "chuyên trị" các bất đẳng thức cực trị đạt được tại tâm, trong đó cái tiền đáng kể nhất là không cần dồn được hai biến bất kì về bằng nhau mà chỉ cần dồn biến lớn nhất và biến nhỏ nhất. **UMV** thì đòi hỏi giả thiết đặt lên hai biến bất kì, tuy nhiên nó cho phép ta dung hòa cả hai trường hợp cực trị đạt được tại tâm và tại biên dưới một dạng tổng quát.

Chúng tôi đã quan sát hai kết quả trên và nhận thấy sự không cần thiết của việc tách rời hai trường hợp mà có thể hợp nhất ưu điểm của hai định lý. Định lý **GMV** không chỉ đơn thuần là tổng quát hai định lý kể trên, mà nó mở ra một chân trời mới với vô vàn các kiểu dồn biến. Ý tưởng chính là nếu bộ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  chưa rơi vào các trường hợp "tới hạn" (tức là thuộc  $\Lambda$ ) thì luôn có thể thay thế bằng một bộ (là  $T(x)$ ). Nếu như sau khi thay thế vô hạn lần  $n$  biến sẽ tiến về giá trị trung bình (chẳng hạn như **SMV** ("cổ điển")) thì rõ ràng ta chỉ cần xét trường hợp  $x \in \Lambda$ . Thậm chí khi điều này không có thì dưới các điều kiện phụ trợ khác kết quả vẫn được chỉ ra.

**Bài 1. [Mathlinks]** Cho  $a, b, c$  là các số dương có tích bằng 1.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c} \geq 5$$

**Bài 2. [MOSP 2001]** Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$$

**Bài 3.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + (ab + bc + ca) + 2abc + 1 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } 7(xy + yz + zx) \leq 12 + 9xyz$$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq \frac{3}{2} \left( a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$



**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=2$ .

Chứng minh rằng:  $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \leq 3$

**Bài 8. [Trung Quốc 2005]** Cho  $a, b, c > 0$  và  $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a^2-bc+1} + \frac{1}{b^2-ca+1} + \frac{1}{c^2-ab+1} \leq 3$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c \in [p, q]$  với  $0 < p \leq q$ . Tìm giá trị lớn nhất của:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

**Bài 10. [Tổng quát RMO2000]** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a+b+c=3$ . Tìm hằng số  $k > 0$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $a^k + b^k + c^k \geq ab+bc+ca$ .

**Bài 11. [Mathlinks]** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $ab+bc+ca=1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{5}{2}$

**Bài 12.** Chứng minh:  $\sqrt{\frac{a}{8b+c}} + \sqrt{\frac{b}{8c+a}} + \sqrt{\frac{c}{8a+b}} \geq 1 \forall a, b, c > 0$

**Bài 13.** Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+z^2} + \sqrt{z+x^2} \geq 2$

**Bài 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{ab+4bc+ca}{b^2+c^2} + \frac{ac+4ab+bc}{b^2+a^2} + \frac{ab+4ac+bc}{a^2+c^2} \geq 4$

**Bài 15.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a^2+b^2+c^2=1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$

**Bài 16.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + k$

**Bài 17.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x+y+z=0$ .

Chứng minh rằng  $\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$

**Bài 18.** Cho  $a, b, c \geq 0$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{3(a^2b+b^2c+c^2a)}{ab^2+bc^2+ca^2} \geq 4$

**Bài 19.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1+\frac{48b}{a+c}} + \sqrt{1+\frac{48c}{b+a}} \geq 15$



**Bài 20.** Cho  $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc \geq 6\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a)$$

**Bài 21.** Cho  $a, b, c \geq 0, a + b + c = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$$

**Bài 22.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + k \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{3}$$

**Bài 23.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2b + b^2c + c^2a} + \frac{kabc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k \text{ là } k = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} - 1.$$

**Bài 24.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca + abc = 4$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c \geq ab + bc + ca$

**Bài 25.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{a+b+c} + \frac{24(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^3}$$

**Bài 26.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ .

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức:  $\frac{1+kab}{a^2+b^2} + \frac{1+kbc}{b^2+c^2} + \frac{1+kca}{c^2+a^2} \geq \frac{3(k+1)}{2}$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $\min\{ab, bc, ca\} \geq \frac{1}{4}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{(1+\sqrt[3]{abc})^2}$$

**Bài 28.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca + abc = 4$ .

Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:  $a^2 + b^2 + c^2 + 3k \geq (k+1)(ab + bc + ca)$

**Bài 29.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ .

Chứng minh rằng  $\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$

**Bài 30.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ .

Chứng minh rằng  $\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2$

**Bài 31.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} + \frac{3kabc}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 1 + k$$

**Bài 32.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $abc=1$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất (lớn nhất) cho bất đẳng

thức:  $\frac{a}{a+kbc} + \frac{b}{b+kca} + \frac{c}{c+kab} \leq \frac{a+b+c}{1+k}$ .

**Bài 33.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}abc + (\sqrt{2} + 1)^2 \geq (2 + \sqrt{2})(ab + bc + ca)$$

**Bài 34.** Cho  $n > 2, n \in \mathbb{N}$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + \dots + x_n^3 x_1^2 + n^{2(n-1)} (x_1 x_2 \dots x_n)^3$$

**Bài 35.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức  $(a^5 + b^5 + c^5 - 3) \geq k(a^3 + b^3 + c^3 - 3)$

**Bài 36.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $abc=1$  Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$$

**Bài 37.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức:  $a^3 + b^3 + c^3 + kabc \geq 3 + k$

**Bài 38.** Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Gọi  $p$  là nửa chu vi của tam giác và  $m_a, m_b, m_c$  là độ dài ba đường trung tuyến tương ứng hạ từ A, B, C xuống các cạnh đối diện. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3p^2 + \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}$$

**Bài 39.** Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

$$a) \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \geq \frac{4}{3} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)$$

$$b) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right)$$

**Bài 40.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin A + \sin B + \sin C)$$

**Bài 41.** Cho tam giác ABC không có góc tù.

$$a) \text{ Chứng minh: } \frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \sin A}{\sin B} + \frac{\sin A \sin B}{\sin C} \geq \frac{5}{4} \sqrt{2 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}$$

b) Khẳng định hoặc phủ định bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \sin A}{\sin B} + \frac{\sin A \sin B}{\sin C} \geq \frac{5}{2} + 4(3\sqrt{3} - 5) \cos A \cos B \cos C$$

**Bài 42.** Cho  $a, b, c, d$  thỏa mãn:  $a + b + c + d = 2$ . Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq (a-b)(c-d)$$

**Bài 43.** Xét 4 số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-db} + \frac{1}{1-ca} \leq 8$

**Bài 44.** Cho các số thực  $x, y, z, t$  thỏa mãn  $\max \{xy, yz, zt, tx\} \leq 1$ . Chứng minh:

$$\sqrt{1-xy+y^2} + \sqrt{1-yz+z^2} + \sqrt{1-zt+t^2} + \sqrt{1-tx+x^2} \geq \sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$$

**Bài 45.** Cho các số thực  $x, y, z, t \in [-1; 1]$  thỏa mãn  $x + y + z + t = 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+t^2} + \sqrt{1+t+x^2} \geq 4$$

**Bài 46.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$$

**Bài 47.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 15(abc + bcd + cda + dab) \geq (a+b+c+d)^3$$

**Bài 48.** Cho  $a, b, c \geq 0; a+b+c=3$  và  $k > 0$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{ab}{k+a^2} + \frac{bc}{k+b^2} + \frac{ca}{k+c^2}$

**Bài 49.** Cho  $a, b, c \geq 0; a+b+c=3$  và  $k > 0$ .

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của:  $P = \frac{1}{a^2+b+k} + \frac{1}{b^2+c+k} + \frac{1}{c^2+a+k}$

**Bài 50.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chứng minh rằng:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n(n+3) \geq (2n+2)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

**Bài 51.** Cho  $m > 0, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  và  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ .

Tìm hằng số  $k > 0$  tốt nhất sao cho:

$$(1+mx_1)(1+mx_2)\dots(1+mx_n) \leq (m+1)^n + k_m(x_1 x_2 \dots x_n - 1)$$

**Bài 52.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n, s, k > 0$  thỏa mãn:  $a_1 a_2 \dots a_n = s^n$  và  $n-1 = \frac{n}{(1+s)^k}$ .

Xét bất đẳng thức:  $\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \leq n-1$

a) Chứng minh rằng bất đẳng thức trên nói chung không đúng.

b) Chứng minh bất đẳng thức trên đúng trong trường hợp  $k = 1$ .

c) Tìm tất cả các giá trị  $k$  (tùy thuộc  $n$ ) để bất đẳng thức trên đúng.

**Bài 53.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ . Chứng minh rằng:

$$n^2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq 4(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n(n-2)^2$$

**Bài 54.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1-a_1}{1+a_1}} + \sqrt{\frac{1-a_2}{1+a_2}} + \dots + \sqrt{\frac{1-a_n}{1+a_n}} \leq n-2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

**Bài 55.** Xét tập hợp D gồm  $n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$ .

**Bài 56.** Xét tập hợp D gồm  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$ ,

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = B$ , trong đó  $A, B > 0$  cho trước thỏa mãn  $A^2 < nB$ .

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}$ .

**Bài 57.** Xét tập hợp D gồm  $n$  số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$ ,  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = B$ ,  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = C$ , trong đó  $A, B$  là các

hằng số dương cho trước sao cho D khác rỗng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$a_1 a_2 \dots a_n$ .

**Bài 58.** Xét tập hợp D gồm  $n$  số thực dương thỏa mãn  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} = n+1$ .

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ .

## §19. PHƯƠNG PHÁP ABC (ABSTRACT CONCRETENESS)

### I. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Khi dùng đạo hàm để chứng minh một số bất đẳng thức chứa nhiều biến số, một kỹ thuật cần phải chú ý đến là khảo sát hàm theo một biến số với các biến còn lại là tham số. Tuy nhiên, trong các bất đẳng thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  nếu sử dụng kỹ thuật trên gặp khó khăn thì chúng ta sẽ đưa bất đẳng thức về hàm  $f(a, b, c)$  chỉ chứa các đại lượng  $a+b+c, ab+bc+ca, abc$ . Sau đó chúng ta sẽ khảo sát hàm  $f(a, b, c)$  theo biến  $abc$  với hai đại lượng cố định là  $a+b+c, ab+bc+ca$ . Đây là ý tưởng chính của phương pháp ABC. Trước hết chúng ta sẽ tìm tập xác định của  $abc$  bởi các mệnh đề sau đây:

**1. Mệnh đề 1.** Giả sử  $m \in [-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty]$  và các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn

$$\begin{cases} ab+bc+ca=1 \\ a+b+c=m \end{cases} \text{ . Khi đó tập xác định } abc \text{ là } \left[ \frac{(6-2m^2)X_2+m}{9}; \frac{(6-2m^2)X_1+m}{9} \right]$$

**2. Mệnh đề 2.** Giả sử  $m \in [\sqrt{3}, +\infty]$  và các số thực  $a, b, c$  không âm thỏa mãn

$$\begin{cases} ab+bc+ca=1 \\ a+b+c=m \end{cases} \text{ . Khi đó tập xác định } abc \text{ là } \left[ \text{Max} \left\{ 0, \frac{(6-2m^2)X_2+m}{9} \right\}; \frac{(6-2m^2)X_1+m}{9} \right]$$

Trong đó  $X_1$  và  $X_2$  là hai nghiệm của phương trình  $3X^2 - 2mX + 1 = 0$ .

#### Chứng minh

Xét phương trình:  $X^3 - mX^2 + X - abc = 0$  (1). Khi đó ta cần tìm điều kiện của  $abc$  để

i) Mệnh đề 1: Phương trình (1) có ba nghiệm thực.

ii) Mệnh đề 2: Phương trình (1) có ba nghiệm thực không âm.

$$\text{Đặt } f(X) = X^3 - mX^2 + X - abc \Rightarrow f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1$$

$$\text{Ta có: } f'(X) = 0 \Leftrightarrow X_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 3}}{3}; X_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 3}}{3}$$

$\Rightarrow$  Bảng biến thiên

| $X$     | $-\infty$ | $X_1$                                                                                | $X_2$ | $+\infty$ |   |   |
|---------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------|-----------|---|---|
| $f'(X)$ |           | +                                                                                    | 0     | -         | 0 | + |
| $f(X)$  |           |  |       |           |   |   |

$$\text{i) (1) có ba nghiệm thực} \Leftrightarrow \begin{cases} f(X_1) \geq 0 \\ f(X_2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m - (2m^2 - 6)X_2}{9} \leq abc \leq \frac{m - (2m^2 - 6)X_1}{9} \quad (2)$$

Vậy tập xác định của  $abc$  là  $\left[ \frac{(6 - 2m^2)X_2 + m}{9}; \frac{(6 - 2m^2)X_1 + m}{9} \right]$

ii) Để ý rằng nếu  $abc \geq 0, a + b + c \geq 0, ab + bc + ca \geq 0$  thì  $a, b, c \geq 0$ .

Do đó (1) có ba nghiệm thực không âm  $\Leftrightarrow abc$  phải thoả mãn (2) và  $abc \geq 0$ .

$$\Leftrightarrow \text{Max} \left\{ 0, \frac{m - (2m^2 - 6)X_2}{9} \right\} \leq abc \leq \frac{m - (2m^2 - 6)X_1}{9}$$

Vậy tập xác định  $abc$  là  $\left[ \text{Max} \left\{ 0, \frac{(6 - 2m^2)X_2 + m}{9} \right\}; \frac{(6 - 2m^2)X_1 + m}{9} \right]$

**Chú ý:** • Giả thiết  $a + b + c = m \in [-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty]$  được thiết lập nên từ đẳng thức  $ab + bc + ca = 1$  và bất đẳng thức  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 3$  hoặc có thể được giải thích từ điều kiện  $f(x)$  có 3 nghiệm thực nên  $f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1 = 0$  phải có nghiệm, tức là  $\Delta' = m^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty]$

• Từ mệnh đề 1 ta rút ra một nhận xét quan trọng là có thể chuyển đổi bộ  $(a, b, c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}$  để biểu diễn tất cả các phần tử của tập  $\mathbb{R}^3$  thoả mãn  $ab + bc + ca = 1$ , bằng cách sử dụng bộ  $(a + b + c, ab + bc + ca, abc)$  với sự ràng buộc

$$a + b + c = m \in [-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty] \text{ và } abc \in \left[ \frac{(6 - 2m^2)X_2 + m}{9}; \frac{(6 - 2m^2)X_1 + m}{9} \right]$$

• Từ mệnh đề 2 ta cũng rút ra nhận xét là có thể chuyển đổi bộ  $(a, b, c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  để biểu diễn tất cả các phần tử của tập  $\mathbb{R}^{+3}$  thoả mãn  $ab + bc + ca = 1$ , bằng cách sử dụng bộ  $(a + b + c, ab + bc + ca, abc)$  với sự ràng buộc

$$a + b + c = m \in [-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty], \quad abc \in \left[ \text{Max} \left\{ 0, \frac{(6 - 2m^2)X_2 + m}{9} \right\}; \frac{(6 - 2m^2)X_1 + m}{9} \right]$$

**3. Mệnh đề 3.** Với mỗi bộ  $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$  đều tồn tại  $(x_0, x_0, y_0); (z_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$  sao cho

$$\begin{cases} a_0 + b_0 + c_0 = x_0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0 \\ a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0 = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 \\ x_0 x_0 y_0 \leq a_0 b_0 c_0 \leq z_0 z_0 t_0 \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba phần tử của bộ  $(a_0, b_0, c_0)$  bằng nhau.

**Chứng minh**

Trước hết ta sẽ chứng minh bài toán với các bộ số thực  $(a_0, b_0, c_0)$  thỏa mãn:  $a_0 + b_0 + c_0 = m$  và  $a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = 1$ . Theo mệnh đề 1 ta có:

$$s = \frac{(6 - 2m^2)X_2 + m}{9} \leq a_0 b_0 c_0 \leq \frac{(6 - 2m^2)X_1 + m}{9} = S$$

Ta sẽ xem khi  $a_0 b_0 c_0$  đạt giá trị biên thì đặc điểm của  $a_0, b_0, c_0$  sẽ ra sao.

Giả sử  $a_0 b_0 c_0 = s$ . Xét phương trình  $f(X) = X^3 - mX^2 + X - s = 0$  (1)

Ta có:  $f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1$  có hai nghiệm là  $X_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 3}}{3}$ ;  $X_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 3}}{3}$ .

Mặt khác do  $f(X_1) = 0$ ,  $f'(X_1) = 0$  nên phương trình  $f(X) = 0$  phải có nghiệm kép  $X_1$ , ta đổi lại kí hiệu gọi nghiệm kép là  $x_0, x_0$  và nghiệm còn lại là  $y_0$ .

Theo định lý Viet ta ta có: 
$$\begin{cases} x_0 + x_0 + y_0 = m = a_0 + b_0 + c_0 \\ x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0 = 1 = a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 \\ x_0 x_0 y_0 = s \leq a_0 b_0 c_0 \end{cases}$$

• Khi  $a_0 b_0 c_0 = S$  thì hoàn toàn tương tự ta có sự tồn tại của  $(z_0, z_0, t_0)$

Như vậy là ta đã chứng minh được bài toán đã nêu trong trường hợp  $a_0 + b_0 + c_0 = m$  và  $a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = 1$ . Với một tư tưởng hoàn toàn tương tự, bạn đọc hãy chứng minh sự tồn tại cho trường hợp:  $a_0 + b_0 + c_0 = m$  và  $a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = -1$ .

Bây giờ giả sử  $a_0 + b_0 + c_0 = M$  và  $a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = \pm N$  thì liệu các bộ  $(x_0, x_0, y_0)$  và  $(z_0, z_0, t_0)$  có tồn tại không. Câu trả lời là có. Thật vậy, xét các số

$$(a_1, b_1, c_1) = \left( \frac{a_0}{\sqrt{|N|}}, \frac{b_0}{\sqrt{|N|}}, \frac{c_0}{\sqrt{|N|}} \right) \text{ thỏa mãn hệ điều kiện } \begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = \frac{M}{\sqrt{|N|}} \\ a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1 = \pm 1 \end{cases}$$

Theo chứng minh trên thì các bộ  $(x_1, x_1, y_1), (z_1, z_1, t_1)$  là tồn tại và chọn các bộ

$(x_0, x_0, y_0) = (\sqrt{|N|}x_1, \sqrt{|N|}x_1, \sqrt{|N|}y_1)$  và  $(z_0, z_0, t_0) = (\sqrt{|N|}z_1, \sqrt{|N|}z_1, \sqrt{|N|}t_1)$ . Khi đó:

$$\begin{cases} x_0 + x_0 + y_0 = \sqrt{|N|}(x_1 + x_1 + z_1) = \sqrt{|N|}(z_1 + z_1 + t_1) = z_0 + z_0 + t_0 = \sqrt{|N|} \frac{M}{\sqrt{|N|}} = M = a_0 + b_0 + c_0 \\ x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0 = |N|(x_1 x_1 + x_1 y_1 + y_1 x_1) = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 = |N|(z_1 z_1 + z_1 t_1 + t_1 z_1) = \pm |N| = \pm N \\ x_0 x_0 y_0 = (\sqrt{|N|})^3 x_1 x_1 y_1 \leq (\sqrt{|N|})^3 a_1 b_1 c_1 = a_0 b_0 c_0 = (\sqrt{|N|})^3 a_1 b_1 c_1 \leq (\sqrt{|N|})^3 z_1 z_1 t_1 = z_0 z_0 t_0 \end{cases}$$

**4. Mệnh đề 4.** Với mỗi bộ  $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$  ta đều tìm được một trong hai bộ  $(x_0, x_0, y_0); (z_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$  hoặc  $(0, x_0, y_0); (z_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$  sao cho:

$$\text{Hoặc } \begin{cases} a_0 + b_0 + c_0 = x_0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0 \\ a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0 = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 \\ x_0 x_0 y_0 \leq a_0 b_0 c_0 \leq z_0 z_0 t_0 \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba phần tử của bộ  $(a_0, b_0, c_0)$  bằng nhau.

$$\text{Hoặc } \begin{cases} a_0 + b_0 + c_0 = 0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0 \\ a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = x_0 y_0 = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 \\ 0 \leq a_0 b_0 c_0 \leq z_0 z_0 t_0 \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi một trong ba phần tử của bộ  $(a_0, b_0, c_0)$  bằng 0.

**Bình luận:** Các mệnh đề 3, 4 là không hiển nhiên và nó cũng chính là cơ sở của phương pháp ABC. Chú ý rằng mọi biểu thức đối xứng  $f(a, b, c)$  theo ba biến  $a, b, c$  đều có thể biểu diễn thành  $g(A, B, C)$  thông qua 3 đại lượng:  $A = a + b + c$ ;  $B = ab + bc + ca$ ;  $C = abc$ .

Do đó để giảm số biến, ta sẽ cố định  $A, B$  và cho  $C$  chạy. Ta sẽ kì vọng hàm  $g$  đạt cực trị khi  $C$  đạt các giá trị biên. Tuy nhiên ở đây ta cũng không cần biết một cách cụ thể  $C$  sẽ đạt giá trị biên khi nào mà chỉ cần biết khi  $C$  đạt giá trị biên thì các biến  $a, b, c$  ban đầu sẽ phải có tính chất gì đặc biệt. Điều này cũng giống như ta sẽ tìm được các giá trị tới hạn của hàm số một biến mà không cần tính cụ thể các điểm tới hạn của nó vậy.

Các mệnh đề 3, 4 đảm bảo sự tồn tại của  $a, b, c$  khi  $C$  đạt các giá trị biên.

#### 5. Mệnh đề 5:

Mọi đa thức  $f$  đối xứng theo các biến  $a, b, c$  đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức  $\varphi$  theo các biến  $abc, ab + bc + ca, a + b + c$  và  $\deg \varphi(abc) \leq \frac{1}{3} \deg f$ .

**Chú ý:** Bạn đọc có thể hiểu đa thức tính theo bậc của  $abc$  như sau:

Giả sử  $f(a, b, c) = (a + b + c)abc + ab + bc + ca$  là một đa thức bậc 4 theo  $a, b, c$ . Nhưng khi tính bậc của đa thức theo biến  $abc$ , ta xem  $a + b + c$  và  $ab + bc + ca$  như các hằng số  $m, n$ . Khi đó đa thức được viết lại:  $f(a, b, c) = \varphi(abc) = mabc + n$  là đa thức bậc nhất theo biến  $abc$ .



**Chứng minh**

Do mọi đa thức đối xứng với 3 biến  $a, b, c$  đều có thể biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở  $P(n), Q(m, n), R(m, n, p)$ , nên ta chỉ cần chứng minh sự biểu diễn cho các dạng đa thức  $P(n), Q(m, n), R(m, n, p)$ , với

$$\begin{cases} P(n) = a^n + b^n + c^n \\ Q(m, n) = a^m b^n + a^n b^m + b^m c^n + c^n b^m + c^m a^n + a^n c^m \\ R(m, n, p) = a^m b^n c^p + a^m b^p c^n + b^m a^n c^p + b^m a^p c^n + c^m a^n b^p + c^m a^p b^n \end{cases}$$

Tuy nhiên có thể nhận xét thêm rằng:

- $R$  có thể biểu diễn qua  $Q$  cùng với  $abc$ :  $R = (abc)^p Q(m-p, n-p)$
- $Q$  có thể biểu diễn qua  $P$  bởi hệ thức:  $Q = P(m)P(n) - P(m+n)$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh  $P$  có thể biểu diễn qua  $abc, ab+bc+ca, a+b+c$ .

Ta sẽ chứng minh điều này bằng phương pháp quy nạp:

Với  $n=0; n=1$ , mệnh đề đã cho hiển nhiên đúng.

Giả sử ta đã chứng minh được  $P(k)$  có thể biểu diễn thành đa thức thông qua các biến  $abc, ab+bc+ca, a+b+c, \forall k \leq h-1$ . Nhận xét rằng điều này cũng đúng đối với  $Q(m, n)$  và  $R(m, n, p) \forall m \geq n \geq p \geq 0: m+n \leq h-1$ . Bây giờ ta sẽ chứng minh tính biểu diễn của  $P(h)$ .

Ta có: 
$$P(h) = (a+b+c)P(h-1) - Q(h-1, 1)$$

Đồng thời: 
$$Q(h-1, 1) = (ab+bc+ca)P(h-2) - R(h-2, 1, 1)$$

Do đó: 
$$P(h) = (a+b+c)P(h-1) - (ab+bc+ca)P(h-2) + R(h-2, 1, 1)$$

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, các biểu thức  $P(h-1), P(h-2), R(h-2, 1, 1)$  đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức theo các biến  $abc, ab+bc+ca, a+b+c$ .

Điều này cho ta kết luận tính đúng đắn của mệnh đề đã nêu khi  $k=h$ .

Như vậy, mệnh đề đã nêu đã được chứng minh thông qua nguyên lý quy nạp.

Tính chất  $\deg \varphi(abc) \leq \frac{1}{3} \deg f$  được suy ra khá hiển nhiên, bởi lẽ biểu thức  $abc$  có bậc là 3 đối với các biến  $a, b, c$ . Do đó khi coi  $abc$  là một biến bậc 1 thì bậc của  $abc$  phải không lớn hơn  $\frac{1}{3}$  so với bậc của đa thức tính theo các biến  $a, b, c$ .

## II. ĐỊNH LÝ ABC

**1. Định lý 1:** Nếu  $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$  là hàm đơn điệu trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**2. Định lý 2:** Nếu  $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$  là hàm lồi trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị lớn nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**3. Định lý 3:** Nếu  $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$  là hàm lõm trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**Nhận xét:** Cả ba định lý trên đều được chứng minh dựa vào các mệnh đề 3, 4.

#### 4. Chứng minh các định lý:

Ta sẽ chứng minh đại diện định lý 1 bằng phương pháp phản chứng

Xét  $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$  là hàm đơn điệu trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$ .

Không mất tính tổng quát ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp  $f$  tăng và tìm giá trị lớn nhất. Giả sử hàm số  $f$  đạt giá trị lớn nhất tại điểm  $(a_0, b_0, c_0)$  trong đó  $a_0, b_0, c_0$  khác nhau từng đôi một và giá trị lớn nhất là  $M$ . Tuy nhiên lại tồn tại một bộ  $(z_0, z_0, z_0)$  thỏa mãn:

$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) < f(z_0 z_0 z_0, z_0 z_0 + z_0 z_0 + z_0 z_0, z_0 + z_0 + z_0) \quad \text{Đ}$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận giá trị lớn nhất xảy ra khi có hai biến bằng nhau

Xét  $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$  là hàm đơn điệu trên  $\mathbb{R}^+$  theo  $abc$ .

Nếu  $f$  tăng và cần tìm giá trị lớn nhất thì làm hoàn toàn tương tự như trên. Xét  $f$  tăng và cần tìm giá trị nhỏ nhất. Giả sử hàm số  $f$  đạt giá trị nhỏ nhất là  $m$  tại điểm  $(a_0, b_0, c_0)$  trong đó  $a_0, b_0, c_0$  khác nhau từng đôi một và không có biến nào bằng 0. Khi đó có một trong hai trường hợp sau xảy ra:

$$\begin{aligned} m &= f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) \\ &> f(x_0 x_0 y_0, x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0, x_0 + x_0 + y_0) \\ m &= f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) \\ &> f(0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(0, x_0 y_0, x_0 + x_0) \end{aligned}$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận giá trị lớn nhất xảy ra khi có 2 biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

• **Chứng minh định lý 2 và 3** hoàn toàn tương tự như định lý 1 với các chú ý về các tính chất của hàm lồi và lõm, trong đó hàm số lồi đạt giá trị lớn nhất, hàm số lõm đạt giá trị nhỏ nhất khi biến đạt các giá trị ở biên.

**5. Hệ quả:** Từ các kết quả trên ta rút ra được một số hệ quả lý thú sau:

**5.1. Hệ quả 1:** Giả sử  $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$  là hàm đa thức bậc nhất theo  $abc$ , khi đó hàm  $f$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và hàm  $f$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một số bằng 0.

**5.2. Hệ quả 2:** Giả sử  $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$  là hàm tam thức bậc hai theo  $abc$  với hệ số bậc cao nhất dương. Khi đó hàm  $f$  đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau, đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

**5.3. Hệ quả 3:** Mọi đa thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  bậc bé hơn hay bằng 5 đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

**5.4. Hệ quả 4:** Mọi đa thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  bậc bé hơn hay bằng 8 có hệ số của  $a^2b^2c^2$  trong biểu diễn qua dạng  $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$  không âm đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

### Chứng minh

**5.1. Hệ quả 1:** Đa thức bậc nhất  $mx+y$  là hàm đơn điệu. Do đó, theo định lý 1 hàm  $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ , là đa thức bậc nhất theo  $abc$ , đơn điệu đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong tập  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

**5.2. Hệ quả 2:** Tam thức bậc hai với hệ số dương  $m^2x^2+nx+p$  là hàm lồi trên đoạn liên tục. Do đó theo định lý 2 thì đối với hàm số  $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ , là một tam thức bậc hai theo  $abc$  và hệ số bậc cao nhất dương, tức là một hàm lồi nên đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

**5.3. Hệ quả 3:** Theo mệnh đề 5, đa thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  bậc bé hơn hay bằng 5 có thể biểu diễn thành đa thức  $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$  và là đa thức bậc nhất theo  $abc$  (do  $\deg \varphi(abc) \leq \frac{1}{3} \deg f = \frac{5}{3}$  suy ra  $\deg \varphi(abc) = 1$ ). Do đó theo hệ quả 1 đa

thức đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

**5.4. Hệ quả 4:** Theo mệnh đề 5, đa thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  bậc-bé hơn hay bằng 8 có thể biểu diễn thành đa thức  $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$  và là tam thức bậc hai theo  $abc$  (do  $\deg \varphi(abc) \leq \frac{1}{3} \deg f = \frac{8}{3}$  suy ra  $\deg \varphi(abc) = 2$ ). Hơn nữa hệ số của  $a^2b^2c^2$  lại không âm nên theo hệ quả 3 ta đi đến kết luận đa thức đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}$  khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất trong  $\mathbb{R}^+$  khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

**6. Bình luận:** Do mọi bất đẳng thức đối xứng với 3 biến đều có thể chuyển về cách biểu diễn đa thức đối xứng 3 biến nên sử dụng 4 hệ quả trên ta có thể dễ dàng chứng minh được các bất đẳng thức đối xứng 3 biến.

#### 7. Một số đẳng thức và điều kiện hỗ trợ:

Đặt  $a = x + y + z, b = xy + yz + xz, c = xyz$ . Khi đó ta có:

$$7.1. \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b$$

$$7.2. \quad x^3 + y^3 + z^3 = a^3 - 3ab + 3c$$

$$7.3. \quad x^4 + y^4 + z^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac$$

$$7.4. \quad x^5 + y^5 + z^5 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2 + 5a^2c - 5bc$$

$$7.5. \quad x^6 + y^6 + z^6 = a^6 - 6a^4b + 6a^3c + 9a^2b^2 - 12abc + 3c^2 - 2b^3$$

$$7.6. \quad x^7 + y^7 + z^7 = a^7 - 7a^5b + 14a^3b^2 + 7a^4c^2 - 7b^3a - 21a^2bc + 7cb^2 + 7ac^2$$

$$7.7. \quad (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = b^2 - 2ac$$

$$7.8. \quad (xy)^3 + (yz)^3 + (zx)^3 = b^3 - 3abc + 3c^2$$

$$7.9. \quad (xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4 = b^4 - 4b^2ac + 2a^2c^2 + 4c^2b$$

$$7.10. \quad (xy)^5 + (yz)^5 + (zx)^5 = b^5 - 5ab^3c + 5a^2bc^2 + 5b^2c^2 - 5ac^3$$

$$7.11. \quad xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = ab - 3c$$

$$7.12. \quad xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2) = a^2b - 2b^2 - ac$$

$$7.13. \quad xy(x^3+y^3) + yz(y^3+z^3) + zx(z^3+x^3) = a^3b - 3ab^2 - a^2c + 5bc$$

$$7.14. \quad x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x) = ab^2 - 2a^2c - bc$$

$$7.15. x^3y^3(x+y) + y^3z^3(y+z) + z^3x^3(z+x) = ab^3 - 3a^2bc + 5ac^2 - cb^2$$

$$7.16. (x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) = 9c^2 + (a^3 - 6ab)c + b^3$$

$$7.17. (x^3y + y^3z + z^3x)(xy^3 + yz^3 + zx^3) = 7a^2c^2 + (a^5 - 5a^3b + ab^2)c + b^4$$

$$7.18. (x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2)(x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3) = a^4c^2 + a^2bc^2 + 7b^2c^2 + b^5 - 5b^3ac$$

$$7.19. (x^4y + y^4z + z^4x)(xy^4 + yz^4 + zx^4)$$

$$= b^5 - 12ab^3c - 16a^2bc^2 + 13b^2c^2 + ca^7 - 7ca^5b + 14ca^3b^2 + 7a^4c^2$$

7.20. Phương trình bậc ba  $u^3 - au^2 + bu - c = 0$  có các nghiệm thực  $x, y, z$

$$\Leftrightarrow -27c^2 + (18ab - 4a^3)c + a^2b^2 - 4b^3 \geq 0 \quad (1)$$

7.21. Phương trình bậc ba  $u^3 - au^2 + bu - c = 0$  có các nghiệm thực  $x, y, z > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -27c^2 + (18ab - 4a^3)c + a^2b^2 - 4b^3 \geq 0 \\ a > 0, b > 0, c > 0 \end{cases}$$

7.22. Phương trình bậc ba  $u^3 - au^2 + bu - c = 0$  có các nghiệm  $x, y, z$  là ba cạnh tam giác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -27c^2 + (18ab - 4a^3)c + a^2b^2 - 4b^3 \geq 0 \\ a^3 - 4ab + 8c > 0. \\ a > 0, b > 0, c > 0 \end{cases}$$

### 8. Các ví dụ minh họa.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$1. \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1) \quad 2. \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} + \frac{1}{4} \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} \right)^2 \quad (2)$$

#### Chứng minh

$$1. (1) \Leftrightarrow P = abc(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3) - (a^3 + b^3 + c^3)(ab + bc + ca) \geq 0$$

Do đó  $P$  giá trị nhỏ nhất khi có hai giá trị trong ba biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

• Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử  $a = c$  bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^2b}{2a^3 + b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2 + 2ab}{2a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[ \frac{1}{2a^2 + b^2} - \frac{2a+b}{3(2a^3 + b^3)} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^4(a+b) \geq 0.$$

• Trường hợp có một biến bằng 0, giả sử  $c = 0$ , bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{3} \geq \frac{ab}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 3(a-b)^2 \geq 0.$$

2. Để ý rằng có thể đưa (2) về một đa thức đối xứng bậc 7 với  $a, b, c$  nhưng chỉ là đa thức bậc nhất đối với  $abc$ , do đó theo hệ quả 1 ta xét hai trường hợp:

• Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử  $a = c$  bất đẳng thức tương đương với:

$$\begin{aligned} \frac{2a^3 + b^3}{4a^2b} + \frac{1}{4} &\geq \left( \frac{2a^2 + b^2}{a^2 + 2ab} \right)^2 \Leftrightarrow \left( \frac{2a^3 + b^3}{4a^2b} - \frac{3}{4} \right) \geq \left( \frac{2a^2 + b^2}{a^2 + 2ab} \right)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(2a+b)}{4a^2b} &\geq \frac{(a-b)^2(3a^2 + b^2 + 2ab)}{(a^2 + 2ab)^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[ \frac{(2b-a)^2 + a^2}{(a^2 + 2ab)^2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

• Trường hợp có một biến bằng 0, bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng.

**Bài 2. [Iran 1996]** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca) \left[ \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

### Chứng minh

Đưa (1) về đa thức đối xứng bậc 6 của  $a, b, c$  và là bậc hai của  $abc$  với hệ số dương như sau:

$$9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 - 4(ab+bc+ca)[(a+b)^2(b+c)^2 + (b+c)^2(c+a)^2 + (c+a)^2(a+b)^2] \geq 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow m(abc)^2 + nabc + p \geq 0 \quad (m \geq 0)$$

Trong đó  $m, n, p$  là các đại lượng chứa hằng số hoặc chứa  $a+b+c, ab+bc+ca$  mà ta cũng coi như là các hằng số. Ta có thể giải thích điều này như sau:  $(a+b)(b+c)(c+a)$  có dạng  $mabc + n$  nên  $9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$  có dạng  $m^2(abc)^2 + nabc + p$ .

$$4(ab+bc+ca)[(a+b)^2(b+c)^2 + (b+c)^2(c+a)^2 + (c+a)^2(a+b)^2] = 4mA \text{ trong đó } m = ab+bc+ca \text{ được coi là hằng số, } A \text{ là một đa thức bậc 4 nên cũng có dạng } mabc + n.$$

Vậy nên biểu thức (\*) mới có dạng như trên.

Khi đó hàm số về trái đạt giá trị lớn nhất khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

• Trường hợp có hai biến bằng nhau, giả sử  $a = c$ , bất đẳng thức tương đương với

$$(a^2 + 2ab) \left( \frac{1}{4a^2} + \frac{2}{(a+b)^2} \right) \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[ \frac{2a+b}{2a(a+b)^2} - \frac{1}{(a+b)^2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow b(a-b)^2 \geq 0.$$

Trường hợp có một biến bằng 0, giả sử  $c = 0$ , bất đẳng thức tương đương với:

$$ab \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[ \frac{1}{ab} - \frac{1}{4(a+b)^2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(4a^2 + 4b^2 + 7ab) \geq 0$$

Sau đây một số ví dụ, ta không thể làm trực tiếp từ các hệ quả đã nêu mà phải nhờ vào một số biến đổi hay các định lý đã nêu.

**Bài 3. [Russia Olympiad 2005]** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{a^3 + bc} + \frac{b}{b^3 + ac} + \frac{c}{c^3 + ab} \geq 3 \quad (1)$$

### Chứng minh

**Bình luận:** Nếu đưa (1) về đa thức đối xứng thì nhận được một đa thức bậc 9 với  $a, b, c$  và là bậc 3 với  $abc$ . Điều này không nằm trong các hệ quả.

Do đó với bài toán này ta phải sử dụng thủ thuật đổi biến số sau đây:

$$\text{Đặt } x = \frac{bc}{a}; y = \frac{ac}{b}; z = \frac{ab}{c} \Rightarrow xy + yz + xz = 1 \text{ và } (1) \Leftrightarrow \frac{1}{xy+z} + \frac{1}{yz+x} + \frac{1}{zx+y} \geq 3 \quad (2)$$

Biến đổi (2) về đa thức bậc hai theo  $xyz$  với hệ số bậc cao nhất không âm.

Ta chỉ cần xét các trường hợp khi có hai biến bằng nhau, hay một biến bằng 0.

**Trường hợp 1:**  $x = z$ . Khi đó (2)  $\Leftrightarrow \frac{2}{xy+x} + \frac{1}{x^2+y} \geq 3$  với  $2xy + x^2 = 1$ .

Thay  $y = \frac{1-x^2}{2x}$  thì ta phải chứng minh:  $\frac{2}{\frac{1-x^2}{2} + x} + \frac{1}{x^2 + \frac{1-x^2}{2x}} \geq 3, \forall x \in [0; 1]$ .

Điều này không quá khó khăn và các bạn sẽ có thể giải quyết dễ dàng.

**Trường hợp 2:**  $z = 0$ . Khi đó (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 3$  với  $xy = 1$ .

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{xy} + \frac{2}{\sqrt{xy}} = 3.$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}} + \sqrt{\frac{2(xy + yz + xz)}{x^2 + y^2 + z^2}} \geq 1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

### Chứng minh

Về trái là các biểu thức chứa căn nên không thể đưa về dạng đa thức đối xứng.

Ta sẽ đánh giá trực tiếp theo hàm đối với biến  $xyz$ .

Vẫn với quy ước  $a = x + y + z, b = xy + yz + zx, c = xyz$ , sử dụng các hằng đẳng thức đã

nêu ở trên ta biến bất đẳng thức về dạng:  $\sqrt{\frac{a^4 - 2a^2b + 2b^2 + 4ac}{b^2 - 2ac}} + \sqrt{\frac{2b}{a^2 - 2b}} \geq 1 + \sqrt{2}$

Hàm theo  $c$  là hàm bậc nhất nên đơn điệu. Theo định lý một, giá trị nhỏ nhất xảy ra khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.



**Trường hợp 1:**  $x = z$ . Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^4 + y^4}{x^4 + 2x^2y^2}} + \sqrt{\frac{2(x^2 + 2xy)}{1 + 2x^2 + y^2}} \geq 1 + \sqrt{2}$  (2)

Do tính thuần nhất của bất đẳng thức này nên ta có thể giả sử  $x = 1$ , khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y^4 + 2}{2y^2 + 1}} - 1 \geq \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2(2y+1)}{y^2 + 2}} \Leftrightarrow \frac{(y^2 - 1)^2}{2y^2 + 1 + \sqrt{(y^4 + 2)(2y^2 + 1)}} \geq \frac{\sqrt{2}(y-1)^2}{y^2 + 2 + \sqrt{(y^2 + 2)(2y+1)}} \quad T$$

a có thể đánh giá các mẫu số một cách nhẹ nhàng nhưng vẫn đảm bảo tính đúng đắn của dấu lớn hơn hoặc bằng sau khi đánh giá như sau:

$$\sqrt{(y^4 + 2)(2y^2 + 1)} \leq \sqrt{2}y^3 + \sqrt{2} \Rightarrow 2y^2 + 1 + \sqrt{(y^4 + 2)(2y^2 + 1)} \leq 2y^2 + 1 + \sqrt{2}y^3 + \sqrt{2} \quad \text{Do}$$

$$\sqrt{(y^2 + 2)(2y+1)} \geq y + \sqrt{2} \Rightarrow y^2 + 2 + \sqrt{(y^2 + 2)(2y+1)} \geq y^2 + y + 2 + \sqrt{2}$$

do công việc còn lại của chúng ta là chứng minh:

$$\frac{(y+1)^2}{\sqrt{2}y^3 + 2y^2 + \sqrt{2} + 1} \geq \frac{\sqrt{2}}{y^2 + y + 2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow y^4 + y^3 + (5 - \sqrt{2})y^2 + (5 + 2\sqrt{2})y \geq 0$$

**Trường hợp 2:**  $z = 0$ . Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^4 + y^4}{x^3y^2}} + \sqrt{\frac{2xy}{x^2 + y^2}} \geq 1 + \sqrt{2}$  (2)

Ta có:  $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \geq 2x^2y^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^4 + y^4}{2x^2y^2}} \geq \frac{x^2 + y^2}{2xy} \geq 1$ , do đó:

$$VT(2) \geq (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{x^4 + y^4}{2x^2y^2}} + \left( \frac{x^2 + y^2}{2xy} + \sqrt{\frac{2xy}{x^2 + y^2}} \right) \geq (\sqrt{2} - 1) + 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2xy}} \geq 1 + \sqrt{2}$$

**Bài 5. [Mongolia MO 1991]** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ .

Chứng minh rằng:  $|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \leq 2\sqrt{2}$

### Chứng minh

Đây không phải là một bất đẳng thức dạng đa thức bình thường, dấu trị tuyệt đối đã làm mọi chuyện trở nên khó khăn. Cách giải quyết hiệu quả ở đây là bình phương để tạo đa thức bậc 6. Tuy nhiên cũng có thể thấy ngay sau khi bình phương thì hệ số của  $a^2b^2c^2$  bên vế phải là không âm. Do vậy ta có thể áp dụng định lý ABC trực tiếp và đưa về bài toán hai biến như sau:

**Trường hợp 1: Hai biến bằng nhau**

Cho các số thực  $x, y$ :  $x^2 + 2y^2 = 2$ . Chứng minh rằng:  $|x^3 + 2y^3 - xy^2| \leq 2\sqrt{2}$  (1)

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (x^3 + 2y^3 - xy^2)^2 \leq (x^2 + 2y^2)^3$  (2).

Nếu  $y = 0$  thì ta có đẳng thức

Với  $y \neq 0$ , chia hai vế cho  $y^6$  và đặt  $t = \frac{x}{y}$ , khi đó (2)  $\Leftrightarrow (t^3 - t + 2)^2 \leq (t^2 + 2)^3$



Ta có:  $(t^3 - t + 2)^2 \leq (t^3 + 2)^2 = t^6 + 4t^3 + 2 < t^6 + 6t^4 + 12t^2 + 8 = (t^2 + 2)^3$

**Trường hợp 2: Một biến bằng 0**

Cho các số thực  $x, y$ :  $x^2 + y^2 = 2$ . Chứng minh rằng:  $|x^3 + y^3| \leq 2\sqrt{2}$

Thật vậy ta có:  $|x^3 + y^3| \leq \sqrt{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)} \leq \sqrt{(x^2 + y^2)^3} = 2\sqrt{2}$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 2$ . Chứng minh:

$$\sqrt{a^2b + b^2c + c^2a} + \sqrt{ab^2 + bc^2 + ca^2} \leq 2$$

### Chứng minh

Đây không phải là bất đẳng thức dạng đa thức, hơn nữa không thể biểu diễn một cách mau chóng bất đẳng thức trên theo các đại lượng trung bình  $abc, ab + bc + ca, a + b + c$ , hai biểu thức hoán vị  $a^2b + b^2c + c^2a$  và  $ab^2 + bc^2 + ca^2$  không thể biểu diễn theo các đại lượng trung bình này. Hơn thế nữa, dấu căn bậc hai đã cắt đứt mối quan hệ của chúng.

Thông thường gặp các bài toán có chứa căn thức, chúng ta sẽ cố tìm cách phá chúng đi. Với ý tưởng này, bình phương cả hai vế của bất đẳng thức, ta được:

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 2\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \leq 4 \quad (1)$$

Bất đẳng thức bây giờ đã có thể biểu diễn theo các đại lượng trung bình

$$A = a + b + c = 2, B = ab + bc + ca, C = abc:$$

$$(1) \Leftrightarrow 2B - 3C + 2\sqrt{9C^2 + (8 - 12B)C + B^3} \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{9C^2 + (8 - 12B)C + B^3} \leq 4 - 2B + 3C$$

$$\Leftrightarrow 4(9C^2 + (8 - 12B)C + B^3) \leq (4 - 2B + 3C)^2 = 9C^2 + 6(4 - 2B)C + (4 - 2B)^2$$

$$\Leftrightarrow 27C^2 + (8 - 36B)C + 4B^3 - (4 - 2B)^2 \leq 0$$

Đến đây là có thể áp dụng  $ABC$ , hàm theo  $C$  bên trái là hàm lồi và ta cần đi tìm giá trị lớn nhất. Như vậy là ta có thể đưa về hai trường hợp, ngay cả cho bài toán ban đầu.

**Trường hợp 1: Hai biến bằng nhau**

Cho  $x, y \geq 0$  thỏa mãn:  $2x + y = 2$ . Chứng minh rằng:  $2\sqrt{x^3 + x^2y + xy^2} \leq 2$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2(2 - 2x) + x(2 - 2x)^2 \leq 1, \forall x \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 - 3x + 1) \leq 0, \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 \geq 0, \forall x \in [0; 1]$$

**Trường hợp 2: Một biến bằng 0**

Cho  $x, y \geq 0$  thỏa mãn:  $x + y = 2$ . Chứng minh rằng:  $\sqrt{x^2y} + \sqrt{xy^2} \leq 2$

Ta có:  $\sqrt{x^2y} + \sqrt{xy^2} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \frac{x+y}{2} \sqrt{2(x+y)} = 2$

## 9. Bài tập áp dụng

**Bài 7.** Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn:  $xy + yz + zx = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \leq \sqrt{2} + \frac{9}{4}xyz$

**Bài 8.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ca} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{6}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{(b+c)^2 + 5a^2} + \frac{ca}{(c+a)^2 + 5b^2} + \frac{ab}{(a+b)^2 + 5c^2} \leq \frac{1}{3}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

Chứng minh rằng:  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$

**Bài 12.** [Vietnam TST 1996] Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực  $a, b, c$

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4)$$

**Bài 13.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}} + 2\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{6} + 2$$

**Bài 14.** [Russia MO] Giả sử  $x, y, z$  là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

**Bài 15.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

Chứng minh rằng:  $(2-ab)(2-bc)(2-ca) \geq 1$

**Bài 16.** Cho các số thực không âm  $x, y, z$ :  $x + y + z = 2$ .

Chứng minh rằng:  $0 \leq \sqrt{x^3y + y^3z + z^3x} + \sqrt{xy^3 + yz^3 + zx^3} \leq 2$

**Bài 17.** Cho các số thực  $a, b, c \geq 0$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{bc}{a-a^3} + \frac{ca}{b-b^3} + \frac{ab}{c-c^3} \geq \frac{5}{2}$



### III. MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ ABC

Như các bạn đã thấy, đối với các bài toán bất đẳng thức có sự ràng buộc giữa các biến  $a, b, c$ , nếu sự ràng buộc này chỉ liên quan đến  $a+b+c$  và  $ab+bc+ca$  thì định lý ABC sẽ có cơ hội phát huy sức mạnh. Thế nhưng đối với những bài toán mà bản thân  $abc$  bị ràng buộc thì sao:

Trong những trường hợp như vậy, chúng ta sẽ cố gắng loại bỏ đi điều kiện ràng buộc đối với  $abc$  và thay thế bằng những điều kiện thích hợp hơn đối với  $abc$  hay loại bỏ hoàn toàn điều kiện, cụ thể hơn là một số bài toán sau:

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn:  $abc = 1$ . Chứng minh:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq \frac{3}{2} \left( a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

#### Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq \frac{3}{2}(a + b + c + ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow 2(a + b + c)^2 + 12 \geq 3(a + b + c) + 7(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Tồn tại các số thực dương  $x, y, z$  sao cho:  $a = \frac{x^2}{yz}, b = \frac{y^2}{xz}, c = \frac{z^2}{xy}$ .

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow 2 \left( \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \right)^2 + 12 \geq \frac{3(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz} + 7 \cdot \frac{x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3}{x^2 y^2 z^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3)^2 + 12x^2 y^2 z^2 \geq 3(x^3 + y^3 + z^3)xyz + 7(x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3) \quad (3)$$

Do tính thuần nhất của (3), ta có thể giả sử  $x + y + z = 1, xy + yz + zx = v, xyz = w$

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 + z^3 = 1 - 3v + 3w; \quad x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3 = v^3 - 3vw + 3w^2$$

$$\text{Khi đó (3)} \Leftrightarrow 2(1 - 3v + 3w)^2 + 12w^2 \geq 3(1 - 3v + 3w)w + 7(v^3 - 3vw + 3w^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 3v)^2 + 9(1 - 3v)w + 7(v^3 - 3vw) \geq 0$$

Đa thức bậc nhất theo  $w$ , điều kiện thuận lợi để áp dụng định lý ABC cho (3).

**Trường hợp 1:**  $z = 0, y = 1$

(có thể giả sử  $y = 1$  là do tính thuần nhất của biểu thức sau khi đã cho  $z = 0$ )

$$\text{Bất đẳng thức (3) trở thành: } 2(x^3 + 1)^2 \geq 7x^3 \Leftrightarrow 2(x^3 - 1)^2 + x^3 \geq 0$$

**Trường hợp 2:**  $y = z = 1$

(có thể giả sử chúng bằng 1 là do tính thuần nhất của biểu thức sau khi cho  $y = z$ ).

Bất đẳng thức (3) trở thành:  $2(x^3 + 2)^2 + 12x^2 \geq 3(x^3 + 2)x + 7(2x^3 + 1)$   
 $\Leftrightarrow 2x^6 - 3x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1)(x - 1)^2 \geq 0$   
 Vậy ta có đpcm.

**Bài 2.** Cho các số thực  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn:  $ab + bc + ca + abc = 4$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$  (1)

### Chứng minh

Tồn tại các số thực dương  $x, y, z$  sao cho:  $a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{x+z}, c = \frac{2z}{x+y}$

Khi đó (1) trở thành:  $\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} \geq 4 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right)$

Do tính thuần nhất ta hãy đặt  $x + y + z = 1, xy + yz + zx = v, xyz = w$  và viết lại bất đẳng thức:

$$\frac{1-z}{z} + \frac{1-y}{y} + \frac{1-x}{x} \geq 4 \left( \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} \right)$$

$$\Leftrightarrow [xy(1-z) + xz(1-y) + yz(1-x)] [(1-x)(1-y)(1-z)]$$

$$\geq 4xyz [x(1-y)(1-z) + y(1-z)(1-x) + z(1-x)(1-y)]$$

$$\Leftrightarrow (v - 3w)(v - w) \geq 4w(1 - 2v + 3w) \Leftrightarrow 9w^2 + 4(1 - v)w - v^2 \leq 0$$

Đến đây thì đã hội tụ đủ điều kiện để áp dụng định lý ABC. Ta quy về hai trường hợp sau:

Trường hợp  $z = 0$ , bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Trường hợp  $y = z = 1$  (ta có thể giả sử chúng bằng 1 nhờ tính thuần nhất):

$$2(x+1) + \frac{2}{x} \geq 4 \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x+1} \right) \Leftrightarrow 2x(x+1) + 2(x+1) \geq 8x \Leftrightarrow 2(x-1)^2 \geq 0.$$

**Bài 3.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$  và  $a + b + c + 2 = abc$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c + 3 \geq 6 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$  (1)

### Chứng minh

Tồn tại các số thực dương  $x, y, z$  sao cho  $a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{x+z}{y}, c = \frac{x+y}{z}$

trong đó  $x, y, z$  là ba cạnh tam giác xuất từ điều kiện  $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ .

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \quad (2)$$

Do tính thuần nhất ta có thể giả sử  $x+y+z=1, xy+yz+zx=n, xyz=p$

$$(2) \Leftrightarrow (x+y+z) \frac{xy+yz+zx}{xyz} \geq 6 \left( \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \frac{xy+yz+zx}{xyz} \geq 6 \cdot \frac{x(1-y)(1-z) + y(1-z)(1-x) + z(1-x)(1-y)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \frac{xy+yz+zx}{xyz} \geq 6 \cdot \frac{x+y+z-2(xy+yz+zx)+3xyz}{1-xyz-(x+y+z)+xy+yz+zx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{p} \geq \frac{6(1-2n+3p)}{n-p} \Leftrightarrow n(n-p) \geq 6(1-2n)p+3p^2 \Leftrightarrow 3p^2+(6-11n)p-n^2 \leq 0$$

Do  $x, y, z$  là 3 cạnh của một tam giác nên đặt  $x=v+w, y=u+w, z=u+v$ .

Ta có:  $a+b+c=2(u+v+w), xy+yz+zx=uv+vw+wu+(u+v+w)^2$  và

$xyz=(u+v+w)(uv+vw+wu)-uvw$  nên biểu thức (1) theo  $u, v, w$  vẫn là một tam thức bậc hai theo  $(uvw)$  và ta cần tìm giá trị lớn nhất. Điều kiện hoàn toàn thuận lợi để ta có thể áp dụng định lý ABC.

Ta xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $w=0 \Rightarrow z=x+y$ . Do tính thuần nhất, ta có thể giả sử  $y=1$ .

$$\text{Bất đẳng thức (2) trở thành: } 2(x+1) \left( \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x+1} \right) \geq 6 \left( \frac{x}{x+2} + \frac{1}{2x+1} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \left( 3+x+\frac{1}{x} \right) \geq 6 \left[ \frac{2x^2+2x+2}{(x+2)(2x+1)} + 1 \right] \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x} \geq \frac{3(x^2+x+1)}{2x^2+5x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x} \geq \frac{(x-1)^2}{2x^2+5x+2} \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+3x+2) \geq 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Trường hợp 2:**  $v=w \Rightarrow y=z$ . Do tính thuần nhất của (2) nên ta giả sử  $y=z=1, x \leq 2$

$$\text{Bất đẳng thức (2)} \Leftrightarrow (x+2) \left( \frac{1}{x} + 2 \right) \geq 6 \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(2x+1) \geq 3x(x^2+x+4) \Leftrightarrow (2-x)(x-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài toán được chứng minh.

Tuy nhiên không phải trường hợp nào ta cũng có thể đổi biến để loại bỏ điều kiện như các ví dụ ở trên, và định lý ABC mở rộng là một giải pháp cho những trường hợp như vậy:

**Định lý ABC mở rộng**

i) Cho  $a, b, c$  đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng  $abc, a+b+c$  đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì  $ab+bc+ca$  sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau.

ii) Cho  $a, b, c$  đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng  $abc, ab+bc+ca$  đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì  $a+b+c$  sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau.

**Chứng minh**

i) Giả sử  $a+b+c=1$  và  $abc=m$  (trường hợp  $a+b+c=n$  có thể đưa về trường hợp này một cách dễ dàng bằng cách đặt  $a=nx, b=ny, c=nz$ , bạn đọc cũng đã được xem qua kỹ thuật này trong phần chứng minh định lý ABC ở các phần trên).

Ta sẽ chứng minh  $ab+bc+ca$  đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau trong cả hai trường hợp  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ .

Đặt  $ab+bc+ca=S$ . Một lần nữa, ta lại đưa về bài toán tồn tại nghiệm của phương trình:

Đặt  $f(X) = X^3 - X^2 + SX - m$ . Ta có:  $f'(X) = 3X^2 - 2X + S$ .

Phương trình có hai nghiệm  $X_1 = \frac{1+\sqrt{1-3S}}{3}; X_2 = \frac{1-\sqrt{1-3S}}{3}$

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi  $f(X_2) \geq 0, f(X_1) \leq 0$ .

Ta có:  $f(X_2) \geq 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_2 + S - 9m \geq 0$ , giả sử có tập nghiệm là  $R_{X_2}$

$f(X_1) \leq 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_1 + S - 9m \leq 0$ , giả sử có tập nghiệm là  $R_{X_1}$

Trước tiên ta sẽ chứng minh cho trường hợp  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Gọi  $S_{\min}, S_{\max}$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong tập  $R_{X_1} \cap R_{X_2}$  (giao của hai tập này khác rỗng, nếu không phương trình không có nghiệm với mọi giá trị của  $S$ ). Nhận xét rằng hai giá trị này là nghiệm của một trong hai phương trình  $(6S-2)X_1 + S - 9m = 0$  hay  $(6S-2)X_2 + S - 9m = 0$  (các giá trị này chắc chắn tồn tại, nếu không thì phương trình bậc 3 sẽ có nghiệm khi  $S$  chạy tới cộng vô cùng hoặc âm vô cùng), khi đó ta sẽ có  $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$ . Bây giờ ta sẽ kiểm tra khi  $S$  đạt một trong hai giá trị này thì liệu có tồn tại ba số thực  $a, b, c$  không và hình thù của  $a, b, c$  sẽ ra sao.

Điều đầu tiên là rõ ràng, vì  $S_{\min}, S_{\max} \in R_{X_1} \cap R_{X_2}$ . Điều thứ hai, do  $S_{\min}, S_{\max}$  là nghiệm của một trong hai phương trình  $(6S-2)X_1 + S - 9m = 0$  hay  $(6S-2)X_2 + S - 9m = 0$  nên

hoặc là  $f(X_1)=0$ , hoặc là  $f(X_2)=0$ . Khi này phương trình bậc ba đã cho sẽ có nghiệm kép, hay nói cách khác, lúc này hình thù của  $(a,b,c)$  là  $(x,x,y)$ .

Bây giờ ta sẽ chứng minh cho trường hợp  $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ . Trước hết ta cần phải có  $m \geq 0$ .

Nhận xét rằng  $0 \notin R_{X_1} \cap R_{X_2}$ , vì không tồn tại các số thực  $a,b,c$  thoả mãn  $a+b+c=1$ ,  $ab+bc+ca=0, abc \geq 0$ . Điều này có nghĩa là  $R_{X_1} \cap R_{X_2}$  tách biệt thành các khoảng mà các cận là cùng âm hoặc cùng dương. Gọi  $R_3$  là tập  $R_{X_1} \cap R_{X_2}$  bỏ đi các đoạn âm. Gọi  $S_{\min}, S_{\max}$  là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong tập  $R_3$  này. Ta có:  $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$ .

Lý luận tương tự như trường hợp  $\mathbb{R}$ , ta cũng sẽ suy ra được khi  $S$  chạm các biên này thì hai trong ba biến  $(a,b,c)$  là bằng nhau.

ii) Bạn đọc có thể dễ dàng suy ra chứng minh định lý này sau khi đã xem qua chứng minh phần thứ nhất ở trên. Đối với  $a+b+c$  thì không có ràng buộc về cận trên khi  $a, b, c \geq 0$ . Tuy nhiên sẽ có cận dưới do  $a+b+c$  đã bị chặn dưới bởi 0.

Do đó nên trong trường hợp này chỉ tồn tại  $S_{\min}$ . Và ta đi tới kết luận  $a+b+c$  đạt giá trị nhỏ nhất khi hai trong ba biến  $a,b,c$  bằng nhau.

Định lý trên nói rằng chúng ta để tìm giá trị nhỏ nhất của  $ab+bc+ca$  hay  $a+b+c$  ta chỉ cần xét trường hợp hai trong ba biến  $a,b,c$  bằng nhau.

Chúng ta sẽ lướt qua một số ví dụ để xem cách áp dụng của định lý ABC mở rộng.

**Bài 4.** Cho các số thực dương  $a,b,c$  thoả mãn  $abc \geq 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } 1 \geq \frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \quad (1)$$

### Chứng minh

Nhận xét rằng hàm số bên phải giảm khi biến  $a$  tăng. Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh khi  $abc = 1$  (đối với trường hợp  $abc = k \geq 1$ , ta có:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{1+\frac{a}{k}+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+\frac{a}{k}} \leq 1)$$

$$(1) \Leftrightarrow f(a,b,c) = (1+a+b)(1+b+c)(1+c+a) - (1+a+b)(1+b+c) - (1+b+c)(1+c+a) - (1+c+a)(1+a+b) \geq 0$$

Nhận xét rằng bậc của đại lượng  $ab+bc+ca$  trong  $f(a,b,c)$  chỉ là bậc 1 ( $f(a,b,c)$  chỉ là bậc 3 theo  $a,b,c$ ). Vậy nên khi cố định  $a+b+c$  thì  $f(a,b,c)$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $ab+bc+ca$  đạt giá trị nhỏ nhất, khi này hai trong ba biến  $a,b,c$  bằng nhau. Ta đưa về bài toán:



Cho các số thực  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x^2y = 1$ . Chứng minh:  $\frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+x+y} \leq 1$  (2)

Thay  $y = \frac{1}{x^2}$  vào (2) ta được:  $\frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+x+\frac{1}{x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1)^2(x+1)}{(1+2x)(x^3+\bar{x}^2+1)} \leq 0$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

**Bài 5.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2 \quad (1)$$

### Chứng minh

Đối với bài toán này thì dù có cố định hai đại lượng nào đi nữa thì chúng ta đều sẽ không thu được một hàm số tốt với biến còn lại (tốt ở đây ngụ ý lời, lỗm hay đơn điệu).

Tuy nhiên ở đây, ta sẽ thấy được sự liên hệ giữa hai đại lượng  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  và  $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ , chúng là tổng và tích của các đại lượng  $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ .

Như vậy chúng ta hãy thử chuyển biến theo hướng này xem.

Đổi biến  $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$  ta dẫn tới bài toán tương đương sau:

Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn:  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2 \Leftrightarrow 2xyz + xy + yz + zx = 1$ .

Chứng minh rằng:  $x + y + z + 2\sqrt{xyz} \geq 2$ .

Như vậy ta sẽ cố định  $xyz$  và  $xy + yz + zx$  đưa về bài toán sau:

Cho  $a, b \geq 0$  và  $2a^2b + a^2 + 2ab = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của:  $2a + b + 2a\sqrt{b}$ .

Thay  $b = \frac{1-a^2}{2a^2+2a} = \frac{1-a}{2a}$  ( $a \leq 1$ ), ta cần chứng minh:  $2a + \frac{1-a}{2a} + \sqrt{2a(1-a)} \geq 2$  (2)

Thật vậy, bất đẳng thức (2)  $\Leftrightarrow \frac{1-a}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}}(1-a) \geq 2(1-a) \Leftrightarrow \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}} \geq 2$

Mặt khác  $\sqrt{\frac{2a}{1-a}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{(1-a)a}} \geq \frac{\sqrt{2a}}{\frac{1-a+a}{2}} \geq 2\sqrt{2a}$ .

Nên  $\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}} \geq \frac{1}{2a} + 2\sqrt{2a} \geq 2 \cdot \sqrt[3]{2} \geq 2$ .

Tóm lại bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

**Bài 6.** Cho các số thực  $x, y, z \geq 0$ .

Chứng minh: 
$$\frac{2x^2y^2z^2}{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3} + \frac{1}{3} \geq \frac{3xyz}{x^3 + y^3 + z^3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Đặt  $a = \frac{yz}{x^2}, b = \frac{xz}{y^2}, c = \frac{xy}{z^2}$ , bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}$

trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương thoả mãn  $abc = 1$ .

Sau phép đổi biến này thì bài toán trở nên rất đơn giản nếu sử dụng định lý ABC mở rộng.

Ta đưa về trường hợp duy nhất sau:

Cho các số thực dương  $x, y: x^2y = 1$ . Chứng minh rằng: 
$$\frac{2}{2x+y} + \frac{1}{3} \geq \frac{3}{x^2+2xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2x+\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{x^2+\frac{2}{x}} - 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2x^3+1} - \frac{2}{3} \geq \frac{3x}{x^3+2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)^2}{x^3+2} \geq \frac{2(x+1)(x-1)^2}{3(2x^3+1)} \Leftrightarrow (4x^4+10x^3-x+2)(x-1)^2 \geq 0$$

**Bài 7.** Cho các số dương  $a, b, c$ , chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 12$$

**Chứng minh**

**Bổ đề.** Với mọi  $x, y, z > 0, xyz = 1$ , ta có  $(x+y+z)^2 + \frac{15}{2} \geq \frac{11}{4}(x+y+z+xy+yz+zx)$

Chứng minh: Thật vậy, không giảm tổng quát, giả sử

$x = \min\{x, y, z\} \Rightarrow t^2 = xy \geq 1$  ( $t > 0$ ), đặt  $P(x, y, z)$  là hiệu VT - VP của bất đẳng thức trên. Thế thì ta có

$$P(x, y, z) - P(t, t, z) = \frac{(4xy(x+y) + 8xy\sqrt{xy} - 11xy - 3)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{4xy} \geq 0$$

Lại có:  $P(t, t, z) = P\left(t, t, \frac{1}{t^2}\right) = \frac{(5t^4 - 12t^3 + t^2 + 8t + 4)(t-1)^2}{4t^4} \geq 0$ .

Bổ đề được chứng minh.

**Áp dụng:** Sử dụng bổ đề này, ta có  $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)^2 \geq \frac{11}{4} \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{c^2} - \frac{15}{2}$

Như thế, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{11}{4} \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{c^2} - \frac{15}{2} \geq \left(12 - \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=1$ ,

$$\text{đặt } ab+bc+ca = \frac{1-q^2}{3} \quad (1 \geq q \geq 0), r = abc$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } 0 \leq (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 &= -27r^2 + 2(1-3q^2)r + \frac{1}{27}(1-q^2)^2(4q^2-1) \\ &= -\frac{1}{27} [27r - (1-q)^2(1+2q)] [27r - (1+q)^2(1-2q)] \end{aligned}$$

Chú ý rằng  $(1-q)^2(1+2q) - (1+q)^2(1-2q) = 4q^3 \geq 0$  và đây là một tam thức bậc 2 theo  $r$  nên theo định lý về dấu của tam thức bậc 2, ta phải có:

$$\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \leq r \leq \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \quad (*)$$

Bất đẳng thức (1) tương đương với

$$f(r) = \frac{11(1+2q^2)((1-q^2)^2 - 18r)}{27r^2} - 63 - \frac{36(11q^2+1)^2}{(2q^2+1)^2} \geq 0$$

Rõ ràng đây là hàm nghịch biến theo  $r$  nên có thể áp dụng định lý ABC mở rộng. Hoặc có thể chứng minh trực tiếp:

$$f(r) \geq f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right) = \frac{18q^2(8-28q+61q^2-148q^3+778q^4+1112q^5-892q^6)}{(1+2q^2)^2(1-q)^2(1+2q)^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Bài 8.** Cho  $x, y, z, k > 0$  thỏa mãn  $xyz=1$ , Chứng minh:

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+k}} + \sqrt[4]{\frac{y}{z+k}} + \sqrt[4]{\frac{z}{x+k}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

**Chứng minh**

**Bổ đề.** Với mọi  $a, b, c \geq 0$ , ta có  $2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + 3(a+b+c) \geq \frac{15(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$

Đặt  $b = a+x, c = a+y$  ( $x, y \geq 0$ ), bất đẳng thức trở thành

$$(x^2 - xy + y^2)a^3 + 3xy(2y-x)a^2 + (x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 + xy^3 + y^4)a + xy^3(x+y) \geq 0$$

Ta sẽ chứng minh:

$$g(a) = (x^2 - xy + y^2)a^2 + 3xy(2y - x)a + x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 + xy^3 + y^4 \geq 0$$

Thật vậy, ta có:  $\Delta_g = -(4x^6 - 24x^5y + 39x^4y^2 - 4x^3y^3 - 12x^2y^4 + 4y^6) = -f_1(x)$

Nếu  $x \geq 3y$ , ta có  $f_1(x) = 12xy(x - 2y)(2x^2(x - 3y) + xy^2 + y^3) \geq 0$  nên  $f_1(x)$  là hàm đồng biến, do đó  $f_1(x) \geq f_1(3y) = 31y^6 \geq 0$ . Nếu  $x \leq 3y$  thì

$$f_1(x) = (2x^3 - 6x^2y + xy^2 + y^3)^2 + x^3y^2(3y - x) + y^3(x^3 + 4y^3 - y(x + y)^2)$$

$$\geq y^3(x^3 + 4y^3 - y(x + y)^2) \geq y^3 \left[ \frac{1}{4}(x + y)^3 + 3y^3 - y(x + y)^2 \right]$$

$$= y^3 \left[ \frac{1}{8}(x + y)^3 + \frac{1}{8}(x + y)^3 + 3y^3 - y(x + y)^2 \right] \geq \left( \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} - 1 \right) y^4(x + y)^2 \geq 0$$

Do đó, trong mọi trường hợp, ta luôn có  $f_1(x) \geq 0$ , suy ra  $g(a) \geq 0$ .

Bổ đề được chứng minh.

**Áp dụng:** Do  $x, y, z > 0, xyz = 1$  nên tồn tại các số dương  $a, b, c$  sao cho

$$x = \frac{a^5}{b^5}, y = \frac{c^5}{a^5}, z = \frac{b^5}{c^5}. \text{ Bất đẳng thức trở thành: } \sum_{cyc} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4} \sqrt[4]{c^5 + ka^5}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Holder**, ta có:

$$\left( \sum_{cyc} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4} \sqrt[4]{c^5 + ka^5}} \right)^4 \sum_{cyc} (c^5 + ka^5) \geq \left( \sum_{cyc} \frac{a^2}{b} \right)^5$$

$$\text{Ta còn phải chứng minh: } \left( \sum_{cyc} \frac{a^2}{b} \right)^5 \geq \frac{81}{k+1} \sum_{cyc} (c^5 + ka^5) = 81(a^5 + b^5 + c^5)$$

Sử dụng bổ đề trên, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$3 \left[ \frac{5(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} - (a + b + c) \right]^5 \geq 32(a^5 + b^5 + c^5) \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a + b + c = 1$ , đặt  $ab + bc + ca = \frac{1 - q^2}{3}$  ( $1 \geq q \geq 0$ ),  $r = abc$ .

$$\text{Sử dụng đẳng thức } a^5 + b^5 + c^5 = \frac{1}{9}(15(q^2 + 2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1).$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } (5q^2 + 1)^5 \geq 9[15(q^2 + 2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1].$$

Nhận thấy VT - VP là hàm bậc nhất theo  $r$  do đó có thể áp dụng định lý ABC mở rộng. Tuy nhiên ta có thể sử dụng nhận xét (\*) (xem bài 7) để chứng minh trực tiếp như sau:

$$\text{Ta có: } (5q^2 + 1)^5 - 9[15(q^2 + 2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1]$$

$$\geq (5q^2 + 1)^5 - 9 \left[ 15(q^2 + 2) \frac{(1 - q)^2(1 + 2q)}{27} + 35q^4 - 25q^2 - 1 \right]$$

$$= 5q^2(625q^8 + 625q^6 + 250q^4 - 2q^3 - 10q^2 - 4q + 55) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**Bài tập áp dụng**

**Bài 9.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{x+y+z}{3} + \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{2}{3}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$  có tích là 1. CMR:  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq a + b + c + ab + bc + ca$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c \geq 0$  Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

**Bài 12.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$$

**Bài 13. [Việt Nam MO 1996]** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + abc = 4$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c \geq ab + bc + ca$

**Bài 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca + 6abc = 9$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c + 3abc \geq 6$

**Bài 15.** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn:  $xyz \geq 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq 1$

**Bài 16.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  và  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$3^6(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \leq 8(a+b+c)^6$$

**Bài 17.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn:  $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$ .

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:  $P = \sqrt{abc} + \sqrt{a+b+c}$

**Bài 18.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c - 3 \leq \frac{9}{4}(abc - 1)$

**Bài 19.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geq \frac{10}{(a+b+c)^2}$$

**Bài 20.** Cho các số dương  $a, b, c$ , chứng minh

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}}$$

**Bài 21.** Cho các số dương  $a, b, c$ , chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq \sqrt[6]{\frac{a^6+b^6+c^6}{3}}$$

**Bài 22.** Cho các số dương  $a, b, c$ , chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\sqrt{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)} + \sqrt{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)} \\ &\quad + \sqrt{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)} \geq a^2+b^2+c^2 \end{aligned}$$

#### IV. MỞ RỘNG TẬP ĐÓNG VỚI ABC

Trong phần này, chúng ta sẽ xét qua một lớp các bài toán mà các biến bị chặn trong các tập đóng. Đối với lớp bài toán này, chúng ta cũng có một số phương pháp khác để giải quyết. Tuy nhiên ở đây xin giới thiệu với hạn đọc về phương pháp này trước, tiếp theo chúng ta sẽ nghiên cứu về cách ứng dụng ABC trong các bài toán này sau:

**Bài toán tổng quát:** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ . Chứng minh rằng

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq C \text{ trong đó } a, b, C \text{ là các hằng số cho trước.}$$

Gặp những tình huống như thế này, dấu bằng của bất đẳng thức thường xảy ra tại các giá trị biên, nghĩa là bằng  $a$  hay  $b$ . Trong những trường hợp như vậy, ta sẽ cố gắng chứng minh  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min\{f(a, x_2, \dots, x_n), f(b, x_2, \dots, x_n)\}$ . Cuối cùng ta sẽ thu được giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được khi một số giá trị bằng  $a$  và các giá trị còn lại bằng  $b$  (xem phương pháp dồn biến ở chương trước). Ta xét một số ví dụ:

**Bài 1.** Cho  $a, b, c \in [0, 1]$ . Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a, b, c) = a + b + c - ab - bc - ca$$

**Giải**

Ta sẽ chứng minh:  $f(a, b, c) \leq \max\{f(0, b, c), f(1, b, c)\}$  (\*).

Có thể chứng minh trực tiếp bằng phương pháp đại số như sau:

$$[f(a, b, c) - f(0, b, c)][f(a, b, c) - f(1, b, c)] = c(c-1)(1-a-b)^2 \leq 0, \text{ từ đó suy ra (*)}$$

Hay bằng một cái nhìn giải tích, ta có thể suy ra kết quả nhanh chóng hơn nhờ nhận xét hàm số đơn điệu theo biến  $a$ . Và từ đó trực tiếp suy ra (\*).

Hoàn toàn thực hiện những bất đẳng thức tương tự đối với các biến  $b, c$ , ta sẽ suy ra tính chất sau:  $f(a, b, c) \leq \max\{f(0, 0, 0); f(0, 0, 1); f(0, 1, 1); f(1, 1, 1)\}$ .

Ta kết luận giá trị lớn nhất của  $f(a, b, c)$  là 1.

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như:  $a = b = 0, c = 1$ .

**Bài 2.** Cho  $a, b, c \in [1, 2]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

**Giải**

Ta sẽ coi như  $b, c$  là các hằng số, và  $a$  là biến:  $g'(a, b, c) = \frac{2b}{(c+a)^3} + \frac{2c}{(b+a)^3} > 0$

Như vậy  $g$  là hàm lồi theo biến  $a$ , tức là  $g$  đạt giá trị lớn nhất khi  $a$  chạm các biên.

Từ đây ta suy ra được điều mong muốn:  $g(a, b, c) \leq \max \{g(1, b, c), g(2, b, c)\}$ .

Viết những bất đẳng thức tương tự đối với các biến  $b, c$ , ta suy ra tính chất sau:

$$g(a, b, c) \leq \max \{g(1, 1, 1); g(2, 1, 1); g(2, 2, 1); g(2, 2, 2)\}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của  $g$  là  $\frac{5}{3}$ , đạt được khi  $(a, b, c) = (2, 1, 1)$  và các hoán vị.

Như vậy qua hai ví dụ các bạn cũng đã có thể phần nào làm quen được với phương pháp này. Ở đây chúng tôi sẽ nêu ra một phương pháp khác, chứng minh dựa vào định lý ABC.

Trong các phần trên, ta thấy rằng định lý ABC chỉ áp dụng được khi các biến chạy hoàn toàn trong  $\mathbb{R}$  hoặc  $\mathbb{R}^+$ , vậy muốn áp dụng định lý ABC cho các miền nhỏ hơn, ta phải kéo giãn miền đó thành  $\mathbb{R}$  hoặc  $\mathbb{R}^+$ .

Quay lại bài toán 1.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c \in [0, 1]$ . Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a, b, c) = a + b + c - ab - bc - ca$$

Ta sẽ tìm cách kéo giãn đoạn  $[0, 1]$  thành  $\mathbb{R}^+$ .

Nhận xét nếu nghịch đảo  $a \rightarrow \frac{1}{a}$ , ta thu được bộ số nằm trong đoạn  $[1; +\infty]$ . Vẫn chưa biến thành  $\mathbb{R}^+$  được, ta lại tiếp tục trừ bộ số cho 1:  $\frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} - 1$  và ta sẽ thu được bộ số nằm trong đoạn  $[0, +\infty]$ . Như vậy ta đã chuyển  $a \rightarrow \frac{1}{a} - 1 = x$  để kéo  $[0, 1] \rightarrow [0; +\infty]$ .

Từ những ý tưởng như trên, ta đi tới lời giải sau:

Đặt  $a = \frac{1}{1+x}, b = \frac{1}{1+y}, c = \frac{1}{1+z}$  trong đó  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ . Biểu thức đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= g(x, y, z) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+x)(1+y)} - \frac{1}{(1+y)(1+z)} - \frac{1}{(1+z)(1+x)} \\ &= \frac{(1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) + (1+x)(1+y) - 3 - x - y - z}{(1+x)(1+y)(1+z)} = \frac{xy + yz + zx + x + y + z}{xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1} \end{aligned}$$

Đến đây ta có luôn  $g(x, y, z) \leq 1$ , không cần áp dụng thêm định lý ABC nữa, tuy nhiên ta cũng có thể áp dụng định lý ABC một cách dễ dàng để đưa về trường hợp hai biến.

Có hai lợi thế khi chúng ta kéo dài một tập đóng thành tập  $\mathbb{R}^+$  như thế này, thứ nhất là ta có thể áp dụng được định lý ABC như trong ví dụ ở trên, thứ hai là ta có thể đánh giá được dễ dàng hơn, vì ở đây ta sẽ đánh giá các biến với số 0, và điều này lúc nào cũng khá đơn giản.

**Bài 3.** Cho  $x, y, z \in [1, 2]$ . Chứng minh rằng:  $g(x, y, z) = (x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq 10$

### Chứng minh

Một lần nữa ta sẽ sử dụng kỹ thuật kéo dài các biến.

Ta sẽ sử dụng định lý ABC, trước tiên kéo dài  $[1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^+$  như sau:  $x \rightarrow \frac{1}{x-1} - 1 = a$ .

Như vậy, đặt  $x = \frac{a+2}{a+1}$ ,  $y = \frac{b+2}{b+1}$ ,  $z = \frac{c+2}{c+1}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ . Ta cần chứng minh bài toán sau:

$$f(a, b, c) = \left( \frac{a+2}{a+1} + \frac{b+2}{b+1} + \frac{c+2}{c+1} \right) \left( \frac{a+1}{a+2} + \frac{b+1}{b+2} + \frac{c+1}{c+2} \right) \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{M \cdot N}{(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2)} \leq 10$$

trong đó  $M = (a+2)(b+1)(c+1) + (a+1)(b+2)(c+1) + (a+1)(b+1)(c+2)$

và  $N = (a+1)(b+2)(c+2) + (a+2)(b+1)(c+2) + (a+2)(b+2)(c+1)$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức:  $MN - 10(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2) \leq 0$  không thể đánh giá bằng định lý ABC được, do hệ số của  $a^2b^2c^2$  cuối cùng thu được là âm (bạn đọc có thể nhầm ra không mấy khó khăn). Thế nhưng chúng ta không bỏ cuộc một cách dễ dàng, chúng ta sẽ thử sử dụng định lý ABC mở rộng để giải quyết trường hợp này. Cố định  $abc$  và  $a+b+c$ , và ta sẽ thấy biểu thức thu được là đa thức bậc nhất theo  $ab+bc+ca$ . Vậy nên ta đi đến kết luận bất đẳng thức đã cho đạt cực trị khi có hai biến bằng nhau. Như vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$f(a, a, b) = \left( 2 \cdot \frac{a+2}{a+1} + \frac{b+2}{b+1} \right) \left( 2 \cdot \frac{a+1}{a+2} + \frac{b+1}{b+2} \right) \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \left( 2 \cdot \frac{a+2}{a+1} - \frac{b+2}{b+1} \right) \left( 2 \cdot \frac{a+1}{a+2} - \frac{b+1}{b+2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (ab+3b+2)(ab+3a+2) \geq 0$$

Như vậy là bài toán đã được chứng minh.



Sau đây là một số bài tập cho các bạn áp dụng:

**Bài 4:** Cho  $a, b, c \in [1, 2]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc}$

**Bài 5:** [VNTST 2006]

Cho  $x, y, z \in [1, 2]$ . Chứng minh:  $(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right)$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$$

**Bài 7.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $(a+b+c)^6 \geq 64(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)$

**Bài 8.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$  (1)

**Bài 9.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq abc + 2\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{3}}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2+bc} + \frac{1}{3b^2+ca} + \frac{1}{3c^2+ab} \geq \frac{45}{7(a^2+b^2+c^2)+13(ab+bc+ca)}$$

**Bài 13.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)c}{a^2+b^2} + \frac{(b+c)a}{b^2+c^2} + \frac{(c+a)b}{c^2+a^2} \geq 2$$

## V. ĐỊNH LÝ ABC TỔNG QUÁT

Trong các mục trên định lý **ABC** mới chỉ được sử dụng để xét các bài toán 3 biến. Bây giờ chúng ta sẽ tìm cách mở rộng định lý **ABC** cho các bài toán nhiều biến. Chúng ta sẽ cần sử dụng khái niệm mới sau đây.

### 1. Khả ABC

**a. Định nghĩa:** Xét một biểu thức ba biến  $f(a, b, c)$ .

Ta gọi  $f(a, b, c)$  là một biểu thức khả **ABC** nếu như bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  có thể được chứng minh dựa vào định lý **ABC** để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (Điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả **ABC** đối với  $abc$ )

**b. Phương pháp chứng minh khả ABC:**

Để chứng minh một biểu thức  $f(a, b, c)$  là khả **ABC**, ta sẽ chuyển biểu thức  $f(a, b, c)$  thành biểu thức  $g$  đối với các biến  $A = a + b + c, B = ab + bc + ca, C = abc$ . Biểu thức  $f(a, b, c)$  là một biểu thức khả **ABC** nếu như  $g(A, B, C)$  là một hàm lồi theo biến  $A, B$  hoặc  $C$ .

**Ví dụ:** Chứng minh biểu thức sau là khả **ABC**

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a)$$

**Giải**

Đặt  $A = a + b + c, B = ab + bc + ca, C = abc$ , ta có:

$$f(a, b, c) = g(A, B, C) = A^3 - 3AB + 3C + 3C - AB + 3C = A^3 - 4AB + 9C$$

Xét  $g(A, B, C)$  theo biến  $C$ . Ta có:  $g' = 9, g'' = 0$  do đó  $g$  là hàm lồi theo biến  $C$ .

Vậy biểu thức  $f(a, b, c)$  là khả **ABC**.

### 2. Định lý ABC tổng quát

#### Định lý ABC tổng quát

Xét một biểu thức đối xứng  $n$  biến  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , trong đó  $f$  có giá trị nhỏ nhất và  $n \geq 3$ . Ta sẽ coi  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  như là một biểu thức ba biến  $g(a_1, a_2, a_3)$  với các số  $a_4, a_5, \dots, a_n$  được coi như là các hằng số. Khi đó nếu  $g$  khả **ABC** thì bất đẳng thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$  có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i)  $m$  biến bằng nhau,  $n - m$  biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả **ABC** đối với  $abc$ )

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên.

## V. ĐỊNH LÝ ABC TỔNG QUÁT

Trong các mục trên định lý **ABC** mới chỉ được sử dụng để xét các bài toán 3 biến. Bây giờ chúng ta sẽ tìm cách mở rộng định lý **ABC** cho các bài toán nhiều biến. Chúng ta sẽ cần sử dụng khái niệm mới sau đây.

### 1. Khả ABC

**a. Định nghĩa:** Xét một biểu thức ba biến  $f(a, b, c)$ .

Ta gọi  $f(a, b, c)$  là một biểu thức khả **ABC** nếu như bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  có thể được chứng minh dựa vào định lý **ABC** để đưa về hai trường hợp sau:

- i) Hai biến bằng nhau.
- ii) Một biến bằng 0 (Điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả **ABC** đối với  $abc$ )

**b. Phương pháp chứng minh khả ABC:**

Để chứng minh một biểu thức  $f(a, b, c)$  là khả **ABC**, ta sẽ chuyển biểu thức  $f(a, b, c)$  thành biểu thức  $g$  đối với các biến  $A = a + b + c, B = ab + bc + ca, C = abc$ . Biểu thức  $f(a, b, c)$  là một biểu thức khả **ABC** nếu như  $g(A, B, C)$  là một hàm lồi theo biến  $A, B$  hoặc  $C$ .

**Ví dụ:** Chứng minh biểu thức sau là khả **ABC**

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a)$$

**Giải**

Đặt  $A = a + b + c, B = ab + bc + ca, C = abc$ , ta có:

$$f(a, b, c) = g(A, B, C) = A^3 - 3AB + 3C + 3C - AB + 3C = A^3 - 4AB + 9C$$

Xét  $g(A, B, C)$  theo biến  $C$ . Ta có:  $g' = 9, g'' = 0$  do đó  $g$  là hàm lồi theo biến  $C$ .

Vậy biểu thức  $f(a, b, c)$  là khả **ABC**.

### 2. Định lý ABC tổng quát

#### Định lý ABC tổng quát

Xét một biểu thức đối xứng  $n$  biến  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , trong đó  $f$  có giá trị nhỏ nhất và  $n \geq 3$ . Ta sẽ coi  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  như là một biểu thức ba biến  $g(a_1, a_2, a_3)$  với các số  $a_4, a_5, \dots, a_n$  được coi như là các hằng số. Khi đó nếu  $g$  khả **ABC** thì bất đẳng thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$  có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

- i)  $m$  biến bằng nhau,  $n - m$  biến bằng nhau.
- ii) Một biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả **ABC** đối với  $abc$ )

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên.

Ta giả sử  $f$  có giá trị nhỏ nhất như giả thiết đã nêu và giá trị nhỏ nhất xảy ra tại điểm  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (\*)

Nếu  $x_1 x_2 \dots x_n = 0$  hay  $x_i$  chỉ có khả năng nhận một trong hai giá trị cố định thì giá trị nhỏ nhất này không âm theo giả thiết đã nêu trong định lý.

Nếu  $x_i$  có khả năng nhận ba giá trị khác nhau và khác 0, ta giả sử  $(x_1, x_2, x_3)$  là một bộ mà ba giá trị trong bộ khác 0 và khác nhau từng đôi một. Ta cố định các biến  $x_4, x_5, \dots, x_n$  như là những hằng số và xét hàm  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$  như là hàm  $g(x_1, x_2, x_3)$ .

Theo giả thiết thì  $g$  là khả ABC, vậy nên nó đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai số bằng nhau, hay một số bằng 0. Điều này cũng có nghĩa là tồn tại bộ  $(a, b, c)$  để  $g(x_1, x_2, x_3) > g(a, b, c)$  hay  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \geq f(a, b, c, x_4, \dots, x_n)$ .

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (\*). Tóm lại định lý ABC tổng quát đã được chứng minh.

### 3. Ứng dụng định lý ABC tổng quát

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)}{4abcd} \geq 1 + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{ab + ac + ad + bc + bd + cd} \quad (1)$$

#### Chứng minh

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow f(a, b, c, d) = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 4abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 0$  (2)

$$- 4abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 12abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 0 \quad (2)$$

Nhận xét rằng nếu cố định biến  $d$  thì  $f$  là hàm đối xứng theo ba biến, và hơn nữa  $f$  khả ABC.

Như vậy theo định lý ta sẽ chỉ phải xét các trường hợp sau (ta sẽ xử lý với (1)):

i) Với  $a=0$ : Bất đẳng thức là hiển nhiên.

ii) Xét  $a=b=x, c=d=y$ :

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{3(x^4 + y^4)}{2x^2 y^2} \geq 1 + \frac{6(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4xy} \Leftrightarrow \frac{3(x+y)^2(x-y)^2}{2x^2 y^2} \geq \frac{2(x-y)^2}{x^2 + y^2 + 4xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức  $(x+y)^2 \geq 4xy$ ;  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  ta sẽ chứng minh được trường hợp này.

iii) Xét  $a=b=c=x, d=y$ :

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{3(3x^4 + y^4)}{4x^3 y} \geq 1 + \frac{3(3x^2 + y^2)}{3x^2 + 3xy} \Leftrightarrow \frac{3(x-y)^2(3x^2 + 2xy + y^2)}{4x^3 y} \geq \frac{3(x-y)^2}{3x^2 + 2xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức  $3x^2 + 2xy \geq 3x^2$  và  $3x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$  ta sẽ chứng minh được trường hợp này. Tóm lại theo định lý ta có điều phải chứng minh.

Ta giả sử  $f$  có giá trị nhỏ nhất như giả thiết đã nêu và giá trị nhỏ nhất xảy ra tại điểm  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (\*)

Nếu  $x_1 x_2 \dots x_n = 0$  hay  $x_i$  chỉ có khả năng nhận một trong hai giá trị cố định thì giá trị nhỏ nhất này không âm theo giả thiết đã nêu trong định lý.

Nếu  $x_i$  có khả năng nhận ba giá trị khác nhau và khác 0, ta giả sử  $(x_1, x_2, x_3)$  là một bộ mà ba giá trị trong bộ khác 0 và khác nhau từng đôi một. Ta cố định các biến  $x_4, x_5, \dots, x_n$  như là những hằng số và xét hàm  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$  như là hàm  $g(x_1, x_2, x_3)$ .

Theo giả thiết thì  $g$  là khả ABC, vậy nên nó đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai số bằng nhau, hay một số bằng 0. Điều này cũng có nghĩa là tồn tại bộ  $(a, b, c)$  để  $g(x_1, x_2, x_3) > g(a, b, c)$  hay  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \geq f(a, b, c, x_4, \dots, x_n)$ .

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (\*). Tóm lại định lý ABC tổng quát đã được chứng minh.

### 3. Ứng dụng định lý ABC tổng quát

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)}{4abcd} \geq 1 + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{ab + ac + ad + bc + bd + cd} \quad (1)$$

#### Chứng minh

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow f(a, b, c, d) = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$$- 4abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 12abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 0 \quad (2)$$

Nhận xét rằng nếu cố định biến  $d$  thì  $f$  là hàm đối xứng theo ba biến, và hơn nữa  $f$  khả ABC.

Như vậy theo định lý ta sẽ chỉ phải xét các trường hợp sau (ta sẽ xử lý với (1)):

i) Với  $a=0$ : Bất đẳng thức là hiển nhiên.

ii) Xét  $a=b=x, c=d=y$ :

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{3(x^4 + y^4)}{2x^2 y^2} \geq 1 + \frac{6(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4xy} \Leftrightarrow \frac{3(x+y)^2(x-y)^2}{2x^2 y^2} \geq \frac{2(x-y)^2}{x^2 + y^2 + 4xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức  $(x+y)^2 \geq 4xy$ ;  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  ta sẽ chứng minh được trường hợp này.

iii) Xét  $a=b=c=x, d=y$ :

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{3(3x^4 + y^4)}{4x^3 y} \geq 1 + \frac{3(3x^2 + y^2)}{3x^2 + 3xy} \Leftrightarrow \frac{3(x-y)^2(3x^2 + 2xy + y^2)}{4x^3 y} \geq \frac{3(x-y)^2}{3x^2 + 2xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức  $3x^2 + 2xy \geq 3x^2$  và  $3x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$  ta sẽ chứng minh được trường hợp này. Tóm lại theo định lý ta có điều phải chứng minh.

**Bài 2.** Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{2n\sqrt{n-1}}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq n + 2\sqrt{n-1} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Đặt  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = VT(1)$ . Cố định  $a_4, a_5, \dots, a_n$  ta được hàm ba biến và khả ABC.

Như vậy ta chỉ cần xét 2 trường hợp:

i) Với  $a_1 = 0$ : Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

ii) Xét khi  $m$  biến bằng  $x$  và  $(n-m)$  biến bằng  $y$ , ta có:  $mx + (n-m)y = n$ .

$$\text{Chứng minh: } \frac{m}{x} + \frac{n-m}{y} + \frac{2n\sqrt{n-1}}{mx^2 + (n-m)y^2} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

$$\text{Ta đưa về bài toán: } \frac{mx + (n-m)y}{n} \left( \frac{m}{x} + \frac{n-m}{y} \right) + \frac{2\sqrt{n-1} [mx + (n-m)y]^2}{n [mx^2 + (n-m)y^2]} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(n-m)(x-y)^2}{nxy} \geq \frac{2\sqrt{n-1}m(n-m)(x-y)^2}{nm x^2 + n(n-m)y^2} \Leftrightarrow [mx^2 + (n-m)y^2 - 2\sqrt{n-1}xy](x-y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên là đúng dẫn do:  $mx^2 + (n-m)y^2 \geq 2\sqrt{m(n-m)}xy \geq 2\sqrt{n-1}xy$ .

Tóm lại bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

**Bài 3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ : Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2}{n^3(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - 2n \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Ở đây, cố định  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  và  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$  là hoàn toàn không có lợi vì bậc của  $a_1 a_2 \dots a_n$  khi chuyển về đa thức sẽ rất cao. Vì lý do này ta sẽ cố định  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$  và  $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ , rõ ràng  $f$  sẽ trở thành một đa thức bậc 2 theo  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  hay một đa thức bậc nhất theo  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ .

Như vậy  $f$  khả ABC với ba biến bất kỳ trong  $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$ . Ở đây ta chứng minh khả ABC đối với  $ab + bc + ca$  nên ta chỉ có một trường hợp duy nhất đó là:  $m$  biến bằng nhau,  $n-m-1$  biến bằng nhau.

Giả sử  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (x^n, x^n, \dots, x^n, y^n, y^n, \dots, y^n)$  ( $m$  biến  $x$ ,  $n-m$  biến  $y$ ).

Giả sử  $x \geq y$  ( $x \leq y$  làm tương tự). Ta đưa về bài toán sau:

Cho  $x, y \geq 0$ . Chứng minh rằng: 
$$\frac{m(n-m)(x^n - y^n)^2}{n^3 m x^n + n^3 (n-m) y^n} \leq \frac{m x^n + (n-m) y^n}{n} - x^m y^{n-m}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể cho  $y = 1, x \geq 1$  và ta đưa về bài toán:

$$f(x) = n^2 (m x^n + n - m)^2 - n^3 x^m (m x^n + n - m) - m(n-m)(x^n - 1)^2 \geq 0$$

Chúng ta đã đưa được về trường hợp một biến, nhưng việc chứng minh cho đến thời điểm này vẫn không dễ dàng chút nào. Thực chất chúng ta vẫn vướng vào một vấn đề khó khăn khi biến  $m$  vẫn chạy và không liên tục trong đoạn  $[0, n]$ ...

Qua các bài toán 1 và 2, chúng ta có cảm giác rằng có vẻ  $m$  "ưa"  $0, 1, n-1, n$  hơn cả. Vậy phải chăng chúng ta có thể đưa  $m$  về một trong các giá trị này, nếu đúng như thế công việc của chúng ta sẽ dễ dàng hơn rất nhiều.

Rất tuyệt vời là điều này có thật. Điều đó sẽ được phát biểu trong các kết quả sau đây:

**Kết quả 1:** Trong tập  $\mathbb{R}$  hay  $\mathbb{R}^+$ , khi hai giá trị  $M_1 = a + b + c, M_2 = ab + bc + ca$  được cố định và giá trị  $M_3 = abc$  đạt giá trị lớn nhất khi  $(a, b, c) = (x, x, y)$  hoặc các hoán vị thì  $x \leq y$ , và nếu  $M_3$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $(a, b, c) = (z, z, t)$  hoặc các hoán vị thì  $z \geq t$ .

### Chứng minh

Chúng ta hãy xét trường hợp khi  $M_3$  đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất khi có hai biến bằng nhau và đưa về bài toán:

$$M_1 = 2x + y \text{ và } M_2 = x^2 + 2xy. \text{ Hãy tìm giá trị lớn nhất của: } M_3 = x^2 y.$$

$$\text{Thay } y = M_1 - 2x, \text{ chúng ta có: } 3x^2 - 2M_1 x + M_2 = 0$$

$$\text{và } M_3 = x^2 (M_1 - 2x) = -2x^3 + M_1 x^2 = \frac{2(3M_2 - M_1^2)x + M_1 M_2}{9}$$

$$(\text{nhận xét } 3M_2 - M_1^2 \leq 0)$$

Do đó, giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của  $M_3$  phụ thuộc hoàn toàn vào giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $x$ . Ở đây cụ thể  $M_3$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt khi  $x$  đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất, tức là lần lượt khi:

$$x = \frac{M_1 - \sqrt{M_1^2 - 3M_2}}{3} \leq \frac{M_1}{3} \leq y \text{ và } x = \frac{M_1 + \sqrt{M_1^2 - 3M_2}}{3} \geq \frac{M_1}{3} \geq y.$$

Hoàn toàn với một ý tưởng tương tự, chúng ta mong đợi những kết quả sau:

**Kết quả 2:** Trong tập  $\mathbb{R}^+$ , khi hai giá trị  $M_1 = a + b + c, M_3 = abc$  được cố định và giá trị  $M_2 = ab + bc + ca$  đạt giá trị lớn nhất khi  $(a, b, c) = (x, x, y)$  hoặc các hoán vị thì  $x \leq y$ , đạt giá trị nhỏ nhất khi  $(a, b, c) = (z, z, t)$  hoặc các hoán vị thì  $z \geq t$ .

**Chứng minh**

Trong phần chứng minh của kết quả 1, chúng ta đã thu được đẳng thức sau:

$$M_3 = \frac{2(3M_2 - M_1^2)x + M_1M_2}{9} \Leftrightarrow M_2 = \frac{9M_3 + 2M_1^2x}{6x + M_1} = \frac{M_1^2}{3} + \frac{27M_3 - M_1^3}{6x + M_1}$$

Nhận xét rằng trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì  $27M_3 - M_1^3 \leq 0$  nên  $M_2$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt khi  $x$  đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất. Nhận xét rằng  $x$  là nghiệm không âm của phương trình:  $2x^3 - M_1x^2 + M_3 = 0$ . Giả sử phương trình này có 3 nghiệm là:  $a \leq 0 \leq b \leq c$ .

Như vậy  $M_2$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt khi  $x$  nhận giá trị  $b$  và  $c$ .

Ta sẽ chứng minh  $b \leq \frac{M_1}{3} \leq c$  để suy ra  $b \leq y \leq c$ . Thật vậy, ta có:

$$\frac{M_1}{2} = a + b + c \Rightarrow a = \frac{M_1}{2} - b - c. \text{ Thay giá trị } a \text{ này vào biểu thức: } ab + bc + ca = 0 \text{ ta thu được:}$$

$$(b+c)\left(\frac{M_1}{2} - b - c\right) + bc = 0 \Leftrightarrow \frac{M_1}{3} = \frac{2(b^2 + c^2 + bc)}{3(b+c)}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra  $b \leq \frac{M_1}{3} \leq c$  và ta đã thu được điều phải chứng minh.

**Kết quả 3:** Trong tập  $\mathbb{R}^+$ , khi hai giá trị  $M_2 = ab + bc + ca, M_3 = abc$  được cố định thì giá trị  $M_1 = a + b + c$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $(a, b, c) = (x, x, y)$  hay các hoán vị, khi đó  $x \geq y$ .

**Chứng minh**

Ta có  $M_1 = 2x + \frac{M_3}{x^2}$  trong đó  $x$  là nghiệm của phương trình  $x^3 - M_2x + 2M_3 = 0$ .

Phương trình này có hai nghiệm dương và một nghiệm âm. Gọi chúng là  $a \leq 0 \leq b \leq c$

Ta có:  $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -b - c$ ;  $abc = -(b+c)bc = -2M_3 \Rightarrow bc(b+c) = M_3$

Từ đây dễ dàng suy ra:  $b \leq M_3 \leq c$  hay  $b \leq y \leq c$ .

Bây giờ ta sẽ đánh giá xem  $M_1(b)$  hay  $M_1(c)$  là giá trị nhỏ nhất của  $M_1$ .

Ta có:  $M_1(b) - M_1(c)$

$$= 2(b-c) + \frac{M_3(c-b)(c+b)}{b^2c^2} = (b-c) \frac{2b^2c^2 - M_3(b+c)}{b^2c^2} = (b-c) \frac{2b^2c^2 - bc(b+c)^2}{b^2c^2} \geq 0$$

Như vậy  $M_1$  nhỏ nhất khi  $x = c \geq y$ .

Từ ba kết quả này, chúng ta có thể tổng quát định lý ABC mở rộng cho  $n$  biến như sau:



**Tổng quát của định lý ABC mở rộng**

Xét một biểu thức đối xứng  $n$  biến  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , trong đó  $f$  có giá trị nhỏ nhất,  $a_i \in \mathbb{R}^+$  và  $n \geq 3$ .

Ta sẽ coi  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  như là một biểu thức ba biến  $g(a_1, a_2, a_3)$  với các số  $a_4, a_5, \dots, a_n$  được coi như là các hằng số. Khi đó nếu  $g$  khả ABC theo tính đơn điệu  $*$  thì bất đẳng thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$  có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

- i)  $n-1$  biến bằng nhau.
- ii) 1 biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với  $abc$ )

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên.

$*$  Khả ABC theo tính đơn điệu nghĩa là  $g^*$  theo một trong ba biến  $abc, ab+bc+ca, a+b+c$  bằng 0.

**Chứng minh**

Theo định lý ABC tổng quát thì bất đẳng thức đưa về trường hợp có một biến bằng 0 hoặc  $m$  biến bằng  $a$  và  $n-m$  biến bằng  $b$ .

Trong trường hợp đầu tiên, nếu có một biến bằng 0 thì định lý được chứng minh.

Trong trường hợp thứ hai, ta cần chứng minh  $m \leq 1$ . Thực vậy, giả sử  $m \geq 2$ .

Nhận xét rằng khi  $g$  là một hàm khả ABC theo tính đơn điệu thì giá trị nhỏ nhất của  $f$  chỉ đạt khi một trong ba đại lượng  $abc, ab+bc+ca, a+b+c$  đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất (chứ không cần xét vừa lớn nhất vừa nhỏ nhất).

Chúng ta hãy giả sử  $f$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $abc$  đạt giá trị nhỏ nhất (các trường hợp còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự).

Không mất tính tổng quát, hãy giả sử  $a \geq b$  và  $x_1 = a, x_2 = a, x_3 = b$ . Rõ ràng rằng khi ta cố định tất cả các biến còn lại  $x_4, x_5, \dots, x_n$  thì  $(a, a, b)$  không thể là điểm để hàm  $f(x_1, x_2, x_3)$  đạt giá trị nhỏ nhất; vì như ta đã chứng minh ở trên giá trị nhỏ nhất này đạt được tại điểm  $(x, x, y)$  mà ở đó:  $x \leq y$ .

Điều mâu thuẫn này cho thấy  $m$  không thể vượt quá 1, và như vậy phải có  $n-1$  biến bằng nhau. Như vậy là chúng ta đã chứng minh xong tổng quát của định lý ABC mở rộng.

Bây giờ hãy quay lại với bài toán 3 ở trên mà chúng ta vẫn còn bỏ ngỡ.

Chú ý rằng trong bài toán này ta đã sử dụng định lý ABC đơn điệu cho  $ab+bc+ca$ . Do đó, chỉ cần xét trường hợp khi có  $n-1$  biến bằng nhau, và đưa về xét bài toán (vốn là trường hợp khi có  $n-1$  biến bằng nhau):

$$f(x) = n^2[(n-1)x^n + 1]^2 - n^3x^{n-1}[(n-1)x^n + 1] - (n-1)(x^n - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n^2[(n-1)x^n + 1][(n-1)x^n + 1 - nx^{n-2}] - (n-1)(x^n - 1)^2 \geq 0 \quad (*)$$

Chú ý rằng ta có hai đẳng thức sau:  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

và  $(n-1)x^n + 1 - nx^{n-2} = (x-1)^2[(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1]$ . Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow (x-1)^2 \left[ n^2[(n-1)x^n + 1] \left[ (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1 \right] - (n-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)^2 \right] \geq 0$$

Nhận xét rằng:  $[(n-1)x^n + 1] \left( \frac{1}{n-1} + 1 \right) \geq \left( x^{\frac{n}{2}} + 1 \right)^2$

$[(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1] \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) \geq \left( x^{\frac{n-2}{2}} + x^{\frac{n-3}{2}} + \dots + x^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^2$  Do đó:

$$\begin{aligned} & n^2 [(n-1)x^n + 1] [(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1] \\ & \geq \frac{n^2}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right)} \left( x^{\frac{n}{2}} + 1 \right)^2 \left( x^{\frac{n-2}{2}} + x^{\frac{n-3}{2}} + \dots + x^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^2 \\ & \geq \frac{n(n-1)}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}} (1 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1})^2 \geq \frac{n(n-1)}{n} (1 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1})^2 = (n-1)(1 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1})^2 \\ & \Rightarrow \left[ n^2[(n-1)x^n + 1] \left[ (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1 \right] - (n-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy chứng minh cũng đã có thể kết thúc ở đây.

**Bài 4.** Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn:  $abcd = 1$ .

Chứng minh rằng:  $2^8(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \leq (a+b+c+d)^6$

### Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Xét } f(a, b, c) &= 2^8(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (a+b+c+d)^6 \\ &= 2^8 \left[ 1 + (a+b+c)^2 + (ab+bc+ca)^2 - 2(ab+bc+ca) - 2abc(a+b+c) - a^2b^2c^2 \right] (1+d^2) - (a+b+c+d)^6 \end{aligned}$$

Nếu xét hàm số trên theo biến  $ab+bc+ca$  thì bất đẳng thức  $f(a, b, c) \leq 0$  là khả ABC.

Như vậy ta chỉ cần xét một trường hợp duy nhất sau:

Cho các số thực dương  $x, y: x^3y = 1$ . Chứng minh:  $2^8(1+x^2)^3(1+y^2) \leq (3x+y)^6$

Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow 2^8(1+x^2)^3 \left(1 + \frac{1}{x^6}\right) \leq \left(3x + \frac{1}{x^3}\right)^6$ . Đến đây việc hoàn thành chứng minh xin dành lại cho bạn đọc.

**Bài 5. [China MO]** Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn:  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} \geq 2$$

### Chứng minh

Đặt  $x = 2 - \frac{1}{1+d^2} > 1$ . Ta cần chứng minh:  $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq x$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1+a^2)(1+b^2)+(1+b^2)(1+c^2)+(1+c^2)(1+a^2) \geq x(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \\
&\Leftrightarrow 1+2(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2-4(ab+bc+ca)-2abc(a+b+c) \\
&\quad \geq x+x(a+b+c)^2+x(ab+bc+ca)^2-2x(ab+bc+ca)-2xabc(a+b+c)+xa^2b^2c^2 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(ab+bc+ca)^2+(x-2)(a+b+c)^2+2(2-x)(ab+bc+ca)+2(1-x)abc(a+b+c)+x-1 \leq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên là khả ABC khi ta xét theo biến  $ab+bc+ca$ .

Do đó ta chỉ cần xét trường hợp duy nhất sau:

Cho các số thực dương  $x, y: x^3y=1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^6}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{1+x^2} - \frac{3}{2} + \frac{x^6}{x^6+1} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-x)(1+x)}{2(1+x^2)} + \frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{2(x^6+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(x^2+1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)-3(x+1)(x^3+1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x^2-x+1)(x^3+2x^2+4x+2) \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$

**Bài 6.** Cho  $n$  số thực dương thoả mãn:  $a_1a_2\dots a_n = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{4n}{n+a_1+a_2+\dots+a_n} \geq n+2$  (1)

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{4n}{n+a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_n} \geq n+2$$

Xét theo biến  $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$  rõ ràng bất đẳng thức trên là khả ABC. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau:

Cho các số thực dương  $x, y$  thoả  $x^{n-1}y=1$  và  $x \geq 1$ , khi đó:

$$\frac{n-1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4n}{n+(n-1)x+y} \geq n+2 \Leftrightarrow \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{4n}{n+(n-1)x+\frac{1}{x^{n-1}}} \geq n+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^n+n-1-nx}{x} \geq \frac{2[(n-1)x^n-nx^{n-1}+1]}{nx^{n-1}+(n-1)x^n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 [x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + n-1]}{x} \geq \frac{2(x-1)^2 [(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 1]}{nx^{n-1} + (n-1)x^n + 1}$$

Ta cần chứng minh:  $\frac{x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + n-1}{x} \geq \frac{(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 1}{nx^{n-1} + (n-1)x^n + 1}$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{nx^{n-1} + (n-1)x^n + 1}{2x} \right) (x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + n-1) \geq (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 1$$

Nhận xét rằng do  $x \geq 1$  nên  $\frac{nx^{n-1} + (n-1)x^n + 1}{2x} \geq \frac{nx + (n-1)x + 1}{2x} \geq n-1$ . Do đó:

$$VT \geq (n-1)(x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + n-1) \geq (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 1$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 7.** Cho các số  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  thỏa mãn:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n$ . Chứng minh:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \leq e_{n-1} (x_1 x_2 \dots x_n - 1) \text{ trong đó } e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e$$

### Chứng minh

Nhận xét rằng bài toán có thể viết lại như sau:

Cho các số  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  thỏa mãn:  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \left(n - \frac{1}{x_4} - \dots - \frac{1}{x_n}\right) x_1 x_2 x_3$ .

Chứng minh:  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - n \leq e_{n-1} (x_1 x_2 \dots x_n - 1)$  với  $e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e$

Do đó nếu xét bất đẳng thức theo biến  $x_1 + x_2 + x_3$  thì bất đẳng thức trên là khả ABC.

Như vậy công việc của ta chỉ là bài toán sau:

Cho các số thực dương  $a, b: \frac{n-1}{a} + \frac{1}{b} = n$ , khi đó:

$$g(a, b) = (n-1)a + b - n \leq e_{n-1} (a^{n-1}b - 1) \quad (*) \text{ trong đó } e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e$$

Thay  $b = \frac{a}{na - n + 1}$  vào (\*), ta cần chứng minh:

$$f(a) = (n-1)a + \frac{a}{na - n + 1} - n \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{a^n}{na - n + 1} - 1\right) \text{ trong đó } a \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)a^2 - (2n^2 - 2n)a + n^2 - n}{a^n - na + n - 1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(a-1)^2}{(a-1)^2 (a^{n-2} + 2a^{n-3} + \dots + (k-1)a^{n-k} + \dots + (n-1)a^0)} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{a^{n-2} + 2a^{n-3} + \dots + (n-1)a^0} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}. \text{ Nhận xét rằng: } a \geq \frac{n-1}{n}.$$

$$\text{Do đó: VT} \leq \frac{n(n-1)}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-3} + \dots + (n-1)} = f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} (**)$$

Tại (\*\*), chú ý rằng  $f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ , chính là giá trị của  $g(a, b)$  khi  $a \rightarrow \frac{n-1}{n}, b \rightarrow \infty$ ,

Sau đây là một số bài tập cho các bạn áp dụng:

**Bài 8.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{abcd} + 12 \geq (a + b + c + d) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) \leq (a + b + c + d)^2$$

**Bài 10.** Cho các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn:  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } a_1^2 + \dots + a_n^2 + k a_1 a_2 \dots a_n \geq \frac{2}{n-1} + \min \left\{ 2, k \left( \frac{2}{n(n-1)} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$

**Bài 11.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)} \sum x_1 x_2 x_3 \leq 1$$

**Bài 12.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} - n \right) + x_1 x_2 \dots x_n + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq 2$$

**Bài 13.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  thỏa mãn:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ . Chứng minh rằng:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq n$$

**Bài 14.** Cho  $0 \leq a < b$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, b]$ . Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n - n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq (n-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

## VI. ĐỊNH LÝ ABC VÀ CÁC BÀI TOÁN HOÁN VỊ

Trong các phần trước chúng ta hầu như chỉ làm việc với các bất đẳng thức đối xứng mà chưa xét đến các bất đẳng thức hoán vị. Thật ra cho đến nay các bất đẳng thức hoán vị vẫn là một khó khăn lớn đối với hầu hết các phương pháp đã biết. Trong mục này chúng ta sẽ tiếp cận các bài toán hoán vị theo cách sau, bước một sử dụng một phép đối xứng hóa để đưa bất đẳng thức hoán vị về dạng đối xứng, bước hai sử dụng định lý ABC để chứng minh bất đẳng thức đối xứng mới thu được đó.

### 1. Đổi biến để đưa về đối xứng

Đối với một số bài toán hoán vị, chúng ta chỉ cần sử dụng một hoặc vài phép đổi biến đơn giản là có thể đưa về dạng đối xứng một cách dễ dàng. Có thể nhận thấy công thức đổi biến cần mang tính hoán vị, bởi vì nếu đổi biến theo dạng đối xứng thì chúng ta sẽ không bao giờ chuyển được một bài toán hoán vị thành dạng toán đối xứng. Chúng ta xét các ví dụ sau:

**Bài 1.** Cho các số thực  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:  $1 \geq \frac{x}{2x+y} + \frac{y}{2y+z} + \frac{z}{2z+x} > \frac{1}{2}$  (1)

#### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2+\frac{y}{x}} + \frac{1}{2+\frac{z}{y}} + \frac{1}{2+\frac{x}{z}} > \frac{1}{2}. \text{ Đặt } a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z} \Rightarrow abc = 1.$$

Khi đó bất đẳng thức trở thành:  $1 \geq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} > \frac{1}{2}$

Có thể nhận thấy khi chuyển về dạng đa thức thì đa thức đó cũng chỉ là bậc 3 theo  $a, b, c$  và do đó là bậc 1 theo  $ab+bc+ca$ . Cố định thêm  $a+b+c$ , ta sẽ suy ra trường hợp duy nhất cần xét đến là hai trong ba biến  $a, b, c$  phải bằng nhau:

**Bài toán trở thành:** Cho  $a, b > 0$  và  $a^2b = 1$ . Chứng minh:  $1 \geq \frac{2}{2+a} + \frac{1}{2+b} > \frac{1}{2}$

Thay  $b = \frac{1}{a^2}$  và đưa về việc chứng minh:  $1 \geq \frac{2}{2+a} + \frac{a^2}{2a^2+1} > \frac{1}{2}$

Bất đẳng thức ở vế trái tương đương với:  $a(a-1)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức ở vế phải tương đương với:  $4a^2 - \frac{a}{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2 + \frac{7a}{2} > 0$

Như vậy bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z > 0$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{6abc}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq 5$  (1)

#### Chứng minh

Đặt  $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a} \Rightarrow xyz = 1$ . Khi đó (1)  $\Leftrightarrow x + y + z + \frac{6}{xy + yz + zx} \geq 5$  (2)

Đây là một bài toán đơn giản đối với định lý ABC mở rộng.

Ta đưa về bài toán với hai biến bằng nhau, giả sử  $y = z \Rightarrow xy^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y^2}$ . Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow x + 2y + \frac{6}{y^2 + 2xy} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + 2y + \frac{6y}{y^3 + 2} - 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[y(2y+3)(y-1)^2 + y + 2](y-1)^2}{y^2(y^3 + 2)} \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

\*. Chúng ta xét một kỹ thuật khác để đưa bài toán hoán vị về đối xứng. Kỹ thuật này phát huy hiệu quả với hầu hết các bài toán đa thức hoán vị ba biến có bậc không vượt quá 5 trên  $\mathbb{R}$ .

Xét ví dụ sau:

**Bài 3.** Chứng minh rằng:  $3(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^3b + b^3c + c^3a) \geq 0, \forall a, b, c$

### Chứng minh

Chúng ta sẽ giải quyết một bài toán mạnh hơn như sau:

$$197(a^4 + b^4 + c^4) + 280(a^3b + b^3c + c^3a) \geq 0 \quad (1)$$

Đặt  $a = 2x + 7y; b = 2y + 7z; c = 2z + 7x$ . Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$f(x, y, z) = 222743(x^4 + y^4 + z^4) + 240296(x^3y + y^3x + y^3z + z^3y + z^3x + xz^3) +$$

$$+ 92904(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 246960xyz(x + y + z) \geq 0$$

$f(x, y, z)$  là một đa thức đối xứng, hơn thế nữa cũng là một biểu thức thuần nhất bậc 4. Do đó ta đưa về xét trường hợp duy nhất sau:

$$f(x, 1, 1) \geq 0 \Leftrightarrow 222743x^4 + 480592x^3 + 432768x^2 + 974512x + 1018982 \geq 0$$

Việc chứng minh này không khó khăn và xin được nhường lại cho bạn đọc.

Lời giải sử dụng định lý này thật sự là vô cùng gọn đẹp, tuy nhiên bí quyết ở đây chính là cách đặt ẩn để chuyển về đối xứng:  $a = 2x + 7y; b = 2y + 7z; c = 2z + 7x$ . Không phải ngẫu nhiên mà chúng ta có thể đi đến cách đặt như vậy, cũng giống như Cauchy trọng số hay hệ số bất định, chúng ta phải đặt thêm ẩn vào để có thể giải quyết vấn đề. Mục tiêu của chúng ta là cân bằng hệ số của các đại lượng hoán vị. Cụ thể ở đây, chúng ta đặt:

$a = x + ky, b = y + kz, c = z + kx$  và tìm  $k$  sao cho hệ số của cặp hoán vị

$x^3y + y^3z + z^3x, xy^3 + yz^3 + zx^3$  là bằng nhau. Cụ thể đối với bài toán tổng quát:

$x^4 + y^4 + z^4 + m(x^3y + y^3z + z^3x) \geq 0$ , ta phải tìm  $k$  sao cho:  $mk^3 - (m+4)k^2 + (4-2m)k + m = 0$ .

Đôi khi để tìm hằng số tốt để cố hai bộ hoán vị được cân bằng hệ số, chẳng hạn  $x^4y + y^4z + z^4x$ ,  $xy^4 + yz^4 + zx^4$  và  $x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2$ ,  $x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3$  ta cần phải tạo ra đến hai biến khác, bằng cách:  $a = x + my + nz$ ,  $b = y + mz + nx$ ,  $c = z + mx + ny$

Như vậy đến đây có lẽ bạn đọc cũng đã đoán được tại sao phương án này lại hữu hiệu với các bài toán hoán vị đa thức bậc không vượt quá 5, từ bậc 6 trở lên chúng ta có nhiều hơn hai cặp hoán vị, chẳng hạn cho bậc 6 là  $x^5y + y^5z + z^5x$ ,  $xy^5 + yz^5 + zx^5$ ,  $x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2$ ,  $x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4$  và  $xyz(x^2y + y^2z + z^2x)$ ,  $xyz(xy^2 + yz^2 + zx^2)$  như vậy không phải bao giờ cũng có thể giải để tìm ra số  $m, n$  cho hợp lý.

Ta xét thêm một số ví dụ nữa để có thể hiểu rõ hơn về kỹ thuật này:

**Bài 4 [MnF]:** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$(13a^2 - 10ab - 5b^2 + 9c^2)(a-b)^2 + (13b^2 - 10bc - 5c^2 + 9a^2)(b-c)^2 + (13c^2 - 10ca - 5a^2 + 9b^2)(c-a)^2 \geq 0$$

#### Chứng minh

$$\begin{aligned} &\text{Bất đẳng thức đã cho tương đương với: } [(a-2b)(a-4b) - (b-2c)(b-4c)]^2 + \\ &+ [(b-2c)(b-4c) - (c-2a)(c-4a)]^2 + [(c-2a)(c-4a) - (a-2b)(a-4b)]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vốn dĩ đây là một bài toán mang tính chất thách đố hơn là một bài toán thực sự, tác giả của bài toán đã ngầm ý để bất đẳng thức này có đến hai dạng dấu bằng  $a=b=c$  hoặc  $a=2b=4c$  để gây khó dễ cho các phương pháp đã biết. Tuy nhiên nếu đã biết qua kỹ thuật ABC hoán vị ở trên thì đây lại là một bài tập tốt để áp dụng. Ta hãy cùng nhau xem xét:

Đặt  $a = 2x - y$ ,  $b = 2y - z$ ,  $c = 2z - x$ . Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 4(x^4 + y^4 + z^4) + 21(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\ &- 10(x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3) - 5xyz(x + y + z) \geq 0 \end{aligned}$$

Đây là một đa thức đối xứng bậc 4 và cũng thuần nhất nên ta chỉ cần xét trường hợp sau:

$$f(x, 1, 1) = 4x^4 - 20x^3 + 37x^2 - 30x + 9 = (x-1)^2(2x-3)^2 \geq 0$$

Bài toán này vốn dĩ không có gì đặc biệt hơn bài toán số 3 nếu nó không xuất hiện thêm một dấu bằng nữa. Việc xuất hiện thêm dấu bằng này đôi khi lại giúp ta tìm được hằng số  $k$  để dằn hơn. Nhưng như đã nói trong phần đầu của phương pháp, việc đầu tiên là phải phát hiện ra dấu bằng này, và khi đó thì công việc làm bài của chúng ta sẽ dễ dàng hơn rất nhiều.

Chẳng hạn ta giả sử:  $a = x + ky$ ,  $b = y + kz$ ,  $c = z + kx$ . Khi cực trị xảy ra thì trong  $x, y, z$  phải có 2 giá trị bằng nhau, giả sử ta cho  $y = z = 1$  và khi đó:  $a = x + k$ ,  $b = k + 1$ ,  $c = kx + 1$ .

Từ đây đồng thời kết hợp với hệ sau:  $a = 2b$  và  $a = 4c$  ta dễ dàng tìm ra được

$$k = \frac{-1}{2}, x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } k = -1, x = 1.. \text{ Từ đó thử trực tiếp và ta xuất ra cách đặt như ở trên.}$$



Trong các bài toán ở trên, tất cả các bài đều được đặt ra trong tập  $\mathbb{R}$ , tuy nhiên hầu hết các bài toán lại ra ở dạng  $\mathbb{R}^+$ , và bắt buộc hơn là nếu bậc lẻ thì phải xét trong tập  $\mathbb{R}^+$ . Như vậy chẳng lẽ đối với các bài toán bậc lẻ chúng ta không có cách xử lý hay sao, chúng ta hãy thử xét qua một ví dụ để xem liệu có thể tìm ra được phương pháp nào hiệu quả hay không:

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$23(a^3 + b^3 + c^3) + 17(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 37(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 9abc$$

### Chứng minh

Chúng ta cũng sẽ lại dùng ý tưởng đặt  $a = x + ky, b = y + kz, c = z + kx$ . Ở đây dấu bằng xảy ra tại hai điểm chủ yếu, trong đó có một điểm đặc biệt là  $a = -1, b = 1, c = 2$  cùng các hoán vị của nó. Lúc này trong ba biến  $x, y, z$  sẽ có hai biến bằng nhau, ta giả sử là  $y = z$  (do ta đang mong đợi một biểu thức đối với  $x, y, z$  nên việc cho hai biến nào bằng nhau cũng đều không ảnh hưởng, đồng thời cũng không thể cho chúng bằng -1 vì biểu thức vốn không thuần nhất).

Khi đó ta có hệ phương trình sau:  $x + ky = -1; (k + 1)y = 1; kx + y = 2$ . Từ đây ta suy ra được phương trình theo  $k$  như sau:  $2k^2 + 3k + 1 = 0$ , giải ra ta được  $k = -1$  hay  $k = -\frac{1}{2}$ .

Ta chọn  $k = -\frac{1}{2}$ , khi đó ta đặt:  $a = 2x - y, b = 2y - z, c = 2z - x$  và bất đẳng thức đã cho trở thành:

$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$  là bất đẳng thức **Schur** quen thuộc có thể chứng minh bằng nhiều cách trong đó có cả ABC. Tuy nhiên bất đẳng thức trên chỉ quen thuộc khi  $x, y, z \geq 0$ . May mắn thay cho chúng ta,  $x = \frac{4a + 2b + c}{7}, y = \frac{a + 4b + 2c}{7}, z = \frac{2a + b + 4c}{7}$  là không âm nên chứng minh cũng đã có thể kết thúc ở đây.

Phương pháp đổi biến như trên thật sự là hiệu quả nhưng không phải lúc nào cũng có thể làm được, ngay cả cách đặt biến thứ hai cũng không phải là lúc nào cũng tiện lợi và khả dĩ. Dưới đây xin giới thiệu một phương pháp tiếp cận khác.

## 2. Mối quan hệ giữa đối xứng và hoán vị

Có lẽ đã từ lâu các bạn nghe đến câu nói bất đẳng thức đối xứng chỉ là bài toán con của bất đẳng thức hoán vị, bởi lẽ hoán vị mà đúng thì ta có thể chuyển qua đối xứng một cách dễ dàng. Chẳng hạn như bài toán:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}} + \sqrt{3} \geq \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}} \quad \text{đúng thì bài toán đối xứng sau cũng sẽ đúng:}$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}} + 2\sqrt{3} \geq 2 \left( \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}} \right)$$

Thế nhưng một câu hỏi ngược lại, nếu bài toán đối xứng đúng thì bài toán hoán vị có đúng không. Câu trả lời là không, và ta có thể đưa ngay ra phản ví dụ:

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$  nhưng bất đẳng thức hoán vị sau:  
 $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$  thì lại không đúng với trường hợp  $(a, b, c) = (0, 3, 2)$ .

Tuy nhiên mọi bất đẳng thức hoán vị đều có thể đưa về các bài toán đối xứng tương đương nhờ kỹ thuật sau đây.

### Phép đối xứng hóa

Kỹ thuật chuyển hoán vị về đối xứng:

Cho  $f(a, b, c)$  là một hàm số theo các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn:  $f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$ .

Khi đó đặt  $g(a, b, c) = f(a, b, c)f(a, c, b)$ ;  $h(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b)$  thì  $g, h$  là các biểu thức đối xứng. Đồng thời bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  là tương đương với: 
$$\begin{cases} g(a, b, c) \geq 0 \\ h(a, b, c) \geq 0 \end{cases}$$

Ý tưởng đối xứng hóa này có vẻ đơn giản, nhưng chúng ta hãy xem thử sức mạnh của nó như thế nào khi kết hợp với ABC nhé.

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn:  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:  $P = a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$

### Chứng minh

Đặt:  $f(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a - 4$

Và:  $g(a, b, c) = f(a, b, c)f(a, c, b) = 9C^2 + (39 - 18B)C + B^3 - 12B + 16$

$h(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 8$

Trong đó:  $B = ab + bc + ca$ ;  $C = abc$ . Điều cần làm bây giờ là chứng minh hai điều sau:

i)  $g(a, b, c) \geq 0$       ii)  $h(a, b, c) \leq 0$

Ta sẽ chứng minh điều thứ hai trước, do điều này tương đối đơn giản. Các bạn có thể thấy ngay rất nhanh chóng  $h(a, b, c) \leq 0$  có thể giải ngay lập tức bằng định lý ABC. Nhưng ở đây chúng tôi xin đưa ra một lời giải bằng **Schur** nhanh chóng hơn như sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq 3abc + 4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 \geq 4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leq \frac{(a+b+c)^3}{4} = \frac{27}{4} < 8 \Rightarrow h(a, b, c) \leq 0$$

Sự khó khăn nằm ở phần thứ nhất, ta có thể biểu diễn  $g$  qua hai đại lượng  $ab + bc + ca, abc$  nhằm áp dụng định lý ABC. Ở đây chúng ta sẽ cố gắng chứng minh  $g$  là một hàm đơn điệu theo  $C$  bằng cách lấy đạo hàm và chứng minh đạo hàm dương hay âm.

Đặt:  $\omega(C) = 9C^2 + (39 - 18B)C + B^3 - 12B + 16 = 9C^2 + (39 - 18B)C + (B - 2)^2(B + 4)$

$$\omega'(C) = 18C + 39 - 18B$$

Trước hết nhận xét rằng nếu  $B \leq \frac{39}{18}$  thì chứng minh kết thúc, vì  $39 - 18B \geq 0$  nên  $\omega(C) \geq 0$ .

Như vậy chúng ta chỉ cần xét tới trường hợp  $B > \frac{39}{18}$ .

Nhận xét rằng với mỗi  $B$  cố định thì hoặc là  $\omega'(C) = 18C + 39 - 18B = 0$  có nghiệm là

$$C = \frac{18B - 39}{18}, \text{ hoặc là không có nghiệm.}$$

Trong trường hợp đầu tiên ta có:  $\omega(C) \geq \omega\left(\frac{18B - 39}{18}\right) = B^3 - 9B^2 + 27B - \frac{105}{4}$ .

Và ta có thể chứng minh  $B^3 - 9B^2 + 27B - \frac{105}{4} \geq 0$  với  $B > \frac{39}{18}$

Trong trường hợp  $\omega'(C) = 18C + 39 - 18B = 0$  không có nghiệm, nghĩa là hàm  $w(C)$  đơn điệu, ta chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

i) Cho  $a, b \geq 0$  thỏa mãn  $a + b = 3$ . Chứng minh rằng:  $a^2b \leq 4$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $a^2b = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \leq 4 \left(\frac{a+b}{3}\right)^3 = 4$

ii) Cho  $a, b \geq 0$  thỏa mãn  $2a + b = 3$ . Chứng minh rằng:  $a^2b + b^2a + a^3 \leq 4$ .

Thay  $b = 3 - 2a$ , bất đẳng thức đã cho  $\Leftrightarrow 3a^3 - 9a^2 + 9a - 4 \leq 0$  (đúng khi  $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$ )

Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh một cách đầy đủ. Có thể nói cách chứng minh như trên cho bài toán này không phải là cách chứng minh hay nhất, tuy nhiên ý tưởng của nó thì lại có thể áp dụng cho nhiều bài toán hoán vị khác nữa.

Một câu hỏi đặt ra ngay sau bài toán là biểu thức  $a^2b + b^2c + c^2a$  có đạt cực trị tại hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0 khi ta cố định  $a + b + c, ab + bc + ca$  hay không. Ta hãy cùng xét thử bài toán sau:

**Bài 7.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn:  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ .

Tìm giá trị lớn nhất của:  $P = \frac{8(a^2b + b^2c + c^2a)}{(a + b + c)^3}$ .

**Giải**

Đây là một bất đẳng thức hoán vị thuần nhất. Chúng ta sẽ sử dụng dần các tính chất này:

Trước hết, lợi dụng tính chất thuần nhất, chúng ta có thể đặt  $ab + bc + ca = 1$ .

**Bài toán trở thành:** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn:  $a + b + c = 2, ab + bc + ca = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất của  $P = a^2b + bc^2 + ca^2$ .

Vẫn với ý tưởng như bài toán đầu, chúng ta đặt  $Q = ab^2 + bc^2 + ca^2$ . Thế nhưng ở đây bài toán là đi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất nên ta không xác định được  $g$  và  $h$ . Nhưng điều này không làm chúng ta nao núng, chúng ta vẫn sẽ sử dụng ý tưởng này để giải quyết bài toán.

Đặt  $t = abc$ , theo như bài toán 1 đầu tiên của phần chuyên đề ta có:  $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ . Ta có:

$$P + Q = a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = (a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc = 2 - 3t$$

$$PQ = 9(abc)^2 + [(a + b + c)^3 - 6(a + b + c)(ab + bc + ca)]c + (ab + bc + ca)^3 = 9t^2 - 4t + 1$$

$P, Q$  có thể nhận hai giá trị sau  $\frac{2 - 3t - \sqrt{-27t^2 + 4t}}{2}$ ;  $\frac{2 - 3t + \sqrt{-27t^2 + 4t}}{2}$ .

Để tìm giá trị lớn nhất thì ta sẽ quan tâm đến biểu thức:  $P = f(t) = \frac{2 - 3t + \sqrt{-27t^2 + 4t}}{2}$  với  $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$

Phương trình  $f'(t) = 0$  có một nghiệm duy nhất là  $t = \frac{1}{27}$ .

$$\text{Như vậy } f_{\max} = \max \left\{ f(0), f\left(\frac{1}{27}\right), f\left(\frac{4}{27}\right) \right\}.$$

Từ đây suy ra  $f_{\max} = \frac{10}{9}$  khi  $abc = \frac{1}{27}$ , hay khi

$$a = 0.04020492...; b = 0.78243211...; c = 1.17736297...$$

Như vậy là dự đoán của chúng ta đã bất thành, thật đáng tiếc phải không các bạn, chúng ta vẫn chưa thể làm được điều đẹp đẽ trong thế giới hoán vị như chúng ta đã làm trong thế giới đối xứng. Quả thật, dấu bằng của bất đẳng thức hoán vị luôn làm cho chúng ta cảm thấy khó chịu nhưng luôn thích thú và hào hứng. Nếu các bạn ngẫm nghĩ phần kỹ thuật chuyển hoán vị thành đối xứng các bạn sẽ hiểu tại sao chúng hay có trường hợp ba biến lệch nhau hoặc bằng nhau cả chứ không phải là chỉ có hai biến bằng nhau như bất đẳng thức đối xứng. Chúng tôi sẽ tạm dừng việc nghiên cứu ở đây, sau đây sẽ là một số ví dụ nữa để các bạn làm quen thêm cũng như khẳng định thêm tính hiệu quả tương đối của kỹ thuật đối xứng hoá hoán vị này.

**Bài 8.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 4$ .

Chứng minh rằng:  $3(a^2b + b^2c + c^2a) + 36 \geq 5(ab^2 + bc^2 + ca^2)$

### Chứng minh

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 5(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 36$$

$$\text{Và: } h(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b) = 72 - 2(ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a))$$

$g(a, b, c) = f(a, b, c) \cdot f(a, c, b) = 441C^2 + (4312 - 1176B)C + 64B^3 - 240B^2 - 288B + 1296$  Chúng ta sẽ áp dụng những kỹ thuật hoàn toàn tương tự như trong bài toán số 1 để giải quyết bài toán này. Trước hết, chứng minh  $h(a, b, c) \geq 0$ . Theo bài toán 1,

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \leq \frac{(a+b+c)^3}{4} = 16 < 36 \text{ do đó } h(a, b, c) \geq 0.$$

Chúng minh  $g(a, b, c) \geq 0$ .

Ta viết  $g(a, b, c)$  lại thành  $\omega(C) = 441C^2 + (4312 - 1176B)C + (B-3)^2(64B+144)$

Như vậy nếu  $B \leq \frac{4312}{1176} = \frac{11}{3}$  thì ta sẽ có ngay điều phải chứng minh.

Xét  $B > \frac{11}{3}$ , ta có:  $\omega'(C) = 882C + 4312 - 1176B$ .

Như vậy cùng ý tưởng với bài toán 1 ta sẽ cần chứng minh ba điều sau:

$$\text{i) } \omega\left(\frac{12B-44}{9}\right) = 64B^3 - 1024B^2 + \frac{16384}{3}B - \frac{83200}{9} \geq 0 \text{ khi } B \geq \frac{11}{3}.$$

Điều này có thể chứng minh tương đối dễ dàng, chúng tôi không đề cập đến chứng minh ở đây (trường hợp không xảy ra dấu bằng)

ii) Cho  $a, b \geq 0$  thỏa mãn:  $2a+b=4$ . Chứng minh rằng:

$$3(a^2b + b^2a + a^3) + 36 \geq 5(a^2b + b^2a + a^3) \Leftrightarrow 18 \geq a^3 + a^2b + b^2a$$

Thay  $b=4-2a$  và ta có:  $3a^3 - 12a^2 + 16a - 18 \leq 0$  với:  $0 \leq a \leq 2$ , một lần nữa nhường cho bạn đọc (trường hợp không xảy ra dấu bằng)

iii) Cho  $a, b \geq 0$  thỏa mãn:  $a+b=4$ . Chứng minh rằng:  $3a^2b + 36 \geq 5ab^2$ .

Thay  $a=4-b$  và ta có:  $8b^3 - 44b^2 + 48b + 36 \geq 0 \Leftrightarrow (b-3)^2(8b+4) \geq 0$

Tóm lại bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi  $(a, b, c) = (0, 3, 1)$  và các hoán vị vòng quanh.

**Bài 9.** Cho các số thực:  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + bc^3 + c^3a)$$

### Chứng minh

Một bài toán nổi tiếng của Vasile Cirtoaje, một kết quả vô cùng thú vị trong thế giới hoán vị, một bất đẳng thức rất mạnh với dấu bằng xảy ra tại ba điểm hoàn toàn lệch nhau. Và chúng ta hãy xem phép đối xứng hóa sẽ giải quyết bài toán trên như thế nào. Trước hết, do tính thuần nhất, chúng ta có thể thêm điều kiện  $a+b+c=1$ .

Đặt  $f(a, b, c) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a)$  và

$$g(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b) = 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3[ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)]$$

$$h(a, b, c) = f(a, b, c)f(a, c, b) = 63C^2 + (21B^2 - 57B + 12)C + 49B^4 - 68B^3 + 42B^2 - 11B + 1.$$

Có thể sử dụng định lý ABC để chứng minh  $g(a, b, c) \geq 0$ , công việc này xin được nhường lại cho bạn đọc. Ở đây chúng tôi sẽ đưa ra chứng minh  $h(a, b, c) \geq 0$ .

$$\text{Đặt } \omega(c) = 63c^2 + (21b^2 - 57b + 12)c + 49b^4 - 68b^3 + 42b^2 - 11b + 1$$

Ta có:  $\omega'(c) = 126c + 21b^2 - 57b + 12$ . Ta lại xét ba trường hợp:

$$\text{i)} \quad \omega\left(\frac{-21b^2 + 57b - 12}{126}\right) = \frac{3969b^4 - 4914b^3 + 2277b^2 - 468b + 36}{84} = \frac{(63b^2 - 39b + 6)^2}{84} \geq 0$$

ii) Hai biến bằng nhau: Cho các số thực  $x, y$ . Chứng minh:  $(2x^2 + y^2)^2 \geq 3(x^4 + x^3y + y^3x)$

Cho  $x = 1$  và đưa về việc chứng minh:  $y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 3y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2(y^2 - y + 1) \geq 0$

iii) Một biến bằng 0: Cho các số thực  $x, y$ . Chứng minh rằng:  $(x^2 + y^2)^2 \geq 3x^3y$

Điều này có thể làm nhanh chóng bằng bất đẳng thức **AM - GM**:

$$\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + y^2\right)^2 \geq \frac{16}{\sqrt{27}}x^3y > 3x^3y. \text{ Như vậy là bài toán đã được chứng minh.}$$

Một điểm nhấn về độ mạnh của phương pháp này, tại sao phương pháp này mạnh? Câu trả lời là do tính tương đương toàn bộ trong các quá trình biến đổi. Chỉ còn một điều duy nhất đáng suy nghĩ là với giá trị  $b$  nào thì  $\omega(c)$  có nghiệm hay không có nghiệm. Tuy nhiên thực chất, điều này có thể giải quyết tốt bằng định lý ABC bởi lẽ biểu thức đạo hàm này chỉ là bậc một theo ABC (đối với các bất đẳng thức hoán vị ở dạng đa thức bậc không vượt quá 4, vì khi nhân lại chúng ta sẽ thu được một biểu thức đối xứng bậc 8, vốn cao nhất là bậc 2 đối với  $abc$ ).

**Bài tập áp dụng:**

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3 + \frac{k}{8}$$

**Bài 11.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3k \geq k \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \text{ đúng } \forall a, b, c > 0.$$

**Bài 12.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  và số thực dương  $p$ . Chứng minh rằng :

$$\left( \frac{a}{a+pb} \right)^2 + \left( \frac{b}{b+pc} \right)^2 + \left( \frac{c}{c+pa} \right)^2 \geq \min \left( 1, \frac{3}{(1+p)^2} \right)$$

**Bài 13.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn:  $a + b + c = 5$ .

Chứng minh rằng:  $16(a^3b + b^3c + c^3a) + 640 \geq 11(ab^3 + bc^3 + ca^3)$

**Bài 14.** Chứng minh rằng:  $4(a+b+c)^3 \geq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)$ ,  $\forall a, b, c \geq 0$

**Bài 15.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

**Bài 16.** i) Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn:  $a + b + c = 3$ .

Chứng minh rằng:  $(ab + bc + ca)(a^2b + b^2c + c^2a) \leq 9$

ii) Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn:  $ab + bc + ca = 3$ .

Chứng minh rằng:  $(a+b+c)(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 9$

**Bài 17.** Cho  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\text{i) } 2(x^5 + y^5 + z^5) + 9(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2) \geq 11(x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3)$$

$$\text{ii) } 2(x^5 + y^5 + z^5) + x^4y + y^4z + z^4x \geq 3(xy^4 + yz^4 + zx^4)$$

**Bài 18.** Cho các số dương  $a, b, c$ , chứng minh  $2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + \frac{17(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 23$

**Bài 19.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 3 + \frac{k}{3}$$

### 3. Dùng bất đẳng thức phụ để chuyển hoán vị thành đối xứng

Trong hai phần trên chúng ta đã làm quen với các bài toán hoán vị và chúng ta đã giải quyết chúng một cách hoàn toàn trực tiếp. Tuy nhiên trong thực tế lại không nhất thiết phải như vậy, chúng ta có thể áp dụng các bất đẳng thức phụ để chuyển các đại lượng hoán vị về đối xứng, tức chuyển hoá bài toán về đối xứng để có thể áp dụng ABC.

Để các bạn có thể hiểu rõ hơn ý tưởng này, xét ví dụ sau:

**Bài 20.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Chứng minh rằng:  $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leq 9\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$

#### Chứng minh

Trước tiên chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện:  $a + b + c = 3$ . Khi đó:

$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{9}{ab + bc + ca}$ . Đây chính là câu bài tập của phần định lý ABC và các bài toán

hoán vị, việc chứng minh xin được nhường lại cho bạn đọc. Ở đây chúng ta sẽ áp dụng bất đẳng thức này để đưa bài toán hoán vị ban đầu về bài toán đối xứng.

Như vậy:  $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab + bc + ca) \leq \frac{9}{ab + bc + ca}(ab + bc + ca) = 9$

Công việc của chúng ta là phải chứng minh:  $9\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq 9$ .

Bất đẳng thức này là khá hiển nhiên dựa vào bất đẳng thức sau:  $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ca)^2$ .

Và ta cũng có thể kết thúc chứng minh ở đây.

**Bài 21.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện:  $a + b + c = 3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + 2$

#### Chứng minh

Lần này chúng ta sẽ tiếp tục sử dụng ý tưởng trên, chúng ta sẽ tìm một cận dưới đủ tốt cho  $ab^2 + bc^2 + ca^2$ . Trong bài tập của phần định lý ABC và các bài toán hoán vị, chúng ta có bài toán sau:

Cho các số thực không âm  $a, b, c$  thỏa mãn:  $ab + bc + ca = 3$ . Khi đó ta có:

$(a + b + c)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9$ . Hay viết lại một cách thuần nhất là:

$(a + b + c)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq (ab + bc + ca)^2$ .

Như vậy với điều kiện  $a + b + c = 3$  ta có bất đẳng thức sau:  $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3}$

Như vậy là ta phải chứng minh bài toán sau:  $\frac{(ab + bc + ca)^2}{3abc} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + 2$



Xét bài toán theo biến  $abc$ , rõ ràng bất đẳng thức trên là khả ABC.

Như vậy ta chỉ cần xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $c = 0$ , bất đẳng thức là hiển nhiên đúng.

**Trường hợp 2:**  $a = b = x, c = y$ , bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{(x^2 + 2xy)^2}{3x^2y} \geq \sqrt{\frac{2x^2 + y^2}{3}} + 2 \Leftrightarrow \frac{(x+2y)^2}{3y} \geq \sqrt{\frac{2x^2 + y^2}{3}} + 2$$

trong đó  $x, y > 0$  và  $2x + y = 3$ . Thay  $y = 3 - 2x, x \in (0, 1.5)$  ta được:

$$\begin{aligned} \frac{(6-3x)^2}{3(3-2x)} &\geq \sqrt{\frac{2x^2 + (3-2x)^2}{3}} + 2 \Leftrightarrow \frac{3(2-x)^2}{3-2x} - 3 \geq \sqrt{2x^2 - 4x + 3} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{3-2x} \geq \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3} + 1} \Leftrightarrow (3\sqrt{2(x-1)^2 + 1} + 4x - 3)(x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy chứng minh có thể kết thúc ở đây.

**Nhận xét:** Qua hai bài toán vừa rồi bạn đọc cũng có thể hiểu được phần nào ý tưởng của phương pháp này. Chúng ta sẽ đi tìm các cận trên và cận dưới đối xứng tốt cho các đại lượng hoán vị để chuyển hoá bài toán ban đầu thành bài toán đối xứng.

Chúng ta hãy lần lượt nhìn lại hai đánh giá ban đầu của chúng ta:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \leq a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{(a+b+c)^5}{27(ab+bc+ca)} (*)$$

Và một đánh giá khác, vốn là bài tập 6 trong phần định lý ABC và các bài toán hoán vị:

$$(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc (**)$$

Chú ý rằng chúng ta đưa hoán vị về đối xứng cốt lõi là để áp dụng định lý ABC nhằm quy về hai trường hợp một biến bằng 0 và hai biến bằng nhau. Chính vì vậy chúng ta cũng sẽ xét hai bất đẳng thức trên trong hai trường hợp trên để xem xét độ lệch của chúng lớn như thế nào.

• Khi  $c=0, b=1$ ,  $(*) \Leftrightarrow \frac{a^2}{a+1} \leq a^2 \leq \frac{(a+1)^5}{27a}$  và  $(**) \Leftrightarrow 0 \leq a^2 \leq \frac{4(a+1)^3}{27}$

Nhận xét rằng  $0 \leq \frac{a^2}{a+1} \leq a^2 \leq \frac{4(a+1)^3}{27} \leq \frac{(a+1)^5}{27a}$  do đó trong trường hợp tiệm cận 0 đánh giá

sau là tốt hơn cả:  $\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \leq a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$

• Khi  $b=c=1$ ,  $(*) \Leftrightarrow \frac{(2a+1)^2}{a+2} \leq a^2 + a + 1 \leq \frac{(a+2)^5}{27(2a+1)}$  và

$$(**) \Leftrightarrow (a+2) \cdot \sqrt[3]{a^2} \leq a^2 + a + 1 \leq \frac{4}{27}(a+2)^3 - a$$

Nhận xét rằng  $(a+2) \cdot \sqrt[3]{a^2} \leq \frac{(2a+1)^2}{a+2} \leq a^2 + a + 1 \leq \frac{(a+2)^5}{27(2a+1)} \leq \frac{4}{27}(a+2)^3 - a$  khi  $a \leq 1$

Và  $\frac{(2a+1)^2}{a+2} \leq (a+2) \sqrt[3]{a^2} \leq a^2 + a + 1 \leq \frac{4}{27}(a+2)^3 - a \leq \frac{(a+2)^5}{27(2a+1)}$  khi  $a \geq 1$ .

Do đó tùy bài toán mà ta sẽ áp dụng các bất đẳng thức khác nhau, tuy nhiên nhớ rằng khi áp dụng cả cận trên và cận dưới thì phải áp dụng theo cặp để có được kết quả hiệu quả nhất:

i) Các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra tại ba biến bằng nhau và sát 0 khi có một biến tiến về 0:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \leq a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

ii) Các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi có ba biến bằng nhau và khi áp dụng ABC để sử dụng giá trị nhỏ nhất của  $abc$  hay  $ab+bc+ca$  ( $a \leq b = c$ ):

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \leq a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{(a+b+c)^5}{27(ab+bc+ca)}$$

iii) Các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi có ba biến bằng nhau và khi áp dụng ABC để sử dụng giá trị lớn nhất của  $abc$  hay  $ab+bc+ca$  ( $a \geq b = c$ )

$$(a+b+c) \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

Những cách đánh giá trên cũng chính là cách để bạn đọc có thể tìm ra được đánh giá tốt nhất mỗi khi các bạn tìm được một bất đẳng thức mới.

Ngoài ra chúng ta còn có một đánh giá thú vị nữa mà có thể sử dụng được ABC, đó chính là bất đẳng thức *Vasile Cirtoaje* đã được đề cập ngay trong phần trên.

Cho các số thực  $a, b, c$ . Khi đó ta có bất đẳng thức sau:  $3(a^3b+b^3c+c^3a) \leq (a^2+b^2+c^2)^2$

Bất đẳng thức này tuy không đánh giá trực tiếp đại lượng  $a^2b+b^2c+c^2a$ , tuy nhiên ta có thể chuyển qua một cách dễ dàng nhờ vào đẳng thức sau:

$$a^3b+b^3c+c^3a = (a+b+c)(a^2b+b^2c+c^2a) - abc(a+b+c) - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$$

Như vậy ta có đánh giá tốt sau:

$$\begin{aligned} \text{iv) } a^2b+b^2c+c^2a &\leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 + 3abc(a+b+c) + 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a+b+c)} \\ &= \frac{(a+b+c)^4 - 4(a+b+c)^2(ab+bc+ca) + 7(ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c)}{3(a+b+c)} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này xét trong trường hợp có hai biến bằng nhau thì tốt hơn nhiều so với các bất đẳng thức đã kể trên, tuy có phần khá phức tạp.

**Bài 22.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$  (1)

## Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{12(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc-ab^2-bc^2-ca^2}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Áp dụng bất đẳng thức:  $a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$  và ta cần chứng minh:

$$\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-2abc-\frac{4}{27}(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3} \geq 5 \quad (*)$$

Bất đẳng thức trên hoàn toàn có thể áp dụng ABC, do nó tương ứng với một đa thức bậc 5. Ta xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $b=1, c=0$ , khi đó:  $(*) \Leftrightarrow \frac{12(a^2+1)}{(a+1)^2} + \frac{a(a+1)-\frac{4}{27}(a+1)^3}{a^3+1} \geq 5$

đúng do  $\frac{2(a^2+1)}{(a+1)^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{12(a^2+1)}{(a+1)^2} \geq 6$  và  $1 + \frac{27a(a+1)-4(a+1)^3}{27(a^3+1)} \geq 0$

**Trường hợp 2:**  $b=c=1$ , khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{12(a^2+2)}{(a+2)^2} + \frac{(a+2)(2a+1)-2a-\frac{4}{27}(a+2)^3}{a^3+2} \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(a^2+2)}{(a+2)^2} - 4 \geq 1 - \frac{4a^3+30a^2+33a+22}{27(a^3+2)} \Leftrightarrow \frac{8(a-1)^2}{(a+2)^2} \geq \frac{(31a+32)(a-1)^2}{27(a^3+2)}$$

$$\Leftrightarrow (185a^3 - 156a^2 - 252a + 304)(a-1)^2 \geq 0$$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

**Nhận xét:** Trong trường hợp có hai biến bằng nhau thì ta gặp khó khăn nhất khi  $a \geq 1$  do đó việc áp dụng bất đẳng thức trên là hợp lý. Giá trị 12 vẫn có thể thay bằng một giá trị nhỏ hơn, như 10.5. Tuy nhiên với bài toán sau thì thật sự là cách xử lý trên không hiệu quả.

**Bài 23.** Cho các số thực  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} + \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3} \geq 8 \quad (1)$$

## Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} + \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc-ab^2-bc^2-ca^2}{a^3+b^3+c^3} \geq 8$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 + 3abc(a+b+c) + 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a+b+c)}$$

và ta cần phải chứng minh:

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c} + \frac{3(a+b+c)^2(ab+bc+ca) - 12abc(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2)^2 - 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)} \geq 8$$

Rõ ràng bất đẳng thức trên là khả ABC, ta xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $c = 0, b = 1, a \leq 1$  (do biểu thức vẫn đối xứng khi ta cho  $c = 0$ )

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1} + \frac{3a(a+1)^2 - (a^2+1)^2 - 3a^2}{3(a^3+1)(a+1)} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1} + \frac{3a^3 + a^2 + 3a - a^4 - 1}{3(a^3+1)(a+1)} \geq 8$$

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2(a^2+1)}}{a+1} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1} \geq \frac{7\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{và } \frac{3a^3 + a^2 + 3a - a^4 - 1}{3(a^3+1)(a+1)} \geq 0$$

Cộng hai bất đẳng thức về theo về ta thu được:

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1} + \frac{3a^3 + a^2 + 3a - a^4 - 1}{3(a^3+1)(a+1)} \geq \frac{7\sqrt{6}}{2} > 8$$

**Trường hợp 2:**  $b = c = 1$

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+2)}}{a+2} + \frac{3(a+2)^2(2a+1) - 12a(a+2) - (a^2+2)^2 - 3(2a^2+1)}{3(a^3+2)(a+2)} \geq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\sqrt{3(a^2+2)}}{a+2} - 7 \geq 1 - \frac{-a^4 + 6a^3 + 5a^2 + 12a + 5}{3(a^4 + 2a^3 + 2a + 4)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14(a-1)^2}{(a+2)(\sqrt{3(a^2+2)} + a + 2)} \geq \frac{(4a^2 + 8a + 7)(a-1)^2}{3(a^3+2)(a+2)}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \left[ 42(a^3+2) - (4a^2+8a+7)(\sqrt{3(a^2+2)} + a + 2) \right] \geq 0$$

Việc còn lại là chứng minh:  $f(a) = 42(a^3+2) - (4a^2+8a+7)(\sqrt{3(a^2+2)} + a + 2) \geq 0$  xin nhường lại cho bạn đọc. Như vậy bài toán cũng kết thúc ở đây.

**Nhận xét:** Trong các bài toán ở trên chúng ta chỉ đi tìm đánh giá cho đại lượng  $a^2b + b^2c + c^2a$ ,  $ab^2 + bc^2 + ca^2$  mà không đi tìm đánh giá cho các đại lượng hoán vị khác. Thực chất chỉ cần tìm đánh giá cho đại lượng  $a^2b + b^2c + c^2a$  là đủ, vì mọi đại lượng hoán vị khác đều có thể được biểu diễn thông qua bốn đại lượng sau:  $abc, ab+bc+ca, a+b+c, a^2b + b^2c + c^2a$ .

Chúng tôi sẽ không đưa ra chứng minh cho nhận xét trên, tuy nhiên bạn đọc cũng có thể dễ dàng tìm thấy một chứng minh bằng quy nạp. Ở đây chúng tôi sẽ nêu ra một vài công thức cần thiết hơn, đó là biểu diễn các đại lượng hoán vị khác theo bốn đại lượng đã kể trên, vẫn với quy ước:  $a = x + y + z, b = xy + yz + zx, c = xyz$

$$x^3y + y^3z + z^3x = a(x^2y + y^2z + z^2x) - b^2 + ac$$

$$x^4y + y^4z + z^4x = (a^2 - b)(x^2y + y^2z + z^2x) - ab^2 + bc + a^2c$$

$$x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 = b(x^2y + y^2z + z^2x) + bc - a^2c$$

$$x^5y + y^5z + z^5x = (a^3 - 2ab + c)(x^2y + y^2z + z^2x) - a^2b^2 + a^3c + b^3$$

$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = (ab - c)(x^2y + y^2z + z^2x) + 4abc - a^3c - b^3 - 3c^2$$

### Bài tập áp dụng:

**Bài 24.** Cho  $a, b, c > 0$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{3} + 1$

**Bài 25.** Cho  $a, b, c > 0$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} + 2\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 5$

**Bài 26.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 4\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \geq 7, \forall a, b, c > 0$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $0 < k \leq 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3b+b^3c+c^3a} + \frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq k+1$$

**Bài 28.** Tìm số dương  $k$  lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3kabc}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq 3+k.$$

**Bài 29.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + 1 \geq \frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

**Bài 30.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm hằng số dương tốt nhất của  $k$  sao cho:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq \frac{(k+3)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}$$

## §20. PHƯƠNG PHÁP GLA (GEOMETRICALIZE ALGEBRA)

### I. CỜ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Xét bất đẳng thức đối xứng 3 biến  $a, b, c \geq 0$ . Đặt  $x=b+c, y=c+a, z=a+b$  hoặc  $x=\sqrt{b+c}, y=\sqrt{c+a}, z=\sqrt{a+b}$ , ... khi đó  $x, y, z$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Do mọi tam giác đều được xác định bởi 3 yếu tố  $p, R, r$  nên bất đẳng thức sau khi đưa về  $x, y, z$  sẽ được đưa tiếp về  $p, R, r$ . Như vậy ta đã chuyển một bất đẳng thức đại số thành bất đẳng thức hình học. Trường hợp trong 3 biến  $a, b, c$  có một biến bằng 0 thì tam giác suy biến thành đường thẳng và ta nói là tam giác có  $r = 0$ . Vì có thể thiết lập các hệ thức, bất đẳng thức giữa  $p, R, r$  nên trong một số dạng toán thì việc chuyển bài toán gồm 3 đại lượng  $a, b, c$  về  $p, R, r$  là thuận lợi hơn.

### II. CÁC ĐẲNG THỨC VỀ MỐI QUAN HỆ CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Xét tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là  $a, b, c$ ; nửa chu vi  $p = \frac{a+b+c}{2}$  và  $R, r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của  $\triangle ABC$ . Khi đó diện tích tam giác ABC là:  $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ . Từ đó suy ra các hệ thức

$$1. a+b+c=2p; ab+bc+ca=p^2+4Rr+r^2; abc=4pRr$$

$$2. 2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+16Rr+4r^2$$

$$3. a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2$$

$$4. 2Rr-r^2-\frac{p^2}{9}=-\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$$

$$5. 4Rr-r^2-\frac{p^2}{4}=-\frac{1}{32p}(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$$

#### Chứng minh

Dễ thấy: Đẳng thức 1.  $\Leftrightarrow$  Đẳng thức 2.  $\Leftrightarrow$  Đẳng thức 3. nên ta chỉ chứng minh 1.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \\ \sin A = \frac{a}{2R} \end{cases} \Rightarrow \sin A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{r}{p-a}}{1 + \frac{r^2}{(p-a)^2}} \Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{2r(p-a)}{(p-a)^2 + r^2}$$

$$\Rightarrow ap^2 - 2pa^2 + a^3 + ar^2 = 4Rr(p-a) \Rightarrow a^3 - 2pa^2 + a(r^2 + p^2 + 4Rr) - 4Rrp = 0 \quad (1)$$

Từ (1) ta thấy  $a, b, c$  là 3 nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$$

Theo định lý Viet ta có:  $ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$

4. Hệ thức này lần đầu tiên được nhà toán học P. Nuesch công bố chứng minh trong tạp chí "Elementary Math", No 26, 1971 trang 19. Sau đây là một chứng minh khác:

$$\text{Đặt } p-a=x, p-b=y, p-c=z \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=p-a+p-b+p-c=p \\ a=y+z, b=z+x, c=x+y \end{cases} \quad \text{Ta có:}$$

$$2Rr - \frac{p^2}{9} = -\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$$

$$\Leftrightarrow 36Rrp - 18pr^2 - 2p^3 = -(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c) \quad (1)$$

$$VT(1) = 9abc - 18\frac{S^2}{p} - 2p^3 = 9abc - 18(p-a)(p-b)(p-c) - 2p^3. \text{ Khi đó (1) } \Leftrightarrow$$

$$9(x+y)(y+z)(z+x) - 18xyz - 2(x+y+z)^3 = -(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y) \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } VT(2) = 9[x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xy] - 18xyz$$

$$- 2[x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y+z) + 3z^2(x+y) + 6xyz]$$

$$\Leftrightarrow VT(2) = f(x, y, z) = 3[x^2(y+z) + x^2(y+z) + z^2(x+y)] - 2(x^3 + y^3 + z^3) - 12xyz$$

Do  $f(x, y, z)$  là đa thức đối xứng bậc 3 với  $x, y, z$  và  $2x = y + z$  là một nghiệm của  $f(x, y, z)$  nên  $f(x, y, z)$  chia hết cho  $(2x - y - z)$ . Kết hợp với tính đối xứng của  $f(x, y, z) \Rightarrow f(x, y, z)$  cũng chia hết cho  $(2y - z - x)$  và  $(2z - x - y)$ .

Mà  $\deg f(x, y, z) = 3$  nên suy ra:  $f(x, y, z) = -(2x - y - z)(2y - z - x)(2z - x - y)$

5. Hệ thức này lần đầu tiên cũng được nhà toán học P. Nuesch công bố chứng minh trong tạp chí "Elementary Math", No 27, 1972 (trang 16-17). Sau đây chúng tôi xin đưa ra cách chứng minh khác:

**Bổ đề:**  $(m+n)(n+p)(p+m) + mnp = (m+n+p)(mn+np+pm), \forall m, n, p \in \mathbb{R}$

**Áp dụng:** Biến đổi đẳng thức đã cho tương đương với:

$$128Rrp - 32pr^2 - 8p^3 = (3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

$$\Leftrightarrow 32abc - 32(p-a)(p-b)(p-c) - (a+b+c)^3 = (3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a=2x+y+z \\ b=2y+z+x \\ c=2z+x+y \end{cases} \text{ với } \begin{cases} x+y>0 \\ y+z>0 \\ z+x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=4(x+y+z) \\ 3a-b-c=4x \\ 3b-c-a=4y \\ 3c-a-b=4z \end{cases} \quad (1).$$

Khi đó  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác và:  $p-a=y+z, p-b=z+x, p-c=x+y$  (2)

Từ (1) và (2) ta cần chứng minh:

$$32(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) - 32(x+y)(y+z)(z+x) - 64(x+y+z)^3 = 64xyz$$

$$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) - (x+y)(y+z)(z+x) - 2(x+y+z)^3 = 2xyz$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) + (x+y)(y+z)(z+x) \\ &= 2(x+y+z)^3 + 2[(x+y)(y+z)(z+x) + xyz] \end{aligned} \quad (3)$$

Sử dụng bổ đề với  $m=y+z, n=z+x, p=x+y$

$$\Rightarrow VT(3) = 2(x+y+z)[(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y)]$$

Sử dụng bổ đề với  $m=x, n=y, p=z \Rightarrow VP(3) = 2(x+y+z)^3 + 2(x+y+z)(xy+yz+zx)$ .

Khi đó (3)  $\Leftrightarrow (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = (x+y+z)^2 + xy + yz + zx$

Đẳng thức cuối đúng nên (3) đúng, suy ra (đpcm)

### III. CÁC ĐỊNH LÝ

**1. Định lý 1:** Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kỳ thuộc BC. Khi đó:

$$nc^2 + mb^2 = (d^2 + mn)a \text{ trong đó } AD = d, BD = m, DC = n$$

**Chứng minh**

$$\text{Ta có } \begin{cases} m^2 + d^2 - c^2 = 2md \cos \widehat{ADB} \\ n^2 + d^2 - b^2 = 2nd \cos \widehat{ADC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(m^2 + d^2 - c^2) = 2mnd \cos \widehat{ADB} \\ m(n^2 + d^2 - b^2) = 2mnd \cos \widehat{ADC} \end{cases} \text{ suy ra}$$

$$mn(m+n) + (m+n)d^2 - nc^2 - mb^2 = 2mnd(\cos \widehat{ADB} + \cos \widehat{ADC}) \Leftrightarrow (mn + d^2)a = nc^2 + mb^2$$

**2. Định lý 2:** Tam giác ABC có hai góc  $\geq 60^\circ \Leftrightarrow p \geq \sqrt{3}(R+r)$

Tam giác ABC có hai góc  $\leq 60^\circ \Leftrightarrow p \leq \sqrt{3}(R+r)$

Tam giác ABC có một góc bằng  $60^\circ \Leftrightarrow p = \sqrt{3}(R+r)$

**Chứng minh**

$$\text{Ta có: } \frac{p - \sqrt{3}(R+r)}{2R} = \frac{a+b+c}{4R} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) = \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = T$$

$$\text{Đặt } x = A - \frac{\pi}{3}, y = B - \frac{\pi}{3}, z = C - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x + y + z = 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử:  $x \geq y \geq z$

$$\begin{aligned} T &= \sin x + \sin y + \sin z = \sin x + \sin y - \sin(x+y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left( \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do } x + y + z = 0 \text{ và } x \geq y \geq z \text{ nên } 0 \leq x \leq x+y \leq \pi \Rightarrow 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \geq 0$$



• Nếu  $y \geq 0 \Leftrightarrow B \geq \frac{\pi}{3}$  thì  $\sin \frac{y}{2} \geq 0$  do đó  $\frac{p - \sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \geq 0$

Tức là  $p \geq \sqrt{3}(R+r)$  khi  $\Delta ABC$  có 2 góc  $\geq \frac{\pi}{3}$

• Nếu  $y \leq 0$  thì  $\sin \frac{y}{2} \leq 0$ , do đó:  $\frac{p - \sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \leq 0$

Tức là  $p \leq \sqrt{3}(R+r)$  khi  $\Delta ABC$  có 2 góc  $\leq \frac{\pi}{3}$

• Nếu  $y = 0$  thì  $p = \sqrt{3}(R+r)$  do  $\sin \frac{y}{2} = 0$

**3. Định lý 3:** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài 3 cạnh là  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

**Cách 1:** Giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ , theo II.1. thì  $a, b, c$  là 3 nghiệm của phương trình:

$$M(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)X - 4pRr = 0$$

Do  $M(X) = 0$  có 3 nghiệm  $a, b, c$  nên  $M'(X) = 3X^2 - 4pX + p^2 + 4Rr + r^2 = 0$

$$\text{có 2 nghiệm } X_1 = \frac{2p - \sqrt{\Delta'}}{3}; X_2 = \frac{2p + \sqrt{\Delta'}}{3} \text{ và } \begin{cases} M(X_1) \geq 0 \\ M(X_2) \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Khi đó } \Delta' = (2p)^2 - 3(p^2 + 4Rr + r^2) = p^2 - 12Rr - 3r^2 \geq 0$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq p(p^2 - 18Rr + 9r^2) \\ \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq -p(p^2 - 18Rr + 9r^2) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq |p(p^2 - 18Rr + 9r^2)|$$

$$\Leftrightarrow (\Delta')^3 \geq p^2(p^2 - 18Rr + 9r^2)^2 \Leftrightarrow p^4 - 2p^2(2R^2 + 10Rr - r^2) + r(4R+r)^3 \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } \Delta'_1 = (2R^2 + 10Rr - r^2)^2 - r(4R+r)^3 = 4R(R-2r)^3 \geq 0 \text{ nên suy ra } (2) \Leftrightarrow$$

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

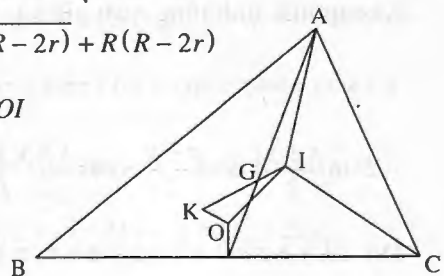
**Bình luận:** Với cách chứng minh trên chúng ta dễ lầm tưởng rằng đẳng thức trong định lý 2 xảy ra khi và chỉ khi  $R = 2r$  hay tam giác đã cho là tam giác đều. Chúng tôi sẽ chỉ ra chính xác khi nào 2 vế bằng nhau bằng cách giải hình học sau đây:

$$\text{Cách 2: Ta sẽ chứng minh: } p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \leq (R^2 - 4Rr + 4r^2) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} + R(R-2r)$$

$$\Leftrightarrow 9IG^2 \leq [(R-2r) + \sqrt{R(R-2r)}]^2 \Leftrightarrow 3IG \leq R - 2r + OI$$

Trong đó  $O, I, G$  là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trọng tâm của  $\Delta ABC$ . Trên đường thẳng  $IG$  ta lấy điểm  $H$  sao cho  $\overline{IK} = 3\overline{IG}$ .



Theo định lý 1 ta có:

$$OI^2.HG + OH^2.IG = (OG^2 + IG.GK) IK \quad (*) \text{ trong đó } GK = 2IG, IK = 3IG$$

$$(*) \Leftrightarrow 2R(R-2r) + OK^2 = 3 \left( R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} + 2 \cdot \frac{p^2 - 16Rr + 5r^2}{9} \right)$$

$$\Leftrightarrow 6R(R-2r) + 3.OK^2 = 9R^2 - (2p^2 - 8Rr - 2r^2) + 2p^2 - 32Rr + 10r^2$$

$$\Leftrightarrow 3.OK^2 = 3(R^2 - 4Rr + 4r^2) \Leftrightarrow OK^2 = (R-2r)^2 \Leftrightarrow OK = R-2r$$

Trong tam giác OIK ta luôn có:  $OI + OK \geq IK$  hay  $(R-2r) + OI \geq 3.IG$

$$\text{Tức là: } p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow O \text{ nằm giữa } I \text{ và } K \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = R-2r + \sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ cân. Mặt khác ta có: } p^2 - 16Rr + 5r^2 \geq R(R-2r) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\geq R(R-2r) + 2(R-2r)^2 = (R-2r)(3R-4r) \Rightarrow p^2 \geq 3(R+r)^2 \Rightarrow p \geq 3\sqrt{R+r}$$

Theo định lý 2 thì  $p \geq \sqrt{3}(R+r) \Leftrightarrow$  Tam giác ABC có 2 góc  $\geq 60^\circ$ .

Kết hợp với  $\Delta ABC$  cân  $\Rightarrow$  Tam giác ABC cân có cạnh bên  $\geq$  cạnh đáy.

$$\bullet \text{ Tương tự sử dụng } IK + OK \geq OI \text{ ta có } p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow K \text{ nằm giữa } O \text{ và } I \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = \sqrt{R(R-2r)} - (R-2r)$$

$\Rightarrow \Delta ABC$  cân. Mặt khác bình phương 2 vế ta có bất đẳng thức hệ quả:

$$p^2 - 16Rr + 5r^2 \leq R(R-2r) + (R-2r)^2 \leq (R-2r)(3R-4r) \Rightarrow p^2 \leq 3(R+r)^2 \Rightarrow p \leq 3\sqrt{R+r}$$

Theo định lý 2 thì  $p \leq \sqrt{3}(R+r) \Leftrightarrow$  Tam giác ABC có 2 góc  $\leq 60^\circ$ .

Kết hợp với  $\Delta ABC$  cân  $\Rightarrow$  Tam giác ABC cân có cạnh bên  $\leq$  cạnh đáy.

**Bình luận:** Từ định lý 1 ta có thể tạo ra rất nhiều đoạn thẳng có độ dài đặc biệt và rất đẹp như đoạn thẳng OK có ở trong bài này.

**4. Định lý 4:** Với mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức:

$$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2; a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R+r)^2 \quad (1); ab + bc + ca \geq 2R^2 + 12Rr + 4r^2$$

**Chứng minh**

Do 3 bất đẳng thức trên là tương đương nên ta sẽ chứng minh (1) làm đại diện.

$$(1) \Leftrightarrow 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \geq 4R^2(\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \quad (2)$$

Do A, B, C nhọn nên ta có:  $2 \cos A \cos B = \sqrt{\sin 2A \cotg B \sin 2B \cotg A}$ , do đó theo bất đẳng

thức AM - GM:  $2 \cos A \cos B \leq \frac{\sin 2A \cotg B + \sin 2B \cotg A}{2} \quad (3)$ . Tương tự:

$$2\cos B \cos C \leq \frac{\sin 2B \cotg C + \sin 2C \cotg B}{2}; 2\cos C \cos A \leq \frac{\sin 2C \cotg A + \sin 2A \cotg C}{2}$$

Từ đó suy ra:  $2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \leq$

$$\leq \frac{1}{2}[(\sin 2A \cotg B + \sin 2B \cotg A) + (\sin 2B \cotg C + \sin 2C \cotg B) + (\sin 2C \cotg A + \sin 2A \cotg C)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cotg B \cdot 2\sin(A+C)\cos(A-C) + 2\cotg C \sin(A+B)\cos(A-B) + 2\cotg A \sin(B+C)\cos(B-C)]$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos B \cos(A-C) + 2\cos C \cos(A-B) + 2\cos A \cos(B-C)]$$

$$= -\frac{1}{2}[(\cos 2A + \cos 2C) + (\cos 2A + \cos 2B) + (\cos 2B + \cos 2C)] = -(2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C - 3)$$

$$= 3 - 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

$$\Rightarrow 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$\Rightarrow$  (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng (đpcm).

### 5. Định lý 5: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$

#### Chứng minh

Có nhiều cách chứng minh định lý này. Sau đây là chứng minh sử dụng định lý 3.

Đề ý rằng:  $R(R-2r) \leq R(R-2r) + r^2 = (R-r)^2$ . Do đó:

$$p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)(R-r) \Leftrightarrow p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R^2 - 3Rr + 2r^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \Leftrightarrow 2p^2 \leq 8R^2 + 8Rr + 6r^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 8Rr + 2r^2 \leq 8R^2 + 8Rr + 6r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$$

Mặt khác  $a^2 + b^2 + c^2 + 16Rr + 4r^2 = 2(ab + bc + ca)$

$$\Rightarrow 8R^2 + 16Rr + 8r^2 \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow 4(R+r)^2 \geq ab + bc + ca$$

### 6. Định lý 6: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$ (\*)

#### Chứng minh

Ta có:  $IG \geq IO - OG \Leftrightarrow IG \geq \sqrt{R(R-2r)} - \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$

$$\Leftrightarrow 3IG \geq 3\sqrt{R(R-2r)} - \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow 3IG \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 18Rr}{3\sqrt{R(R-2r)} + \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (1)$$

Do  $9IG^2 = p^2 - 16Rr + 5r^2$  nên  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \geq 24Rr - 12r^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow 3IG \geq \frac{6Rr - 12r^2}{3\sqrt{R(R-2r)} + \sqrt{9R^2 - 24Rr + 12r^2}} = \frac{6Rr - 12r^2}{6\sqrt{R(R-2r)}} = r\sqrt{\frac{R-2r}{R}}$

$\Rightarrow 9.IG^2 \geq \frac{r^2(R-2r)}{R^2}$ . Vậy (\*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

**Bình luận:** Định lý 6 là một đánh giá cận dưới của  $p^2$  và chặt hơn bất đẳng thức  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  một chút xíu nhưng nó có thể “đương đầu” với những bất đẳng thức khó hơn nhiều. Cận dưới tốt nhất:  $p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ . Tuy nhiên hình thức của nó khá cồng kềnh nên đôi khi rất khó áp dụng.

**7. Định lý 7:** Cho  $\Delta ABC$  thỏa mãn  $a \geq b \geq c$  và  $a+b \geq 3c$ . Khi đó:  $\frac{r}{R} \leq \frac{4}{9}$

#### IV. CÁC ĐẲNG THỨC GIỮA BIẾN SỐ CŨ VỚI CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC MỚI

Đây chính là phần “xương sống” của phương pháp. Chỉ cần nắm vững các đẳng thức thì có thể giải quyết được nhiều bài tập rất khó một cách đơn giản.

• Với  $a, b, c > 0$ , đặt  $x = b+c, y = c+a, z = a+b$  thì  $x, y, z$  trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến  $p, R, r, S$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác XYZ.

$$1. a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2; ab + bc + ca = 4Rr + r^2$$

$$\text{Hệ quả: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \frac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$$

#### Chứng minh

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \quad (1)$$

$$xy + yz + zx = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra:}$$

$$\bullet 4(a^2 + b^2 + c^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) = (x+y+z)^2 - 2[2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)]$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) = 4p^2 - 2(16Rr + 4r^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$$

$$\bullet 4(ab + bc + ca) = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$4(ab + bc + ca) = 16Rr + 4r^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 4Rr + r^2$$

$$2. (a+b)(b+c)(c+a) = xyz = 4Rrp; abc = (p-x)(p-y)(p-z) = \frac{S^2}{p} = pr^2$$

$$\text{Hệ quả: } \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{r}{4R}; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4R+r}{pr}; \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{r^2}$$

$$3. \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2(2R-r)}{r}$$

**Chứng minh**

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} - 3 = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} - 3$$

$$= \frac{p(4Rr+r^2)}{(p-x)(p-y)(p-z)} - 3 = \frac{p(4Rr+r^2)}{pr^2} - 3 = \frac{4R+r}{r} - 3 = \frac{2(2R-r)}{r}$$

$$4. a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)[(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)] + 3abc$$

$$= p(p^2 - 8Rr - 2r^2 - 4Rr - r^2) + 3pr^2 = p(p^2 - 12Rr)$$

$$5. a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(ab+bc+ca)^2 + 4abc(a+b+c)$$

$$= (p^2 - 8Rr - 2r^2)^2 - 2(4Rr + r^2)^2 + 4p^2r^2$$

$$= p^4 - 4(4Rr + r^2)p^2 + 4(4Rr + r^2)^2 - 2(4Rr + r^2)^2 + 4p^2r^2 = p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2$$

$$6. \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$$

$$7. 16S^2 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4)$$

**Chú ý:** Trong một số bài toán khi xét trường hợp  $x^2 \geq y^2 + z^2$  ta thấy ngay bài toán đúng thì chỉ cần xét thêm trường hợp  $x^2 < y^2 + z^2$  là đầy đủ. Khi đó đặt  $m = x^2, n = y^2, p = z^2$  ta lại có  $m, n, p$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Nếu gọi  $R_1, r_1$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác MNP có độ dài 3 cạnh là  $m, n, p$  thì:

$$16S^2 = 2(mn + np + pm) - (m^2 + n^2 + p^2) = 16R_1r_1 + 4r_1^2 \Rightarrow 4S^2 = 4R_1r_1 + r_1^2$$

Vậy nhiều bài toán 3 biến qua 2 lần đổi biến số thì nhận được bài toán 2 biến. Do các bài toán ta đang nghiên cứu là bất đẳng thức đối xứng nên sau khi chuẩn hóa thì các bài toán chỉ còn 1 biến và nói chung sẽ giải được một cách dễ dàng.

$$8. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3 = p \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3$$

$$= \frac{p(xy + yz + zx)}{xyz} - 3 = \frac{p(p^2 + 4Rr + r^2)}{4Rrp} - 3 = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rr} - 3 = \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr}$$

$$9. \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{r^2(4R+r)^2 - 2p^2r^2}{p^2r^2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2r^2}$$

$$10. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}$$

$$11. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{x^2y^2z^2} = \frac{(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{(p^2+4Rr+r^2)^2 - 16Rrp^2}{16R^2r^2p^2} = \frac{(p^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r^2p^2} - \frac{1}{Rr}$$

$$12. \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$$

$$= \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{abc} = \frac{r^2(4R+r)^2 - 2p^2r^2}{pr^2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}$$

$$13. a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = (ab+bc+ca)^3 - 3abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$= r^3(4R+r)^3 - 12p^2r^3R$$

$$14. \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2) + (b^2+c^2)(b^2+a^2) + (c^2+a^2)(c^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{(p^2-8Rr-2r^2)^2 + (4Rr+r^2)^2 - 2p^2r^2}{(p^2-8Rr-2r^2)[(4Rr+r^2)^2 - 2p^2r^2] - p^2r^4} = \frac{p^4 - 8(2R+r)rp^2 + 5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2 - 2p^4r^2 - 2r^3(4R+r)^3}$$

$$15. (a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b) = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3a^2b^2c^2 + abc(a^3+b^3+c^3)$$

$$= r^3(4R+r)^3 - 12R^2r^3p + 3p^2r^4 + p^2r^2(p^2 - 12Rr) = r^2[r(4R+r)^3 + 3p^2r^2 + p^4 - 24Rrp^2]$$

## V. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

## A. CÁC BÀI TOÁN KHÔNG ĐIỀU KIỆN

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 4 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

**Chứng minh**

Áp dụng công thức 3 và 8 ta cần chứng minh:  $\frac{2(2R-r)}{r} \geq 4 \cdot \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr}$

$$\Leftrightarrow 2R(2R-r) \geq p^2 - 8Rr + r^2 \Leftrightarrow 4R^2 + 6Rr - r^2 \geq p^2 \text{ (đúng theo định lý 3)}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 2. [Iran 1996]** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

**Chứng minh**

Áp dụng công thức 1 và 11 trong phần IV ta cần phải chứng minh:

$$\frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2 r^2 p^2} - \frac{1}{Rr} \geq \frac{9}{4(4Rr + r^2)} \Leftrightarrow \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2 r p^2} - \frac{1}{R} \geq \frac{9}{4(4R + r)}$$

Xét  $A(p) = \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2 r p^2}$ . Dễ thấy  $A'(p) > 0$  nên A đồng biến theo p.

Ta có  $p^2 - 16Rr + 5r^2 = 9IG^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ . Do đó

$$A(p) \geq \frac{(16Rr - 5r^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2 r (16Rr - 5r^2)} = \frac{(20Rr - 4r^2)^2}{16R^2 r^2 (16R - 5r)} = \frac{(5R - r)^2}{R^2 (16R - 5r)} = \frac{25R^2 - 10Rr + r^2}{16R^3 - 5R^2 r}$$

Cuối cùng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{25R^2 - 10Rr + r^2}{16R^3 - 5R^2 r} - \frac{1}{R} \geq \frac{9}{4(4R + r)} \Leftrightarrow \frac{9R^2 - 5Rr + r^2}{16R^3 - 5R^2 r} \geq \frac{9}{4(4R + r)}$$

$$\Leftrightarrow 4(4R + r)(9R^2 - 5Rr + r^2) \geq 9(16R^3 - 5R^2 r)$$

$$\Leftrightarrow 4(36R^3 + 9R^2 r - 20R^2 r - 5Rr^2 + 4Rr^2 + r^3) \geq 9(16R^3 - 5R^2 r)$$

$$\Leftrightarrow 4(36R^3 - 11R^2 r - Rr^2 + r^3) - 9(16R^3 - 5R^2 r) \geq 0 \Leftrightarrow r(R - 2r)^2 \geq 0$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \\ R=2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b, c=0; b=c, a=0 \\ c=a, b=0; a=b=c \end{cases}$$

**Bài 3.** Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$ ,  $\forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Nếu trong 3 số  $a, b, c$  có 2 số bằng 0 thì ta có ngay (đpcm).

Nếu trong 3 số có 2 số  $\neq 0$  thì áp dụng các công thức 1 và 14 ta cần chứng minh:

$$p^2 - 8Rr - 2r^2 + 2pr^2 + 1 \geq 2(4Rr + r^2) \Leftrightarrow p^2 + 2pr^2 + 1 \geq 16Rr + 4r^2$$

Ta có:  $2pr^2 + 1 = pr^2 + pr + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{p^2 r^4} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{27r^2 \cdot r^4} = 9r^2$  (1),  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  (2)

Từ (1) và (2) ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 4.** Chứng minh:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3abc}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4 \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Đặt  $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z \Rightarrow xyz = 1$  ( $x, y, z > 0$ ). Bài toán trở thành:

Cho  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:  $x + y + z + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 4$

Chuyển về  $p, R, r$  ta được bài toán: Cho  $pr^2 = 1$ . Chứng minh rằng:  $p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq 4$

Ta có:  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq 3(4Rr + r^2) \geq 27r^2 \Rightarrow p^3 \geq 27pr^2 = 27 \Rightarrow p \geq 3$

$p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq p + \frac{9}{p^2} = 3 \cdot \frac{p}{3} + \frac{9}{p^2} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{3}} \geq 4$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 5.** Cho  $x, y, z$  là độ dài 3 cạnh tam giác và  $k$  là một số thực  $\geq 2,6$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + kzx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + kxy}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+k}}$  (1)

**Chứng minh**

Theo bất đẳng thức **Buniakowski** ta có:

$$\left(\sum x\right)^2 \leq \left(\sum \frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}}\right) \left(\sum x\sqrt{x^2 + kyz}\right); \left(\sum x\sqrt{x^2 + kyz}\right)^2 \leq \left(\sum x\right) \sum (x^3 + kxyz).$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + kzx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + kxy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x+y+z} \sqrt{x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz}} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác: } x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3(k+1)xyz \\ = 2p(p^2 + 6Rr(k-1) - 3r^2) \quad (3).$$

Từ (2) và (3) ta thấy để chứng minh được (1) chỉ cần chứng minh:

$$\frac{2p}{\sqrt{p^2 + 6Rr(k-1) - 3r^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 4(k+1)p^2 \geq 9[p^2 + 6Rr(k-1) - 3r^2]$$

$$\Leftrightarrow (4k-5)p^2 - 54Rr(k-1) + 27r^2. \text{ Đặt } f(k) = (4k-5)p^2 - 54Rr(k-1) + 27r^2$$

$$\Rightarrow f'(k) = 4p^2 - 54Rr = 4[p^2 - (16Rr - 5r^2)] + 10r(R - 2r) \geq 0 \Rightarrow f(k) \text{ đồng biến}$$

$$\Rightarrow f(k) \geq f(2,6) = 5,4p^2 - 86,4Rr + 27r^2 = 5,4(p^2 - 16Rr + 5r^2) \geq 0$$

Vậy (\*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .



**Bài 6.** Cho  $x, y, z > 0$ . Tìm điều kiện để bất đẳng thức sau luôn đúng.

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{x}{(x+y)(x+z)}} \geq \frac{4}{\sqrt{3(x+y+z)}} \left( 1 + \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \right) \quad (1)$$

### Chứng minh

Đặt  $y+z=a, z+x=b, x+y=c$  thì  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác, khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{p-a}{bc}} \geq \frac{4}{\sqrt{3p}} \left( 1 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \right) \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left( 1 + \prod \sin \frac{A}{2} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

Điều thú vị (2) chính là một trong các bất đẳng thức của **Jack Garfunkel**, để (2) đúng hay (1) đúng thì điều kiện cần và đủ là tam giác ABC nhọn. Không mất tính tổng quát, giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ , khi đó  $\Delta ABC$  nhọn  $\Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2 \Leftrightarrow$

$$(x+y)^2 + (x+z)^2 > (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow x(x+y+z) > yz \Leftrightarrow x+y+z > \frac{yz}{x} \quad (\text{trong đó } x = \min\{x, y, z\}).$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh (2) đúng bằng **GLA**.

$$\text{Ta có: } \cos \frac{A}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right), \cos \frac{B}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right), \cos \frac{C}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right)$$

$$\text{Đặt } A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}. \text{ Khi đó: } (2) \Leftrightarrow \sum \sin A' \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left( 1 + \prod \cos A' \right) \quad (3) \text{ trong}$$

đó  $A', B', C'$  là số đo 3 góc của 1 tam giác nhọn có  $\min\{A', B', C'\} \geq \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \frac{p}{R} \geq \frac{4}{R3} \left( 1 + \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} \right) \Leftrightarrow p^2 - \sqrt{3}Rp - 4Rr - r^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow p \leq \frac{R\sqrt{3} + \sqrt{3R^2 + 16Rr + 4r^2}}{2} \Leftrightarrow p^2 \leq \frac{3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử  $\frac{\pi}{4} \leq A' \leq B' \leq C' \leq \frac{\pi}{2}$ . Xét các khả năng sau:

**Trường hợp 1:**  $B' \leq \frac{\pi}{3}$ . Áp dụng định lý 2 ta có  $p^2 \leq 3(R+r)^2$ .

Do đó ta chỉ cần chứng minh:  $6(R+r)^2 \leq 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$

$$\Leftrightarrow 6R^2 + 12Rr + 6r^2 \leq 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 4Rr + 4r^2 \leq R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$$

$$\text{Ta có: } R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2} \geq R\sqrt{9R^2 + 36Rr + 36r^2} = 3R(R + 2r) \geq 3R^2 + 4Rr + 4r^2$$

$$\text{Trường hợp 2: } B' \geq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2} \geq \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{24} > 0,116$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{4 \sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2}} < 2,16. \text{ Áp dụng định lý 3 ta chỉ cần chứng minh:}$$

$$2(2R^2 + 10Rr - r^2) + 4(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$$

$$\Leftrightarrow R^2 + 12Rr - 4r^2 + 4(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t - 4 + 4(t - 2)\sqrt{t(t - 2)} \leq t\sqrt{9t^2 + 48t + 12} \text{ trong đó } t = \frac{R}{r}, t \in [2; 2,16]$$

$$VT \leq t^2 + 12t - 4 + 4(t - 2)\sqrt{2,16(2,16 - 2)} \leq t^2 + 12t - 4 + 2,4(t - 2) = t^2 + 14,4t - 8,8$$

$$VP \geq t\sqrt{(3,2t + 5,6)^2 + (t - 2)(9,28 - 1,24t)} \geq t(3,2t + 5,6)$$

$$\text{Mà } t(3,2t + 5,6) - (t^2 + 14,4t - 8,8) = 2,2(t - 2)^2 \geq 0, \text{ do đó } VP \geq VT.$$

$$\text{Vậy } \sum \cos \frac{A}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \prod \sin \frac{A}{2}\right). \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng: } 8S^2 p^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3 \cos A \cos B \cos C \quad (1)$$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Nếu  $b^2 + c^2 \leq a^2$  thì  $VT \geq 0 \geq VP$  (đpcm)

Nếu  $b^2 + c^2 > a^2$  thì đặt  $a^2 = m, b^2 = n, c^2 = p \Rightarrow m, n, p$  là độ dài 3 cạnh tam giác.

Mặt khác theo bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 = \left(\sum \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a^4}\right)^3 \leq (a + b + c)^2 (a^4 + b^4 + c^4) \quad (2)$$

Từ (2) và (3) suy ra để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$$(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)a^2b^2c^2 \geq (a^4 + b^4 + c^4) \prod (a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)a^2b^2c^2 \geq (a^4 + b^4 + c^4) \prod (a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow (2mn + 2np + 2pm - m^2 - n^2 - p^2)mnp \geq (m^2 + n^2 + p^2) \prod (m + n - p)$$

$$\Leftrightarrow (16R_1r_1 + 4r_1^2)4R_1r_1p_1 \geq (m^2 + n^2 + p^2)8p_1r_1^2 \Leftrightarrow 8R_1^2 + 2R_1r_1 \geq m^2 + n^2 + p^2 \quad (3)$$

(3) đúng theo định lý 5. Vậy (1) đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Ghi chú:**  $R_1, r_1, p_1$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi  $\Delta MNP$  có độ dài 3 cạnh là  $m, n, p$ .

**Bình luận:** Xét về tính tương đương thì (1) chặt hơn bất đẳng thức  $8Rr + 4r^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$  (\*). Có nghĩa là để chứng minh trực tiếp bài toán ta cần sử dụng 1 bổ đề mạnh hơn (\*). Vậy mà trong lời giải sau khi làm chặt hơn bài toán bằng việc áp dụng Holder ta lại có thể chứng minh bằng 1 bổ đề về hình thức lỏng hơn cả (\*) là bất đẳng thức (3). Có được điều này là do ta đã đổi biến 1 cách khôn khéo từ  $a, b, c$  sang  $m, n, p$ . Xin giải thích kĩ hơn điều này như sau: ta biết bất đẳng thức (\*) và các dạng tương tự nó xảy ra đẳng thức khi tam giác đều. Khi các biến càng gần nhau thì 2 vế càng tiến sát nhau hơn. Việc đổi biến như trên nhằm mục đích “kéo giãn” khoảng cách giữa các biến ra và vì vậy mà bài toán trở nên “lỏng hơn”. Ví dụ: tam giác có các cạnh lần lượt “4, 4, 5” là một tam giác có 3 góc đều nhọn còn tam giác có cạnh là bình phương các độ dài đáy “16, 16, 25” là một tam giác tù. Đây chỉ là một mẹo nhỏ nhưng tư tưởng và tầm ứng dụng của nó là khá lớn.

**Bài 8.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 12 + \frac{32abc(a+b+c) \sum (a-b)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

**Chứng minh**

$$\sum \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{\sum (a+b)^2 c}{abc} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a) + 4abc}{abc} = \frac{4Rrp + 4pr^2}{pr^2} = \frac{4(R+r)}{r}$$

$$VP = 12 + \frac{32p^2r^2 [2(p^2 - 8Rr - 2r^2) - 4(4Rr + 2r^2)]}{16p^2R^2r^2} = 12 + \frac{4(p^2 - 12Rr - 3r^2)}{R^2}$$

Theo định lý 3 ta có  $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)}(R-2r)$

$$\text{Suy ra: } VP \leq 12 + \frac{4[2R^2 - 2Rr - 4r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}]}{R^2}$$

$$\leq 12 + \frac{8(R-2r)(R-r+\sqrt{R(R-2r)})}{R^2} \leq 12 + \frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}$$

$$\text{Do đó ta chỉ cần chứng minh: } \frac{4(R+r)}{r} \geq 12 + \frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{r} \geq \frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2} \Leftrightarrow 4(R-2r)^2 \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow R=2r \Leftrightarrow a=b=c$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{8a^2b^2c^2} \geq \left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b}\right) \left(\frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{b+c}\right) \left(\frac{c+a}{a+b} + \frac{a+b}{c+a}\right)$$

**Chứng minh**

Chuyển về  $p, R, r$  ta cần chứng minh: 
$$\frac{8x^2y^2z^2}{\prod (x+y-z)^2} \geq \frac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Để thấy } VT &= \frac{2R^2}{r^2}; \quad VP = \frac{(x^2+y^2+z^2)[(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)]}{x^2y^2z^2} - 1 \\ &= \frac{(2p^2 - 8Rr - 2r^2)[(p^2 + 4Rr + r^2)^2 - 16Rrp^2]}{16R^2r^2p^2} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (p^2 + 4Rr + r^2)^2 - 16Rrp^2 = p^4 + 2(4Rr + r^2)p^2 + (4Rr + r^2)^2 - 16Rrp^2$$

$$\text{Mặt khác: } 2(4Rr + r^2)p^2 \leq 9Rrp^2; (4Rr + r^2)^2 \leq \frac{p^2}{3} \cdot \frac{9Rr}{2} = \frac{3Rrp^2}{2}$$

$$\Rightarrow (p^2 + 4Rr + r^2)^2 - 16Rrp^2 \leq p^2 \left( p^2 - \frac{7Rr}{2} \right)$$

$$\text{Lại có } p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 4R^2 + \frac{7Rr}{2}. \text{ Do đó } x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq 4R^2p^2$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 + z^2 \leq 8R^2 + 4r^2. \text{ Vậy } VP \leq \frac{(8R^2 + 4r^2)4R^2p^2}{16R^2r^2p^2} - 1 = \frac{2R^2}{r^2} = VT$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}} + 2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{19}{8} \quad (*)$$

**Chứng minh**

Áp dụng các công thức 1 và 3 trong IV ta cần phải chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{2(2R-r)}{r}} + 2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{4Rr + r^2}{p^2 - 8Rr - 2r^2} \geq \frac{19}{8} \quad (1). \text{ Theo định lý 5 ta có:}$$

$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ . Do đó để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{4R}{r}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4Rr + r^2}{(4R^2 + 4Rr + 3r^2) - 8Rr - 2r^2} \geq \frac{19}{8} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} - 2 \geq \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{4Rr + r^2}{4R^2 - 4Rr + r^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{r \left[ \sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} + 4 \right]} \geq \frac{3}{8} \cdot \frac{4R(R-2r)}{(2R-r)^2} \Leftrightarrow 8(2R-r)^2 \geq 3Rr \left[ \sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} + 4 \right] \quad (2)$$

Ta nhận thấy:  $\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4R}{r}} + 4 \leq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2} \leq \frac{6R}{r}$

Suy ra:  $VP(2) \leq 3Rr \cdot \frac{6R}{r} = 18R^2 = 8\left(\frac{3R}{2}\right)^2 \leq 8(2R-r)^2 = VT(2)$

Do đó (2) được chứng minh, tức là (\*) đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 11.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh :

$$8(a+b+c)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+64a^2b^2c^2 \geq 6(a+b+c)abc[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]+(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

**Chứng minh**

Áp dụng các công thức 1, 2, 5 trong IV ta cần phải chứng minh:

$$8p^2[(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2]+64p^2r^4 \geq 6p^2r^2(2p^2-8Rr-2r^2)+16p^2R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(4R+r)^2-4p^2+16r^2 \geq 3(p^2-4Rr-r^2)+4R^2 \Leftrightarrow 4R^2+4Rr+3r^2 \geq p^2 \text{ (đúng)}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c > 0$ .

Chứng minh:  $\frac{8(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} - 1$

**Chứng minh**

Áp dụng các công thức 1, 2 và 4 trong IV ta cần chứng minh:

$$\frac{8p(p^2-12Rr)}{4pRr} \geq \frac{4(p^2-8Rr-2r^2)}{4Rr+r^2} - 1 \Leftrightarrow \frac{2p^2}{Rr} - 24 \geq \frac{4p^2}{4Rr+r^2} - 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{2p^2}{Rr} - \frac{4p^2}{4Rr+r^2} \geq 15 \Leftrightarrow p^2 \geq \frac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}$$

Ta có  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  và  $16Rr - 5r^2 \geq \frac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)} \Leftrightarrow 4R^2 \geq 3Rr + 10r^2$  (đúng)

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 13.** Cho  $a, b, c > 0$ .

Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}$

**Chứng minh**

Áp dụng công thức 2, 4, 8 ta cần chứng minh:  $\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr} + \frac{pr^2}{2p(p^2-12Rr)} \geq \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{6} - \frac{r^2}{2(p^2-12Rr)} \Leftrightarrow \frac{p^2-14Rr+r^2}{4Rr} \geq \frac{p^2-12Rr-3r^2}{6(p^2-12Rr)}$$

$$\Leftrightarrow 3(p^2-14Rr+r^2)(p^2-12Rr) \geq 2Rr(p^2-12Rr-3r^2) (*). \text{ Do } p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \text{ nên}$$

$$\begin{cases} 2(p^2 - 14Rr + r^2) = (p^2 - 12Rr - 3r^2) + (p^2 - 16Rr + 5r^2) \geq p^2 - 12Rr - 3r^2 & (1) \\ 3(p^2 - 12Rr) \geq 3(4Rr - 5r^2) = 4Rr + r(8R - 15r) \geq 4Rr & (2) \end{cases}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta được (\*) tức là bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 14.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 9\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 15 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh:  $\frac{2(2R-r)}{r} + 9\sqrt{\frac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}} \geq 15 \quad (*)$

Theo định lý 5 ta có:  $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ . Do đó để chứng minh (\*) ta chỉ cần chứng

$$\begin{aligned} \text{minh: } \frac{4R-2r}{r} + 9 \cdot \frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r} &\geq 15 \Leftrightarrow \frac{4R-2r}{r} - 6 \geq 9 \left(1 - \frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{r} &\geq 9 \cdot \frac{4R(R-2r)}{(2R-r)(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2})} \Leftrightarrow (2R-r)(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}) \geq 9Rr \end{aligned}$$

Ta có:  $VT \geq (2R-r)(2R-r+\sqrt{9r^2}) = 4R^2 + 2Rr - 2r^2 \geq 9Rr = VP$

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 15.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{162abc}{(a+b+c)^3} \geq 9$$

**Chứng minh**

Áp dụng công thức 2 và 3 ta cần chứng minh:

$$\frac{p(p^2-12Rr)}{pr^2} + \frac{162pr^2}{p^3} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{p^2-12Rr}{r^2} + \frac{162r^2}{p^2} \geq 9$$

$$\text{Đặt } f(p) = \frac{p^2-12Rr}{r^2} + \frac{162r^2}{p^2} \Rightarrow f'(p) = \frac{2p}{r^2} - \frac{324r^2}{p^3} = \frac{2(p^4-162r^4)}{p^3r^2} \geq 0$$

Do đó  $f(p)$  đồng biến theo  $p$  tức là  $f(p) \geq f(\sqrt{16Rr-5r^2})$ . Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{16Rr-5r^2-12Rr}{r^2} + \frac{162r^2}{16Rr-5r^2} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{4R-5r}{r} - 3 \geq 6 - \frac{162r}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{r} \geq 6 \cdot \frac{16(R-2r)}{16R-5r} \Leftrightarrow 16R-5r \geq 24r \Leftrightarrow 16R \geq 29r \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 16.** Chứng minh rằng với mọi  $a, b, c$  dương ta có:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4} + \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \geq 5 \quad (*)$$

**Chứng minh**

Áp dụng các công thức 1, 2, 4 và 5 ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \frac{p^2 r^2}{p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2} + \frac{12p(p^2 - 12Rr)}{p(p^2 - 8Rr - 2r^2)} \geq 5 \\ \Leftrightarrow & \frac{12(p^2 - 12Rr)}{p^2 - 8Rr - 2r^2} - 4 \geq 1 - \frac{p^2 r^2}{p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{4(2p^2 - 28Rr + 2r^2)}{p^2 - 8Rr - 2r^2} \geq \frac{p^4 - (16Rr + r^2)p^2 + 2(4Rr + r^2)^2}{p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{8(p^2 - 14Rr + r^2)}{p^2 - 8Rr - 2r^2} - \frac{p^4 - (16Rr + r^2)p^2 + 2(4Rr + r^2)^2}{p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2} \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt VT của (1) là  $f(p)$ . Ta có  $f'(p) \geq 0$ , do đó  $f(p) \geq f(\sqrt{16Rr - 5r^2})$

$$\begin{aligned} \text{Mà } f(\sqrt{16Rr - 5r^2}) &= \frac{8(2Rr - 4r^2)}{8Rr - 7r^2} - \frac{2(4Rr + r^2)^2 - 6(16Rr - 5r^2)}{2(4Rr + r^2)^2 - 5(16Rr - 5r^2)} \\ &= \frac{16(R - 2r)}{8R - 7r} - \frac{16(R - 2r)(2R - r)}{32R^2 - 64Rr + 27r^2} = \frac{32(R - 2r)^2(8R - 5r)}{(8R - 7r)(32R^2 - 64Rr + 27r^2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy (\*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 17.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq \frac{7}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{5}{6} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \quad (*)$$

**Chứng minh**

Áp dụng công thức 1, 3 và 6 ta cần chứng minh:  $\frac{4R-2r}{r} \geq \frac{7}{2} \cdot \frac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} + \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$

$$\Leftrightarrow 6(4R - 2r) \geq 21 \cdot \frac{4R^2 - 4Rr + r^2}{4R + r} + 5 \left( \sqrt[3]{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)r} - 3r \right)$$

$$\Leftrightarrow 24(R - 2r) \geq 21 \cdot \frac{4R(R - 2r)}{4R + r} + 5 \cdot \frac{4(R - 2r)(R + 3r)}{A^2 + 3rA + 9r^2} \quad (\text{trong đó } A = \sqrt[3]{(4R^2 + 4Rr + 3r^2)r})$$

$$\Leftrightarrow 6(4R + r) \geq 21R + \frac{5r(R + 3r)(4R + r)}{A^2 + 3rA + 9r^2} \Leftrightarrow 3(R + 2r)(A^2 + 3rA + 9r^2) \geq 5r(R + 3r)(4R + r)$$

Ta có:  $A^2 + 3rA \geq 2\sqrt{A^3 3r} = 2\sqrt{3r^2(4R^2 + 4Rr + 3r^2)}$

Suy ra:  $3(A^2 + 3rA) \geq 2r\sqrt{27(4R^2 + 4Rr + 3r^2)} \geq 2r(10R + 7r)$

Do đó trong (2) thì  $VT \geq r(R + 2r)(20R + 41r) \geq VP$

Vậy (\*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài 18.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & 2(ab + bc + ca) \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \\ & \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \left( \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right) \stackrel{(2)}{\leq} (a+b+c) \left( \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \\ & \stackrel{(3)}{\leq} (ab + bc + ca) \left[ \left( \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right) - 2 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \right] \end{aligned}$$

**Chứng minh**

Theo bài 1 thì (1) đúng. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (2) và (3).

Áp dụng các công thức 1, 3, 8 và 12 ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{2}(4Rr + r^2) \frac{4R-2r}{r} \stackrel{(2)}{\leq} p \cdot \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p} \stackrel{(3)}{\leq} r(4R+r) \left( \frac{4R-2r}{r} - 2 \cdot \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr} \right)$$

$$\begin{aligned} (2) & \Leftrightarrow (4R+r)(2R-r) \leq (4R+r)^2 - 2p^2 \Leftrightarrow 2p^2 + 8R^2 + 2Rr - 4Rr - r^2 \leq 16R^2 + 8Rr + r^2 \\ & \Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 5Rr + r^2 \text{ (đúng theo định lý 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \Leftrightarrow (4R+r)^2 - 2p^2 \leq (4R+r)(4R-2r) - \frac{(4R+r)(p^2 - 8Rr + r^2)}{2R} \\ & \Leftrightarrow 3r(4R+r) - 2p^2 + 2(p^2 - 8Rr + r^2) \leq -\frac{r(p^2 - 8Rr + r^2)}{2R} \Leftrightarrow 4R - 5r \geq \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{2R} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 8Rr + r^2 \leq 8R^2 - 10Rr \Leftrightarrow p^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2 \text{ (đúng theo định lý 3)}$$

Đẳng thức xảy ra trong 3 bất đẳng thức (1), (2) và (3) khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 19.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{a^2 + 2bc} + \frac{b}{b^2 + 2ca} + \frac{c}{c^2 + 2ab} \leq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

**Chứng minh**

Dễ thấy  $VP = \frac{p}{4Rr + r^2}$ . Bây giờ ta sẽ biến đổi về trái về biểu thức của  $p, R, r$

$$\text{Ta có: } VT = \frac{\sum [a(b^2 + 2ca)(c^2 + 2ab)]}{(a^2 + 2bc)(b^2 + 2ca)(c^2 + 2ab)}$$

$$= \frac{2(a+b+c)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a^2 + b^2 + c^2) - abc(ab + bc + ca)}{9a^2b^2c^2 + 4abc(a^3 + b^3 + c^3) + 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)}$$



Áp dụng các đẳng thức 1, 4, 13, 14 ở phần IV ta được:

$$\begin{aligned}
 VT &= \frac{2p[(4Rr+r^2)^2 - 2p^2r^2] + 4pr^2(p^2 - 8Rr - 2r^2) - pr^3(4R+r)}{9p^2r^4 + 4p^2r^2(p^2 - 12Rr) + 2r^3[(4R+r)^3 - 12p^2R]} \\
 &= \frac{2pr^2(4R+r)^2 - 4p^3r^2 + 4p^3r^2 - 8pr^3(4R+r) - pr^3(4R+r)}{9p^2r^4 + 4p^4r^2 - 48Rr^3p^2 + 2r^3(4R+r)^3 - 24Rp^2r^3} \\
 &= \frac{2pr^2(4R+r)^2 - 9pr^3(4R+r)}{9p^2r^4 + 4p^4r^2 + 2r^3(4R+r)^3 - 72Rp^2r^3} = \frac{p[2(4R+r)^2 - 9r(4R+r)]}{9p^2r^2 + 4p^4 + 2r(4R+r)^3 - 72Rrp^2}
 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:  $VT \leq \frac{p}{4Rr+r^2} \Leftrightarrow \frac{2(4R+r)^2 - 9r(4R+r)}{9p^2r^2 + 4p^4 + 2r(4R+r)^3 - 72Rrp^2} \leq \frac{1}{4Rr+r^2}$

Đặt  $p^2 = t$  và  $f(t) = \frac{1}{9tr^2 + 4t^2 + 2r(4R+r)^3 - 72Rrt}$

$f'(t) = -\frac{8t + 9r^2 - 72Rr}{[9tr^2 + 4t^2 + 2r(4R+r)^3 - 72Rrt]^2} < 0$  (do  $t \geq 16Rr - 5r^2 \geq 9Rr$ )

Do đó  $f(t)$  nghịch biến theo  $t$  tức là  $f(t) \leq f(16Rr - 5r^2)$ . Suy ra ta chỉ cần chứng

minh:  $\frac{2(4R+r)^2 - 9r(4R+r)}{9(16Rr - 5r^2)r^2 + 4(16Rr - 5r^2)^2 + 2r(4R+r)^3 - 72Rr(16Rr - 5r^2)} \leq \frac{1}{4Rr+r^2}$

$\Leftrightarrow 2(4R+r)^3 - 9r(4R+r)^2 \leq 2(4R+r)^3 + 4r(16Rr - 5r^2)^2 + 9r^2(16Rr - 5r^2) - 72Rr(16Rr - 5r^2)$

$\Leftrightarrow 4(16Rr - 5r^2)^2 + 9r(16Rr - 5r^2) + 9(4R+r)^2 - 72Rr(16Rr - 5r^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4(256R^2 - 160Rr + 25r^2) + 144Rr - 45r^2 + 9(16R^2 + 8Rr + r^2) - 1152R^2 + 360Rr \geq 0$

$\Leftrightarrow 16R^2 - 64Rr + 64r^2 \geq 0 \Leftrightarrow 16(R - 2r)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} R = 2r \\ p^2 = 16Rr - 5r^2 \Leftrightarrow I \equiv G \Leftrightarrow \\ r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b, c = 0 \\ b = c, a = 0 \\ c = a, b = 0 \end{cases}$

**Bài 20.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3 + 2abc}{b+c} + \frac{b^3 + 2abc}{c+a} + \frac{c^3 + 2abc}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$(1) \Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3 + 2abc) \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - \sum \frac{a^3 + b^3}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2}$

$\Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3 + 2abc) \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{5}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

Áp dụng các đẳng thức 1, 2, 3, 10 phần IV ta cần chứng minh:

$$\left[ p(p^2 - 12Rr) + 2pr^2 \right] \cdot \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp} \geq \frac{5}{2}(p^2 - 8Rr - 2r^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p^2 - 12Rr + 2r^2)(p^2 + 4Rr + r^2)}{4Rr} \geq \frac{5}{2}(p^2 - 8Rr - 2r^2) \quad (*)$$

Đặt  $p^2 = t$  và  $f(t) = VT - VP$ . Ta có:  $f'(t) = \frac{t + 4Rr + r^2}{4Rr} + \frac{t - 12Rr + 2r^2}{4Rr} - \frac{5}{2}$   
 $= \frac{2t - 8Rr + 3r^2}{4Rr} - \frac{5}{2} = \frac{2t - 18Rr + 3r^2}{4Rr} \geq 0$  (do  $t \geq 16Rr - 5r^2$ )

$\Rightarrow f(t)$  đồng biến theo  $p$ . Để chứng minh (\*) ta sẽ thay  $p^2 = 16Rr - 5r^2$  vào trong biểu thức  $p^2 + 4Rr + r^2$  và thay  $p^2 = 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$  vào trong các biểu thức  $p^2 - 12Rr + 2r^2$ ,  $p^2 - 8Rr - 2r^2$  ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{\left(16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R} - 12Rr + 2r^2\right)\left(16Rr - 5r^2 + 4Rr + r^2\right)}{4Rr} \geq \frac{5}{2}\left(16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R} - 8Rr - 2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4Rr - 3r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}\right)(20Rr - 4r^2)}{4Rr} \geq \frac{5}{2}\left(8Rr - 7r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(4R - 3r + \frac{r(R-2r)}{R}\right)(5R - r)}{R} \geq \frac{5}{2}\left(8R - 7r + \frac{r(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(20R^2 - 19Rr + 3r^2) + \frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R} \geq 40R^2 - 35Rr + 5r(R-2r)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R} \geq 8r(R-2r) \Leftrightarrow 5R-r \geq 4R \Leftrightarrow R \geq r \text{ (đúng)}$$

Vậy (1) đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} R = 2r \\ I \equiv G \\ r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b, c = 0 \\ b = c, a = 0 \\ c = a, b = 0 \end{cases}$

**Bài 21.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$  Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \leq \frac{9}{4(ab+bc+ca)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

Biến đổi về trái. Do  $a + b + c = 1$  nên  $p = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} &= \frac{\sum (a+bc)(b+ca)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca) + [a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] + abc(a+b+c)}{abc + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2c^2} \\ &= \frac{4Rr + r^2 + (a+b)(b+c)(c+a) - 2abc + p^2r^2}{pr^2 + r^2(4R+r)^2 - 2p^2r^2 + pr^2(p^2 - 8Rr - 2r^2) + p^2r^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{4Rr + r^2 + 4Rr - 2r^2 + r^2}{r^2 + r^2(4R+r)^2 - 2r^2 + r^2(1-8Rr-2r^2) + r^4} = \frac{8Rr}{r^2(4R+r)^2 - r^3(8R+2r) + r^4}$$

$$= \frac{8R}{r(4R+r)^2 - r^2(8R+2r) + r^3} = \frac{8R}{16R^2r} = \frac{1}{2Rr}. \text{ Vậy ta cần phải chứng minh:}$$

$$\frac{1}{2Rr} \leq \frac{9}{4(4Rr+r^2)} \Leftrightarrow 2r \leq R \text{ (đúng)} \Rightarrow (*) \text{ đúng. Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a=b=c.$$

**Bài 22.** Cho  $a, b, c > 0; ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 25(a^2 + b^2 + c^2) + 2 \quad (*)$$

### Chứng minh

Trước tiên dựa vào điều kiện ta đi tìm bài toán gốc của (\*)

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 24(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} \geq \frac{24(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + 1 \Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{24(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} \quad (1)$$

$$\text{Bài toán đưa về } \frac{4Rrp}{pr^2} \geq \frac{24(p^2 - 8Rr - 2r^2)}{p^2} \Leftrightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{6(p^2 - 8Rr - 2r^2)}{p^2} \quad (**)$$

Ta thấy ngay VP đồng biến theo  $p$  nên vấn đề bây giờ là chọn cận trên  $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$  hay  $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$  để giải quyết bài toán. Do (1) trở thành đẳng thức khi  $a=b=c$  hoặc  $a=2b=2c$  (và các hoán vị) mà  $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$  chỉ xảy ra đẳng thức khi tam giác là tam giác đều nên ta sẽ sử dụng đánh giá  $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ .

Khi đó (\*\*) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{R}{r} \geq \frac{6 \left[ (2R^2 + 10Rr + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} - r^2) - 8Rr - 3r^2 \right]}{2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3 + 10R^2r - Rr^2 + 2R(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \geq 12R^2r + 12Rr^2 - 18r^3 + 12r(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3 - 2R^2r - 13Rr^2 + 18r^3 \geq 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow (R-2r)(2R^2 + 2Rr - 9r^2) \geq 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 + 2Rr - 9r^2 \geq 2(6r-R)\sqrt{R(R-2r)} \quad (3)$$

Nếu  $6r \leq R$  thì ta có ngay VT  $\geq 0 \geq$  VP.

$$\text{Nếu } 6r > R \text{ thì } (3) \Leftrightarrow (2R^2 + 2Rr - 9r^2)^2 \geq (4R^2 - 48Rr + 144r^2)(R-2r)R$$

$$\Leftrightarrow 4R^4 + 4R^2r^2 + 81r^4 + 8R^3r - 36Rr^3 - 36R^2r^2 \geq (4R^3 - 48R^2r + 144Rr^2 - 8R^2r + 96Rr^2 - 288r^3)R$$

$$\Leftrightarrow 4R^4 + 8R^3r - 32R^2r^2 - 36Rr^3 + 81r^4 \geq (4R^3 - 56R^2r + 240Rr^2 - 288r^3)R$$

$$\Leftrightarrow 64R^3r - 272R^2r^2 + 252Rr^3 + 81r^4 \geq 0 \Leftrightarrow 64R^3 - 272R^2r + 252Rr^2 + 81r^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 64R\left(R - \frac{9}{4}r\right)^2 + 16r\left(R - \frac{9}{4}r\right)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}. \text{ Vậy } \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 25(a^2 + b^2 + c^2) + 2$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$  hoặc  $a=2b=2c$  và các hoán vị

**Bình luận:** Trường hợp đẳng thức xảy ra khi  $a=b=c$  có thể dễ nhận thấy ngay, nhưng còn trường hợp đẳng thức xảy ra khi  $a=2b=2c$  thì ta tìm ra như sau. Theo lời giải bằng GLA thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} R=2r \\ \begin{cases} p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \\ R = \frac{9}{4}r \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \text{O nằm giữa I và K} \\ R = \frac{9}{4}r \end{cases}$$

Điều kiện O nằm giữa I và K cho ta biết tam giác đó phải là tam giác cân còn điều kiện  $R = \frac{9}{4}r$  sẽ giúp ta tìm ra được một đẳng thức nữa là  $a=2b=2c$ . Chú ý rằng ở đây K là điểm sao cho  $\overline{IK} = 3\overline{IG}$ ).

**Bài 23.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a+1} + \frac{b^2}{5b+1} + \frac{c^2}{5c+1} \leq \frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} VT &= \frac{\sum a^2(5b+1)(5c+1)}{(5a+1)(5b+1)(5c+1)} = \frac{25abc(a+b+c) + 5\sum[a^2(b+c)] + (a^2+b^2+c^2)}{125abc + 25(ab+bc+ca) + 5(a+b+c) + 1} \\ &= \frac{25p^2r^2 + 5(4Rrp - 2pr^2) + p^2 - 8Rr - 2r^2}{125pr^2 + 25(4Rr + r^2) + 5p + 1} \\ &= \frac{25r^2 + 5(4Rr - 2r^2) + 1 - 8Rr - 2r^2}{125r^2 + 25(4Rr + r^2) + 5 + 1} = \frac{13r^2 + 12Rr + 1}{150r^2 + 100Rr + 6} = \frac{13r^2 + 12Rr + p^2}{150r^2 + 100Rr + 6p^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \frac{13r^2 + 12Rr + p^2}{150r^2 + 100Rr + 6p^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}} = \frac{p}{8\sqrt{3(4Rr + r^2)}}$$

Xét  $f(p) = VP - VT$ , suy ra

$$\begin{aligned} f'(p) &= \frac{1}{8\sqrt{3(4Rr + r^2)}} - \frac{2p(150r^2 + 100Rr + 6p^2) - 12p(13r^2 + 12Rr + p^2)}{(150r^2 + 100Rr + 6p^2)^2} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}} - \frac{p(36r^2 + 14Rr)}{(75r^2 + 50Rr + 3p^2)^2}. \text{ Xét } g(p) = \frac{p(36r^2 + 14Rr)}{(75r^2 + 50Rr + 3p^2)^2} \\ \Rightarrow g'(p) &= \frac{(36r^2 + 14Rr)(75r^2 + 50Rr - 9p^2)}{(75r^2 + 50Rr + 3p^2)^3} \end{aligned}$$

Do  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  và  $R \geq 2r$  nên  $g'(p) \leq 0 \Rightarrow g(p)$  nghịch biến theo  $p$ , tức là:

$$\begin{aligned} f'(p) &\geq \frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}} - \frac{\sqrt{(16R-5r)r(36r^2+14Rr)}}{[75r^2+50Rr+3(16Rr-5r^2)]^2} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}} - \frac{\sqrt{(16R-5r)r(36r^2+14Rr)}}{(60r^2+98Rr)^2} \end{aligned}$$

Nhận thấy  $4(14Rr+36r^2) = 56Rr+144r^2 \leq 98Rr+60r^2$

$$2\sqrt{3r(4R+r)}\sqrt{(16R-5r)r} \leq 2r(16R-5r) \leq 98Rr+60r^2$$

Từ 2 điều trên ra thấy ngay  $f'(p) \geq 0 \Rightarrow f(p)$  đồng biến theo  $p$ .

Vậy ta sẽ chứng minh được  $f(p) \geq 0$  nếu chứng minh được  $f(\sqrt{(16R-5r)r}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{16R-5r}}{8\sqrt{3(4R+r)}} \geq \frac{13r^2+12Rr+(16R-5r)r}{150r^2+100Rr+6(16R-5r)r} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{16R-5r}}{\sqrt{3(4R+r)}} \geq \frac{56R+16r}{49R+30r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16R-5r}{3(4R+r)} - 1 \geq \left( \frac{56R+16r}{49R+30r} \right)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{3(4R+r)} \geq \frac{(7R-14r)(105R+46r)}{(49R+30r)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(49R+30r)^2 \geq 21(105R+46r)(4R+r) \Leftrightarrow 784R^2+5571Rr+2604r^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

**Bài 24.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}} + \frac{16}{5} \cdot \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{7}{5}$

### Chứng minh

Áp dụng các công thức 1 và 14 phần IV ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} + \frac{4r}{5R} \geq \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} - 1 \geq \frac{2}{5} - \frac{4r}{5R} \quad (!)$$

Theo định lý 6 ta có:  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$  nên:

$$\sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} \geq \sqrt{\frac{8R-7r+\frac{r(R-2r)}{R}}{4R+r}} = \sqrt{\frac{2(4R+r)(R-r)}{R(4R+r)}} = \frac{\sqrt{2R(R-r)}}{R}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{\sqrt{2R(R-r)}}{R} - R = \frac{2R(R-r) - R^2}{R[\sqrt{2R(R-r)} + R]} = \frac{R-2r}{\sqrt{2R(R-r)} + R} \geq \frac{R-2r}{\sqrt{2R^2+R}}$$

$$\geq \frac{R-2r}{\frac{3}{2}R+R} = \frac{2(R-2r)}{5R} = VP. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c$$

**Bài 25.** Cho  $a, b, c > 0; a + b + c + 1 = 4abc$ . Chứng minh rằng:  $a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

**Chứng minh**

Bài toán được đưa về: Cho  $p + 1 = 4pr^2$ . Chứng minh rằng:  $p^2 r^2 \geq 4Rr + r^2$

Ta có:  $p^2 \geq 27r^2 \Rightarrow \frac{4p^3}{27} \geq p + 1 \Rightarrow p \geq 3$ . Ta sẽ chứng minh:  $p(p + 1) \geq 4(4Rr + r^2)$

Ta có:  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  (1). Do  $p \geq 3$  nên  $4p^2 \geq 9(p + 1) \Rightarrow 4p^2 \geq 9 \cdot 4pr^2 \Rightarrow p \geq 9r^2$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $p(p + 1) \geq 4(4Rr + r^2)$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 26.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$

**Chứng minh**

Áp dụng đẳng thức 1 và 10 phần IV ta có bài toán sau:

Cho  $x, y, z > 0$  và  $4Rr + r^2 = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow p^2 - 10Rrp + 1 \geq 0$  (1)

Xét phương trình:  $f(x) = x^2 - 10Rrx + 1 = 0$ ;  $\Delta' = 25R^2 r^2 - 1$

$\Rightarrow x_1 = 5Rr - \sqrt{25R^2 r^2 - 1}$ ;  $x_2 = 5Rr + \sqrt{25R^2 r^2 - 1}$

Để chứng minh (1) ta chỉ phải chứng minh  $p \geq x_2 = 5Rr + \sqrt{25R^2 r^2 - 1}$ . Ta có:

$\sqrt{25R^2 r^2 - 1} = \sqrt{25R^2 r^2 - (4Rr + r^2)^2} = r\sqrt{9R^2 - 8Rr - r^2} \leq r\sqrt{(3R - r)^2} = r(3R - r)$

$\Rightarrow 5Rr + \sqrt{25R^2 r^2 - 1} \leq 5Rr + r(3R - r) = 2 - 3r^2$ . Mặt khác

$p^2 - 16Rr + 5r^2 = 9IG^2 \geq 0 \Rightarrow p \geq \sqrt{16Rr - 5r^2} = \sqrt{4 - 9r^2}$ . Ta sẽ chứng minh:

$\sqrt{4 - 9r^2} \geq 2 - 3r^2 \Leftrightarrow 4 - 9r^2 \geq (2 - 3r^2)^2 \Leftrightarrow 4 - 9r^2 \geq 4 - 12r^2 + 9r^4$

$\Leftrightarrow r^2(1 - 3r^2) \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 0 \\ p^2 = 16Rr - 5r^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = z = 1$

Vậy  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = 1, c = 0$  và các hoán vị.

**Mở rộng:** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{a+b+c+abc}$

**Chứng minh.** Trước tiên ta nhận thấy bài toán này chặt hơn bài toán ban đầu bởi lẽ:

$1 = ab + bc + ca \geq a(b+c) \geq a^2 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq a + b + c + abc$

Áp dụng công thức 1 phần IV ta cần phải chứng minh:

$$\frac{\sum (a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{5}{a+b+c+abc} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc} \geq \frac{5}{a+b+c+abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-16Rr-4r^2}{(a+b+c)(1-2Rr)} \geq \frac{5}{(a+b+c)(1+2Rr)} \Leftrightarrow [5-(16Rr+4r^2)](1+2Rr) \geq 5(1-2Rr)$$

$$\Leftrightarrow 5+10Rr-(1+2Rr)(16Rr+4r^2) \geq 5-10Rr \Leftrightarrow 20Rr \geq (1+2Rr)(16Rr+4r^2) \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } (1+2Rr)(16Rr+4r^2) \leq 18(1+2Rr)Rr = 18Rr + 2Rr \cdot 18Rr \leq$$

$$\leq 18Rr + 2Rr(ab+bc+ca) = 20Rr. \text{ Do đó (1) được chứng minh.}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{a+b+c+abc}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=1, c=0.$$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $2b \geq a+c$  ( $b$  nằm giữa  $a$  và  $c$ ).

$$\text{Chứng minh: } \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

### Chứng minh

Điều kiện  $2b \geq a+c \Leftrightarrow x+z \geq 2y$ , do đó theo hằng đẳng thức 4 phần B ta có:

$$2Rr - r^2 - \frac{p^2}{9} = -\frac{1}{18p}(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y) \geq 0 \Rightarrow 18Rr - 9r^2 \geq p^2 \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh: } \frac{4R-2r}{r} \geq \frac{6(p^2-8Rr-2r^2)}{4Rr+r^2}$$

$$\Leftrightarrow (2R-r)(4R+r) \geq 3(p^2-8Rr-2r^2) \Leftrightarrow 8R^2-2Rr-r^2 \geq 3p^2-24Rr-6r^2$$

$$\Leftrightarrow 8R^2+22Rr+5r^2 \geq 3p^2 \Leftrightarrow 8(R-2r)^2+3(18Rr-9r^2) \geq 3p^2 \quad (\text{đúng theo (1)})$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c$$

**Bài 28.** Cho là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 35 \geq 32 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \quad (*)$$

### Chứng minh

Điều kiện  $a \leq b+c \Leftrightarrow x+y \leq 3z$ , do đó theo hằng đẳng thức 5 phần B ta có:

$$4Rr - r^2 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{32p}(x+y-3z)(y+z-3x)(z+x-3y) \geq 0 \Rightarrow 16Rr - 4r^2 \geq p^2 \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh: } \frac{4R-2r}{r} + 35 \geq 32 \cdot \frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}$$

$\Leftrightarrow (4R + 33r)(4R + r) \geq 32(p^2 - 8Rr - 2r^2)$ . Theo (1) ta chỉ cần chứng minh:

$$(4R + 33r)(4R + r) \geq 32(8Rr - 6r^2)$$

$$\Leftrightarrow 16R^2 + 136Rr + 33r^2 - (256Rr - 192r^2) \geq 0 \Leftrightarrow (4R - 15r)^2 \text{ (đúng)}$$

Vậy (\*) đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3z \\ 4R = 15r \end{cases} \Leftrightarrow a : b : c = \frac{7 + \sqrt{21}}{2} : \frac{5 + \sqrt{21}}{2} : 1$

**Bài 29.** Cho  $a, b, c \geq 0$ ,  $a + b + c = 1$  và  $1 + 18abc \geq 5(ab + bc + ca)$ .

Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{12abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3$

**Chứng minh**

$$1 + 18abc \geq 5(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a + b + c)^3 + 18abc \geq 5(ab + bc + ca)(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow p^3 + 18pr^2 \geq 5(4Rr + r^2)p \Leftrightarrow p^2 \geq 20Rr - 13r^2$$

Theo công thức 2 và 8 phần IV ta có:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{12abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$   
 $= \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr} + \frac{12r}{4R} \geq \frac{(20Rr - 13r^2) - 8Rr + r^2}{4Rr} + \frac{12r}{4R} = 3$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 1 + 18abc = 5(ab + bc + ca) \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 15abc = 2[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)]$$

**Bài 30.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c \geq \max\left\{\frac{ab}{c}, \frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}\right\}$ .

Chứng minh:  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{(14 + 10\sqrt{2})abc}{(a+b+c)(ab + bc + ca)} \geq 2\sqrt{2} + 1$  (\*)

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a \geq b \geq c$ . Theo điều kiện ta có:

$$a + b + c \geq \frac{ab}{c} \Leftrightarrow ac + bc + c^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+c)^2 \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq z^2$$

Do đó  $\Delta XYZ$  là tam giác không tù  $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 8R^2 \Rightarrow p^2 \geq 4R^2 + 4Rr + r^2$

Áp dụng công thức 1 và 2 ta có:  $VT - VP = \frac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} + \frac{(14 + 10\sqrt{2})r^2}{4Rr + r^2} - (2\sqrt{2} + 1)$

$$\geq \frac{4R^2 + (14 + 10\sqrt{2})r^2}{4Rr + r^2} - 2\sqrt{2} - 2 = \frac{4[R - (\sqrt{2} + 1)r]^2}{4Rr + r^2} \geq 0$$

Vậy (\*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)c = ab \\ R = (\sqrt{2} + 1)r \end{cases} \Leftrightarrow a = b = (\sqrt{2} + 1)c$



**Bài 31.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a \geq b + c$ . Chứng minh rằng:

$$a. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2$$

$$b. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{3abc}{5(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \sqrt{2}$$

**Chứng minh**

Điều kiện  $a \geq b + c$  tương đương với điều kiện  $x + y \geq 3z$ , do đó theo hằng đẳng thức 5

$$\text{phần II ta có: } 4Rr - r^2 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{32p}(x+y-3z)(y+z-3x)(z+x-3y) \leq 0$$

$\Rightarrow 16Rr - 4r^2 \leq p^2$  (1). Áp dụng các đẳng thức 8 và 14 phần IV ta cần chứng minh:

$$\frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr} + \sqrt{\frac{r}{4R}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{p^2 - 16Rr + r^2}{4Rr} + \sqrt{\frac{r}{4R}} \geq 0. \text{ Mặt khác:}$$

$$\frac{p^2 - 16Rr + r^2}{4Rr} + \sqrt{\frac{r}{4R}} \geq \frac{-3r^2}{4Rr} + \sqrt{\frac{r}{4R}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{r}{R}} \left( \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{r}{R}} \right) \geq 0 \text{ (do } \frac{r}{R} \leq \frac{4}{9} \text{ theo định lý 7)}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a=b, c=0 \\ a=2b=2c \end{cases}$$

$$b. \text{ Ta cần chứng minh: } \sqrt{\frac{8R-3r}{4R}} + \sqrt{\frac{3r}{20R}} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{3r}{4R} + \frac{3r}{20R} + 2\sqrt{\frac{8R-3r}{4R}} \sqrt{\frac{3r}{20R}} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{8R-3r}{4}} \sqrt{\frac{3r}{5}} \geq \frac{3r}{5} \Leftrightarrow \frac{8R-3r}{4} \geq \frac{3r}{5} \Leftrightarrow 40R \geq 27r \text{ (đúng)}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b, c=0$$

**Bài 32.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a \geq b \geq c$  và  $2b \geq a + c$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{92}{27} \geq \frac{242}{27} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

**Chứng minh**

Ta đã biết điều kiện  $2b \geq a + c$  tương đương với  $18Rr - 9r^2 \geq p^2$

Vậy để giải quyết bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4R-2r}{r} + \frac{92}{27} \geq \frac{242}{27} \cdot \frac{10R-11r}{4R+r} \Leftrightarrow 54(2R-r)(4R+r) + 92r(4R+r) \geq 242(10R-11r)$$

$$\Leftrightarrow 432R^2 + 260Rr + 38r^2 \geq 2420Rr - 2662r^2 \Leftrightarrow 432R^2 - 2160Rr + 2700r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 108(2R-5r)^2 \geq 0 \text{ (đúng). Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2b \\ 2R=5r \end{cases} \Leftrightarrow a=3t, b=2t, c=t \text{ (} t > 0 \text{)}$$

**Bài 33.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a \geq b \geq c$  và  $2b \leq a + c$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} &= \frac{\sum (b^2+ca)(c^2+ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} \\ &= \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)+(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)}{2a^2b^2c^2+(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+abc(a^3+b^3+c^3)} \\ &= \frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2+p^2r^2+p^2(p^2-12Rr)-p^4+16Rrp^2-2(4R+r)^2r^2}{2p^2r^4+r^3(4R+r)^3-12p^2r^3R+p^2r^2(p^2-12Rr)} \\ &= \frac{4Rrp^2-p^2r^2-(4R+r)^2r^2}{2p^2r^4+r^3(4R+r)^3-24p^2r^3R+p^4r^2} = \frac{4Rp^2-p^2r-(4R+r)^2r}{2p^2r^3+r^2(4R+r)^3-24p^2r^2R+p^4r} \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4Rt - tr - (4R+r)^2r}{2r^3t + r^2(4R+r)^3 - 24r^2Rt + rt^2} - \frac{27}{2t} \Rightarrow f'(t) \geq 0$$

Do đó  $f(t)$  đồng biến theo  $t$ . Mặt khác từ điều kiện  $2b \leq a + c \Rightarrow 18Rr - 9r^2 \leq p^2$

Vì vậy nếu ta chứng minh bài toán đúng với trường hợp  $18Rr - 9r^2 = p^2$  thì nó đúng với mọi  $p$ . Thật vậy:

$$\begin{aligned} &\frac{4R(18Rr-9r^2)-(18R-9r)r^2-(4R+r)^2r}{2(18Rr-9r^2)r^3+r^2(4R+r)^3-24(18Rr-9r^2)r^2R+(18Rr-9r^2)^2r} \geq \frac{27}{2(18Rr-9r^2)} \\ \Leftrightarrow &\frac{4R(18R-9r)-(18R-9r)r-(4R+r)^2}{2(18Rr-9r^2)r+(4R+r)^3-24R(18Rr-9r^2)+r(18R-9r)^2} \geq \frac{27}{2(18R-9r)} \\ \Leftrightarrow &\frac{56R^2-62Rr+8r^2}{64R^3-60R^2r-60Rr^2+64r^3} \geq \frac{3}{2(2R-r)} \Leftrightarrow \frac{28R^2-31Rr+4r^2}{16R^3-15R^2r-15Rr^2+16r^3} \geq \frac{3}{2R-r} \\ \Leftrightarrow &(28R^2-31Rr+4r^2)(2R-r) \geq 3(16R^3-15R^2r-15Rr^2+16r^3) \\ \Leftrightarrow &56R^3-90R^2r+39Rr^2-4r^3 \geq 48R^3-45R^2r-45Rr^2+48r^3 \\ \Leftrightarrow &8R^3-45R^2r+84Rr^2-52r^3 \geq 0 \Leftrightarrow (8R-13r)(R-2r)^2 \geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

## VI. NHÌN LẠI TOÀN BỘ PHƯƠNG PHÁP GLA

Để chứng minh một bất đẳng thức đối xứng  $F(a, b, c) \geq G(a, b, c)$  với  $a, b, c$  không âm, ta đặt  $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ , khi đó  $x, y, z$  trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ. Sau đó ta phải chứng minh  $f(p) = VT - VP \geq 0$ . Xét dấu  $f'(p)$  rồi tìm cách đánh giá  $p$  theo  $R, r$ . Ta chú ý đến bất đẳng thức sau:

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$$

Khi đó nếu đặt 
$$\begin{cases} p_1 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}} \\ p_2 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}} \end{cases} \text{ thì } p \in [p_1, p_2]$$

**Nhận xét: 1.** (Định lý 3 phần III): Nếu  $\Delta XYZ$  cân thì  $p = p_1$  hoặc  $p = p_2$ .

- Nếu giá trị lớn nhất  $f(p)$  hoặc giá trị nhỏ nhất  $f(p)$  đạt tại  $p = p_1$  thì  $\Delta XYZ$  cân có 2 góc đáy bằng nhau và  $\leq 60^\circ$ , khi đó trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn biến còn lại  $\Leftrightarrow$  Trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

- Nếu giá trị lớn nhất  $f(p)$  hoặc giá trị nhỏ nhất  $f(p)$  đạt tại  $p = p_2$  thì  $\Delta XYZ$  cân có 2 góc đáy bằng nhau và  $\geq 60^\circ$ , khi đó trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn biến còn lại  $\Leftrightarrow$  Trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

2. Khi đưa bất đẳng thức về dạng chứa  $p, R, r$  nếu có biểu thức chứa  $r$  làm nhân tử chung thì khi  $r = 0$  hay trong 3 biến  $a, b, c$  có 1 biến bằng 0 thì đẳng thức xảy ra.

3. Từ các nhận xét 1 và 2 suy ra nếu  $f(p)$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại  $p_1$  hoặc  $p_2$  hoặc  $r = 0$  thì công việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức với 2 biến số.

Với câu hỏi đặt ra là khi nào  $f(p)$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại  $p_1$  hoặc  $p_2$  ta có kết luận sau:

3.1. Nếu  $f'(p) \geq 0, \forall p \in [p_1, p_2]$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_1); \text{Max } f(p) = f(p_2)$

Nếu  $f'(p) \leq 0, \forall p \in [p_1, p_2]$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_2); \text{Max } f(p) = f(p_1)$

Đẳng thức xảy ra khi  $p = p_1$  hoặc  $p = p_2$  ứng với trong 3 biến số  $a, b, c$  có 2 biến số bằng nhau hoặc có một biến số bằng 0.

| $p$     | $p_1$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|
| $f'(p)$ | +        |          |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_2)$ |

| $p$     | $p_1$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|
| $f'(p)$ | -        |          |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_2)$ |

3.2. Nếu  $f'(p_0) = 0; f''(p) \geq 0$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_0); \text{Max } f(p) = \text{Max}\{f(p_1), f(p_2)\}$

Nếu  $f'(p_0)=0; f''(p) \leq 0$  thì  $\text{Max } f(p) = f(p_0); \text{Min } f(p) = \text{Min}\{f(p_1), f(p_2)\}$ .

| $p$     | $p_1$    | $p_0$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|----------|
| $f'(p)$ | -        |          | +        |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_0)$ | $f(p_2)$ |

| $p$     | $p_1$    | $p_0$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|----------|
| $f'(p)$ | +        |          | -        |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_0)$ | $f(p_2)$ |

4. Trong một số ít các bài toán ta tìm Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất bằng cách tính đạo hàm theo biến  $t = p^2$  hoặc theo  $R$  hoặc theo  $r$ .

**Chú ý.** Hãy nhớ lại cách chứng minh hình học ở trên, chính từ chứng minh đó suy ra ngay với mọi  $R, r$  cố định thì có thể tìm được ba số thực không âm  $a', b', c'$  mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác  $X'Y'Z'$  với độ dài 3 cạnh là  $b'+c', c'+a', a'+b'$  cũng có  $R = R'$  và  $r = r'$ . Như thế, kết hợp nhận xét này với các kết quả ở trên ta suy ra trong các trường hợp hàm  $f(p)$  đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần xét hai trường hợp đối với ba biến  $a, b, c$  ban đầu là hoặc trong 3 biến có 1 biến bằng 0, hoặc trong 3 biến có 2 biến bằng nhau.

Sau đây chúng ta sẽ tiếp tục xét các ví dụ để làm sáng tỏ các nhận xét trên.

Chúng ta sẽ bắt đầu với những ví dụ có thể làm được bằng các phương pháp khác như phương pháp dồn biến hoặc phương pháp SOS:

**Bài 1:** Chứng minh:  $-\text{tg } A \text{tg } B \text{tg } C \sin A \sin B \sin C \geq \frac{27}{8}, \forall \Delta ABC. (1)$

### Chứng minh

Đưa bất đẳng thức (1) về dạng chứa  $p, R, r$  ta có (1)  $\Leftrightarrow \frac{8p^2r^2}{27R^2} \geq p^2 - 2(R+r)^2$ .

Đặt  $t = p^2$ , xét hàm số  $f(t) = \frac{8r^2t}{27R^2} - t + 2(R+r)^2 \Rightarrow f'(t) = \frac{8r^2}{27R^2} - 1 < 0$

nên theo nhận xét 3.1 ta chỉ cần xét 2 trường hợp  $a = b$  và  $c = 0$

**Trường hợp 1:**  $a = b \Rightarrow \sin A = \sin B, \cos A = \cos B$ ,

$\sin C = \sin(180^\circ - 2A) = 2\sin A \cos A, \cos C = \cos(180^\circ - 2A) = 2\sin^2 A - 1$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{4\sin^6 A}{2\sin^2 A - 1} \geq \frac{27}{8} \Leftrightarrow 32\sin^6 A + 27 \geq 54\sin^2 A$ .

Theo **AM - GM** ta có:  $32\sin^6 A + \frac{27}{2} + \frac{27}{2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{32\sin^6 A \cdot \frac{27}{2} \cdot \frac{27}{2}} = 54\sin^2 A$

Do đó (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

**Bài 2.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh:  $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca), (1)$

### Chứng minh

Ta nhận thấy  $ab + bc + ca \leq |a||b| + |b||c| + |c||a|$  do đó ta chỉ cần xét khi  $a, b, c \geq 0$ .

Ta có:  $(1) \Leftrightarrow p^2 r^4 + 2[(4R+r)^2 r^2 - 2p^2 r^2] + 4(p^2 - 8Rr - 2r^2) + 8 \geq 9(4Rr + r^2)$

Đặt  $f(p) = VT - VP$ . Ta có:  $f'(p) = 2pr^4 - 8pr^2 + 8p = 2p(r^2 - 2)^2 \geq 0$

Theo kết luận 1 thì  $f(p)$  đạt Min khi  $a=b$  hoặc  $c=0$ .

Trường hợp 1:  $a=b$ . Ta cần chứng minh:  $(a^2 + 2)^2 (c^2 + 2) \geq 9(a^2 + 2ac)$

$\Leftrightarrow a^4 c^2 + 4a^2 c^2 + 4c^2 + 2a^4 + 8 \geq a^2 + 18ac$ . Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\left. \begin{array}{l} a^4 c^2 + c^2 + 1 + 1 \geq 4ac \\ 4a^2 c^2 + 4 \geq 8ac \\ 2a^4 + 2 \geq 4a^2 \\ 3c^2 + 3a^2 \geq 6ac \end{array} \right\} \Rightarrow a^4 c^2 + 4a^2 c^2 + 4c^2 + 2a^4 + 8 \geq a^2 + 18ac \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Trường hợp 2:  $c=0$ , khi đó  $(1) \Leftrightarrow 2(a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq 9ab \Leftrightarrow 2(a^2 b^2 + 2a^2 + 2b^2 + 4) \geq 9ab$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $a^2 b^2 + 4 \geq 4ab$ ;  $2a^2 + 2b^2 \geq 4ab \Rightarrow (\text{đpcm})$

Vậy  $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=1$

**Bài 3.** Giả sử  $a, b, c \geq 0$  và  $ab + bc + ca = 3$ .

Với  $k > 0$  cho trước, tìm giá trị nhỏ nhất của  $S = a + b + c + kabc$ .

### Chứng minh

Ta có:

$$S = a + b + c + kabc = \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{3\sqrt{3}kabc}{\sqrt{(ab+bc+ca)^3}} = \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{4Rr+r^2}} + \frac{3\sqrt{3}kabc}{\sqrt{(4Rr+r^2)^3}}$$

Thấy ngay rằng  $f(p, R, r) = \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{4Rr+r^2}} + \frac{3\sqrt{3}kabc}{\sqrt{(4Rr+r^2)^3}}$  là hàm đồng biến theo  $p$ . Do đó

ta chỉ cần xét trường hợp  $a=b=t \geq c$ . Từ  $ab+bc+ca=3$  suy ra  $c = \frac{3-t^2}{2t}$

$$\text{Suy ra } S = a + b + c + kabc = 2t + \frac{3-t^2}{2t} + kt \frac{3-t^2}{2} = f(t)$$

$$f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2t^2} + \frac{k(3-3t^2)}{2} = \frac{3}{2}(1-t^2)\left(k - \frac{1}{t^2}\right) \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t=1, t = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

và do  $t^2 \leq 3$  nên:  $f(t) \geq \min\left\{f(1), f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), f(\sqrt{3})\right\} = \min\{3+k, 2\sqrt{3}\}$

**Bài 4.** Trong mọi tam giác, ta có:  $\frac{ab}{p-c} + \frac{ca}{p-b} + \frac{bc}{p-a} \geq \left(5 - \frac{2r}{R}\right)p$  (\*)

Chuyển bài toán về  $p, R, r$  với  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{p-c} + \frac{ca}{p-b} + \frac{bc}{p-a} &= \frac{\sum ab(p-a)(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - p[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] + p^2(ab+bc+ca)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2 - p^2(ab+bc+ca) - p.abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2 - p^2(p^2 + 4Rr + r^2) - 4p^2Rr}{pr^2} = \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)(4Rr + r^2) - 4p^2Rr}{pr^2} \\ &= \frac{p^2r^2 + 16R^2r^2 + 8Rr^3 + r^4}{pr^2} = \frac{p^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2}{p} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó (*)} \Leftrightarrow \frac{p^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2}{p} \geq \left(5 - \frac{2r}{R}\right)p \Leftrightarrow 16R^2 + 8Rr + r^2 - \left(4 - \frac{2r}{R}\right)p^2 \geq 0$$

Đặt  $f(x) = 16R^2 + 8Rr + r^2 - \left(4 - \frac{2r}{R}\right)x$  (trong đó  $x = p^2$  và coi  $R, r$  cố định)

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2r}{R} - 4 < 0. \text{ Suy ra ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp } a=b=1.$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b-c} + \frac{2ca}{c+a-b} + \frac{2bc}{b+c-a} \geq \left[5 - \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}\right] \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2-c} + 4 \geq [5 - (2-c)c] \frac{2+c}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{2-c} + 8 \geq 10 + c + c^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2-c} \geq 2 + c + c^3 \Leftrightarrow c^2(c-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dưới con mắt hình học thì đẳng thức trong bất đẳng thức (\*) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều còn dưới con mắt đại số ta còn thêm trường hợp  $a=b, c=0$  và các hoán vị.

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng:

$$a+b+c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Do  $a, b, c > 0, a^2 + b^2 + c^2 = 3$  nên ta có thể đưa về bất đẳng thức đồng bậc với  $a, b, c$ .

**Bài 4.** Trong mọi tam giác, ta có:  $\frac{ab}{p-c} + \frac{ca}{p-b} + \frac{bc}{p-a} \geq \left(5 - \frac{2r}{R}\right)p$  (\*)

Chuyển bài toán về  $p, R, r$  với  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{p-c} + \frac{ca}{p-b} + \frac{bc}{p-a} &= \frac{\sum ab(p-a)(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - p[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] + p^2(ab+bc+ca)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2 - p^2(ab+bc+ca) - p \cdot abc}{(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2 - p^2(p^2 + 4Rr + r^2) - 4p^2Rr}{p^2} = \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)(4Rr + r^2) - 4p^2Rr}{p^2} \\ &= \frac{p^2r^2 + 16R^2r^2 + 8Rr^3 + r^4}{p^2} = \frac{p^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2}{p} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó (*)} \Leftrightarrow \frac{p^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2}{p} \geq \left(5 - \frac{2r}{R}\right)p \Leftrightarrow 16R^2 + 8Rr + r^2 - \left(4 - \frac{2r}{R}\right)p^2 \geq 0$$

Đặt  $f(x) = 16R^2 + 8Rr + r^2 - \left(4 - \frac{2r}{R}\right)x$  (trong đó  $x = p^2$  và coi  $R, r$  cố định)

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2r}{R} - 4 < 0$ . Suy ra ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp  $a = b = 1$ .

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b-c} + \frac{2ca}{c+a-b} + \frac{2bc}{b+c-a} \geq \left[5 - \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}\right] \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2-c} + 4 \geq \left[5 - (2-c)c\right] \frac{2+c}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{2-c} + 8 \geq 10 + c + c^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2-c} \geq 2 + c + c^3 \Leftrightarrow c^2(c-1)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dưới con mắt hình học thì đẳng thức trong bất đẳng thức (\*) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều còn dưới con mắt đại số ta còn thêm trường hợp  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Do  $a, b, c > 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  nên ta có thể đưa về bất đẳng thức đồng bậc với  $a, b, c$ .

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a^2+b^2+c^2)^3(a+b+c)^2}{27} \geq (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2, \forall a, b, c > 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p^2-8Rr-2r^2)p^2}{27} - [r^2(4R+r)^2-2p^2r^2] \geq 0 \quad (3)$$

Để thấy (3) đồng biến theo  $p$  và do  $a, b, c > 0$  nên ta chỉ phải xét trường hợp  $a = b$

Theo định lý 2 thì  $f(p)$  đạt cực trị tại  $p_1$  thì trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Điều này tương ứng với trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Từ đó suy ra ta có thể giả sử  $a = b = 1$ , khi đó  $c \leq 1$ . Thay  $a = b = 1$  vào (3) ta cần chứng minh:

$$\frac{(2+c^2)^3(2+c)^2}{27} \geq (1+2c^2)^2 \Leftrightarrow \left[ \frac{(2+c^2)(2+c)}{3(1+2c^2)} \right]^2 \geq \frac{3}{2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{(1-c)(1+3c-c^2)}{3(1+2c^2)} + 1 \right]^2 - 1 - \frac{1-c^2}{2+c^2} \geq 0 \quad (5). \text{ Do } 0 \leq c \leq 1 \text{ nên } c \geq c^2, \text{ khi đó:}$$

$$VT(5) \geq 2 \cdot \frac{(1-c)(1+3c-c^2)}{3(1+2c^2)} - \frac{1-c^2}{2+c^2} \geq \frac{2(1+2c)(1-c)}{3(1+2c^2)} - \frac{1-c^2}{2+c^2} = \frac{(1-c)^2(2c^2+6c+1)}{3(1+2c^2)(2+c^2)} \geq 0$$

$\Rightarrow (5) \text{ đúng} \Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm}).$  Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{3} \quad (1)$$

### Chứng minh

Thay  $a = b, c = 0$  thì (1)  $\Leftrightarrow 2 + \frac{k}{4} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{3} \Leftrightarrow k \leq 6$ . Xét (1) ứng với  $k \leq 6$ .

Chuyển về  $p, R, r$  ta có:  $VT(1) = \frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr} + \frac{k(4Rr+r^2)}{p^2} = f(p)$

$\Rightarrow f'(p) = \frac{p}{2Rr} - \frac{2k(4Rr+r^2)}{p^3}$ . Do  $p^2 \geq 16Rr-5r^2$  và  $k \leq 6$  nên  $f'(p) \geq 0$  tức là

$g(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất khi trong 3 biến

$a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Theo nhận xét 3.1 ta có thể giả sử  $a = b = 1 \geq c$ , khi đó bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow \frac{2}{c+1} + \frac{c}{2} + k \cdot \frac{1+2c}{(2+c)^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{c+1} + \frac{c}{2} - \frac{3}{2} \geq \frac{k}{3} - k \cdot \frac{1+2c}{(2+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-c)^2}{2(c+1)} \geq \frac{k(1-c)^2}{3(2+c)^2} \Leftrightarrow 3(2+c)^2 - 2k(c+1) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' = k(6-k) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 6$$



$\Rightarrow k = 6$  là hằng số tốt nhất cần tìm. Với  $k \in [0; 6)$  thì đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$

Với  $k = 6$  thì đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị

**Bài 7.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + k \cdot \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1 + \frac{k}{8} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow f(p) = \frac{p^4 - 16Rrp^2 + (4Rr + r^2)^2}{(4Rr + r^2)^2 - 2p^2r^2} + \frac{kr}{4R} \geq 1 + \frac{k}{8}$$

Để thấy  $f'(p) \geq 0$  nên  $f(p)$  đồng biến theo  $p$ . Theo **nhận xét 3.1**, ta có thể giả sử

$$a = b = 1 \geq c, \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow \frac{2+c^4}{1+2c^2} + \frac{kc}{2(1+c)^2} \geq 1 + \frac{k}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+c^4}{1+2c^2} - 1 \geq k \left[ \frac{1}{8} - \frac{c}{2(1+c)^2} \right] \Leftrightarrow \frac{(1-c^2)^2}{1+2c^2} \geq \frac{k(1-c)^2}{8(1+c)^2} \Leftrightarrow 8(1+c)^4 \geq k(1+2c^2)$$

Xét  $c = 0$  suy ra  $k \leq 8$ . Ta sẽ chứng minh  $k = 8$  là hằng số tốt nhất cần tìm.

Thật vậy ta phải chứng minh:  $8(c+1)^4 \geq 8(1+2c^2) \Leftrightarrow (c+1)^4 \geq 1+2c^2$  (đúng)

$$\text{Với } k = 8 \text{ ta có bất đẳng thức đúng: } \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

**Bài 8.** Cho  $a, b, c \geq 0$ ,  $ab + bc + ca = 3$ . Tìm  $k$  lớn nhất sao cho:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c} \geq 3 + \frac{k}{3}$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}} + k \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{6} + k$$

Bạn đọc có thể tự tạo ra nhiều bài tập khác nữa để thử sức. Nếu đề bài không quá phức tạp tin chắc các bạn có thể giải quyết được bằng **GLA**.



www.nhaxuoc.vn

*[Faint, illegible text within a large rectangular box]*

TRẦN PH  
CƯỜNG B

CƯỜNG B

## VII. MỞ RỘNG GLA VỚI BẤT ĐẲNG THỨC $n$ BIẾN SỐ ( $n \geq 4$ )

Ít ai có thể tin ngay là **GLA** có thể chứng minh được cho bất đẳng thức từ 4 biến số trở lên. Điều này cũng dễ hiểu vì thông thường chúng ta sẽ cho rằng muốn áp dụng **GLA** để giải bài toán  $n$  biến thì phải đi xây dựng mối quan hệ giữa  $p, R, r$  của đa giác  $n$  cạnh. Nếu tiếp cận **GLA** theo cách thức này thì sẽ dẫn đến bế tắc. Chúng ta sẽ mở rộng **GLA** theo một hướng khác, bằng cách sử dụng những kết quả của định lý 3 theo cách thức như sau:

### 1. Lý thuyết cơ sở mở rộng GLA cho $n$ biến:

Giả sử  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $n$  biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  ( $n \geq 4$ )

Xét 3 biến số bất kỳ  $a_m, a_n, a_p$  ( $m, n, p \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ) và cố định các biến số còn lại như hằng số. Đặt  $x = a_m + a_n, y = a_n + a_p, z = a_p + a_m$ , khi đó  $x, y, z$  là 3 cạnh của tam giác XYZ và 3 biến số  $a_m, a_n, a_p$  có thể đưa về thành 3 biến  $p, R, r$  (trong đó  $p, R, r$  là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ). Tiếp theo ta sẽ mở rộng định lý 3 với các kết quả cơ bản của giải tích.

**1.1.** Một đa thức đối xứng  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 1 đơn điệu theo  $p, R$  hoặc  $r$  đều đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến số bằng nhau.

Tức là:  $f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1 \text{ số } a}, x)$  hoặc  $f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1 \text{ số } a}, x)$

(ở đây ta chọn 3 biến  $a_1, a_2, a_3$  để chuyển về  $p, R, r$ )

Ta sẽ làm rõ hơn mối quan hệ giữa  $a$  và  $x$ .

- Nếu  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$  thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

- Nếu  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq 0$  thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$

Do  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$  nên  $f(p, R, r, a_4, \dots, a_n)$  đồng biến theo  $p$ .

Tức là:  $f(p_1, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(p_2, R, r, a_4, \dots, a_n)$

Theo như nhận xét trong định lý 3 ta có:

•  $p = p_1$  khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy. Điều này có nghĩa trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Do  $a_1, a_2, a_3$  được chọn một cách tùy ý để chuyển về  $p, R, r$  và  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được:

$$f(\underbrace{x, y, \dots, y}_{n-1}) \leq f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (x \geq y).$$

•  $p = p_2$  khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy. Điều này có nghĩa trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Do  $a_1, a_2, a_3$  được chọn một cách tùy ý để chuyển về  $p, R, r$  và  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được:

$$f(\underbrace{x, \dots, x, y}_{n-1}) \geq f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (x \leq y).$$

**1.2.** Mọi đa thức  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 2  $f''(p) \geq 0$  đều đạt giá trị lớn nhất khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

**1.3.** Mọi đa thức  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 2  $f''(p) \leq 0$  đều đạt giá trị nhỏ nhất khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

**2. Nhận xét:** Nếu  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thì từ các nhận xét **3.1, 3.2** trong VI ta mới chỉ có một kết quả tạm thời là giá trị nhỏ nhất của và giá trị lớn nhất của  $f$  đạt được khi có 1 số biến số bằng nhau và 1 số biến số thì chưa so sánh được (vì có thể có một số biến số bằng 0). Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn là khi  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thì vẫn có kết luận: giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất  $f$  đạt được khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau. Thật vậy, giả sử giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  đạt tại  $(0, \dots, 0, a, \dots, a, b)$ . Xét bộ 3 số  $(0, a, b)$  thì theo các nhận xét **3.1, 3.2** trong V ta có  $a=0$  hoặc  $b=0$ . Nếu  $a=0$  thì giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất sẽ đạt tại  $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, b)$  suy ra kết luận đúng.

Nếu  $b=0$  thì lại xét tiếp 2 bộ  $(a, a, 0); (0, 0, a)$ . Áp dụng tiếp các kết luận 1, 2, 3 ta suy ra  $a=0$ . Giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất đạt tại  $(0, 0, \dots, 0)$ . Vậy các kết luận 4, 5, 6 đã được mở rộng ra đối với các biến không âm.

### 3. Bài tập minh họa:

**Bài 1 [IMO Shortlist 1997, Vietnam]** Cho  $a, b, c, d \geq 0, a + b + c + d = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} abcd \quad (1)$$

*Chứng minh*

$$(1) \Leftrightarrow [abc + d(ab + bc + ca)](a + b + c + d) \leq \frac{(a + b + c + d)^4}{27} + \frac{176}{27}abcd \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow [pr^2 + (4Rr + r^2)d](p + d) \leq \frac{(p + d)^4}{27} + \frac{176}{27}pr^2d$$

$$\text{Đặt } f(p) = VP - VT = \frac{(p + d)^4}{27} + \frac{176}{27}pr^2d - [pr^2 + (4Rr + r^2)d](p + d)$$

$$\text{Ta có: } f'(p) = \frac{4(p + d)^3}{27} + \frac{176}{27}dr^2 - 2pr^2 - 4Rrd - 2dr^2. \text{ Dễ thấy:}$$

$$\frac{176}{27}dr^2 \geq 2dr^2 \quad (3); \quad \frac{4(p + d)^3}{27} \geq \frac{4p^3 + 12p^2d}{27} \geq \frac{4p \cdot 27r^2 + 12 \cdot 9Rrd}{27} \geq 2pr^2 + 4Rrd \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra  $f'(p) \geq 0$ . Do đó:  $f(a, b, c, d) \geq f(x, x, x, y) \quad (x \geq y)$

$$\text{Thay } x = 1 = a = b = c, y = d \text{ vào (2) ta cần chứng minh: } (3y + 1)(3 + y) \leq \frac{(3 + y)^4}{27} + \frac{176}{27}y$$

$$\Leftrightarrow 27y^2 \leq y^4 + 12y^3 + 14y \Leftrightarrow -y(y - 1)^2(y + 14) \leq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow y = 0$  hoặc  $y = 1$ . Vậy bất đẳng thức (1) đúng và đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$  hoặc  $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$

**Bài 2. [Bất đẳng thức Turkervici]** Chứng minh rằng với mọi số dương  $a, b, c, d$  ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \quad (*)$$

### Chứng minh

$$(*) \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + d^4 + 2abcd \geq (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2 + b^2 + c^2)d^2$$

$$\Leftrightarrow p^4 - 16Rrp^2 + (4Rr + r^2)^2 + d^4 + 2pr^2d \geq (4Rr + r^2)^2 - 2p^2r^2 + (p^2 - 8Rr - 2r^2)d^2$$

$$\Leftrightarrow p^4 - 16Rrp^2 + d^4 + 2pr^2d + 2p^2r^2 - (p^2 - 8Rr - 2r^2)d^2 \geq 0$$

Đến đây nếu ta đặt VT là một hàm theo biến  $p$  thì cho dù có đạo hàm đến cấp 2 ta cũng không thể xác định được dấu của nó. Rất may ta có thể nhận thấy ngay rằng VT nghịch biến theo  $R$  nếu coi nó là một hàm theo  $R$  với  $p, r$  cố định. Có một trục trặc là ta lại chưa xây dựng mối quan hệ giữa các biến bằng nhau với biến còn lại khi khảo sát theo  $R$ . Tuy nhiên ta có thể thấy ngay rằng điều này có thể tạm thời bỏ qua. Giả sử  $a = b = c = x$ . Ta cần chứng minh:  $d^4 + 3x^4 + 2x^3d \geq 3x^4 + 3x^2d^2$

$$\Leftrightarrow d(x - d)^2(2x + d) \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = d \text{ hoặc } d = 0.$$

Vậy bất đẳng thức (\*) đúng và trở thành đẳng thức khi  $a=b=c=d$  hoặc  $a=b=c, d=0$  và các hoán vị.

Ta xét bài toán tổng quát sau:

Chứng minh rằng:

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n \cdot \sqrt[n]{a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2} \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

Đặt  $F = (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n \cdot \sqrt[n]{a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2} - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$

Cố định  $a_4, a_5, \dots, a_n$ , chuyển  $a_1, a_2, a_3$  về  $p, R, r$  ta được:

$$F = (n-1)(p^2 - 8Rr - 2r^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2) + n \cdot \sqrt[n]{p^2 r^4 a_4^2 \dots a_n^2} - (p + a_4 + \dots + a_n)^2$$

Ta thấy ngay  $f$  là hàm nghịch biến theo  $R$  nên ta chỉ cần xét trường hợp  $(n-1)$  biến bằng nhau. Giả sử  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$ , đặt  $a_n = a$ . Ta cần chứng minh:

$$(n-1)(n-1+a^2) + n \cdot \sqrt[n]{a^2} - (n-1+a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (n-2)a^2 + n \cdot \sqrt[n]{a^2} - 2(n-1)a \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho  $(n-2)$  số  $a^2$  và  $n$  số  $\sqrt[n]{a^2}$  ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Bài 3.** Làm chặt hơn bất đẳng thức quen thuộc:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

### Chứng minh

Ta dễ dàng CM được các bất đẳng thức sau:

Với  $n=3$ :  $(a_1 + a_2 + a_3) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \geq 9 + \frac{4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}$

Với  $n=4$ :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \right) \geq 16 + \frac{9(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4}$$

Xét bất đẳng thức:  $(a_1 + a_2 + a_3) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \geq 9 - k + \frac{k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}$

Các bạn có thể nhận ra  $k=4$  chính là giá trị lớn nhất có thể để bất đẳng thức không bị đổi chiều. Với  $n=4$  thì việc tìm ra hằng số  $k$  tốt nhất là 9 cũng chỉ vất vả hơn đôi chút.

Khi đã có trong tay **GLA** thì bước dự đoán trở nên không cần thiết và chúng ta có thể bắt tay ngay vào việc tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bài toán:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 - k + \frac{k(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}{2 \sum_{\substack{i, y=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j} \quad (*)$$

**Giải:** Chuyển  $a_1, a_2, a_3$  về  $p, R, r$  ta cần tìm  $k$  sao cho:

$$(p + a_4 + \dots + a_n) \left( \frac{4Rr + r^2}{pr^2} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 - k + \frac{k(n-1)(p^2 - 8Rr - 2r^2 + a_4^2 + \dots + a_n^2)}{2 \left[ (4Rr + r^2) + \sum_{\substack{i, y=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j - a_1 a_2 - a_2 a_3 - a_3 a_1 \right]}$$

Đến đây nếu ta chọn  $(VT - VP)$  là một hàm theo  $p$  thì mọi chuyện trở nên khá phức tạp. Tuy nhiên nhận thấy  $(VT - VP)$  là một hàm theo  $R$  thì ta thấy ngay hàm này đồng biến và đi đến kết luận  $(VT - VP)$  đạt Min khi trong  $n$  biến  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có  $n-1$  biến bằng nhau. Ta cần tìm  $k$  tốt nhất sao cho:

$$(n-1+x) \left( n-1 + \frac{1}{x} \right) \geq n^2 - k + \frac{k(n-1)(n-1+x^2)}{2 \left[ \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-1)x \right]}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n + 2 + (n-1) \left( x + \frac{1}{x} \right) - n^2 + k - \frac{k(n-1+x^2)}{n-2+2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(x-1)^2}{x} - \frac{k(x-1)^2}{n-2+2x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-2+2x) - kx \geq 0$$

Cho  $x \rightarrow +\infty$  ta dễ dàng nhận thấy hằng số  $k$  tốt nhất là  $2(n-1)$ . Tóm lại ta có

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 - 2(n-1) + \frac{(n-1)^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}{\sum_{\substack{i, y=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$  hoặc  $a_1 = \dots = a_{n-1}$  và  $a_n \rightarrow +\infty$  cùng các hoán vị

**Bài 4.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  và  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ .

Chứng minh rằng:  $(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + na_1 a_2 \dots a_n \geq n^2$

### Chứng minh

Cố định  $a_4, a_5, \dots, a_n$  và  $a_1, b_1, c_1$  đưa  $a_1, a_2, a_3$  về  $p, R, r$ . Dễ thấy vế trái là một hàm nghịch biến theo  $R$ . Do đó ta chỉ cần xét trường hợp  $(n-1)$  biến bằng nhau. Giả sử  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = t$  thì  $a_n = n - (n-1)t$ .

Ta cần chứng minh:  $(n-1)[(n-1)t^2 + (n - (n-1)t)^2] + nt^{n-1}[n - (n-1)t] \geq n^2$

$$\Leftrightarrow (n-1)[(n-1)t^2 + (n - (n-1)t)^2 - n] + n[nt^{n-1} - (n-1)t^n - 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)[(n-1)(t^2 - 1) + (n-1)(1-t)[n+1 - (n-1)t]] + n[nt^{n-1}(1-t) + (t^n - 1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)^2(t-1)[(t+1) - (n+1 - (n-1)t)] + n(1-t)[nt^{n-1} - (t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)^2(t-1)^2 - n(t-1)[(t^{n-1} - t^{n-2}) + (t^{n-1} - t^{n-3}) + \dots + (t^{n-1} - 1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)^2(t-1)^2 - n(t-1)^2[(n-1)t^{n-2} + (n-2)t^{n-3} + \dots + 3t^2 + 2t + 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n(t-1)^2[(n-1)^2 - [(n-1)t^{n-2} + (n-2)t^{n-3} + \dots + 3t^2 + 2t + 1]] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [n - (n-1)t](t-1)^2 \cdot A \geq 0 \quad (\text{trong đó } A > 0)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow t=1 \vee t=\frac{n}{n-1}$$

**Bài 5.** Các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có tổng bằng  $n$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{3}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - n) \quad \text{với } n \text{ nguyên dương và lớn hơn 3.}$$

### Chứng minh

Loại bỏ điều kiện ta cần chứng minh:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 \geq \frac{4(n-1)}{n} \left[ \frac{n^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} - n \right]$$

Ta thấy ngay rằng VT đồng biến theo  $R$  còn vế phải nghịch biến theo  $R$ . Vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp  $(n-1)$  biến trong  $n$  biến bằng nhau. Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (n-1+a) \left( n-1 + \frac{1}{a} \right) - n^2 &\geq \frac{4(n-1)}{n} \left[ \frac{n^2(n-1+a^2)}{(n-1+a)^2} - n \right] \\ \Leftrightarrow \frac{(n-1)(a-1)^2}{a} &\geq \frac{4(n-1)}{n} \cdot \frac{n(n-1)(a-1)^2}{(n-1+a)^2} \Leftrightarrow (a-1)^2(n-1-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=1$  hoặc  $a=n-1$ .

Vậy đẳng thức trong bất đẳng thức ban đầu xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

hoặc  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = \frac{n}{2(n-1)}, a_n = \frac{n}{2}$  và các hoán vị.

**Bài 6.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  và  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n + 3$$

### Chứng minh

Cố định  $a_4, a_5, \dots, a_n$  và  $a_1, b_1 + b_1, c_1 + c_1, a_1$ . Ta thấy ngay VT nghịch biến theo  $p$ . Do đó ta chỉ cần xét trường hợp  $(n-1)$  biến bằng nhau. Giả sử  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a$  thì

$$a_n = \frac{1}{a^{n-1}}. \text{ Ta cần chứng minh: } g(a) = \frac{n-1}{a} + a^{n-1} + \frac{3na^{n-1}}{(n-1)a^n + 1} \geq n + 3$$

$$g'(a) = (n-1)a^{n-2} - \frac{n-1}{a^2} + \frac{3n(n-1)a^{n-2}(1-a^n)}{[(n-1)a^n + 1]^2} = \frac{(n-1)(a^n - 1)[((n-1)a^n + 1)^2 - 3na^n]}{a^2[(n-1)a^n + 1]^2}$$



$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow (a^n - 1) \{ [(n-1)a^n + 1]^2 - 3na^n \} = 0$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** thì  $[(n-1)a^n + 1]^2 \geq 4(n-1)a^n \geq 3na^n \ (\forall n \geq 4)$

Do đó  $g'(a)$  cùng dấu với  $(a^n - 1)$  và  $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Nếu  $a \geq 1$  thì  $g'(a) \geq 0 \Rightarrow g(a) \geq g(1) = n+3$ ;

Nếu  $a \leq 1$  thì  $g'(a) \leq 0 \Rightarrow g(a) \geq g(1) = n+3$

Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

**Bài 7.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  có tổng bằng  $n$ . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2} (1 - a_1 a_2 \dots a_n)$$

### Chứng minh

Loại bỏ điều kiện ta được bài toán:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 \geq \frac{8(n-1)}{n} \left[ 1 - \frac{n^n a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n} \right]$$

Cố định  $a_4, a_5, \dots, a_n$  đưa  $a_1, a_2, a_3$  về  $p, R, r$  ta cần chứng minh:

$$f(p, R, r) = (p + a_4 + \dots + a_n) \left( \frac{4R+r}{pr} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 - \frac{8(n-1)}{n} \left[ 1 - \frac{n^n p r^2 a_4 \dots a_n}{(p + a_4 + \dots + a_n)^n} \right] \geq 0$$

Ta thấy ngay  $f(p, R, r)$  đồng biến theo  $R$ . Do đó ta chỉ cần xét trường hợp  $(n-1)$  biến bằng nhau. Giả sử  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = t \leq 1$  thì  $a_n = n - (n-1)t$ .

Ta cần chứng minh:  $\frac{n-1}{t} + \frac{1}{n-(n-1)t} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2} [1 - t^{n-1} (n - (n-1)t)]$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1-nt)[n-(n-1)t] + t}{t[n-(n-1)t]} \geq \frac{8(n-1)}{n^2} [1 - t^{n-1} (n - (n-1)t)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(t-1)^2}{t[n-(n-1)t]} \geq \frac{8(n-1)}{n^2} (t-1)^2 [(n-1)t^{n-2} + (n-2)t^{n-3} + \dots + 3t^2 + 2t + 1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^3}{8t[n-(n-1)t][(n-1)t^{n-2} + (n-2)t^{n-3} + \dots + 3t^2 + 2t + 1]} \geq 1 \text{ (đúng } \forall t \leq 1)$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

4. Bài tập áp dụng:

1. (China TST 2004) Chứng minh rằng nếu  $a, b, c, d$  là các số thực dương với tích bằng 1 thì

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

2. Cho  $a, b, c > 0$   $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$ .

Chứng minh rằng:  $ab + bc + ca \geq 4abc(a + b + c)$

3. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với  $a, b, c, d$  là các số thực dương:

$$\left(1 + \frac{2a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{2b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{2c}{d+a}\right) \left(1 + \frac{2d}{a+b}\right) \geq 9$$

4. [Moldova TST 2005] Chứng minh rằng nếu  $a, b, c, d$  là các số thực dương và

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3 \text{ thì: } \frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

5. Cho các số thực dương  $a, b, c, d$  và  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a^3 + bcd} + \frac{1}{b^3 + cda} + \frac{1}{c^3 + dab} + \frac{1}{d^3 + abc} \geq 2$$

6. Giả sử  $a, b, c$  là các số thực dương và  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{a^3 + bc} + \frac{b}{b^3 + ca} + \frac{c}{c^3 + ab} \geq 3$$

7. Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 2$ .

$$\text{Chứng minh: } \frac{ab}{c+2} + \frac{bc}{a+2} + \frac{ca}{b+2} \leq \frac{1}{2}$$

8. Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$1 \leq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq \sqrt{2}$$

9. Cho  $a, b, c$  là các số không âm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{c^2 + ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2 + ca} \geq 6$$

10. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm  $a, b, c, d$  có tích bằng 1 thì:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$$

11. Chứng minh rằng với mọi  $a, b, c$  không âm thì:

$$\frac{7(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 11(a + b + c).$$

12. Tìm hằng số thực  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng  $\forall a, b, c \geq 0$ :

$$\frac{c^2 + kab}{(a+b)^2} + \frac{b^2 + kca}{(c+a)^2} + \frac{a^2 + kbc}{(b+c)^2} \geq \frac{3(1+k)}{4}$$

13. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c$  không âm và  $p, q$  là các hằng số thỏa mãn  $p \geq -2, q \leq 2q + 1$

$$\frac{a^2 + qbc}{b^2 + pbc + c^2} + \frac{b^2 + qca}{c^2 + pca + a^2} + \frac{c^2 + qab}{a^2 + pab + b^2} \geq \frac{3(q+1)}{p+2}$$

14. Cho các số dương  $a, b, c$  có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$$

15. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm  $a, b, c$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b)$$

16. Chứng minh rằng: Với mọi  $a, b, c$  không âm ta luôn có:

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq (ab + bc + ca) \cdot \sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

17. Giả sử các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng:

$$a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b) \leq 6$$

18. Giả sử  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geq \frac{9}{1+abc}$$

19. Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là các số dương và  $abc \geq 1$  thì:

$$a + b + c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}$$

20. [USA MO 2001] Giả sử  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4. \text{ Chứng minh rằng: } abc + 2 \geq ab + bc + ca \geq abc$$

### VIII. ĐỊNH LÝ GLA TỔNG QUÁT

Trong những mục trước chúng ta đã thực hiện hai nội dung chính. Thứ nhất chúng ta đã tìm cách chuyển bất đẳng thức ban đầu với 3 biến  $a, b, c$  về bất đẳng thức mới với 3 biến  $p, R, r$  trong đó  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác  $XYZ$  với ba cạnh  $b+c, c+a, a+b$ . Sau đó với định lý III.3 và những ghi chú ở mục VII chúng ta nhận thấy nếu cực trị của hàm  $f(p)$  đạt được khi  $p$  nhận giá trị biên với mọi  $R, r$  cố định thì ta cũng chỉ cần xét trường hợp trong 3 biến  $a, b, c$  có một biến bằng 0 hoặc hai biến bằng nhau. Nhờ nhận xét này mà việc giải quyết các bài toán đã trở nên rất gọn gàng. Tuy nhiên, với một số bài toán có dạng phức tạp thì việc quy về  $p, R, r$  là khá khó khăn và thiếu khôn ngoan. Trong trường hợp đó sử dụng mối tương quan giữa các biến  $a, b, c$  trong đại số và các yếu tố hình học  $p, R, r$  ta không cần quy về  $p, R, r$  nữa mà sẽ đi tìm những định lý trực tiếp cho các biến đại số.

Chú ý rằng nhờ các hệ thức IV.1 và IV.3 có thể nhận thấy thực chất việc cố định  $R, r$  là ta đã cố định hai đại lượng  $ab + bc + ca$  và  $\frac{a+b+c}{abc}$  rồi khảo sát hàm số một biến  $a + b + c$ . Ta sẽ vẫn giữ nguyên tư tưởng này, kèm theo một chút thay đổi để đi tới các định lý rất trong sáng sau đây.

**Định lý I:** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\begin{cases} abc = \text{const} \\ ab + ac + bc = \text{const} \end{cases}$  khi đó ta có:

- Nếu  $f(a, b, c)$  là một hàm đồng biến theo  $a + b + c$  thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại;  $f(a, b, c)$  đạt *max* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.
- Nếu  $f(a, b, c)$  là một hàm nghịch biến theo  $a + b + c$  thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại;  $f(a, b, c)$  đạt *max* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

#### Chứng minh

Nội dung định lý có thể được phát biểu dưới dạng sau đây:

$$\text{Nếu } a, b, c, d, e \text{ thỏa mãn hệ điều kiện } \begin{cases} abc = d^2 e \\ ab + ac + bc = d^2 + 2de \\ a \geq b \geq c \end{cases}$$

Khi đó ta có: Nếu  $d \geq e$  thì  $a + b + c \geq 2d + e$

Nếu  $d \leq e$  thì  $a + b + c \leq 2d + e$

Thật vậy, xét hàm số:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - (x-d)^2(x-e) = (2d+e-a-b-c)x^2$$

Nếu  $d \geq e$  thì  $a^3 \geq abc = d^2e \geq e^3 \Rightarrow a \geq e$  mà  $f(a) = -(a-d)^2(a-e) \leq 0$  hay  $(2d+e-a-b-c)a^2 \leq 0 \Rightarrow a+b+c \geq 2d+e$

Nếu  $d \leq e$  thì  $c^3 \leq abc = d^2e \leq e^3 \Rightarrow c \leq e$  mà  $f(c) = -(c-d)^2(c-e) \geq 0$  hay  $(2d+e-a-b-c)a^2 \geq 0 \Rightarrow a+b+c \leq 2d+e$

Định lý được chứng minh.

Tiếp theo ta sẽ nghiên cứu hàm số  $f(a, b, c) = a' + b' + c'$  để dẫn đến một định lý có tính ứng dụng rất rộng rãi trong chứng minh bất đẳng thức.

**Định lý 2:** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn tính chất  $\begin{cases} abc = \text{const} \\ ab + ac + bc = \text{const} \end{cases}$  khi đó ta có

- Nếu  $t \geq -1$  thì  $f(a, b, c) = a' + b' + c'$  đồng biến theo  $a + b + c$
- Nếu  $t \leq -1$  thì  $f(a, b, c)$  nghịch biến theo  $a + b + c$

**Chứng minh**

Xét  $t \geq -1$

Ta cần chứng minh rằng nếu  $a, b, c, d, e, f$  là các số thực dương thỏa mãn:

$$\begin{cases} abc = def \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} ab + ac + bc = de + ef + fd \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b + c \geq d + e + f \end{cases}$$

Thì  $a' + b' + c' \geq d' + e' + f'$ . Giả sử  $a \geq b \geq c$  cố định  $d, e, f$

Biểu diễn  $b, c$  theo  $a, d, e, f$  ta được:

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow bc = \frac{def}{a} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow b + c = \frac{de + ef + fd - bc}{a} = \frac{1}{a} \left( de + ef + fd - \frac{def}{a} \right) \quad (4)$$

$$\text{Từ (4) và (3)} \Rightarrow b - c = \frac{1}{a} \sqrt{\left( de + ef + fd - \frac{def}{a} \right)^2 - 4defa} \quad (5)$$

Đặt  $b = f_1(a); c = f_2(a)$ , từ (4) và (5) suy ra:

$$f_2(a) = c = \frac{1}{2a} \left( de + ef + fe - \frac{def}{a} - \sqrt{\left( de + ef + fe - \frac{def}{a} \right)^2 - 4defa} \right)$$

Tính đạo hàm của  $b$  và  $c$  theo  $a$  ta được

$$\frac{\partial f_1(a)}{\partial b} = \frac{a \left( \frac{def}{a^2} + \frac{\frac{def}{a^2} \left( de+ef+fd - \frac{def}{a} \right) - 2def}{\sqrt{\left( de+ef+fd - \frac{def}{a} \right)^2 - 4defa}} \right) \left[ de+ef+fd - \frac{def}{a} + \sqrt{\left( de+ef+fd - \frac{def}{a} \right)^2 - 4defa} \right]}{2a^2}$$

$$\frac{\partial f_2(a)}{\partial c} = \frac{a \left( \frac{def}{a^2} - \frac{\frac{def}{a^2} \left( de+ef+fd - \frac{def}{a} \right) - 2def}{\sqrt{\left( de+ef+fd - \frac{def}{a} \right)^2 - 4defa}} \right) \left[ de+ef+fd - \frac{def}{a} - \sqrt{\left( de+ef+fd - \frac{def}{a} \right)^2 - 4defa} \right]}{2a^2}$$

Từ điều kiện giữa  $a, b, c, d, e, f$  ta đưa  $\frac{\partial f_1(a)}{\partial b}$  và  $\frac{\partial f_2(a)}{\partial c}$  về  $a, b, c$  ta có:

$$\frac{\partial f_1(a)}{\partial b} = \frac{a \left( \frac{abc}{a^2} + \frac{\frac{abc}{a^2} \left( ab+ac+bc - \frac{abc}{a} \right) - 2abc}{\sqrt{\left( ab+ac+bc - \frac{abc}{a} \right)^2 - 4a^2bc}} \right) \left[ ab+ac+bc - \frac{abc}{a} + \sqrt{\left( ab+ac+bc - \frac{abc}{a} \right)^2 - 4a^2bc} \right]}{2a^2}$$

$$= \frac{bc + \frac{bc(ab+ac) - 2abc}{\sqrt{(ab+ac)^2 - 4a^2bc}} - \left[ ab+ac + \sqrt{(ab+ac)^2 - 4a^2bc} \right]}{2a^2}$$

$$= \frac{bc + \frac{abc(b+c-2a)}{a(b-c)} - [ab+ac+a(b-c)]}{2a^2} = -\frac{ab + \frac{bc(a-b)}{b-c}}{a^2}$$

Tương tự ta có:  $\frac{\partial f_2(a)}{\partial c} = \frac{bc + bc \frac{a-b}{b-c} - ac}{a^2}$

Vậy  $f(a, b, c) = a' + b' + c' = a' + [f_1(a)]' + [f_2(a)]'$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} = t.a^{t-1} + t.b^{t-1} \cdot \frac{\partial f_1(a)}{\partial b} + t.c^{t-1} \cdot \frac{\partial f_2(a)}{\partial c}$$

$$= t.a^{t-1} + t.b^{t-1} \cdot \left( -\frac{ab+bc \frac{a-b}{b-c}}{a^2} \right) + t.c^{t-1} \cdot \frac{bc+bc \frac{a-b}{b-c} - ac}{a^2}$$

$$= t.a^{t-1} - t.b^{t-1} \cdot \frac{b \cdot \frac{ab-ac+ac-bc}{b-c}}{a^2} + t.c^{t-1} \cdot \frac{c \cdot \frac{ab-c^2-ab+ac}{b-c}}{a^2}$$

$$= t.a^{t-1} - t.b^{t-1} \cdot \frac{a-c}{a^2} + t.c^{t-1} \cdot \frac{a-b}{a^2}$$

Xét 3 trường hợp sau đây:

- **Trường hợp 1:** Xét  $t \geq 0$ .

Ta sẽ chứng minh  $\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \geq 0$ . Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \geq 0 &\Leftrightarrow a^{t+1}(b-c) - b^{t+1}(a-c) + c^{t+1}(a-b) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a^{t+1} - b^{t+1})(b-c) - (b^{t+1} - c^{t+1})(a-b) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Để chứng minh (\*) ta sẽ đi chứng minh:

$$\begin{cases} a^{t+1} - b^{t+1} \geq (t+1)(a-b)b^t & (6) \\ b^{t+1} - c^{t+1} \leq (t+1)(b-c)b^t & (7) \end{cases}$$

Thật vậy: (6)  $\Leftrightarrow a^{t+1} + t.b^t \geq (t+1)a.b^t$

Xét hàm  $g(a) = a^{t+1} + t.b^t - (t+1)a.b^t$ ;  $g'(a) = (t+1)a^t - (t+1)b^t \geq 0$

$\Rightarrow g(a)$  đồng biến theo  $a \Rightarrow g(a) \geq g(b) = 0 \Rightarrow (6)$  đúng

(7)  $\Leftrightarrow t.b^{t+1} + c^{t+1} \geq (t+1)b^t.c$

Xét hàm  $h(c) = t.b^{t+1} + c^{t+1} - (t+1)b^t.c$ ;  $h'(c) = (t+1)c^t - (t+1)b^t \leq 0$

$\Rightarrow h(c)$  nghịch biến theo  $c \Rightarrow h(c) \geq h(b) = 0 \Rightarrow (7)$  đúng

Từ (6) và (7) suy ra  $(a^{t+1} - b^{t+1})(b-c) \geq (b^{t+1} - c^{t+1})(a-b) \Rightarrow \frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \geq 0$

Suy ra  $f(a, b, c)$  đồng biến theo  $a$  (8)

Bây giờ ta giả sử  $d \geq e \geq f$ , ta sẽ chứng minh  $a \geq d$

Xét hàm  $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - (x-d)(x-e)(x-f)$

$$= -(a+b+c-d-e-f)x^2 \leq 0, \forall x$$

$$\Rightarrow f(d) = (d-a)(d-b)(d-c) \leq 0.$$

Do  $d^3 \geq def = abc \geq c^3$  nên  $d \geq c$ ; kết hợp với  $f(d) \leq 0 \Rightarrow b \leq d \leq a$  (9)

Từ (8) và (9)  $\Rightarrow a' + b' + c'$  đạt min khi  $a = d$

Thay  $a = d$  vào hệ phương trình ban đầu được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} bc = ef \\ d(b+c) + bc = d(e+f) + ef \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} bc = ef \\ b+c = e+f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e \\ c = f \end{cases} \\ &\Rightarrow a' + b' + c' \geq d' + e' + f' \end{aligned}$$

- **Trường hợp 2:** Xét  $-1 \leq t < 0$

Ta sẽ chứng minh  $\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \geq 0$ . Thật vậy ta có:

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \geq 0 \Leftrightarrow (a^{t+1} - b^{t+1})(b - c) - (b^{t+1} - c^{t+1})(b - c) \leq 0$$

$$\text{Với } -1 \leq t < 0 \text{ thì } g'(a) \leq 0 \leq h'(c) \Rightarrow \begin{cases} a^{t+1} - b^{t+1} \leq (t+1)(a-b)b^t \\ b^{t+1} - c^{t+1} \geq (t+1)(b-c)b^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^{t+1} - b^{t+1})(b - c) \leq (t+1)(a-b)(b-c)b^t \leq (b^{t+1} - c^{t+1})(a-b)$$

Phần tiếp theo chứng minh được trình bày như mục (8) trong trường hợp 1.

- **Trường hợp 3:** Xét  $t \leq -1$

Ta sẽ chứng minh  $\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \leq 0$ . Thật vậy ta có:

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} \leq 0 \Leftrightarrow (a^{t+1} - b^{t+1})(b - c) - (b^{t+1} - c^{t+1})(a - b) \geq 0 \quad (10)$$

Do  $t \leq -1$  nên  $t+1 \leq 0$  và  $a' \leq b' \leq c'$  nên ta có thể dễ dàng chứng minh (10) tương tự như trong chứng minh ở trường hợp (1).

**Kết luận:** Tổng hợp cả 3 trường hợp đã xét ta có định lý được chứng minh.

#### Các hệ quả

**Hệ quả 1.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Khi đó biểu thức  $a'b' + b'c' + c'a'$  đồng biến theo  $a+b+c$  với  $t < 1$  và nghịch biến theo  $a+b+c$  với  $t > 1$ .

**Chứng minh:** Ta có  $\frac{a'b' + b'c' + c'a'}{a'b'c'} = a^{-t} + b^{-t} + c^{-t}$  đồng biến theo  $a+b+c$  với

$-t > -1 \Leftrightarrow t < 1$ , nghịch biến theo  $a+b+c$  với  $-t < -1 \Leftrightarrow t > 1$

**Hệ quả 2.** Giả sử các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $\begin{cases} abc = \text{const} \\ a+b+c = \text{const} \end{cases}$ . Khi đó biểu

thức  $(ab)^t + (bc)^t + (ca)^t$  đồng biến theo  $ab+ac+bc$  với  $t > -1$ , nghịch biến theo  $ab+ac+bc$  với  $t < -1$

**Chứng minh:** Đặt  $A = ab, B = ac, C = bc$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} ABC = a^2b^2c^2 = \text{const} \\ AB + AC + BC = abc(a+b+c) = \text{const} \end{cases}$$

Theo định lý 2 ta có:  $A' + B' + C'$  đồng biến theo  $A+B+C$  với  $t > -1$ , nghịch biến theo  $A+B+C$  với  $t < -1$  ta có (đpcm).



**Hệ quả 3.** Giả sử các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $\begin{cases} abc = \text{const} \\ ab + ac + bc = \text{const} \end{cases}$ . Khi đó

biểu thức  $\sum_{cyc} (a' + b')(a + b)$  đồng biến theo  $a + b + c$  với  $t > -1$  (\*)

**Chứng minh:**  $\sum_{cyc} (a' + b')(a + b) = (a'^{t+1} + b'^{t+1} + c'^{t+1}) + (a' + b' + c')(a + b + c)$  (\*\*)

Từ định lý 2 và (\*\*) suy ra (\*) đúng

**Hệ quả 4.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Khi đó biểu thức

$a'(b + c) + b'(c + a) + c'(a + b)$  đồng biến theo  $a + b + c$  với  $0 < t < 1$

**Chứng minh:**  $a'(b + c) + b'(c + a) + c'(a + b)$  (\*)

$$= (a'^{t-1} + b'^{t-1} + c'^{t-1})(ab + bc + ca) - abc(a'^{t-2} + b'^{t-2} + c'^{t-2})$$

Với  $t > 0$  thì  $t - 1 > -1$ . Suy ra  $a'^{t-1} + b'^{t-1} + c'^{t-1}$  đồng biến theo  $a + b + c$  (2)

Với  $t < 1$  thì  $t - 2 < -1$ . Suy ra  $a'^{t-2} + b'^{t-2} + c'^{t-2}$  nghịch biến theo  $a + b + c$  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra (đpcm)

**Nhận xét:** Các hệ quả ở trên được phát biểu với số mũ  $t$  thực. Tuy nhiên trong thực tế dạng (\*) chỉ hay gặp với  $t = 2, 3, 4, 5$  và  $0 < t < 1$  (dạng căn thức).

**Chú ý:** Định lý 2 không phát biểu được cho trường hợp  $n$  biến nhưng ta cũng có thể cố định  $n - 3$  biến trong  $n$  biến đó, sau đấy cho 3 biến còn lại biến thiên và áp dụng định lý 2 để suy ra để hàm đạt cực trị thì trong 3 biến này phải có 1 biến bằng 0 hoặc 2 biến bằng nhau.

Bây giờ ta cùng xét một số ví dụ.

**Ví dụ 1:** Cho  $k \geq 0, a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 3$ .

$$\text{Chứng minh rằng } (ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \max \left\{ 3, \left( \frac{3}{2} \right)^{2k} \right\}$$

### Chứng minh

Đổi biến  $A = bc, B = ca, C = ab$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB + BC + CA = abc(a + b + c) \\ ABC = (abc)^2 \end{cases}$$

Cố định  $abc$  suy ra  $AB + BC + CA$  và  $ABC$  đều cố định. Theo định lý 2 ta suy ra

$A^k + B^k + C^k$  là hàm đồng biến theo  $A + B + C = ab + bc + ca$ .

Theo định lý 1 ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp 3 số  $A, B, C$  có 2 biến bằng nhau, cũng có nghĩa chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu trong trường hợp trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau. Đến đây bài toán chỉ còn là 1 biến và xin dành cho bạn đọc tự hoàn thiện.

**Ví dụ 2:** Cho  $k \geq 0, a, b, c \geq 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng } \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}$$

### Chứng minh

Đổi biến  $A = \frac{a}{b+c}, B = \frac{b}{c+a}, C = \frac{c}{a+b}$ . Khi đó ta có

$$AB + BC + CA = \frac{ab(a+b)bc(b+c) + ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1 - \frac{2}{\frac{a+b+c}{abc}(ab+bc+ca) - 1}$$

$$ABC = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{\frac{a+b+c}{abc}(ab+bc+ca) - 1}$$

Với mọi  $a, b, c$  tồn tại  $a', b', c'$  sao cho trong 3 số này có 2 số bằng nhau và

$$\begin{cases} \frac{a'+b'+c'}{a'b'c'} = \frac{a+b+c}{abc} \\ a'b' + b'c' + c'a' = ab + bc + ca \end{cases}$$

$$\text{Khi đó đặt } A' = \frac{a'}{b'+c'}, B' = \frac{b'}{c'+a'}, C' = \frac{c'}{a'+b'} \text{ thì } \begin{cases} A'B' + B'C' + C'A' = AB + BC + CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A' - B')(B' - C')(C' - A') = 0 \end{cases}$$

Như vậy có thể áp dụng 2 định lý 1 và 2 suy ra chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu trong trường hợp trong 3 số  $a, b, c$  có 2 số bằng nhau. Tóm lại, sơ đồ chứng minh của chúng ta là như sau. Đối với bất đẳng thức cần chứng minh  $F(a, b, c) \geq 0$ , ta đổi biến theo cách nào có thể dẫn tới bất đẳng thức  $A' + B' + C' \geq \text{const}$ . Sau đó chứng minh rằng với mọi giá trị có thể của  $A, B, C$  luôn tồn tại  $a', b', c'$  sao cho khi đổi biến  $A', B', C'$  thỏa mãn

$$\begin{cases} A'B' = B'C' + C'A' = AB + BC + CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A' - B')(B' - C')(C' - A') = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Như thế ta đã có thể áp dụng định lý 1 và định lý 2 để quy bài toán về trường hợp trong 3 biến  $A, B, C$  có 2 biến bằng nhau. Thực ra ta cần chứng minh hệ (\*) có nghiệm vì định lý 1 chỉ được phát biểu cho  $R_+^3$ , trong khi đó  $(A, B, C)$  chỉ chạy trong 1 tập con nào đó của  $R_+^3$ , vì chúng còn bị ràng buộc bởi một quan hệ qua chính phép đổi biến.

**Ví dụ 3. [Tổng quát RMO 2000]** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a+b+c=3$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất (nhỏ nhất) để bất đẳng thức sau đúng:  $a^k + b^k + c^k \geq ab+bc+ca$  (1)

**Cách 1:** Ta đã biết kết quả khá quen thuộc sau:  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab+bc+ca$  do đó (1) đúng  $\forall k \geq \frac{1}{2}$ . Bây giờ ta xét bất đẳng thức khi  $k \leq \frac{1}{2}$

**Bổ đề:** Giả sử  $a+b=2t \geq 1$ , khi đó:  $a^k + b^k - ab \geq \min\{(2t)^k, 2t^k - t^2\}$

**Chứng minh:** Giả sử  $a \geq b$ . Tồn tại 1 số không âm  $x$  với  $a=t+x, b=t-x$ .

Xét hàm số  $f(x) = (t+x)^k + (t-x)^k - t^2 + x^2$ ;  $f'(x) = k(t+x)^{k-1} - k(t-x)^{k-1} + 2x$

$$f''(x) = k(k-1)(t+x)^{k-2} + k(k-1)(t-x)^{k-2} + 2$$

$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)[(t+x)^{k-3} - (t-x)^{k-3}]$$

Như vậy  $f'''(x)$  có nghiệm duy nhất  $x=0$ , do đó  $f''(x)$  là hàm đơn điệu và có không quá 1 nghiệm, suy ra  $f'(x)$  có không quá 2 nghiệm ( $t \geq x \geq 0$ ).

Vì  $f'(0)=0$  và  $f''(0)=2k(k-1)t^{k-2}+2=2-2k(1-k) \geq 0$ . Do đó giá trị nhỏ nhất của  $f$  sẽ lấy tại  $x=0$  hoặc  $x=t$ . Đó là đpcm.

Với bổ đề trên bài toán được chứng minh như sau:

Không mất tính tổng quát giả sử  $a > b > c$ . Đặt  $a+b=2t \geq 1$ , khi đó:

$$a^k + b^k + c^k - (ab+bc+ca) \geq \min\{(2t)^k, 2t^k - t^2\} - 2ct + c^k \quad (2)$$

i) Nếu  $(2t)^k \leq 2t^k - t^2$  thì áp dụng bổ đề với  $2t$  và  $c$ :

$$VP(2) = (2t)^k + c^k - 2t \cdot c \geq \min\left\{(2t+c)^k, 2\left(t+\frac{c}{2}\right)^k - \left(t+\frac{c}{2}\right)^2\right\}$$

$$\text{Do } 2t+c=3 \text{ nên } a^k + b^k + c^k - (ab+bc+ca) \geq \min\left\{3^k, 2\left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{9}{4}\right\}$$

ii) Nếu  $(2t)^k \geq 2t^k - t^2$ , ta có thể coi trường hợp này giống như  $a=b=z \geq 1, c=3-2z$ .

$$\text{Xét hàm } g(z) = 2z^k + (3-2z)^k - 2z(3-2z) + z^2 = 2z^k + (3-2z)^k - 6z + 3z^2$$

$$g'(z) = 2k \cdot z^{k-1} - 2k(3-2z)^{k-1} - 6 + 6z; \quad g''(z) = 2k(k-1) \cdot z^{k-2} + 4k(k-1)(3-2z)^{k-2} + 6$$

$$g'''(z) = 2k(k-1)(k-2)[z^{k-3} - 4(3-2z)^{k-3}]$$

Dễ thấy  $g'''(z)$  vô nghiệm với  $z \geq 1$ , suy ra  $g'(z)$  có không quá 2 nghiệm.

Do  $\lim_{z \rightarrow \frac{3}{2}} = -\infty$  nên giá trị nhỏ nhất của  $g(z)$  với  $\frac{3}{2} \geq z \geq 1$  lấy ở 2 đầu mút

$$g(z) \geq \min\left\{0, 2\left(\frac{3}{2}\right)^k - \frac{9}{4}\right\}. \text{ Kết hợp cả 2 trường hợp ta tìm được}$$

$$a^k + b^k + c^k - (ab+bc+ca) \geq \min\left\{0, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\right\}$$

Để có  $a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca$  ta phải có  $2 \frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{2 \ln 3 - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 0,2905$

Khi đó sẽ có 2 trường hợp xảy ra đẳng thức là  $a=b=c=1$  hoặc  $a=b=\frac{3}{2}, c=0$

**Cách 2:** Ta có  $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = a+b+c$

Xét hàm số  $f(k) = a^k + b^k + c^k$  ( $k \geq 1$ )  $\Rightarrow f'(k) = \ln k (a^k + b^k + c^k) \geq 0$

Do  $f(k)$  đồng biến theo  $k$ , tức là  $a^k + b^k + c^k \geq a + b + c \geq ab + bc + ca$

Với  $k < 0$  thì cho 1 biến = 0 và 2 biến =  $\frac{3}{2}$  ta thấy ngay BDT không thỏa mãn

Vậy ta chỉ cần xét  $0 \leq k < 1$ . Loại bỏ điều kiện ta được bài toán

$$(a+b+c)^{2-k} (a^k + b^k + c^k) \geq 3^{2-k} (ab + bc + ca)$$

Cố định  $abc, ab + bc + ca$  ta thấy ngay về trái đồng biến theo  $p$  còn về phải không đổi nên ta chỉ việc xét 2 biến bằng nhau và  $\geq$  biến còn lại.

Đoạn xử lý với 1 biến bạn đọc có tham khảo cách 1.

**Ví dụ 4.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  và  $a + b + c + d = 4$ . Với  $k > 0$  cho trước, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = (abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k$

### Giải

Biến đổi  $A = (abc)^k + d^k [(bc)^k + (ca)^k + (ab)^k]$ . Cố định  $d, abc$ . Theo hệ quả 2 ta có  $A$  đồng biến theo  $ab + ac + bc$ . Suy ra  $A$  đạt max khi trong 3 biểu thức  $ab, bc, ca$  có 2 biểu thức bằng nhau cũng tức là trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau. Tương tự khi cố định  $a, b$  hoặc  $c$  thay cho  $d$ . Suy ra ta chỉ phải xét trường hợp trong 4 biến  $a, b, c, d$  có 3 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại

Giả sử  $a = b = c = t \Rightarrow d = 4 - 3t$ . Suy ra  $A = g(t) = t^{3k} + 3t^{2k} (4 - 3t)^k$

Do  $t \geq 1$ : Ta có  $g'(t) = 3kt^{3k-1} + 6kt^{2k-1} (4 - 3t)^k - 9kt^{2k} (4 - 3t)^{k-1}$

$$= 3kt^{2k-1} [t^k + 2(4 - 3t)^k - 3t(4 - 3t)^{k-1}]$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^k + 2(4 - 3t)^k = 3t(4 - 3t)^{k-1} \Leftrightarrow \left(\frac{t}{4 - 3t}\right)^k + 2 = 3 \cdot \frac{t}{4 - 3t}$$

Đặt  $r = r(t) = \frac{t}{4 - 3t} \Rightarrow r(t)$  là một song ánh. Từ phương trình trên suy ra

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow r^k + 2 = 3r$  (1). Phương trình (1) có không quá 2 nghiệm thực dương phân

biệt do  $g(1) = 0 \Rightarrow g(t) \leq \max \left\{ g(1), g\left(\frac{4}{3}\right) \right\} = \max \left\{ 4, \left(\frac{4}{3}\right)^{3k} \right\}$

**Các bài tập áp dụng**

**Bài 5:** Tìm hằng số tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng  $\forall a, b, c \geq 0$ :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}} + \frac{kabc}{(a+b+c)^3} \geq 1 + \frac{k}{27}$$

**Bài 6:** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , và  $a_1 \dots a_n = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}, \forall k \geq 0$$

**Bài 7:** Cho  $a, b, c > 0$ , hằng số  $k$  cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \text{ với điều kiện } \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \text{const} \leq \frac{1}{8}$$

**Bài 8:** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a_1+a_2} + \frac{1}{1+a_2+a_3} + \dots + \frac{1}{1+a_n+a_1} \leq \frac{n}{1+2\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$$

**Bài 9:** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $xy + yz + zx = 3$ . Nếu  $1 < r \leq 2$  thì

$$x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \geq 6$$

**Bài 10:** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $xy + yz + zx = 3$  và

$$p \geq \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 3} \approx 0.738 \text{ thì } x^p + y^p + z^p \geq 3$$

**Bài 11:** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(c + \frac{a^2}{b}\right)^2 \geq \frac{12(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

**Bài 12:** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + kbc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + kca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + kab}} \geq \min\left\{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}, \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{k+1}}, \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\right\}$$

## §21. PHƯƠNG PHÁP EV (EQUAL VARIABLE)

Định lý biến số bằng nhau (cũng được gọi là định lý  $n-1$  biến số bằng nhau trên *Mathlinks Site – Inequalities Forum*, hay thường viết tắt là **Định lý EV – The Equal Variable Theorem**) là một công cụ rất mạnh để giải quyết một lớp các bất đẳng thức đối xứng khó. Trước tiên chúng ta sẽ trình bày cơ sở lý thuyết của phương pháp, sau đó sẽ giải quyết một số bất đẳng thức thực sự khó nếu như tấn công bằng những cách khác.

### 1. Phát biểu định lý

Để phát biểu và chứng minh **Định lý EV** ta sẽ sử dụng một bổ đề và một mệnh đề phụ sau

**Bổ đề.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử các số thực không âm  $x \leq y \leq z$  thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \quad (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \quad (2)$$

Trong đó  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Với  $p = 0$ , thì (2) được thay thế bởi điều kiện  $xyz = abc > 0$ .

Như thế tồn tại hai số thực  $x_1, x_2$  với  $0 \leq x_1 < x_2$ , thỏa mãn  $x \in [x_1, x_2]$ , hơn nữa

- 1) Nếu  $x = x_1$  và  $p \leq 0$  thì  $0 < x < y = z$
- 2) Nếu  $x = x_1$  và  $p > 1$  thì hoặc  $0 = x < y \leq z$  hoặc  $0 < x < y = z$
- 3) Nếu  $x \in (x_1, x_2)$  thì  $x < y < z$
- 4) Nếu  $x = x_2$  thì  $x = y < z$

Chứng minh của bổ đề sẽ được trình bày trong mục (8,9)

**Mệnh đề.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \quad (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \quad (2)$$

Trong đó  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Với  $p = 0$ , phương trình (2) trở thành  $xyz = abc > 0$ . Giả

sử  $f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$  là hàm lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ , và đặt  $F_3(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$

- 1) Nếu  $p \leq 0$  thì  $F_3$  nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  $0 < x = y < z$  và  $F_3$  nhận giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $0 < x < y = z$
- 2) Nếu  $p > 1$  và hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u = 0$  hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$  thì  $F_3$  lớn nhất chỉ khi  $0 < x = y < z$ , và nhỏ nhất chỉ khi hoặc  $x = 0$  hoặc  $0 < x < y = z$ .

**Chứng minh.** Theo giả sử  $x \leq y \leq z$ , từ các liên hệ  $y + z = a + b + c - x$  và

$$y^p + z^p = a^p + b^p + c^p - x^p \text{ ta có thể biểu diễn } y \text{ và } z \text{ theo } x \text{ với } x \in [x_1, x_2].$$

Ta cho rằng hàm  $F(x) = f(x) + f(y(x)) + f(z(x))$  nhỏ nhất tại  $x = x_1$  và lớn nhất tại  $x = x_2$ . Nếu điều giả định này là đúng, thì sử dụng bổ đề dẫn tới:

a)  $F(x)$  nhỏ nhất khi  $0 < x = y < z$ , nếu  $p \leq 0$ ,

và  $F(x)$  nhỏ nhất khi hoặc  $x = 0$  hoặc  $0 < x < y = z$ , nếu  $p > 1$ ;

b)  $F(x)$  lớn nhất khi  $0 < x = y < z$ .

Theo thứ tự, để chứng minh điều giả định ở trên, giả sử rằng  $x \in (x_1, x_2)$ .

Sử dụng bổ đề, ta có  $0 < x < y < z$ . Từ  $x + y + z = a + b + c$  và

$$x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p, \text{ ta thu được } y' + z' = -1, \quad y^{p-1}y' + z^{p-1}z' = -x^{p-1}$$

Vì vậy  $y' = \frac{x^{p-1} - z^{p-1}}{z^{p-1} - y^{p-1}}, \quad z' = \frac{x^{p-1} - y^{p-1}}{y^{p-1} - z^{p-1}}$ , có thể kiểm tra kết quả này là đúng khi  $p = 0$ .

Ta có  $F'(x) = f'(x) + y'f'(y) + z'f'(z)$  và

$$\frac{F'(x)}{(x^{p-1} - y^{p-1})(x^{p-1} - z^{p-1})} = \frac{g(x^{p-1})}{(x^{p-1} - y^{p-1})(x^{p-1} - z^{p-1})} + \frac{g(y^{p-1})}{(y^{p-1} - z^{p-1})(y^{p-1} - x^{p-1})} + \frac{g(z^{p-1})}{(z^{p-1} - x^{p-1})(z^{p-1} - y^{p-1})}$$

Do  $g$  là hàm lồi nghiêm ngặt, nên vế phải luôn dương.

Mặt khác,  $(x^{p-1} - y^{p-1})(x^{p-1} - z^{p-1}) > 0$

Bởi vậy,  $F'(x) > 0$  và  $F(x)$  tăng nghiêm ngặt với  $x \in (x_1, x_2)$ . Trừ trường hợp tầm thường khi  $p > 1, x_1 = 0$  và  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$ , hàm  $F(x)$  liên tục trên  $[x_1, x_2]$  và vì vậy giá trị nhỏ nhất đạt được chỉ tại  $x = x_1$  và giá trị lớn nhất đạt được chỉ tại  $x = x_2$ .

**Định lý EV (Định lý về các biến số bằng nhau).**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số thực không âm, và  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Trong đó  $p$  là số thực,  $p \neq 1$ .

Với  $p = 0$ , phương trình thứ hai được quy ước thay thế bởi  $x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n > 0$ .

Giả sử  $f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, \infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là lồi nghiêm ngặt trên  $(0, \infty)$ , và đặt  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

1. Nếu  $p \leq 0$  thì  $F_n$  lớn nhất khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhỏ nhất khi

$$0 \leq x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$$

2. Nếu  $p > 0$  và hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u=0$  hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$  thì  $F_n$  lớn nhất khi

$$0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n, \text{ và nhỏ nhất khi } x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n$$

Trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Chứng minh.** Ta xét các trường hợp sau:

Nếu  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Trừ ra trường hợp tầm thường khi  $p > 1$ ,  $x_1 = 0$  và  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$ , hàm  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt được giá trị nhỏ nhất và lớn nhất và kết luận được suy ra từ mệnh đề đã nêu ở trên, sử dụng phản chứng. Ví dụ, xét trường hợp  $p \leq 0$ . Cần chứng minh  $F_n$  lớn nhất tại  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  với  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  và  $b_1 \leq b_{n-1}$ .

Giả sử  $x_1, x_{n-1}, x_n$  là các số dương thỏa mãn  $x_1 + x_{n-1} + x_n = b_1 + b_{n-1} + b_n$  và

$$x_1^p + x_{n-1}^p + x_n^p = b_1^p + b_{n-1}^p + b_n^p. \text{ Áp dụng mệnh đề biểu thức}$$

$F_3(x_1, x_{n-1}, x_n) = f(x_1) + f(x_{n-1}) + f(x_n)$  lớn nhất chỉ tại  $x_1 = x_{n-1} < x_n$ , điều này mâu thuẫn với giả thiết của chúng ta rằng  $F_n$  đạt giá trị lớn nhất tại  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  với  $b_1 < b_{n-1}$ .

Nếu  $p \in (0, 1)$ . Trường hợp này quy về trường hợp  $p > 1$ , thay thế lần lượt các biến  $a_i$  bởi  $a_i^{\frac{1}{p}}$ , các biến  $x_i$  bởi  $x_i^{\frac{1}{p}}$ , và  $p$  bởi  $\frac{1}{p}$ . Vì vậy ta có  $h(x) = xf'(x^{\frac{1}{1-p}})$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Ta nhận thấy điều kiện này tương đương với điều kiện rằng

$g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Thật ra, đối với chứng minh của chúng ta, chỉ cần chứng minh rằng  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$  là đủ, khi đó  $h(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Để chứng minh điều này, ta để ý  $g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}h(x)$ . Do  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ , sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có:

$$ug\left(\frac{1}{x}\right) + vg\left(\frac{1}{y}\right) > (u+v)g\left(\frac{\frac{u}{x} + \frac{v}{y}}{u+v}\right) \text{ với mọi số dương } x, y, u, v \text{ với } x \neq y.$$

$$\text{Bất đẳng thức này tương đương với } \frac{u}{x}h(x) + \frac{v}{y}h(y) > \left(\frac{u}{x} + \frac{v}{y}\right)h\left(\frac{\frac{u}{x} + \frac{v}{y}}{\frac{u}{x} + \frac{v}{y}}\right).$$

với  $u = tx$  và  $v = (1-t)y$ , trong đó  $t \in (0, 1)$ , bất đẳng thức này quy về

$$t \cdot h(x) + (1-t)h(y) > h(tx + (1-t)y) \text{ điều này chứng tỏ } h(x) \text{ lồi nghiêm ngặt trên } (0, \infty)$$



**Ghi chú.** Giả sử  $0 < \alpha < \beta$ . **Định lý EV** vẫn đúng khi  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (\alpha, \beta)$ . hàm  $f$  khả vi trên  $(\alpha, \beta)$  và hàm  $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(\alpha^{p-1}, \beta^{p-1})$  với  $p > 1$ , hoặc  $(\beta^{p-1}, \alpha^{p-1})$  với  $p < 1$

Nhờ **Định lý EV**, ta thu được một số kết quả rất có ích khi thực hành sau đây

**Hệ quả 1.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0; (n \geq 3)$  và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Hơn nữa, hoặc  $f(x)$  liên tục tại  $x=0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . Như thế

$F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Hệ quả 2.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0; (n \geq 3)$  và giả sử  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, \infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Như thế  $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0; (n \geq 3)$  và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Như thế  $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhỏ nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 4.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$  là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$

Trong đó  $p$  là một số thực,  $p \neq 0, p \neq 1$

a) Với  $p < 0, P = x_1 x_2 \dots x_n$  nhận giá trị nhỏ nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhận giá trị lớn nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $p > 0, P = x_1 x_2 \dots x_n$  nhận giá trị nhỏ nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhận giá trị lớn nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Chứng minh.** Áp dụng **Định lý EV** cho hàm  $f(u) = p \ln u$ . Ta nhận thấy  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$

$$\text{với } p > 0, \text{ và } f'(u) = \frac{p}{u}, g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right), g''(x) = \frac{p^2}{(1-p)^2} x^{\frac{2p-1}{1-p}}$$

Do  $g''(x) > 0$  với  $x > 0$ , hàm  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ , kết luận được kéo theo bởi **Định lý EV**

**Hệ quả 5.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$

1. Nếu  $p \leq 0$  ( $p = 0$  dẫn tới  $x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n > 0$ )

a) Với  $q \in (p, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $q \in (-\infty, 0) \cup (p, 1)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , với chỉ số  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nào đó

2. Nếu  $0 < p < 1$

a) Với  $q \in (0, 1) \cup (p, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $q \in (-\infty, p) \cup (1, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , với chỉ số  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nào đó

3. Nếu  $p > 1$ :

a) Với  $q \in (0, 1) \cup (p, \infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_{k+2} = \dots = x_n$  trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

b) Với  $q = (-\infty, 0) \cup (1, p)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Chứng minh.** Ta sẽ áp dụng Định lý EV cho hàm  $f(u) = q(q-1)(q-p)u^4$

Với  $p > 0$ , dễ dàng kiểm tra rằng hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u=0$  (trong trường hợp  $q > 0$ )

hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$  (trong trường hợp  $q < 0$ ). Ta có  $f'(u) = q^2(q-1)(q-p)u^{q-1}$  và

$$g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right) = q^2(q-1)(p-q)x^{\frac{q-1}{p-1}}; g''(x) = \frac{q^2(q-1)^2(p-q)^2}{(p-1)^2} x^{\frac{2p-1}{1-p}}$$

Do  $g''(x) > 0$  với  $x > 0$ , hàm số  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$  và kết luận được kéo theo bởi **Định lý EV**

**Hệ quả 6.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm,  $p \in \{1, 2\}$  và giả sử

$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Biểu thức  $E = \sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Chứng minh.** Sử dụng hệ thức quen thuộc

$$6 \sum x_1 x_2 x_3 = \left(\sum x_i\right)^3 - 3\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^2\right) + 2 \sum x_i^3$$

Mệnh đề này kéo theo bởi hệ quả 5 (trường hợp  $p=2$  và  $q=3$ , hoặc  $p=3$  và  $q=2$ )

**Hệ quả 7.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2; x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$$

Biểu thức  $E = \sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhỏ nhất khi

$x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$  trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Chứng minh.** Sử dụng hệ thức  $6 \sum x_1 x_2 x_3 = \left(\sum x_i\right)^3 - 3\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i^2\right) + 2 \sum x_i^3$ ,

Tổng  $\sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất (nhỏ nhất) khi  $\sum x_i$  lớn nhất (nhỏ nhất). Bởi vậy, mệnh đề

này kéo theo bởi hệ quả 5 (trường hợp  $p = \frac{3}{2}$  và  $q = \frac{1}{2}$ ), thay thế lần lượt  $x_1, x_2, \dots, x_n$

bởi  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ .

## 2. Áp dụng

**Bài 1.** Nếu  $x, y, z$  là các số thực không âm thì

$$x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5$$

### Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng  $x^5 + y^5 + z^5 + \frac{1}{12}(x+y+z)^5 \geq (x+y+z)(x^4 + y^4 + z^4)$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=4$  và  $q=5$ ):

- Nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x+y+z=\text{constant}$  và  $x^4 + y^4 + z^4 = \text{constant}$ ,

Thì tổng  $x^5 + y^5 + z^5$  nhỏ nhất khi hoặc  $x=0$  hoặc  $0 < x \leq y = z$ .

Trường hợp  $x=0$ . Bất đẳng thức trở thành  $(y+z)(y^2 - 4yz + z^2)^2 \geq 0$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Bất đẳng thức quy về  $(x+2y)^5 - 24x^4y - 24y^4(x+y) \geq 0$

Do  $(x+2y)^5 > (2y)^3(x+2y)^2$ , chỉ cần chứng minh  $y^2(x+2y)^2 - 3x^4 - 3y^3(x+y) \geq 0$  là đủ

Thật vậy, ta có  $y^2(x+2y)^2 - 3x^4 - 3y^3(x+y) = y^4 - x^4 + x(y^3 - x^3) + x^2(y^2 - x^2) \geq 0$

Nếu  $x \leq y \leq z$ , đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) \sim (0, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$

**Bài 2.** Nếu  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $xy + yz + zx = 1$  thì

$$x + y + z + 3(2\sqrt{3} - 3)xyz \geq 2$$

### Chứng minh

Ta viết lại giả thiết dưới dạng  $(x+y+z)^2 = 2 + x^2 + y^2 + z^2$ ,

Áp dụng Hệ quả 4. (trường hợp  $p=2$ )

- Nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x+y+z=\text{constant}$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant}$

Thì tích  $xyz$  nhỏ nhất khi hoặc  $x=0$  hoặc  $0 < x \leq y = z$

Trường hợp  $x=0$ .

Ta phải chứng minh rằng từ  $yz=1$  suy ra  $y+z \geq 2$ ; điều này là hiển nhiên vì

$$y+z \geq 2\sqrt{yz}.$$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Giả thiết  $xy + yz + zx = 1$  quy về  $2xy = (1-y)(1+y)$ , và bất đẳng thức trở thành:

$$x + 2y + 3(2\sqrt{3} - 3)xy^2 \geq 2, \quad x + 3(2\sqrt{3} - 3)xy^2 \geq \frac{4xy}{1+y}, \quad 1 + 3(2\sqrt{3} - 3)y^2 \geq \frac{4y}{1+y}$$

$$1 - 3y + 3(2\sqrt{3} - 3)y^2 + 3(2\sqrt{3} - 3)y^3 \geq 0, \quad (1 - \sqrt{3}y)^2 [1 + (2\sqrt{3} - 3)y] \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Nếu  $x \leq y \leq z$ , ta có đẳng thức khi và chỉ khi

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ hoặc } (x, y, z) = (0, 1, 1).$$

**Bài 3.** Nếu  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$  thì

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c} \geq 2$$

### Chứng minh

Đặt  $b+c=2x$ ,  $c+a=2y$  và  $a+b=2z$ . Ta cần chứng minh  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{2}{x+y+z} \geq 4$

với  $2(x^2 + y^2 + z^2) + 1 = (x + y + z)^2$ . Để làm điều đó, ta sẽ áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=2$  và  $q=-1$ ).

• Nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = \text{constant}$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant}$  thì biểu thức  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  nhỏ nhất khi  $0 < x = y \leq z$

Trường hợp  $0 < x = y \leq z$  tương đương với  $a = b \geq c$ . Điều kiện giả thiết  $ab + bc + ca = 1$

quy về  $c = \frac{1-a^2}{2a}$ ,  $0 < a \leq 1$ . Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c} - 2 &= \frac{1}{2a} + \frac{2}{a+c} - \frac{1}{2a+c} - 2 = \\ &= \left( \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+c} \right) - 2 \left( 1 - \frac{1}{a+c} \right) = \frac{1-a^2}{2a(1+3a^2)} - \frac{2(1-a)^2}{1+a^2} = \frac{(1-a)(1-3a+5a^2-11a^3+12a^4)}{2a(1+3a^2)(1+a^2)} \end{aligned}$$

Do  $1-a \geq 0$ , ta cần chứng minh rằng  $1-3a+5a^2-11a^3+12a^4 \geq 0$

Thật vậy, ta có  $1-3a+5a^2-11a^3+12a^4 = \left(1-\frac{3a}{2}\right)^2 + 11a^2\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 + a^4 > 0$

Nếu  $a \geq b \geq c$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (1, 1, 0)$

**Bài 4.** Giả sử  $x, y, z, t$  là các số thực không âm thỏa mãn  $x + y + z + t = 3$ .

Chứng minh rằng  $x^2y^2z^2 + y^2z^2t^2 + z^2t^2x^2 + t^2x^2y^2 \leq 1$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $x \leq y \leq z \leq t$ . Nếu  $x=0$ , bất đẳng thức trở

thành  $y^2z^2t^2 \leq 1$ , với  $y + z + t = 3$ . Từ bất đẳng thức AM - GM  $yzt \leq \left(\frac{y+z+t}{3}\right)^3$ , ta thu được  $yzt \leq 1$ , và vì vậy  $y^2z^2t^2 \leq 1$ .

Nếu  $x > 0$ , viết lại bất đẳng thức dưới dạng  $(xyz)^2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \right) \leq 1$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=0$  và  $q=-2$ ):

- Nếu  $0 < x \leq y \leq z \leq t$  thỏa mãn  $x + y + z + t = 3$  và  $xyzt = \text{constant}$  thì biểu thức

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \text{ lớn nhất khi } 0 < x \leq y = z = t.$$

Nếu  $0 < x \leq y = z = t$ , từ  $x + y + z + t = 3$ , ta thu được  $0 < y = z = t < 1$  và  $x = 3(1 - y)$

Bất đẳng thức quy về  $3x^2y^4 + y^6 \leq 1$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có  $x \frac{3y}{2} \cdot \frac{3y}{2} < \left( \frac{x + \frac{3y}{2} + \frac{3y}{2}}{3} \right)^3 = 1$ , vì vậy  $xy^2 < \frac{4}{9}$ .

Cho nên, chỉ cần chứng minh rằng  $\frac{4}{3}xy^2 + y^6 \leq 1$ . Thật vậy, ta có

$$1 - y^6 - \frac{4}{3}xy^2 = 1 - y^6 - 4(1 - y)y^2 = (1 - y)(1 + y - 3y^2 + y^3 + y^4 + y^5) >$$

$$> (1 - y)(1 + y - 3y^2 + y^4) = (1 - y)[(1 - y^2)^2 + y(1 - y)] > 0$$

Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z, t) = (0, 1, 1, 1)$  hoặc các hoán vị.

**Ghi chú.** Áp dụng này giải quyết bài toán đã được post bởi *Gabriel Dospinescu* trên *Mathlinks Site-Inequalities Forum* vào tháng 6 năm 2005 sau đây:

- Nếu  $x, y, z, t$  là các số không âm thỏa mãn  $x + y + z + t = 4$ , tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $x^2y^2z^2 + y^2z^2t^2 + z^2t^2x^2 + t^2x^2y^2$ .

Giá trị lớn nhất là  $\left(\frac{4}{3}\right)^6$ , đạt được khi  $(x, y, z, t) = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$  và các hoán vị. Để nhận

được kết quả này chúng ta thay  $x, y, z, t$  trong bất đẳng thức trên bởi  $\frac{3x}{4}, \frac{3y}{4}, \frac{3z}{4}, \frac{3t}{4}$

**Bài 5.** Giả sử  $x, y, z, t$  là các số không âm thỏa mãn  $x + y + z + t = 4$ . Chứng minh rằng

$$xyz + yzt + ztx + txy + x^2y^2z^2 + y^2z^2t^2 + z^2t^2x^2 + t^2x^2y^2 \leq 8$$

### Chứng minh

Giả sử rằng  $x \leq y \leq z \leq t$ . Nếu  $x = 0$ , bất đẳng thức quy về  $yzt + y^2z^2t^2 \leq 8$ , với

$y + z + t = 4$ . Từ bất đẳng thức **AM - GM**  $27yzt \leq (y + z + t)^3$ , ta có  $yzt \leq \frac{64}{27}$ , suy ra

$$\frac{yzt + y^2z^2t^2}{8} = \frac{yzt}{8}(1 + yzt) \leq \frac{8}{27} \left(1 + \frac{64}{27}\right) = \frac{728}{729} < 1$$

Nếu  $x > 0$ , viết lại bất đẳng thức ở dạng

$$xyzt \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) + x^2y^2z^2t^2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \right) \leq 8,$$

và áp dụng hệ quả 5 (trường hợp  $p=0$  và  $q < 0$ ):

• Nếu  $0 < x \leq y \leq z \leq t$  thỏa mãn  $x + y + z + t = 4$  và  $xyzt = \text{constant}$  thì các tổng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \text{ và } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \text{ lớn nhất khi } 0 < x \leq y = z = t$$

Nếu  $0 < x \leq y = z = t$ , do  $x + y + z + t = 4$ , ta có  $1 \leq y = z = t < \frac{4}{3}$  và  $x = 4 - 3t$ .

Bất đẳng thức quy về

$$3xt^2 + t^3 + 3x^2t^4 + t^6 \leq 8; 4(7t^6 - 18t^5 + 12t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2) \leq 0; 4t^2(t-1)^2 E(t) \leq 0$$

Trong đó  $E(t) = 7 - \frac{4}{t} - \frac{3}{t^2} - \frac{4}{t^3} - \frac{2}{t^4}$ .

Mà  $E(t) < E\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-1}{128}$ , bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1)$

**Bài 6.** Nếu  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $xy + yz + zx = 3$  thì

$$\sqrt{\frac{1+2x}{3}} + \sqrt{\frac{1+2y}{3}} + \sqrt{\frac{1+2z}{3}} \geq 3$$

### Chứng minh

Ta viết  $xy + yz + zx = 3$  dưới dạng  $(x + y + z)^2 = 6 + x^2 + y^2 + z^2$

Áp dụng Hệ quả 1 cho hàm  $f(u) = \sqrt{\frac{1+2u}{3}}, u \geq 0$ . Ta nhận được

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3(1+2x)}} \text{ và từ } g''(x) = \sqrt{3}(1+2x)^{-\frac{5}{2}} > 0, \text{ chứng tỏ } g(x) \text{ lồi nghiêm}$$

ngặt với  $x \geq 0$ . Áp dụng hệ quả 1, nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = \text{constant}$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant}$  thì tổng

$$\sqrt{\frac{1+2x}{3}} + \sqrt{\frac{1+2y}{3}} + \sqrt{\frac{1+2z}{3}} \text{ nhỏ nhất khi hoặc } x=0 \text{ or } 0 < x \leq y = z$$

Trường hợp  $x=0$ . Ta phải chứng minh  $\sqrt{1+2y} + \sqrt{1+2z} \geq 3\sqrt{3} - 1$  với  $yz=3$

Bình phương hai vế, bất đẳng thức trở thành  $y + z + \sqrt{13 + 2(y+z)} \geq 13 - 3\sqrt{3}$

Thật vậy, ta có  $y + z \geq 2\sqrt{yz} = 2\sqrt{3}$ , và do đó

$$y + z + \sqrt{13 + 2(y+z)} \geq 2\sqrt{3} + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} > 13 - 3\sqrt{3}$$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Từ  $xy + yz + zx = 3$ , ta nhận được  $x = \frac{3-y^2}{2y}, 0 < y \leq \sqrt{3}$ .

Bất đẳng thức trở thành  $\sqrt{1 + \frac{3-y^2}{y}} + 2\sqrt{1+2y} \geq 3\sqrt{3}$

Ký hiệu  $t = \sqrt{\frac{1+2y}{3}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}} < t \leq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}} < \frac{5}{4}$ . Bất đẳng thức trở thành  $\sqrt{\frac{3+4t^2-3t^4}{2(3t^2-1)}} \geq 3-2t$

Bình phương và nhân hai vế với 3, ta được  $7-8t-14t^2+24t^3-9t^4 \geq 0$  hay

$(1-t)^2(7+6t-9t^2) \geq 0$ . Bất đẳng thức này đúng, bởi vì

$$7+6t-9t^2 = 8 - (3t-1)^2 > 8 - \left(\frac{15}{4}-1\right)^2 = \frac{7}{16} > 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

**Bài 7. [Iran, 1996]** Nếu  $x, y, z \geq 0$ , không có hai số nào cùng bằng 0 thì

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)}$$

### Chứng minh

Nhờ tính thuần nhất, ta có thể giả sử  $x+y+z=1$ . Với giả thiết này, bất đẳng thức trở thành  $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \geq \frac{9}{2-2(x^2+y^2+z^2)}$ . Để chứng minh nó, ta sẽ áp

dụng Hệ quả 1 cho hàm  $f(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$ ,  $0 \leq u < 1$ . Ta có  $g(x) = f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$  và do  $g''(x) = \frac{24}{(1-x)^5} > 0$  chứng tỏ  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt với  $0 \leq x < 1$ . Áp dụng hệ quả 1 và

Ghi chú trong mục 5.1, nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x+y+z=1$  và

$x^2+y^2+z^2 = \text{constant}$  thì tổng  $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-z)^2}$  nhỏ nhất khi hoặc  $x=0$  hoặc

$0 < x \leq y = z$

Trường hợp  $x=0$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{9}{4yz} \text{ hay } \frac{(y-z)^2(4y^2+7yz+4z^2)}{4y^2z^2(y+z)^2} \geq 0$$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{2}{(x+y)^2} + \frac{1}{4y^2} \geq \frac{9}{4(2xy+y^2)} \text{ hay } \frac{x(x-y)^2}{2y^2(x+y)^2(2x+y)} \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) \sim (1, 1, 1)$  hoặc  $(x, y, z) \sim (0, 1, 1)$  hoặc các hoán vị vòng.

**Bài 8.** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0.

Chứng minh rằng nếu  $0 \leq r \leq \frac{5}{2}$  thì  $\sum \frac{1}{y^2+yz+z^2} \geq \frac{3(1+r)}{x^2+y^2+z^2+r(xy+yz+zx)}$



## Chứng minh

Dựa vào tính thuần nhất, ta có thể giả sử  $x + y + z = 3$ . Đặt  $p = \frac{9 + x^2 + y^2 + z^2}{6}$

$$\text{Do } \frac{1}{2(y^2 + yz + z^2)} = \frac{1}{(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x(x + y + z)} = \frac{1}{6(p - x)}$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } \frac{1}{p - x} + \frac{1}{p - y} + \frac{1}{p - z} \geq \frac{3(1 + r)}{2p - 3 + r(3 - p)}$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ áp dụng hệ quả 1 cho hàm

$$f(u) = \frac{1}{p - u}, 0 \leq u < p$$

$$\text{Ta có } g(x) = f'(x) = \frac{1}{(p - x)^2} \text{ và } g''(x) = \frac{6}{(p - x)^3} > 0$$

Bởi thế,  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt với  $0 \leq x < p$ . Áp dụng hệ quả 1 và ghi chú trong mục

5.1, nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant}$ , thì tổng

$$\frac{1}{p - x} + \frac{1}{p - y} + \frac{1}{p - z} \text{ nhỏ nhất khi hoặc } x = 0 \text{ or } 0 < x \leq y = z$$

Trường hợp  $x = 0$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{3(1 + r)}{y^2 + z^2 + ryz} \text{ hay } s + \frac{1}{s + 1} \geq \frac{3(1 + r)}{s + r},$$

Trong đó  $s = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$ ,  $s \geq 2$ . Hay  $s^3 + s^2 - 2s - 3 + r(s^2 - 2s - 2) \geq 0$

Do  $s^2 - 2s - 2 = (s - 2)^2 + 2(s - 1) > 0$ , chỉ cần xét trường hợp  $r = \frac{5}{2}$ . Trong trường hợp

này, bất đẳng thức trở thành  $(s - 2)(2s^2 + 11s + 8) \geq 0$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{2}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{3y^2} \geq \frac{3(1 + r)}{x^2 + 2y^2 + r(2xy + y^2)}$$

Từ việc bất đẳng thức này là thuần nhất, ta có thể giả sử  $x \leq y = 1$ . Với giả thiết này, bất

đẳng thức tương đương với  $x^4 + x^3 - 7x + 5 + 2r(x - 1)^3 \geq 0$  hay

$$(x - 1)^2 [x^2 + 3x + 5 + 2r(x - 1)] \geq 0$$

Từ  $x^2 + 3x + 5 + 2r(x - 1) = x^2 + 8x + (5 - 2r)(1 - x) > 0$ , chứng minh hoàn thành.

Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) \sim (1, 1, 1)$ . Trong trường hợp riêng  $r = \frac{5}{2}$ , đẳng thức còn xảy ra khi  $(x, y, z) \sim (0, 1, 1)$  hoặc các hoán vị vòng.

**Ghi chú.** Với  $r=2$ , ta có bất đẳng thức quen biết  $\sum \frac{1}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{9}{(x+y+z)^2}$

**Bài 9.** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $x+y+z=3$ . Nếu  $r \geq \frac{8}{3}$  thì

$$\frac{1}{r+x^2+y^2} + \frac{1}{r+y^2+z^2} + \frac{1}{r+x^2+z^2} \leq \frac{3}{r+2}$$

**Chứng minh**

Đặt  $p=r+x^2+y^2+z^2$ . Ta cần chứng minh  $\frac{1}{p-x^2} + \frac{1}{p-y^2} + \frac{1}{p-z^2} \leq \frac{3}{r+2}$

Với  $x+y+z=3$  và  $x^2+y^2+z^2=p-r$ . Để chứng minh điều này, ta sẽ áp dụng hệ quả 1 cho hàm  $f(u) = \frac{1}{p-u^2}, 0 \leq u \leq \sqrt{p}$ .

Ta có  $g(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(p-x^2)^2}$  và  $g''(x) = \frac{24x(p+x^2)}{(p-x^2)^4}$

Do  $g''(x) > 0$  với  $x > 0$ , hàm  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt với  $0 \leq x \leq \sqrt{p}$ . Áp dụng hệ quả 1, nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x+y+z=3$  và  $x^2+y^2+z^2 = \text{constant}$  thì tổng

$\frac{1}{p-x^2} + \frac{1}{p-y^2} + \frac{1}{p-z^2}$  nhỏ nhất khi  $0 \leq x = y \leq z$ . Vì thế, chỉ cần xét trường hợp

$x=y$ . Ta cần chứng minh rằng với giả thiết  $2x+z=3$  bất đẳng thức sau đúng

$\frac{1}{r+2x^2} + \frac{2}{r+x^2+z^2} \leq \frac{3}{r+2}$ . Viết bất đẳng thức này dưới dạng sau đây

$$\frac{1}{r+2x^2} + \frac{2}{r+9-12x+5x^2} \leq \frac{3}{r+2} \Leftrightarrow 5x^4 - 12x^3 + (2r+6)x^2 - 4(r-1)x + 2r-3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 (5x^2 - 2x + 2r-3) \geq 0. \text{ Do } 5x^2 - 2x + 2r-3 = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(r - \frac{8}{5}\right) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ . Trong trường hợp đặc biệt  $r = \frac{8}{5}$ , đẳng thức còn xảy ra khi  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right)$  hoặc các hoán vị vòng.

**Bài 10.** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $x^2+y^2+z^2=3$ . Nếu  $r \geq 10$  thì

$$\frac{1}{r-(x+y)^2} + \frac{1}{r-(y+z)^2} + \frac{1}{r-(z+x)^2} \leq \frac{3}{r-4}$$

**Chứng minh**

Đặt  $s=x+y+z$ . Ta cần chứng minh rằng

$$\frac{1}{r-(s-x)^2} + \frac{1}{r-(s-y)^2} + \frac{1}{r-(s-z)^2} \leq \frac{3}{r-4}$$

Với  $x + y + z = s$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

Áp dụng Hệ quả 1 cho hàm  $f(u) = \frac{-1}{r - (s - u)^2}$  với  $0 \leq u \leq s$ .

$$\text{Ta có } g(x) = f'(x) = \frac{2(s-x)}{[r - (s-x)^2]^2} \text{ và } g''(x) = \frac{24(s-x)[r + (s-x)^2]}{[r - (s-x)^2]^4}$$

Do  $g''(x) > 0$  với  $0 \leq x < s$ , hàm  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt với  $0 \leq x \leq s$ . Áp dụng Hệ quả 1, nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = \text{constant}$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  thì tổng

$\frac{-1}{r - (s-x)^2} + \frac{-1}{r - (s-y)^2} + \frac{-1}{r - (s-z)^2}$  nhỏ nhất khi hoặc  $x = 0$  hoặc  $0 < x \leq y = z$ . Vì thế chỉ cần xét các trường hợp  $x = 0$  và  $0 < x \leq y = z$ .

Trường hợp  $x = 0$ . Ta cần chứng minh rằng từ  $y^2 + z^2 = 3$  dẫn tới

$$\frac{1}{r - y^2} + \frac{1}{r - z^2} + \frac{1}{r - (y+z)^2} \leq \frac{3}{r-4}. \text{ Do } \frac{1}{r - y^2} + \frac{1}{r - z^2} + \frac{2r-3}{r^2 - 3r + y^2 z^2} \leq \frac{2r-3}{r(r-3)}$$

Và  $(y+z)^2 \leq 2(y^2 + z^2) = 6$ , chỉ cần chứng minh rằng  $\frac{2r-3}{r(r-3)} + \frac{1}{r-6} \leq \frac{3}{r-4}$

Bất đẳng thức này quy về  $\frac{3(r^2 - 12r + 24)}{r(r-3)(r-4)(r-6)} \geq 0$ .

Điều này đúng bởi vì  $r^2 - 12r + 24 = (r-2)(r-10) + 4 > 0$ .

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Viết bất đẳng thức ở dạng thuần nhất

$$\sum \frac{1}{r(x^2 + y^2 + z^2) - 3(y+z)^2} \leq \frac{3}{(r-4)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Do  $y = z > 0$ , ta có thể giả sử  $y = z = 1$ . Đặt  $t = r(x^2 + 2)$ ,  $t > 2r \geq 20$ , bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{t-12} + \frac{2}{t-3x^2-6x-3} \leq \frac{3}{t-4x^2-8}, \text{ hay } \frac{6(x-1)^2(t-2x^2-8x-18)}{(t-12)(t-3x^2-6x-3)(t-4x^2-8)} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng bởi vì

$$t - 2x^2 - 8x - 18 = r(x^2 + 2) - 2x^2 - 8x - 18 \geq 10(x^2 + 2) - 2x^2 - 8x - 18 = 2(2x-1)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ . Trong trường hợp đặc biệt  $r = 10$ , đẳng thức còn xảy

ra khi  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  hoặc các hoán vị vòng.

**Bài 11.** Nếu  $x, y, z$  là các số thực không âm thì

$$\frac{yz}{3x^2 + y^2 + z^2} + \frac{xz}{3y^2 + z^2 + x^2} + \frac{xy}{3z^2 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{5}$$

**Chứng minh**

Thay  $x, y, z$  bởi  $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$  tương ứng, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{\sqrt{yz}}{3x+y+z} + \frac{\sqrt{xz}}{3y+z+x} + \frac{\sqrt{xy}}{3z+x+y} \leq \frac{3}{5}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $x \leq y \leq z$ . Nếu  $x=0$ , bất đẳng thức quy về

$3(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 + \sqrt{yz} \geq 0$ , hiển nhiên đúng. Nếu  $x > 0$ , do bất đẳng thức này thuần nhất, ta giả sử rằng  $x+y+z=2$ , và viết lại nó dưới dạng

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} + \frac{1}{\sqrt{y}(y+1)} + \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)} \leq \frac{6}{5\sqrt{xyz}}$$

Bây giờ ta sẽ áp dụng hệ quả cho hàm  $f(u) = \frac{-1}{\sqrt{u}(u+1)}, u > 0$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{3u+1}{2u\sqrt{u}(u+1)^2} \text{ và } g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2\sqrt{x}(x+3)}{2(x+1)^2}, g''(x) = \frac{\sqrt{x}(3x^2+11x^2+5x+45)}{8(x+1)^4}$$

Do  $g''(x) > 0$  với  $x > 0$ ,  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Áp dụng hệ quả 3, nếu  $0 < x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x+y+z=2$  và  $xyz=\text{constant}$ , thì tổng

$$\frac{-1}{\sqrt{x}(x+1)} + \frac{-1}{\sqrt{y}(y+1)} + \frac{-1}{\sqrt{z}(z+1)}$$
 lớn nhất khi  $0 < x \leq y = z$ .

Vì thế, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp  $y=z > 0$ . Hơn nữa, nhờ tính thuần nhất, ta có thể giả sử  $y=z=1$ . Bất đẳng thức quy về

$$9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4 \geq 0, \text{ hay } (x-1)^2(3x-2)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) \sim (1, 1, 1)$ , hoặc khi  $(x, y, z) \sim (\frac{2}{3}, 1, 1)$  hoặc các hoán vị vòng.

**Bài 12.** Nếu  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $x+y+z=2$ .

Chứng minh rằng 
$$\frac{yz}{x^2+1} + \frac{zx}{y^2+1} + \frac{xy}{z^2+1} \leq 1$$

#### Chứng minh

Ta giả sử rằng  $x \leq y \leq z$ . Nếu  $x=0$ , bất đẳng thức quy về  $yz \leq 1$ , hiển nhiên đúng khi  $y+z=2$ . Ngược lại, ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{y(y^2+1)} + \frac{1}{z(z^2+1)} \leq \frac{1}{xyz} \text{ và áp dụng hệ quả 3 cho hàm}$$

$$f(u) = \frac{-1}{u(u^2+1)}, u > 0. \text{ Ta có } f'(u) = \frac{3u^2+1}{u^2(u^2+1)^2} \text{ và } g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^4(x^2+3)}{(x^2+1)^2},$$

$$g''(x) = \frac{2x^2(x^6+5x^4-7x^2+12)}{(x^2+1)^4}$$

Do  $g''(x) > 0$  với  $x > 0$ ,  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Áp dụng hệ quả 3, nếu  $0 < x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = 2$  và  $xyz = \text{constant}$  thì tổng

$$\frac{-1}{x(x^2+1)} + \frac{-1}{y(y^2+1)} + \frac{-1}{z(z^2+1)}$$

Nhỏ nhất khi  $0 < x \leq y = z$  ta nhận được  $0 < y = z \leq 1$  và  $x = 2(1 - y)$ .

Bất đẳng thức trở thành  $(y-1)^2(19y^2 - 18y + 5) \geq 0$ , hiển nhiên đúng.

Nếu  $x \leq y \leq z$ , đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) = (0, 1, 1)$

**Bài 13.** Giả sử  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 2$ . Nếu  $r_0 < r \leq 3$ , trong đó

$$r_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 1.71, \text{ thì } x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \leq 2$$

### Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$x^{r+1} + y^{r+1} + z^{r+1} + 2\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^{r+1} \geq (x+y+z)(x^r + y^r + z^r)$$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=r$  và  $q=r+1$ )

• Nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = \text{constant}$  và  $x^r + y^r + z^r = \text{constant}$

Tổng  $x^{r+1} + y^{r+1} + z^{r+1}$  nhỏ nhất khi  $x=0$  hoặc  $0 < x \leq y = z$

Trường hợp  $x=0$ . Bất đẳng thức khởi đầu trở thành  $yz(y^{r-1} + z^{r-1}) \leq 2$

Trong đó  $y+z=2$ . Do  $0 < r-1 \leq 2$ , sử dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta

$$\text{có } \frac{y^{r-1} + z^{r-1}}{2} \leq \left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}. \text{ Vì vậy, chỉ cần chứng minh rằng } yz\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}} \leq 1$$

$$\text{Sử dụng } \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{2(y^2 + z^2)}{(r+z)^2} \geq 1 \text{ và } \frac{r-1}{2} \leq 1, \text{ ta có}$$

$$1 - yz\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}} \geq 1 - yz\left(\frac{y^2 + z^2}{2}\right) = \frac{(y+z)^4}{16} - \frac{yz(y^2 + z^2)}{2} = \frac{(y-z)^4}{16} \geq 0$$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Trong bất đẳng thức thuần nhất, ta bỏ đi điều kiện

$$x + y + z = 2, \text{ và xét } y = z = 1, 0 < x \leq 1. \text{ Bất đẳng thức quy về } \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{r+1} - x^r - x - 1 \geq 0$$

Do  $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{r+1}$  tăng và  $x^r$  giảm khi  $r$  tăng, chỉ cần xét trường hợp  $r = r_0$ .

$$\text{Đặt } f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{r_0+1} - x^{r_0} - x - 1$$

Ta có  $f'(x) = \frac{r_0+1}{2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{r_0} - r_0 x^{r_0-1} - 1$ ,  $\frac{1}{r_0} f''(x) = \frac{r_0+1}{4} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{r_0} - \frac{r_0-1}{x^{2-r_0}}$

Do  $f''(x)$  tăng trên  $(0,1]$ ,  $f''(0_+) = -\infty$  và

$$\frac{1}{r_0} f''(1) = \frac{r_0+1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} - r_0 + 1 = \frac{r_0+1}{2} - r_0 + 1 = \frac{3-r_0}{2} > 0$$

Tồn tại  $x_1 \in (0,1)$  thỏa mãn  $f''(x_1) = 0$ ,  $f''(x) < 0$  với  $x \in (0, x_1)$ , và  $f''(x) > 0$  với  $x \in (x_1, 1]$ . Vì thế, hàm  $f'(x)$  giảm nghiêm ngặt với  $x \in [0, x_1]$ , và tăng nghiêm ngặt với

$x \in [x_1, 1]$ . Do  $f'(0) = \frac{r_0-1}{2} > 0$  và  $f'(1) = \frac{r_0+1}{2} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} - 2\right] = 0$ , tồn tại  $x_2 \in (0, x_1)$  thỏa

mãn  $f'(x_2) = 0$ ,  $f'(x) > 0$  với  $x \in [0, x_2)$ , và  $f'(x) < 0$  với  $x \in (x_2, 1]$ . Vì vậy hàm  $f(x)$

tăng nghiêm ngặt với  $x \in [0, x_2]$ , và giảm nghiêm ngặt với  $x \in [x_2, 1]$ . Do  $f(0) = f(1) = 0$ ,

chúng ta có  $f(x) \geq 0$  với  $0 < x \leq 1$ . Từ đó suy ra kết quả mong muốn.

Nếu  $x \leq y \leq z$ , đẳng thức xảy ra khi  $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ . Hơn nữa, khi  $r = r_0$ , đẳng thức còn xảy ra khi  $(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

**Ghi chú.** Sử dụng cùng cách thức như trên, ta có thể chứng minh rằng với  $r > 3$  và

$x + y + z = 2$ , biểu thức  $E(x, y, z) = x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y)$

đạt giá trị lớn nhất khi một trong các biến  $x, y, z$  bằng 0. Để chứng minh mệnh đề này,

chỉ cần chứng minh bất đẳng thức  $E(x, y, z) \leq 2$  đúng với  $0 < x \leq y = z$ , trong khi đó nó

không đúng nếu  $x = 0$  và mọi số không âm  $y$  và  $z$  thỏa mãn  $y + z = 2$ . Thật vậy, với

$y = z = 1$  và  $0 < x \leq 1$ , sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** ta nhận được

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{r+1} - x^r - x - 1 > 1 + \frac{(r+1)x}{2} - x^r - x - 1 = \frac{(r-1)x}{2} - x^r > x - x^r \geq 0$$

Trong trường hợp đặc biệt  $r = 4$ ,  $E(x, y, z)$  lớn nhất khi  $(x, y, z) = \left(0, \frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$

giống như ta đã chứng minh trong áp dụng 1.

**Bài 14.** Giả sử  $x, y, z$  là các số thực không âm thỏa mãn  $xy + yz + zx = 3$ .

Nếu  $1 \leq r \leq 2$  thì  $x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \geq 6$

#### Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \geq 6 \left( \frac{xy + yz + zx}{3} \right)^{\frac{r+1}{2}}$$

Để thuận tiện, ta bỏ đi điều kiện  $xy + yz + zx = 3$ . Sử dụng điều kiện  $x + y + z = 1$ , bất

đẳng thức trở thành  $x^r(1-x) + y^r(1-y) + z^r(1-z) \geq 6 \left( \frac{1-x^2-y^2-z^2}{6} \right)^{\frac{r+1}{2}}$

Để chứng minh nó, ta sẽ áp dụng Hệ quả 1 cho hàm  $f(u) = -u^r(1-u)$  với  $0 \leq u \leq 1$ . Ta

có  $f'(u) = -ru^{r-1} + (r+1)u^r$  và  $g(x) = f'(x) = -rx^{r-1} + (r+1)x^r$ ;

$$g''(x) = r(r-1)x^{r-3}[(r+1)x + 2 - r]$$

Do  $g''(x) > 0$  với  $x > 0$ ,  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $[0, +\infty)$ . Áp dụng Hệ quả 1, nếu

$0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{constant}$

Tổng  $f(x) + f(y) + f(z)$  nhỏ nhất khi hoặc  $x = 0$  hoặc  $0 < x \leq y = z$

Trường hợp  $x = 0$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành  $yz(y^{r-1} + z^{r-1}) \geq 6$ , trong đó  $yz = 3$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$yz(y^{r-1} + z^{r-1}) \geq 2(yz)^{\frac{r+1}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{r+1}{2}} > 6$$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành  $x^r y + y^r(x+y) \geq 3$ , trong đó

$0 < x \leq y$  và  $2xy + y^2 = 3$ . Do  $0 < x \leq y$  và  $2xy + y^2 = 3$  ta nhận được  $0 < x \leq 1$ .

Đặt  $f(x) = x^r y + y^r(x+y) - 3$ , với  $y = -x + \sqrt{x^2 + 3}$

Ta cần chứng minh rằng  $f(x) \geq 0$  với  $0 < x \leq 1$ . Nếu  $x = 1$ , ta có  $y = 1$  và  $f(1) = 0$ . Lấy

vi phân, phương trình  $2xy + y^2 = 3$  dẫn tới  $y' = \frac{-y}{x+y}$ . Như thế

$$f'(x) = rx^{r-1}y + y^r[x^r + rxy^{r-1} + (r+1)y^r]y' = \frac{y[(r-1)x + ry](x^{r-1} - y^{r-1})}{x+y} \leq 0$$

Hàm  $f(x)$  giảm nghiêm ngặt trên  $[0, 1]$  và vì vậy  $f(x) \geq f(1) = 0$  với  $0 < x \leq 1$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

### Ghi chú.

*Marian Tetiva* đã tìm ra một lời giải đẹp cho trường hợp đặc biệt khi  $r = 2$ .

Trước hết viết bất đẳng thức dưới dạng  $(xy + yz + zx)(x + y + z) \geq 3(xyz + 2)$

Hay  $x + y + z \geq xyz + 2$

Giả sử rằng  $x \leq y \leq z$ , giả thiết  $xy + yz + zx = 3$  dẫn tới  $xy \leq 1$  và  $yz \geq 1$ . Vì vậy

$(1 - xy)(yz - 1) + (1 - y)^2 \geq 0$ . Từ đó suy ra kết luận.

**Bài 15.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$

$$\text{thì } \frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$$

**Chứng minh**

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp  $n=2$ . Bất đẳng thức trở thành đẳng thức

Trường hợp  $n \geq 3$ . Giả sử rằng  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , và áp dụng Hệ quả 2 cho hàm

$$f(u) = \frac{1}{1-(n-1)u} \text{ với } u > 0$$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{-(n-1)}{[1-(n-1)u]^2} \text{ và } g(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-(n-1)x}{(\sqrt{x}+n-1)^2},$$

$$g''(x) = \frac{3(n-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+n-1)^4}$$

Do  $g''(x) > 0$ ,  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Áp dụng Hệ quả 2, nếu

$0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \text{constant}$  thì tổng  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  nhỏ nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

Bởi vậy, ta đã chứng minh bất đẳng thức  $\frac{1}{1+(n-1)x} + \frac{n-1}{1+(n-1)y} \geq 1$

Giả thiết  $0 < x \leq 1 \leq y$  và  $x + (n-1)y = \frac{1}{x} + \frac{n-1}{y}$ .

Đẳng thức sau cùng tương đương với  $(n-1)(y-1) = \frac{y(1-x^2)}{x(1+y)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Do } \frac{1}{1+(n-1)x} + \frac{n-1}{1+(n-1)y} - 1 &= \frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{1+(n-1)y} - \frac{n-1}{n} = \\ &= \frac{(n-1)(1-x)}{n[1+(n-1)x]} - \frac{(n-1)^2(y-1)}{n[1+(n-1)y]} = \frac{(n-1)(1-x)}{n[1+(n-1)x]} - \frac{(n-1)y(1-x^2)}{nx(1+y)[1+(n-1)y]}, \end{aligned}$$

Ta phải chứng minh rằng  $x(1+y)[1+(n-1)y] \geq y(1+x)[1+(n-1)x]$  hay

$(y-x)[(n-1)xy-1] \geq 0$ . Do  $y-x \geq 0$ , ta sẽ chứng minh rằng  $(n-1)xy \geq 1$

Thật vậy, do  $x + (n-1)y = \frac{1}{x} + \frac{n-1}{y}$  ta có  $xy = \frac{y+(n-1)x}{x+(n-1)y}$ ,

và vì vậy  $(n-1)xy - 1 = \frac{n(n-2)x}{x+(n-1)y} > 0$

Với  $n \geq 3$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$



**Bài 16.** Nếu  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $abc = 1$ , thì  $a^3 + b^3 + c^3 + 15 \geq 6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

**Chứng minh**

Thay  $a, b, c$  bởi  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$  tương ứng, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 15 \geq 6(x + y + z)$$

Nếu  $xyz = 1$ . Giả sử rằng  $0 < x \leq y \leq z$  và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p = 0$  và  $q = -3$ )

• Nếu  $0 < x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x + y + z = \text{constant}$  và  $xyz = 1$ , thì tổng  $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}$

nhỏ nhất khi  $0 < x = y \leq z$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi  $0 < x = y \leq z$  và  $x^2z = 1$ , hay:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^3} + \frac{1}{z^3} + 15 &\geq 6(2x + z) \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} + x^6 + 15 \geq 6\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) \\ &\Leftrightarrow x^9 - 12x^4 + 15x^3 - 6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(2-2x-6x^2+5x^3+4x^4+3x^5+2x^6+x^7) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nếu  $2 - 2x - 6x^2 + 5x^3 + 3x^4 \geq 0$  với  $0 < x \leq 1$ .

$$\text{Thật vậy, ta có } 2(2 - 2x - 6x^2 + 5x^3 + 3x^4) = (2 - 3x)^2\left(1 + 2x + \frac{3}{4}x^2\right) + x^3\left(1 - \frac{3}{4}x\right) > 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$

**Bài 17.** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương thỏa mãn  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Nếu  $m$  là số nguyên dương thỏa mãn  $m \geq n - 1$  thì  $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m + (m-1)n \geq m\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

**Chứng minh**

Với  $n = 2$  (vì thế  $m \geq 1$ ), bất đẳng thức quy về  $a_1^m + a_2^m + 2m - 2 \geq m(a_1 + a_2)$

Ta có thể chứng minh điều này bằng cách cộng các bất đẳng thức  $a_1^m \geq 1 + m(a_1 - 1)$  và

$a_2^m \geq 1 + m(a_2 - 1)$ , là những hệ quả của bất đẳng thức **Bernoulli**. Với  $n \geq 3$ , thay thế

$a_1, a_2, \dots, a_n$  bởi  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$  tương ứng, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \dots + \frac{1}{x_n^m} + (m-1)n \geq m(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

với  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ . Giả sử rằng  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p = 0$  và  $q = -m$ ):

• Nếu  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$  thì tổng

$$\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \dots + \frac{1}{x_n^m} \text{ nhỏ nhất khi } 0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức này với  $x_1 = x_2 = \dots x_{n-1} = x \leq 1$ ,  $x_n = y$  và

$$x^{n-1}y = 1, \text{ khi đó nó trở thành: } \frac{n-1}{x^m} + \frac{1}{y^m} + (m-1)n \geq m(n-1)x + my$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có  $\frac{n-1}{x^m} + (m-n+1) \geq \frac{m}{x^{n-1}} = my$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng  $\frac{1}{y^m} - 1 \geq m(n-1)(x-1)$

Bất đẳng thức này tương đương với  $x^{mn-m} - 1 - m(n-1)(x-1) \geq 0$

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng  $(x-1)[(x^{mn-m-1} - 1) + (x^{mn-m-2} - 1) + \dots + (x-1)] \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng. Với  $n=2$  và  $m=1$ , bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Ngược lại, đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

**Bài 18.** Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ . Chứng minh nếu  $k$  là số nguyên dương thỏa mãn  $2 \leq k \leq n+2$  và  $r = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{k-1} - 1$  thì

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k - n \geq nr(1 - x_1 x_2 \dots x_n)$$

### Chứng minh

Nếu  $n=2$ , thì bất đẳng thức quy về  $x_1^k + x_2^k - 2 \geq (2^k - 2)(1 - x_1 x_2)$ . Với  $k=2$  và  $k=3$ , bất đẳng thức này trở thành đẳng thức, trong khi đó với  $k=4$  nó trở thành

$$6x_1 x_2 (1 - x_1 x_2) \geq 0, \text{ hiển nhiên đúng}$$

Xét trường hợp  $n \geq 3$  và  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$  và

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = \text{constant}, \text{ thế thì tích } x_1 x_2 \dots x_n \text{ nhỏ nhất khi hoặc } x_1 = 0 \text{ hoặc}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n.$$

Trường hợp  $x_1 = 0$ . Bất đẳng thức quy về  $x_2^k + \dots + x_n^k \geq \frac{n^k}{(n-1)^{k-1}}$

với  $x_1 + \dots + x_n = n$ . Bất đẳng thức này thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức

$$\text{Jensen cho hàm lồi } f(u) = u^k \quad x_2^k + \dots + x_n^k \geq (n-1) \left( \frac{x_2 + \dots + x_n}{n-1} \right)^k$$

Trường hợp  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ . Ký hiệu  $x_1 = x$  và  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = y$

Ta cần chứng minh rằng với  $0 < x \leq 1 \leq y$  và  $x + (n-1)y = n$  bất đẳng thức sau đúng:

$$x^k + (n-1)y^k + nrxy^{n-1} - n(r+1) \geq 0$$

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng  $f(x) \geq 0$ , trong đó

$$f(x) = x^k + (n-1)y^k + nrxy^{n-1} - n(r+1), \text{ với } y = \frac{n-x}{n-1}$$

Ta nhận thấy  $f(0) = f(1) = 0$ . Do  $y' = \frac{-1}{n-1}$ , ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x^{k-1} - y^{k-1}) + nry^{n-2}(y-x) = \\ &= (y-x)[nry^{n-2} - k(y^{k-2} + y^{k-3} + \dots + x^{k-2})] = (y-x)y^{n-2}[nr - kg(x)] \end{aligned}$$

Trong đó  $g(x) = \frac{1}{y^{n-k}} + \frac{x}{y^{n-k+1}} + \dots + \frac{x^{k-2}}{y^{n-2}}$

Chú ý rằng  $y(x) = \frac{n-x}{n-1}$  giảm nghiêm ngặt, hàm  $g(x)$  tăng nghiêm ngặt với  $2 \leq k \leq n$ .

Với  $k = n+1$ , ta có  $g(x) = y + x + \frac{x^2}{y} + \dots + \frac{x^{n-1}}{y^{n-2}} = \frac{(n-2)x + n}{n-1} + \frac{x^2}{y} + \dots + \frac{x^{n-1}}{y^{n-2}}$ .

Và với  $k = n+2$ , ta có

$$g(x) = y^2 + yx + x^2 + \frac{x^3}{y} + \dots + \frac{x^n}{y^{n-2}} = \frac{(n^2 - 3n + 3)x^2 + n(n-3)x + n^2}{(n-1)^2} + \frac{x^3}{y} + \dots + \frac{x^n}{y^{n-2}}$$

ời vậy, hàm  $g(x)$  tăng nghiêm ngặt với  $2 \leq k \leq n+2$ , và hàm

$$h(x) = nr - kg(x) \text{ giảm nghiêm ngặt. Chú ý rằng } f'(x) = (y-x)y^{n-2}h(x)$$

Ta khẳng định rằng  $h(0) > 0$  và  $h(1) < 0$ . Nếu khẳng định của ta là đúng, thì tồn tại  $x_1 \in (0,1)$  thỏa mãn  $h(x_1) = 0$ ,  $h(x) > 0$  với  $x \in [0, x_1)$ , và  $h(x) < 0$  với  $x \in (x_1, 1]$ . Do đó,  $f(x)$  tăng nghiêm ngặt với  $x \in [0, x_1]$ , và giảm nghiêm ngặt với  $x \in [x_1, 1]$ . Do  $f(0) = f(1)$ , chứng tỏ  $f(x) \geq 0$  với  $0 < x \leq 1$ , và chứng minh hoàn tất

Để chứng minh rằng  $h(0) > 0$ , ta giả sử  $h(0) \leq 0$  thì  $h(x) < 0$  với  $x \in (0,1)$ ,  $f'(x) < 0$  với  $x \in (0,1)$ , và  $f(x)$  giảm nghiêm ngặt với  $x \in [0,1]$ , mâu thuẫn với  $f(0) = f(1)$ . Cũng vậy, nếu  $h(1) \geq 0$  thì  $h(x) > 0$  với  $x \in (0,1)$ ,  $f'(x) > 0$  với  $x \in (0,1)$ , và  $f(x)$  tăng nghiêm ngặt với  $x \in [0,1]$ , mâu thuẫn với  $f(0) = f(1)$ .

Với  $n \geq 3$  và  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , đẳng thức xảy ra khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$  và khi  $x_1 = 0$  và  $x_2 = \dots = x_n = \frac{n}{n-1}$

**Ghi chú 1.** Với  $k=2$ ,  $k=3$  và  $k=4$ , ta thu được các bất đẳng thức rất đẹp sau:

$$\begin{aligned} (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + nx_1x_2 \dots x_n &\geq n^2, \\ (n-1)^2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + n(2n-1)x_1x_2 \dots x_n &\geq n^3, \\ (n-1)^3(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4) + n(3n^2 - 3n + 1)x_1x_2 \dots x_n &\geq n^4 \end{aligned}$$

Với các số không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$

**Ghi chú 2.** Với  $k=n$ , bất đẳng thức này đã được post trên Mathlinks Inequalities Forum vào năm 2004 bởi Gabriel Dospinescu và Calin Popa

**Bài 19.** Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n$  thì

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \leq e_{n-1} (x_1 x_2 \dots x_n - 1), \text{ trong đó } e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e$$

**Chứng minh**

Thay thế mỗi số  $x_i$  bởi  $\frac{1}{a_i}$  tương ứng, mệnh đề trở thành:

• Nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số dương thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$  thì

$$a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - n + e_{n-1} \right) \leq e_{n-1}$$

Dễ dàng kiểm tra bất đẳng thức này đúng với  $n=2$ .

Xét  $n \geq 3$ , giả sử rằng  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  và áp dụng Hệ quả 4 (trường hợp  $p=-1$ ):

Nếu  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$  và  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \text{const}$ , thì tích  $a_1 a_2 \dots a_n$  là lớn nhất khi  $0 < a_1 \leq a_2 = a_3 = \dots = a_n$ .

Ký hiệu  $a_1 = x$  và  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = y$ , ta cần chứng minh rằng với  $0 < x \leq 1 \leq y < \frac{n}{n-1}$

và  $x + (n-1)y = n$ , bất đẳng thức đúng:  $y^{n-1} + (n-1)xy^{n-2} - (n - e_{n-1})xy^{n-1} \leq e_{n-1}$

Xét  $f(x) = y^{n-1} + (n-1)xy^{n-2} - (n - e_{n-1})xy^{n-1} - e_{n-1}$ ,

Với  $y = \frac{n-x}{n-1}$ , ta phải chứng minh rằng  $f(x) \leq 0$  với  $0 < x \leq 1$ . Ta nhận thấy

$$f(0) = f(1) = 0. \text{ Do } y' = \frac{-1}{n-1}, \text{ ta có } \frac{f'(x)}{y^{n-3}} = (y-x)[n-2-(n-e_{n-1})y] = (y-x)h(x)$$

Trong đó  $h(x) = n-2-(n-e_{n-1})\frac{n-x}{n-1}$  là hàm tuyến tính tăng.

Ta sẽ chứng minh rằng  $h(0) < 0$  và  $h(1) > 0$ . Nếu  $h(0) \geq 0$  thì  $h(x) > 0$  với  $x \in (0, 1)$ , vì thế  $f'(x) > 0$  với  $x \in (0, 1)$ , và  $f(x)$  tăng nghiêm ngặt với  $x \in [0, 1]$ , mâu thuẫn với  $f(0) = f(1)$ . Vì vậy,  $h(1) = e_{n-1} - 2 > 0$ .

Do  $h(0) < 0$  và  $h(1) > 0$ , chúng ta tồn tại  $x_1 \in (0, 1)$  thỏa mãn  $h(x_1) = 0$ ,  $h(x) < 0$  với  $x \in [0, x_1]$ , và  $h(x) > 0$  với  $x \in (x_1, 1]$ . Do đó,  $f(x)$  giảm nghiêm ngặt với  $x \in [0, x_1]$ , và tăng nghiêm ngặt với  $x \in [x_1, 1]$ . Do  $f(0) = f(1) = 0$ , chúng ta có  $f(x) \leq 0$  với  $0 \leq x \leq 1$ .

Với  $n \geq 3$ , đẳng thức xảy ra khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ .

**Bài 20.** Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ . Nếu  $k \geq 3$  là số nguyên dương và  $r = \frac{n^{k-1} - 1}{n - 1}$  thì  $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k - n \leq r(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - n)$

### Chứng minh

Xét hai trường hợp

Trường hợp  $n=2$ . Bất đẳng thức quy về  $x_1^k + x_2^k + (2^k - 2)x_1x_2 \leq 2^k$

Với  $k=3$ , bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Xét trường hợp  $k \geq 4$ . Ta phải chứng minh rằng  $f(t) \leq 0$  với  $t \in [0, 1]$ , trong đó  $f(t) = (1+t)^k + (1-t)^k + (2^k - 2)(1-t^2) - 2^k$

Ta có  $f'(t) = k[(1+t)^{k-1} - (1-t)^{k-1}] - (2^{k+1} - 4)t$ ,

$f''(t) = k(k-1)[(1+t)^{k-2} + (1-t)^{k-2}] - 2^{k+1} + 4$ ,  $f'''(t) = k(k-1)(k-2)[(1+t)^{k-3} - (1-t)^{k-3}]$

Do  $f''' > 0$  với  $t \in (0, 1]$ , đạo hàm cấp 2  $f''$  tăng nghiêm ngặt. Do

$f''(0) = 2k(k-1) - 2^{k+1} + 4 < 0$  và  $f''(1) = (k^2 - k - 8)2^{k-2} + 4 > 0$ , tồn tại  $t_1 \in (0, 1)$  thỏa mãn  $f''(t_1) = 0$ ,  $f''(t_1) < 0$  với  $t \in [0, t_1]$  và  $f''(t) > 0$  với  $t \in (t_1, 1]$ . Vì vậy, đạo hàm cấp 1

$f'$  giảm nghiêm ngặt trên  $[0, t_1]$  và tăng nghiêm ngặt trên  $[0, t_1]$ . Mà  $f'(0) = 0$  và

$f'(1) = (k-4)2^{k-1} + 4 > 0$ , tồn tại  $t_2 \in (0, 1)$  thỏa mãn  $f'(t_2) = 0$ ,  $f'(t) < 0$  với  $t \in (0, t_2)$ ,

và  $f'(t) > 0$  với  $t \in (t_2, 1]$ . Bởi vậy, hàm  $f$  giảm nghiêm ngặt trên  $[0, t_2]$  và tăng nghiêm ngặt trên  $[t_2, 1]$ . Sử dụng  $f(0) = f(1) = 0$ , suy ra  $f(t) \leq 0$  với  $t \in [0, 1]$ .

Trường hợp  $n \geq 3$ . Giả sử rằng  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=2$  và  $q=k > p$ ):

• Nếu  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$  và

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \text{constant}$  thì  $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$

Bởi vậy, ta cần chứng minh bất đẳng thức  $(n-1)x^k + y^k - n \leq r[(n-1)x^2 + y^2 - n]$ .

Trong đó  $0 \leq x \leq 1 \leq y$  và  $(n-1)x + y = n$ . Xét

$f(x) = (n-1)x^k + y^k - n - r[(n-1)x^2 + y^2 - n]$ ,  $(n-1)x + y = n$

Ta cần chứng minh rằng  $f(x) \leq 0$  với  $x \in [0, 1]$ . Do  $y' = -(n-1)$ , ta có

$$\frac{1}{k(n-1)} f'(x) = x^{k-1} - y^{k-1} - \frac{2r}{k}(x-y), \quad \frac{1}{k(k-1)(n-1)} f''(x) = x^{k-2} - (n-1)y^{k-2} - \frac{2nr}{k(k-1)},$$

$$\frac{1}{k(k-1)(k-2)(n-1)} f'''(x) = x^{k-3} - (n-1)^2 y^{k-3}$$

Do  $f''' < 0$  với  $x \in [0, 1]$ , đạo hàm cấp 2  $f''$  giảm nghiêm ngặt. Sử dụng  $(n-1)r < n^{k-1}$

và  $r = n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n + 1 > 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2 + 1 = 2^{k-1} - 1$ . Ta có

$$f''(0) = k(k-1)(n-1)^2 n^{k-2} - 2n(n-1)r > k(k-1)(n-1)^2 n^{k-2} - 2n^k \geq \\ \geq 6(n-1)^2 n^{k-2} - 2n^k = 2n^{k-2}(2n^2 - 6n + 3) > 0$$

$$\text{Và } \frac{f'(1)}{n(n-1)} = k(k-1) - 2r < k(k-1) - 2(2^{k-1} - 1) = k^2 - k + 2 - 2^k < 0$$

Thì suy ra tồn tại  $x_1 \in (0,1)$  thỏa mãn  $f''(x_1) = 0$ ,  $f''(x) > 0$  với  $x \in [0, x_1)$  và  $f''(x) < 0$  với  $x \in (x_1, 1]$ . Vì vậy, đạo hàm cấp 1  $f'$  tăng nghiêm ngặt trên  $[0, x_1]$  và giảm nghiêm ngặt trên  $[x_1, 1]$ .

$$\text{Do } \frac{f'(0)}{n} = 2(n-1)r - k(n-1)n^{k-2} < 2n^{k-1} - k(n-1)n^{k-2} = \\ = -n^{k-2}[k(n-1) - 2n] \leq -n^{k-2}[3(n-1) - 2n] = -n^{k-2}(n-3) \leq 0$$

Và  $f'(1) = 0$ , tồn tại  $x_2 \in (0,1)$  thỏa mãn  $f'(x_2) = 0$ ,  $f'(x) < 0$  với  $x \in (0, x_2)$  và  $f'(x) > 0$  với  $x \in (x_2, 1]$ . Bởi vậy, hàm  $f$  giảm nghiêm ngặt trên  $[0, x_2]$  và tăng nghiêm ngặt trên  $[x_2, 1]$ . Mà  $f(0) = f(1) = 0$ , suy ra  $f(x) \leq 0$  với  $x \in [0, 1]$ . Chứng minh hoàn tất. Bất đẳng thức xảy ra khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , hoặc khi  $n-1$  số  $x_i$  bằng 0.

**Bài 21.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dương thì

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n + n(n-1)x_1x_2\dots x_n \geq x_1x_2\dots x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

### Chứng minh

Với  $n=2$ , ta có bất đẳng thức. Với  $n \geq 3$ , giả sử rằng  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=0$ )

• Nếu  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và  $x_1x_2\dots x_n = \text{constant}$

thì tổng  $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$  nhỏ nhất và tổng  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$  lớn nhất khi

$$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n.$$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức thuần nhất với  $0 < x_1 < 1$  và

$$x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1. \text{ Khi đó bất đẳng thức trở thành } x_1^n + (n-2)x_1 \geq (n-1)x_1^2,$$

$$\text{Hay } x_1(x_1 - 1)[(x_1^{n-2} - 1) + (x_1^{n-3} - 1) + \dots + (x_1 - 1)] \geq 0, \text{ điều này hiển nhiên đúng}$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Ghi chú.** Với  $n=3$ , ta nhận được bất đẳng thức Schur cấp 3,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 \geq (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

**Bài 22. [MSC-Hungary]** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thì

$$(n-1)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) + nx_1 x_2 \dots x_n \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})$$

### Chứng minh

Với  $n=2$ , ta có đẳng thức. Với  $n \geq 3$  giả sử rằng  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

và áp dụng hệ quả 5 (trường hợp  $p=n$  và  $q=n-1$ ) và Hệ quả 4 (trường hợp  $p=n$ ):

• Nếu  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và

$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = \text{constant}$  thì tổng  $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}$  nhỏ nhất và tích  $x_1 x_2 \dots x_n$  lớn nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

Vì vậy, chỉ cần chứng minh cho các trường hợp  $x_1 = 0$  và  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

• Trường hợp  $x_1 = 0$ . Bất đẳng thức quy về

$$(n-1)(x_2^n + \dots + x_n^n) \geq (x_2 + \dots + x_n)(x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})$$

Điều này thu được từ bất đẳng thức **Chebyshev**.

• Trường hợp  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ . Đặt  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$ , bất đẳng thức thuần nhất quy về  $(n-2)x_1^n + x_1 \geq (n-1)x_1^{n-1}$

Viết lại bất đẳng thức này dưới dạng

$$x_1(x_1 - 1) \left[ x_1^{n-3}(x_1 - 1) + x_1^{n-4}(x_1^2 - 1) + \dots + (x_1^{n-2} - 1) \right] \geq 0$$

Ta nhận thấy điều này hiển nhiên đúng. Với  $n \geq 3$  và  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , đẳng thức xảy ra khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , và khi  $x_2 = \dots = x_n$ .

**Bài 23.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thì

$$(n-1)(x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1}) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n - x_1 x_2 \dots x_n)$$

### Chứng minh

Với  $n=2$ , ta có đẳng thức. Với  $n \geq 3$ , giả sử rằng  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=n+1$  và  $q=n$ ) và Hệ quả 4 (trường hợp  $p=n+1$ ):

• Nếu  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và

$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} = \text{constant}$  thì tổng  $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$  nhỏ nhất và tích  $x_1 x_2 \dots x_n$  là lớn nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

Vì vậy, chỉ cần xét các trường hợp  $x_1 = 0$  và  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

Trường hợp  $x_1 = 0$ . Bất đẳng thức quy về

$$(n-1)(x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1}) \geq (x_2 + \dots + x_n)(x_2^n + \dots + x_n^n)$$



Điều này thu được từ bất đẳng thức Chebyshev.

Trường hợp  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ . Giả sử  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$ , bất đẳng thức thuần nhất quy về  $(n-2)x_1^{n+1} + x_1^2 \geq (n-1)x_1^n$

Viết lại bất đẳng thức này dưới dạng

$$x_1(x_1 - 1) \left[ x_1^{n-3}(x_1 - 1) + x_1^{n-4}(x_1^2 - 1) + \dots + (x_1^{n-2} - 1) \right] \geq 0$$

Ta nhận thấy điều này hiển nhiên đúng. Với  $n \geq 3$  và  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , đẳng thức xảy ra khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , hoặc khi  $x_1 = 0$  và  $x_2 = \dots = x_n$  và các hoán vị.

**Ghi chú 1.** Ta có thể viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng:

- Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n - 1$

thì  $x_1^n(1 - x_1) + x_2^n(1 - x_2) + \dots + x_n^n(1 - x_n) \leq x_1 x_2 \dots x_n$

**Ghi chú 2.** Gjergji Zaimi và Keler Marku đã mở rộng các bất đẳng thức trên với mọi số thực  $k$  dưới dạng sau đây:

$$(n-1)(x_1^{n+k} + x_2^{n+k} + \dots + x_n^{n+k}) + x_1 x_2 \dots x_n (x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \dots + x_n^{n+k-1})$$

**Bài 24.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thì

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} - n \right) + x_1 x_2 \dots x_n + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq 2$$

### Chứng minh

Với  $n=2$ , bất đẳng thức quy về  $\frac{(1-x_1)^2(1-x_2)^2}{x_1 x_2} \geq 0$

Với  $n \geq 3$ , giả sử rằng  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Do bất đẳng thức không thay đổi khi thay thế mỗi biến  $x_i$  bởi  $\frac{1}{x_i}$ , ta có thể giả sử  $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta

nhận được  $x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} - n \geq 0$

Và vì vậy ta có thể áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=0$  và  $q=-1$ ):

- Nếu  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và  $x_1 x_2 \dots x_n = \text{constant}$

thì tổng  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$  nhỏ nhất và khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ .

Áp dụng mệnh đề, chỉ cần xét trường hợp  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x$  và  $x_n = y$

Khi đó bất đẳng thức quy về  $\left[ (n-1)x + y - n \right] \left( \frac{n-1}{x} + \frac{1}{y} - n \right) + x^{n-1}y + \frac{1}{x^{n-1}y} \geq 2$



$$\text{Hay } \left(x^{n-1} + \frac{n-1}{x} - n\right)y + \left[\frac{1}{x^{n-1}} + (n-1)x - n\right]\frac{1}{y} \geq \frac{n(n-1)(x-1)^2}{x}$$

$$\text{Do } x^{n-1} + \frac{n-1}{x} - n = \frac{x-1}{n} [(x^{n-1}-1) + (x^{n-2}-1) + \dots + (x-1)] = \frac{(x-1)^2}{x} [x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + (n-1)]$$

$$\text{Và } \frac{1}{x^{n-1}} + (n-1)x - n = \frac{(x-1)^2}{x} \left[\frac{1}{x^{n-2}} + \frac{2}{x^{n-3}} + \dots + (n-1)\right]$$

Chỉ cần chứng minh rằng

$$[x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + (n-1)]y + \left[\frac{1}{x^{n-2}} + \frac{2}{x^{n-3}} + \dots + (n-1)\right]\frac{1}{y} \geq n(n-1)$$

Bất đẳng thức này

$$\Leftrightarrow \left(x^{n-2}y + \frac{1}{x^{n-2}y} - 2\right) + 2\left(x^{n-3}y + \frac{1}{x^{n-3}y} - 2\right) + \dots + (n-1)\left(y + \frac{1}{y} - 2\right) \geq 0$$

$$\text{Hay } \frac{(x^{n-2}y-1)^2}{x^{n-2}y} + \frac{2(x^{n-3}y-1)^2}{x^{n-3}y} + \dots + \frac{(n-1)(y-1)^2}{y} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $n-1$  biến  $x_i$  bằng 1

**Bài 25.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thỏa mãn  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$  thì

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} - n}} \right| < 1$$

### Chứng minh

$$\text{Đặt } A = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \text{ và } B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} - n$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, dễ thấy A và B dương. Sử dụng bài trước, bất đẳng thức sau đây đúng với mọi số dương  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - n - 1) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n+1}} - n - 1 \right) + x_1 x_2 \dots x_{n+1} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \geq 2$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(A - 1 + x_{n+1}) \left( B - 1 + \frac{1}{x_{n+1}} \right) + x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \geq 2 \text{ hay } \frac{A}{x_{n+1}} + B x_{n+1} + AB - A - B \geq 0$$

Thay  $x_{n+1}$  bởi  $\sqrt{\frac{A}{B}}$ , dẫn tới

$$2\sqrt{AB} + AB - A - B \geq 0 \Leftrightarrow AB \geq (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \Leftrightarrow 1 \geq \left( \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}} \right)^2 \Leftrightarrow 1 \geq \left| \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}} \right|$$

Bất đẳng thức cuối cùng chính là điều ta mong muốn.

**Bài 26.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số không âm thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$  thì

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{\sqrt{n}-1}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq n$$

### Chứng minh

Với  $n=2$ , bất đẳng thức quy về  $2(x_1x_2-1)^2 \geq 0$ . Với  $n \geq 3$ , giả sử rằng

$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và áp dụng Hệ quả 4 (trường hợp  $p=2$ )

- Với  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$  và  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \text{constant}$

Tích  $x_1x_2 \dots x_n$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$

Bởi vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x$  và  $x_n = y$ , trong đó  $0 \leq x \leq 1 \leq y$  và  $(n-1)x + y = n$ . Trong mọi tình huống, bất đẳng thức quy về

$$x^{\sqrt{n-1}} y^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} [(n-1)x^2 + y^2] \leq n$$

Với  $x=0$ , bất đẳng thức này là tầm thường. Với  $x>0$ , nó tương đương với  $f(x) \leq 0$

trong đó  $f(x) = \sqrt{n-1} \ln x + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \ln y + \ln[(n-1)x^2 + y^2] - \ln n$ ,

Với  $y = n - (n-1)x$ . Ta có  $y' = -(n-1)$  và

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2\sqrt{n-1}(x-y)}{(n-1)x^2 + y^2} = \frac{(y-x)(x\sqrt{n-1}-y)^2}{xy[(n-1)x^2 + y^2]} \geq 0$$

Bởi vậy, hàm  $f(x)$  tăng nghiêm ngặt trên  $(0,1]$  và vì thế  $f(x) \leq f(1) = 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

**Ghi chú.** Với  $n=5$ , ta nhận được mệnh đề rất đẹp sau đây

- Nếu  $a, b, c, d$  là các số dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 5$  thì

$$abcde(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leq 5$$

**Bài 27.** Giả sử  $x, y, z$  là các số không âm thỏa mãn

$$xy + yz + zx = 3, p \geq \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 3} \approx 0.738, \text{ thì } x^p + y^p + z^p \geq 3$$

### Chứng minh

Giả sử  $r = \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 3}$ . Sử dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có

$$\frac{x^p + y^p + z^p}{3} \geq \left( \frac{x^r + y^r + z^r}{3} \right)^{\frac{p}{r}}. \text{ Vì vậy, chỉ cần chứng minh rằng } x^r + y^r + z^r \geq 3$$

Giả sử  $x \leq y \leq z$ . Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp  $x=0$ . Ta cần chứng minh rằng  $y^r + z^r \geq 3$  với  $yz=3$ . Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có  $y^r + z^r \geq 2(yz)^{\frac{r}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{r}{2}} = 3$

Trường hợp  $x>0$ . Bất đẳng thức  $x^r + y^r + z^r \geq 3$  tương đương với bất đẳng thức thuần nhất

$$x^r + y^r + z^r \geq 3 \left( \frac{xyz}{3} \right)^{\frac{r}{2}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^{\frac{r}{2}}. \text{ Đặt } x = a^{\frac{1}{r}}, y = b^{\frac{1}{r}}, z = c^{\frac{1}{r}} \text{ (} 0 < a \leq b \leq c \text{),}$$

bất đẳng thức trở thành  $a+b+c \geq 3\left(\frac{abc}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{-1}{r}}+b^{\frac{-1}{r}}+c^{\frac{-1}{r}}\right)^{\frac{r}{2}}$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=0$  và  $q=\frac{-1}{r}$ )

• Nếu  $0 < a \leq b \leq c$  thỏa mãn  $a+b+c =$  và  $abc = \text{constant}$  thì tổng  $a^{\frac{-1}{r}} + b^{\frac{-1}{r}} + c^{\frac{-1}{r}}$  lớn nhất khi  $0 < a \leq b = c$

Bởi vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $0 < a \leq b = c$ ; nghĩa là chứng minh bất đẳng thức thuần nhất theo  $x, y, z$  với  $0 < x \leq y = z = 1$ . Do đó bất đẳng thức quy về

$x^r + 2 \geq 3\left(\frac{2x+1}{3}\right)^{\frac{r}{2}}$ . Ký hiệu  $f(x) = \ln \frac{x^r+2}{3} - \frac{r}{2} \ln \frac{2x+1}{3}$ , ta cần chứng minh rằng

$$f(x) \geq 0 \text{ với } 0 < x \leq 1. \text{ Đạo hàm } f'(x) = \frac{rx^{r-1}}{x^r+2} - \frac{r}{2x+1} = \frac{r(x-2x^{1-r}+1)}{x^{1-r}(x^2+2)(2x+1)}$$

có cùng dấu với  $g(x) = x - 2x^{1-r} + 1$ . Do  $g'(x) < 0$  với  $x \in (0, x_1)$  và  $g'(x) > 0$  với

$x \in (x_1, 1]$ , trong đó  $x_1 = (2-2r)^{\frac{1}{r}} \approx 0.416$ . Hàm  $g(x)$  giảm nghiêm ngặt trên  $[0, x_1]$ , và

tăng nghiêm ngặt trên  $[x_1, 1]$ . Do  $g(0)=1$  và  $g(1)=0$ , tồn tại  $x_2 \in (0, 1)$  thỏa mãn

$g(x_2)=0, g(x) > 0$  với  $x \in [0, x_2)$  và  $g(x) < 0$  với  $x \in (x_2, 1)$ . Do đó, hàm  $f(x)$  tăng

nghiêm ngặt trên  $[0, x_2]$  và giảm nghiêm ngặt trên  $[x_2, 1]$ . Do  $f(0)=f(1)=0$ , ta có

$f(x) \geq 0$  với  $0 < x \leq 1$ , suy ra kết quả mong muốn.

Đẳng thức xảy ra với  $x=y=z=1$ . Hơn nữa, nếu  $p = \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 3}$  và  $x \leq y \leq z$ , đẳng thức còn xảy ra với  $x=0$  và  $y=z=\sqrt{3}$

**Bài 28.** Giả sử  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x+y+z=3$ ,  $p \geq \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 3 - \ln 2} \approx 0.29$  thì

$$x^p + y^p + z^p \geq xy + yz + zx$$

### Chứng minh

Với  $p \geq 1$ , sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$x^p + y^p + z^p \geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^p = 3 = \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geq xy + yz + zx$$

Bây giờ giả sử  $p < 1$ . Đặt  $r = \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 3 - \ln 2}$  và  $x \leq y \leq z$ . Bất đẳng thức tương đương với bất

$$\text{đẳng thức thuần nhất } 2(x^p + y^p + z^p)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{2-p} + x^2 + y^2 + z^2 \geq (x+y+z)^2$$

Sử dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $0 < p < 1$  và  $q=2$ ), với  $x \leq y \leq z$ , thỏa mãn

$x+y+z = \text{constant}$ , tổng  $x^2 + y^2 + z^2$  nhỏ nhất khi  $x=0$  hoặc  $0 < x \leq y = z$

$$\begin{aligned} y^p + z^p - yz &\geq 2(yz)^{\frac{p}{2}} - yz = (yz)^{\frac{p}{2}} \left[ 2 - (yz)^{\frac{2-p}{2}} \right] \geq \\ &\geq (yz)^{\frac{p}{2}} \left[ 2 - \left( \frac{y+z}{2} \right)^{2-p} \right] = (yz)^{\frac{p}{2}} \left[ 2 - \left( \frac{3}{2} \right)^{2-p} \right] \geq (yz)^{\frac{p}{2}} \left[ 2 - \left( \frac{3}{2} \right)^{2-p} \right] = 0 \end{aligned}$$

Trường hợp  $0 < x \leq y = z$ . Trong bất đẳng thức thuần nhất, ta bỏ đi điều kiện ràng buộc  $x + y + z = 3$ , và xét  $y = z = 1$ ,  $0 < x \leq 1$ .

Bất đẳng thức quy về  $(x^p + 2) \left( \frac{x+2}{3} \right)^{2-p} \geq 2x + 1$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta xét hàm  $f(x) = \ln(x^p + 1) + (2-p) \ln \frac{x+2}{3} - \ln(2x+1)$

Ta phải chứng minh rằng  $f(x) \geq 0$  với  $0 < x \leq 1$ . Ta có

$$f'(x) = \frac{px^{p-1}}{x^p + 2} + \frac{2-p}{x} - \frac{2}{2x+1} = \frac{2g(x)}{x^{1-p}(x^p + 1)(2x+1)}$$

Trong đó  $g(x) = x^2 + (2p-1)x + p + 2(1-p)x^{2-p} - (p+2)x^{1-p}$ .

Và  $g'(x) = 2x + 2p - 1 + 2(1-p)(2-p)x^{1-p} - (p+2)(1-p)x^{-p}$ ,  $g''(x)$

$$= 2 + 2(1-p)^2(2-p)x^{-p} + p(p+2)(1-p)x^{-p-1}$$

Do  $g''(x) > 0$ , đạo hàm cấp 1  $g'(x)$  tăng nghiêm ngặt trên  $(0, 1]$ . Lưu ý rằng

$g'(0_+) = -\infty$  và  $g'(1) = 3(1-p) + 3p^2 > 0$ , tồn tại  $x_1 \in (0, 1)$ , thỏa mãn

$g'(x_1) = 0$ ,  $g'(x) < 0$  với  $x \in (0, x_1)$  và  $g'(x) > 0$  với  $x \in (x_1, 1]$ . Bởi vậy, hàm  $g(x)$  giảm

nghiêm ngặt trên  $[0, x_1]$  và tăng nghiêm ngặt trên  $[x_1, 1]$ . Do  $g(0) = p > 0$  và  $g(1) = 0$ ,

tồn tại  $x_2 \in (0, x_1)$  thỏa mãn  $g(x_2) = 0$ ,  $g(x) > 0$  với  $x \in [0, x_2)$  và  $g(x) < 0$  với

$x \in (x_2, 1]$ . Ta cũng có  $f'(x_2) = 0$ ,  $f'(x) > 0$  với  $x \in (0, x_2)$  và  $f'(x) < 0$  với  $x \in (x_2, 1]$ .

Sử dụng kết quả này, hàm  $f(x)$  tăng nghiêm ngặt trên  $[0, x_2]$  và giảm nghiêm ngặt trên

$[x_2, 1]$ . Do  $f(0) = \ln 2 + (2-p) \ln \frac{2}{3} \geq \ln 2 + (2-r) \ln \frac{2}{3} = 0$

Và  $f(1) = 0$ , ta nhận được  $f(x) \geq \min\{f(0), f(1)\} \geq 0$

Đẳng thức xảy ra với  $x = y = z = 1$ . Hơn nữa, khi  $p = \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 3 - \ln 2}$  và  $x \leq y \leq z$ , đẳng thức

còn xảy ra khi  $x = 0$  và  $y = z = \frac{3}{2}$ .

**Bài 29.** Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 4$ ) là các số không âm thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$

$$\text{thì } \frac{1}{n+1-x_2x_3\dots x_n} + \frac{1}{n+1-x_3x_4\dots x_1} + \dots + \frac{1}{n+1-x_1x_2\dots x_{n-1}} \leq 1$$

### Chứng minh

Giả sử  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và  $e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có

$$x_2 \dots x_n \leq \left( \frac{x_2 + \dots + x_n}{n-1} \right)^{n-1} \leq \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n-1} \right)^{n-1} = e_{n-1}. \text{ Vì thế}$$

$n+1 - x_2 x_3 \dots x_n \geq n-1 - e_{n-1} > 0$  và tất cả các số hạng của bất đẳng thức đều dương.

Trường hợp  $x_1 = 0$ . Dễ dàng chứng minh rằng bất đẳng thức đúng.

Trường hợp  $x_1 > 0$ . Giả sử rằng  $x_1 x_2 \dots x_n = (n+1)r = \text{constant}$ ,  $r > 0$ .

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x_1}{x_1 - r} + \frac{x_2}{x_2 - r} + \dots + \frac{x_n}{x_n - r} \leq n+1 \text{ hay } \frac{1}{x_1 - r} + \frac{1}{x_2 - r} + \dots + \frac{1}{x_n - r} \leq \frac{1}{r}$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có } (n+1)r = x_1 x_2 \dots x_n \leq \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n = 1,$$

Trong đó  $r \leq \frac{1}{n+1}$ . Từ  $x_n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n = n < n+1 \leq \frac{1}{r}$  ta nhận được  $x_n \leq \frac{1}{r}$ .

Bởi vậy, ta có  $r < x_i < \frac{1}{r}$  với tất cả các biến  $x_i$ .

Bây giờ ta sẽ áp dụng Hệ quả 3 cho hàm  $f(u) = \frac{-1}{u-r}$ ,  $u > r$ . Ta có  $f'(u) = \frac{1}{(u-r)^2}$  và

$$g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{(1-rx)^2}, \quad g''(x) = \frac{4rx+2}{(1-rx)^4}$$

Do  $g''(x) > 0$ ,  $g(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $\left[0, \frac{1}{r}\right]$ . Áp dụng Hệ quả 3 và Ghi chú từ mục

5.1, nếu  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{constant}$  và

$x_1 x_2 \dots x_n = \text{constant}$ , thì tổng  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  nhỏ nhất khi

$x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ . Vì vậy, để chứng minh bất đẳng thức ban đầu, chỉ cần xét trường

hợp  $x_1 = x$  và  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = y$ , trong đó  $0 < x \leq 1 \leq y$  và  $x + (n-1)y = n$ . Phần còn lại của chứng minh dành cho bạn đọc.

**Bài 30.** Giả sử  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1$$

### Chứng minh

Ký hiệu  $x = \frac{1}{1+a}$ ,  $y = \frac{1}{1+b}$ ,  $z = \frac{1}{1+c}$ ,  $S = x + y + z$  và  $Q = x^2 + y^2 + z^2$ , trong đó

$0 < x, y, z < 1$ . Giả thiết  $abc = 1$  trở thành  $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ , nghĩa là

$4xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 1 + (x+y+z-1)^2$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geq 1, \text{ nghĩa là } (x+y+z-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

Bằng phản chứng, giả sử  $(x+y+z-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2 < 1$ . Chỉ cần chứng minh rằng

$4xyz + x^2 + y^2 + z^2 < 1 + (x+y+z-1)^2$ . Áp dụng Hệ quả 4 (trường hợp  $p=2$ ), nếu  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn  $x+y+z=\text{constant}$  và  $x^2+y^2+z^2=\text{constant}$  thì tích  $xyz$  lớn nhất khi  $0 < x=y \leq z$ . Bởi vậy, chỉ cần xét trường hợp  $x=y$ . Ta cần chứng minh rằng  $(2x+z-1)^2 + 2x^2 + z^2 < 1$ , dẫn tới  $4x^2z + 2x^2 + z^2 < 1 + (2x+z-1)^2$ . Giả thiết phản chứng, nghĩa là  $4x^2z + 2x^2 + z^2 \geq 1 + (2x+z-1)^2$ , hay  $z \geq \frac{(x-1)^2}{x^2 + (x-1)^2}$ , chỉ cần chứng

minh rằng  $(2x+z-1)^2 + 2x^2 + z^2 \geq 1$ . Do

$$2x+z-1 \geq 2x + \frac{(x-1)^2}{x^2 + (x-1)^2} - 1 = \frac{x(4x^2 - 5x + 2)}{2x^2 - 2x + 1} > 0$$

Chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với  $z = \frac{(x-1)^2}{x^2 + (x-1)^2}$  là đủ.

Ta có  $z^2 - 1 = \frac{-x^2(3x^2 - 4x + 2)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$  và vì thế

$$\begin{aligned} (2x+z-1)^2 + 2x^2 + z^2 - 1 &= \frac{x^2(4x^2 - 5x + 2)^2}{(2x^2 - 2x + 1)^2} + 2x^2 - \frac{x^2(3x^2 - 4x + 2)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2(12x^4 - 28x^3 + 27x^2 - 12x + 2)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2x^2(2x-1)^2(3x^2 - 4x + 2)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức trong bất đẳng thức ban đầu xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$

**Bài 31.** Giả sử  $a, b, c$  là các số không âm thỏa mãn  $a+b+c \geq 2$  và  $ab+bc+ca \geq 1$ .

Nếu  $0 < r < 1$  thì  $a^r + b^r + c^r \geq 2$ .

### Chứng minh

Ta có thể viết điều kiện thứ hai dưới dạng  $(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 2$

Ta sẽ áp dụng Hệ quả 1 cho hàm lồi  $f(u) = u^r$ : Nếu  $0 \leq a \leq b \leq c$  thỏa mãn

$a+b+c=\text{constant}$  và  $a^2+b^2+c^2=\text{constant}$ , thì tổng  $f(a)+f(b)+f(c)$  lớn nhất với hoặc  $a=0$  hoặc  $0 < a \leq b=c$

Trường hợp  $a=0$ . Từ  $ab+bc+ca \geq 1$  ta nhận được  $bc \geq 1$ . Do đó

$$a^r + b^r + c^r = b^r + c^r \geq 2\sqrt{b^r c^r} \geq 2$$

Trường hợp  $0 < a \leq b=c$ . Nếu  $c \geq 1$  thì  $a^r + b^r + c^r = a^r + 2c^r \geq 2c^r \geq 2$

Nếu  $c < 1$  thì  $0 < a \leq b=c < 1$  và vì thế  $a^r + b^r + c^r = a + b + c \geq 2$

Với  $a \leq b \leq c$ , bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức khi và chỉ khi  $a=0$  và  $b=c=1$

**Bài 32. [Vietnam MO 2004]**

Giả sử  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $(a+b+c)^3 = 32abc$ .

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $E = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4}$

**Chứng minh**

Ta sẽ áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp  $p=0, q=4$ ):

- Nếu  $0 < a \leq b \leq c$  thỏa mãn  $a+b+c = \text{constant}$  và  $abc = \text{constant}$ , thì tổng  $a^4 + b^4 + c^4$  nhỏ nhất khi  $0 < a \leq b = c$  và lớn nhất khi  $0 < a = b \leq c$

Do tính thuần nhất,  $E$  nhỏ nhất với  $0 < a \leq b = c = 1$  và  $(a+2)^3 = 32a$  và lớn nhất với  $a = b = 1 \leq c$  và  $(c+2)^3 = 32c$ . Do phương trình  $(x+2)^3 = 32x$  có nghiệm 2 và  $-4 \pm 2\sqrt{5}$ , chứng tỏ  $E$  nhỏ nhất với  $(a, b, c) \sim (2\sqrt{5} - 4, 1, 1)$  hoặc các hoán vị vòng và lớn nhất với  $(a, b, c) \sim (1, 2, 2)$  hoặc các hoán vị vòng. Các giá trị cực trị của  $E$  là  $\frac{383 - 165\sqrt{5}}{256}$  và  $\frac{9}{128}$ , tương ứng.

**Bài 33.** Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm thỏa mãn  $\sum x_i = 1$ 

Nếu  $m \in \{3, 4, \dots, n\}$  thì  $1 + \frac{3m}{m-2} \sum x_1 x_2 x_3 \geq \frac{3m-1}{m-1} \sum x_1 x_2$

**Chứng minh**

(Dựa theo ý tưởng của *Yuan Shyong Ooi*).

Do  $2 \sum x_1 x_2 = (\sum x_i)^2 - \sum x_i^2$ , ta có thể áp dụng Hệ quả 6 (trường hợp  $p=2$ )

- Với  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn  $\sum x_i = 1$  và  $\sum x_i^2 = \text{constant}$ , tổng  $\sum x_1 x_2 x_3$  nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$  trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,

$x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x = x_{k+1} \leq x_{k+2} = \dots = x_n = y$ . Mặt khác, sử dụng

$$(\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 + 2 \sum x_1 x_2 \quad \text{và} \quad (\sum x_i)^3 = \sum x_i^3 + 3(\sum x_i)(\sum x_1 x_2) - 3 \sum x_1 x_2 x_3,$$

ta nhận được  $2 \sum x_1 x_2 = 1 - \sum x_i^2$  và  $6 \sum x_1 x_2 x_3 = 1 - 3 \sum x_i^2 + 2 \sum x_i^3$

Bởi vậy, bất đẳng thức trở thành  $1 + m(m-1) \sum x_i^3 \geq (2m-1) \sum x_i^2$

hay  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq 0$  trong đó  $f(t) = t(1-mt)[1-(m-1)t]$

Ta cần chứng minh rằng  $f(x) + (n+k-1)f(y) \geq 0$  với

$$x + (n-k-1)y = 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq x \leq \frac{1}{n-k}.$$

Từ  $f''(t) = 6m(m-1)t - 2(2m-1)$ , chứng tỏ rằng  $f$  lồi với  $t \geq \frac{2m-1}{3m(m-1)}$

a. Trường hợp  $x \geq \frac{2m-1}{3m(m-1)}$ . Sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$f(x) + (n-k-1)f(y) \geq (n-k)f\left(\frac{x+(n-k-1)y}{n-k}\right) = (n-k)f\left(\frac{1}{n-k}\right) = \frac{(k-n+m)(k-n+m-1)}{(n-k)^2} \geq 0,$$

Bởi vì  $(k-n+m)$  là số nguyên

b. Trường hợp  $x < \frac{2m-1}{3m(m-1)}$ .

Do  $1-mx > 1 - \frac{2m-1}{3(m-1)} = \frac{m-2}{3(m-1)} > 0$ , ta có  $f(x) = x(1-mx)[1-(m-1)x] \geq 0$

Xét 3 trường hợp theo chỉ số  $k$ :

**Trường hợp**  $k \leq n-m-1$ .

Do  $1-my = 1 - \frac{m(1-x)}{n-k-1} \geq 1 - (1-x) = x \geq 0$ , ta có  $f(y) = y(1-my)[1-(m-1)y] \geq 0$ ,

và vì thế  $f(x) + (n-k-1)f(y) \geq 0$

**Trường hợp**  $k \geq n-m+1$ .

Do  $(m-1)y - 1 = \frac{(m-1)(1-x)}{n-k-1} - 1 \geq \frac{(m-1)(1-x)}{m-2} - 1 = \frac{1}{m-2} - \frac{(m-1)x}{m-2}$   
 $> \frac{1}{m-2} - \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{2m-1}{3m(m-1)} = \frac{m+1}{3m(m-2)} > 0$ , ta có  $f(y) = y(my-1)[(m-1)y-1] > 0$ ,

và vì thế  $f(x) + (n-k-1)f(y) \geq 0$

**Trường hợp**  $k = n-m$ :

Ta có  $x + (m-1)y = 1$ ,  $f(y) = y(my-1)[(m-1)y-1] = \frac{x(x-1)(1-mx)}{(m-1)^2}$  và

$$f(x) + (n-k-1)f(y) = f(x) + (m-1)f(y) = x(1-mx)[1-(m-1)x] + \frac{x(x-1)(1-mx)}{m-1} = \frac{(m-2)x(1-mx)^2}{m-1} \geq 0.$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra nếu  $m$  hoặc  $m-1$  số trong các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bằng nhau và các số còn lại bằng 0.

**Bài 34.** Giả sử  $x, y, z, t$  là các số thực không âm  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + xyz + yzt + ztx + txy \leq 1$$

### Chứng minh

Giả sử rằng  $x \leq y \leq z \leq t$  và áp dụng Hệ quả 7:

• Với  $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$  và  $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = \text{constant}$

biểu thức  $xyz + yzt + ztx + txy$  lớn nhất khi  $0 \leq x = y = z \leq t$ .



Do đó, ta cần chứng minh rằng  $4x^3 + t^3 + 3x^2t \leq 1$  với  $3x^2 + t^2 = 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \leq t$ .

Xét  $f(x) = 4x^3 + t^3 + 3x^2t$ . Do đó  $t' = \frac{-3x}{t}$ , ta có

$$f'(x) = 12x^2 + 3(t^2 + x^2)t' + 6xt = \frac{3x(t-x)(3x-t)}{t} = \frac{3x(t-x)(12x^2-1)}{t(3x+t)}$$

Do  $f'(x) < 0$  với  $x \in \left(0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ,  $f'\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 0$  và  $f'(x) > 0$  với  $x \in \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ , hàm  $f(x)$

giảm nghiêm ngặt trên  $\left[0, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$  và tăng nghiêm ngặt trên  $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right]$ . Bởi vậy,

$f(x) \leq \max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ . Do  $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ , ta nhận được  $f(x) \leq 1$ , là điều mong muốn.

Đẳng thức xảy ra với  $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , và với  $(x, y, z, t) = (1, 0, 0, 0)$  hoặc các hoán vị của nó.

**Ghi chú:** Tương tự, ta có thể chứng minh mệnh đề tổng quát hơn dưới đây:

Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm thỏa mãn  $\sum x_i^2 = 1$  thì

$$\sum x_i^3 + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)} \sum x_1 x_2 x_3 \leq 1 \quad (\text{Vasile Cirtoaje, MS, 2006})$$

## §22. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRI (DIVIDE AND CONQUER)

### I. TƯ TƯỞNG CHÍNH

Các bạn thân mến, về mặt lý thuyết thì rõ ràng để chứng minh một bất đẳng thức thuộc loại "chặt chẽ" (tức dấu đẳng thức có thể xảy ra) thì khó hơn một bất đẳng thức thực sự, vì nếu ta đánh giá không hợp lý thì dấu bằng không thể xảy ra và do đó phép chứng minh chần chẫn sẽ không đưa tới thành công. Sở dĩ ta gặp khó khăn đó là vì mong muốn có một đánh giá cho toàn cục (trên cả miền giá trị của các biến). Do đó, khi gặp những biểu thức biến thiên phức tạp thì sẽ rất khó khăn: một đánh giá có thể tốt cho trường hợp này nhưng lại không tốt cho trường hợp khác. Khó khăn này thường xuất hiện khi dấu đẳng thức xảy ra nhiều hơn một chỗ, chẳng hạn:

**1. Ví dụ 1.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x + y + z = 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

hoặc thậm chí khi dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một chỗ nhưng bất đẳng thức là quá chặt, chẳng hạn:

**2. Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c$  thì:

$$\frac{a^7}{a^6+b^6} + \frac{b^7}{b^6+c^6} + \frac{c^7}{c^6+a^6} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Đây là hai bài toán khó, thậm chí rất khó, và chúng sẽ được giải quyết ở cuối chương. Một trong những cách đơn giản nhất để khắc phục khó khăn là chia miền làm việc thành nhiều miền con, mà mỗi miền tương đối đơn giản để có thể xử lý nhẹ nhàng. Nói một cách nôm na, thay vì làm một việc rất khó để nhận 100 đồng, ta nhận làm 10 việc dễ, mỗi việc chỉ cần 20 đồng, thì vẫn hiệu quả hơn. Như vậy, tư tưởng của chúng ta khi tấn công một bài toán bất đẳng thức có thể tóm tắt như sau:

- **Bước 1:** Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta sẽ gọi là các điểm "nhảy cảm"), khoanh vùng chúng lại và xét riêng ra. Như vậy ta chỉ còn phải làm việc với các bất đẳng thức thực sự.

- **Bước 2:** Tiếp tục chia miền xác định của các biến thành các trường hợp con để đơn giản hóa các bất đẳng thức thực sự này và giải quyết chúng.

Chúng ta hãy xét một ví dụ để hình dung tư tưởng này.

**3. Ví dụ 3:** Cho các số thực  $x, y, z$  có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{9}{10} \quad (1)$$

#### Chứng minh

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 1$ . Nhiệm vụ đầu tiên là tách li điểm nhảy cảm này. Xét  $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$  thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\text{với bất đẳng thức } f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \quad (2)$$

Ta có:  $f''(t) = \frac{27(3-t^2)}{(1+t^2)^3} \leq 0, \forall t \in [0, \sqrt{3}]$  nên hàm  $f$  lõm trên  $[0, \sqrt{3}]$ .

Do đó nếu  $x, y, z \in [0, \sqrt{3}]$  thì theo bất đẳng thức Jensen (2) đúng nên (1) đúng.

Đến đây điểm nhạy cảm đã được tách li. Phần còn lại ta chỉ phải chứng minh bất đẳng thức thực sự. Để giải quyết, chỉ cần chia thành nhiều trường hợp.

Giả sử  $x \geq y \geq z$ . Nếu  $z \geq 0$  thì  $x, y, z \in [0, 1] \subset [0, \sqrt{3}]$  nên (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

Do đó ta chỉ phải xét khi  $z < 0$ . Xét các khả năng sau đây:

Xét  $y < \frac{1}{2}$ : Ta có:  $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} < \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 0 = \frac{9}{10} \Rightarrow$  (1) đúng

Xét  $y \geq \frac{1}{2}$  và  $0 \geq z \geq -\frac{1}{2}$  ta có:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{x}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{4}{5}z = \frac{4}{5} < \frac{9}{10} \Rightarrow (1) \text{ đúng}$$

Xét  $y \geq \frac{1}{2}$  và  $-\frac{1}{2} > z > -3$ : Ta có:  $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$

Xét  $y \geq \frac{1}{2}$  và  $z < -3$ : Ta có:  $2x \geq x+y = 1-z \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$ . Khi đó:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} < \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{9}{10}. \text{ Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn.}$$

Thông thường với các bài toán đơn giản như trên thì các bất đẳng thức thực sự mà ta nhận được sau bước 1 khá dễ để chứng minh. Nhưng đối với các bài toán khó thì các bất đẳng thức thực sự này cũng không hề đơn giản. Trong hai mục tiếp theo chúng ta sẽ làm quen với một cách giải quyết các bất đẳng thức thực sự. Tư tưởng vẫn là chia để trị:

- **Bước 2a:** (chuẩn bị) Biến đổi, chuẩn hóa bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp.
- **Bước 2b:** (dứt điểm) Băm nhỏ theo từng biến để xử lý.

Trong bước 1 thì tùy theo từng bài toán cụ thể mà chúng ta sẽ phải đề ra những chiến lược "tấn công" hợp lý (các bạn sẽ thấy điều này qua các ví dụ ở phần áp dụng). Bước 2 là một bước khó nếu các bạn chưa được làm quen, tuy nhiên sau khi đọc xong phần lý thuyết dưới đây chắc chắn các bạn sẽ đồng ý với chúng tôi rằng: đây mới chính là bước dễ nhất, bởi có thể thực hiện một cách nhanh chóng mà không phải "động não" nhiều. Bây giờ là lúc chúng ta cùng xem xét làm thế nào để giải quyết các bất đẳng thức thực sự.

## II. BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ MỘT BIẾN SỐ

Giả sử chúng ta cần chứng minh một bất đẳng thức dạng  $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ . Có lẽ ý niệm đầu tiên các bạn nghĩ đến là sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm số. Tuy nhiên các bạn thử hình dung nếu ta phải chứng minh khoảng vài chục bất đẳng thức như vậy, trong vòng vài tiếng đồng hồ – quả là một công việc hết sức mệt mỏi (và khi mệt mỏi thì tính toán rất dễ nhầm lẫn).

Khi hàm  $f$  là liên tục (điều kiện này rất phổ biến), ta có thể xử lý đơn giản. Sau đây là một định lý có vai trò hết sức quan trọng trong phương pháp chia để trị.

**1. Định lý 1:** Cho  $f(x, y)$  là hàm liên tục từ  $[a, b] \times [a, b]$  vào  $\mathbb{R}$ , tăng theo biến  $x$  và giảm theo biến  $y$ . Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i)  $f(x, x) > 0$ , với mọi  $x$  thuộc  $[a, b]$

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m+1} = b$  sao cho:

$$f(x_n, x_{n+1}) > 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots, m$$

### Chứng minh

(ii) suy ra (i). Xét  $x \in [a, b]$  bất kì thì tồn tại  $0 \leq n \leq m$  sao cho  $x \in [x_n, x_{n+1}]$

Khi đó:  $f(x, x) \geq f(x_n, x) \geq f(x_n, x_{n+1}) > 0$

(i) suy ra (ii): Xét tập hợp  $A$  gồm tất cả các giá trị  $z \in [a, b]$  sao cho: tồn tại dãy hữu hạn tăng  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = z$  và  $f(x_n, x_{n+1}) > 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots, m$ .

Dễ thấy rằng  $A$  có tính chất "nối dài", tức là nếu  $z \in A$  thì mọi số trong  $[a, z]$  cũng thuộc  $A$ . Ta thấy  $A$  khác rỗng (ít ra nó chứa  $a$ ), và  $A$  bị chặn, nên tồn tại  $z = \sup(A)$  (chặn trên nhỏ nhất của  $A$ ).

Nếu  $z < b$  thì vì  $f(z, z) > 0$  và tính liên tục của  $f$  nên tồn tại  $z_1 \in A$  (đủ gần  $z$ ) và  $z_2 \in (z, b)$  sao cho  $f(z_1, z_2) > 0$ . Khi đó, ta lấy dãy  $x_n$  tương ứng của  $z_1$  và bổ sung thêm  $x_{m+2} = z_2$  để suy ra  $z_2 \in A$ , và nhận được mâu thuẫn.

Vậy  $b = \sup(A)$ . Ta chứng minh  $b$  thuộc  $A$  nữa là xong. Tương tự như trên, vì  $f(b, b) > 0$  và  $f$  liên tục nên tồn tại  $b' \in A$  sao cho  $f(b', b) > 0$ . Ta lấy dãy  $x_n$  tương ứng của  $b'$  (vì  $b'$  thuộc  $A$ ) và bổ sung thêm  $x_{m+2} = b$  để suy ra  $b \in A$ .

### • Nhận xét:

a) "Nối dài" là một kỹ thuật rất cơ bản. Có lẽ nó là một minh họa cho câu: "một bước thì ngắn, nhưng nhiều bước hiệp lại thì ngàn dặm cũng không xa".

b) Phần chứng minh (i) suy ra (ii) khá dài nhưng các bạn không phải băn khoăn vì cái mà chúng ta sử dụng chỉ là (ii) suy ra (i), mà chứng minh nó đơn giản đến mức... hiển nhiên. Chúng tôi trình bày chiều ngược lại để giúp các bạn yên tâm rằng nó ở đây có một sự tương đương, nghĩa là con đường của chúng ta chắc chắn thành công nếu bất đẳng thức cần chứng minh ban đầu là đúng.

Với cách nhìn này thì tư tưởng chia để trị nổi lên rất rõ. Đó là thay vì chứng minh (i):  $f(x, x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , ta đưa về  $m + 1$  bài toán nhỏ:

**Chứng minh:**  $f(x, x) > 0$  với  $x \in [x_n, x_{n+1}]$ ,  $n = 0, \dots, m$ . Khi phân hoạch đoạn  $[a, b]$  đủ tốt (chọn dãy  $x_n$  thỏa (ii)) thì các bài toán nhỏ đúng một cách "hiển nhiên" vì  $f(x, x) \geq f(x_n, x_{n+1}) > 0$ .

Định lí trên còn có tên là “thuật toán cyclic”, đây là một thuật toán hết sức đơn giản nhưng đem lại những tính năng hiệu quả đến không ngờ. Để các bạn dễ tưởng tượng chúng tôi xin trình bày một số thí dụ để mô phỏng lại quá trình trên:

$$\text{2. Ví dụ 1: Chứng minh rằng: } f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2,5}{x^4 + x + 1}} + \sqrt{\frac{x^3}{x + 5}} + x^4 - 1,5 \geq 0, \forall x \geq 0,5$$

### Chứng minh

Nếu  $x \geq 1,2$  thì  $x^4 > 1,5$  nên hiển nhiên ta có điều phải chứng minh. Do đó ta chỉ cần xét khi  $x \in [0,5; 1,2]$ . (đây là một bước đơn giản nhưng cần thiết bởi Định lí 1 chỉ phát huy tác dụng khi  $x$  đã được đưa về một đoạn xác định nào đó).

$$\text{Đặt } f(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + 2,5}{b^4 + b + 1}} + \sqrt{\frac{a^3}{b + 5}} + a^4 - 1,5 \text{ với } b \geq a.$$

Vì  $f(a, b)$  đồng biến theo  $a$  và nghịch biến theo  $b$  nên nếu  $f(a, b) \geq 0$  thì  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Vấn đề của ta là chia đoạn  $[0,5; 1,2]$  thành các đoạn nhỏ  $[a, b]$  sao cho các đoạn nhỏ này quét hết đoạn  $[0,5; 1,2]$  là xong. Công đoạn này rất dễ dàng, xin đề xuất một cách:

$$f(0,5; 0,55) = \sqrt{\frac{(0,5)^2 + 2,5}{(0,55)^4 + 0,55 + 1}} + \sqrt{\frac{(0,5)^3}{0,55 + 5}} + (0,5)^4 - 1,5 > 0$$

$$f(0,55; 0,65) = \sqrt{\frac{(0,55)^2 + 2,5}{(0,65)^4 + 0,65 + 1}} + \sqrt{\frac{(0,55)^3}{0,65 + 5}} + (0,55)^4 - 1,5 > 0$$

$$f(0,65; 0,8) = \sqrt{\frac{(0,55)^2 + 2,5}{(0,8)^4 + 0,8 + 1}} + \sqrt{\frac{(0,65)^3}{0,8 + 5}} + (0,65)^4 - 1,5 > 0$$

$$f(0,8; 1,2) = \sqrt{\frac{(0,8)^2 + 2,5}{(1,2)^4 + 1,2 + 1}} + \sqrt{\frac{(0,8)^3}{1,2 + 5}} + (0,8)^4 - 1,5 > 0$$

Vậy bài toán được giải quyết.

#### • Nhận xét:

a) Về cách đặt hàm  $f(a, b)$  thì nói chung là có nhiều cách, tuy nhiên đơn giản nhất là làm như trên: Đặt  $a$  vào những chỗ  $x$  tăng và đặt  $b$  vào những chỗ  $x$  giảm (tất nhiên, một cách đặt tốt hơn tương ứng với một lời giải ngắn hơn). Với cách đặt đơn giản này thì hàm  $f$  là duy nhất, nên sau này ta sẽ luôn hiểu là hàm  $f$  được xây dựng như vậy nếu không có chú thích nào khác.

b) Các bạn có thể thắc mắc về sự xuất hiện các đoạn chia, chẳng hạn như  $[0,5; 0,55]$ ? Thực sự rất đơn giản, trong trường hợp này thì ta chỉ việc lấy một số lớn hơn 0,5 và thử trực tiếp (tất nhiên số này càng lớn càng tốt) cho đến khi nhận được kết quả đúng. Các bạn cũng có thể chia tốt hơn, chẳng hạn thay  $[0,5; 0,55]$  bằng  $[0,5; 0,56]$  (tuy nhiên nếu “tham lam” thay bằng  $[0,55; 0,57]$  thì sẽ không còn đúng nữa vì  $f(0,55; 0,57) < 0$ ). Trong VII, chúng ta sẽ trở lại vấn đề này bằng cách chỉ ra một cách chia “tối ưu”, theo

nghĩa số đoạn chia là ít nhất. Nhưng nói chung việc chia đoạn không cần quá chi li, chỉ cần đảm bảo tính vừa phải để từ từ đi đến thành công là được.

c) Ta thấy là đoạn ban đầu phải phải chia khá sát:  $[0,5; 0,55]$ , nhưng đến đoạn thứ hai:  $[0,55; 0,65]$  khoảng cách giữa hai biên đã xa hơn, và đoạn thứ ba:  $[0,65; 0,8]$  lại xa hơn đoạn hai, và đoạn cuối lại xa hơn nữa. Việc này nói lên điều gì? Muốn biết, các bạn thử khảo sát hàm này xem sao, các bạn sẽ thấy  $f(x)$  đồng biến trên  $[0,5; 1,2]$ , tức khi  $x$  càng lớn thì bất đẳng thức càng lỏng. Như vậy cách làm của ta còn cho biết được bài toán mạnh và yếu ở chỗ nào!

**3. Ví dụ 2:** Cho  $x \geq 0$ . Kiểm tra xem bất đẳng thức sau đúng hay sai

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2,5}{x^4 + x + 1}} + \sqrt{\frac{x^3}{x + 5}} + x^4 - 1,5 \geq 0 \quad (*)$$

**Giải**

Trước hết ta lặp lại một số thủ tục

• Nếu  $x \geq 1,2$  hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

• Nếu  $x \in [0; 1,2]$ . Khi đó ta đặt  $f(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + 2,5}{b^4 + b + 1}} + \sqrt{\frac{a^3}{b + 5}} + a^4 - 1,5$  với  $b \geq a$ .

Để thấy  $f(0; 0,1) > 0$  suy ra  $f(x) > 0, \forall x \in [0; 0,1]$ . Ta xét thử bất đẳng thức  $f(0,1; 0,2) > 0$ , nhưng rất tiếc bất đẳng thức này sai, ta thử hạ xuống  $f(0,1; 0,15) > 0$  nhưng kể cả bất đẳng thức trên vẫn không đúng. Điều này báo hiệu điểm chẳng lành! Cuối cùng ta hạ xuống  $f(0,1; 0,13) > 0$  thì mới đúng. Ta lại khảo sát xem với  $b$  bằng bao nhiêu thì  $f(0,13; b) > 0$  rồi tiếp tục thực hiện quá trình này để thu được dãy sau:  $[0; 0,1]$ ,  $[0,1; 0,13]$ ,  $[0,13; 0,15]$ ,  $[0,15; 0,16]$ ...

Ta thấy dãy này càng ngày càng tăng một cách chậm chạp và có vẻ như nó sẽ không tới được con số 0,18. Vậy "khu vực" này có gì đặc biệt mà cách làm của ta không thể vượt qua? Nghi ngờ này khiến ta thử kiểm nghiệm bằng cách thay  $x = 0,18$  vào (\*) và vấn đề được lộ ra:  $f(0,18) < 0$ . Vậy nguyên nhân rất đơn giản: bất đẳng thức (\*) bị sai và phản ví dụ là  $x = 0,18$ .

Qua ví dụ trên các bạn có thể thấy được tính ưu việt của phương pháp này bởi nó không chỉ cho ta phép chứng minh đơn giản các bất đẳng thức đúng, mà thậm chí, nó còn phát hiện và chỉ giúp ta cả phản ví dụ cho những bất đẳng thức sai. Thật bất ngờ khi có một phương pháp có được tính năng đặc biệt như thế.

Sau này, để đơn giản, chúng ta sẽ chỉ cần nói ngắn gọn là "chia để trị" theo dãy  $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ . Khi đó, mặc định là hàm  $f$  được xây dựng theo lối đơn giản và đoạn  $[a, b]$  được chọn làm  $n$  đoạn con  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ . Chẳng hạn trong ví dụ 1 từ chỗ  $x \in [0,5; 1]$  trở về sau chỉ cần nói: "chia để trị" theo biến  $x$  nhờ dãy 0,5; 0,55; 0,65; 0,8; 1; 1,2.

**4. Ví dụ 3:** Cho  $x \in [0,5; 0,65]$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+3,1}{x^4-x+1}} + \frac{1}{(1+x)^4} - 2 \geq 0$$

### Chứng minh

Chia để trị bằng dãy sau: 0.55; 0.56; 0.57; 0.58; 0.59; 0.60; 0.61; 0.62; 0.63; 0.64; 0.65

Vì cách chia là không duy nhất nên các bạn cũng có thể tự mình thiết lập dãy mới, và chúng tôi nghĩ rằng như thế sẽ tốt hơn. Để kết thúc xin mời các bạn giải quyết một số bài tập sau:

**5. Bài 1.** Chứng minh rằng:  $\sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 > x+1, \forall x \in [0,1]$

**6. Bài 2.** Chứng minh rằng:  $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3.5 > 0, \forall x > 1$

**7. Bài 3.** Chứng minh rằng:  $1.3a + \frac{2}{a^6+1} > 2, \forall a \geq 1$

**8. Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{x^2}{2x-1} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} - 1.5 > 0, \forall x > \frac{1}{2}$

**9. Bài 5.** Kiểm tra bất đẳng thức  $\sqrt[3]{\frac{x^2+3,1}{x^4-x+1}} + \frac{1}{(1+x)^4} - 2 \geq 0$  với  $x \in [0; 0.65]$ .

### III. BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ HAI BIẾN SỐ

Xét bài toán chứng minh  $f(x, y) > 0, \forall x \in [a, b], y \in [c, d]$ . Tiếp nối ý ở II., ta mong muốn chia hình hộp  $[a, b] \times [c, d]$  thành các hình hộp con mà trên mỗi hình con thì bất đẳng thức sẽ đúng theo lối "hiển nhiên". Vấn đề là chia như thế nào? Rõ ràng nếu chia theo cả  $x$  và  $y$  thì sẽ rất phức tạp. Để đơn giản, không gì hơn là ta chỉ chia theo một biến rồi mới chia theo biến kia (điều này cũng giống như cắt bánh gatô, ban đầu ta cắt theo chiều ngang trước rồi mới cắt theo chiều dọc), và các bạn lưu ý rằng khi ta thực hiện như vậy cũng đồng nghĩa với việc biến một bài toán lớn hai chiều thành các bài toán nhỏ, mà mỗi bài toán nhỏ chỉ là bài toán một chiều, cái chúng ta đã được tìm hiểu trong II. Chẳng hạn chia theo biến  $y$  ta có:

**1. Định lý 2:** Cho  $f(x, y, z)$  là hàm liên tục trên  $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$  vào  $\mathbb{R}$ , tăng theo biến  $y$  và giảm theo biến  $z$ . Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i)  $f(x, y, y) > 0, \forall x \in [a, b], y \in [c, d]$ .

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng  $c = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{m+1} = d$  sao cho:

Với mọi  $n = 0, 1, \dots, m$  thì  $f(x, y_n, y_{n+1}) > 0, \forall x \in [a, b]$

### Chứng minh

(ii) suy ra (i): Xét  $y \in [c, d]$  bất kì thì tồn tại  $0 \leq n \leq m$  sao cho  $y \in [y_n, y_{n+1}]$ .

Khi đó:  $f(x, y, y) \geq f(x, y_n, y_{n+1}) > 0$

(i) suy ra (ii): Cũng dùng ý tưởng tương tự như Định lý 1 nhưng phức tạp hơn và chúng tôi không trình bày ở đây, vì chiều chúng ta cần sử dụng chỉ là (ii) suy ra (i).



Chiều thuận (i) suy ra (ii) giúp chúng ta khẳng định rằng cách làm này chắc chắn sẽ đi đến thành công, còn trong từng trường hợp cụ thể chúng ta có thể chứng minh một cách "ngây thơ" như sau:

**2. Ví dụ 1:** Cho  $a \in [1.5; 2]$  và  $b \in [1; 2]$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{2a+b} + \sqrt{\frac{b}{2b+a}} - 1 \geq 0$

**Chứng minh**

Ta có thể chia theo biến nào cũng được, chẳng hạn chia theo  $b$  để quy về bài toán một biến theo  $a$ . Đặt:  $f(a, y, z) = \frac{a^2}{2a+z} + \sqrt{\frac{y}{2z+a}} - 1$  với  $a \in [1.5; 2]$  và  $2 \geq y \geq z \geq 1$ .

Ta thấy  $f(a, y, z)$  đồng biến theo  $y$  và nghịch biến theo  $z$ , cho nên nếu  $f(a, y, z) > 0$  thì  $f(a, b, b) > 0$  với mọi  $b \in [y, z]$ . Ta lần lượt chứng minh các bất đẳng thức sau bằng phương pháp chia để trị theo biến  $a$  với các dãy tương ứng:

$$f(a; 1; 1.2) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.6; 1.8; 2)$$

$$f(a; 1.2; 1.5) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.55; 1.65; 1.8; 2)$$

$$f(a; 1.5; 1.8) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.54; 1.64; 1.8; 2)$$

$$f(a; 1.8; 2) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.55; 1.7; 2)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**\*Nhận xét:** Ta thấy hàm  $f$  cũng được xây dựng theo lối đơn giản: đặt  $y$  vào những chỗ  $b$  tăng và đặt  $z$  vào những chỗ  $b$  giảm. Cách xây dựng đơn giản này là duy nhất, do đó nếu nói: "chia để trị theo biến  $b$ " thì ta ngầm hiểu là với hàm  $f$  được xây dựng theo lối đó nếu không có chú thích gì khác.

**3. Ví dụ 2:** Cho  $z \in \left[\frac{1}{8}; 1\right]$  và  $x \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+z}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+zx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+x}} > 2\sqrt{2}$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } f(x, a, b) = \sqrt{\frac{x(x+1+a)}{x^2+b}} + \sqrt{\frac{x+1+a}{1+bx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+a)}{b^2+x}} \quad \text{với } x \geq 1 \text{ và } 1 \geq b \geq a \geq \frac{1}{8}$$

Ta thấy ngay  $f(x, a, b)$  đồng biến theo  $a$  và nghịch biến theo  $b$  nên nếu  $f(x, a, b) > 0$  thì  $f(x, z, z) > 0$  với mọi  $z \in [a, b]$ . Ta chứng minh lần lượt các bất đẳng thức sau:

$$f\left(x, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) > 0, f\left(x, \frac{3}{4}, 1\right) > 0$$

Chúng tôi sẽ trình bày kĩ trường hợp đầu tiên, các trường hợp còn lại các bạn chứng minh tương tự. Chia để trị cho  $x \in [1; +\infty)$  thì không được, nên ta phải thực hiện đánh giá để

$$\text{giải quyết trường hợp } x \text{ đủ lớn: } \sqrt{\frac{x\left(x+\frac{9}{8}\right)}{x^2+\frac{1}{7}}} > 1, \sqrt{\frac{\frac{1}{8}\left(x+1+\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{7}\right)^2+x}} \geq \sqrt{\frac{1}{8}}$$



Chiều thuận (i) suy ra (ii) giúp chúng ta khẳng định rằng cách làm này chắc chắn sẽ đi đến thành công, còn trong từng trường hợp cụ thể chúng ta có thể chứng minh một cách "ngây thơ" như sau:

**2. Ví dụ 1:** Cho  $a \in [1.5; 2]$  và  $b \in [1; 2]$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{2a+b} + \sqrt{\frac{b}{2b+a}} - 1 \geq 0$

**Chứng minh**

Ta có thể chia theo biến nào cũng được, chẳng hạn chia theo  $b$  để quy về bài toán một

biến theo  $a$ . Đặt:  $f(a, y, z) = \frac{a^2}{2a+z} + \sqrt{\frac{y}{2z+a}} - 1$  với  $a \in [1.5; 2]$  và  $2 \geq y \geq z \geq 1$ .

Ta thấy  $f(a, y, z)$  đồng biến theo  $y$  và nghịch biến theo  $z$ , cho nên nếu  $f(a, y, z) > 0$  thì  $f(a, b, b) > 0$  với mọi  $b \in [y, z]$ . Ta lần lượt chứng minh các bất đẳng thức sau bằng phương pháp chia để trị theo biến  $a$  với các dãy tương ứng:

$$f(a; 1; 1.2) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.6; 1.8; 2)$$

$$f(a; 1.2; 1.5) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.55; 1.65; 1.8; 2)$$

$$f(a; 1.5; 1.8) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.54; 1.64; 1.8; 2)$$

$$f(a; 1.8; 2) > 0 \quad \forall a \in [1.5; 2] \quad (\text{với dãy } 1.5; 1.55; 1.7; 2)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**\*Nhận xét:** Ta thấy hàm  $f$  cũng được xây dựng theo lối đơn giản: đặt  $y$  vào những chỗ  $b$  tăng và đặt  $z$  vào những chỗ  $b$  giảm. Cách xây dựng đơn giản này là duy nhất, do đó nếu nói: "chia để trị theo biến  $b$ " thì ta ngầm hiểu là với hàm  $f$  được xây dựng theo lối đó nếu không có chú thích gì khác.

**3. Ví dụ 2:** Cho  $z \in \left[\frac{1}{8}; 1\right]$  và  $x \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+z}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+zx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+x}} > 2\sqrt{2}$$

**Chứng minh**

Đặt  $f(x, a, b) = \sqrt{\frac{x(x+1+a)}{x^2+b}} + \sqrt{\frac{x+1+a}{1+bx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+a)}{b^2+x}}$  với  $x \geq 1$  và  $1 \geq b \geq a \geq \frac{1}{8}$

Ta thấy ngay  $f(x, a, b)$  đồng biến theo  $a$  và nghịch biến theo  $b$  nên nếu  $f(x, a, b) > 0$  thì  $f(x, z, z) > 0$  với mọi  $z \in [a, b]$ . Ta chứng minh lần lượt các bất đẳng thức sau:

$$f\left(x, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) > 0, f\left(x, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) > 0, f\left(x, \frac{3}{4}, 1\right) > 0$$

Chúng tôi sẽ trình bày kỹ trường hợp đầu tiên, các trường hợp còn lại các bạn chứng minh tương tự. Chia để trị cho  $x \in [1; +\infty)$  thì không được, nên ta phải thực hiện đánh giá để

giải quyết trường hợp  $x$  đủ lớn:  $\sqrt{\frac{x(x+\frac{9}{8})}{x^2+\frac{1}{7}}} > 1, \sqrt{\frac{\frac{1}{8}(x+1+\frac{1}{8})}{(\frac{1}{7})^2+x}} \geq \sqrt{\frac{1}{8}}$

Do đó (1) đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức  $\sqrt{\frac{x'+1+\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{7}x}} \geq \sqrt{2.2}$  (2)

Bình phương hai vế rồi quy về phương trình bậc nhất suy ra bất đẳng thức cuối đúng với mọi  $x > 1.6$ . Phần còn lại là chứng minh bất đẳng thức cuối đúng bằng chia để trị. Việc hoàn thành chứng minh xin nhường lại cho các bạn.

Cho đến thời điểm này các bất đẳng thức 1 biến đã trở nên đơn giản nên tiếp theo chúng tôi sẽ không trình bày chứng minh cho các bất đẳng thức 1 biến nữa. Riêng với bất đẳng thức hai biến, chúng tôi sẽ trình bày cách chia đủ cụ thể bằng cách chỉ ra chia theo biến nào và dãy số tương ứng. Chẳng hạn trong Ví dụ 1 ta sẽ nói: "Chia để trị theo biến  $b$  để quy về bất đẳng thức một biến theo  $a$  nhờ dãy sau: 1; 1.2; 1.5; 1.8; 2". Để kết thúc III, đề nghị các bạn giải quyết một số bài tập sau:

**4. Bài tập 1.** Chứng minh:  $(a-1)\frac{1+b^5}{1-b^5} + \frac{2}{1+a^5} + \frac{2(1-b)b^5}{a^5-b^5} - b > 0, \forall b \in [0; 1), \forall a > 1$ .

**Chú ý:** Do  $b \in [0; 1)$  nên bạn đọc thực hiện phương pháp chia để trị theo  $b$  để quy về bất đẳng thức một biến theo  $a$  dễ hơn là chia để trị theo  $a$  để quy về bất đẳng thức một biến theo  $b$  vì ta mới chỉ có  $a > 1$ .

**5. Bài tập 2.** Cho  $b \in [0; 1), a > 1$ . Kiểm tra xem hai bất đẳng thức sau đúng hay sai

$$a) (a-1)\frac{1+b^6}{1-b^6} + \frac{2}{1+a^6} + \frac{2(1-b)b^6}{a^6-b^6} - b > 0$$

$$b) (a-1)\frac{1+b^7}{1-b^7} + \frac{2}{1+a^7} + \frac{2(1-b)b^7}{a^7-b^7} - b > 0$$

(Gợi ý: ta vẫn chứng minh bằng chia để trị như bình thường, nếu bất đẳng thức sai thì dãy của ta sẽ hội tụ về điểm sai của bất đẳng thức, từ đó tìm được phản ví dụ).

**6. Bài tập 3.** Cho  $x > 2$  và  $z \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Chứng minh rằng: 
$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+5x+2xz+4+14z+z^2}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+5xz+2z+4x^2+14x+1}} > 1$$

#### IV. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN

##### Phương pháp chung:

Bất đẳng thức thuần nhất ba biến là một dạng toán hay, cổ điển nhưng vẫn chứa đựng nhiều điều mới mẻ, đặc biệt có những bài hình thức đơn giản nhưng lại mạnh và khó đến kinh ngạc. Chia để trị là một công cụ đầy hiệu lực để giải quyết những bài như thế. Trong mục này, các bài toán sẽ được giải quyết theo các bước chính như sau:

• **Bước 1:** Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta gọi là các điểm "nhảy cảm"), khoanh vùng chúng lại xét riêng ra. Phần còn lại ta chỉ làm việc với các bất đẳng thức thực sự.

• **Bước 2:** Biến đổi, chuẩn hóa các bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp rồi dứt điểm bằng cách bấm nhỏ theo từng biến để xử lí.

Mục này sẽ chỉ xét những ví dụ thật cơ bản, mà với những gì đã trang bị trước đó, chúng ta có thể theo dõi một cách dễ dàng.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} > \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

### Chứng minh

Để cho gọn, bằng cách chuẩn hóa ta giả sử  $ab + bc + ca = 1$ . Các bạn lưu ý là khi cho  $ab = ac = \frac{1}{2}$ ,  $a \rightarrow +\infty$  thì vế trái tiến về  $2\sqrt{2}$ , nên mặc dù có dấu ">" nhưng có thể xem đây là 1 bất đẳng thức dạng "chặt chẽ".

Trước hết chúng ta biến đổi bài toán dưới hình thức dễ chịu hơn. Đặt  $x = ab$ ,

$y = bc$ ,  $z = ca$  thì  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z = 1$ . Khi đó bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{\frac{x}{x^2+yz}} + \sqrt{\frac{y}{y^2+zx}} + \sqrt{\frac{z}{z^2+xy}} > 2\sqrt{2} \quad (1)$$

Ta đồng bậc hóa (1) và chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi  $x, y, z > 0$

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{x^2+yz}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{y^2+zx}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{z^2+xy}} > 2\sqrt{2} \quad (2)$$

• **Bước 1:** (khoanh vùng điểm nhạy cảm).

Không mất tổng quát có thể giả sử  $x \geq y \geq z$ . Dễ dàng dự đoán điểm nhạy cảm trong bất đẳng thức (2) là  $x = y$ ,  $z = 0$ . Điều này gợi ta đến "dồn biến" và ta thử thực hiện bằng các đánh giá thô sơ xem sao.

Đặt  $f(x, y, z) = VT(2)$ , ta xét khi nào thì  $f(x, y, z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)$  (3)

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{z^2+xy}} \geq \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{z^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}}$

$$\text{và } \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{x^2+yz}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{y^2+zx}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{xy(x+y+z)^2}{(x^2+yz)(y^2+zx)}}$$

Do đó để chứng minh (3) đúng ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt[4]{\frac{xy(x+y+z)^2}{(x^2+yz)(y^2+zx)}} \geq \sqrt{\frac{2(x+y+z)}{x+y+2z}} \Leftrightarrow \frac{xy}{(x^2+yz)(y^2+zx)} \geq \frac{4}{(x+y+2z)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-4xz-4yz)}{(x^2+yz)(y^2+zx)(x+y+2z)^2} \geq 0 \Leftrightarrow xy-4xz-4yz \geq 0 \quad (4)$$

Từ đó, ta thấy nếu  $z \leq \frac{y}{8}$ , ta có đánh giá:  $4z \leq \frac{y}{2} \leq \frac{xy}{(x+y)}$ , suy ra  $xy-4yz-4zx \geq 0$ . Vậy

(4) đúng suy ra (3) đúng. Trong trường hợp này ta chứng minh theo kiểu "dồn biến"

thông thường: từ (3) suy ra ta cần chứng minh:  $f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) > 2\sqrt{2} \quad (5)$

$$\text{Đặt } t = \frac{x+y}{2}. \text{ Ta có: } (5) \Leftrightarrow f(t, t, z) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{t(2t+z)}{t^2+zt}} + \sqrt{\frac{z(2t+z)}{z^2+t^2}} > 2\sqrt{2} \quad (6)$$

$$\text{Chuẩn hóa cho } t = 1, \text{ khi đó } (6) \Leftrightarrow g(z) = 2\sqrt{\frac{2+z}{1+z}} + \sqrt{\frac{z(2+z)}{z^2+1}} > 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vì } g'(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{2}} - (1+z)}{(1+z)^{\frac{7}{2}}} + \frac{1+z-z^2}{\sqrt{z(2+z)}(z^2+1)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (\text{do } z \leq \frac{y}{8} \leq \frac{x+y}{16} = \frac{t}{8} = \frac{1}{8})$$

suy ra  $f(z) > f(0) > 2\sqrt{2}$  (đpcm).

Vậy khi  $z \leq \frac{y}{8}$  thì bài toán đã được chứng minh, và ta chỉ phải xét trường hợp còn lại (mà khi đó bất đẳng thức không còn "chặt chẽ" nữa).

• **Bước 2a:** (chuẩn bị)

Xét khi  $z > \frac{y}{8}$ . Chuẩn hóa cho  $y = 1$  suy ra  $1 \geq z \geq \frac{1}{8}$ ,  $x \geq 1$  và

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+z}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+zx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+x}} > 2\sqrt{2} \quad (7)$$

• **Bước 2b:** (chia để trị)

Chia để trị theo biến  $z$  để quy về bài toán một biến  $x$  nhờ dãy  $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

(Chú ý: Bước này đã được trình bày trong ví dụ 2 của 3.)

Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn!

• **Ghi chú.** Bài toán đẹp đề này được Phạm Kim Hùng giới thiệu trên Diễn đàn Toán học dưới dạng một vấn đề mở và không có lời giải trong một thời gian dài. Lời giải ở trên của chúng tôi là lời giải đầu tiên cho nó. Tuy nhiên, sau đó Nguyễn Thành Nhân đã cho biết một lời giải khác rất ngắn gọn.

**Cách 2.** Ta giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Đặt  $c = k^2(a+b)$  với  $k > 0$ .

Nếu  $k \leq 1$  thì  $c^2 + ab \leq ab + bc + ca$ . Kết hợp với  $b^2 + ac \leq ab + bc + ca$ ,

$$a^2 + bc \leq ab + bc + ca \text{ suy ra } f(a, b, c) \geq 3.$$

Xét khi  $k > 1$ . Ta có:  $c^2 + ab \leq k^2(a+b)c + k^2ab \leq k^2(ab + bc + ca) \quad (1)$

$$a^2 + bc + b^2 + ca \leq (a+b)^2 + a(b+c) \leq (a+b)^2(1+k^2) = \frac{k^2+1}{k^2}c(a+b) < \frac{k^2+1}{k^2}(ab+bc+ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:  $f(a, b, c) \geq \frac{1}{k} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+bc+b^2+ca}} > \frac{1}{k} + \frac{2\sqrt{2}k}{k^2+1} = f(k)$

Ta chứng minh  $f(k) > 2\sqrt{2}$  với mọi  $k > 0$  (không cần  $k > 1$ ). Điều này có được đơn giản bằng biến đổi tương đương:

$$f(k) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{k} > \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}(\sqrt{k^2+1}+k)} \Leftrightarrow k^2+1+k\sqrt{k^2+1} > 2\sqrt{2}k$$

Bất đẳng thức cuối đúng do  $k^2+1+k\sqrt{k^2+1} > 2k^2+1 > 2\sqrt{2}k \Rightarrow$  (đpcm)

• **Nhận xét:** Đây là một lời giải độc đáo nhưng không phải dễ dàng nghĩ ra. Do đó, cũng dễ hiểu khi lời giải bằng chia để trị là lời giải đầu tiên, vì tư tưởng trong phương pháp chia để trị rất đơn giản và dễ thực hiện.

Chúng ta tiếp tục với một trường hợp mà đẳng thức xảy ra ở hai chỗ.

**Bài toán 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm.

Chứng minh rằng:  $\frac{a^4}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^4}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$

### Chứng minh

Không mất tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Chú ý dấu bằng xảy ra tại hai chỗ là  $a = b = c$  và  $b = c = 0, a$  tùy ý. Ta sẽ "khoanh vùng" từng chỗ rồi mới chia để trị.

$$\begin{aligned} \text{Bước 1a: Đánh giá: VT} &= \frac{a^6}{a^4+a^3b+a^2b^2} + \frac{b^6}{b^4+b^3c+b^2c^2} + \frac{c^6}{c^4+c^3a+c^2a^2} \\ &\geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^4+b^4+c^4+a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \end{aligned}$$

Do đó, bài toán sẽ được chứng minh nếu có:

$$ab^3+bc^3+ca^3 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \Leftrightarrow \sum_3 (ab^3+ba^3-2a^2b^2) + \sum_3 (ab^3-ba^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 + (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu  $a \geq c \geq b$  ta có ngay (đpcm).

Nếu  $a \geq b \geq c$  khi đó để có (1) ta cần chứng minh

$$ab(a-b)^2 + ca(c-a)^2 \geq (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \geq 0 \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** thì  $ab(a-b)^2 + ca(c-a)^2 \geq 2a(a-b)(a-c)\sqrt{bc}$

và chú ý  $a+b+c \leq 3a$ , nên để chứng minh (2) ta cần có  $\frac{4}{9}bc \geq (b-c)^2$ .

Dễ thấy điều này đúng khi  $b \leq 1.92c$ .

**Bước 1b:** Xét  $b \geq 1.92c$ . Khi đó điểm nhạy cảm thứ nhất  $a = b = c$  không còn nữa, trong bước này ta sẽ giải quyết nốt điểm nhạy cảm thứ 2.

Nếu  $b = 0$  thì đơn giản, nếu không có thể chuẩn hóa cho  $b = 1$  khi đó bất đẳng thức ở đề bài trở thành  $\frac{a^4}{a^2+a+1} + \frac{1}{1+c+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} - \frac{a^3+1+c^3}{a+1+c} \geq 0$  (3)

Chú ý rằng khi chuẩn hoá như vậy điểm nhảy cảm thứ 2 suy biến thành:

$c = 0, b = 1, a = +\infty$ . Xét khi  $\frac{1}{6} \geq c \geq 0$ , ta chia thành hai trường hợp:

+ Nếu  $a \leq 4$  thì bất đẳng thức là thực sự và ta chỉ cần đánh giá đơn giản để thấy bất đẳng thức (3) là đúng.

+ Nếu  $a > 4$ , khi đó bất đẳng thức có **điểm nhảy cảm** là  $c = 0, b = 1, a = +\infty$  nên không thể dùng "chia để trị". Tuy nhiên trường hợp này ta có thể chứng minh bằng đạo hàm

Đặt  $f(c) = \frac{a^4}{a^2+a+1} + \frac{1}{1+c+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} - \frac{a^3+1+c^3}{a+1+c}$ ,  $\forall c \in \left[0; \frac{1}{6}\right]$ ,  $\forall a > 4$ .

Ta có:  $f'(c) \geq 0 \forall c \in \left[0; \frac{1}{6}\right] \Rightarrow f(c) \geq f(0) = \frac{a^4}{a^2+a+1} + 1 - \frac{a^3+1}{a+1} \geq 0 \Rightarrow$  (đpcm)

**Bước 2:** Xét khi  $c \geq \frac{1}{6}$  và  $1 \geq 1.92c$ , tức là  $0.53 \geq c \geq \frac{1}{6}$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3) (hai điểm nhảy cảm đã được tách li nên "chia để trị" chắc chắn sẽ phát huy tác dụng) bằng chia để trị theo biến  $c$  để quy bất đẳng thức (3) về bài toán một biến theo  $a$  nhờ dãy sau:  $0.53; 0.45; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$ .

Tổng hợp các bước đã xét ở trên ta có bài toán được chứng minh xong.

• **Nhận xét:** Khi đặt ra bài toán này, chúng tôi đã dùng chia để trị để kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức như lời giải trên. Sau đó nó được đưa lên trên Mathlinks.ro và ở đó chúng tôi đã nhận được một lời giải khác rất độc đáo của một bạn người Hàn Quốc như sau:

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^4}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{3abc}{a+b+c} + \sum_{cyc} (a^2 - ab)$$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^4}{a^2+ab+b^2} - a^2 + ab \right) \geq \frac{3abc}{a+b+c}$ . Kết quả bài toán có được nhờ đánh giá:

$$\sum_{cyc} \left( \frac{a^4}{a^2+ab+b^2} - a^2 + ab \right) = \sum_{cyc} \frac{ab^3}{a^2+ab+b^2} = \sum_{cyc} \frac{b^2}{1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3+\sum_{cyc} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)} = \frac{(a+b+c)abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{3abc}{a+b+c}$$

• **Bình luận:** Lời giải đẹp một cách bất ngờ. Qua hai ví dụ trên, chúng ta thấy rằng cách giải bằng chia để trị không hẳn là duy nhất. Tuy nhiên, đối với các bài toán thực sự khó mà muốn có một lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ thì không hề đơn giản (như chúng ta thấy, những "lời giải thứ hai" mà chúng tôi giới thiệu đều rất độc đáo). Đó cũng là lý do chúng tôi nhấn mạnh đến tính tự nhiên và đơn giản của phương pháp chia để trị. Chúng ta kết thúc mục này bằng một bài toán khó, mà chúng tôi rất mong sẽ có một lời giải đơn giản cho nó từ các bạn.



**Bài toán 3.** Cho  $x, y, z \geq 0$  và  $x + y + z = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\sqrt{\frac{x}{1+y+yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+z+zx}} + \sqrt{\frac{z}{1+x+xy}} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

**Giải**

Không mất tổng quát có thể giả sử  $x = \max(x, y, z)$ . Chú ý rằng có hai trường hợp xảy ra dấu đẳng thức là  $x = y = z = 1$  và  $x = 3, y = z = 0$ .

**Bước 1:** (khoanh vùng điểm nhạy cảm)

Ta biến đổi về trái bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+y+yz}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3}\sqrt{1+z+zx}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3}\sqrt{1+x+xy}} \\ & \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+x^2y+x^2yz} + \sqrt{y}\sqrt{y^2+y^2z+y^2zx} + \sqrt{z}\sqrt{z^2+z^2x+z^2xy}} \\ & \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)(x^2+x^2y+x^2yz+y^2+y^2z+y^2zx+z^2+z^2x+z^2xy)}} \\ & = \frac{(x+y+z)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x+xyz(x+y+z)}} \end{aligned}$$

Do vậy để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & (x+y+z)^3 \geq 3[x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x+xyz(x+y+z)] \\ & \Leftrightarrow (x+y+z)^3 \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + 3(x^2y+y^2z+z^2x) + 9xyz \\ & \Leftrightarrow 2(xy^2+yz^2+zx^2) \geq x^2y+y^2z+z^2x+3xyz \\ & \Leftrightarrow (xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x) - 6xyz \geq 3(x^2y+y^2z+z^2x-xy^2-yz^2-zx^2) \\ & \Leftrightarrow x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 3(x-y)(y-z)(x-z) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ đó, ta thấy nếu  $x \geq z \geq y$  thì (2) đúng. Do đó, ta chỉ việc xét khi  $x \geq y \geq z$

Nếu  $2z \geq y$ , ta có:  $(x-z)^2 \geq (x-z)(x-y); (x-z)^2 + (x-y)^2 \geq 2(x-z)(x-y)$

$$\Rightarrow \frac{y}{y-z}(x-z)^2 + \frac{z}{y-z}(x-y)^2 \geq 2(x-z)^2 + (x-y)^2 \geq 3(x-z)(x-y)$$

$\Rightarrow$  (2) đúng và ta có (đpcm). Vậy ta chỉ còn phải xét khi  $y \geq 2z$ .

**\*Chú ý:** Sau bước này hai biến  $y$  và  $z$  đã được tách li ra xa và cả hai chỗ "nhạy cảm" nên vấn đề còn lại chỉ là "chia để trị"! Tuy nhiên do (2) còn có thể khai thác thêm nên nhân tiện ta giải quyết một vùng nữa cho gọn gàng trước khi dứt điểm.

Nếu  $2y \geq x$ , đặt  $a = x - z, b = y - z$  suy ra  $2b \geq a \geq 0$ . Ta quy (2) về chứng minh

$$(a+z)b^2 + (b+z)a^2 + z(a-b)^2 \geq (a-b)ab$$

Để có điều này ta chỉ cần chứng minh  $ab^2 + ba^2 \geq 3(a-b)ab \Leftrightarrow 2b \geq a$  (đúng)

Vậy bây giờ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu khi  $x \geq 2y$  và  $y \geq 2z$ .

**Bước 2a:** (chuẩn bị) Xét khi  $x \geq 2y$  và  $y \geq 2z$ . Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{x \cdot \frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2 + y \cdot \frac{x+y+z}{3} + yz}} + \sqrt{\frac{y \cdot \frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2 + z \cdot \frac{x+y+z}{3} + zx}} + \sqrt{\frac{z \cdot \frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2 + x \cdot \frac{x+y+z}{3} + xy}} \geq \sqrt{3} \quad (3)$$

Chuẩn hóa cho  $y = 1$  ta có:  $(3) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2 + 5x + 2xz + 4 + 14z + z^2}} +$   
 $+ \sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+5xz+2z+4x^2+14x+1}} \geq 1 \quad (4)$

Nếu  $x \geq 7$  thì do  $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$  nên cứ chỗ nào  $z$  đồng biến thì thay  $z = 0$ , chỗ nào  $z$  nghịch biến thì thay  $z = \frac{1}{2}$ , khi đó ta có đánh giá các bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2 + 5x + 2xz + 4 + 14z + z^2}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}} \geq$$

$$\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2 + 6x + \frac{45}{4}}} + \sqrt{\frac{x+1}{x^2 + 9x + \frac{9}{2}}} \geq 1, \forall x \geq 7. \text{ Do đó, ta chỉ cần xét khi } x \leq 7.$$

**Bước 2b:** (Chia để trị) Ta chứng minh (4) bằng cách chia theo  $z$  để đưa về một biến theo  $x$  nhờ dãy sau:  $0, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ . Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

## V. QUAN HỆ GIỮA PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP S.O.S

Các bạn thân mến, trong mục trước chúng tôi đã trình bày cách áp dụng trực tiếp chia để trị cho các bài toán. Mặc dù tư tưởng đơn giản nhưng một nhược điểm là lời giải khá dài, mà nguyên nhân chính là do những đánh giá của chúng ta quá đơn giản (nhất là trong Bước 1 – “khoanh vùng điểm nhạy cảm”). Tuy nhiên, chia để trị có tư tưởng chính rất đơn giản và linh hoạt nên có thể kết hợp với các phương pháp khác một cách vô cùng uyển chuyển để đạt mục tiêu: giải quyết bài toán. Nếu các bạn thành thạo một phương pháp khác thì các bạn có thể kết hợp chia để trị với phương pháp đó và sức mạnh của các phương pháp sẽ tăng lên đáng kể. Đây mới chính là đặc tính thú vị nhất của chia để trị.

Để minh họa, chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn một số ý tưởng kết hợp chia để trị với phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Đây là một phương pháp mạnh đã được dùng từ lâu nhưng mới được hệ thống hóa và phổ biến rộng rãi gần đây. Tư tưởng chính là quy một bất đẳng thức thuần nhất ba biến  $a, b, c$  về dạng

$$S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$$

Trước khi bắt đầu, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một cách phân tích khác. Đối với các bất đẳng thức ba biến đối xứng thì việc quy về dạng S.O.S như trên là đơn giản, tuy nhiên đối với các bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì cách quy trên đôi khi không thích hợp và tạo ra các hệ số  $S_1, S_2, S_3$  rất cồng kềnh và khó xử lý. Trong trường hợp đó, có một cách khác là quy về dạng sau đây:



$$S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(a-c)$$

Cách quy này có 3 cái lợi. Thứ nhất, đối với các dạng hoán vị vòng quanh thì nó tự nhiên và đơn giản hơn cách đưa về S.O.S chính thống. Thứ hai, nếu về trái và  $S$  không âm thì ta chỉ phải xét trường hợp  $a \geq b \geq c$  mà bỏ qua trường hợp  $a \geq c \geq b$  (lưu ý là trong bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì ta chỉ có thể giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$  và nói chung phải xét 2 trường hợp  $a \geq b \geq c$  và  $a \geq c \geq b$ ). Thứ ba, và quan trọng nhất, là trong dạng trên, khi  $a, b, c$  xấp xỉ bằng nhau thì về trái xấp xỉ 0 với lũy thừa 2, trong khi về phải xấp xỉ 0 với lũy thừa 3. Điều này đặc biệt thích hợp với phương pháp chia để trị, vì khi đó việc tách ly trường hợp  $a = b = c$  là rất đơn giản.

Chúng ta hãy xem một ví dụ để thấy được lợi ích của cách biến đổi này.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$\frac{a^3}{2a^2 + b^2} + \frac{b^3}{2b^2 + c^2} + \frac{c^3}{2c^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

### Chứng minh

Sau đây là lời giải của Phan Thành Nam được đăng trên *Diễn đàn Toán học*.

Bằng cách biến đổi tương đương, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3 - ab^2}{2a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a^3 - ab^2)(2b^2 + c^2)(2c^2 + a^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} a^3 b^2 c^2 + 2 \sum_{cyc} a^3 c^4 + 2 \sum_{cyc} a^5 b^2 + \sum_{cyc} a^5 c^2 \geq 4 \sum_{cyc} ab^4 c^2 + 2 \sum_{cyc} ab^2 c^4 + 2 \sum_{cyc} a^3 b^4 \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} (a^5 b^2 + a^3 b^2 c^2 - 2a^4 b^2 c) + \sum_{cyc} (a^5 c^2 + a^3 b^2 c^2 - 2a^4 b c^2) \geq 2 \sum_{cyc} (a^4 b^4 - a^3 c^4) \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^3 b^2 (a-c)^2 + \sum_{cyc} a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2(a-b)(a-c)(c-b) \left( \sum_{cyc} a^2 b^2 + \sum_{cyc} a^2 b c \right) \end{aligned}$$

Bây giờ giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $c \leq b$  thì bất đẳng thức đúng nên ta chỉ phải xét khi  $a \geq c \geq b$ . Ta sẽ chứng minh

$$2a^3 b^2 (a-c)^2 + 2a^2 c^3 (c-b)^2 + a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2(a-c)(c-b)(a^3 c^2 + a^3 c b + a^3 b^2)$$

Xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Xét khi  $c - b \leq a - c$ , ta có

$$2a^3 b^2 (a-c)^2 + a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2a^3 b^2 (a-c)(c-b) + 4a^3 c^2 (a-c)(c-b)$$

Vì  $a^3 b^2 + 2a^3 c^2 \geq a^3 (c^2 + bc + b^2)$  nên suy ra (đpcm).

**Trường hợp 2.** Xét khi  $c - b \geq a - c$ , tương tự như trên ta có:

$$2a^2 c^3 (c-b)^2 + a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2a^2 c^3 (a-c)(c-b) + 4a^3 c^2 (a-c)(c-b)$$

Vì:  $a^2 c^3 + 2a^3 c^2 - a^3 (c^2 + bc + b^2) \geq a^2 c^2 b + a^3 c b - a^3 (bc + b^2)$

$= a^3b(c-b) + a^2bc(c-a) \geq 0$  nên ta cũng có (đpcm).

Vì bài toán trên khá đơn giản nên vai trò của chia để trị là không thực sự rõ nét. Tuy nhiên, trong các ví dụ sau ta sẽ thấy tư tưởng chia để trị nổi rõ trong cách chia trường hợp, khi mà mỗi tiêu chuẩn đơn lẻ của S.O.S không đủ để giải quyết.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$2(x^5 + y^5 + z^5) + 9(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2) \geq 11(x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3) \quad (1)$$

**Giải**

**Bước 1.** Biến đổi bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$2(x^5 + y^5 + z^5 - x^2y^3 - y^2z^3 - z^2x^3) + 9(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 - x^2y^3 - y^2z^3 - z^2x^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} [S_1(y-z)^2 + S_2(z-x)^2 + S_3(x-y)^2] + 9(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx) \geq 0 \quad (2)$$

$$S_1 = 2y^3 + 4y^2z + 6yz^2 + 3z^3; S_2 = 2z^3 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3; S_3 = 2x^3 + 4x^2y + 6xy^2 + 3y^3$$

Từ đó, nếu  $x \geq y \geq z$  thì ta có ngay (đpcm), do đó chỉ cần phải xét khi  $x \geq z \geq y$ .

Ta có:  $2(x-y)^2 S_3 = 2[(x-z) + (z-y)]^2 S_3 \geq 8(x-z)(z-y) S_3$

$$2(z-x)^2 S_2 + 2(y-z)^2 S_1 \geq 4(x-z)(z-y) \sqrt{S_1 S_2}$$

Do đó, (2) đúng nếu ta chứng minh được  $8S_3 + 4\sqrt{S_1 S_2} \geq 45(xy+yz+zx)(x-y)$  (3)

Ta có:  $8S_3 - 45(x-y)(xy+yz+zx) = 16x^6 - 13yx^2 + 93y^2x - 45zx^2 > 15x^3 - 45zx^2$

Do đó nếu  $x \geq 3z$  thì ta có ngay (đpcm). Bây giờ xét khi  $x \leq 3z$ . Nếu  $2y \geq z$  thì

$$S_1 S_2 > [(2y)^2 z + 3(2y)z^2 + 3z^3] S_2 > 7z^3 S_2 = 7z^3 (2z^2 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3)$$

Do đó, ta cần chứng minh:  $15x^3 - 45zx^2 + 4\sqrt{7z^3(2z^3 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3)} \geq 0$  (4)

Chuyển về rồi bình phương lên thì (4) tương đương:

$$112z^3(2z^3 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3) \geq (45zx^2 - 15x^3)^2 \quad (5). \text{ Khai triển ra và}$$

đặt  $t = \frac{x}{z}$  thì (5)  $\Leftrightarrow 244 + 488t + 732t^2 + 366t^3 - (2025t^4 - 1350t^5 + 225t^6) \geq 0$  (6)

Để thấy (6) đúng  $\forall t \in [1, 3]$  nên (1) đúng.

**Bước 2.** Nhiệm vụ còn lại của chúng ta là xét trường hợp  $3z \geq x \geq z \geq 2y$ .

Chuẩn hóa cho  $z = 1$  thì điều kiện viết lại là  $3 \geq x \geq 1$  và  $\frac{1}{2} \geq y$ . Biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow 2x^5 + 2y^5 + 2 + 9x^3y^2 + 9y^3 + 9x^2 - 11x^2y^3 - 11y^2 - 11x^3 \quad \forall x \in [1, 3], y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Đặt  $f(x, a, b) = 2x^5 + 2a^5 + 2 + 9x^3a^2 + 9a^3 + 9x^2 - 11x^2b^3 - 11b^2 - 11x^3$  thì bất đẳng thức cần chứng minh là  $f(x, y, y) > 0$ . Lưu ý là  $f$  tăng theo  $a$  và giảm theo  $b$ .

Chia để trị theo y bằng dãy sau: 0; 0.1; 0.15; 0.2; 0.25; 0.3; 0.35; 0.4; 0.45; 0.5

ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

Trong bài toán trên, S.O.S đã giúp chúng ta giải quyết nhanh chóng điểm "nhảy cảm". Nhưng sau khi đạt được mục đích này, chúng ta đã linh hoạt trở lại bất đẳng thức ban đầu và dứt điểm bằng chia để trị. Trong trường hợp này thì chia để trị là tư tưởng chính còn S.O.S là kĩ thuật. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể dùng S.O.S làm đường lối chính và dùng chia để trị làm kĩ thuật.

**Bài toán 3.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$23(a+b+c) + 13\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) \geq 36\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 13 \sum_{cyc} \left( \frac{a^3}{b^2} + a - 2\frac{a^2}{b} \right) \geq 10 \sum_{cyc} \left( \frac{a^2}{b} + b - 2a \right) \Leftrightarrow \frac{13}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} \geq \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} + \sum_{cyc} \left[ \frac{a(a-b)^2}{b^2} - \frac{(a-b)^2}{b} \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^3}{b^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $a \geq c \geq b$  thì:

$$\frac{(a-b)^3}{b^2} = \frac{(a-c+c-b)^3}{b^2} \geq \frac{(a-c)^3 + (c-b)^3}{b^2} \geq \frac{(a-c)^3}{a^2} + \frac{(c-b)^3}{c^2} \Rightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^3}{b^2} \geq 0$$

Nên ta chỉ cần xét khi  $a \geq b \geq c$ . Khi đó:

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^3}{b^2} \geq \frac{(a-b)^3}{a^2} + \frac{(b-c)^3}{a^2} - \frac{(a-b+b-c)^3}{a^2} = \frac{-3(a-b)(b-c)(a-c)}{a^2}$$

$$\text{Do đó, ta chỉ cần chứng minh: } \frac{3}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} \geq \frac{3(a-b)(b-c)(a-c)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left[ \frac{a(a-b)^2}{b^2} + \frac{b(b-c)^2}{c^2} + \frac{c(c-a)^2}{a^2} \right] \geq 10(a-b)(b-c)(a-c)$$

Ta đánh giá đơn giản bằng bất đẳng thức **AM - GM**:

$$\frac{a(a-b)^2}{b^2} + \frac{b(b-c)^2}{c^2} \geq 2\frac{1}{c}(a-b)(b-c); \quad \frac{c(c-a)^2}{a^2} \geq \frac{4c(a-b)(b-c)}{a^2}$$

$$\text{nên chỉ cần chứng minh: } 2\frac{a^2}{c} + 4c \geq 10(a-c) \Leftrightarrow a^2 + 7c^2 \geq 5ac \text{ (đúng)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Chúng ta kết thúc mục này bằng một bài toán của Phạm Kim Hùng. Bài toán này đã được giới thiệu trên *Diễn đàn Toán học* với tên gọi là "Thách Thức 2", và có thể xem như một trong những ví dụ khó nhất đối với phương pháp S.O.S. Sau đây, chúng ta sẽ xem tư tưởng chia để trị hoạt động thế nào khi kết hợp với cách biểu diễn S.O.S chính thống. Lời giải sau đây cũng của Phan Thành Nam, và là lời giải đầu tiên cho bài toán này trên *Diễn đàn Toán học*.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$\left(\frac{a^2}{b} + c\right)^2 + \left(\frac{b^2}{c} + a\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a} + b\right)^2 \geq 12 \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 + 2ab + 2bc}{b^2} - 4 \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \right) (a-b)^2 \geq 0 \quad (2). \text{ Chuẩn hóa: Cho } a + b + c = 1 \text{ thì}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 - b^2 + 2b}{b^2} - 5 + 4c \right) (a-b)^2 \geq 0 \text{ hay } \sum_{cyc} C(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tổng quát, ta giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $c > b$  thì ta có ngay (đpcm) vì  $\sum_{cyc} \frac{a^2 b}{c} - \sum_{cyc} \frac{a^2 c}{b} = \frac{(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$  nên dưới đây ta chỉ cần xét khi  $a \geq b \geq c$ . Trong phần còn lại, ta sẽ chia thành các trường hợp để xét.

**Trường hợp 1.** Xét  $b \geq \frac{1}{3}$  (hay  $b - c \geq a - b$ ). Ta xét 2 trường hợp con sau đây:

**1.1.** Xét  $b \geq \frac{1}{3}, c \geq \frac{1}{4}$ . Ta có:  $C \geq \frac{2}{b} + 4c - 5 \geq 0$  và  $A \geq 0$ . Chú ý  $a \leq \frac{1}{2}$  nên ta có:

$$\frac{1}{4}A + B \geq \frac{1}{2c} + \left(a + \frac{1}{a}\right) + 4b + \frac{c}{a^2} - 5 - \frac{5}{4} \geq \frac{3}{2} + \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} + \frac{1/4}{(1/2)^2} - 5 - \frac{5}{4} > 0$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(c-a)^2 \geq \frac{A}{4}(a-c)^2 + B(a-c)^2 \geq 0$$

**1.2.** Xét  $b \geq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{4}$ . Ta có:

$$C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(a-c)^2 \geq (C+1-4c)(a-c)^2 + (A-1+4C)(b-c)^2 + B(a-c)^2$$

Tương tự như trên:  $C+1-4c \geq 0, A-1+4C \geq 0$ . Chú ý  $a \leq \frac{2}{3}$  nên ta có:

$$\frac{1}{4}(A-1+4C) + B \geq \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{3c} + \frac{13}{4}c\right) + 4b + \frac{1}{4c} - 5 - \frac{3}{2} \geq \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) + 2 + \frac{4}{3} + 1 - 5 - \frac{3}{2} = 0$$

**Trường hợp 2.** Xét  $b \leq \frac{1}{3}$ . Ta luôn có:  $C \geq \frac{2}{b} - 5 \geq 1, A \geq \frac{2}{c} - 5 \geq 1$ .

Do đó ta chỉ cần quan tâm khi  $B < 0$ . Xét 2 trường hợp con sau đây:

**2.1.** Xét  $b \leq \frac{1}{3}, c \geq \frac{1}{6}$  (khi đó  $a \leq \frac{2}{3}$ ). Ta có:

$$\frac{1}{2}A + B \geq \left(5c + \frac{1}{c}\right) + \left(2a + \frac{1}{a}\right) - 7.5 \geq \left(\frac{5}{3} + 3\right) + \left(2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) - 7.5 = 0$$

$$\frac{1}{2}C + B \geq \left(\frac{9}{2}a + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2b} + 4b\right) + 3c - 7.5 \geq 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \frac{3}{6} - 7.5 > 0$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(a-c)^2 \geq (-B)[2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 - (a-c)^2] \geq 0$$

2.2. Xét khi  $b \leq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{6}$  (khi đó  $a \geq \frac{1}{2}$ ). Ta lại chia thành 2 trường hợp con:

2.2.1. Xét khi  $b \leq 0.3$  và  $c \leq \frac{1}{6}$ . Tương tự trường hợp 2.1, ta có:

$$\frac{1}{2}A + B \geq \frac{1}{c} + \left(2a + \frac{1}{a}\right) - 7.5 \geq 6 + 2\sqrt{2} - 7.5 > 0$$

$$\frac{1}{2}C + B \geq \left(\frac{50}{9}a + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2b} + 4b\right) - 7.5 \geq 2\sqrt{\frac{50}{9}} + 2\sqrt{2} - 7.5 > 0 \text{ và suy ra (đpcm).}$$

2.2.2. Xét khi  $b \geq 0.3$  và  $c \leq \frac{1}{6}$ . Do  $b \leq \frac{1}{3}$  nên  $2(a-b) \geq (a-c)$

Do  $3.75b \geq 1 + 0.75c$  nên  $2.75(b-c) \geq (a-c)$ . Từ đó suy ra:

$$C = \frac{a}{b^2} + \frac{1}{b} + 4c - 5 \geq 9a + \frac{1}{b} - 5 \geq \frac{9}{2} + 3 - 5 = 2.5$$

$$A = \frac{b}{c^2} + \frac{1}{c} + 4a - 5 \geq 36b + \frac{1}{b} + 4a - 5 \geq 36 \times 0.3 + 6 + \frac{4}{2} - 5 \geq 13.8$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2 + A(b-c)^2 \geq \frac{2.5}{2^2}(a-c)^2 + \frac{13.8}{2.75^2}(a-c)^2 \geq 2.4(a-c)^2$$

$$\text{và } B + 2.4 \geq \frac{1}{a} + 4b - 5 + 2.4 \geq \frac{1}{0.7} + 4 \times 0.3 - 5 + 2.4 > 0$$

nên:  $C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(a-c)^2 \geq 0$ . Vậy bài toán chứng minh xong.

## VI. PHẢI CHĂNG LÀ LỜI GIẢI DUY NHẤT?

Các bạn thân mến, có lẽ mỗi chúng ta đều mong muốn mỗi bài toán hay đều có một lời giải đẹp tương xứng. Trong các mục trước, chúng ta đã thấy mặc dù giải quyết các bài toán rất khó bằng một đường lối đơn giản nhưng giải bằng chia để trị không hẳn là lời giải duy nhất. Trong mục này, chúng tôi dẫn ra đây bốn ví dụ minh họa đầy đủ sức mạnh và tính nghệ thuật của của phương pháp chia để trị, đồng thời chuyển tới các bạn câu hỏi rằng, liệu đây có phải là lời giải duy nhất?

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^7}{a^6+b^6} + \frac{b^7}{b^6+c^6} + \frac{c^7}{c^6+a^6} \geq \frac{a+b+c}{2}, \forall a, b, c > 0$

Trước khi nêu lời giải, chúng tôi xin giới thiệu sơ lược về bài toán thú vị này. Tác giả bài toán, Phạm Kim Hùng, đã giới thiệu bài toán mở sau đây trên *Diễn đàn Toán học* trong chủ đề có tên là "Very difficult inequality"

**Bài toán mở:** Với các hằng số  $k > 1$  nào thì bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a^k}{a^{k-1}+b^{k-1}} + \frac{b^k}{b^{k-1}+c^{k-1}} + \frac{c^k}{c^{k-1}+a^{k-1}} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

**Bình luận:** Bằng biến đổi đơn giản, ta thấy rằng nếu bất đẳng thức đúng với  $k$  thì nó cũng đúng với  $k' < k$ , do đó hằng số lớn nhất cũng có nghĩa là tốt nhất. Bài toán 1 khẳng định bài toán đúng với  $k = 7$ , hơn nữa trong trường hợp  $k = 8$  thì có phản ví dụ

(xem Nhận xét ở phần sau). Mặc dù vẫn chưa giải quyết được bài toán mở nhưng có thể khẳng định đây là một trong những bất đẳng thức mạnh và khó nhất hiện nay. Lời giải dưới đây dựa trên lời giải của Phan Thành Nam đã đăng trên *Diễn đàn Toán học*, một lời giải đầy tính nghệ thuật và lãng mạn.

**Lời giải bài toán 1.** Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh:

$$a \cdot \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + b \cdot \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} + c \cdot \frac{c^6 - a^6}{c^6 + a^6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c) \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + (b-c) \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} + c \left( \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} + \frac{c^6 - a^6}{c^6 + a^6} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c) \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + (b-c) \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} - c \left( \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} \cdot \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} \cdot \frac{c^6 - a^6}{c^6 + a^6} \right) \geq 0$$

Tất nhiên, ta có thể giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Từ bất đẳng thức cuối, ta thấy nếu  $b \geq c$  thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do đó ta chỉ cần xét khi  $a \geq c \geq b$ . Để đơn giản, ta chuẩn hóa: Cho  $c = 1$ , và tất nhiên chỉ cần xét khi  $a > 1 > b$ . Ta tiếp tục biến đổi:

$$(a-1) \frac{1+b^6}{1-b^6} + (1-b) \frac{a^6+b^6}{a^6-b^6} \geq \frac{a^6-1}{a^6+1} \Leftrightarrow (a-1) \frac{1+b^6}{1-b^6} + (1-b) \left( 1 + \frac{2b^6}{a^6-b^6} \right) \geq 1 - \frac{2}{a^6+1}$$

$$\Leftrightarrow (a-1) \frac{1+b^6}{1-b^6} + \frac{2}{a^6+1} + \frac{2(1-b)b^6}{a^6-b^6} - b \geq 0 \quad (1). \text{ Ta sẽ chứng minh } f(a, b, b) > 0$$

$$\text{với } f(a, x, y) = (a-1) \frac{1+x^6}{1-x^6} + \frac{2}{a^6+1} + \frac{2(1-y)x^6}{a^6-x^6} - y > 0$$

Chú ý rằng đây là bất đẳng thức thực sự. Để chứng minh, ta chỉ cần chia theo  $b$  để đưa về các bất đẳng thức 1 biến theo  $a$ , bằng dãy sau đây:

$$0, 0.6, 0.67, 0.7, 0.73, 0.75, 0.77, 0.8, 0.85, 0.9, 1.$$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

#### • Nhận xét:

a) Trong biến đổi trên ta đã sử dụng hằng đẳng thức:  $u+v+w+uvw=0$  với:

$$u = \frac{x-y}{x+y}, v = \frac{y-z}{y+z}, w = \frac{z-x}{z+x} \quad (\text{vì } (1+u)(1+v)(1+w) = (1-u)(1-v)(1-w))$$

Bằng cách này, ta đã làm xuất hiện các đại lượng "xấp xỉ 0" là  $a-b, b-c, c-a$  mà ta đã đề cập ở mục trước.

b) Các bạn có thể thấy là trong lời giải trên không có bước "khoanh vùng điểm nhạy cảm".

Vì sao vậy? Thực ra, khi thực hiện việc chia 2 vế cho  $\frac{1-b^6}{1+b^6} \cdot \frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}$  tức là ta đã

chia các đại lượng "xấp xỉ" 0 cho nhau. Chính vì vậy, điểm nhạy cảm khi các biến bằng nhau đã được giải quyết. Đây chính là "chìa khóa" của lời giải này. Kỹ thuật này cũng có thể dùng rất thích hợp với dạng S.O.S có thêm đại lượng  $(a-b)(b-c)(c-a)$  mà ta đã đề cập ở mục trước.



c) Trong bài toán mở đã giới thiệu, khi  $k = 8$  thì ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức sau với mọi  $a > 1 > b$ :  $(a-1)\frac{1+b^7}{1-b^7} + \frac{2}{a^7+1} + \frac{2(1-b)b^7}{a^7-b^7} > b$

Thực hiện việc chia để trị theo  $b$  ta thu được dãy: 0; 0.55; 0.57; 0.58; 0.585

Ta thấy dãy dần tiến về 0.6 nên thử cho  $b = 0.6$  vào rồi chia để trị theo  $a$  thì thấy  $a$  tiến về 1.3. Điều đó dẫn đến dự đoán là bất đẳng thức sai, và quả thật thay  $a = 1.3$ ,  $b = 0.6$ ,  $c = 1$  vào thì ta nhận được câu trả lời phủ định! Cũng bằng cách đó, thậm chí ta có thể tìm được phản ví dụ cho  $k = 7.5$ . Điều này chứng tỏ bài toán với trường hợp  $k = 7$  là rất mạnh.

**Bài toán 2.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2+3c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2+3a^2}} \geq \frac{3}{2}$$

### Chứng minh

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^3+3ab^2}} \geq \frac{a^2}{\sqrt{a^3+2a^2b^2+b^3}} = \frac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$$

Từ đó, thay  $(a, b, c)$  bởi  $(a^2, b^2, c^2)$ , ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây

$$(\text{với mọi } a, b, c > 0): \frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2} \quad (1)$$

Ta chứng minh (1) bằng chia để trị từ đơn giản đến phức tạp.

• Ta có thể giả sử  $a \geq b, c$ . Nếu  $b \geq c$  thì:

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} - \frac{b^4}{a^3+b^3} - \frac{c^4}{b^3+c^3} - \frac{a^4}{c^3+a^3} \\ &= \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)} \geq 0 \end{aligned}$$

nên dưới đây ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $a \geq c \geq b$ .

• Trường hợp  $a \leq 2b$  (và  $a \geq c \geq b$ ). Ta có:  $\frac{2a^4}{a^3+b^3} - a - \frac{3}{2}(a-b) = \frac{3b^2+ab-a^2}{2(a^3+b^3)}(a-b)^2$

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} - (a+b+c) = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + a+b+c} \leq \frac{3(a-c)^2 + 3(c-b)^2}{2(a+b+c)}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh:  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$  với:

$$S_1 = \frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3} - \frac{3}{a+b+c} > \frac{3c^2}{b^3+c^3} - \frac{3}{b+c} > 0$$

$$S_2 = \frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3} - \frac{3}{a+b+c} > \frac{3a^2}{c^3+a^3} - \frac{3}{a+c} > 0; S_3 = \frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3} \geq \frac{4b^2-a^2}{a^3+b^3} \geq 0$$

và điều này hiển nhiên đúng.

• Trường hợp  $a \geq 3c \geq 3b$ . Ta có:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} = \frac{a}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^3} \geq \frac{a}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{28}a > \frac{\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}a = \frac{\sqrt{3\left(a^2+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}\right)}}{2} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}.$$

• Cuối cùng, ta xét trường hợp  $a \geq 2b$ ,  $a \leq 3c$  (và  $a \geq c \geq b$ ). Khi đó, bất đẳng thức là thực sự. Chuẩn hóa cho  $a = 1$ , và đưa về bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{a^3+1} > \frac{\sqrt{3(1+b^2+c^2)}}{2} \quad (2) \text{ với } b \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ và } c \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

Thực hiện chia để trị theo  $b$  để quy về bài toán một biến theo  $c$  nhờ dãy

0, 0.3, 0.4, 0.45, 0.5. Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn.

• **Nhận xét:** Tất nhiên sau khi giải quyết điểm "nhảy càn", ta có thể trở về chứng minh trực tiếp bất đẳng thức ở đề bài. Tuy nhiên ở đây chúng ta cố gắng chứng minh (1) vì nó là 1 bất đẳng thức đẹp và ý nghĩa. Một hệ quả của bất đẳng thức (1) là

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Đây là một trường hợp riêng của bài toán mở đã giới thiệu ở bài toán 1, và cũng là một hệ quả trực tiếp của bài toán 1. Bản thân bài toán hệ quả này đã là khá mạnh và là một ví dụ ẩn tượng cho phương pháp S.O.S, tuy nhiên phương pháp này đã bộc lộ giới hạn khi đối mặt với các bất đẳng thức mạnh hơn. Bạn đọc có thể xem lời giải bài toán 2 bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Holder** đã được trình bày ở §3, nhưng với bất đẳng thức mạnh hơn (1), rất khó để có sự lựa chọn khác.

Chúng ta tiếp tục với một bài toán rất nổi tiếng sau đây

**Bài toán 3.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^4+2} + \frac{y}{z^4+2} + \frac{z}{x^4+2} \geq 1$$

Bài toán này được giới thiệu trên diễn đàn Mathfriend.net với nickname tác giả là "**Cậu bé vàng khăn đỏ**". Đáng sau hình thức tuyệt đẹp là một bất đẳng thức rất khó, và mặc dù nhận được rất nhiều sự quan tâm nhưng cho đến bây giờ ở đó vẫn chưa có lời giải. Chú ý rằng nếu thay mũ 4 bởi mũ 5 thì bài toán không còn đúng.

### Chứng minh

Do  $xyz = 1$  nên ta có thể thay  $(x, y, z)$  bởi  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$  với  $a, b, c > 0$  và viết lại bất đẳng

thức cần chứng minh: 
$$\frac{a^5}{(2a^4+b^4)c} + \frac{b^5}{(2b^4+c^4)a} + \frac{c^5}{(2c^4+a^4)b} \geq 1$$



(Chú ý: các bạn thử suy nghĩ tại sao thay bộ  $(x, y, z)$  bởi bộ  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$  mà không phải là bộ  $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ ? Cách thay thứ 2 có gì bất lợi so với cách thứ nhất?)

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$VT = \frac{a^6}{(2a^4+b^4)ca} + \frac{b^6}{(2b^4+c^4)ab} + \frac{c^6}{(2c^4+a^4)bc} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{(2a^4+b^4)ca + (2b^4+c^4)ab + (2c^4+a^4)bc}$$

Do đó, để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chứng minh:

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geq 2(ab^5+bc^5+ca^5) + abc(a^3+b^3+c^3) \quad (1)$$

Nhìn bề ngoài thì có vẻ như đây chỉ là một bất đẳng thức đơn giản, và dấu bằng cũng chỉ xảy ra tại một chỗ duy nhất là  $a = b = c$ . Tuy nhiên bất đẳng thức (1) lại là một bất đẳng thức mạnh và khó đến kì dị. Đây thực sự là một điều đáng ngạc nhiên. Sau đây, chúng tôi xin đề xuất một cách tấn công:

Không mất tính tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $a \geq b \geq c$  thì:

$$(a^5c+b^5a+c^5b) - (a^5b+b^5c+c^5a) = (a-b)(b-c)(c-a)[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+abc] \leq 0$$

nên thay  $(a, b, c)$  bởi  $(a, c, b)$  thì về trái bất đẳng thức không đổi trong khi về phải bất đẳng thức tăng lên. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp  $a \geq c \geq b$  (như đã nói, đây là một kĩ thuật rất thường dùng để giải quyết bớt một trường hợp khi gặp bài toán hoán vị vòng quanh).

Bây giờ ta thử dùng phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Viết lại:

$$(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3-3abc) \geq 2abc \left[ \frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} - (a^3+b^3+c^3) \right]$$

$$\text{và sử dụng các phân tích: } a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{a+b+c}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\frac{3a^4}{b} + b^3 - 4a^3 = \frac{(3a^2+2ab+b^2)}{b} (a-b)^2 \text{ ta viết lại bất đẳng thức trên về dạng:}$$

$$S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{với } S_1 = S - 4ab(3b^2 + 2bc + c^2); S_2 = S - 4bc(3c^2 + 2ca + a^2)$$

$$S_3 = S - 4ca(3a^2 + 2ab + b^2); \text{ trong đó } S = 3(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

Nếu  $a = c$  hoặc  $b = c$  thì bài toán đơn giản. Ngược lại, ta thực hiện biến đổi:

$$(2) \Leftrightarrow (S_1 + S_3)(c-b)^2 + (S_2 + S_3)(c-a)^2 + 2S_3(a-c)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_1 + S_3}{2} \cdot \frac{c-b}{a-c} + \frac{S_2 + S_3}{2} \cdot \frac{a-c}{c-b} + S_3 \geq 0 \quad (3)$$

Khi chia xuống như vậy thì điểm nhạy cảm đã được tách li, nên bất đẳng thức (3) là một bất đẳng thức thực sự. Do đó "chia để trị" chắc chắn phát huy tác dụng:

Chuẩn hóa cho  $c = 1$  khi đó  $a > 1$  và  $b < 1$ . lúc này:  $VT(3) = f(a, b, b) =$

$$= \frac{(1-b)[3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)]}{a-1}$$

$$+ \frac{(a-1)[3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)]}{1-b}$$

$$+ 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-4a(3a^2+2ab+b^2)$$

Đặt  $u(a) = 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)$

$$v(a) = 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)$$

Ta sẽ chứng minh  $u(a) > 0, v(a) > 0$  bằng 2 phương pháp khác nhau.

Ta có:  $u'(a) = 12a^3 + 3b^3 + 3 + 9a^2b - 9a^2 - 4b - 12ab - 2b^2 > 0 \quad \forall a > 1, b < 1$

nên  $u(a) > u(1) = 6 + 6b^3 - 10b + 3b^4 - 2b^2 > 0$

Ta không thể dùng đạo hàm để chứng minh  $v(a) > 0$ . Hãy lưu ý đây là những bất đẳng thức thực sự nên chia để trị chắc chắn phải đi đến kết quả. Sử dụng chia để trị theo  $b$  để quy về bài toán một biến theo  $a$  nhờ đây: 0; 0.5; 0.75; 0.9; 1 ta sẽ chứng minh được  $v(a) > 0$ . Bây giờ trở lại bài toán.

$$\text{Đặt } f(a, b_1, b_2) = \frac{(1-b_2)[3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2a(3b_2^2+2b_2+1)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2)]}{a-1}$$

$$+ \frac{(a-1)[3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2)]}{1-b_1}$$

$$+ 3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-4a(3a^2+2ab_2+b_2^2) \text{ với } 0 \leq b_1 < b_2 \leq 1.$$

Không khó khăn ta có thể chứng minh được:  $f(a, b, b) > f(a, b_1, b_2) \quad \forall b \in [b_1, b_2]$

Hàm  $f(a, b_1, b_2)$  không hẳn đã đồng biến theo  $b_1$  và nghịch biến theo  $b_2$ , tuy nhiên  $f(a, b, b) > f(a, b_1, b_2)$  đúng,  $\forall b \in [b_1, b_2]$  được suy ra từ các đánh giá sau:

$$3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)$$

$$> 3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2a(3b_2^2+2b_2+1)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2), \forall b \in [b_1, b_2]$$

$$\text{và } 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)$$

$$> 3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2), \forall b \in [b_1, b_2]$$

Cuối cùng, ta thực hiện phép chia để trị theo biến  $b$  để quy về bất đẳng thức 1 biến theo  $a$  nhờ đây:

0; 0.29; 0.42; 0.51; 0.56; 0.6; 0.63; 0.65; 0.67; 0.685; 0.714; 0.726; 0.736; 0.746; 0.756;  
0.765; 0.774; 0.783; 0.792; 0.801; 0.81; 0.821; 0.833; 0.847; 0.863; 0.883; 0.91; 0.95; 1

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

• **Nhận xét:** Ở đây một lần nữa kỹ thuật chia các đại lượng xấp xỉ 0 mà ta đã dùng trong bài toán 1 lại phát huy tác dụng. Tuy nhiên, vì nó quá đơn giản nên việc chia để

trị phải thực hiện khá dài dòng. Nhưng cách làm này không phải là duy nhất, và chúng tôi hi vọng bạn đọc sẽ có cách giải khác ngắn gọn hơn.

Chúng ta kết thúc mục này với một bài toán đã giới thiệu ở đầu chuyên đề.

**Bài toán 4.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x + y + z = 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

Trước khi giải bài này, xin nói đôi lời về xuất xứ của nó. Bài toán này đã được đưa lên Diễn đàn Toán học và Mathsfriend.net nhưng vẫn không nhận được lời giải. Nó được làm mạnh từ bài toán dưới đây của Phan Thành Nam.

**Bài toán ban đầu.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x + y + z = 0$ . Chứng minh rằng:

$$T = \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 3$$

Sau đây là lời giải đầu tiên của tác giả bài toán, một lời giải hay về mặt ý tưởng.

**Bổ đề 1:** Cho các số thực  $a, b, u, v$  sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó 2 điều sau là tương đương:

$$(i) \sqrt{a+u^2} + \sqrt{b+v^2} \geq \sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}$$

$$(ii) 4(u-v)(bu-av) \geq (a-b)^2$$

Trở lại bài toán. Ta xét thử khi nào thì có bất đẳng thức dưới dạng sau:

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}} + \sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}} \geq \sqrt{2(2+x+y)+\frac{(y+z)^2}{4}} \quad (1). \text{ Theo bổ đề 1 thì (1) đúng khi}$$

$$(y-z)[y(1+y)-z(1+x)] \geq (x-y)^2 \text{ hay } (y-z)^2 + (y^3-z^3) \geq (x-y)^2$$

$$\text{Xét 3 bất đẳng thức sau: } (y-z)^2 + (y^3-z^3) \geq (x-y)^2 \quad (2)$$

$$(z-x)^2 + (z^3-x^3) \geq (y-z)^2; (x-y)^2 + (x^3-y^3) \geq (z-x)^2$$

Do khi cộng 3 bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức đúng nên phải có ít nhất một trong 3 bất đẳng thức đúng. Không giảm tổng quát, giả sử (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}}, b = \sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}} \text{ thì } (1) \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4-2z+\frac{x^2}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ đó ta có: } \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} = \sqrt{a^2+\frac{3}{4}y^2} + \sqrt{b^2+\frac{3}{4}z^2}$$

$$\geq \sqrt{(a+b)^2 + \frac{3}{4}(|y|+|z|)^2} \geq \sqrt{4-2z+\frac{3}{4}(|y|+|z|)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức ở trên ta tiếp tục thực hiện việc "đồn căn":

$$T \geq \sqrt{4-2z+\frac{3}{4}(|y|+|z|)^2} + \sqrt{1+z+\frac{3}{4}x^2} \geq \sqrt{(\sqrt{4-2z}+\sqrt{1+z})^2 + \frac{3}{4}(|x|+|y|+|z|)^2}$$

$$\geq \sqrt{(\sqrt{4-2z} + \sqrt{1+z})^2} + 3z^2 \quad (\text{do } |x| + |y| + |z| \geq |x+y| + |z| = 2|z|)$$

$$\text{Cuối cùng, ta có: } \sqrt{(\sqrt{4-2z} + \sqrt{1+z})^2} + 3z^2 \geq 3 \Leftrightarrow (\sqrt{4-2z} + \sqrt{1+z})^2 + 3z^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4-2z)(1+z)} \geq 4+z-3z^2 \Leftrightarrow 4(4-2z)(1+z) \geq (4+z-3z^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 15z^2 + 6z^3 - 9z^4 \geq 0 \Leftrightarrow 3z^2(1+z)(5-3z) \geq 0 \quad (\text{đúng } \forall z \in [-1; 1])$$

Vậy bài toán chứng minh xong! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 0$ .

Bài toán này đã được đưa lên *Diễn đàn Toán học*, và ở đó đã nhận được lời giải rất đơn giản sau đây của thầy Trần-Nam Dũng.

**Bổ đề 2:** Cho các số thực  $a, b$  sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa.

$$\text{Khi đó: } \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow ab \geq 0$$

Trở lại bài toán: Trong 3 số  $x+y^2, y+z^2, z+x^2$  phải có 2 số cùng dấu (tức là tích của chúng  $\geq 0$ ), ta có thể giả sử là  $x+y^2$  và  $y+z^2$ . Khi đó, áp dụng bổ đề:

$$\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 1 + \sqrt{(1+x+y+z^2)+y^2} + \sqrt{(1+z)+x^2} \geq$$

$$\geq 1 + \sqrt{(\sqrt{1+x+y+z^2} + \sqrt{1+z})^2} + (y+x)^2 \geq 1 + \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2} + z^2$$

$$\text{Cuối cùng, ta chứng minh: } (\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + z^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 2+2z^2+2\sqrt{(1-z+z^2)(1+z)} \geq 4 \Leftrightarrow z^2 + \sqrt{1+z^3} \geq 1.$$

$$\text{Nếu } z \geq 0 \text{ thì } \sqrt{1+z^3} \geq 1; \text{ nếu } z < 0 \text{ thì } z^2 + \sqrt{1+z^3} \geq z^2 + 1 + z^3 = 1 + z^2(1+z) \geq 1.$$

Bài toán chứng minh xong!

Như vậy Bài toán 4 là kết quả làm mạnh của chúng tôi cho bài toán ban đầu, ở đây đẳng thức xảy ra tại hai chỗ là  $x = y = z = 0$  và  $x = 0, y = 1, z = -1$ . Việc xuất hiện hai điểm "nhảy cảm" như trên khiến các đánh giá ở trên lập tức gặp trở ngại. Tuy nhiên bằng "chia để trị" ta dễ dàng khắc phục.

**Lời giải bài toán 4.**

**Bước 1a:** (khoanh vùng điểm nhảy cảm thứ nhất)

Trước hết chúng ta cứ việc lặp lại con đường cũ của thầy Trần Nam Dũng:

Trong ba số  $x + \frac{7}{9}y^2, y + \frac{7}{9}z^2, z + \frac{7}{9}x^2$  phải có ít nhất 1 cặp cùng dấu mà ta có thể giả

sử là  $(x + \frac{7}{9}y^2)(y + \frac{7}{9}z^2) \geq 0$ . Khi đó ta có đánh giá:

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 1 + \sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}$$

$$= 1 + \sqrt{\left(1 - z + \frac{7}{9}z^2\right) + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{\left(1 + z\right) + \frac{7}{9}z^2} \geq 1 + \sqrt{\left(1 - z + \frac{7}{9}z^2\right) + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{\left(1 + z\right) + \frac{7}{9}z^2}$$

**\*Nhận xét:** bước đánh giá ở chỗ này chỉ đảm bảo dấu bằng ở vị trí thứ nhất xảy ra, còn khi  $x \approx 0$ ,  $y \approx 1$ ,  $z \approx -1$  thì biểu thức bên phải đã nhỏ hơn 3 nên việc chứng minh trực tiếp là không tương. Chính vì vậy mục tiêu của bước này chỉ là tách li ba biến  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ra khỏi vùng nhạy cảm thứ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Xét } \left(\sqrt{1 - z + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1 + z}\right)^2 + \frac{7}{9}z^2 &\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{9}z^2 + \frac{7}{9}z^2} \geq 1 - \frac{7}{9}z^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4z^2}{3} + \frac{7z^3}{9} - \frac{49z^4}{81} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{49}{81}z^2 - \frac{7}{9}z - \frac{4}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - 3\sqrt{57}}{14} \leq z \leq \frac{9 + 3\sqrt{57}}{14} \end{aligned}$$

Như vậy  $z \geq -0.95$  thì bài toán được giải quyết. Do vậy ở bước tiếp theo ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu đúng  $\forall z \in [-1, -0.95]$  nữa là xong.

**Bước 1b:** (khoanh vùng điểm nhạy cảm thứ 2)

Xét  $y \in [0.7, 1]$ ,  $x \in [0.95 - y, 1 - y]$  và  $z \in [-1, -0.95]$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ban đầu đúng. Thật vậy, biến đổi tương đương:

$$\sqrt{1 + x + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}(x + y)^2} + \sqrt{1 - x - y + \frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

Ta xem  $y$  là một hằng số bất kì thuộc  $[0.7, 1]$ . Đặt

$$f(x) = \sqrt{1 + x + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}(x + y)^2} + \sqrt{1 - x - y + \frac{7}{9}x^2} - 3, \quad \forall x \in [0.95 - y, 1 - y]$$

Nhiệm vụ của ta là chứng minh  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0.95 - y, 1 - y]$ . Ta có:

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 + 9x + 7y^2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7x + 7y}{\sqrt{9 + 9y + 7(x + y)^2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{-9 + 14x}{\sqrt{9 - 9x - 9y + 7x^2}}$$

$$\text{Đặt } g(a, b, y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 + 9b + 7y^2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7a + 7y}{\sqrt{9 + 9y + 7(b + y)^2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{-9 + 14a}{\sqrt{9 - 9a - 9y + 7b^2}}$$

Hàm  $g(a, b, y)$  tăng theo  $a$  và giảm theo  $b$  nên  $f'(x) = g(x, x, y) \leq g(1 - y, 0.95 - y, y)$

Dễ dàng kiểm tra  $g(1 - y, 0.95 - y, y) < 0, \forall y \in [0.7, 1]$  (đây là bất đẳng thức thực sự 1 biến số). Vậy  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [0.95 - y, 1 - y]$ , suy ra  $f(x)$  giảm trên  $[0.95 - y, 1 - y]$ .

$$\text{Do đó } f(x) \geq f(1 - y) = \sqrt{2 - y + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{\frac{16}{9} + y} + \sqrt{\frac{7}{9}(1 - y)^2} - 3$$

Đặt  $h(y) = f(1 - y)$ ,  $y \in [0.7, 1]$ . Ta dễ dàng kiểm tra  $h'(y) < 0 \quad \forall y \in [0.7, 1]$  (đây là bất đẳng thức thực sự một biến số) nên  $h(y) \geq h(1) = 0$ .

• **Bước 2a:** (chuẩn bị)

Xét các trường hợp còn lại là  $z \in [-1; -0.95]$ ,  $y \in [-0.05; 0.7]$ . Hai điểm nhảy cảm đã được tách li và bất đẳng thức của ta lúc này là một bất đẳng thức thực sự. Thay  $x = -z - y$  vào bất đẳng thức ban đầu, ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{1 - z - y + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1 + z + \frac{7}{9}(y + z)^2} \geq 3$$

Đặt  $a = -z$  thì  $a \in [0.95; 1]$  và bất đẳng thức trên được viết lại:

$$\sqrt{1 + a - y + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}a^2} + \sqrt{1 - a + \frac{7}{9}(y^2 + 2ya + a^2)} \geq 3$$

• **Bước 2b:** (chia để trị)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức cuối khi  $y \in [-0.05; 0.7]$  và  $a \in [0.95; 1]$ ,

Sử dụng phương pháp chia để trị theo biến  $y$  để quy về bài toán một biến theo  $a$  nhờ dãy sau:  $-0.05; 0.35; 0.48; 0.57; 0.62; 0.65; 0.68; 0.7$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

## VII. KIỂM TRA BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ MỘT BIẾN SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẬP

Đối với bất đẳng thức thực sự một biến số, ta cũng có thể kiểm tra bằng phương pháp lập nhờ kết quả sau đây.

**1. Định lý.** Cho  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  một hàm tăng và liên tục,  $[a, b]$  là 1 khoảng đóng trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó hai mệnh đề sau đây là tương đương:

(i)  $f(x) > x, \forall x \in [a, b]$

(ii) Dãy  $x_0 = a, x_n = f(x_{n-1})$  thỏa mãn:  $x_n > b$  với  $n$  đủ lớn.

### Chứng minh

(i) suy ra (ii):

Từ (i) nói riêng ta có  $f(a) > a$ . Điều này cũng có nghĩa là  $x_1 > x_0$ , mà  $f$  tăng nên suy ra dãy  $\{x_n\}$  là dãy tăng. Giả sử  $x_n \leq b, \forall n$  thì dãy  $\{x_n\}$  tăng và bị chặn trên (bởi  $b$ ) nên hội tụ về một giới hạn  $c \in [a, b]$ . Từ định nghĩa  $x_n = f(x_{n-1})$  và  $f$  liên tục, cho  $n \rightarrow +\infty$  để chuyển qua giới hạn ta được  $c = f(c)$ . Điều này mâu thuẫn với (i).

(ii) suy ra (i): Giả sử tồn tại  $c \in [a, b]$  sao cho  $f(c) \leq c$ . Vì  $x_0 = a \leq c$  nên bằng quy nạp, ta có:  $x_n = f(x_{n-1}) \leq f(c) \leq c$ . Điều này mâu thuẫn với (i).

Lưu ý rằng, cũng như ở 2., ở đây chúng ta chỉ cần hiểu ý nghĩa định lý để áp dụng, còn trong trình bày thì chỉ dùng những sự kiện hiển nhiên. Hơn nữa, chiều ta sẽ sử dụng chỉ là "(ii) suy ra (i)" và khi đó chỉ cần  $f$  đồng biến là đủ.

**2. Ví dụ 1.** Chứng minh rằng với  $x \in [0, 1]$  thì:  $\sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 > x+1$



**Chứng minh**

$$\sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 > x+1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 - 1 > x, \forall x \in [0, 1]$$

Để thấy  $f$  đồng biến trên  $[0, 1]$ . Giả sử tồn tại  $z \in [0, 1]$  sao cho  $z \geq f(z)$ .

Ta có:  $z \geq 0 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0) = 0.1 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.1) > 0.19$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.19) > 0.29 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.29) > 0.4 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.4) > 0.56$$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.56) > 0.85 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.85) > 1.85 > 1.$$

Do  $z > 1$  mâu thuẫn với giả sử  $z \in [0, 1]$  nên suy ra  $f(x) > x, \forall x \in [0, 1]$  (đpcm)

• **Nhận xét 1:** Định lý trên cho ta một cách chia để trị "tối ưu" cho các bất đẳng thức thực sự một biến số có dạng  $f(x) - x > 0$  với  $f$  là hàm tăng và liên tục. Một câu hỏi tự nhiên là khi nào một bất đẳng thức có thể quy về dạng trên. Thực tế chỉ ra rằng hầu hết các bất đẳng thức một biến số đều có thể biến đổi được về dạng trên và có nhiều cách làm như vậy. Nhưng ở đây chúng tôi giới thiệu một cách dùng được cho nhiều trường hợp với việc sử dụng mệnh đề sau:

• **Mệnh đề:** giả sử  $g$  khả vi liên tục trên  $\mathbb{R}$  (hàm  $g$  có đạo hàm và đạo hàm liên tục) và  $g'(x) \leq -M, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó bất đẳng thức  $g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$  tương đương với bất đẳng thức  $f(x) > x, \forall x \in [a, b]$ , trong đó  $f(x) = x + \frac{g(x)}{M}, \forall x \in [a, b]$  là hàm tăng và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . (Chú ý rằng miền xác định  $\mathbb{R}$  có thể thay bằng các miền khác thích hợp mà không ảnh hưởng gì).

**3. Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi  $x > 1$  thì:  $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3.5 > 0$  (1)

**Chứng minh**

Đặt  $g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3.5$  thì  $g'(x) = 8x^3 - 6x^2 - 4x - 1$  chưa chắc dương.

Tuy nhiên:  $g'(x) + 3 = (8x^3 - 8x^2) + (2x^2 - 4x + 2) \geq 0$ . Do đó, ta thay (1) bởi bất đẳng

thức tương đương là  $f(x) > x$  với  $f(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 3.5}{3}$

Ta thấy  $f$  đồng biến trên miền  $x > 1$ . Giả sử tồn tại  $z > 1$  sao cho  $z \geq f(z)$ .

Thì ta có:  $z > 1 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1) = 1.16 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.16) = 1.2$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.2) = 1.23 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.23) = 1.26 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.26) = 1.29$$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.29) = 1.33 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.33) = 1.39 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.39) = 1.51$$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.51) = 1.79 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.79) = 3.24 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(3.24) = 47$$

Nhưng rõ ràng khi  $z > 47$  thì  $f(z) > z$  nên ta có (đpcm).

• **Nhận xét 2:** Đối với bài toán 1 biến số thì phương pháp lập là rất tiện dụng và đặc biệt thích hợp khi dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra bất đẳng thức. Tuy nhiên, nó không thể mở rộng cho bài toán 2 biến (hay nói chính xác hơn là chúng tôi chưa mở rộng được nó cho bài toán hai biến). Do đó để các bạn dễ theo dõi, ở II. chúng tôi chỉ giới thiệu một cách làm mà có thể nối kết với trường hợp 2 biến.

**VIII. NHÌN LẠI PHƯƠNG PHÁP DAC VÀ NHỮNG BÀI TOÁN THÁCH THỨC****1. Nhìn lại phương pháp DAC**

Các bạn thân mến, phương pháp chia để trị ra đời để giải quyết những bài toán khó mà chúng tôi đã thực sự gặp trở ngại khi áp dụng các phương pháp khác. Do đó, chúng tôi mong bạn đọc cũng sẽ sử dụng nó với mục đích này, vì thực tế chúng tôi vẫn thích một lời giải khác, nếu có, hơn là một lời giải bằng chia để trị. Tuy nhiên, điều đó không làm giảm ý nghĩa của phương pháp, bởi như các nhà toán học vẫn thường nói: "Trước khi tìm một lời giải đẹp, hãy tìm một lời giải đã!"

Theo đánh giá của chúng tôi thì bước khó nhất trong phương pháp này chính là "bước 1". Đây là bước đòi hỏi chúng ta phải giải được bài toán trong một trường hợp "nhỏ", nhưng "quan trọng". Như chúng ta thấy trong các ví dụ, bước này thường chứa nhiều biến hóa và nói chung là không đơn giản. Tuy nhiên, khó khăn này nằm ở bản chất bài toán, vì các bạn hãy tưởng tượng, nếu chúng ta không thể giải quyết bài toán trong một trường hợp nhỏ thì làm gì có hi vọng giải nó trong trường hợp tổng quát. Nói như vậy nghĩa là chia để trị không thể giúp chúng ta né tránh khó khăn, mà chỉ giúp chúng ta nhận thấy khó khăn thực sự ở đâu và cho phép chúng ta đối mặt trực tiếp với chúng (chúng ta chỉ phải giải quyết bài toán trong từng trường hợp nhỏ và không phải bận tâm đến các tình huống khác). Chính sự tập trung này sẽ cho chúng ta cơ hội nhiều hơn để giải quyết vấn đề. Như vậy, chia để trị không chỉ là vấn đề kỹ thuật mà còn liên quan đến khía cạnh tư duy. Đây là một điều rất quan trọng.

Các bạn thân mến, phương pháp chia để trị được hoàn thiện từ những ý tưởng ban đầu của Phan Thành Nam với nhiều lời giải đã đăng trên Diễn đàn Toán học. Trước đây, vì một số lý do, có nhiều bạn không hiểu được tư tưởng này và cho là lời giải quá quá phức tạp, hoặc nhầm lẫn với phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Tuy nhiên, chúng tôi hi vọng bây giờ các bạn đã hoàn toàn thông suốt tư tưởng này. Cuối cùng, chúng tôi lưu ý rằng sức mạnh của phương pháp chia để trị nằm ở sự linh hoạt của nó, mặc dù sơ đồ chứng minh đã đầy đủ, nhưng đối với mỗi bài toán riêng ta cần có cách đánh giá và ước lượng riêng tương ứng.

**2. Những bài toán thách thức**

Như chúng tôi đã nói, phương pháp chia để trị ra đời với mục đích giải quyết các bất đẳng thức khó, thậm chí rất khó, mà chủ yếu là các bài toán chưa có lời giải. Do đó, phần bài tập cũng khá đặc biệt một chút. Chúng tôi dẫn ra đây 10 bài toán mà mỗi bài đều chưa có lời giải hoàn chỉnh được công bố. Theo đánh giá của chúng tôi thì đây là các bất đẳng thức đẹp và khó. Hi vọng các bạn sẽ thu được nhiều điều thú vị khi tìm cách giải chúng



**Bài 1.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$3\sqrt{3}\left(\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\right)\geq\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$$

**Bài 2:** Cho  $x, y, z \in (-1; 1)$  và  $x + y + z = 0$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{1}{\sqrt{1+x+\frac{1}{3}y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y+\frac{1}{3}z^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z+\frac{1}{3}x^2}}\geq 3$$

**Bài 3:** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{x^3-y^3}{x^3+y^2+z}+\frac{y^3-z^3}{y^3+z^2+x}+\frac{z^3-x^3}{z^3+x^2+y}\leq 0$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$  thì:

$$\sqrt{\frac{a}{2+b^2}}+\sqrt{\frac{b}{2+c^2}}+\sqrt{\frac{c}{2+a^2}}\geq\sqrt{3}$$

**Bài 5:** Cho  $x, y, z \geq 0$  và  $xy + yz + zx = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}x+y}}+\frac{y}{\sqrt{\frac{5}{4}y+z}}+\frac{z}{\sqrt{\frac{5}{4}z+x}}\geq 2$$

**Bài 6:** Cho  $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2x+y^2+z^3}+\sqrt{2y+z^2+x^3}+\sqrt{2z+x^2+y^3}\geq 6$$

**Bài 7:** Cho  $x, y, z > 0, xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\leq\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}$$

**Bài 8:** Cho  $a, b, c > 0$ , chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{3a^3+2b^3}+\frac{b^4}{3b^3+2c^3}+\frac{c^4}{3c^3+2a^3}\geq\frac{a+b+c}{5}$$

**Bài 9:** Cho  $x, y, z > 0, xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{y+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{z+x^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

**Bài 10:** Cho  $x, y, z > 0, xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y^2}{y+z^k}+\frac{y+z^2}{z+x^k}+\frac{z+x^2}{x+y^k}\geq 3$$

với  $k = 1, 2, 3, 4$ . Tìm phản ví dụ với  $k = 5$ .

## Nhìn lại chương IV

Sáu cuộc hành trình đầy khó khăn nhưng cũng đầy hứng thú đã kết thúc, bây giờ là lúc để chúng ta dừng chân và nhớ lại tất cả những gì vừa trải qua. Cũng là lúc để chúng ta một lần nữa được chiêm ngưỡng vẻ đẹp của những viên kim cương hiện đại, lần này những viên kim cương đẹp để ấy đã được đặt cùng nhau trong một bức tranh gần như là hoàn mỹ, bao quát cả thế giới bất đẳng thức. Bắt đầu với với phương pháp tổng bình phương SOS, tiếp đến là phương pháp dồn biến MV, các phương pháp đánh giá tích ABC, hình học hóa đại số GLA và định lý biến số bằng nhau EV, cuối cùng là phương pháp chia đề trị DAC.

Phương pháp phân tích tổng bình phương, như tên gọi của nó, lấy ý tưởng từ định lý  $x^2 \geq 0$  với mọi  $x$  thực và có cơ sở chặt chẽ là các định lý Hilbert nói rằng mọi đa thức thuần nhất và không âm có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của các hàm hữu tỷ thực. Tuy nhiên việc biểu diễn các đa thức thuần nhất thành tổng các bình phương của các hàm hữu tỷ thực theo định lý Hilbert chỉ mang tính lý thuyết mà không có tính thực hành. Phương pháp phân tích tổng bình phương đã chỉ ra một cách khắc phục điều đó. Cụ thể, đối với bất đẳng thức ba biến đối xứng (hoán vị) ta có thể đưa được nó về dạng đơn giản  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$ . Từ biểu diễn đó ta tiến hành tìm hiểu mối quan hệ giữa các hệ số  $S_1, S_2, S_3$ . Nếu các hệ số đó có mối quan hệ đủ tốt, chẳng hạn như những điều kiện trong 5 mệnh đề mục II §17 thì ta có thể có ngay kết quả mong đợi. Ngoài ra đối với các bài toán hoán vị ta có thể tìm cách đưa bất đẳng thức về dạng  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(a-c)$ . Sau đó mới tiến hành đánh giá các hệ số  $S_1, S_2, S_3, S$ . Cách làm này có nhiều lợi thế đặc biệt đối với các bài toán hoán vị (có thể xem lại các ghi chú trong mục V §22, phương pháp chia đề trị).

Không giống như phương pháp phân tích tổng bình phương SOS, phương pháp dồn biến tìm cách thu hẹp bài toán  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  trên tập  $D$  về tập  $\Lambda$  nhỏ hơn. Tập  $D$  là tập con của  $\mathbb{R}^n$  trong khi đó  $\Lambda$  là tập con gồm các phần tử của  $D$ , thỏa mãn thêm tính chất nào đó, ví dụ mỗi phần tử của  $\Lambda$  thường có nhiều thành phần bằng nhau (dồn các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  về các giá trị trung bình) hoặc có nhiều thành phần nằm trên biên (dồn biến về biên). Để tiến hành điều đó, với mỗi phần tử  $x$  bất kỳ trong  $D$  ta sẽ tìm một dãy các phần tử khác  $x', x'', \dots$  sao cho  $F(x) \geq F(x') \geq F(x'') \geq \dots$ . Trong đó giới hạn của dãy này là một phần tử của  $\Lambda$  và như vậy chỉ cần cần chứng minh  $F(x) \geq 0$  với mọi  $x$  thuộc  $\Lambda$ . Dãy  $x, x', x'', \dots$  được xác định bởi một toán tử  $T$  nào đó, sao cho  $x' = T(x), x'' = T(x'), \dots$ . Đối với định lý dồn biến mạnh SMV (dồn biến về tâm) là  $T_1$  được định nghĩa trong định lý 1 mục V §18, và đối với định lý dồn biến không xác định UMV (dồn biến ra biên) là phép toán  $T = \min\{T_1, T_2\}$  trong đó  $T_1$  là phép toán được định nghĩa trong SMV và  $T_2$  được định nghĩa trong mục VII §18. Cuối cùng, định lý GMV ở mục XII đã tổng quát triệt để hai định lý SMV và UMV bằng cách đã chỉ ra một dãy

$T_1, T_2, \dots, T_n$  có tính chất đủ tốt để toán tử  $T$  định nghĩa bởi  $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  giúp cho sơ đồ chứng minh ở trên được vận hành như mong đợi. Cũng nên lưu ý rằng nếu như **SMV** chỉ thực sự hiệu quả với các bài toán bốn biến nhưng sẽ gặp khó khăn với các bài toán nhiều biến thì **UMV** và **GMV** nhờ các toán tử  $T$  xác định thoải mái hơn đã khắc phục được yếu điểm đó để trở thành công cụ rất hiệu quả đối với các bài toán nhiều biến.

Hai phương pháp **ABC**, **GLA** đi theo một hướng khác. Cụ thể, như đã biết bất đẳng thức một biến được coi là đã được giải quyết trọn vẹn nhờ các công cụ hàm số hoặc định lý **Fermat**. Một sự kiện hợp lý là bất đẳng thức càng ít biến thì càng dễ tấn công. Theo đó khi có bất đẳng thức  $F(a, b, c) \geq 0$  với ràng buộc  $\Phi(a, b, c)$  ta có thể cố định 2 biến  $a, b$  và coi  $F$  là hàm một biến  $G$  theo  $c$  để khảo sát. Tuy nhiên tùy theo ràng buộc  $\Phi$ , dạng của  $G$  và miền xác định phức tạp của  $c$  theo  $a$  và  $b$  khiến cho cách giải quyết này không hiệu quả. Để khắc phục điều đó phương pháp **ABC** thực hiện một phép đổi biến với  $A = a + b + c; B = ab + bc + ca; C = abc$ , bất đẳng thức ban đầu trở thành  $H(A, B, C) \geq 0$ . Đến đây ta cố định  $A, B$  và coi  $H$  là hàm một biến  $K$  theo  $C$ , ta có thể khảo sát  $K$  và đưa ra kết luận bài toán. Miền xác định của  $C$  lúc này sẽ là tập con nào đó của các khoảng được cho cụ thể trong các mệnh đề 1 và 2 mục I §19.

Cũng tương tự như vậy phương pháp **GLA** tiến hành đổi biến  $a, b, c$  thành  $p, R, r$  trong đó  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $XYZ$  có độ dài ba cạnh lần lượt là  $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ . Bất đẳng thức mới lúc này sẽ là  $H(p, R, r) \geq 0$ . Ta cố định  $R, r$  và coi  $H$  là hàm một biến  $K$  theo  $p$ , ta có thể khảo sát  $K$  và đưa ra kết luận bài toán. Chú ý là miền xác định của  $p$  lúc này sẽ là tập con của khoảng được cho cụ thể trong định lý III.3 §20.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: “đâu là sự khác biệt chủ yếu giữa **ABC** và **GLA**”. Thực ra có thể thấy ngay rằng hai phương pháp này chỉ hiệu quả khi các hàm một biến theo  $C$  và  $p$  đủ tốt (đơn điệu). Độ tốt của các hàm này lại phụ thuộc vào dạng của bất đẳng thức ban đầu. Kinh nghiệm cho thấy đổi biến theo **ABC** tuy đơn giản nhưng lại chỉ hiệu quả đối với các dạng đa thức, hoặc phân thức ít chứa căn, còn khi gặp các biểu thức nhiều tầng căn thì đánh giá hàm một biến theo  $C$  là rất khó khăn. Ngược lại, mặc dù đổi biến theo **GLA** hơi phức tạp, nhưng đối với các dạng chứa nhiều căn thức thì việc khảo sát hàm một biến theo  $p$  lại là khá thuận tiện. Như vậy sự khác biệt giữa **ABC** và **GLA** chủ yếu nằm ở phạm vi ứng dụng.

Một điểm đáng chú ý khác là với  $\Phi$  đủ tốt, chẳng hạn trong trường hợp  $\Phi = \{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0\}$  thì với mọi  $A, B$  cố định luôn tồn tại  $a, b, c$  sao cho trong ba số này có một số bằng 0 hoặc hai số bằng nhau để  $C$  đạt các giá trị biên, cũng như vậy, với mọi  $R, r$  cố định luôn tồn tại ba số thực không âm  $a', b', c'$  mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác  $X'Y'Z'$  với độ dài 3 cạnh là  $b' + c', c' + a', a' + b'$  cũng có  $R = R'$  và  $r = r'$ , khi đó  $p'$  cũng đạt các giá trị biên. Đó lần lượt là nội dung của các mệnh đề 3 và 4 mục I §19 và các ghi chú trong mục VII §20. Từ các mệnh đề đặc biệt này dẫn tới kết quả là nếu hàm  $K(C)$  và  $K(p)$  đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp trong ba biến  $a, b, c$  có một biến bằng 0 hoặc 2 biến bằng nhau. Hai kết quả khá tương đồng này giữa

**ABC** và **GLA** cho thấy rằng quá trình giám biến sau khi đổi biến đã dẫn tới một hiện tượng thú vị: thực chất ta đã gián tiếp thực hiện một phép “đồn biến”.

Mặt khác, nhận xét rằng trong **GLA** thực chất của việc cố định  $R, r$  là cố định  $ab + bc + ca$  và  $\frac{a+b+c}{abc}$ , còn việc khảo sát  $p$  đồng nghĩa với khảo sát  $a + b + c$ . Định lý **ABC** mở rộng cho phép chọn tùy ý 2 trong 3 biến  $a + b + c, ab + bc + ca, abc$  để cố định và khảo sát theo biến còn lại. Về phía mình định lý biến số bằng nhau **EV** mục I, §21 trong trường hợp riêng  $n = 3$  và  $p = 0$  nghiệm lại một phần của định lý **ABC** mở rộng, ở đó ta cố định  $a + b + c$  và  $abc$  để khảo sát theo  $ab + bc + ca$ . Trong trường hợp  $n = 3$  và  $p = 2$  ta cũng thu được một phần định lý **ABC** mở rộng, ở đó ta cố định  $a + b + c$  và  $ab + bc + ca$  để khảo sát theo  $abc$ . Trong trường hợp tổng quát định lý biến số bằng nhau là một mở rộng thực sự triệt để khi cố định  $a + b + c$  và  $a^n + b^n + c^n; (n = 3)$  và khảo sát được một lớp hàm  $F$  xác định bởi một số điều kiện khá chặt chẽ, một là hàm  $F$  phải có tính chất phân lý biến:  $F(a, b, c) = f(a) + f(b) + f(c)$ , hai là đẳng thức của  $F$  phải đủ tốt ( $f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là lời nghiệm ngặt trên  $(0, +\infty)$ ), ngoài ra còn một số điều kiện bổ sung. Chính điều đó cũng khiến tầm ứng dụng của **EV** không thực sự rộng, đặc biệt đối với các bất đẳng thức hoán vị thì định lý **EV** gần như trở nên vô hiệu.

Câu hỏi đặt ra là với các bài toán hoán vị liệu có thể có những cách đổi biến khác tiện ích hơn không, và nếu phải chọn biến cố định trước khi khảo sát hàm số theo các biến còn lại thì chọn như thế nào là tối ưu. Vấn đề này đã từng được đề cập một chút trong mục VI §19, tuy nhiên cách giải quyết khi đó là dùng một phép đối xứng hóa, và như thế vẫn có rất nhiều yếu điểm. Định lý 1 và định lý 2 mục IX §20 là một hướng đi mới. Chú ý rằng một khó khăn trong các bài toán bất đẳng thức là việc có các số mũ, chính các số mũ khiến cho các phương pháp gặp rất nhiều khó khăn. Định lý 2 đã giúp ta xử lý vấn đề này. Cụ thể đối với các bất đẳng thức  $F(a, b, c) \geq 0$  ta tìm cách đưa về dạng  $A' + B' + C'$ , sau đó dựa vào định lý 2 và định lý 1, công việc còn lại là chứng minh các hệ kiểu (\*) (ví dụ 1 và ví dụ 2 mục IX §20) có nghiệm. Đây là một sự mở rộng thực sự của cả **ABC** và **GLA**. Và về thực chất, chúng ta đang phát triển tiếp hiện tượng “đồn biến gián tiếp” như đã đề cập ở trên.

Phép đồn biến gián tiếp này đặc biệt có lợi đối với các bất đẳng thức hoán vị, vì đối với các bất đẳng thức đó thì khó khăn chính nằm ở việc dấu đẳng thức xảy ra khi các biến  $a, b, c$  rất lệch nhau. Nhưng với phép đặt thích hợp, tất cả các trường hợp đó đều sẽ nằm trong một điều kiện duy nhất, chẳng hạn  $A = B$ . Chú ý rằng khó khăn chính nằm ở việc chọn phép đổi biến thích hợp để ta vừa đưa được bất đẳng thức về dạng mong muốn, vừa đảm bảo hệ (\*) nói trên có nghiệm.

Đây sẽ là một vấn đề mở thực sự khó, thách thức các bạn đọc ham mê sáng tạo bất đẳng thức.

Điều cuối cùng chúng tôi muốn nói đến là phương pháp chia để trị (**DAC**). Mặc dù phương pháp này được xếp cùng một mục nhưng tinh thần của nó lại hoàn toàn khác với các phương pháp **SOS, MV, ABC, GLA, EV**. Cụ thể đối với bất đẳng thức  $F(x) \geq 0$  trên miền  $D$ , phương pháp chia để trị tìm cách chia nhỏ miền  $D$  thành các miền  $D_1, D_2, \dots$  sao cho trên mỗi miền đó ta có thể có những đánh giá đơn giản, sau đó dựa vào kết quả các định lý nổi dài ta đi tới điều cần chứng minh. Đây là một tư tưởng rất phổ biến không chỉ trong lĩnh vực bất đẳng thức, mà còn rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực Toán học và đặc biệt là trong Tin học.

## CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

### § 23. NHỮNG BÀI VIẾT CHỌN LỌC VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

#### § 23.1. VỀ MỘT DÂY BẤT ĐẲNG THỨC BẬC BA VÀ ỨNG DỤNG

##### I. DÂY BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC BẬC 3

**Mệnh đề:** Với hai số thực dương  $x, y$  ta chứng minh được

$$\frac{xy(x+y)}{2} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} \leq \frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3} \quad (1)$$

Đây là một bất đẳng thức rất đơn giản dành cho học sinh THCS. Tuy nhiên chúng ta sẽ thấy nó có nhiều ứng dụng giá trị trong chứng minh bất đẳng thức. Trước hết ta sẽ chứng minh dây các bất đẳng thức này.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \geq \frac{xy(x+y)}{2} \Leftrightarrow (x+y)^3 \geq 4xy(x+y) \Leftrightarrow x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

$$\frac{x^3+y^3}{2} = \frac{(x+y)(3x^2-3xy+3y^2)}{6} = \frac{(x+y)[2(x-y)^2+(x^2+xy+y^2)]}{6} \geq \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}$$

$$\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} = \frac{(x+y)(4x^2+4xy+4y^2)}{24} = \frac{(x+y)[3(x+y)^2+(x-y)^2]}{24} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$$

Sử dụng bất đẳng thức  $AM - GM$  ta có

$$\frac{(x^3+y^3)}{2} = \frac{(x+y)^4(4x^2-4xy+4y^2)}{4(x+y)^3} \leq \frac{[(x+y)^2+(x+y)^2+(4x^2-4xy+4y^2)]^3}{27 \cdot 4(x+y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3}$$

Dễ dàng thấy rằng (1) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi  $x = y$ .

##### II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Sau đây ta sẽ nêu một số ví dụ minh họa việc ứng dụng dây bất đẳng thức (1)

**Bài 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad (2)$$

##### Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức (1), với mọi số thực dương  $d$ , ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \frac{c^3+d^3}{2} \geq \left(\frac{c+d}{2}\right)^3$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, và tiếp tục áp dụng bất đẳng thức (1) ta nhận được

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^3 \geq 2 \left[\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right)\right]^3 = \frac{1}{32}(a+b+c+d)^3$$

Với  $d = \frac{a+b+c}{3}$ , từ bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{2} \geq \frac{1}{32} \left(a+b+c + \frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 2 \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ hay}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq 4 \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ hay } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 2. [Crux]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, từ (2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} &\geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left[\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{6}\right]^3 \geq \\ &\frac{1}{6^3} \cdot (3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)})^3 = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \end{aligned}$$

Do đó, kết hợp việc sử dụng bất đẳng thức  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , với mọi  $x, y > 0$ , ta được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}} + \frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}} + \frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq 2$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $\sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} \geq b + c$

Do đó  $a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} \geq a + b + c$ . Suy ra  $\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}} \leq \frac{b+c}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $\frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}} \leq \frac{c+a}{a+b+c}$ ,  $\frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq \frac{a+b}{a+b+c}$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}} + \frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}} + \frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .



**Bài 4. [USA 1997]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

Do đó  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$ . Suy ra  $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$

Tương tự ta có  $\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}$ ,  $\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{a+b+c} \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{abc}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 5. [Romania 1997]** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xyz = 1$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} + \frac{y^9 + z^9}{y^6 + y^3z^3 + z^6} + \frac{z^9 + x^9}{z^6 + z^3x^3 + x^6} \geq 2$$

**Chứng minh**

Bằng cách đặt  $a = x^3, b = y^3, c = z^3$  thì  $abc = 1$ . Bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq 2$$

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x+y}{3}$ , suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \\ & \geq \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c) \geq \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 2 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$  hay  $x = y = z = 1$ .

**Bài 6. [Poland 2007]** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$

Chứng minh rằng: 
$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d) - 4 \quad (3)$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{x+y}$ . Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + d^2}{c+d} + \frac{d^2 + a^2}{d+a}$$

Vì vậy, để chứng minh (3), ta cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+d^2}{c+d} + \frac{d^2+a^2}{d+a} \leq 2(a+b+c+d) - 4$$

Ta lưu ý rằng  $a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ . Do đó, nếu đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$  thì ta

có được  $x+y+z+t=4$  và khi đó, (4) được viết dưới dạng  $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+t} + \frac{1}{t+x} \geq 2$ .

Sử dụng bất đẳng thức  $(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2, a_i > 0, i=1,2,\dots,n$ , ta được

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+t} + \frac{1}{t+x} \geq \frac{4}{(x+y)+(y+z)+(z+t)+(t+x)} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=t=1$  hay  $a=b=c=d=1$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $k \geq \frac{2}{3}$ . Chứng minh rằng:  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

#### Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\frac{2}{3}(a+b+c) = \frac{2a+(b+c)+(b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{2a \cdot (b+c)^2} \text{ hay } \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{a}{a+b+c}$$

Do đó với  $k = \frac{2}{3}$  thì  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

Nếu  $k > \frac{2}{3}$ , ta đặt  $m = \frac{3}{2}k$  thì  $m > 1$ . Sử dụng  $\frac{x^m+y^m+z^m}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m, \forall x, y, z > 0$

Đặt  $x = \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}, y = \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}, z = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}$  thì  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

**Bài 8.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xyz = 1$ .

Chứng minh rằng  $\frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y} \geq 1$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

Chứng minh rằng  $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$

**Bài 10.** [JBMO 2002, Shortlist] Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

Chứng minh rằng  $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3} + \sqrt[3]{4b^3+4c^3} + \sqrt[3]{4c^3+4a^3} \leq \frac{4a^2}{a+b} + \frac{4b^2}{b+c} + \frac{4c^2}{c+a}$$



## § 23. 2. ĐỔI BIẾN SỐ ĐỂ SÁNG TẠO VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phép đổi biến số ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức đã được đề cập khá nhiều trong cả cuốn sách. Thậm chí trong chương IV khi phân tích về hai phương pháp ABC và GLA chúng tôi đã chỉ ra cho các bạn thấy rằng phép đổi biến không chỉ giúp chúng ta có nhiều thuận lợi hơn trong việc chứng minh trực tiếp bất đẳng thức mà cũng rất có ích trong cả việc giảm biến hoặc thực hiện các phép “dồn biến gián tiếp”. Do những ý nghĩa đó, bài viết này sẽ tập trung tìm hiểu kỹ hơn về các nguyên tắc cơ bản của phép đổi biến.

### I. ĐỔI BIẾN ĐỂ SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC

Nếu bạn đọc theo dõi cuốn sách từ đầu cho đến trang này thì bạn đã trải qua rất nhiều phương pháp (các viên kim cương) để giải các bất đẳng thức khó và rất khó. Tuy nhiên, dù bạn có giải được một bài toán khó thì không có nghĩa là bạn đã chinh phục được nó 100% mà theo chúng tôi bạn chỉ chinh phục được 49%. Giá trị 51% còn lại sẽ thuộc về người sáng tác ra đề toán. Như vậy, người sáng tác ra đề toán được đánh giá cao hơn người giải bài toán bởi vì các bài toán đều không phải là “từ trên trời rơi xuống”, mà thường được bắt nguồn từ một vài ý tưởng nào đó. Vậy làm thế nào có thể sáng tạo ra một đề toán nói chung và một bất đẳng thức thú vị nói riêng? Câu trả lời luôn nằm trong tầm tay của các bạn vì có rất nhiều con đường để khám phá và sáng tạo ra các bài toán. Trong phần mở đầu của bài viết này chúng tôi sẽ tạo cảm xúc sáng tạo cho bạn từ những vấn đề đơn giản nhất trong bất đẳng thức.

**Bài toán 1.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  (1)

Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow 1 \geq 8 \cdot \frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b}$ . Đặt  $x = \frac{a}{b+c}$ ,  $y = \frac{b}{c+a}$ ,  $z = \frac{c}{a+b}$ , thì bất đẳng thức trở thành:  $1 \geq 8xyz$ . Vì bất đẳng thức này chứa các biến mới  $x, y, z$  nên ta cần phải thiết lập mối quan hệ giữa  $x, y, z$ . Để ý rằng:  $1+x = \frac{a+b+c}{b+c}$ , hay  $\frac{1}{1+x} = \frac{b+c}{a+b+c}$ . Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Như vậy chúng ta tạo ra bài toán mới sau đây (ký hiệu ST được hiểu là sáng tạo):

**ST 1.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$  (2).

Chứng minh rằng:  $8xyz \leq 1$

Không mấy khó khăn, ta có thể phát biểu bài toán tổng quát:

**ST 2.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ;  $\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = n-1$ . Chứng minh  $x_1 \dots x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$  (3)

Đây là một bài toán khó. Tuy nhiên nếu biết “nguồn gốc” của nó thì việc tìm ra lời giải sẽ đơn giản. Từ bài toán này chúng ta có thể đặc biệt hóa để tạo ra bài toán sau đây:

**ST 3.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} + \frac{3z}{1+z} = 1$ . Chứng minh  $xy^2z^3 \leq \frac{1}{5^6}$

Bây giờ xét  $x, y, z > 0$ . Áp dụng bài toán 1 với  $a = y + z, b = z + c, c = x + y$ , ta có:

$(S+x)(S+y)(S+z) \geq 8(S-x)(S-y)(S-z)$  ở đây  $S = x + y + z$ . Mặt khác, theo bài toán 1 thì:  $(S-x)(S-y)(S-z) \geq 8xyz$ , nên:  $(S+x)(S+y)(S+z) \geq 8^2xyz$ . Kết hợp lại ta nhận được:  $(S^2 - x^2)(S^2 - y^2)(S^2 - z^2) \geq 8^3 x^2 y^2 z^2$ . Từ đó ta có bài toán 4

**ST 4.** Cho  $x, y, z > 0$ . Đặt  $S = x + y + z$ . Chứng minh  $\left(\frac{S^2}{x^2} - 1\right)\left(\frac{S^2}{y^2} - 1\right)\left(\frac{S^2}{z^2} - 1\right) \geq 8^3$  (4)

Để “che dấu” bớt  $S$ , ta cho  $S \leq 1$  và nhận được bài toán mới:

**ST 5.** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) > 8^3$  (5)

Đây là một bài toán khá hay. Nhưng ta sẽ thấy nó hay hơn qua mối quan hệ với bài toán dưới đây:

**ST 6.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$  (6)

(IMO2001)

Đặt  $x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}$ ;  $y = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}}$ ;  $z = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}$ , bất đẳng thức cần trở thành:

$x + y + z \geq 1$ . Bây giờ ta sẽ tìm mối liên hệ giữa  $x, y, z$ . Từ đẳng thức  $\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2} = 1$  ta thiết lập được mối quan hệ giữa  $x, y, z$ :

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2 + 8bc} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{8bc}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = 8^3$$

Như vậy ta cần chứng minh bài toán sau:

**ST 7.** Cho  $x, y, z > 0$ ,  $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = 8^3$ . Chứng minh rằng:  $x + y + z \geq 1$  (7)

Rõ ràng đây là một phát biểu theo dạng “ngược” của bài toán 5. Và đây cũng là một lời giải cho bài 6:

Bây giờ chúng ta tiếp cận bài toán 1 với  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh một tam giác. Sử dụng định lý hàm số sin trong tam giác ta có  $a = 2R \sin A; b = 2R \sin B; c = 2R \sin C$  khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right) \left(2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}\right) \left(2 \sin \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2}\right) \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

Biến đổi và rút gọn tiếp theo ta nhận được một bất đẳng thức khá hay trong tam giác.

**ST 8.** Chứng minh:  $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$  với mọi tam giác ABC

Như vậy từ một bài toán (1) rất đơn giản chúng ta có thể đổi biến để sáng tạo ra 8 bài toán mới. Chúng ta sẽ thực hiện tiếp ý tưởng này với một bài toán sau đây.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc} \quad \forall a, b, c \geq 0.$$

Đây cũng là một bài toán quen thuộc với nhiều bạn. Cách chứng minh ngắn nhất là đánh giá:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \text{ suy ra}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{ab(a+b+c)} = \sum_{cyc} \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Bây giờ đặt  $x = \frac{abc}{b^3 + c^3 + abc}; y = \frac{abc}{c^3 + a^3 + abc}; z = \frac{abc}{a^3 + b^3 + abc}$ , thì bất đẳng thức đã cho

trở thành  $x + y + z \leq 1$ . Từ đẳng thức  $\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2} = 1$  suy ra mối quan hệ giữa  $x, y, z$  như sau:

$$\frac{1}{x} = \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + 1 \Rightarrow \frac{2a^2}{bc} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - 1\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - 1\right) = 8$$

Để cho gọn, ta thay đổi hình thức, thế  $x, y, z$  bởi các ký hiệu nghịch đảo  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$  và đi đến:

**ST 1.** Cho  $x, y, z > 1$  thỏa mãn điều kiện:  $(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) = 8$

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$ .

Để ý rằng nếu  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  thì  $x, y, z > 1$ , ta sẽ phát biểu lại bài toán dưới dạng “ngược”:

**ST 2.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện:  $xy + yz + zx = xyz$

Chứng minh rằng:  $(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) \leq 8$

Qua 2 ví dụ nhỏ trên, có lẽ các bạn cũng đã hình dung ra một cách “sáng tạo bài toán mới” không tầm thường từ những bài toán rất đơn giản. Để rèn luyện tư duy sáng tạo bạn cần phải xây dựng thói quen lật đi lật lại vấn đề, suy nghĩ mở rộng, phân biệt giữa hình thức và bản chất.

Chính việc khai thác bài toán dưới các góc độ khác nhau sẽ giúp bạn thu được rất nhiều kiến thức quan trọng hơn rất nhiều so với việc đọc lời giải của nó mang lại, và cao hơn nữa nó sẽ giúp bạn sáng tạo ra các bài toán mới. Bây giờ các bạn hãy rèn luyện việc sáng tạo theo ý tưởng đổi biến của 2 ví dụ trên qua các bài toán sau:

**Bài 3.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{1}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{1}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

**Bài 6.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c = abc$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 \left( \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \right)$$

**Bài 8.** a. Chứng minh rằng:  $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad \forall a, b, c > 0$

b. Chứng minh rằng:  $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$  với  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực phân biệt.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2$$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{4}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$a(b+c)^3 + b(c+a)^3 + c(a+b)^3 \geq 0$$

**Bài 13.** Cho  $a, b, c \in [1, 2]$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$$

**Bài 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

## II. PHÉP ĐỔI BIẾN NGHỊCH ĐẢO TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Khi giải toán, mục đích chung của phép đổi biến số là nhằm chuyển tình thế từ bài toán khó biến đổi sang trạng thái dễ biến đổi hoặc đưa về các dạng toán gần gũi hơn. Chúng ta có thể gặp kỹ thuật đổi biến số không chỉ ở trong chứng minh bất đẳng thức mà còn ở trong các dạng toán giải phương trình, giới hạn, tích phân ... Trong các chương trước chúng ta cũng bắt gặp rất nhiều lần các bất đẳng thức giải bằng phương pháp đổi biến số, bây giờ chúng tôi xin giới thiệu một kỹ thuật đổi biến có thể đặt tên là: “Phép đổi biến nghịch đảo”.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{ab+bc+ca} + \frac{bcd}{bc+cd+da} + \frac{cda}{cd+da+ab} + \frac{dab}{da+ab+bc} \leq \frac{a+b+c+d}{3} \quad (1)$$

*Phân tích và tìm tòi lời giải*

**Bước 1:** Đánh giá độ chặt của bất đẳng thức (1)

Một hướng tư duy đơn giản là sử dụng **AM – GM** để có đánh giá đại diện:

$$\frac{abc}{ab+bc+ca} \leq \frac{(a+b+c)^3}{27(ab+bc+ca)}, \text{ tương tự cho 3 biểu thức còn lại ta được, khi đó ta có:}$$

$$VT(1) \leq \frac{(a+b+c)^3}{27(ab+bc+ca)} + \frac{(b+c+d)^3}{27(bc+cd+da)} + \frac{(c+d+a)^3}{27(cd+da+ab)} + \frac{(d+a+b)^3}{27(da+ab+bc)}$$

Từ đó cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{9(ab+bc+ca)} + \frac{(b+c+d)^3}{9(bc+cd+da)} + \frac{(c+d+a)^3}{9(cd+da+ab)} + \frac{(d+a+b)^3}{9(da+ab+bc)} \leq a+b+c+d \quad (1')$$

Tuy nhiên do  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$  nên ta có đánh giá:

$$\frac{(a+b+c)^3}{9(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9(ab+bc+ca)} = \frac{a+b+c}{3}$$

$$\text{Tương tự suy ra } VT(1') \geq \frac{a+b+c}{3} + \frac{b+c+d}{3} + \frac{c+d+a}{3} + \frac{d+a+b}{3} = a+b+c+d.$$

Như vậy cách đánh giá này không thành công và bài toán của chúng ta là có ý nghĩa.

**Bước 2:** Bây giờ ta sẽ bình tĩnh để tìm lời giải bài toán theo một lối tư duy khác sâu sắc hơn. Đề

ý là:  $\frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{\frac{ab+bc+ca}{abc}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ , do đó để giúp bài toán trở nên “gọn gàng”

với một hình thức dễ chịu hơn, ta đổi biến bằng cách đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$ .

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{y+z+t} + \frac{1}{z+t+x} + \frac{1}{t+x+y} \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \quad (2)$$

Theo *AM - GM* ta có:  $VP(2) = \frac{1}{9} \sum_{cyc} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{9} \sum_{cyc} \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{1}{3} \sum_{cyc} \frac{1}{x+y+z} = VT(2)$

**Nhận xét:** Việc đổi biến bằng cách lấy nghịch đảo  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$  là khá tự nhiên, và đây cũng chính là một kĩ thuật mà chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn trong bài viết này. Thực ra bằng một kĩ thuật đánh giá khác khó nhìn hơn một chút, cũng cho ta kết quả:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 27xyz \Rightarrow \frac{xyz}{xy+yz+zx} \leq \frac{x+y+z}{27}. \text{ Như vậy đổi biến trong bài}$$

này chưa hẳn là con đường duy nhất, tuy nhiên ở ví dụ sau các bạn sẽ nhận thấy rằng cách đổi biến như trên phải là con đường tắt yếu:

$$\text{Bài 2. Cho } a, b, c, d > 0 \text{ thỏa mãn: } \frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} + \frac{1}{2+d^2} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng:  $abcd \geq ab+ac+ad+bc+cd+db$

**Phân tích và tìm tòi lời giải**

$$\text{Ta có: } abcd \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}$$

Để bài toán đơn giản hơn ta đặt  $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}, d = \frac{1}{t}$  và quý về bài toán sau:

$$\text{Cho } x, y, z, t > 0 \text{ thỏa mãn: } \frac{x^2}{2x^2+1} + \frac{y^2}{2y^2+1} + \frac{z^2}{2z^2+1} + \frac{t^2}{2t^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng:  $1 \geq xy+xz+xt+yz+yt+zt$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2x^2+1} + \frac{y^2}{2y^2+1} + \frac{z^2}{2z^2+1} + \frac{t^2}{2t^2+1} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{2(x^2+y^2+z^2+t^2+2)}$$

$$\text{Suy ra } x^2+y^2+z^2+t^2+2 \geq (x+y+z+t)^2 \Leftrightarrow 1 \geq xy+xz+xt+yz+yt+zt \text{ (đpcm)}$$

Qua hai ví dụ đơn giản có lẽ các bạn đã phần nào thấy được vẻ đẹp của phương pháp đổi biến. Tuy nhiên để cảm nhận rõ hơn sức mạnh của phương pháp này, chúng ta hãy tiếp tục sử dụng đổi biến để giải quyết ví dụ rất đặc sắc sau đây:

**Bài 3.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $\sqrt[3]{5} \min(a, b, c) > \max(a, b, c)$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{5a^3-bcd} + \frac{1}{5b^3-cda} + \frac{1}{5c^3-abc} + \frac{1}{5d^3-abc} \geq \frac{64}{(a+b+c+d)^3} \quad (1)$$

**Phân tích và tìm tòi lời giải**

**Bước 1: Tìm hiểu bài toán:**

Điều kiện  $\sqrt[3]{5} \min(a, b, c) > \max(a, b, c)$  là cần thiết vì giả sử bỏ điều kiện này đi thì bài toán không còn đúng nữa, chẳng hạn cho  $a=10$  và  $b=c=d=1$ . Điều kiện này có ý nghĩa là để xác lập các bất đẳng thức đúng  $5a^3-bcd > 0, 5b^3-cda > 0, 5c^3-dab > 0, 5d^3-abc > 0$ .



**Bước 2:** Trở lại vấn đề, phân tích bài toán, rõ ràng khi nhìn vào bất đẳng thức (1) chúng ta có cảm giác là dường như bất đẳng thức này khá chặt và quả thật cũng rất khó tìm được một cách đánh giá khả thi để công phá bài toán (các bạn có thể thử bằng các đánh giá quen thuộc mà các bạn đã biết để cảm nhận rõ hơn điều này). Tuy nhiên hãy thử một phép đổi biến nho nhỏ:

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ ,  $t = \frac{1}{d}$ . Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^2}{5yzt - x^3} + \frac{y^2}{5ztx - y^3} + \frac{z^2}{5txy - z^3} + \frac{t^2}{5xyz - t^3} \geq \frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz + yzt + ztx + txy)^3} \quad (2)$$

Do  $\frac{x^2}{5yzt - x^3}, \frac{y^2}{5ztx - y^3}, \frac{z^2}{5txy - z^3}, \frac{t^2}{5xyz - t^3} > 0$  nên theo bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$VT(2) \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{5(xyz + yzt + ztx + txy) - (x^3 + y^3 + z^3 + t^3)} \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{4(xyz + yzt + ztx + txy)}$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh } \frac{(x + y + z + t)^2}{4(xyz + yzt + ztx + txy)} \geq \frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz + yzt + ztx + txy)^3}$$

$$\text{Hay } (x + y + z + t)^2 (xyz + yzt + ztx + txy)^2 \geq 256x^2y^2z^2t^2.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo **AM - GM**. Vậy ta có điều phải chứng minh!

**Nhận xét:** Ở bất đẳng thức (1) ta nhận thấy  $5a^3$  là “đại lượng mạnh” trong khi  $bcd$  là “đại lượng yếu”, từ đó ta thấy nếu  $5a^3 - bcd$  càng lớn thì  $\frac{1}{5a^3 - bcd}$  càng nhỏ, đây chính là nguyên nhân gây cho ta cảm giác rằng bất đẳng thức (1) khá chặt, và cũng gây khó dễ trong các phép đánh giá. Tuy nhiên bằng cách đổi biến nghịch đảo  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ ,  $t = \frac{1}{d}$  ta nhận được bất đẳng thức (2) với một tình trạng khác hẳn: trong bất đẳng thức này  $5yzt$  là đại lượng yếu còn  $x^3$  là đại lượng mạnh, nên  $5yzt - x^3$  càng nhỏ, đồng nghĩa với  $\frac{1}{5yzt - x^3}$  càng lớn. Do đó

bất đẳng thức (1) đã trở thành bất đẳng thức (2) khá lỏng. Để các bạn hiểu thêm về hiệu quả của phép đổi biến này chúng ta xét thêm một bài toán khó sau đây:

**Bài 4.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Tìm hằng số  $k > -1$  bé nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(ka + \sqrt{bc})(ka + \sqrt{cd})(ka + \sqrt{db})}} \geq \frac{4}{k+1} \quad (1)$$

#### Phân tích và tìm tòi lời giải

**Bước 1:** Phân tích bài toán, rõ ràng đẳng thức xảy ra tại vị trí thứ nhất mà ai cũng dễ dàng nhận ra đó là  $a = b = c = d$ . Tuy nhiên để tìm được  $k$  tốt nhất thì ta cần phải xác định thêm một vị trí khác nữa mà đẳng thức có thể xảy ra. Tất nhiên trong những trường hợp như thế này thì vị trí đầu bằng ở biên là nơi ta thường hay hướng đến:

Thử cho  $a$  tiến tới 0 và  $b, c, d$  là hằng số khi đó VT(1) tiến tới 1, nên để bất đẳng thức (1) luôn đúng thì phải có  $1 \geq \frac{4}{1+k}$  hay  $k \geq 3$ . Nhiều khả năng  $k = 3$  là giá trị nhỏ nhất để bất đẳng thức (1) đúng và ta sẽ chứng minh điều này.

**Bước 2:** Chứng minh cho trường hợp  $k = 3$ . Lúc này bất đẳng thức xảy ra tại hai chỗ đó là  $a = b = c = d$  hoặc  $a \rightarrow 0$  ( $b, c, d$  là các hằng số bất kỳ). Do đó trong các đánh giá ta cần phải đặc biệt chú ý sao cho dấu bằng phải đảm bảo xảy ra tại hai vị trí nói trên. Khi  $k = 3$ , (1) trở

thành:  $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(3a + \sqrt{bc})(3a + \sqrt{cd})(3a + \sqrt{db})}} \geq 1$  (2). Theo bất đẳng thức **Minkowski** ta có:

$$3a + \sqrt{bc} = \sqrt{(3a)(3a) + bc} \leq \sqrt{(3a+b)(3a+c)}$$

$$3a + \sqrt{cd} = \sqrt{(3a)(3a) + cd} \leq \sqrt{(3a+c)(3a+d)}$$

$$3a + \sqrt{db} = \sqrt{(3a)(3a) + db} \leq \sqrt{(3a+d)(3a+b)}$$

Nhân vế theo vế suy ra  $(3a + \sqrt{bc})(3a + \sqrt{cd})(3a + \sqrt{db}) \leq (3a+b)(3a+c)(3a+d)$

Do đó để chứng minh (2) ta cần chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(3a+b)(3a+c)(3a+d)}} \geq 1$  (3)

Bất đẳng thức dưới mẫu có dạng  $(a+3b)(a+3c)(a+3d)$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**:

$$(a+3b)(a+3c)(a+3d) \leq \left( \frac{a+3b+a+3c+a+3d}{3} \right)^3 = (a+b+c+d)^3$$

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ ,  $t = \frac{1}{d}$  khi đó:

$$VT(3) = \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{x^3}{(3y+x)(3z+x)(3t+x)}} \geq \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{x^3}{\left(\frac{3y+x+3z+x+3t+x}{3}\right)^3}} = \sum_{cyc} \frac{x}{x+y+z+t} = 1$$

Cuối cùng các bạn đọc hãy tự giải các bài tập sau để rèn luyện thêm về kỹ thuật đổi biến này

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $2 \min(a, b, c) > \max(a, b, c)$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 - bc} + \frac{1}{4b^2 - ca} + \frac{1}{4c^2 - ab} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

**Bài 6.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt[n-1]{\frac{a_2 a_3 \dots a_n}{((n-1)a_1 + a_2)((n-1)a_1 + a_3) \dots ((n-1)a_1 + a_n)}} \geq 1$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d > 0$  và  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{1+2d} + \frac{bcd}{1+2a} + \frac{cda}{1+2b} + \frac{dab}{1+2c} \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd$$



### § 23.3. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ TẠI BIÊN

Phương pháp này lần đầu tiên được thể hiện ở bài toán 1 dưới đây trong cuốn sách của tác giả *Phương pháp mới giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán* do Nhà xuất bản Giáo dục xuất bản năm 1995, sau này được trích dẫn trong phần "*Những lời giải ấn tượng*" của cuốn sách *Ba thập kỷ đề thi đại học môn Toán* do Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM xuất bản năm 2000. Bài viết này được hoàn thiện trên cơ sở tham khảo một số ví dụ minh họa của bài viết đăng trong tạp chí *Mathematical Reflextions* 4/2006 và các tài liệu trên Internet.

#### I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ CÁC ĐỊNH DẠNG HÌNH HỌC CƠ BẢN

##### 1. Nguyên lý chung

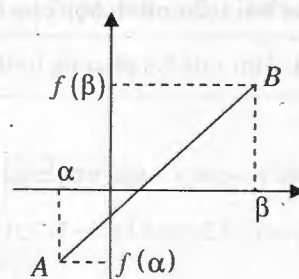
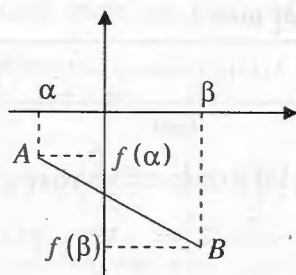
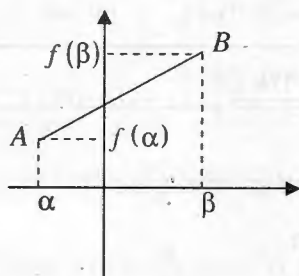
1.1. Bất phương trình (bất đẳng thức)  $f(x) \geq m$  đúng  $\forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$

1.2. Bất phương trình (bất đẳng thức)  $f(x) \leq m$  đúng  $\forall x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$

1.3. Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $D$  và  $\min_{x \in D} f(x) = m$ ;  $\max_{x \in D} f(x) = M$  thì tập giá trị của  $f(x)$

là  $[m; M]$  hay  $m \leq f(x) \leq M$  với mọi  $x \in D$

##### 2. Hàm bậc nhất



Hàm số  $f(x) = ax + b, \forall x \in [\alpha, \beta]$  có đồ thị là một đoạn thẳng nên có các tính chất sau

$$2.1. f(x) = ax + b \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \geq 0$$

$$2.2. f(x) = ax + b \leq 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq 0$$

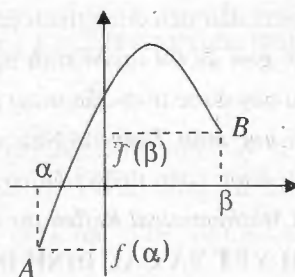
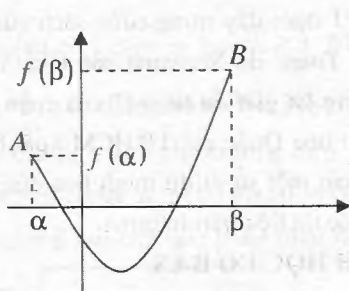
$$2.3. f(x) = ax + b \geq m, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq m \\ f(\beta) \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \geq m$$

$$2.4. f(x) = ax + b \leq m, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq m \\ f(\beta) \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq m$$

2.5. Nếu  $f(x) = ax + b, \forall x \in [\alpha, \beta]$  thì  $\min\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq f(x) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

2.6. Nếu hàm  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$  là hàm bậc nhất theo từng biến số  $x_k \in [\alpha, \beta]$  thì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất  $\Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n \in \{\alpha, \beta\}$

### 3. Hàm bậc hai và hàm lồi, hàm lõm



- 3.1. Nếu  $f(x) = ax^2 + bx + c, (a > 0)$  với  $x \in [\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$
- 3.2. Nếu  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$
- 3.3. Nếu  $f(x) = ax^2 + bx + c, (a < 0)$  với  $x \in [\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \geq \min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$
- 3.4. Nếu  $f(x)$  là hàm lõm trên  $[\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \geq \min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$

## II. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

### 1. Các bài toán minh họa cho hàm bậc nhất

**Bài 1.** Tìm  $x$  để bất phương trình  $x^2 + 2x(\sin y + \cos y) + 1 \geq 0$  đúng với  $\forall y \in \mathbb{R}$ .

*Giải*

Đặt  $u = \sin y + \cos y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , khi đó biến đổi bất phương trình về dạng sau:

$$g(u) = (2x)u + (x^2 + 1) \geq 0, \forall u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Leftrightarrow \min_{u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} g(u) \geq 0$$

Do đồ thị  $y = g(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  nên

$$\min_{u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} g(u) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(-\sqrt{2}) \geq 0 \\ g(\sqrt{2}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq \sqrt{2} + 1 \\ |x| \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

### Bài 2. [Mathematical Reflections 4/2006]

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$  Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$  (1)

*Chứng minh*

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + (b+c)^2 - 2bc + abc \geq 4 \Leftrightarrow a^2 + (3-a)^2 + (a-2)bc \geq 4$$

$$\Leftrightarrow f(u) = (a-2)u + 2a^2 - 6a + 5 \geq 0 \text{ trong đó } 0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(3-a)^2.$$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(3-a)^2\right]$ . Nhìn vào hai đầu mút ta có:

$$f(0) = 2a^2 - 6a + 5 = 2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0; f\left(\frac{1}{4}(3-a)^2\right) = \frac{1}{4}(a-1)^2(a+2) \geq 0$$

nên  $f(u) \geq 0; u \in \left[0; \frac{1}{4}(3-a)^2\right]$  hay  $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$

**Bài 3.** Chứng minh rằng:  $2(a+b+c) - (ab+bc+ca) \leq 4, \forall a, b, c \in [0, 2]$ .

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức về dạng sau  $f(a) = (2-b-c)a + 2(b+c) - bc \leq 4, \forall a, b, c \in [0, 2]$

Đồ thị  $y = f(a)$  là một đoạn thẳng với  $a \in [0, 2]$  nên  $f(a) \leq \max\{f(0); f(2)\}$

Ta có  $f(0) = 4 - (2-b)(2-c) \leq 4; f(2) = 4 - bc \leq 4 \Rightarrow f(a) \leq 4, \forall a, b, c \in [0, 2]$

**Bài 4. [IMO 25 – Tiệp Khắc 1984]**

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng:  $ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$  (1)

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow a(b+c) + (1-2a)bc \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow a(1-a) + (1-2a)bc \leq \frac{7}{27}$

$\Leftrightarrow f(u) = a(1-a) + (1-2a)u \leq \frac{7}{27}$  với  $0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$ . Nhìn vào 2 đầu mút ta có

$$f(0) = a(1-a) \leq \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$$

$$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) = \frac{1}{4}(-2a^3 + a^2 + 1) = \frac{1}{4}\left[\frac{28}{27} - 2\left(a - \frac{1}{3}\right)^2\left(a + \frac{1}{6}\right)\right] \leq \frac{7}{27}$$

Vậy  $f(u) \leq \frac{7}{27}, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$  hay  $ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh:  $a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}$  (1)

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1-c)^3 - 3ab(1-c) + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow ab(9c-3) + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(u) = (9c-3)u + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0 \text{ với } 0 \leq u = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-c)^2}{4}$$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right]$ .

Nhìn vào 2 đầu mút ta có  $f(0) = 3\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; f\left(\frac{1}{4}(1-c)^2\right) > 0$

Vậy  $f(u) \geq 0, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right]$  hay  $a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh:  $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1$  (1)

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow 4[(a+b)^3 - 3ab(a+b)] + 4c^3 + 15abc \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4[(1-c)^3 - 3ab(1-c)] + c^3 + 15abc \geq 1 \Leftrightarrow 4(1-c)^3 + 12ab(c-1) + 4c^3 + 15abc \geq 1$$

$$\Leftrightarrow f(u) = (27c-12)u + 4c^3 + 4(1-c)^3 \geq 1 \text{ với } 0 \leq u = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-c)^2}{4}$$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right]$ . Nhìn vào 2 đầu mút ta có

$$f(0) = 3(2c-1)^2 + 1 \geq 1; f\left(\frac{1}{4}(1-c)^2\right) = 1 + (1-c)^2 \left(\frac{19}{4} - c\right) \geq 1$$

$$\text{Vậy } f(u) \geq 1, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right] \text{ hay } 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1.$$

**Bài 7.** Chứng minh rằng:  $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$

**Chứng minh**

Biểu diễn bất đẳng thức dưới dạng hàm bậc nhất biến số  $a$ , tham số  $b, c, d$ , ta có:

$$f(a) = [1 - (1-b)(1-c)(1-d)]a + (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d \geq 1, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$$

Đồ thị  $y = f(a), \forall a \in [0, 1]$  là một đoạn thẳng nên  $\min_{a \in [0, 1]} f(a) = \min\{f(0), f(1)\}$

$$\text{Ta có } f(1) = b + c + d + 1 \geq 1, \forall b, c, d \in [0, 1]$$

$$f(0) = (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d \Leftrightarrow g(b) = [1 - (1-c)(1-d)]b + (1-c)(1-d) + c + d$$

Đồ thị  $y = g(b), \forall b \in [0, 1]$  là một đoạn thẳng nên  $\min_{b \in [0, 1]} g(b) = \min\{g(0), g(1)\}$

$$\text{Ta có } g(1) = c + d + 1 \geq 1; g(0) = (1-c)(1-d) + c + d = 1 + cd \geq 1 \Rightarrow f(0) = g(b) \geq 1, \forall b \in [0, 1]$$

$$\text{Vậy } f(a) \geq 1 \text{ hay } (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$$

**Bài 8.** Chứng minh:  $S = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1, \forall a, b, c \in [0, 1]$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ , khi đó

$$S \leq \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \Leftrightarrow f(a) = \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) - 1 \leq 0, \forall a, b, c \in [0, 1]$$

Đồ thị  $y = f(a), \forall a \in [0, 1]$  là một đoạn thẳng nên  $\max_{a \in [0, 1]} f(a) = \max\{f(0), f(1)\}$ . Ta có

$$f(0) = \frac{b+c}{b+c+1} + bc - (b+c) = \frac{bc(b+c) - (b^2 + c^2) - bc}{b+c+1} \leq \frac{(b^2 + c^2)\left(\frac{b+c}{2} - 1\right) - bc}{b+c+1} \leq 0$$

$$f(1) = \frac{1+b+c}{b+c+1} - 1 = 0. \text{ Từ đó suy ra } f(a) \leq 0, \forall a, b, c \in [0, 1] \Rightarrow S \leq 1, \forall a, b, c \in [0, 1]$$

**Bài 9.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} \in [-1, 1]$  với  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{2n} x_{2n+1} + x_{2n+1} x_1$$

**Giải**

Nếu coi  $x_1$  là biến số và cố định các biến số  $x_2, x_3, \dots, x_n$  thì  $S$  là hàm bậc nhất với  $x_1$  nên

$\min_{x_1 \in [-1, 1]} S(x_1) = \min\{S(-1), S(1)\}$ . Làm tương tự với các biến số  $x_k$  suy ra  $\min S$  đạt tại các giá

trị  $x_k \in \{-1, 1\}, \forall k = \overline{1, 2n+1}$ . Do có  $2n+1$  số hạng  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$  nên trong tập hợp

$\{x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_{2n} x_{2n+1}, x_{2n+1} x_1\}$  tồn tại ít nhất 1 phần tử nhận giá trị dương. Không mất tính

tổng quát, giả sử  $x_1 x_2 = 1$ . Khi đó  $S = 1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2n} x_{2n+1} + x_{2n+1} x_1 \geq 1 - 1 - 1 - \dots - 1 = 1 - 2n$ .

Với  $x_1 = x_2 = 1; x_3 = x_5 = \dots = x_{2n+1} = -1; x_4 = x_6 = \dots = x_{2n} = 1$  thì  $\min S = 1 - 2n$

## 2. Các bài toán minh họa cho tam thức bậc hai hoặc hàm lồi

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d \in [0, 1]$ , chứng minh rằng:

$$a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \leq \frac{8}{27}$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp đại diện  $b \geq d$ . Đặt về trái là hàm số

$f(a, b, c, d) = a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2)$  hay biến đổi dưới dạng

$$f(a, b, c, d) = (b-d)a^2 + (d^2 - b^2)a + b^2 c + c^2 d - bc^2 - cd^2$$

Với  $b \geq d$  thì  $f(a, b, c, d)$  là một tam thức bậc hai biến  $a$ , với hệ số bậc hai  $b-d \geq 0$  (hàm lồi)

nên ta có  $f(a, b, c, d) \leq \max\{f(0, b, c, d), f(1, b, c, d)\}$  với mọi  $a \in [0, 1]$

Ta sẽ chứng minh  $f(0, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$  và  $f(1, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$ .

• Chứng minh  $f(0, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$

Thật vậy, ta xét  $f(0, b, c, d) = c(b-d)(b+d-c)$  với hai khả năng sau:

+ Nếu  $b+d-c < 0$  thì  $f(0, b, c, d) = c(b-d)(b+d-c) \leq 0 < \frac{8}{27}$ .

+ Nếu  $b+d-c > 0$  thì theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$f(0, b, c, d) \leq \left( \frac{c+b-d+b+d-c}{3} \right)^3 = \left( \frac{2b}{3} \right)^3 \leq \frac{8}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} a=0, b=1 \\ c=b-d=b+d-c \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c, d) = \left(0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

• Chứng minh  $f(1, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$

Thật vậy biểu diễn  $f(1, b, c, d) = (1-c)d^2 + (c^2-1)d + b + b^2c - b^2 - bc^2$

là một tam thức bậc hai nên ta có  $f(1, b, c, d) \leq \max\{f(1, b, c, 1), f(1, b, c, 0)\}$

$+ f(1, b, c, 1) = (1-b)c^2 + (b^2-1)c + b - b^2 \leq \max\{f(1, b, 1, 1); f(1, b, 0, 1)\}$

$f(1, b, 1, 1) = 0; f(1, b, 0, 1) = b - b^2 = b(1-b) \leq \left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{8}{27}$

$+ f(1, b, c, 0) = b + b^2c - b^2 - bc^2 = b(1-c)(1+c-b) \leq \left[\frac{b+(1-c)+1+c-b}{3}\right]^3 = \frac{8}{27}$

**Kết luận:** Tổng hợp các khả năng đã xét ta có

$f(a, b, c, d) = (b-d)a^2 + (d^2-b^2)a + b^2c + c^2d - bc^2 - cd^2 \leq \frac{8}{27}, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$

$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \leq \frac{8}{27}, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c, d)$  là một hoán vị  $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Giả sử  $a \leq b \leq c$ . Khi đó  $\max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\} = (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2$  và ta có

(1)  $\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x+a+c) - \sqrt[3]{xac} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2, a \leq x = b \leq c$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\sqrt{ac}, f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3}\sqrt{ac} \geq 0, \forall x \geq 0$ . Suy ra  $f(x)$  lồi trên  $[0, +\infty)$

và do đó  $f(x) = \max(f(a), f(c))$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $f(a) \geq f(c)$ . Bài toán

chuyển thành việc chứng minh  $f(a) = \frac{1}{3}(2a+c) - \sqrt[3]{a^2c} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 = a+c-2\sqrt{ac}$ .

$\Leftrightarrow 2\sqrt{ac} \leq \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c + \sqrt[3]{a^2c} \Leftrightarrow 6\sqrt{ac} \leq a+2c+3\sqrt[3]{a^2c}$ . Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$a+2c+3\sqrt[3]{a^2c} = a+c+c+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c} \geq 6\sqrt[6]{a.c.c.a^2.c} = 6\sqrt{ac}$  (đpcm)

**Bài 3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực không âm, chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}$$

**Chứng minh**

**Bổ đề:** Nếu  $f(x) = x - nq^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{x} + p$  với  $x \in [a, b]$  với  $q \geq 0$  thì  $f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}$ .

**Áp dụng:** Giả sử  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , khi đó  $\max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \left( \sqrt[n]{a_i} - \sqrt[n]{a_j} \right)^2 \right\} = \left( \sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_n} \right)^2$ .

và ta cần chứng minh  $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n} \leq 0$ .

Đặt  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n}$

Với cách coi  $a_k \in [a_n, a_1]; k = \overline{1, n}$  làm biến số và cố định các biến còn lại thì dễ ý rằng

với  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  nên  $\sqrt[n]{\prod_{i \neq k} a_i} \in [a_n, a_1]; \forall k = \overline{2, n-1}$  và hàm  $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  có

dạng hàm  $f(x)$ . Áp dụng bổ đề bằng cách thay  $a_k$  bởi  $a_1, a_n$  vào vế phải dưới đây ta có

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max\{F(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_1, a_{k+1}, \dots, a_n), F(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_n, a_{k+1}, \dots, a_n)\}$$

Áp dụng lần lượt cho  $k = 2, 3, \dots, n-1$  ta có  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max_{t_i \in \{a_1, a_n\}} F(t_1, t_2, \dots, t_n)$

Giả sử có  $m$  số  $t_i (1 \leq i \leq n)$  bằng  $a_1; (n-m)$  số  $t_i (1 \leq i \leq n)$  bằng  $a_n$ . Khi đó,

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, \dots, t_n) &= ma_1 + (n-m)a_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n} \\ &= (m-n)a_1 - ma_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} + 2n\sqrt{a_1 a_n} \end{aligned}$$

Nếu  $m \leq \frac{n}{2}$ , ta đặt  $P(a_n) = (m-n)a_1 - ma_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} + 2n\sqrt{a_1 a_n}$

$$\text{Tính đạo hàm, } P'(a_n) = -m - (n-m) \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^{m+1}}} + n \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}} = m \left( \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}} - 1 \right) + n \left( \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_n}} - \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}} \right)$$

$$\text{Vì } a_n \leq a_1 \text{ nên } \frac{a_1}{a_n} \geq 1, \text{ suy ra } \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}} \geq 1 \text{ và } \left( \frac{a_1}{a_n} \right)^{1+\frac{1}{n}} \geq \left( \frac{a_1}{a_n} \right)^{m+\frac{1}{n}}.$$

Từ đó suy ra  $P'(a_n) \geq 0$ , dẫn đến hàm  $P(a_n)$  đồng biến, do đó  $P(a_n) \leq P(a_1) = 0$

Nếu  $m > \frac{n}{2}$ , ta đặt  $Q(a_1) = (m-n)a_1 - ma_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} + 2n\sqrt{a_1 a_n}$ .

$$\text{Tính đạo hàm } Q'(a_1) = m \left( \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}} - \sqrt[n]{\frac{a_n^{n-m}}{a_1^{n-m}}} \right) + (n-m) \left( \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}} - 1 \right)$$

$$\text{Vì } 0 \leq a_n \leq a_1 \text{ nên } \left( \frac{a_n}{a_1} \right)^{1/n} \leq 1, \text{ và } \left( \frac{a_n}{a_1} \right)^{1/2} \leq \left( \frac{a_n}{a_1} \right)^{(n-m)/n}$$

Từ đó suy ra  $Q'(a_1) \leq 0$  dẫn đến hàm  $Q(a_1)$  nghịch biến, do đó  $Q(a_1) \leq Q(a_n) = 0$ .

Vậy  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n} \leq 0$

### 3. Giá trị nhỏ nhất trong tập hợp các giá trị lớn nhất

Dạng toán này sử dụng mệnh đề quan trọng sau đây:

**Mệnh đề.** Cho  $x, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  với  $\alpha < \beta$  khi đó ta có  $\min_a \left\{ \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |x - a| \right\} = \frac{\beta - \alpha}{2}$

#### Chứng minh

**Nhận xét:**  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  thì  $\max(a, b) \geq a$  và  $\max(a, b) \geq b \Rightarrow \max(a, b) \geq \frac{a+b}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ . Áp dụng nhận xét này ta có

$$\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |x - a| = \max \{ |\alpha - a|, |\beta - a| \} \geq \frac{|\alpha - a| + |\beta - a|}{2} \geq \frac{|(\alpha - a) + (\beta - a)|}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha - a| = |\beta - a| \\ (a - \alpha)(\beta - a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

**Bài 1.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-2 \leq x \leq 3} |3x^2 - 6x + 2a - 1| \right\}$

#### Giải

Đặt  $t = 3x^2 - 6x - 1$ . Sử dụng tam thức bậc hai hoặc lập BBT ta có  $-2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq t \leq 23$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-4 \leq t \leq 23} |t + 2a| \right\}$ . Áp dụng mệnh đề ta có

$$\max_{-4 \leq t \leq 23} |t + 2a| = \max \{ |-4 + 2a|, |23 + 2a| \} \geq \frac{|-4 + 2a| + |23 + 2a|}{2} = \frac{|4 - 2a| + |23 + 2a|}{2} \geq \frac{27}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow 4 - 2a = 23 + 2a \Leftrightarrow a = \frac{-19}{4}$$

**Bài 2.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} |x^3 - 3x + 4a + 1| \right\}$

#### Giải

$$\text{Đặt } t = x^3 - 3x + 1$$

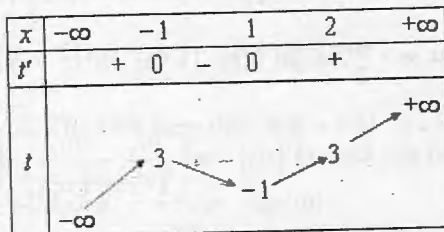
$$t' = 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, y_1 = 3 \\ x_2 = 1, y_2 = -1 \end{cases}$$

Nhìn BBT suy ra  $-1 \leq t \leq 3 \quad \forall x \in [-1, 2]$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-1 \leq t \leq 3} |t + 4a| \right\}$

$$\max_{-1 \leq t \leq 3} |t + 4a| = \max \{ |-1 + 4a|, |3 + 4a| \} \geq \frac{|-1 + 4a| + |3 + 4a|}{2} = \frac{|1 - 4a| + |3 + 4a|}{2} \geq \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Vậy } \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} |x^3 - 3x + 4a + 1| \right\} = 2 \Leftrightarrow 1 - 4a = 3 + 4a \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4}$$





**Bài 3.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2a + \frac{5}{3} \right| \right\}$

**Giải**

Đặt  $t = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}$  với  $x \in [-1, 2]$

Ta có  $t' = x(x+1)(x-2)$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2 \\ y_1 = \frac{5}{4}; y_2 = \frac{5}{3}; y_3 = -1 \end{cases}$$

|      |           |            |       |            |           |            |            |
|------|-----------|------------|-------|------------|-----------|------------|------------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $0$   | $2$        | $+\infty$ |            |            |
| $t'$ |           | $-$        | $0$   | $+$        | $0$       | $+$        |            |
| $t$  | $+\infty$ |            | $5/4$ |            | $5/3$     |            | $+\infty$  |
|      |           | $\searrow$ |       | $\nearrow$ |           | $\searrow$ |            |
|      |           |            |       |            |           | $-1$       |            |
|      |           |            |       |            |           |            | $\nearrow$ |

Từ bảng biến thiên suy ra  $-1 \leq t \leq \frac{5}{3} \quad \forall x \in [-1, 2]$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-1 \leq t \leq 5/3} |t - 2a| \right\}$

$$\max_{-1 \leq t \leq 5/3} |t - 2a| = \max \left\{ |-1 - 2a|, \left| \frac{5}{3} - 2a \right| \right\} \geq \frac{|-1 - 2a| + \left| \frac{5}{3} - 2a \right|}{2} = \frac{|1 + 2a| + \left| \frac{5}{3} - 2a \right|}{2} \geq \frac{4}{3}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow 1 + 2a = \frac{5}{3} - 2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

Vậy với  $a = \frac{1}{6}$  thì  $\min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2a + \frac{5}{3} \right| \right\} = \frac{4}{3}$

**Bài 4.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| -\frac{1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1 \right| \right\}$

**Giải**

Đặt  $t = -\frac{1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1$  với  $x \in [-1, 2]$

Ta có  $t' = -x^5 + 5x^4 - 4x^3 = -x^3(x-1)(x-4)$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 4 \\ y_1 = 1; y_2 = \frac{5}{6}; y_3 = \frac{259}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{6} \leq t \leq \frac{19}{3} \quad \forall x \in [-1, 2]$$

|      |           |            |                |            |     |            |               |            |                |            |     |            |           |
|------|-----------|------------|----------------|------------|-----|------------|---------------|------------|----------------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $0$            | $1$        | $2$ | $4$        | $+\infty$     |            |                |            |     |            |           |
| $t'$ |           | $+$        | $0$            | $-$        | $0$ | $+$        | $0$           | $-$        |                |            |     |            |           |
| $t$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{7}{6}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{5}{6}$ | $\nearrow$ | $\frac{19}{3}$ | $\searrow$ | $M$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-7 \leq t \leq 19} |t - 3a| \right\}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \max_{-7 \leq t \leq 19} |t - 3a| &= \max \left\{ \left| \frac{-7}{6} - 3a \right|, \left| \frac{19}{3} - 3a \right| \right\} \\ &\geq \frac{\left| \frac{-7}{6} - 3a \right| + \left| \frac{19}{3} - 3a \right|}{2} = \frac{\left| \frac{7}{6} + 3a \right| + \left| \frac{19}{3} - 3a \right|}{2} \geq \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{7}{6} + 3a = \frac{19}{3} - 3a \Leftrightarrow a = \frac{31}{36}$$

$$\text{Vậy với } a = \frac{31}{36} \text{ thì } \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| \frac{-1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1 \right| \right\} = \frac{15}{4}$$

**Bài 5.** Cho  $f(x) = f(x) = x + \sqrt{1-x^2} - a$ . Tìm  $\min \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\}$

*Giải*

Đặt  $x = \cos \alpha$  với  $\alpha \in [0, \pi]$  suy ra  $t = x + \sqrt{1-x^2} = \cos \alpha + \sin \alpha \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} |t - a| \right\}$ . Ta có

$$\begin{aligned} \max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} |t - a| &= \max \left\{ |-\sqrt{2} - a|, |\sqrt{2} - a| \right\} \geq \frac{|-\sqrt{2} - a| + |\sqrt{2} - a|}{2} \\ &= \frac{|\sqrt{2} + a| + |\sqrt{2} - a|}{2} \geq \frac{|\sqrt{2} + a + \sqrt{2} - a|}{2} = \sqrt{2}. \text{ Với } a = 0 \text{ thì } \min \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

**Bài 6.** Cho  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} + a$ . Tìm  $\min \left\{ \max_{1 \leq x \leq 5} |f(x)| \right\}$

*Giải*

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1} \in [0, 2] \text{ và } u = \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} \Leftrightarrow u = g(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1}$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [0, 2]. \text{ Lập bảng biến thiên suy ra}$$

$$1 \leq g(t) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq u \leq 3 \quad \forall t \in [0, 2]. \text{ Áp dụng bổ đề ta có}$$

$$\max_{1 \leq u \leq 3} |u + a| = \max \left\{ |1 + a|, |3 + a| \right\} \geq \frac{|-1 - a| + |3 + a|}{2} \geq \frac{|-1 - a + 3 + a|}{2} = 1$$

$$\text{Với } a = -2 \text{ thì } \min \left\{ \max_{1 \leq x \leq 5} |f(x)| \right\} = 1$$

### III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

**Bài 1.** Chứng minh rằng  $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc, \forall a, b, c \in [1, 2]$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc$$

**Bài 3.** Chứng minh rằng  $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10, \forall a, b, c \in [1, 2]$

**Bài 4.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$1 + 9abc \geq 4(ab + bc + ca)$$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$1 + 6(a^3 + b^3 + c^3) \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d, e \in [p, q]; 0 < p < q$ . Chứng minh rằng:

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

**Bài 8.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [p, q] (p, q \geq 0)$ . Chứng minh rằng

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \leq n^2 + C(n)\frac{(p-q)^2}{4pq}$$

Trong đó  $C(n) = n^2$  nếu  $n$  chẵn và  $C(n) = n^2 - 1$  nếu  $n$  lẻ.

**Bài 9.** Chứng minh rằng  $\left|\frac{a}{b-c}\right| + \left|\frac{b}{c-a}\right| + \left|\frac{c}{a-b}\right| \geq 2, \forall a, b, c > 0$

**Bài 10.** Chứng minh:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_1 a_2 - a_2 a_3 - \dots - a_n a_1 \leq \left[ \frac{n}{2} \right], \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$

**Bài 11.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [\alpha, \beta]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2$$

**Bài 12.** Cho  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 2a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 13.** Cho  $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4 + 5a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-4 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 14.** Cho  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1 - 3a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\}$

**Bài 15.** Cho  $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x + 2a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-2 \leq x \leq \frac{3}{2}} |f(x)| \right\}$

**Bài 16.** Cho  $f(x) = \frac{(4a-2)x - 12a + 5}{x-3}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 17.** Cho  $f(x) = \frac{x^2 + (a+3)x + (2a+3)}{x+2}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-4 \leq x \leq -\frac{5}{2}} |f(x)| \right\}$

**Bài 18.** Cho  $f(x) = \frac{(a+2)x^2 + 4x + (a+5)}{x^2 + 1}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 19.** Cho  $f(x) = \frac{x^3 + (a+3)x^2 + (3-a)x + (a+1)}{x^2 - x + 1}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\}$

**Bài 20.** Cho  $f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 3a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 0} |f(x)| \right\}$

**Bài 21.** Cho  $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + 2a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{1 \leq x \leq \sqrt{2}} |f(x)| \right\}$

**Bài 22.** Cho  $f(x) = x - 4a + \ln(x^2 - 3)$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{2 \leq x \leq 2\sqrt{3}} |f(x)| \right\}$

**Bài 23.**  $f(x) = \frac{3(a \sin^4 x + \cos^4 x) + 2(a \cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{3 \sin^4 x + 2 \cos^2 x}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right\}$

**Bài 24.** Tìm  $\text{Min}_{a,b,c} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c| \right\}$

### § 23.4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Trong phần hàm lồi bất đẳng thức Jensen, hàm nửa lồi, nửa lõm với các định lý RCF, LCF, LCRCF chúng ta thường gặp các bất đẳng thức có dạng phát biểu sau đây:

**Mệnh đề:** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ ,  $n \in \mathbb{N}$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = nu$ , với  $u \in D$ .

Khi đó ta có:  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(u)$  hoặc  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(u)$ .

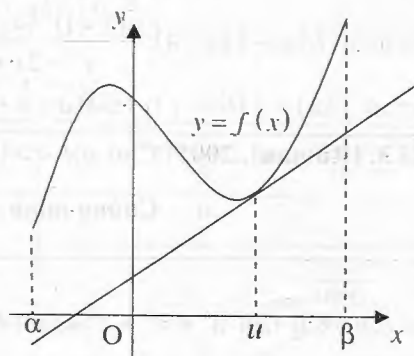
Đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = u$ .

Tuy nhiên với một số dạng hàm số  $y = f(x)$  không lồi (không lõm) trên miền  $D = [\alpha, \beta]$  nhưng vẫn có đồ thị nằm trên tiếp tuyến  $y = Ax + B$  tại điểm  $x = u \in [\alpha, \beta]$  có phương trình là  $y = f'(u)(x - u) + f(u)$  hay viết gọn dưới dạng  $y = Ax + B$  thì ta có thể nghĩ đến chuyện đánh giá  $f(x) \geq Ax + B, \forall x \in [\alpha, \beta]$ . Từ đó suy ra

$$\begin{cases} f(a_1) \geq Aa_1 + B \\ f(a_2) \geq Aa_2 + B \\ \dots \\ f(a_n) \geq Aa_n + B \end{cases}$$

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq n(Au + B) = nf(u)$$

Sau đây chúng ta xét các bài toán tiêu biểu.



**Bài 1. [Hong Kong, 2005]** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ .

Chứng minh rằng:  $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$  (1)

**Chứng minh**

(1)  $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}; \forall a, b, c, d \in (0, 1)$  trong đó  $f(x) = 6x^3 - x^2, x \in (0, 1)$

Do hai vế là biểu thức đối xứng với  $a, b, c, d$  nên dễ thấy đẳng thức xảy ra tại điểm rơi  $a = b = c = d$  kết hợp với  $a + b + c + d = 1$  suy ra điểm rơi là  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ .

Từ đó xét tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x = \frac{1}{4}$  có phương trình:  $y = \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$ .

Mặt khác  $f(x) - \left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(4x - 1)^2(3x + 1) \geq 0, \forall x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) \geq \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}, \forall x \in (0, 1)$

Suy ra  $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5}{8}(a + b + c + d) - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}; \forall a, b, c, d \in (0, 1)$

**Bài 2. [USA, 2003]** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

**Chứng minh**

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$  thì bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \leq 24 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 24$$

trong đó hàm số đặc trưng là  $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}; x \in (0, 3)$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x=1$  là  $y=4x+4$ .

Xét hiệu  $f(x) - (4x+4) = \frac{(x-1)^2(4x+3)}{x^2-2x+3} \leq 0$  hay  $f(x) \leq 4x+4, \forall x \in (0, 3)$

Suy ra  $f(a) + f(b) + f(c) \leq 4(a+b+c) + 12 = 24$

**Bài 3. [Rumani, 2005]** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$  (1)

**Chứng minh**

Do  $a, b, c > 0$  nên  $a^2 + b^2 + c^2 < (a+b+c)^2 = 9$ . Từ đó nếu có một trong ba số  $a, b, c$  nhỏ hơn  $\frac{1}{3}$  chẳng hạn  $a < \frac{1}{3}$  thì  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 > a^2 + b^2 + c^2$  nên (1) được chứng minh.

Xét  $a, b, c \geq \frac{1}{3}$ , kết hợp với  $a+b+c=3$  suy ra  $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$ . Biến đổi bất đẳng thức

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - a^2 + \frac{1}{b^2} - b^2 + \frac{1}{c^2} - c^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 0, \forall a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$  trên  $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$ . Tiếp tuyến của đồ thị  $y = f(x)$  tại  $x=1$  là

$$y = -4x + 4. \text{ Ta có } f(x) - (-4x + 4) = \frac{(x-1)^2[2-(x-1)^2]}{x^2} \geq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right], \text{ suy ra}$$

$$f(x) \geq -4x + 4, \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right] \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq -4(a+b+c) + 12 = 0$$

**Bài 4. [Trung Quốc, 2005]** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ .

Chứng minh rằng:  $10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$

**Chứng minh**

Đặt  $f(x) = 10x^3 - 9x^5$ . Khi đó bất đẳng thức  $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$ .

**Trường hợp 1.** Trong ba số  $a, b, c$  có một số, giả sử  $a \geq \frac{9}{10}$ . Khi đó ta có  $a \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$  và

$b, c \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ . Xét hàm số  $f(x)$  trên  $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$  có  $f'(x) = 15x^2(2 - 3x^2) \leq 0, \forall x \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ .

Suy ra  $f(x)$  nghịch biến trên  $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$  nên  $f(a) \geq f(1) = 1, \forall a \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ . Mặt khác với

$b, c \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$  thì  $f(b) = 10b^3 - 9b^5 \geq 0; f(c) = 10c^3 - 9c^5 \geq 0$  nên  $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$

**Trường hợp 2.** Các số  $a, b, c \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$ , khi đó tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x = \frac{1}{3}$  có

phương trình  $y = \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$ . Ta có

$$f(x) - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) = 10x^3 - 9x^5 - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) = -\frac{1}{27}(3x-1)^2(27x^3 + 18x^2 - 21x - 16).$$

Đặt  $g(x) = 27x^3 + 18x^2 - 21x - 16$ . Xét hàm số  $g(x)$  trên  $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ .

Ta có  $g'(x) = 81x^2 + 36x - 21, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$  hoặc  $x = -\frac{7}{9}$

Bảng biến thiên của  $g(x)$  trên  $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ :

Từ BBT và  $g(0) = -16, g\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{637}{1000}$

$$\Rightarrow g(x) < 0, \forall x \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{25}{9} \cdot (a+b+c) - 3 \cdot \frac{16}{27} = 1$$

**Kết luận:** Bất đẳng thức được chứng minh trong cả hai trường hợp. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$  hoặc  $(a, b, c)$  là một hoán vị bất kỳ của bộ số  $(1, 0, 0)$ .

**Bài 5. [Moldova, 2005]** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$

**Chứng minh**

Vì  $2ab \leq a^2 + b^2$  nên  $0 < 8 - (a^2 + b^2) \leq 2(4 - ab) \Rightarrow \frac{1}{4-ab} \leq \frac{2}{8 - (a^2 + b^2)}$  do đó

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq \frac{2}{8 - (a^2 + b^2)} + \frac{2}{8 - (b^2 + c^2)} + \frac{2}{8 - (c^2 + a^2)}$$

Để vận dụng giả thiết  $a^4 + b^4 + c^4 = 3$  ta đặt  $x = (b^2 + c^2)^2, y = (c^2 + a^2)^2, z = (a^2 + b^2)^2$

thì  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z = (b^2 + c^2)^2 + (c^2 + a^2)^2 + (a^2 + b^2)^2 \leq 4(a^4 + b^4 + c^4) = 12$ .

Từ đó  $0 < x, y, z < 12$ . Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2}$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{8-\sqrt{t}}$  trên  $(0, 12)$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $y = f(t)$  tại

$t = 4$  có phương trình  $y = \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$ . Mặt khác xét biến đổi:

$$\frac{1}{8-\sqrt{t}} - \left( \frac{1}{144}t + \frac{5}{36} \right) = -\frac{1}{144}(\sqrt{t} - 2)^2(4 - \sqrt{t}) \leq 0 \text{ hay } f(t) \leq \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}, \forall t \in (0, 12)$$

$$\text{Từ đó } f(x) + f(y) + f(z) \leq \frac{1}{144}(x+y+z) + 3 \cdot \frac{5}{36} \leq \frac{1}{144} \cdot 12 + \frac{15}{36} = \frac{1}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 4 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

**Bài 6. [Ba Lan, 1996]** Cho  $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}$

**Chứng minh**

Đặt  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Khi đó bất đẳng thức  $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}$

Ta có  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$  Suy ra bảng biến thiên của  $f(x)$

|         |           |            |        |            |       |            |           |
|---------|-----------|------------|--------|------------|-------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$       | $-1$   | $-1/3$     | $1$   | $2$        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$        | $0$    | $+$        | $0$   | $-$        |           |
| $f(x)$  | $0$       | $\searrow$ | $-1/2$ | $\nearrow$ | $1/2$ | $\searrow$ | $0$       |

**Trường hợp 1:** Tồn tại một số chẳng hạn  $a \in (-\infty, -3] \Rightarrow b+c \geq 4$  nên trong hai số  $b, c$  tồn tại ít nhất một số, chẳng hạn  $b \geq 2$ . Khi đó ta có  $f(a) + f(b) + f(c) < 0 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

**Trường hợp 2:** Tồn tại một số, chẳng hạn  $a \in \left(-3, -\frac{1}{3}\right]$ . Khi đó

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq -\frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

**Trường hợp 3:** Cả ba số  $a, b, c \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ . Khi đó tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x = \frac{1}{3}$  có phương trình là:  $y = f'(x)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}$ .

$$\text{Ta có } f(x) - \left(\frac{18}{25}x + \frac{3}{50}\right) = -\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(1+x^2)} \leq 0 \text{ hay } f(x) \leq \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}, \forall x > -\frac{1}{3}$$

$$\text{Từ đó suy ra } f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{18}{25}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{10}$$

**Kết luận:** Vậy bài toán được chứng minh, đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ .



### § 23. 5. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Chúng ta sẽ tiếp tục các ý tưởng cân bằng hệ số ở chương I và chương III cũng như mở rộng việc xấp xỉ một hàm số với tiếp tuyến được nêu trong §23.4. Chú ý rằng nếu như các ý tưởng cân bằng hệ số trong chương I thuần túy mang màu sắc đại số thì trong chương III phương pháp nhân tử Lagrange lại chỉ thuần túy mang màu sắc giải tích và ít có khả năng thực hành. Trong bài viết này chúng tôi tìm cách kết hợp thật linh hoạt hai phương pháp đó để đi đến những lời giải thật trọn vẹn và sáng sủa cho một lớp rất rộng các bất đẳng thức ít hay nhiều biến, đối xứng hay hoán vị...

#### Tóm tắt nội dung

- I. Phần 1: Mở đầu
- II. Phần 2. Kỹ thuật chuẩn hóa và U.C.T
- III. Phần 3. U.C.T và kỹ thuật phân tách các trường hợp
- IV. Phần 4. Kết hợp bất đẳng thức Vornicu Schur với U.C.T
- V. Phần 5. Một dạng biểu diễn thú vị
- VI. Phần 6. Các bài toán với điều kiện chứa cấu trúc nhân
- VII. Phần 7. U.C.T mở rộng
- VIII. Phần 8. Kỹ thuật U.C.T trong bất đẳng thức lượng giác
- IX. Phần 9. Bài tập áp dụng

#### I. MỞ ĐẦU

Trong một số dạng toán bất đẳng thức nhiều biến đối xứng, chúng ta có thể tách một bất đẳng thức ban đầu thành các bất đẳng thức bộ phận cùng có chung một qui luật nào đó và đưa bài toán về việc chứng minh đại diện cho một bất đẳng thức bộ phận. Như vậy mấu chốt của phương pháp này chính là việc phát hiện ra các bất đẳng thức bộ phận mà ta có thể gọi là bất đẳng thức cơ sở. Tuy nhiên hầu hết các lời giải mà chúng ta gặp trên các tài liệu đều không chỉ dẫn việc xây dựng bất đẳng thức cơ sở dẫn đến sự thắc mắc của bạn đọc trong việc trình bày lời giải một cách không tự nhiên. Phái chẳng bất đẳng thức cơ sở được tạo ra một cách mò mẫm thử nghiệm rất nhiều lần hay việc xây dựng các bất đẳng thức nhiều biến được tạo ra từ chính việc lấy trước bất đẳng thức cơ sở. Câu trả lời là hoàn toàn không phải như vậy. Bên ngoài vẻ đẹp của các dạng bất đẳng thức này đều chứa đựng một nội dung có tính chất qui luật. Chúng ta sẽ cùng nhau làm quen với phương pháp nhằm phát hiện ra các bất đẳng thức cơ sở với các dạng bất đẳng thức nhiều biến đối xứng. Phương pháp này có tên gọi là "*Phương pháp hệ số bất định*", tên tiếng Anh là *Undefined Coefficient Technique (U.C.T.)*

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5 \quad (1)$$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$ , (2a)

$$\frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2b}{3} \quad (2b); \quad \frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2c}{3} \quad (2c)$$

Thật vậy xét chứng minh đại diện (2a)  $\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2} \geq 0$  đúng  $\forall a > 0$

Cộng (2a), (2b), (2c) với chú ý  $a + b + c = 3$  suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét:** Lời giải trên sẽ tự nhiên nếu chúng ta giải thích được cách phát hiện bất đẳng thức cơ sở cho việc chứng minh (1). Để ý rằng các biến số trong điều kiện và trong cả hai biểu thức của bất đẳng thức (1) quan hệ với nhau theo liên kết cộng nên ta có thể tách theo từng biến để chứng minh bất đẳng thức cơ sở làm đại diện. Suy nghĩ tự nhiên nhất của chúng ta là chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} \geq 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức này không hoàn toàn đúng  $\forall a > 0$ .

Về mặt logic thì việc xây dựng bất đẳng thức trên có vẻ không ổn vì chúng ta sẽ không sử dụng đến điều kiện  $a + b + c = 3$ . Do đó chúng ta sẽ xây dựng một bất đẳng thức dạng giả định mà về phải có thể sử dụng điều kiện  $a + b + c = 3$ , tức là chúng ta xét các bất đẳng thức viết dưới dạng giả định sau đây:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + ma + n \quad (3a); \quad \frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{5}{3} + mb + n \quad (3b); \quad \frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{5}{3} + mc + n \quad (3c)$$

Trong đó  $m$  và  $n$  là các hệ số chưa xác định. Cộng (3a), (3b), (3c) ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3} \geq 5 + m(a+b+c) + 3n = 5 + 3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số  $m$  và  $n$  phải thỏa mãn điều kiện  $m + n = 0 \Leftrightarrow n = -m$ .

Thế  $n = -m$  vào (3a) dẫn đến  $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \quad (3)$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là  $m$  để bất đẳng thức (2) là đúng.

Để ý rằng với  $a = b = c = 1$  thì bất đẳng thức (1) xảy ra dấu bằng nên việc biến đổi bất đẳng thức (3) cần làm xuất hiện nhân tử  $(a - 1)$ . Thật vậy ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left( \frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} - m \right) \geq 0 \quad (4)$$

Khi cho  $a = 1$  thì ta có  $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} = -\frac{2}{3}$  từ đó ta dự đoán rằng với  $m = -\frac{2}{3}$  thì biến đổi (4) sẽ xuất hiện biểu thức  $(a-1)^2$ .

Với  $m = -\frac{2}{3}$  thì bất đẳng thức cơ sở là:  $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

### Chứng minh

Ta sẽ xác định hệ số  $m$  để bất đẳng thức sau là đúng:  $\frac{2}{a^2+1} \geq 1 + m(a-1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1} \geq m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left( -\frac{a+1}{a^2+1} - m \right) \geq 0.$$

Với  $a = 1$  thì  $-\frac{a+1}{a^2+1} = -1$  nên chọn  $m = -1$ . Khi đó:  $\frac{2}{a^2+1} \geq 2 - a \Leftrightarrow \frac{a(a-1)^2}{a^2+1} \geq 0$  (đúng)

Tương tự suy ra:  $\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+1} \geq \sum_{cyc} \frac{2-a}{2} = 4 - \frac{1}{2} \sum_{cyc} a = 2 \Rightarrow$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = 1$ .

**Nhận xét:** Dùng AM - GM cũng chứng minh được:  $\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$

**Bài 3. [Algebraic Inequalities Old and New Method]**

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$

### Chứng minh

Ta cần tìm  $m$  sao cho  $\frac{1}{a^2+b+c} = \frac{1}{a^2-a+3} \leq \frac{1}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow -\frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)} \leq m(a-1)$  đúng

Tương tự như trên ta tìm dự đoán rằng với  $m = -\frac{1}{9}$  thì bất đẳng thức cơ sở đúng.

$$\text{Thật vậy ta có } \frac{1}{a^2 - a + 3} \leq \frac{4}{9} - \frac{a}{9} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2 - a + 3)} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2 - a + 3)}$$

**Nhận xét.** Bài toán tổng quát đã được giải quyết bằng định lý **LCF** trong "Algebraic Inequalities – Old and New method" của tác giả Vasile Cirtoaje.

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{a_1^2 - a_1 + n} + \frac{1}{a_2^2 - a_2 + n} + \dots + \frac{1}{a_n^2 - a_n + n} \leq 1$$

**Bài 4.** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ .

$$\text{Chứng minh: } 2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + ab + ac + ad + bc + bd + dc}$$

### Chứng minh

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 = 2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d) = \sqrt{2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

$$\text{Ta cần tìm } m \text{ sao cho } 2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + m(a^2-1) \Leftrightarrow (a^2-1) \left[ \frac{(2a+1)^2}{2(a+1)} - m \right] \geq 0 \quad (*) \text{ đúng}$$

Cho  $a=1$ , dự đoán  $m = \frac{9}{4}$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức  $(*)$  đúng với  $m = \frac{9}{4}$ .

$$\text{Thật vậy } 2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + \frac{9}{4}(a^2-1) \Leftrightarrow (a-1)(8a^2 - a - 7) \geq 0 \Leftrightarrow (8a+7)(a-1)^2 \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=d=1$ .

**Bài 5.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27$

### Chứng minh

$$\text{Ta tìm } m \text{ sao cho } \frac{4}{a} + 5a^2 \geq 9 + m(a^3-1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)(5a^2+5a-4)}{a} \geq m(a-1)(a^2+a+1)$$

Cho  $a=1$  ta có thể dự đoán rằng  $m=2$ . Ta sẽ chứng minh:  $\frac{4}{a} + 5a^2 \geq 7 + 2a^3 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(-2a^2+a+4)}{a} \geq 0. \text{ Do } a \leq \sqrt[3]{3} \Rightarrow -2a^2+a+4 \geq 0 \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

$$\text{Từ đó: } \sum_{cyc} \left( \frac{4}{a} + 5a^2 \right) \geq 21 + 2 \sum_{cyc} a^3 = 27 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

$$\text{Bài 6. Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \text{ . Chứng minh rằng } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4}{3}(a+b+c) \geq 7$$

### Chứng minh

Nhận xét với  $a=b=c=1$  thì đẳng thức xảy ra. Ta có  $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a, b, c \in (0, \sqrt{3})$

Ta sẽ tìm số thực  $m$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a \in (0, \sqrt{3})$

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{3}a \geq m(a^2 - 1) + \frac{7}{3} \Leftrightarrow f(a) = 3ma^3 - 4a^2 + (7-3m)a - 3 \leq 0$$

Ta cần tìm  $m$  sao cho  $f(a) \leq 0 \quad \forall a \in (0, \sqrt{3})$  và  $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ .

Dự đoán  $a = 1$  là điểm cực đại của  $f(a)$ , khi đó:  $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 9m - 8 + 7 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$ .

Do đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cơ sở:  $\frac{1}{a} + \frac{4}{3}a \geq \frac{1}{6}(a^2 - 1) + \frac{7}{3}$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương:  $(a-1)^2(6-a) \geq 0$  đúng do  $a \in (0, \sqrt{3})$ .

Tương tự và suy ra  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4}{3}(a+b+c) \geq \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2-3) + 7 = 7$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

$$\text{Bài 7. Cho } \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \end{cases} \text{ . Chứng minh rằng: } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{n}{8}$$

### Chứng minh

Ta sẽ tìm hệ số  $m$  sao cho  $\frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{1}{8} + m(a_i - 1) \Leftrightarrow \frac{(5-3a_i)(a_i-1)}{8(3a_i^2+5)} \leq m(a_i-1)$

Với  $a_i = 1$  thì  $\frac{5-3a_i}{8(3a_i^2+5)} = \frac{1}{32}$  nên ta dự đoán  $m = \frac{1}{32}$  thì bất đẳng thức cơ sở trên là

đúng. Thật vậy:  $\frac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \frac{1}{8} + \frac{(a_i-1)}{32} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(5+a_i)(a_i-1)^2}{32(3a_i^2+5)}$  (đúng).

Dấu bằng  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

**Bình luận:** Qua các bài toán mở đầu ta có thể thấy rằng các dạng bất đẳng thức trên không hề quan tâm đến số biến. Ta hoàn toàn có thể tổng quát với  $n$  biến mà không làm ảnh hưởng đến cách giải. Xét mô hình tổng quát sau đây:

**Bài toán tổng quát:** Cho các số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn điều kiện:

$$h(a_1) + h(a_2) + \dots + h(a_n) = 0 \quad (*). \text{ Chứng minh rằng } f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq 0$$

Lớp các bài toán này thường có điều kiện (\*) là  $\sum_{i=1}^n a_i^k = n$  và có thể được giải quyết bằng cách xây dựng bất đẳng thức cơ sở có chung qui luật cho các biến.

Vì các biểu thức mang tính đối xứng nên đẳng thức thường đạt tại các điểm cực trị là các biến số bằng nhau. Khi đó ta phải xác định hệ số  $m$  sao cho bất đẳng thức  $f(a_i) \geq m \cdot h(a_i)$  hay  $[g(a_i)]^{2k} p(a_i) \geq 0$  đúng  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn (\*)

Trong đó  $g(a_i) = (a_i - x_k)$  với  $x_k$  là điểm cực trị của bất đẳng thức.

Bài toán sẽ được giải quyết nếu  $p(a_i) \geq 0$ . Trong trường hợp  $p(a_i) \geq 0$  chỉ đúng trong một miền nghiệm nào đó thì ta sẽ tiến hành chia trường hợp để giải quyết bài toán. Tuy nhiên trong phần 1 này ta sẽ không đề cập những bài toán như vậy mà sẽ đề cập ở phần sau.

Sau khi đã tìm ra bất đẳng thức cơ sở thì việc chứng minh nó không quá khó khăn có thể dựa trên phương pháp phân tích nhân tử hoặc sử dụng đạo hàm.

Qua một vài ví dụ mở đầu bạn đọc có thể hiểu được mục đích của U.C.T. Ở các phần tiếp theo việc xác định hệ số sẽ được trình bày một cách sơ lược bởi vì những bài toán đó mang tính phức tạp nhiều hơn mà U.C.T chỉ đơn thuần là bước đệm để đi đến lời giải chứ không thể đưa ta cách chứng minh trực tiếp.

## II. KỸ THUẬT CHUẨN HÓA VÀ U.C.T

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một khoảng không gian mới với lớp bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến và kỹ thuật chuẩn hóa kết hợp với U.C.T. Trước hết ta sẽ nhắc lại định nghĩa

- Đa thức  $f(a, b, c)$  đối xứng  $\Leftrightarrow f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$
- Đa thức  $f(a, b, c)$  thuần nhất trên miền  $D \Leftrightarrow f(ka, kb, kc) = k^n f(a, b, c)$   
 $\forall k, a, b, c \in D, k \neq 0, n = \text{const}$

Hiểu một cách đơn giản đa thức thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Do một số tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến số để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt  $a^n + b^n + c^n = k, abc = p, ab + bc + ca = r, \dots$ . Đây là kỹ thuật rất quan

trọng giúp ta đơn giản hóa và qui bất đẳng thức về chứng minh theo từng biến. Hãy cùng đến với một số bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến để thấy công dụng của U.C.T

**Bài 1. [Nesbitt]** Chứng minh rằng  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c > 0$  (1)

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=3$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$  (2)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:  $\frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + m(a-1) \Leftrightarrow \frac{3(a-1)}{2(3-a)} \geq m(a-1)$

Dễ dàng dự đoán  $m = \frac{3}{4}$ . Ta có:  $\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3(a-1)^2}{4(3-a)} \geq 0$  luôn đúng.

Vậy  $\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4}$ . Tương tự ta có:  $\frac{b}{3-b} \geq \frac{3b-1}{4}; \frac{c}{3-c} \geq \frac{3c-1}{4}$

Cộng về theo về ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi  $a=b=c$ .

**Bài 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2+b^2+c^2 \quad (2)$$

Ta cần xác định  $m$  để bất đẳng thức cơ sở sau là đúng:  $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2+m(a-1)$

hay  $\left[ \frac{(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3} + m \right] (a-1) \leq 0$ . Với  $a=1$  thì  $\frac{(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3} = 6$

khi đó chọn  $m=-6$ , ta sẽ chứng minh:  $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2-6(a-1) \quad (2a)$

Thật vậy ta có:  $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2-6(a-1) \Leftrightarrow \frac{a(6-a)(a-1)^2}{a^2-2a+3} \geq 0$  đúng  $\forall a \in (0,3)$ .

Tương tự ta có:  $\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} \geq b^2-6(b-1) \quad (2b); \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq c^2-6(c-1) \quad (2c)$

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng  $\Rightarrow$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .



**Bài 3. [Đề thi Olympic 30 – 4, khối 11, lần XII – 2006]**

Chứng minh rằng  $\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}, \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta có bất đẳng thức (1) tương đương với  $\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$

Tương tự như trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} \leq \frac{21+9a}{25} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}. \text{ Điều này hiển nhiên đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Bài 4.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)} \quad (1)$

**Chứng minh**

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4} \quad (2)$

Dự đoán bất đẳng thức cơ sở là  $\frac{a}{(3-a)^2} \geq \frac{2a-1}{4} \quad (2a) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2} \geq 0$  luôn đúng

$\forall a \in (0, 3)$ . Tương tự ta có:  $\frac{b}{(3-b)^2} \geq \frac{2b-1}{4} \quad (2b); \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{2c-1}{4} \quad (2c)$ .

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng  $\Rightarrow$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{1}{2} \quad (1)$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa  $a+b+c=3$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{1}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} \geq \frac{8a-7}{6} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)} \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng vì  $0 \leq a \leq 3 \Rightarrow 39-8a \geq 39-24=15 > 0$ .

Tương tự với các biến còn lại ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .



**Bài 6. [USAMO 2003]**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \leq 8 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=1$ . Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} \leq \frac{12a+4}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2+(1-a)^2}$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Bài 7. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:**

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3} + \frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3} + \frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3} \leq \frac{12}{a+b+c} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=3$ , bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3} + \frac{(b+3)^2}{4b^3+(3-b)^3} + \frac{(c+3)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leq 4, (2).$$

Xét đại diện  $\frac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3} \leq \frac{2(a+1)}{3}, (2a)$

Thật vậy, ta có  $\frac{2(a+1)}{3} - \frac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3} = \frac{(2a^2+12a+9)(a-1)^2}{3(a^3+3a^2-9a+9)} \geq 0$

Tương tự ta có:  $\frac{(b+3)^2}{4b^3+(3-b)^3} \leq \frac{2(b+1)}{3} \quad (2b); \quad \frac{(c+3)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leq \frac{2(c+1)}{3} \quad (2c)$

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng  $\Rightarrow$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 8. Cho các số không âm  $a, b, c, d$ . Chứng minh rằng:**

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{c^2+d^2+a^2} + \frac{c}{d^2+a^2+b^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Giả sử  $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ , khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{1-d^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \Leftrightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2} \times 2a^2 \times (1-a^2) \times (1-a^2) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2 + 2(1-a^2)}{3} \right)^3 = \frac{4}{27} \Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Tương tự, ta có  $\frac{b}{1-b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2, \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2, \frac{d}{1-d^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2$

Cộng lần lượt các bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 trong 4 số  $a, b, c, d$  bằng nhau, số còn lại bằng 0

### Bài 9. [Crux mathematicorum]

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}{\sqrt[3]{2}} \quad \forall a, b, c > 0 \quad (1)$

#### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh  $\frac{4\sqrt[3]{2} x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq 5x^2 - 1, \quad \forall x > 0 \quad (2)$

Thật vậy, nếu  $x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$  thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

Nếu  $x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ : Xét  $f(x) = \frac{128x^9}{(x^3+1)(5x^2-1)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{384x^8(1-x)(2x^2-3x-3)}{(x^3+1)^2(5x^2-1)^4}$ .

Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ . Ta dễ dàng kiểm tra được rằng  $f'(x) > 0$  với mọi

$x \in \left(1, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$ .

Do đó  $f(x) \geq \min\{f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\} = 1 \quad \forall x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Vậy bất đẳng thức (2) đúng.

Sử dụng bất đẳng thức này với  $x$  lần lượt thay bởi  $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$ , ta có

$$\frac{\sqrt[3]{2} a}{\sqrt[3]{a+b}} \geq \frac{5}{4} a^{2/3} - \frac{1}{4} b^{2/3}; \quad \frac{\sqrt[3]{2} b}{\sqrt[3]{b+c}} \geq \frac{5}{4} b^{2/3} - \frac{1}{4} c^{2/3}; \quad \frac{\sqrt[3]{2} c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{5}{4} c^{2/3} - \frac{1}{4} a^{2/3}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c > 0$ .

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 + ab + 4b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 + bc + 4c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{4c^2 + ca + 4a^2}} \geq \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Ta chứng minh  $\frac{6x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq 3x - 1, \forall x \geq 0$ .

Ta có  $\frac{36x^4}{4x^2 + x + 4} - (3x - 1)^2 = \frac{(x-1)^2(15x-4)}{4x^2 + x + 4} \geq 0$  đúng,

suy ra  $\frac{6x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq |3x - 1| \geq 3x - 1$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = 1$ .

Sử dụng bất đẳng thức trên với phép thế lần lượt thay  $x$  bởi  $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ , ta có:

$$\frac{6a^2}{\sqrt{4a^2 + ab + 4b^2}} \geq 3a - b; \quad \frac{6b^2}{\sqrt{4b^2 + bc + 4c^2}} \geq 3b - c; \quad \frac{6c^2}{\sqrt{4c^2 + ca + 4a^2}} \geq 3c - a$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 11.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^7 + 7}} \leq \frac{3}{2}$

**Chứng minh**

Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7x}{48} \quad \forall x \in (0, 3) \quad (2)$ . Xét  $f(x) = (31 - 7x)^3(x^7 + 7)$

Ta có:  $f'(x) = 7(31 - 7x)^2(x - 1)(21 + 21x + 21x^2 + 21x^3 + 21x^4 + 21x^5 - 10x^6)$

Rõ ràng  $f'(x) = 0$  chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và  $x_0 \in (1, 3)$ .

Khi  $x$  đi qua 1 theo chiều tăng thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương, qua  $x_0$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên ta có  $f(x) \geq \min\{f(1), f(3)\} = 48^3, \forall x \in (0, 3)$ . Suy ra (2)

đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = 1$ . Sử dụng bất đẳng thức (2) ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7a}{48}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{b^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7b}{48}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{c^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7c}{48}$$

Do đó  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^7 + 7}} \leq \frac{1}{48}[93 - 7(a + b + c)] = \frac{3}{2}$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

## III. U.C.T VÀ KỸ THUẬT PHÂN TÁCH CÁC TRƯỜNG HỢP

Ở các phần trên ta đã làm quen với một số bài toán khi đưa về dạng

$$f(a_i) \geq m \cdot h(a_i) \Leftrightarrow g(a_i)^{2k} p(a_i) \geq 0$$

Nếu  $p(a_i) \geq 0$  thì có ngay điều phải chứng minh. Tuy nhiên không phải bao giờ nó cũng xuất hiện  $p(a_i) \geq 0$ . Trong trường hợp  $p(a_i) \geq 0$  chỉ đúng với một miền nghiệm nào đó thì việc chứng minh sẽ phải đi qua một chiều hướng khác, đó là xét thêm trường hợp biến  $a_i$  ngoài miền xác định để  $p(a_i) \geq 0$ . Thường thì bước này phức tạp và đòi hỏi người làm phải có những đánh giá mang sự tinh tế nhiều hơn. Chúng ta sẽ đến với một số bài toán tiêu biểu cho kỹ thuật này.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \quad (1)$$

## Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ . Xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1. Nếu  $a \geq 3 \Rightarrow b + c + d \leq 1 \Rightarrow 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq \frac{1}{2}, 0 \leq d \leq \frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) - (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \\ &\geq (1+a^4) - (1+a^3)(1+1^3) \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \left[ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] = a^4 - \frac{7}{3}a^3 - \frac{4}{3} \geq 3a^3 - \frac{7}{3}a^3 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(a^3 - 2) > 0 \\ &\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2: Nếu  $3 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ , thì (1)  $\Leftrightarrow \sum_{cyc} [2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)] \geq 0$

Xét hàm số  $f(x) = 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) - x + 1$  với  $0 \leq x \leq 3$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{8x^3}{x^4+1} - \frac{6x^2}{x^3+1} - 1 = \frac{(x-1)(-x^6+x^5+x^4+7x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^3+1)}$$

Dễ thấy  $f'(x) = 0$  chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và  $x_0 \in (2, 3)$ . Khi  $x$  đi qua 1 theo chiều tăng dần thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương, khi  $x$  đi qua  $x_0$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên ta

$$\text{có } f(x) \geq \min\{f(1), f(3)\} = \min\{0, 2(\ln 41 - \ln 14 - 1)\} = 0, \forall x \in [0, 3]$$

$$\text{Suy ra } 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) \geq x - 1 \quad \forall x \in [0, 3] \Rightarrow \sum_{cyc} [2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)] \geq \sum_{cyc} (a - 1) = 0$$

Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 2.** Chứng minh  $\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(a+c)^2} + \frac{c^2}{c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3}{5}$ ,  $\forall a, b, c > 0$  (1)

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+(3-a)^2} + \frac{b^2}{b^2+(3-b)^2} + \frac{c^2}{c^2+(3-c)^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{3}{5} \quad (2)$$

Ta sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{12a-7}{25} \Leftrightarrow (8a-21)(a-1)^2 \geq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq 1 \geq c$ . Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1:  $c \geq \frac{21}{8} \Rightarrow 8a-21 \geq 8b-21 \geq 8c-21 \geq 0$ .

+ Trường hợp 2:  $\max\{a, b, c\} \leq \frac{21}{8}$

Khi đó ta có:  $f(a) = \frac{a^2}{2a^2-6a+9} = \frac{1}{1+\left(\frac{3-a}{a}\right)^2} \geq \frac{49}{50} > \frac{1}{5}$

Do  $f(a)$  đồng biến trên  $(0, 3]$  nên điều này hiển nhiên đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 3. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]**

Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a+b+c+d=2 \end{cases}$ . Chứng minh  $\frac{1}{3a^2+1} + \frac{1}{3b^2+1} + \frac{1}{3c^2+1} + \frac{1}{3d^2+1} \geq \frac{16}{7}$  (1)

**Chứng minh**

Ta cần xác định hệ số để bất đẳng thức sau là đúng  $\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{4}{7} + m(2a-1)$

Dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{52-48a}{49} \Leftrightarrow \frac{3(2a-1)^2(12a-1)}{49(3a^2+1)} \geq 0$

Tương tự với các biến còn lại. Xét hai trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1:  $\min\{a, b, c, d\} \geq \frac{1}{12} \Rightarrow 12a-1 \geq 12b-1 \geq 12c-1 \geq 12d-1 \geq 0$

+ Trường hợp 2:  $d < \frac{1}{12} \Rightarrow 1+3d^2 < \frac{49}{48} \Rightarrow \frac{1}{1+3d^2} > \frac{48}{49}$

Xét tương tự với các biến còn lại ta tìm ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ .

**Bài 4. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + b^2 + a^2} \geq 0 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{1}{c^5 + b^2 + a^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh trường hợp  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  là đủ.

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có  $\frac{2a^6}{a^2 + 1} \leq \frac{2a^6}{2\sqrt{a^2}} = a^5$

Đặt  $a^2 = x, b^2 = y, c^2 = z$  lúc đó ta có  $x + y + z = 3$  và do đó ta phải chứng minh

$$1 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\frac{2x^3}{x+1} - x + 3} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{3-x}{6} - \frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{(x-1)^2(-2x^2 + 3x + 3)}{6(2x^3 - x^2 + 2x + 3)} \right) \geq 0 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq 1 \geq z$ . Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1:  $y + z \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$

Khi đó ta có:  $-2x^2 + 3x + 3 > 0, -2y^2 + 3y + 3 > 0, -2z^2 + 3z + 3 > 0 \Rightarrow (2)$  đúng.

+ Trường hợp 2:  $y + z \leq 1 \Rightarrow x \geq 2$

Khi đó ta có:  $(2x^3 - x^2 + 2x + 3) - 5(x+1) = 2x^3 - x^2 - 3x - 2$

$$= x^3 \left( 2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \geq x^3 \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^3} \right) = \frac{x^3}{2} > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \leq \frac{1}{5}$$

Như vậy ta cần chứng minh:  $\frac{z+1}{2z^3 - z^2 + 2z + 3} + \frac{y+1}{2y^3 - y^2 + 2y + 3} \leq \frac{4}{5}$

Ta sẽ chứng minh  $\frac{k+1}{2k^3 - k^2 + 2k + 3} \leq \frac{2}{5} \quad \forall k \in [0, 1] \Leftrightarrow 4k^3 \geq (k+1)(2k-1) \quad \forall k \in [0, 1]$

Nếu  $k \leq \frac{1}{2}$  thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng nên (2) đúng suy ra (đpcm).

Nếu  $k \geq \frac{1}{2}$  thì

$$4k^3 - (k+1)(2k-1) \geq 4k^3 - 2(2k-1) = 2(2k^3 - 2k + 1) \geq 2(k^2 - 2k + 1) = 2(k-1)^2 \geq 0$$

Từ  $y+z \leq 1 \Rightarrow y, z \in [0, 1] \Rightarrow \frac{z+1}{2z^3 - z^2 + 2z + 3} \leq \frac{2}{5}; \frac{y+1}{2y^3 - y^2 + 2y + 3} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow (2)$  đúng.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét.** Đây là một kết quả mạnh hơn cho bài toán 3 trong kì thi IMO 2005 của tác giả **Vasile Cirtoaje**. Bài toán gốc ban đầu là với điều kiện  $abc \geq 1$ . Điều kiện của bài toán trên chặt hơn vì theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \Rightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow abc \geq 1$$

Chúng ta hãy đến với lời giải của chính tác giả bài toán trên, được trích từ quyển *Algebraic Inequalities, Old and New Method*. Ta qui về việc chứng minh bài toán sau:

**Bài 5.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq 1$$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1:  $a \leq \sqrt{2} \Rightarrow a, b \leq \sqrt{2}$ . Ta sử dụng các bất đẳng thức cơ sở sau

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} \leq \frac{3 - a^2}{6}, \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} \leq \frac{3 - b^2}{6}, \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq \frac{3 - c^2}{6}$$

Thật vậy xét biến đổi  $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} - \frac{3 - a^2}{6} = \frac{(a-1)^2(a^5 + 2a^4 - 3a^2 - 6a - 3)}{6(a^5 + 3 - a^2)}$ ,

và đánh giá  $a^5 + 2a^4 - 3a^2 - 6a - 3 = a^2 \left( a^3 + 2a^2 - 3 - \frac{6}{a} - \frac{3}{a^2} \right)$

$$\leq a^2 \left( 2\sqrt{2} + 4 - 3 - 3\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = -a^2 \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) < 0$$

+ Trường hợp 2:  $a > \sqrt{2}, a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow b^2 + c^2 < 1$

Khi đó ta có:  $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} < \frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2}$

Mặt khác  $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} < \frac{1}{2\sqrt{2}a^2 + 3 - a^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)a^2 + 3} < \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)2 + 3} < \frac{1}{6}$

Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được  $\frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2} \leq \frac{5}{6}$

Thật vậy ta có  $\frac{1}{3-b^2} + \frac{1}{3-c^2} - \frac{5}{6} = \frac{9(b^2+c^2-1)-5b^2c^2}{6(3-b^2)(3-c^2)} \leq 0$

Như vậy bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=1$ .

**Nhận xét.** Lời giải của tác giả Vasile Cirtoaje ngay từ đầu cũng đã sử dụng U.C.T nhưng nó lại đưa ta đến cách xét trường hợp khá lè vì phải so sánh biến với  $\sqrt{2}$ . Đây là một bài toán đẹp với nhiều mở rộng thú vị.

**Bài 6.** Tìm hằng số  $k$  tốt nhất để bất đẳng thức đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2+(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{kb^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{kc^2+(a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$

**Giải**

Cho  $a=b=1, c=0$  ta được  $k \geq 5$ . Ta sẽ chứng minh 5 chính là giá trị cần tìm,

tức là chứng minh: 
$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{(a+b+c)}{3}} \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left( \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}} \right)^2 \leq (a+b+c) \sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2},$$

ta chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=1$  và  $a \geq b \geq c \geq 0$  suy ra  $a \geq \frac{1}{3} \geq c \geq 0$ .

Bất đẳng thức (2)  $\Leftrightarrow \frac{a^2}{6a^2-2a+1} + \frac{b^2}{6b^2-2b+1} + \frac{c^2}{6c^2-2c+1} \leq \frac{1}{3}$ .

Ta phải xét hai trường hợp:

+ TH1:  $c \geq \frac{1}{8}$  ta có  $9 - \sum_{cyc} \frac{27a^2}{6a^2-2a+1} = \sum_{cyc} \left( 12a - 1 - \frac{27a^2}{6a^2-2a+1} \right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(8a-1)}{6a^2-2a+1} \geq 0$

+ TH 2:  $c \leq \frac{1}{8}$  ta có:  $\frac{6a^2}{6a^2-2a+1} + \frac{6b^2}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1} - 2$

$$= \frac{2a-1}{6a^2-2a+1} + \frac{2b-1}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1} = \frac{a-b-c}{6a^2-2a+1} + \frac{b-c-a}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1}$$

$$= \frac{2(a-b)^2(3c-2)}{(6a^2-2a+1)(6b^2-2b+1)} + c \left( \frac{6c}{6c^2-2c+1} - \frac{1}{6a^2-2a+1} - \frac{1}{6b^2-2b+1} \right)$$



Ta cần chứng minh:  $\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} \leq \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$

Vì  $c \leq \frac{1}{8}$  nên  $\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} \leq 1$  vậy ta sẽ chứng minh  $1 \leq \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$

Nếu  $b \leq \frac{1}{3}$  thì  $1 \leq \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$  nên bất đẳng thức được chứng minh

Nếu  $b \geq \frac{1}{3}$  thì áp dụng bất đẳng thức CBS, ta chỉ cần chứng minh

$$4 \geq 6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 2 \Leftrightarrow [2(a + b) + c](a + b + c) \geq 3(a^2 + b^2)$$

Từ giả thiết  $b \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3b \geq a$ , do đó:  $[2(a + b) + c](a + b + c) \geq 2(a + b)^2$

$$= 3(a^2 + b^2) + 4ab - a^2 + b^2 \geq 3(a^2 + b^2) + a(3b - a) \geq 3(a^2 + b^2) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

Vậy hằng số  $k$  tốt nhất là 5.

**Bài 7.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 3b + 3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - 3c + 3}} \leq 3$  (1)

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ .

Đề ý rằng  $\frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} \leq x + 1 \quad \forall x \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  (2)

Thật vậy, (2)  $\Leftrightarrow (x + 1)\sqrt{x^2 - 3x + 3} \geq 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + x - 1) \geq 0$  (đúng)

Suy ra: Nếu  $a \geq b \geq c \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  thì sử dụng bất đẳng thức (2) ta có (1) được chứng minh.

Xét  $0 < c \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ . Khi đó, có hai khả năng sau xảy ra:

+ Nếu  $b \leq 1$ , ta có:  $a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ;  $b^2 - 3b + 3 = (b - 1)^2 - b + 2 \geq 1$

$$c^2 - 3c + 3 = (1 - c)^2 - c + 2 \geq \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2 = \frac{16}{(\sqrt{5} + 1)^2}$$

Do đó: VT (1)  $\leq \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + 1 < 3$

+ Nếu  $b \geq 1$ , suy ra  $2 \geq a \geq b \geq 1$ . Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$  với  $1 \leq x \leq 2$

Ta có:  $f''(x) = \frac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2 - 3x + 3)^{5/2}} < 0 \Rightarrow f(x)$  là hàm lõm.

Do đó theo bất đẳng thức **Jensen** ta có:  $f(a) + f(b) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}}$

Ta phải chứng minh:  $\frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{(3-2t)^2 - 3(3-2t) + 3}} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{4t^2 - 6t + 3}} \leq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{36(t-1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2 - 3t + 3)^2(4t^2 - 6t + 3)^2} \geq 0 \quad (3)$$

Có thể kiểm tra (3) đúng nên (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

#### Bài 8. [Mở rộng từ Poland 1996]

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng  $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq \frac{1}{3} \geq c$ . Xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1:  $c \geq -\frac{3}{4}$  ta có

$$\frac{9}{10} - \left( \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \right) = \sum_{cyc} \left( \frac{18a}{25} + \frac{5}{30} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \geq 0$$

+ Trường hợp 2:  $c \leq -\frac{3}{4}$ . Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có  $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} \leq 1$

Khi đó nếu  $\frac{c}{c^2 + 1} \leq -\frac{9}{10} \Leftrightarrow -5 - 2\sqrt{6} \leq c \leq -\frac{3}{4}$  ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét trường hợp:  $-5 - 2\sqrt{6} \geq c$  khi đó ta có  $3 + \sqrt{6} \leq a \Rightarrow \frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{1}{5}$ . Từ đây suy ra:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ .

#### IV. KẾT HỢP BẤT ĐẲNG THỨC VORNICU SCHUR VỚI U.C.T

Trong chương II chúng tôi đã giới thiệu bất đẳng thức Schur mở rộng và các ứng dụng. Bây giờ chúng ta sẽ thấy sự kết hợp giữa **Vornicu Schur** với **U.C.T** sẽ tạo ra những lời giải khá ấn tượng và đẹp mắt. Trước hết chúng ta hãy nhắc lại bất đẳng thức **Vornicu Schur**.

**1. Bất đẳng thức Vornicu Schur:** Cho  $a \geq b \geq c$  và  $A, B, C \geq 0$  khi đó bất đẳng thức

$A(a-b)(a-c) + B(b-c)(b-a) + C(c-a)(c-b) \geq 0$  là đúng khi và chỉ khi

i.  $A \geq B$  hoặc  $C \geq B$

ii.  $A \times a \geq B \times b$

iii.  $B \times c \geq C \times b$  (Nếu  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác)

iv.  $\sqrt{A} + \sqrt{C} \geq \sqrt{B}$

**2. Hai dạng biến đổi chính tắc và các ứng dụng của dạng 2**

**Dạng 1.**  $A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 &= A(a-b)(a-c+c-b) + B(b-c)(b-a+a-c) + C(c-a)(c-b+b-a) \\ &= \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} A(b-c)(b-a) = \sum_{cyc} (A+B)(b-c)(b-a) \end{aligned}$$

**Dạng 2.**  $A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 &= \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} A(a-b)^2 + \sum_{cyc} A(c-a)^2 = 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} (A+B)(a-b)^2 \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} (2A+B+C)(a-b)(a-c) = \sum_{cyc} (4A+B+C)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Dạng 1 là dạng phân tích chính tắc của phương pháp S.O.S một phương pháp đã lấy làm quen thuộc với nhiều người. Từ phép phân tích trên ta có thể thấy rằng mối liên hệ giữa phương pháp S.O.S và bất đẳng thức Vornicu Schur là rất mật thiết. Tuy nhiên trong bài viết này chúng ta sẽ không đề cập vấn đề này mà chúng ta sẽ chỉ xem xét dạng 2 ở trên. Vì tính ứng dụng của nó trong **U.C.T** là nhiều hơn và nó cũng là một sự kết hợp mang nhiều ý nghĩa.

Bây giờ hãy mở đầu bằng một bài toán trông có vẻ đơn giản nhưng cũng không quá dễ để tìm ra lời giải nếu không chọn đúng đường đi.

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh  $3(a^4 + b^4 + c^4) + a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq 6(a^3 + b^3 + c^3)$

### Chứng minh

Theo U.C.T dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau

$$3a^4 + a^2 + 2 \geq 6a^3 - 4a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

Ta quy bài toán về chứng minh  $\sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$

$$\text{Thật vậy } \sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a-3)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a-a-b-c)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a-b-c)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (4a^2 + b^2 + c^2 - 4)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$  khi đó ta có

$$4a^2 + b^2 + c^2 - 4 \geq 4b^2 + a^2 + c^2 - 4 \geq 4c^2 + b^2 + a^2 - 4$$

$$\text{Lại có } 4c^2 + a^2 + b^2 - 4 \geq 4c^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - 4 = 4c^2 + \frac{(3-c)^2}{2} - 4 = \frac{(3c-1)^2}{2} \geq 0$$

Theo định lí 1 ta có (đpcm).

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 1 \text{ hoặc } (a, b, c) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

**Nhận xét:** Bài toán sẽ được giải quyết trong trường hợp  $3a^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Trường

hợp còn lại  $a \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$  rõ ràng sẽ khó giải quyết vì vẻ phải của điều kiện trong trường hợp 2

khá lè, nhiều khả năng sẽ dẫn đến những tính toán phức tạp không cần thiết. Tuy nhiên cần chú ý một điều là đẳng thức của bài toán này xảy ra tại hai điểm cực trị vì vậy không thể áp dụng mỗi U.C.T vì dạng phát biểu của kỹ thuật này sẽ cho ta duy nhất một điểm cực trị cần tìm. Như vậy việc kết hợp giữa U.C.T và bất đẳng thức Vornicu Schur không đơn thuần là giải quyết bài toán một cách đẹp mắt mà còn hướng ta đến việc giải quyết trường hợp đẳng thức xảy ra khi có hai biến bằng nhau và khác biến còn lại.

**Bài 2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$  (1)

### Chứng minh

Ta cần xác định hệ số  $m$  cho bất đẳng thức cơ sở sau:  $2a^3 + 3 \geq 5a^2 + m(a-1)$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2 - 3a - 3) \geq m(a-1)$ . Với  $a = 1$  thì  $2a^2 - 3a - 3 = -4$  nên chọn  $m = -4$ .

Bất đẳng thức  $2a^3 + 3 \geq 5a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1) \geq 0$

Tương tự với các biến  $b, c$  ta suy ra:

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1) + (b-1)^2(2b-1) + (c-1)^2(2c-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (2a-b-c)^2(2a-1) + (2b-c-a)^2(2b-1) + (2c-a-b)^2(2c-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 6a(a-b)(a-c) + 6b(b-c)(b-a) + 6c(c-a)(c-b) \geq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Khi đó theo bất đẳng thức **Vornicu Schur** ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$  cùng các hoán vị.

**Nhận xét.** Lại một bài toán đơn giản nhưng điều thú vị ở bài toán này là đẳng thức đạt được tại 2 điểm. Nếu như giải một cách thông thường bằng U.C.T thì không thể giải quyết bài toán một cách triệt để và một lần nữa bất đẳng thức Vornicu Schur lại phát huy tác dụng của nó.

### Bài 3. [Romania TST 2006]

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$  (1)

#### Chứng minh

Theo U.C.T dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{1}{a^2} + 4a \geq a^2 + 4$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(2a-b-c)^2(1+2a-a^2)}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (4A+B+C)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Trong đó  $A = \frac{1+2a-a^2}{a^2}, B = \frac{1+2b-b^2}{b^2}, C = \frac{1+2c-c^2}{c^2}$ . Không mất tính tổng quát giả sử

$$a \geq b \geq c \text{ khi đó ta có } A - B = \frac{1+2b-b^2}{b^2} - \frac{1+2a-a^2}{a^2} = \frac{(a-b)(2ab+a+b)}{a^2b^2} \geq 0$$

Từ đó suy ra  $4C + A + B \geq 4B + A + C \geq 4A + B + C$

Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $3 = a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{abc}$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3. \text{ Do đó } 4A+B+C = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{8}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 6 =$$

$$= \left( \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{6}{a} \right) + 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \right) \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \right) \geq 2 \left( \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} - 3 \right) \geq 2(3-3) = 0$$

Theo định lí 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=1$

**Bài 4.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{a^5+b^5+c^5-3}{a^3+b^3+c^3-3} \geq \frac{5(5\sqrt{3}-7)}{\sqrt{3}+1}$  (1)

### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( a^5 - \frac{5(5\sqrt{3}-7)}{\sqrt{3}+1} a^3 + \frac{24\sqrt{3}-36}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-1)^2 \left( a^3 + 2a^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} a + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (4M_a + M_b + M_c)(a-b)(a-c) \geq 0, \text{ trong đó}$$

$$M_a = a^3 + 2a^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} a + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

$$M_b = b^3 + 2b^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} b + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}; M_c = c^3 + 2c^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} c + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

$$\text{Ta có } 4M_a + M_b + M_c = 4a^3 + b^3 + c^3 + 2(4a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} a + \frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \geq$$

$$\geq 4a^3 + \frac{(b+c)^3}{3} + 8a^2 + (b+c)^2 + \frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} a + \frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \geq$$

$$4a^3 + \frac{(3-a)^3}{3} + 8a^2 + (3-a)^2 + \frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} a + \frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} = \frac{15(a+3-2\sqrt{3})^2(a+4\sqrt{3}-3)}{4} \geq 0.$$

$$\text{Tương tự, ta có: } 4M_b + M_c + M_a \geq 0, \quad 4M_c + M_a + M_b \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2$ .

$$\text{Ta có: } (4M_a + M_b + M_c) - (4M_b + M_c + M_a) = 3(M_a - M_b)$$

$$= 3(a^3 - b^3) + 6(a-b) \left( a+b + \frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 3(a^3 - b^3) + 6(a-b) \left( 2 + \frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 0$$

$$\text{Do đó: } \sum_{\text{cyc}} (4M_a + M_b + M_c)(a-b)(a-c)$$

$$= (a-b)[(a-c)(4M_a + M_b + M_c) - (b-c)(4M_b + M_c + M_a)] + (4M_c + M_a + M_b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

V. MỘT DẠNG BIỂU DIỄN THỨ VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu từ một đẳng thức và sẽ thấy sự phát triển thứ vị từ nó

$$1 = \frac{a^k + b^k + c^k}{a^k + b^k + c^k} = \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{b^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{c^k}{a^k + b^k + c^k}$$

Đẳng thức này trông đơn giản nhưng lại đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà không thể sử dụng được kỹ thuật xác định hệ số khi xuất hiện lũy thừa bậc  $p$ . Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp, vì vậy chúng ta sẽ sử dụng đạo hàm với hai định lý cơ bản sau đây:

1. Định lý Fermat.

Giả sử hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và có cực trị địa phương tại  $x_0 \in [a, b]$ . Khi đó nếu  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

2. Định lý Roll. Giả sử  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và khả vi trong khoảng  $(a, b)$ . Khi đó nếu tồn tại  $x_1, x_2 \in (a, b)$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$  thì tồn tại  $x_0 \in (x_1, x_2)$  sao cho  $f'(x_0) = 0$

**Bài 1.** Tìm hằng số  $k > 0$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{kb^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

Giải

Cho  $a=1, b=c=0$  ta có  $k \leq \frac{1}{2}$ . Ta sẽ chứng minh  $k = \frac{1}{2}$  là giá trị tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Thật vậy khi  $k = \frac{1}{2}$  thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}} \geq 1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k}$

Ở đây ta chuẩn hóa  $b=c=1$  để việc xác định hệ số được đơn giản hơn.

Khi đó ta cần xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} \geq \frac{a^k}{a^k + 2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0$

Đặt  $f(a) = a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2$ . Ta có  $f(a) \geq 0, f(1) = 0$  nên theo định lý Fermat ta có

$f'(1) = 0$ . Do  $f'(a) = (k+2)a^{k+1} - 4ka^{2k-1} + 2a$  nên  $f'(1) = (k+2) - 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$ .

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}}$

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức



V. MỘT DẠNG BIỂU DIỄN THỦ VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu từ một đẳng thức và sẽ thấy sự phát triển thú vị từ nó

$$1 = \frac{a^k + b^k + c^k}{a^k + b^k + c^k} = \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{b^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{c^k}{a^k + b^k + c^k}$$

Đẳng thức này trông đơn giản nhưng lại đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà không thể sử dụng được kỹ thuật xác định hệ số khi xuất hiện lũy thừa bậc  $p$ . Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp, vì vậy chúng ta sẽ sử dụng đạo hàm với hai định lý cơ bản sau đây:

1. Định lý Fermat.

Giả sử hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và có cực trị địa phương tại  $x_0 \in [a, b]$ . Khi đó nếu  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

2. Định lý Roll. Giả sử  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và khả vi trong khoảng  $(a, b)$ . Khi đó nếu tồn tại  $x_1, x_2 \in (a, b)$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$  thì tồn tại  $x_0 \in (x_1, x_2)$  sao cho  $f'(x_0) = 0$

**Bài 1.** Tìm hằng số  $k > 0$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{kb^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

**Giải**

Cho  $a=1, b=c=0$  ta có  $k \leq \frac{1}{2}$ . Ta sẽ chứng minh  $k = \frac{1}{2}$  là giá trị tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Thật vậy khi  $k = \frac{1}{2}$  thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq 1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k}$

Ở đây ta chuẩn hóa  $b=c=1$  để việc xác định hệ số được đơn giản hơn.

Khi đó ta cần xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} \geq \frac{a^k}{a^k + 2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0$

Đặt  $f(a) = a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2$ . Ta có  $f(a) \geq 0, f(1) = 0$  nên theo định lý Fermat ta có

$f'(1) = 0$ . Do  $f'(a) = (k+2)a^{k+1} - 4ka^{2k-1} + 2a$  nên  $f'(1) = (k+2) - 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$ .

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}}$

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức



cơ sở là đúng. Tuy nhiên bất đẳng thức cơ sở trên chỉ là phỏng đoán logic, nên có thể nó sẽ không đúng. Ngoài ra, một số bài toán khi biến đổi tương đương gặp khó khăn thì nên “tùy cơ ứng biến” cho các tình huống cụ thể. Chúng ta tiếp tục quay lại bài toán trên với phép chứng minh cho bất đẳng thức cơ sở.

Theo bất đẳng thức **Holder** ta có

$$(1+1)^{\frac{1}{4}} \left( b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \geq b+c \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{4}} \left( \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4} \right)^{\frac{3}{4}} \geq b+c \Leftrightarrow \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4} \geq 2\sqrt[3]{\left(\frac{b+c}{2}\right)^4}.$$

Đặt  $t = \frac{b+c}{2}$  thì ta phải chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8t^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4+2\sqrt[3]{t^4}}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^4} + 2\sqrt[3]{t^4} \geq \sqrt[3]{a}\sqrt{a^2+8t^2} \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{t^2})^2 \geq 0, \text{ đúng}$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$  hoặc  $a=t>0, b=c=0$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Có thể tìm hệ số  $k$  bằng cách sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** như sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \geq \frac{a^k}{a^k+2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^{k+2} + a^2 \geq 2a^{2k}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức **AM – GM** thì  $a^{k+2} + a^2 \geq 2\sqrt{a^{k+4}}$ .

Như vậy ta có cần xác định  $k$  sao cho  $2\sqrt{a^{k+4}} = 2a^{2k} \Leftrightarrow a^{k+4} = a^{4k} \Leftrightarrow k+4=4k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$

**Bài 2. [IMO 2001]** Chứng minh  $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1, \forall a, b, c > 0$  (1)

### Chứng minh

Tương tự như trên ta xây dựng được bất đẳng thức cơ sở:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \quad (2)$$

Thật vậy (2)  $\Leftrightarrow a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3} \geq a^{1/3}\sqrt{a^2+8bc}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:  $b^{4/3} + c^{4/3} \geq 2b^{2/3}c^{2/3} = 2t^{4/3}$ , trong đó  $t = \sqrt{bc}$

Ta cần chứng minh:  $a^{4/3} + 2t^{4/3} \geq a^{1/3}\sqrt{a^2+8t^2} \Leftrightarrow 4t^{4/3}(a^{2/3} - t^{2/3})^2 \geq 0$  (đúng)

Như vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh. Sử dụng tương tự cho  $b, c$  rồi cộng lại

$$\text{ta có } \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$  hoặc  $b \rightarrow 0, c \rightarrow 0$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{a^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

**Chứng minh**

Xây dựng được bất đẳng thức cơ sở:  $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$  (\*)

Có thể chứng minh bất đẳng thức cơ sở này trên theo nhiều cách:

**Cách 1:** Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \geq a(b+c)^3$ . Thật vậy ta có

$$2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \geq a^2(b+c)^2 + \frac{(b+c)^4}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)^6}{4}} = a(b+c)^3$$

**Cách 2:** Theo bất đẳng thức  $AM - GM$  ta có:

$$\sqrt{1+k^2} = \sqrt{(1+k)(1-k+k^2)} \leq \frac{(1+k) + (1-k+k^2)}{2} = 1 + \frac{k^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ sở trên ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{b^2 + c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Áp dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhau hoặc có hai biến dần về 0.

**Bài 4.** Chứng minh  $\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3} + \frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3} + \frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3} \geq \frac{1}{3}$ ,  $\forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức  $CBS$ , ta có:

$$\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3} + \frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3} + \frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3} \geq \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{a^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \right)^2$$

Theo bài 3 ta có  $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{a^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$ .

Từ đó suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

## VI. CÁC BÀI TOÁN VỚI ĐIỀU KIỆN CHỨA CẤU TRÚC NHÂN

Ở trên ta đã xét kĩ thuật U.C.T. với điều kiện cho trước  $a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k + a_n^k = n$ . Bây giờ

chúng ta sẽ xét kĩ thuật U.C.T. với dạng điều kiện  $\prod_{i=1}^n a_i^k = C$ . Khi đó việc tìm ra bất đẳng

thức cơ sở khá khó khăn vì ta không thể đánh giá theo từng biến được nữa. Lúc này muốn áp dụng U.C.T chúng ta phải dùng đến một số tính chất của hàm số.

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \geq \sqrt{2}$

**Chứng minh**

Áp dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left( \frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \right)^2 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c} \right) \geq (a+b+c)^3$$

Do đó ta cần phải chứng minh:  $(a+b+c)^3 \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c}$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} a^3 + 3 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + 3 \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} + 6 \geq 4 \sum_{\text{cyc}} ab + 4 \sum_{\text{cyc}} a + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \geq \sum_{\text{cyc}} ab; \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \geq \sum_{\text{cyc}} ab; 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \leq \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a}$$

Từ đó ta có:  $VT - VP \geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + \frac{5}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \frac{5}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - 4 \sum_{\text{cyc}} ab - 4 \sum_{\text{cyc}} a + 6$

$$\geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + \sum_{\text{cyc}} ab - 4 \sum_{\text{cyc}} a + 6 = \sum_{\text{cyc}} \left( a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2 \right)$$

Xét  $f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 + 2 \ln x$  với  $x > 0$  ta có:  $f'(x) = (x-1) \left( 3x + 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

Nếu  $x < 1$  thì  $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$ , nếu  $x \geq 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x}$  do đó  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Dễ dàng kiểm tra rằng  $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x > 0$  hay  $x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 \geq -2 \ln x, \forall x > 0$ .

Như vậy ta có:  $\sum_{\text{cyc}} \left( a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2 \right) \geq -2 \sum_{\text{cyc}} \ln a = 0$ . Bài toán được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh  $\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq 1$  (1)

**Chứng minh**

Xét hai trường hợp sau

+ TH1:  $\min\{a, b, c\} \leq \frac{1}{2}$ , giả sử là  $a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 3a^2 + (a-1)^2 \leq 1 \Rightarrow (1)$  đúng

+ TH 2:  $\min\{a, b, c\} > \frac{1}{2}$ , khi đó ta xét đánh giá  $\frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} + k \ln x$

Ở đây ta qui về hàm số Lôgarit với chú ý  $\ln a + \ln b + \ln c = 0$ .

Tiếp tục quan sát thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Từ đó ta có phải xác định  $k$  sao cho  $f'(1) = 0$ :  $f(x) = \frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3}$

Ta có:  $f'(x) = \frac{2(16x^4 - 16x^3 - x + 1)}{3x(4x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2(x-1)(16x^3 - 1)}{3x(4x^2 - 2x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (do  $x > \frac{1}{2}$ ).

Dễ dàng kiểm tra được  $f(x) \geq f(1) = 0$ ,  $\forall x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln x \quad \forall x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq \sum_{cyc} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln x \right) = 1 - \frac{2}{3} \ln(abc) = 1$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$  hoặc  $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty, c \rightarrow 0^+$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Sau đây là lời giải tóm tắt nhưng rất ấn tượng của Vasile Cirtoaje.

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở:  $\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{2a^3 + 1} \Leftrightarrow \frac{2a(a-1)^2}{(4a^2 - 2a + 1)(2a^3 + 1)} \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng với mọi số thực không âm. Từ đó ta có (đpcm)

**Bài 3.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$  (1)

### Chứng minh

Trước hết, ta sẽ chứng minh  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} + \ln x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1.8]$

Thật vậy, ta có:  $f'(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x^3-x^2-1)}{x(x^2-x+1)^2}$

Rõ ràng phương trình  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm  $x \in (0, 2]$ ,

do đó ta dễ dàng kiểm tra được  $f(x) \leq \min\{f(1), f(1.8)\} = 0$

Như thế, nếu cả 3 số  $a, b, c$  đều không lớn hơn 1.8 thì ta có (đpcm), vì khi đó

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} = f(a) + f(b) + f(c) \leq 3 - \ln a - \ln b - \ln c = 3$$

Ngược lại, nếu tồn tại  $a$  sao cho  $a \geq 1.8$ . Nếu  $a \geq 2$ , ta có

$$VT(1) = \frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2^2 - 2 + 1} + \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{4}} = 3$$

Như thế, ta chỉ cần xét  $a \leq 2$ , tức là  $2 \geq a \geq 1.8$ .

Giả sử  $b \geq c$ , khi đó do  $a \leq 2$  nên  $b \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Nếu  $a \geq 1.9$ , ta có

$$VT(1) = \frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{1.9^2 - 1.9 + 1} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} + \frac{1}{\frac{3}{4}} < 3$$

Nếu  $a \leq 1.9$ , suy ra  $b \geq \frac{1}{\sqrt{1.9}}$  khi đó ta có:

$$VT(1) = \frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{1.8^2 - 1.8 + 1} + \frac{1}{\frac{1}{1.9} - \frac{1}{\sqrt{1.9}} + 1} + \frac{1}{\frac{3}{4}} < 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét:** Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách khác như sau

Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} \geq 1 \quad \forall x, y, z > 0, xyz = 1$  (1)

Thật vậy, tồn tại  $m, n, p > 0$  sao cho  $x = \frac{np}{m^2}, y = \frac{pm}{n^2}, z = \frac{mn}{p^2}$  khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{m^4}{m^4 + m^2 np + n^2 p^2} + \frac{n^4}{n^4 + n^2 pm + p^2 m^2} + \frac{p^4}{p^4 + p^2 mn + m^2 n^2} \geq 1 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có

$$\begin{aligned} VT(2) &\geq \frac{(m^2 + n^2 + p^2)^2}{m^4 + n^4 + p^4 + m^2 n^2 + n^2 p^2 + p^2 m^2 + mnp(m + n + p)} \\ &\geq \frac{(m^2 + n^2 + p^2)^2}{m^4 + n^4 + p^4 + 2(m^2 n^2 + n^2 p^2 + p^2 m^2)} = 1 \end{aligned}$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức trên khi thay  $x, y, z$  bởi  $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{a^4+a^2+1} + \frac{b^4}{b^4+b^2+1} + \frac{c^4}{c^4+c^2+1} &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1} + \frac{2(b^2+1)}{b^4+b^2+1} + \frac{2(c^2+1)}{c^4+c^2+1} \leq 4 \\ \Leftrightarrow \frac{(a^2+a+1)+(a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)} + \frac{(b^2+b+1)+(b^2-b+1)}{(b^2+b+1)(b^2-b+1)} + \frac{(c^2+c+1)+(c^2-c+1)}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)} &\leq 4 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \right) + \left( \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \right) &\leq 4 \end{aligned}$$

Lại sử dụng bất đẳng thức trên, ta có  $\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \geq 1$

Suy ra  $\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \leq 3$ . Vậy ta có đpcm.

**Bài 4.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} + \frac{1+d}{1+d^2} \leq 4$  (1)

#### Chứng minh

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{\ln x}{2} - 1$  với  $x > 0$ , ta có  $f'(x) = \frac{(x-1)(x^3-x^2-3x-1)}{2x(x^2+1)^2}$

Để thấy phương trình  $x^3-x^2-3x-1=0$  chỉ có duy nhất một nghiệm  $x_0 \in (1,4]$ ,

do đó ta có:  $f(x) \leq \max\{f(1), f(4)\} = 0 \quad \forall x \in (0,4]$

Và như thế, ta đi đến nếu cả 4 số  $a, b, c, d$  đều không lớn hơn 4 thì ta có đpcm vì

$$VT(1) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leq 4 - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b + \ln c + \ln d) = 4$$

Nếu tồn tại 1 số, chẳng hạn là  $a \geq 4$ . Khi đó, chú ý rằng với mọi  $x > 0$ , ta có

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{21}{17} - \frac{21x^2-17x+4}{17(x^2+1)} \leq \frac{21}{17} \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{21}{17}$$

Từ đây, ta được  $VT(1) \leq \frac{1+a}{1+a^2} + \frac{3 \times 21}{17} \leq \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{3 \times 21}{17} = 4$ .

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 5.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa mãn  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ .

Chứng minh rằng  $\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \dots + \sqrt{a_n^2+1} \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  (1)

#### Chứng minh

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$  với  $x > 0$

Khi đó ta có:  $f'(x) = \frac{(x-1)[-2x^2 + x - 1 - 2x^2\sqrt{2(x^2+1)}]}{x\sqrt{2(x^2+1)}(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1})} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Qua 1 thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên  $f'(x) \leq f'(1) = 0, \forall x > 0$ .

Điều đó có nghĩa là  $\sqrt{x^2+1} \leq 2\sqrt{x} - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x, \forall x > 0$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở này cho  $n$  biến và cộng vế theo vế ta có

$$VT(1) \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n)$$

$$= \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln \prod_{i=1}^n a_i = \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

**Nhận xét:** Bài toán trên còn có thể giải quyết bằng một bất đẳng thức cơ sở quen thuộc:

$$\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}(x - \sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x} - 1)^4, \forall x > 0$$

Sử dụng bất đẳng thức trên lần lượt cho  $n$  biến cộng lại ta có:

$$VT(1) \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \sqrt{2}\left(n - \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}\right) \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

#### Bài 6. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$

#### Chứng minh

Ta cần xác định hệ số  $k$  sao cho:  $a^2 + 9bc = a^2 + \frac{9}{a} \geq 10a + k \ln a$ . Tương tự các phần trước ta

tìm được  $k = -17$ . Ta sẽ chứng minh:  $f(a) = a^2 + \frac{9}{a} - 10a + 17 \ln a \geq 0$

$$\text{Thật vậy: } f'(a) = 2a - \frac{9}{a^2} - 10 + \frac{17}{a} = \frac{2a^3 - 10a^2 + 17a - 9}{a^2} = \frac{(a-1)(2a^2 - 8a + 9)}{a^2}$$

Ta có  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ . Từ đây, ta dễ dàng thấy được  $f(a) \geq f(1) = 0, \forall a > 0$

hay  $a^2 + \frac{9}{a} - 10a \geq -17 \ln a$ . Sử dụng tương tự với  $b, c$  rồi cộng lại vế theo vế, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 7.** Cho các số dương  $a, b, c, d, e, f$  thỏa mãn  $abcdef = 1$ , chứng minh rằng:

$$\frac{2a+1}{a^2+a+1} + \frac{2b+1}{b^2+b+1} + \frac{2c+1}{c^2+c+1} + \frac{2d+1}{d^2+d+1} + \frac{2e+1}{e^2+e+1} + \frac{2f+1}{f^2+f+1} \leq 6 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Xét hàm số  $F(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{\ln x}{3} - 1$  với  $x > 0$ , ta có

$$F'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{1}{3x} = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 - 6x - 1)}{3x(x^2 + x + 1)^2}$$

Chú ý rằng phương trình  $x^3 - 3x^2 - 6x - 1 = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm  $x_0 \in [4, 12]$ , từ đây ta dễ dàng suy ra được  $F(x) \leq \max\{f(1), f(12)\} = 0 \quad \forall x \in (0, 12]$

Do đó, nếu  $\max\{a, b, c, d, e, f\} \leq 12$ , ta có:

$$VT(1) = F(a) + F(b) + F(c) + F(d) + F(e) + F(f) \leq 6 - \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c + \ln d + \ln e + \ln f) = 6$$

Nếu  $\max\{a, b, c, d, e, f\} \geq 12$ , giả sử  $a = \max\{a, b, c, d, e, f\} \geq 12$ , khi đó với chú ý rằng với mọi

$$x > 0 \text{ thì } \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{7}{6} - \frac{7x^2-5x+1}{6(x^2+x+1)} \leq \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x+1} \leq \frac{7}{6}$$

$$\text{Do đó } VT(1) \leq \frac{2a+1}{a^2+a+1} + \frac{5 \times 7}{6} \leq \frac{2 \times 12+1}{12^2+12+1} + \frac{5 \times 7}{6} < 6$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 1$ .

**Bài 8.** Cho các số dương  $a, b, c, d, e, f$  thỏa mãn  $abcdef = 1$ , chứng minh rằng:

$$\frac{a-1}{a^2+a+1} + \frac{b-1}{b^2+b+1} + \frac{c-1}{c^2+c+1} + \frac{d-1}{d^2+d+1} + \frac{e-1}{e^2+e+1} + \frac{f-1}{f^2+f+1} \leq 0$$

**Chứng minh**

$$\text{Xét hàm số } F(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{\ln x}{3} \text{ với } x > 0, \text{ ta có } F'(x) = \frac{(x-1)(-x^3 - 6x^2 - 3x + 1)}{3x(x^2+x+1)^2}$$

Chú ý rằng phương trình  $-x^3 - 6x^2 - 3x + 1 = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm  $x_0 > \frac{1}{5}$ .



từ đây ta dễ dàng suy ra được  $F(x) \leq \max \left\{ f(1), f\left(\frac{1}{11}\right) \right\} = 0, \forall x \geq \frac{1}{11}$

Do đó, nếu  $\min\{a, b, c, d, e, f\} \geq \frac{1}{11}$  ta có:

$$VT(1) = F(a) + F(b) + F(c) + F(d) + F(e) + F(f) \leq \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c + \ln d + \ln e + \ln f) = 0$$

Nếu  $\min\{a, b, c, d, e, f\} \leq \frac{1}{11}$  và giả sử  $a = \min\{a, b, c, d, e, f\}$  thì  $a \leq \frac{1}{11}$

Đề ý rằng với mọi  $x > 0$  thì  $\frac{x-1}{x^2+x+1} \leq \frac{(\sqrt{3}+1)-1}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}+1) + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$

$$\text{Do đó } VT(1) \leq \frac{a-1}{a^2+a+1} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \leq \frac{\frac{1}{11}-1}{\frac{1}{11^2} + \frac{1}{11} + 1} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) < 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 1$

**Bài 9.** Cho các số dương  $a, b, c, d, e, f, g$  có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1)(e^2 - e + 1)(f^2 - f + 1)(g^2 - g + 1) \geq 1 \quad (1)$$

### Chứng minh

Bất đẳng thức (1) tương đương với  $\sum_{cyc} \ln(a^2 - a + 1) \geq 0$

Xét hàm số  $F(x) = \ln(x^2 - x + 1) - x + 1$ . Ta có  $F'(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{x^2 - x + 1}$

Từ đây, ta có  $F(x) \geq \min\{f(1), f(2.75)\} = 0, \forall x \in (0, 2.75]$

Do đó nếu các số  $a, b, c, d, e, f, g$  không vượt quá 2.75 ta có ngay đpcm vì

$$\sum_{cyc} \ln(a^2 - a + 1) = \sum_{cyc} F(a) \geq \sum_{cyc} (1 - a) = 0$$

Ngược lại, giả sử tồn tại  $a \geq 2.75$ . Khi đó, chú ý rằng  $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \forall x \in \mathbb{R}$  nên

$$\sum_{cyc} \ln(a^2 - a + 1) \geq \ln(a^2 - a + 1) + 6 \ln \frac{3}{4} \geq \ln(2.75^2 - 2.75 + 1) + 6 \ln \frac{3}{4} > 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = g = 1$ .

## VII. U.C.T MỜ RỘNG

Ngay từ phần mở đầu chúng ta đã đặt vấn đề xác định hệ số  $m$  theo bất đẳng thức  $h(a_i) \geq f(a_i) + ma^k + n$  với điều kiện của bài toán là  $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = n$ . Tuy nhiên cách xác định đó đối với một số bài toán lại không hiệu quả. Điều đó cũng không phải hoàn toàn là không tốt. Vì nó sẽ thôi thúc chúng ta tìm ra các dạng xác định hệ số khác. Một cách trực quan chúng ta sẽ phân tích một bài toán cụ thể để thấy được những gì đã được nêu ra ở trên.

**Bài 1. [Tập chí Crux, Canada]** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$

Chứng minh:  $\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \leq \frac{3}{8}$

### Chứng minh

Điều đầu tiên là chúng ta nghĩ đến việc thiết lập một bất đẳng thức cơ sở dạng

$$\frac{8}{9-x} \leq 1 + mx + n \Rightarrow \frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x-1), \text{ từ đó dự đoán } m = \frac{1}{8}.$$

Nhưng rất tiếc với  $m = \frac{1}{8}$  thì bất đẳng thức trên hoàn toàn không đúng kể cả tư tưởng chia trường hợp như ở phần 3 cũng không thể áp dụng được. Thật vậy với  $m = \frac{1}{8}$  ta có

$$\frac{8}{9-x} \leq \frac{7+x}{8} \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)^2}{8(9-x)}, \text{ bất đẳng thức này không luôn đúng.}$$

Tuy nhiên ta có thể sử dụng U.C.T với một ý tưởng mới mẻ hơn bằng cách thiết lập bất đẳng thức cơ sở sau:  $\frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x^2 - 1) + n(x-1)$  (\*)

Việc xác định hệ số trong bất đẳng thức trên đòi hỏi sự chặt chẽ trong lập luận vì đôi khi nơi lỏng lẻo miền nghiệm của biến sẽ khiến cho bài toán không đúng. Có nhiều hệ số thỏa mãn để tạo thành đại lượng bình phương  $(x-1)^2$  nhưng ta phải xác định sao cho dấu của bất đẳng thức (\*) là đúng. Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow 0 \leq (x-1) \left[ m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} \right]$  (\*\*)

Từ phân tích trên rõ ràng ta phải xác định  $n$  theo  $m$  sao cho xuất hiện nghiệm  $x = 1$  để hình thành đại lượng  $(x-1)^2$ , tức là  $m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{9-x} - m(x+1) \Rightarrow n = \frac{1}{8} - 2m$

Thế vào (\*\*) ta có (\*\*)  $\Leftrightarrow 0 \leq (x-1) \left[ m(x+1) - 2m + \frac{1}{8} - \frac{1}{9-x} \right] \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 (72m - 8mx - 1)$

Dễ thấy rằng việc xác định hệ số ở đây không còn đơn giản như trước. Nó đòi hỏi ta phải tìm ra những ước lượng chặt chẽ để bất đẳng thức không đổi chiều. Sử dụng điều kiện

$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$  ta có đánh giá  $3 > \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$  và còn có thể làm chặt hơn nữa:

$\frac{9}{4} \geq \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$ . Tuy nhiên đối với bài toán này thì chỉ cần sử dụng điều kiện yếu là  $3 > \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$ . Bây giờ ta cần xác định hệ số  $m$  để bất đẳng thức trên đúng  $\forall x \in [0; 3)$ .

Nếu  $m < 0$  thì với  $x = 0$  ta nhận được một bất đẳng thức ngược chiều. Vậy có thể dự đoán  $m \geq 0$ , khi đó  $72m - 1 - 8mx \geq 72m - 1 - 24 = 48m - 1$

Ta cần có  $48m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{48}$ . Vậy nên ta sẽ dự đoán  $m = \frac{1}{48} \Rightarrow n = \frac{1}{12}$ .

Bây giờ ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức cơ sở đúng với  $m = \frac{1}{48}, n = \frac{1}{12}$ .

Thật vậy ta có:  $\frac{8}{9-x} \leq \frac{x^2+4x+43}{48} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-x)}{48(9-x)}$  (luôn đúng)

Áp dụng bất đẳng thức cơ sở trên với các biến  $ab, bc, ca$  ta có:

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{1}{48}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca) + \frac{43}{16}$$

Ta cần chứng minh:  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca \leq 15$  (2)

Đặt  $k = ab + bc + ca$ , áp dụng bất đẳng thức  $AM - GM$  và bất đẳng thức  $Schur$  ta có:

$k \leq 3, abc \geq \max\left\{0, \frac{4x-9}{3}\right\}$ . Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu  $4x \leq 9$  thì

$$VT(2) = (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc = k^2 + 4k - 6abc \leq \frac{81}{16} + 9 = \frac{225}{16} < 15$$

+ Trường hợp 2. Nếu  $4x \geq 9$  thì:  $VT(2) = (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc$

$$= k^2 + 4k - 6abc \leq k^2 + 4k - 2(4k - 9) = (k-1)(k-3) + 15 \leq 15$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Tiếp theo chúng tôi sẽ không đi vào chi tiết mà chỉ đưa ra cách thiết lập bất đẳng thức cơ sở một cách khái quát. Chúng ta hãy đến với bài toán sau

### Bài 2. [Moldova TST 2005]

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$

#### Chứng minh

Với  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$  ta luôn có  $\frac{3}{4-x} \leq \frac{2x^2+x+12}{15} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-2x)}{15(4-x)}$

Lại có  $\max\{ab, bc, ca\} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$  nên ta có

$$\frac{3}{4-ab} + \frac{3}{4-bc} + \frac{3}{4-ca} \leq \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + ab + bc + ca + 36}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** và **CSB** ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4 = 3 : ab + bc + ca \leq \sqrt{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \leq 3$$

Cộng các bất đẳng thức cơ sở trên về theo về ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét:** Đây là một bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$  và bất đẳng thức **AM – GM**.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} \right) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{4}{8-a^2-b^2} \right) \geq \frac{2}{8-2ab} = \frac{1}{4-ab}, \forall a, b \in [0; 2].$$

$$\text{Qui bài toán về chứng minh } \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} + \frac{1}{4-c^2} \leq 1.$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau } \frac{1}{4-a^2} \leq \frac{a^4+15}{18}.$$

|                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Bài 3.</b> Cho <math>\begin{cases} a, b, c, d &gt; 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \end{cases}</math>. Chứng minh: <math>\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2</math> (1)</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Chứng minh

Đây là một bài toán khó vì vậy việc thiết lập hệ số phải cần những đánh giá chặt chẽ và suy luận hợp lí. Chúng ta hãy cùng phân tích con đường đi đến lời giải của bài toán này

$$\text{Ta sẽ xác định hệ số } m, n \text{ sao cho } \frac{2}{3-x} \leq 1 + m(x^2 - 1) + n(x - 1), \forall x \in \left[ 0; \frac{8}{3\sqrt{3}} \right]$$

$$\text{Nhu đã phân tích ở trên ta tìm ra } n = \frac{1}{2} - 2m, \text{ khi đó (1)} \Leftrightarrow (x-1)^2(6m-1-2mx) \geq 0$$

$$\text{Để thấy } m \geq 0 \Rightarrow 6m-1-2mx \geq 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m. \text{ Ta cần có } 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}}$$

$$\text{Do } \frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}} < \frac{1}{6-\frac{16}{5}} = \frac{5}{14} \text{ nên ta chỉ cần có } m \geq \frac{5}{14}. \text{ Vậy chọn } m = \frac{5}{14} \Rightarrow n = -\frac{3}{14}$$

$$\Rightarrow \text{Bất đẳng thức cơ sở: } \frac{2}{3-x} \leq \frac{5x^2-3x+12}{14} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(8-5x)}{14(3-x)} \text{ đúng } \forall x \in \left[ 0; \frac{8}{3\sqrt{3}} \right]$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức cơ sở với chú ý } \max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} \text{ suy ra ta cần}$$

$$\text{chứng minh: } 5(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2) - 3(abc + bcd + cda + dab) \leq 8 \text{ (2)}$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng nhiều cách. Sau đây xin trình bày một cách dựa vào kỹ thuật hàm lồi.

Đặt  $t^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, k^2 = \frac{c^2+d^2}{2}, x=ab, y=cd$  khi đó, ta có  $t^2 \geq x, k^2 \geq y$ .

Bất đẳng thức (2)  $\Leftrightarrow f(x) = 10x^2k^2 + 10y^2t^2 - 3x\sqrt{2y+2k^2} - 3y\sqrt{2x+2t^2} - 8$

Ta có  $f''(x) = 20k^2 + \frac{3y}{\sqrt{(2x+2t^2)^3}} \geq 0 \Rightarrow f(x)$  là hàm lồi  $\Rightarrow f(x) \leq \max\{f(t^2), f(0)\}$

Ta có  $f(0) = (yt\sqrt{2}+1)(5yt\sqrt{2}-8) \leq 0$  do  $yt\sqrt{2} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$

$$f(t^2) = 10y^2t^2 - 6yt + 10k^2t^2 - 3t\sqrt{2y+2k^2} - 8 = g(y)$$

Tương tự như trên ta cũng có  $g(y)$  là hàm lồi nên  $g(y) \leq \max\{g(k^2), g(0)\}$

Ta cũng có  $g(0) = (kt\sqrt{2}+1)(5kt\sqrt{2}-8) \leq 0$  do  $kt\sqrt{2} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$

$$g(t^2) = 4(kt-1)(5kt+1) \leq 0 \text{ do } kt\sqrt{2} \leq \frac{k^2+t^2}{2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

**Nhận xét:** Trong lời giải này, chúng ta thấy những đánh giá tinh tế của **U.C.T** đóng vai trò là một bàn đạp quan trọng để đi đến lời giải. Tiếp theo chúng ta sẽ thấy được sức mạnh của **U.C.T** qua 2 lời giải đối lập nhau đối với 2 bài toán cũng đối lập nhau về mức độ mạnh, yếu của đánh giá bất đẳng thức.

**Bài 4.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ .

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-bd} \leq 8 \quad (1)$$

**Chứng minh**

**Bổ đề.** Nếu  $x, y, z \geq 0$  và  $2x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{4}{3}$  thì  $\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-xz} \leq \frac{2}{1-xu}$  với  $u = \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}$

**Chứng minh:** Thật vậy, bất đẳng thức  $\Leftrightarrow \left(1-x \cdot \frac{y+z}{2}\right) \left(1-x\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right) \leq (1-xy)(1-xz) \Leftrightarrow$

$$\frac{y+z}{2} \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} x^2 - yzx^2 \leq x \left( \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} x - yzx \leq x \left( \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \left[ \left( \frac{y+z}{2} \right)^2 - yz \right] + x \left( \frac{y+z}{2} \right) \left( \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2} \right) \leq \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-z)^2}{4} \leq \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{x(y+z)}{2} \right] \frac{(y-z)^2}{\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y+z}{2}} \Leftrightarrow \frac{(y-z)^2}{4} \cdot \frac{x \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + x(y+z) - 1}{\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y+z}{2}} \leq 0 \quad (2)$$

(2) đúng vì  $u \geq \frac{y+z}{2}$  và do đó  $3x \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow x^2(y^2+z^2) \leq \frac{2}{9}$

Nhưng bất đẳng thức này đúng vì  $2x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{4}{3}$ . Bỏ để được chứng minh.

**Áp dụng:** Giả sử  $|a^2 - b^2| \leq \frac{1}{3}$ , đặt  $a^2 + b^2 = 2x^2$  và  $c^2 + d^2 = 2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Sử dụng bổ đề trên, ta có  $\frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-ad} \leq \frac{2}{1-ay}$  và  $\frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-bd} \leq \frac{2}{1-by}$

Vì  $2y^2 + a^2 + b^2 = 1 < \frac{4}{3}$  nên theo bổ đề trên, ta cũng có  $2 \left( \frac{1}{1-ay} + \frac{1}{1-by} \right) \leq \frac{4}{1-xy}$

Ta sử dụng các bất đẳng thức quen-thuộc  $\frac{1}{1-ab} \leq \frac{1}{1-x^2}$  và  $\frac{1}{1-cd} \leq \frac{1}{1-y^2}$

$\Rightarrow f(a,b,c,d) \leq \frac{4}{1-xy} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2}$ . Ta sẽ chứng minh  $\frac{4}{1-xy} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \leq 8$

Đặt  $t = xy$ ,  $t \leq \frac{1}{4}$ , khi đó bất đẳng thức  $\Leftrightarrow (4t-1)(4t^2-t+1) \leq 0$  (luôn đúng)

**Bài 5.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3} \quad (1)$

### Chứng minh

Tương tự các bài trước, ta thiết lập được bất đẳng thức  $\frac{9}{1-x} \leq 32x^2 + 10, \forall x \leq \frac{1}{2}$

Từ đây, ta suy ra được  $VT(1) \leq \frac{32}{9}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2) + \frac{40}{9}$

$= \frac{32}{9}(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) + \frac{40}{9} \leq \frac{8}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + \frac{40}{9} = \frac{16}{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = \pm \frac{1}{2}$ .

**Nhận xét:** Rõ ràng bài toán 5 mạnh hơn hẳn bài toán 4 vì sử dụng 5 ta có ngay kết quả của 4. Ngoài ra, ta còn có một cách “làm mạnh” khác cho bài toán trên.

**Bài 6.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{d+a}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2} \leq 8$$

### Chứng minh

Bài toán này đã được bạn ZhaoBin đưa ra một lời giải rất đẹp bằng cách sử dụng bất đẳng thức **CBS**. ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một lời giải khác theo tư tưởng **U.C.T**. Sử dụng bất đẳng thức trong bài, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4 \leq 6$$

Thật vậy, ta có  $(a+b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2) - (a-b)^4 \leq 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta suy ra được  $LHS \leq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 6$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Thật tự nhiên, câu hỏi sau được đặt ra, liệu bất đẳng thức sau có đúng?

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{d+a}{2}\right)^2} \leq \frac{16}{3}$$

Thật tiếc là bất đẳng thức này không đúng! Với ví dụ  $a = b = 0.4$  và  $c = d = \sqrt{0.84}$ .

**Bài 8.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1$

### Chứng minh

Ta có thể thiết lập được bất đẳng thức sau  $\frac{48}{5-x} \leq x^2 + x + 10, \forall 2 \geq x > 0$ . Do đó:

+, Nếu  $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq 2$  thì sử dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh  $a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + abc + bcd + cda + dab \leq 8$

Bất đẳng thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng dồn biến, **EV** hoặc hàm lồi.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng  $a \geq b \geq c \geq d$ . Đặt  $f(a, b, c, d)$  là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng  $f(a, b, c, d)$  đạt giá trị lớn nhất nếu và chỉ nếu  $a = b = c$ .

Nếu  $a > c$ , ta xét hiệu  $h = f(t, b, t, d) - f(a, b, c, d)$ , trong đó  $t = \frac{a+c}{2}$ . Ta có:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d) - \frac{1}{2}(a-c)^2b^2d^2 + (b^2+d^2)\left(\frac{1}{16}(a+c)^4 - a^2c^2\right) \\ &\geq \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d) - \frac{1}{2}(a-c)^2b^2d^2 = \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d-b^2d^2) \\ &\geq \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d-bd) \geq \frac{1}{2}(a-c)^2(b-bd) \geq 0 \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là nếu  $a > c$  thì ta có thể thay  $a, c$  bởi  $\frac{a+c}{2}, \frac{a+c}{2}$  để có giá trị lớn hơn của  $f(a, b, c, d)$ . Mặt khác, giá trị lớn nhất chắc chắn tồn tại, và từ đó, ta suy ra giá trị lớn nhất đạt được nếu và chỉ nếu  $a = b = c$ .

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $f(t, t, t, d) \leq 8$  với điều kiện  $3t + d = 4, 1 \leq t \leq \frac{4}{3}$

Hay là  $t^3 + 3(4-3t)t^2 + t^6 + 3(4-3t)^2t^4 \leq 8 \Leftrightarrow 4(2+4t+3t^2+4t^3-7t^4)(t-1)^2 \geq 0$ . Ta có

$$2+4t+3t^2+4t^3-7t^4 = t^4\left(\frac{2}{t^4} + \frac{4}{t^3} + \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t} - 7\right) \geq t^4\left(\frac{2}{(4/3)^4} + \frac{4}{(4/3)^3} + \frac{3}{(4/3)^2} + \frac{4}{(4/3)} - 7\right) = \frac{t^4}{128} \geq 0.$$

Nếu  $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \geq 2$  và giả sử  $abc \geq 2$ , khi đó, chú ý rằng với mọi  $x, y \geq 0, x+y \leq 5$ ,

$$\text{ta có } \frac{1}{5} + \frac{1}{5-x-y} - \frac{1}{5-x} - \frac{1}{5-y} = \frac{xy(10-x-y)}{5(5-x)(5-y)(5-x-y)} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} \leq \frac{1}{5-x-y} + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} + \frac{1}{5-z} \leq \frac{1}{5-x-y-z} + \frac{2}{5}, \forall \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x+y+z \leq 5 \end{cases}$$

Chú ý rằng  $\sum_{cyc} (a^2b^2c^2 + abc) \leq 8$  và  $abc \geq 2$  nên  $bcd + cda + dab < 5$ , do đó

$$\frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq \frac{1}{5-d(ab+bc+ca)} + \frac{2}{5}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-d(ab+bc+ca)} \leq \frac{3}{5}$$

Đặt  $x = 4-d$  do  $abc \geq 2$  nên  $4 \geq x = a+b+c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

Theo bất đẳng thức AM - GM thì  $abc \leq \frac{1}{27}x^3, ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}x^2$

$$\text{Do đó, ta chỉ cần chứng minh } \frac{1}{5-\frac{1}{27}x^3} + \frac{1}{5-\frac{1}{3}x^2(4-x)} \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{Hay } f(x) = x^6 - 4x^5 - 80x^3 + 360x^2 - 675 \leq 0$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x^4(x-4) + 4x^3(x-12) + 48x(15-4x) < 0$$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ là hàm nghịch biến, do đó } f(x) \leq f(3\sqrt[3]{2}) = 27(48\sqrt[3]{4} - 77) < 0$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = 1$ .



**Bài 9.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3+a^2-2bc} + \frac{1}{3+b^2-2ca} + \frac{1}{3+c^2-2ab} \leq \frac{9}{8}$$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi  $x \in [-1, 1]$  thì  $\frac{8}{3+x} \leq \frac{9x^2 - 12x + 43}{16}$

Thật vậy, ta có  $\frac{9x^2 - 12x + 43}{16} - \frac{8}{3+x} = \frac{(x+1)(3x+1)^2}{16(3+x)} \geq 0$

Sử dụng bất đẳng thức này, với chú ý rằng  $\{a^2 - 2bc, b^2 - 2ca, c^2 - 2ab\} \in [-1, 1]$ , ta suy ra được

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{8}{3+a^2-2bc} \leq \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} (9(a^2 - 2bc)^2 - 12(a^2 - 2bc) + 43)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh  $\frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} (9(a^2 - 2bc)^2 - 12(a^2 - 2bc) + 43) \leq 9$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{\text{cyc}} a^4 + 3 \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} a^2 bc - 4 \sum_{\text{cyc}} ab(a^2 + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 (3a+3b-4c)^2 + \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} c^2 (a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  hoặc  $(a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

### VIII. KỸ THUẬT U.C.T. TRONG BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Trong các phần trước chúng ta đã thấy được vai trò của U.C.T. trong các bất đẳng thức đại số. Thế nhưng đối với các bài toán lượng giác thì sao? Chúng ta sẽ tìm được ngay lời giải đáp về sức mạnh của U.C.T. trong phần này. Trước hết chúng ta quan tâm đến mệnh đề quan trọng sau đây:

#### Mệnh đề:

Nếu  $f(x)$  là hàm khả vi bậc 2 và lồi trên khoảng  $(a, b)$  thì  $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y), \forall x, y \in (a, b)$

Nếu  $f(x)$  là hàm khả vi bậc 2 và lõm trên khoảng  $(a, b)$  thì  $f(x) \leq f(y) + f'(y)(x-y), \forall x, y \in (a, b)$

### Chứng minh

Nhận xét: Mệnh đề trên là một hệ quả trực tiếp của định lý **Lagrange**:

Nếu  $x = y$  thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Nếu  $x \neq y$  thì theo định lý **Lagrange**, tồn tại 1 số thực  $c \in (x, y)$  (hoặc  $c \in (y, x)$ ) sao cho

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$

+, Nếu  $x > y$ , lúc này  $c \in (x, y)$ , do  $f(x)$  là hàm lồi nên  $f'(x)$  đồng biến, do đó  $f'(c) \geq f'(y)$ , suy ra  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq f'(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$  (do  $x > y$ )

+, Nếu  $y > x$  lúc này  $c \in (y, x)$ , do  $f(x)$  là hàm lồi nên  $f'(x)$  đồng biến, do đó  $f'(c) \leq f'(y)$ , suy ra  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$  (do  $x < y$ )

Tương tự ta có kết quả khi  $f$  là hàm lõm và mệnh đề được chứng minh.

**Hệ quả:** Với kỹ thuật U.C.T, ta cần tìm số thực  $k$  sao cho bất đẳng thức  $f(x) \geq k(x - \alpha) + m$  có nghiệm bội  $x = \alpha$  thì hiển nhiên theo mệnh đề trên, ta suy ra được  $k = f'(\alpha)$ . Đây là một kết quả khá thú vị và có nhiều ứng dụng.

Chúng ta hãy xét một số ví dụ để làm rõ điều này.

**Bài 1.** Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

### Chứng minh

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Ta cần thiết lập bất đẳng thức  $\cos x \leq k\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}; \forall x \in (0, \pi)$

Xét hàm số  $f(x) = \cos x$  với  $x \in (0, \pi)$ , ta có  $f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

do đó ta được  $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ta cần chứng minh  $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}, \forall x \in (0, \pi)$

Đây là một bất đẳng thức vừa liên quan đến các “đại lượng” lượng giác vừa liên quan đến biến thực nên ta không thể sử dụng biến đổi tương đương như các bài toán trước mà phải sử dụng đạo hàm.

Xét  $g(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ . Ta có:  $g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra được

$$g(x) \leq \max\left\{g\left(\frac{\pi}{3}\right), g(\pi)\right\} = 0, \forall x \in (0, \pi)$$

Sử dụng bất đẳng thức này lần lượt với  $A, B, C$  rồi cộng lại, ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(A + B + C - \pi) = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\triangle ABC$  đều.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

## Chứng minh

Tương tự như trên, ta thiết lập được bất đẳng thức  $\sin x \leq \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall x \in (0, \pi)$

Thật vậy, xét hàm số  $f(x) = \sin x$ , ta có  $f''(x) = -\sin x < 0 \forall x \in (0, \pi)$ , suy ra

$$f(x) \leq f'(x)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall x \in (0, \pi)$$

Từ đây, sử dụng lần lượt với  $A, B, C$  rồi cộng lại, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} + \frac{\left(1 - \sin \frac{B}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}\left(1 + \sin \frac{B}{2}\right)} + \frac{\left(1 - \sin \frac{C}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2}\left(1 + \sin \frac{C}{2}\right)} \geq 2 + \sqrt{3} \quad (1)$$

## Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \geq \frac{\left[\sum_{cyc} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\right]^2}{\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:  $\sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \leq \left(\frac{\sin \frac{A}{2} + 1 - \sin \frac{A}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Tương tự, ta có  $\sin \frac{B}{2}\left(1 - \sin \frac{B}{2}\right) \leq \frac{1}{4}; \sin \frac{C}{2}\left(1 - \sin \frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) &\leq \frac{1}{4} \sum_{cyc} \left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 + \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \cos \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sin A\right) \end{aligned}$$

Chú ý rằng:  $\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}, \sum_{cyc} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \sum_{cyc} \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) \leq \frac{1}{4} \left(3 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{9(2 + \sqrt{3})}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \geq \frac{16}{9(2 + \sqrt{3})}$$

Thay vào (2) suy ra 
$$\sum_{cyc} \frac{(1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2})}{\sin \frac{A}{2}(1 + \sin \frac{A}{2})} \geq \frac{16}{9(2 + \sqrt{3})} \left[ \sum_{cyc} (1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2}) \right]^2$$

Do đó, để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16}{9(2 + \sqrt{3})} \left[ \sum_{cyc} (1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2}) \right]^2 \geq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2}) \geq \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \right) \geq -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Do  $\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}$  nên ta chỉ cần chứng minh  $\sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$  (3)

Xét hàm số  $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x + x - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$  với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Ta có:  $f'(x) = -\sin x + 1 - \cos 2x = \sin x(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Qua  $\frac{\pi}{6}$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương nên  $f(x) \geq f(\frac{\pi}{6}) = 0 \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Do  $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$  nên  $f(\frac{A}{2}) \geq 0 \Rightarrow \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0$

$$\Rightarrow \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \geq \left( \frac{\pi}{6} - \frac{A}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Tương tự, ta có  $\cos \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \sin B \geq \left( \frac{\pi}{6} - \frac{B}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ;  $\cos \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \sin C \geq \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$

Do đó  $\sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \right) \geq \sum_{cyc} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{A}{2} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$ .

Với các bài toán đối xứng như thế, các bạn có thể dễ dàng thiết lập được bất đẳng thức cơ sở nhưng còn các bài toán bất đối xứng thì sao? Liệu có thể thiết lập được dễ dàng như trên? Cái khó ở đây, chính là biết được đẳng thức xảy ra khi nào? Từ đó, ta mới có thể dễ dàng tìm được lời giải cho bài toán! Sau đây là một ví dụ:

**Bài 4. [VNTST 2001]** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ 2lab + 2bc + 8ca \leq 12 \end{cases}$  Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ .

**Giải**

Mới nhìn, bài toán này chẳng có vẻ gì là 1 bài toán lượng giác cả, nhưng các bạn yên tâm “kỹ pháp” lượng giác vẫn có thể áp dụng được cho bài này!

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ;  $y = \frac{2}{b}$ ;  $z = \frac{3}{c}$  thì ta có  $x, y, z > 0$ ,  $2x + 4y + 7z \leq 2xyz$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x + y + z$

Nếu  $2x + 4y + 7z < 2xyz$ , đặt  $x = kx', y = ky', z = kz'$  sao cho  $2x' + 4y' + 7z' = 2x'y'z'$

suy ra  $k > 1$  và do đó  $P = x + y + z = k(x' + y' + z') > x' + y' + z'$

Như thế, để tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ , ta chỉ cần xét  $2x + 4y + 7z = 2xyz$ .

Một điều đáng chú ý là với đẳng thức  $2x + 4y + 7z = 2xyz$  ta không thể đưa về lượng giác ngay được vì chẳng có 1 đẳng thức nào như thế cả, nhưng nó lại gợi nhớ cho ta đến đẳng thức:

Nếu  $A, B, C$  là 3 góc của một tam giác thì  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Từ đây ta nảy ra ý tưởng tìm cách chuyển về đẳng thức trên và ta có:

Đặt  $x = \sqrt{7}m, y = \frac{\sqrt{7}}{2}n, z = \frac{2\sqrt{7}}{7}p$  thì ta có  $m, n, p > 0, m + n + p = mnp$

từ đó tồn tại các góc nhọn  $A, B, C$  sao cho  $m = \tan A, n = \tan B, p = \tan C$

khi đó từ  $m + n + p = mnp$  ta suy ra  $A, B, C$  là 3 góc nhọn của 1 tam giác

Biểu thức  $P$  được viết lại như sau:  $P = \frac{\sqrt{7}}{14}(14 \tan A + 7 \tan B + 4 \tan C)$

Xét hàm số  $f(x) = \tan x$  với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , ta có  $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$

Suy ra  $f(x)$  là một hàm lồi, và do đó theo bổ đề trên, ta có:

$$f(A) \geq f\left(\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)\left(A - \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7}\left(A - \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(B) \geq f\left(\arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right)\left(B - \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7}\left(B - \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(C) \geq f(\arctan \sqrt{7}) + f'(\arctan \sqrt{7})(C - \arctan \sqrt{7}) = \sqrt{7} + 8(C - \arctan \sqrt{7})$$

$$\text{Mặt khác: } \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7} + \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7} + \arctan \sqrt{7} = \pi \Rightarrow P = \frac{\sqrt{7}}{14}[14f(A) + 7f(B) + 4f(C)]$$

$$\geq \frac{\sqrt{7}}{14}\left[15\sqrt{7} + 32(A + B + C) - 32\left(\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7} + \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7} + \arctan \sqrt{7}\right)\right] = \frac{15}{2}$$

$$\text{Với } A = \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}; B = \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}; C = \arctan \sqrt{7} \text{ thì } \min P = \frac{15}{2}$$

Đọc lời giải trên, các bạn ắt hẳn sẽ đặt câu hỏi làm sao ta có thể chọn được các số  $\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}; \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}; \arctan \sqrt{7}$  một cách hợp lí để có thể sử dụng bổ đề trên dựa theo tư tưởng U.C.T? Tất nhiên đó không phải là điều ngẫu nhiên, thực ra ta đã làm như sau

Sử dụng bổ đề trên, ta có

$$f(A) \geq f(M) + f'(M)(A-M); f(B) \geq f(N) + f'(N)(B-N); f(C) \geq f(P) + f'(P)(C-P)$$

$$\Rightarrow 14 \tan A + 7 \tan B + 4 \tan C$$

$$\geq 14 \tan M + 7 \tan N + 4 \tan P + 14 f'(M)(A-M) + 7 f'(N)(B-N) + 4 f'(P)(C-P)$$

Do  $A, B, C$  là 3 góc của một tam giác nhọn nên ta cũng phải chọn  $M, N, P$  sao cho chúng cũng là 3 góc cũng là một tam giác nhọn. Hơn nữa, để tận dụng được giả thiết này, ta cần chọn  $M, N, P$  sao cho  $14f'(M) = 7f'(N) = 4f'(P)$

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} \frac{\pi}{2} > M, N, P > 0 \\ M + N + P = \pi \\ 14f'(M) = 7f'(N) = 4f'(P) \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được kết quả như trên!

#### IX. BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Bài 1. [Diễn đàn Toán học]** Cho  $a, b, c, d, e \geq 0$ ;  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1$ .

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } \frac{a^2}{1-a^3} + \frac{b^2}{1-b^3} + \frac{c^2}{1-c^3} + \frac{d^2}{1-d^3} + \frac{e^2}{1-e^3}$$

**Bài 2. [Crux Mathematicorum, Problem 3032]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

**Bài 3. [Mathematical Excalibur, Vol 9, Num 1, 8/2004]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

**Bài 4. [Old and New Inequalities]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Bài 5. [Old and New Inequalities]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{27}{10}$$

**Bài 6. [Old and New Inequalities]** Cho  $a, b, c \in (1, 2)$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \geq 1$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương thỏa mãn  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3} + \frac{1}{1+b+b^2+b^3} + \frac{1}{1+c+c^2+c^3} + \frac{1}{1+d+d^2+d^3} \geq 1$$

**Bài 8. [China TST 2004]** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63cda}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63dab}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}} \geq 1$$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(3a+b+c)^3}{(b+c)^3 + 3a^3} + \frac{(3b+c+a)^3}{(c+a)^3 + 3b^3} + \frac{(3c+a+b)^3}{(a+b)^3 + 3c^3} \leq \frac{375}{11}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^2}{7(a+b)^2 + 17c^2} + \frac{(b+c-a)^2}{7(b+c)^2 + 17a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{7(c+a)^2 + 17b^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5(a+b+c)^2}$$

**Bài 12.** Cho tam giác ABC nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \tan A + 2 \tan B + 5 \tan C$$

**Bài 13.** Cho các số dương ABC, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sin^m A \sin^n B \sin^p C$$

trong đó  $m, n, p$  là các số dương cho trước.

**Bài 14. [VMEQ 2005]** Cho trước các số dương  $a, b, c$  và  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $ax + by + cz = xyz$ , tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x + y + z$

.....

## § 23.6. CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN THUẬN NGHỊCH THEO CÁC ĐỘ DÀI TRONG TAM GIÁC

Một bất đẳng thức có thể phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau. Trong mục này nhờ các phép đổi biến thuận nghịch theo các độ dài trong tam giác, chúng ta có thể biến các bất đẳng thức đại số thành bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, và ngược lại, biến các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số. Tùy trường hợp cụ thể ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở dạng đơn giản nhất có thể.

### I. ĐỊNH NGHĨA

#### 1. Phép đổi biến thuận

Cho  $x, y, z > 0$ , phép đổi biến  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2}$  được gọi là phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$

##### • Tính chất:

$$\begin{cases} a+b = z + \frac{x+y}{2} = z+c > c \\ b+c = x + \frac{y+z}{2} = x+a > a \\ c+a = y + \frac{z+x}{2} = y+b > b \end{cases}$$

• **Ý nghĩa:** Với các bất đẳng thức đại số ba biến  $x, y, z > 0$ , phép đổi biến nêu trên cho phép ta chuyển các bất đẳng thức đại số thành các bất đẳng thức trong tam giác với độ dài ba cạnh  $a, b, c$ . Sử dụng các hàm lượng giác trong tam giác, chúng ta có thể thu được lời giải cho bài toán một cách đơn giản hơn.

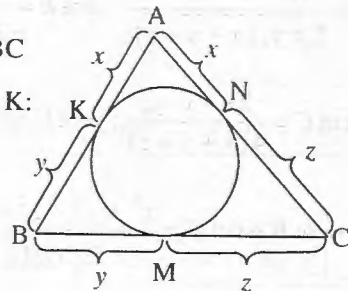
#### 2. Phép đổi biến nghịch

Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Do tam giác ABC luôn có đường tròn nội tiếp nên luôn tồn tại  $x, y, z > 0$  sao cho  $a = y+z$ ;  $b = z+x$ ;  $c = x+y$ .

Thật vậy, giả sử đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, K:

$$\begin{cases} x = AN = AK = p - a > 0 \\ y = BK = BM = p - b > 0 \\ z = CM = CN = p - c > 0 \end{cases}$$



• **Ý nghĩa:** nếu một bất đẳng thức giữa độ dài các cạnh của một tam giác không thể quy về các hàm lượng giác thì chúng vẫn có thể quy về bất đẳng thức đại số với các biến  $x, y, z > 0$  và thuận tiện hơn trong việc tìm lời giải.



II. BIỂU DIỄN CÁC ĐẠI LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THEO CÁC BIẾN  $x, y, z > 0$ 

Cho  $x, y, z > 0$ . Đặt  $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{z+x}{2}; c = \frac{x+y}{2}$ , suy ra  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác ABC, ta sẽ biểu diễn các đại lượng của tam giác ABC:

$$x = 2(p - a); y = 2(p - b); z = 2(p - c); p = \frac{x+y+z}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{4}; R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{(x+y+z)xyz}}; r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)}; \sin B = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)}; \sin C = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos A = \frac{x(x+y+z) - yz}{(x+y)(x+z)}; \cos B = \frac{y(x+y+z) - zx}{(y+z)(y+x)}; \cos C = \frac{z(x+y+z) - xy}{(z+x)(z+y)}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\tan A = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z) - yz}; \tan B = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z) - zx}; \tan C = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z) - xy}$$

$$\tan B \tan C = \frac{4(x+y+z)}{2x+y+z}; \tan C \tan A = \frac{4(x+y+z)}{2y+z+x}; \tan A \tan B = \frac{4(x+y+z)}{2z+x+y}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{[x(x+y+z) - yz][y(x+y+z) - zx][z(x+y+z) - xy]}$$

$$\cot A = \frac{x(x+y+z) - yz}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}; \cot B = \frac{y(x+y+z) - zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}; \cot C = \frac{z(x+y+z) - xy}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$\cot B \cot C = \frac{2x+y+z}{4(x+y+z)}; \cot C \cot A = \frac{2y+z+x}{4(x+y+z)}; \cot A \cot B = \frac{2z+x+y}{4(x+y+z)}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}; \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}; \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}; \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}}; \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{x+y+z} [\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)}]}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}}; \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{zx}{y(x+y+z)}}; \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{x}{x+y+z}; \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = \frac{y}{x+y+z}; \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{z}{x+y+z}$$

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xyz}{(x+y+z)^3}} = \frac{1}{x+y+z} \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{yz}}; \cot \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{zx}}; \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{xy}}$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(x+y+z)^3}{xyz}} = \sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} (x+y+z)$$

$$\sin 2A = \frac{4\sqrt{xyz(x+y+z)} [x(x+y+z) - yz]}{[(x+y)(x+z)]^2}; \cos 2A = \frac{[x(x+y+z) - yz]^2 - 4xyz(x+y+z)}{[(x+y)(x+z)]^2}$$

$$\begin{aligned} \cos 2(B-C) = & \frac{y^2z^2(x+y+z)^4 - 2xyz(3y^2+3z^2-8yz)(x+y+z)^3 + x^2(x^4+y^4-16yz(y+z)+36y^2z^2)}{(y+z)^4(x+y)^2(x+z)^2} + \\ & + \frac{x^2(x^4+y^4-16yz(y+z)+36y^2z^2)(x+y+z)^2 - 2x^3yz(3y^2+3z^2-8yz)(x+y+z) + x^4y^2z^2}{(y+z)^4(x+y)^2(x+z)^2} \end{aligned}$$

$$\cos(B-C) = \frac{xyz(6x+5y+5z)}{(x+y)(x+z)(y+z)^2} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \cdot \left( \frac{6x}{y+z} + 5 \right)$$

$$\cos(B-C) + \cos(C-A) + \cos(A-B) = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \left[ 6 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + 15 \right]$$

$$\sin(B-C) = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}(z^2-y^2)}{(x+y)(x+z)(y+z)^2} = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}(z-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{2x+y+z}{y+z} \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \cdot \frac{2x+y+z}{\sqrt{x(y+z)}}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} + \cos \frac{A-B}{2} &= \\ &= \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \left[ 2 \left( \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \right) + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \right] \end{aligned}$$

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{y-z}{y+z} \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}; \quad \sin^2 \frac{B-C}{2} = \frac{x(x+y+z)(y-z)^2}{(x+y)(x+z)(y+z)^2}$$

$$\sin^2 \frac{B-C}{4} = \frac{x(x+y+z)(y-z)^2}{2(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} \left[ (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (2x+y+z)\sqrt{yz} \right]}$$

$$h_a = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}; \quad h_b = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z+x}; \quad h_c = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y}$$

$$h_a^2 = \frac{xyz(x+y+z)}{(y+z)^2}; \quad h_b^2 = \frac{xyz(x+y+z)}{(z+x)^2}; \quad h_c^2 = \frac{xyz(x+y+z)}{(x+y)^2}$$

$$m_a^2 = \frac{4x^2 + y^2 + z^2 + 4x(y+z) - 2yz}{16} = \frac{x(x+y+z)}{4} + \frac{(y-z)^2}{16} = \frac{(2x+y+z)^2}{16} - \frac{yz}{4}$$

$$l_a^2 = \frac{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}{(2x+y+z)^2}; \quad l_b^2 = \frac{y(y+z)(y+x)(x+y+z)}{(2y+z+x)^2}; \quad l_c^2 = \frac{z(z+x)(z+y)(x+y+z)}{(2z+x+y)^2}$$

$$r_a^2 = \frac{yz(x+y+z)}{4x}; \quad r_b^2 = \frac{zx(x+y+z)}{4y}; \quad r_c^2 = \frac{xy(x+y+z)}{4z}; \quad r_b r_c = \frac{x(x+y+z)}{4}$$

III. ỨNG DỤNG PHÉP ĐỔI BIẾN THUẬN

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  $64xyz(x+y+z)^3 \leq 27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2, \forall x, y, z > 0$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

• **Chứng minh:**  $T = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left( \frac{\sin A}{\sqrt{3}} \cdot \cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}} \cdot \cos A \right)$   
 $\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( \sin^2 A + \frac{3}{4} \right) + \left( \sin^2 B + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \left( \frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B \right) + \left( \frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

• **Áp dụng:** Bất đẳng thức đã cho tương đương  $\frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm). Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow x = y = z.$$

**Bài 2:** Chứng minh:  $8\sqrt{xyz} \left[ \sqrt{x(x+y)(x+z)} + \sqrt{y(y+z)(y+x)} + \sqrt{z(z+x)(z+y)} \right]$

$$\leq 18xyz + 5[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)], \forall x, y, z > 0$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \forall \Delta ABC$

• **Chứng minh:**  $T = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right) + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$   
 $\leq \frac{1}{2} \left[ \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)^2 + 1^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{3}{2}$

• **Áp dụng:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[ \sqrt{xy(x+y)} + \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} \right]^2 \leq \frac{9}{4}(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow x = y = z.$$

**Bài 3.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{x+y+z}(\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)})}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall \Delta ABC$

• **Chứng minh:**  $T = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left( \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{B}{2} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{A}{2} \right)$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{3}{4} \right) + \left( \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \left( \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{3} + \sin^2 \frac{B}{2} \right) + \left( \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{3} + \sin^2 \frac{A}{2} \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

• **Áp dụng:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow x = y = z.$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{9}{4(x+y+z)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

• **Chứng minh:**  $T = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) \cdot 1 + \sin A \sin B - \cos A \cos B$

$$\leq \frac{1}{2} [(\cos A + \cos B)^2 + 1^2] + \frac{1}{2} (\sin^2 A + \sin^2 B) - \cos A \cos B \leq \frac{3}{2}$$

• **Áp dụng:** Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2(p-a)}{4bc} + \frac{2(p-b)}{4ca} + \frac{2(p-c)}{4ab} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{b+c-a}{bc} + \frac{c+a-b}{ca} + \frac{a+b-c}{ab} \right) \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc} + \frac{(a+b+c)(c+a-b)}{ca} + \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2 - a^2}{bc} + \frac{(c+a)^2 - b^2}{ca} + \frac{(a+b)^2 - c^2}{ab} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 3 \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 2.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}; \frac{zx}{y}; \frac{xy}{z} \right\}$ . Chứng minh rằng:

$$64x^3y^3z^3(x+y+z)^3 \geq 27 \left[ [x(x+y+z) - yz][y(x+y+z) - zx][z(x+y+z) - xy] \right]^2 \quad (*)$$

### Chứng minh

• **Bổ đề:**  $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$  nhọn

$$\bullet \text{Áp dụng: } (*) \Leftrightarrow \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{[x(x+y+z) - yz][y(x+y+z) - zx][z(x+y+z) - xy]} \geq 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z) - yz} \cdot \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z) - zx} \cdot \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z) - xy} \geq 3\sqrt{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}; \frac{zx}{y}; \frac{xy}{z} \right\} \Leftrightarrow \cos A > 0; \cos B > 0; \cos C > 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$\text{Mặt khác } (1) \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 3.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2 \geq 12xyz(x + y + z) \quad (*)$$

### Chứng minh

• **Bổ đề:**  $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:** (\*)  $\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} \geq \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)-yz}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} + \frac{y(x+y+z)-zx}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} + \frac{z(x+y+z)-xy}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 6.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \quad \forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{\sqrt{x+y+z} [\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)}]}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \quad (1). \end{aligned}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$

**Bài 7.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x(y+z)^2 + x(y+z)^2 + x(y+z)^2}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}, \quad \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:**

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+6xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} + 1 \leq \frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)-zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)-xy}{(z+x)(z+y)} \leq \\
 &\leq \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{dpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 8.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$8x^2y^2z^2 \geq [x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy] \quad (*)$$

### Chứng minh

• **Bổ đề:**  $\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}, \forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**

Nếu  $[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy] \leq 0$  thì (\*) đúng.

Xét  $[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy] > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có:} \quad &\begin{cases} [y(x+y+z)-zx] + [z(x+y+z)-xy] = (y+z)^2 > 0 \\ [z(x+y+z)-xy] + [x(x+y+z)-yz] = (z+x)^2 > 0 \\ [x(x+y+z)-yz] + [y(x+y+z)-zx] = (x+y)^2 > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(x+y+z)-yz > 0; y(x+y+z)-zx > 0; z(x+y+z)-xy > 0$ . Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]} \geq (x+y+z)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$x(x+y+z)-yz > 0; y(x+y+z)-zx > 0; z(x+y+z)-xy > 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$



$$(1) \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 9.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq xyz \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]}{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} \leq \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$

**Bài 10.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq \left[ \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \right]^2 \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2$

• **Áp dụng:**  $(*) \Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)} \geq$

$$\geq \left[ \frac{\sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)} \geq$$

$$\geq \left[ \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \right]^2 \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 11.** Cho  $x, y, z > 0$  and  $x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z} \right\}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ,  $\forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**  $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \left[ \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{x+y+z} \right] \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z} \right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bình luận:** Nhờ phương pháp đổi biến này và các công thức chuyển đổi giữa các đại lượng trong tam giác  $ABC$  và các biến  $x, y, z$  trình bày trong mục II, chúng ta có thể khẳng định rằng: "Có bao nhiêu bất đẳng thức tam giác lượng thì sẽ có bấy nhiêu bất đẳng thức đại số tương đương".

#### IV. ÁP DỤNG PHÉP ĐỔI BIẾN NGHỊCH

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Sử dụng phương pháp đổi biến nghịch  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$ , chứng minh các bất đẳng thức sau:

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$  (\*)

**Chứng minh**

$$(*) \Leftrightarrow \sum (y+z) [(z+x)^2 + (x+y)^2] > \sum (y+z)^3 + 2(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow \sum (y+z) [2x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y+z)] > \sum [y^3 + 3yz(y+z) + z^3] + 4xyz + 2 \sum yz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum x^2 (y+z) + \sum (y+z) (y^2 + z^2) + 2 \sum x(y+z)^2 > \\ > 2 \sum x^3 + 3 \sum yz(y+z) + 4xyz + 2 \sum yz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum yz(y+z) + \sum (y^3+z^3) + \sum yz(y+z) + 2 \sum yz(y+z) + 12xyz > \\ > 2 \sum x^3 + 5 \sum yz(y+z) + 4xyz \Leftrightarrow 8xyz > 0$$

**Bài 2.** Chứng minh rằng:  $a^3(p-a) + b^3(p-b) + c^3(p-c) \leq pabc$  (\*)

*Chứng minh*

$$(*) \Leftrightarrow x(y+z)^3 + y(z+x)^3 + z(x+y)^3 \leq (x+y+z)(y+z)(z+x)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \sum x[y^3+z^3+3yz(y+z)] \leq (x+y+z)[2xyz + \sum yz(y+z)]$$

$$\Leftrightarrow \sum yz(y^2+z^2) + 3xyz \sum (y+z) \leq 2xyz(x+y+z) + xyz \sum (y+z) + \sum yz(y^2+z^2) + 2 \sum y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow 2xyz(x+y+z) \leq 2(x^3+y^3+z^3) \Leftrightarrow \sum (x+y)(x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

**Bài 3.** Chứng minh rằng:  $a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) \geq 0$  (\*)

*Chứng minh*

$$(*) \Leftrightarrow (y+z)^2(y-x) + (z+x)^2(z-y) + (x+y)^2(x-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum y(y+z)^2 - \sum x(y+z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum x^3 + \sum yz^2 + 2 \sum y^2z - [\sum yz(y+z) + 6xyz] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum x^3 + \sum y^2z - 6xyz \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq 6 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2}{yz} \cdot \frac{y^2}{zx} \cdot \frac{z^2}{xy} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y}} = 6 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

**Bài 4. [IMO 1983]** Chứng minh rằng:  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$  (\*)

*Chứng minh*

$$(*) \Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x+y+z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x+y+z) \Leftrightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x+y+z$$

$$\text{Ta có: } (z+x+y) \left( \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \right) \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x+y+z \quad (\text{đpcm})$$

### § 23.7. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ CÁC HỆ SỐ CỦA ĐA THỨC BẰNG ĐỊNH LÝ VIỆTE

Trong nhiều trường hợp, ta sẽ gặp rất nhiều khó khăn nếu như cố gắng tìm cách chứng minh trực tiếp các bất đẳng thức với các biến ban đầu. Tuy nhiên nếu tinh táo hơn một chút, chỉ bằng một (hoặc một vài) phép đổi biến đơn giản nào đó chúng ta sẽ quy được bất đẳng thức cần chứng minh về dạng quen thuộc và đơn giản hơn rất nhiều. Trong mục này chúng ta hãy cùng sử dụng định lý Viète để thực hiện các phép đổi biến như vậy. Ngoài ra chúng ta cũng sẽ nhận được nhiều tính chất rất đẹp giữa chính các hệ số đa thức nhờ những thông tin về số nghiệm của đa thức đó.

**Phương pháp:** Để chứng minh các bất đẳng thức ở dạng này ta thực hiện theo hai bước:

**Bước 1:** Sử dụng định lý Viète chuyển các bất đẳng thức giữa các hệ số của đa thức thành bất đẳng thức giữa các nghiệm của đa thức.

**Bước 2:** Sử dụng bất đẳng thức đại số để chứng minh bất đẳng thức giữa các nghiệm và từ đó suy ra bất đẳng thức giữa các hệ số của đa thức.

#### A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

**Bài 1.** Xét tập hợp  $I$  gồm các tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{ sao cho } f(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \in [0, 1].$$

$$\text{Tìm } \max_{f(x) \in I} \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$$

#### Chứng minh

Sử dụng định lý Viète ta có  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  và  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\ &= 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq 2 + \frac{x_1+x_2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq 2 + \frac{1+x_1x_2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 3 \end{aligned}$$

Với  $2a = 2c = -b \neq 0$  hay  $f(x) = a(x-1)^2$ ,  $a \neq 0$  thì  $\max_{f(x) \in I} \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = 3$

**Bài 2.** Giả sử phương trình  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  ( $a > 0$ ) có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \in [2, +\infty). \quad \text{Chứng minh: } (4a-b)\left(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2(4a-2b+c) \quad (1)$$

#### Chứng minh

Sử dụng định lý Viète ta có  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  và  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , do đó

$$(4a-b)\left(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2(4a-2b+c) \Leftrightarrow \left(4 - \frac{b}{a}\right)\left(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2\left(4 - 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow (4+x_1+x_2)\left(2 + \sqrt{x_1 x_2}\right) \geq 2(4+2x_1+2x_2+x_1 x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+x_1+x_2}{4+2x_1+2x_2+x_1x_2} \geq \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{(2+x_1)+(2+x_2)}{(2+x_1)(2+x_2)} \geq \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+x_1} + \frac{1}{2+x_2} \geq \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{x_1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{x_2}{2}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2}}} \quad (2)$$

Đặt  $u^2 = \frac{x_1}{2}, v^2 = \frac{x_2}{2}$  thì (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1+v^2} \geq \frac{2}{1+uv} \quad \forall u, v \geq 1$

Ta có  $\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1+v^2} - \frac{2}{1+uv} = \left( \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+uv} \right) + \left( \frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{1+uv} \right) =$   
 $\frac{v-u}{1+uv} \left( \frac{u}{1+u^2} - \frac{v}{1+v^2} \right) = \frac{v-u}{1+uv} \cdot \frac{u(1+v^2) - v(1+u^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{(v-u)^2(uv-1)}{(1+uv)(1+u^2)(1+v^2)} \geq 0$

Vì vậy (2) được chứng minh do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

**Bài 3.** Giả sử  $ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 0$  (1) ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:  $\frac{2a-b}{a+c-b} + \frac{a}{b} > 0$  (2)

**Chứng minh**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (x-1)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = x_1; x = x_2$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}} + \frac{1}{\frac{b}{a}} > 0 \Leftrightarrow \frac{2+x_1+x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2} - \frac{1}{x_1+x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (2+x_1+x_2)(x_1+x_2) - (1+x_1x_2+x_1+x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1+x_2 - 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 > 0 \quad (3)$$

Do 1,  $x_1, x_2$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên (3) đúng  $\Rightarrow$  (2) đúng.

**Bài 4.** Giả sử phương trình  $x^3 - x^2 + ax + b = 0$  có ba nghiệm dương (có thể bằng nhau).

Chứng minh rằng:  $\frac{2a-3b+1}{a-b+2} \leq \frac{3}{4} \quad (2)$

**Chứng minh**

Giả sử phương trình có ba nghiệm  $x_1, x_2, x_3 > 0$ . Sử dụng định lý Viète ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a; x_1x_2x_3 = -b$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3) + 1} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \frac{x_3}{1+x_3} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{1+x_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+x_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+x_3}\right) \leq 3 - \frac{9}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \geq \frac{9}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}} \geq \frac{9}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

**Bài 5.** Giả sử  $ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm dương.

Chứng minh rằng:  $\sqrt[3]{1 + \frac{c+d-b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{d}{a}} \geq 1$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \geq \left(1 + \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3 \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• **Áp dụng:**  $\sqrt[3]{1 + \frac{c+d-b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{d}{a}} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} \geq \left(1 + \sqrt[3]{\frac{d}{a}}\right)^3$

$$\Leftrightarrow 1 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1x_2x_3 \geq \left(1 + \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \geq \left(1 + \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 6.** Giả sử  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm dương.

Chứng minh rằng:  $\frac{3abc + 8b^3 - 3da^2}{a^3} \geq 0$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• **Áp dụng:**  $\frac{3abc + 8b^3 - 3da^2}{a^3} \geq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} + 8\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{d}{a} \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 8(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3x_1x_2x_3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3 + 3x_1x_2x_3 - 8(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3x_1x_2x_3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \text{ là đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 7.** Giả sử phương trình  $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$  có nghiệm dương

Chứng minh rằng:  $2 + b \geq 63c$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right) \geq 64$  với  $\begin{cases} x_1, x_2, x_3 > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

• **Áp dụng:**  $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$  (1)  $\Leftrightarrow c\left(\frac{1}{x}\right)^3 - b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - a = 0$  (2)

Nếu  $x_1, x_2, x_3$  là các nghiệm của (1) thì  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$  là các nghiệm của (2)

$$\text{Ta có } 2 + b \geq 63c \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 64$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) + \left( \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} \right) + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \geq 64$$

$$\Leftrightarrow \left( 1 + \frac{1}{x_1} \right) \left( 1 + \frac{1}{x_2} \right) \left( 1 + \frac{1}{x_3} \right) \geq 64 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 8.** Giả sử phương trình  $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$  có nghiệm dương.

Chứng minh rằng:  $\frac{a^2 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac}{ab - c} \geq \frac{a}{2}$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• **Áp dụng:**  $\frac{a^2 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac}{ab - c} \geq \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)}{4ab - c} \geq \frac{a}{2}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2[(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)]}{ab - c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - x_1 x_2 x_3} \geq 0$$

Ta có  $x_1^2(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) = x_1^2 [x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3] = x_1^2(x_1^2 + b)$

$$A = \frac{x_1^2(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + x_2^2(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + x_3^2(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}{(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 9.** Giả sử phương trình  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  có ba nghiệm dương

Chứng minh rằng:  $\frac{c}{\sqrt{b^2 - 2ac}} \leq \frac{1}{3} \sqrt{b^2 - 2b}$

**Chứng minh**

Giả sử phương trình có ba nghiệm là  $x_1, x_2, x_3 > 0$  khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{3}{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}}} \leq \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} \leq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}$$

Sử dụng định lý Viète ta có  $\sqrt{\frac{3}{b^2 - 2a}} \leq \frac{3c}{b} \leq \sqrt[3]{c} \leq \frac{a}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 - 2b}{3}}$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{3c^2}{b^2 - 2ac}} \leq \sqrt{\frac{a^2 - 2b}{3}} \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{b^2 - 2ac}} \leq \frac{\sqrt{a^2 - 2b}}{3} \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 10.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$9(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) \leq 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + vw + wu) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}$

• **Áp dụng:** Xét đa thức  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ .

Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a + b + c + d)x^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)x - (abc + abd + acd + bcd)$$

Sử dụng định lý Viète ta có:  $mn + np + pm = \frac{1}{2}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ ;

$$m + n + p = \frac{3}{4}(a + b + c + d); \quad mnp = \frac{1}{4}(abc + abd + acd + bcd)$$

Ta có  $(mn + np + pm)^2 \geq 3(mn \cdot np + mp \cdot pn + pm \cdot mn) = 3mnp(m + n + p)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 \geq \frac{9}{16}(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd)$$

$$\Rightarrow 9(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) \leq 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

**Bài 11.** Giả sử  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ . Chứng minh  $3\left(\sum a_i\right)\left(\sum a_i a_j a_k\right) \leq \left(\sum a_i a_j\right)^2$

**Chứng minh**

Xét  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có bốn nghiệm thực dương  $m, n, p, q$ .

$$\text{Ta có } P'(x) = 5x^4 - 4\left(\sum a_i\right)x^3 + 3\left(\sum a_i a_j\right)x^2 - 2\left(\sum a_i a_j a_k\right)x + \sum a_i a_j a_k a_m$$

Sử dụng định lý Viète ta có

$$m + n + p + q = \frac{4}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$mn + np + pq + mp + mq + nq = \frac{3}{5}\sum a_i a_j$$

$$mnp + npq + pqm + qmn = \frac{2}{5}\left(\sum a_i a_j a_k\right)$$

Áp dụng bài tập trước ta có:

$$9(m + n + p + q)(mnp + mnq + mpq + npq) \leq 4(mn + mp + mq + np + nq + pq)^2$$



$$\Rightarrow 3\left(\sum a_i\right)\left(\sum a_i a_j a_k\right) \leq \left(\sum a_i a_j\right)^2$$

**Bài 12.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq (a+b+c+d)^3 + 2(abc+abd+acd+bcd)$$

**Chứng minh**

Đặt  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng đẳng thức **Cauchy** và bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$(m+n+p)(mn+np+pm) - mnp = (m+n)(n+p)(p+m)$$

$$(m+n)(n+p)(p+m) \leq \left[ \frac{(m+n) + (n+p) + (p+m)}{3} \right]^3 = \frac{8}{27}(m+n+p)^3$$

$$\Rightarrow (m+n+p)(mn+np+pm) \leq \frac{8}{27}(m+n+p)^3 + mnp \quad (1)$$

Sử dụng định lý Viète ta có  $mn+np+pm = \frac{1}{2}(ab+bc+ca+cd+da+bd)$

$$m+n+p = \frac{3}{4}(a+b+c+d); \quad mnp = \frac{1}{4}(acb+bcd+cda+dab)$$

Thay ba đẳng thức này vào (1) ta nhận được chứng minh.

**Bài 13.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left[ \frac{9}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2) + \frac{5}{8}(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \right]^2 \geq \frac{1}{4}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 + \frac{27}{16}(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)$$

**Chứng minh**

Xét đa thức:  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng bất đẳng thức:  $(m+n+p)(m^2+n^2+p^2) \geq 9mnp$ . Suy ra

$$(m^2+n^2+p^2+mn+np+pm)^2 \geq (mn+np+pm)^2 + 9(m+n+p)mnp$$

**Bài 14.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{9(a+b+c+d)^2}{16} + \frac{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{abc+abd+acd+bcd} \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd+9$$

**Chứng minh**

Xét đa thức:  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng bất đẳng thức:  $m^2 + \frac{2}{m} = m^2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \geq 3$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2 \frac{mn+np+pm}{mnp} = m^2 + \frac{2}{m} + n^2 + \frac{2}{n} + p^2 + \frac{2}{p} \geq 9$$

Thế  $a, b, c, d$  theo  $m, n, p \Rightarrow$  (đpcm)

**Bài 15.** Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \quad \forall a, b, c, d > 0$$

**Chứng minh**

Xét đa thức  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** và định lý **Viète** ta có

$$mn+np+pm \geq 3\sqrt[3]{(mnp)^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

**Bài 16. [Việt Nam MO 2002]** Cho đa thức  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  có ba nghiệm thực. Chứng minh rằng:  $12ab + 27c \leq 6a^3 + 10\sqrt{(a^2 - 2b)^3}$  (1)

**Chứng minh**

Gọi  $x_1, x_2, x_3$  là ba nghiệm của  $P(x)$ . Sử dụng định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b; x_1x_2x_3 = -c \Rightarrow a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow 6(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 27x_1x_2x_3 + 10\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3} \quad (2)$$

• Nếu  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$  thì (2) là đúng  $\Rightarrow$  (1) là đúng

• Xét  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $x_1^2 \leq x_2^2 \leq x_3^2$ . Chú ý rằng hai vế của (2) đều là các biểu thức đối xứng bậc 3, do đó ta có thể chuẩn hóa  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ .

Từ đây suy ra:  $x_3^2 \geq 3$  và  $2x_1x_2 \leq 6$ . Do đó: (2)  $\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \leq 10$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\begin{aligned} [2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3]^2 &= [2(x_1 + x_2) + (2 - x_1x_2)x_3]^2 \\ &\leq [2^2 + (2 - x_1x_2)^2][(x_1 + x_2)^2 + x_3^2] = [8 - 4x_1x_2 + (x_1x_2)^2][9 + 2x_1x_2] \\ &= 2(x_1x_2)^3 + (x_1x_2)^2 - 20x_1x_2 + 72 = (x_1x_2 + 2)^2(2x_1x_2 - 7) + 100 \leq 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \leq 10 \Rightarrow (2) \text{ là đúng } \Rightarrow (1) \text{ là đúng}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = x_3 = 2 \Leftrightarrow a = -3, b = 0, c = 4.$$

**Bài 17.** Giả sử phương trình  $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$  với  $a, b, c, d > 0$  có bốn nghiệm thực thuộc khoảng  $(0, \frac{1}{2})$ . Chứng minh rằng:  $21a + 164c \geq 80b + 320d$

**Chứng minh**

Gọi bốn nghiệm của phương trình là  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, \frac{1}{2})$

Sử dụng định lý **Viète** ta có các hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b/a \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = c/a \\ x_1x_2x_3x_4 = d/a \end{cases}$$

$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } 21a + 164c \geq 80b + 320d \Leftrightarrow 21 + 164 \frac{c}{a} \geq 80 \frac{b}{a} + 320 \frac{d}{a}$$

$$\Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \geq$$

$$\geq 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320x_1x_2x_3x_4$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có

$$(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) \leq \left( \frac{1 - 2x_1 + 1 - 2x_2 + 1 - 2x_3}{3} \right)^3 = \left( \frac{1 + 2x_4}{3} \right)^3. \text{ Suy ra}$$

$$\times \begin{cases} 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) \leq (1 + 2x_4)^3 \\ 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_3)^3 \\ 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_2)^3 \\ 27(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_1)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 81(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_1)(1 + 2x_2)(1 + 2x_3)(1 + 2x_4)$$

$$\Leftrightarrow 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320x_1x_2x_3x_4 \leq$$

$$\leq 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$

**Bài 18.** [Hongkong MO 1997] Cho  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  là đa thức bậc  $n \geq 2$  với các nghiệm thực  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Chứng minh rằng:

$$f(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq 2n^2 \quad \forall x > b_1, b_2, \dots, b_n$$

**Chứng minh**

$$\text{Ta có } f(x) = (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n) \Rightarrow f(x+1) = (1+x-b_1)(1+x-b_2)\dots(1+x-b_n)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có

$$f(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq f(x+1) \cdot n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)}}$$

$$= (1+x-b_1)\dots(1+x-b_n) n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)\dots(x-b_n)}} = n \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n}{x-b_1} \dots \frac{(1+x-b_n)^n}{x-b_n}}$$

Đặt  $t = x - b_i > 0 \quad \forall x > b_i$ . Khi  $n \geq 2$  ta có

$$(1+t)^n \geq 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 = \frac{1}{2} [n(n-1)t^2 - 2nt + 2] + 2nt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{n(n-1)} t - \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} \right)^2 + \frac{n(n-2)}{n(n-1)} \right] + 2nt \geq 2nt. \text{ Suy ra}$$

$$f(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n}{x-b_1} \dots \frac{(1+x-b_n)^n}{x-b_n}} \geq n \cdot \sqrt[n]{(2n)^n} = 2n^2$$

**Bài 19.** Cho đa thức  $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$  với  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$  có  $n$  nghiệm thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Chứng minh rằng:  $P(x) \geq (x+1)^n \quad \forall x \geq 0$

**Chứng minh**

**Bổ đề:** (bất đẳng thức Minkowski 2)

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} + \sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n} \leq \sqrt[n]{(b_1 + c_1)(b_2 + c_2) \dots (b_n + c_n)} \quad \forall b_i, c_i \geq 0$$

**Áp dụng:** Do  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$  nên các nghiệm của  $P(x)$  là  $x_1, x_2, \dots, x_n < 0$

Sử dụng định lý Viète ta có  $(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = 1$ . Sử dụng bổ đề ta có

$$\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \sqrt[n]{(x+|x_1|)(x+|x_2|)\dots(x+|x_n|)} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{\underbrace{x \cdot x \dots x}_n} + \sqrt[n]{|x_1 x_2 \dots x_n|} = x + 1 \Rightarrow P(x) \geq (x+1)^n$$

**Bài 20.** Giả sử đa thức bậc  $n$   $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  có  $n$  nghiệm thực.

Chứng minh rằng:  $a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1} a_2$

**Chứng minh**

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_2 - x_n)^2 +$$

$$+ (x_3 - x_4)^2 + \dots + (x_3 - x_n)^2 + (x_4 - x_5)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j = (n-1) \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j \right] - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (n-1)(a_1^2 - 2a_2) - 2a_2 = (n-1)a_1^2 - 2na_2 \Leftrightarrow a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1} a_2 \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 21.** Giả sử  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  ( $a_0 \neq 0$ )

có  $n$  nghiệm thực dương. Chứng minh rằng:  $\left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n \geq \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$

**Chứng minh**

Ta có  $\frac{a_{n-1}}{a_0} = x_1 x_2 \dots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$ . Sử dụng **bất đẳng thức AM - GM**

$$\Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_0} \geq n x_1 x_2 \dots x_n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \Leftrightarrow \left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1} = \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$$

**Bài 22.** Giả sử  $P_n(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x + (-1)^na_n = 0$

có  $n$  nghiệm thực dương. Chứng minh rằng:  $\sqrt[n]{1 + \sum_{i=1}^n a_i} \geq 1 + \sqrt[n]{a_n}$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}\right)^n \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

• **Áp dụng:** Giả sử phương trình có  $n$  nghiệm là  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

Ta có  $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Trong đó  $a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$  Suy ra  $\sqrt[n]{1 + \sum_{i=1}^n a_i} \geq 1 + \sqrt[n]{a_n}$  (đpcm).

**Bài 23.** Cho đa thức  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  có  $n$  nghiệm thực

Chứng minh rằng:  $|a_k a_{n-k}| \geq \binom{n}{k}^2 |a_n|$

**Chứng minh**

Ta có  $S_1 = \sum_{k=1}^n x_k = -a_1$ ;  $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k a_k$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**. Ta có

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \geq \binom{n}{k} \left[ (x_1 \dots x_n)^{\frac{n-1}{k-1}} \right]^{\frac{1}{\binom{n}{k}}} \Rightarrow |a_k| \geq \binom{n}{k} |a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}} \quad \forall k = \overline{1, n}$$

$$\text{và } |a_{n-k}| \geq \binom{n}{n-k} |a_n|^{\frac{\binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n}{n-k}}}. \text{ Do } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{n-k} + \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{n-k}$$

$$\Rightarrow |a_k a_{n-k}| \geq \binom{n}{k}^2 |a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n}{k}}} \Leftrightarrow |a_k a_{n-k}| \geq \binom{n}{k}^2 |a_n| \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 24.** Giả sử đa thức  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  có  $n$  nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: 
$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k a_{n-k}}{a_n} \right| \geq \binom{2n}{n} - 1$$

**Chứng minh**

Sử dụng bài 23 ta có 
$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k a_{n-k}}{a_n} \right| \geq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$
  

$$= \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{0} = \binom{2n}{n} - 1$$

**Bài 25.** Giả sử  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  có  $n$  nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: 
$$\left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \right| \geq \binom{k}{i} \left| \frac{a_k}{C_n^k} \right|^{\frac{k-i}{i}} \quad \forall i \leq k \leq n$$

**Chứng minh**

Xét đa thức:  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Đạo hàm  $(n-k)$  lần ta có

$$P_n^{(n-k)}(x) = n(n-1)\dots(k+1)x^k + (n-1)(n-2)\dots k \cdot a_1 x^{k-1} + \dots +$$

$$+ (n-k+1)(n-k)\dots 2a_{k-1}x + (n-k)\dots 2 \times 1 a_k$$

hay 
$$P_n^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!} x^k + \frac{(n-1)!}{(k-1)!} a_1 x^{k-1} + \frac{(n-2)!}{(k-2)!} a_2 x^{k-2} + \dots + \frac{(n-k)!}{1!} a_k$$

$$\Rightarrow R_k(x) = \frac{k!}{n!} P_n^{(n-k)}(x) = x^k + \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} a_1 x^{k-1} + \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} a_2 x^{k-2} + \dots + \frac{\binom{n-k-1}{1}}{\binom{n}{k}} a_{k-1} x + \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Sử dụng hệ quả định lý **Rolle** “giữa hai nghiệm của đạo hàm cấp  $m$  luôn tồn tại một nghiệm của đạo hàm cấp  $(m+1)$ ” suy ra tính chất sau:

Nếu  $P_n(x)$  có các nghiệm đều dương thì  $P_n^{(n-k)}(x)$  cũng có các nghiệm đều dương, tức là  $R_k(x)$  có các nghiệm đều dương. Theo bài 23 đối với đa thức

$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  ta có  $|a_k| \geq \binom{n}{k} |a_n|^{\frac{n-k+1}{k}} \quad \forall k = 1, n$  nên áp dụng kết quả này cho đa thức

$$R_k(x) = \frac{k!}{n!} P_n^{(n-k)}(x) = x^k + \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} a_1 x^{k-1} + \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} a_2 x^{k-2} + \dots + \frac{\binom{n-k+1}{1}}{\binom{n}{k}} a_{k-1} x + \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \right| \geq \binom{k}{i} \left| \frac{a_k}{C_n^k} \right|^{\frac{k-i}{i}}$$

**Bài 26.** Giả sử  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  có  $n$  nghiệm thực dương

Chứng minh rằng:  $\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^k \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^i \quad \forall i \leq k \leq n$

**Chứng minh**

Theo bài 25:  $\left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \right| \geq \binom{k}{i} \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\frac{\binom{k-1}{i-1}}{C_i^k}}$  suy ra  $\left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k} \binom{k}{i}} a_i \right|^{\binom{k}{i}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\binom{k-1}{i-1}}$

Ta có  $\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k} \binom{k}{i}} = \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!} = \frac{(n-i)!i!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{i}}$  do đó

$$\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^{\binom{k}{i}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\binom{k-1}{i-1}} \quad \forall i \leq k \Leftrightarrow \left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^{\frac{k!}{i!(n-k)!}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\frac{(k-1)!}{(i-1)!(n-k)!}}$$

Lũy thừa bậc  $\frac{(n-k)!(i-1)!}{(k-1)!}$  cả hai vế ta có  $\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^{\frac{k}{i}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right| \Rightarrow (\text{đpcm})$

**Bài 27.** Giả sử  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  có  $n$  nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng:  $\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right| \left| \frac{a_{k-i}}{\binom{n}{k-i}} \right| \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right| \quad \forall 1 \leq i \leq k \leq n$

**Chứng minh**

Sử dụng kết quả của bài 23 đối với đa thức  $R_k(x)$  ta nhận được

$$\left| \frac{\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \cdot \frac{\binom{n-k+i}{i}}{\binom{n}{k}} a_{k-i}}{\frac{a_k}{\binom{n}{k}}} \right| \geq \binom{k}{i}^2 \Rightarrow \left| \frac{a_i a_{k-i}}{a_k} \right| \geq \frac{\binom{n}{k} \binom{k}{i}^2}{\binom{n-i}{k-i} \binom{n-k+i}{i}} = \frac{k!(n-k)!n!}{(n-i)!(n-k+i)!i!(k-i)!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_i a_{k-i}}{a_k} \right| \geq \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{k-i}}{\binom{n}{k}} \Leftrightarrow \left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \cdot \frac{a_{k-i}}{\binom{n}{k-i}} \right| \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|$$

**Hệ quả:** Cho  $k = n$  ta có  $\left| \frac{a_i a_{n-i}}{a_n} \right| \geq \binom{n}{i}^2$

**B. BÀI TẬP TỰ GIẢI**

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  $ab + bc + cd + da + \frac{3}{2} \cdot \frac{a+b+c+d}{abc+abd+bcd+cda} \leq$   
 $\leq 3(abc+abd+bcd+cda)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{a+b+c+d}{abc+abd+bcd+cda} \right)^2 \quad \forall a, b, c, d > 0$

**Bài 2.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$10 - 3(abc + acd + abd + bcd) \leq \frac{3(a+b+c+d) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{4(abc+acd+abd+bcd)} +$$

$$+ \frac{36(abc+acd+abd+bcd)}{3(a+b+c+d) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + 12(abc+acd+abd+bcd)^2}$$

**Bài 3.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 + 9(a+b+c+d)^2 \geq$$

$$\geq 6(abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + 6(abc+abd+acd+bcd)$$

**Bài 4.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c+d+p)(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp) \leq$$

$$\leq 9(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)^2$$

**Bài 5.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c+d+p)(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)$$

$$\leq 8(a+b+c+d+p)^3 + 10(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)$$

**Bài 6.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c+d+p)^2}{25} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(ab+ac+ad+ap+bc+bd+dp+cd+cp+dp)}{(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)} \geq 1$$

**Bài 7.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{5}(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp) +$$

$$+ \frac{3(a+b+c+d+p)}{abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp} \leq$$

$$\leq \frac{12}{25}(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)^2 +$$

$$+ \left( \frac{a+b+c+d+p}{abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp} \right)^2$$



**Bài 8.** Giả sử phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có hai nghiệm  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{2a-b}{a-b+c} \geq \frac{a(6a+b+8c)}{(a+c)(3a-b+c)}$

**Bài 9.** Giả sử  $|a(b-c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab|$ . Chứng minh: nếu phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm thực thì tồn tại ít nhất 1 nghiệm  $x_0 \in (0, \sqrt{3}-1)$

**Bài 10.** Giả sử phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm thực dương (có thể bằng nhau). Chứng minh rằng:  $\frac{4abc - b^3 - 3a^2d}{da^3 - abc} \geq \frac{3}{2}$

**Bài 11.** Giả sử phương trình  $x^3 - px^2 + qx - p = 0$  với  $p, q > 0$  có ba nghiệm thực

$x_1, x_2, x_3 \geq 1$ . Chứng minh rằng:  $p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q+3)$

**Bài 12.** Giả sử phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm  $x_1, x_2, x_3 > 0$ .

Chứng minh rằng:  $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq \frac{-b^3c^2}{81a^5}$

**Bài 13.** Giả sử phương trình  $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$  có bốn nghiệm thực  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 \geq 8$

**Bài 14.** Giả sử  $P(x) = x^{2006} + a_1x^{2005} + \dots + a_{2005}x + a_{2006}$  có 2006 nghiệm thực phân biệt và  $a_{2001} = 2001$ ;  $a_{2003} = 2003$ . Chứng minh  $|a_{2002}| > 2002$

**Bài 15.** Cho đa thức  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  với các hệ số  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq 7$ . Chứng minh rằng: nếu  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực thì  $a_1 \geq 2$ .

**Bài 16.** Cho  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  và  $Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$

Giả sử  $P(x) \nmid Q(x)$  và tồn tại  $b_k$  sao cho  $|b_k| > \binom{m}{k} 2006^k$

Chứng minh rằng tồn tại  $a_j$  thỏa mãn  $|a_j| > 2005$ .

**Bài 17.** Giả sử  $x_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Chứng minh rằng:

$$\sqrt[p]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}}{\binom{n}{p}}} \geq \sqrt[p]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{\binom{n}{k}}} \quad \forall 1 \leq p \leq k \leq n$$

**Bài 18.** Giả sử  $x_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_i \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_i} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-i} \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-i}}}{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} \geq \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{k-i}}{\binom{n}{k}}$$

### § 23.8. BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG THUẦN NHẤT

Trong chương I mục bất đẳng thức AM – GM chúng ta đã làm quen với các bất đẳng thức có sự pha trộn giữa các tổng đối xứng không đồng bậc. Đó chính là những ví dụ đầu tiên về các bất đẳng thức không thuần nhất. Có thể nhận thấy rằng bất đẳng thức không thuần nhất thường rất khó. Đối với các bất đẳng thức loại này phương pháp giải tích cung cấp cho ta rất nhiều công cụ tốt. Tuy nhiên, dưới đây chúng tôi sẽ chỉ sử dụng phương pháp đại số để tấn công thế giới đầy mới mẻ này.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d$  là những số thực. Chứng minh rằng:

$$(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq 324[abcd + 4(abc + bcd + cda + dab) + 1]^2$$

#### Chứng minh

Xét 4 số sau  $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$ . Hiển nhiên trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu giả sử  $a^2 - 1, b^2 - 1$ . Khi đó:  $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5) =$

$$= 7(a^2 - 1)(b^2 - 1) + 18(9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1) \geq 18(9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)$$

Tiếp tục xét 3 số:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (27a^2b^2 - 20(a^2 + b^2) + 13)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) =$   
 $= 7(c^2 - 1)(d^2 - 1) + 18(9c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1) \geq 18(9c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1)$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:

$$\begin{aligned} (13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) &\geq 18^2(9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)(9c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1) \\ &= 324(a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)(c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4c^2d^2 + 4c^2d^2 + 1) \\ &\geq 324[abcd + 4(abc + bcd + cda + dab) + 1]^2 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $(c^2 - 1), (27a^2b^2 - 20(a^2 + b^2) + 13)$  cùng dấu. Khi đó:

$$\begin{aligned} (9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)(13c^2 + 5) &= (c^2 - 1)(27a^2b^2 - 20(a^2 + b^2) + 13) + \\ &+ 18[5a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1] \geq 18[5a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:  $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq$

$$\begin{aligned} &\geq 18^2[5a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1](13d^2 + 5) \\ &= 324[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1) \\ &\geq 324[abcd + 4(abc + bcd + cda + dab) + 1]^2 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 2.** Cho  $a, b, c, d$  là những số thực. Chứng minh rằng:

$$(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2$$

### Chứng minh

Xét 4 số sau  $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$ . Hiển nhiên trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu giả sử  $a^2 - 1, b^2 - 1$ . Khi đó:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7) =$

$$= (a^2 - 1)(b^2 - 1) + 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4) \geq 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)$$

Tiếp tục xét 3 số:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) =$   
 $= (c^2 - 1)(d^2 - 1) + 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \geq 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4)$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:

$$\begin{aligned} (5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) &\geq 12^2(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \\ &= 9(a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 + 2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3b^2 + 3 + 4a^2 + 4b^2 + 4 + 4 + 5) \\ &\quad (c^2d^2 + 2c^2 + 2c^2d^2 + 2c^2d^2 + 2d^2 + 3 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2d^2 + 4 + 4 + 4c^2 + 4d^2 + 5) \\ &\geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2 \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $(c^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(5c^2 + 7)$

$$\begin{aligned} &= (a^2b^2 - 1)(c^2 - 1) + 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9] \\ &\geq 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq$

$$\begin{aligned} &\geq 36[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9](5d^2 + 7) \\ &\geq 9[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1) \\ &\geq 9[a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3a^2 + 3b^2c^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4a^2 + \\ &\quad + 4b^2 + 4c^2 + 4 + 9](d^2 + 2 + 2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 3 + 3 + 3d^3 + 3 + 3d^2 + 3d^2 + 4 + 4 + 4 + 4d^2 + 9) \end{aligned}$$

$$\geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c, d, e$  là những số thực. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & (5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq \\ & \geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2 \end{aligned}$$

**Chứng minh**

Xét 4 số  $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$ . Hiển nhiên trong 4 số sẽ có 2 số cùng dấu giả sử  $a^2 - 1, b^2 - 1$ . Khi đó:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)$

$$= (a^2 - 1)(b^2 - 1) + 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4) \geq 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)$$

Tiếp tục xét 3 số:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) =$   
 $= (c^2 - 1)(d^2 - 1) + 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \geq 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4)$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:

$$\begin{aligned} & (5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq 12^2(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \\ & = 9(a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 + 2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3b^2 + 3 + 4a^2 + 4b^2 + 4 + 4 + 5) \\ & \quad (c^2d^2 + 2c^2 + 2c^2d^2 + 2c^2d^2 + 2d^2 + 3 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2d^2 + 4 + 4 + 4c^2 + 4d^2 + 5) \\ & \geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2 \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $(c^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(5c^2 + 7)$

$$\begin{aligned} & = (a^2b^2 - 1)(c^2 - 1) + 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9] \\ & \geq 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq$

$$\geq 36[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9](5d^2 + 7)$$

$$\geq 9[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1)$$

$$\geq 9[a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3a^2 + 3b^2c^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4 + 9](d^2 + 2 + 2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 3 + 3 + 3d^3 + 3 + 3d^2 + 3d^2 + 4 + 4 + 4 + 4d^2 + 9)$$

$$\geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 4.** Cho số thực  $\alpha \geq 2$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  ( $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ). Tìm tất cả các số  $k$  sao cho tồn tại

hằng số  $C_k > 0$  thỏa mãn:  $(x_1^\alpha + 1) \dots (x_n^\alpha + 1) \geq C_k (x_1 + \dots + x_n)^k$  (\*).

Khi đó, tìm số  $C_k$  tốt nhất.

### Chứng minh

Chứng minh gồm 2 bước:

Bước 1: Tìm giá trị  $k$  và dự đoán số tốt  $C_k$

Cho  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$  thì (\*) trở thành:  $x_n^\alpha + 1 \geq C_k x_n^k$  (\*\*) với  $C_k > 0$

Nếu  $k < 0$  thì (\*\*) không đúng vì ta cho  $x_n \rightarrow +0$ , khi đó  $VT(**) \rightarrow 1$  còn  $VP(**) \rightarrow +\infty$ .

Còn nếu  $k \geq \alpha$  thì (\*\*) cũng không đúng vì ta cho  $x_n \rightarrow +0$ , khi đó  $VT(**) < VP(**)$  còn  $VP(**) \rightarrow +\infty$ . Do đó, ta sẽ chứng minh với  $k \in [0, \alpha]$  thì sẽ tồn tại hằng số  $C_k > 0$  thỏa

mãn (\*). Thật vậy:  $(x_1^\alpha + 1) \dots (x_n^\alpha + 1) \geq \sum_{i=1}^n x_i^\alpha + 1$

$$\geq n \left( \frac{1}{n} \sum x_i \right)^\alpha + 1 = \frac{\left( \sum x_i \right)^\alpha}{n^{\alpha-1}} + \frac{\alpha-k}{k} \cdot \frac{k}{\alpha-k} \geq \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1}{n^{\frac{(\alpha-1)k}{\alpha}}} \left( \frac{k}{\alpha-k} \right)^{\frac{\alpha-k}{\alpha}} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k$$

Điều đó chứng tỏ  $\exists C_k > 0$  thỏa mãn bất đẳng thức (\*).

Dự đoán  $C_k$ : Cho  $x_i = \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $i = \overline{1, n} \Rightarrow C_k \leq \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \right)^\alpha (n^{-k}) \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}}$

Ta sẽ chứng minh  $C_k = \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \right)^\alpha (n^{-k}) \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}}$  là hằng số tốt nhất cần tìm.

Bước 2: Chứng minh. Trước hết ta cần chỉ ra:

$$\text{Với } k \geq 0 \text{ ta luôn có: } x^\alpha + 1 \geq \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{-\frac{k}{2}} \left[ x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM - GM:

$$\begin{aligned} x^\alpha + 1 &= (x^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha n - k}{k} \left[ \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{\alpha n}{k} \left[ \frac{x^2 + \frac{\alpha n - k}{k} \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\alpha n}{k} \left[ \frac{x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} + \frac{\alpha - k}{k} \cdot n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\geq \frac{\alpha n}{k} \left[ \frac{\left[ x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{k}{\alpha}} \cdot \left[ n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha - k}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{\frac{-k}{2}} \left[ x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } VT(*) &\geq \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{\frac{-k}{2}} \left[ x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{k}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \right)^n \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{kn}{\alpha}} n^{\frac{-kn}{2}} \left[ \prod_{i=1}^n \left( x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \right]^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Chú ý dấu “=” xảy ra khi  $x = \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ . Cuối cùng ta chỉ cần chỉ ra:

$$\prod_{i=1}^n \left( x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \geq n^{n-2} \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2(n-1)}{\alpha}} (x_1 + \dots + x_n)^2 \quad (**)$$

Thật vậy, xét  $n$  số  $x_i^2 + \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}, i = \overline{1, n}$ . Trong  $n$  số này sẽ có 2 số cùng dấu. Giả sử

$x_i^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}, x_j^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}$  cùng dấu với  $i \neq j$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} &\left( x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \left( x_j^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \\ &= \left( x_i^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \left( x_j^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) + n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[ x_i^2 + x_j^2 + (n-2) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \\ &\geq n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[ x_i^2 + x_j^2 + (n-2) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } VT(**) \geq n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[ x_1^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \dots$$

$$\left[ x_i^2 + x_j^2 + (n-2) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \dots \left[ x_n^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right].$$

Chú ý rằng nếu  $\left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 - \beta \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right), \left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 - \gamma \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$  cùng dấu thì

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + (n-\beta) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\gamma) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 - \beta \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 - \gamma \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) + \\ & + n \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\beta-\gamma) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right] \geq n \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\beta-\gamma) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right] \end{aligned}$$

với  $\beta, \gamma$  nguyên dương thỏa mãn  $n > \beta + \gamma$ .

Dựa vào chú ý trên ta có thể chứng minh được bằng  $(n-3)$ .

Xét  $(n-1-k)$  (tiếp theo)  $k = \overline{0, n-4}$

$$VT(***) \geq n^{n-2} \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2(n-2)}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 + (n-m) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n-m} b_i^2 + m \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

Với  $m$  nguyên bé hơn  $n$  và  $a_i^2 \neq b_j^2, \{a_i^2, b_j^2\} \subset \{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$  với  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n-m}$

Cuối cùng, áp dụng bất đẳng thức CBS ta được:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 + (n-m) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(m \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n-m} b_i^2\right) \geq \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^{n-m} b_i\right)^2 \\ & = \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2. \text{ Suy ra } VT(***) \geq n^{n-2} \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2(n-1)}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \Leftrightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x_i = \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Kết luận: Tất cả các giá trị  $k$  cần tìm là  $k \in [0, \alpha]$ . Hằng số tốt

$$C_k = \left(\frac{\alpha n}{\alpha n - k}\right)^n (n^{-k}) \left(\frac{\alpha n - k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}$$

**Nhận xét:**

1. Với trường hợp  $\alpha=2, n=3$  có lời giải bằng kỹ thuật 2, rất đẹp như sau:

Đặt  $x_1 = \operatorname{tg} a, x_2 = \operatorname{tg} b, x_3 = \operatorname{tg} c$ ,  $a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Bất đẳng thức cần chứng minh  $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{C_k} \geq (\cos a \cos b \cos c)^{2-k} (\cos a \cos b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \sin a \cos b \cos c)^k \quad (1)$$

Ta có:  $\cos a \cos b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \sin a \cos b \cos c = \sin a \sin b \sin c + \sin(a+b+c)$

$$\text{và } \sin a \sin b \sin c \leq \sin^3 \left( \frac{a+b+c}{3} \right) = n^3; \sin(a+b+c) = 3n - 4n^3;$$

$$\cos a \cos b \cos c \leq \cos^3 \left( \frac{a+b+c}{3} \right) = (1-n^2)^{\frac{3}{2}}. \text{ Do đó, để chứng minh (1) ta cần chỉ ra:}$$

$$\frac{1}{C_k} \geq (1-n^2)^{\frac{3}{2}(2-k)} (n^3 + 3n - 4n^3)^k \Leftrightarrow \frac{1}{C_k} \geq (1-n^2)^{\frac{6-k}{2}} (3n)^k.$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} (1-n^2)^{\frac{6-k}{2}} (3n)^k &= \left( \frac{2}{6-k} \cdot 3(1-n^2) \right)^{\frac{6-k}{2}} \cdot \left( \frac{2}{k} \cdot 3n^2 \right)^{\frac{k}{2}} \cdot 3^k \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \cdot \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} \\ &\leq 3^k \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} \left( \frac{3(1-n^2) + 3n^2}{\frac{6-k}{2} + \frac{k}{2}} \right)^{\frac{6-k}{2} + \frac{k}{2}} = 3^k \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} = \frac{1}{C_k}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } C_k = 3^{-k} \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} = 3^{-k} \left( \frac{6}{6-k} \right)^3 \left( \frac{6-k}{k} \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow n = \sqrt{\frac{k}{6}} \text{ hay } x_1 = x_2 = x_3 = \left( \frac{k}{6-k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \text{ Với } \alpha=2, n=3, k=2 \text{ thì: } (x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1) \geq \frac{3}{4}(x_1+x_2+x_3)^2$$

Đặt  $a = \sqrt{2}x_1, b = \sqrt{2}x_2, c = \sqrt{2}x_3$  ta được:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2 \geq 9(ab+bc+ca)$$

Đây là bài Asian Pacific Mathematica Olympiad 2004.

3. Ta có thể tổng quát hóa để thu được bài toán:

Cho trước số thực  $\alpha \geq 2, 2 \leq n \in \mathbb{N}, n \geq m \in \mathbb{N}$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Tìm tất cả các số  $k$  sao

cho tồn tại hằng số  $C_k > 0$  thỏa mãn:  $\prod_{i=1}^n (x_i^2 + 1) \geq C_k \left( \sum_{0 < i_1 < \dots < i_m \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_m} \right)^k$

Khi đó tìm số tốt  $C_k$

Kết quả:  $k \in [0, \alpha]$  và  $C_k = \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - mk} \right)^n (C_n^m)^{-k} \left( \frac{mk}{\alpha n - mk} \right)^{\frac{mk}{\alpha}}$  là giá trị tốt nhất.

Lời giải chi tiết hoàn toàn tương tự như trên (bạn đọc tự hoàn thành).

**Chú ý.** Khi  $\alpha=2, n=3, m=2$  thì ta nhận được bài toán VMEO 3 sau:

Tìm tất cả các số thực  $k$  sao cho tồn tại hằng số  $C_k > 0$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực  $a, b, c$  tùy ý.  $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq C_k |ab+bc+ca|^k$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c)$

**Chứng minh**



Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geq ab + bc + ca + a + b + c$$

Xét 3 số  $(a-1), (b-1), (c-1)$ , trong 3 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là  $(a-1), (b-1)$ , suy ra  $ab \geq a + b - 1$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + c(a+b-1) + 2 \\ &= \frac{1}{2}(a-b)^2 + (c-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + ab + bc + ca + a + b + c \geq ab + bc + ca + a + b + c \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Ngoài cách giải như trên ta còn các cách giải sau đây:

• **Cách 2:**

Ta có bất đẳng thức Tukurvici:  $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2\sqrt{abc} \geq ab + bc + ca + a + b + c$

Mà  $2\sqrt{abc} \leq abc + 1$  nên suy ra đpcm

• **Cách 3:** Đặt  $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 - a - b - c - ab - bc - ca$

Nếu  $a, b, c > 3$  thì  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$  hay  $abc > ab + bc + ca$ , do đó

$$f(a, b, c) > a^2 + b^2 + c^2 + 2 - a - b - c > 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Nếu có 1 số bé hơn hoặc bằng 3, giả sử là  $a \leq 3$ .

$$\text{Khi đó: } f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \frac{(3-a)(b-c)^2}{4} \geq 0$$

Ta cần chứng minh:  $f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \geq 0$ . Ta có:

$$f(a, x, x) = a^2 + x^2 + ax^2 + 2 - a - 2x - 2ax = (a+1)(x-1)^2 + (a-1)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2abcd + 2 \geq (a + b + c + d)^2 \quad (*)$$

**Chứng minh**

Xét 4 số  $(a-1), (b-1), (c-1), (d-1)$ . Trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là  $(a-1), (b-1)$ , suy ra  $abcd \geq cda + bcd - cd$ .

• Nếu  $(c-1), (d-1)$  cùng dấu thì  $cd \geq c + d - 1$ , suy ra:

$$abcd \geq cda + bcd - cd \geq (c + d - 1)(a + b) - cd = (a + b)(c + d) - a - b - cd$$

$$\text{Do đó: } VT(*) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(a + b)(c + d) - 2a - 2b - 2cd + 2$$

$$= (a + b + c + d)^2 + (a - b)^2 + 2(c - d)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq (a + b + c + d)^2 \quad (\text{đpcm})$$

• Nếu  $(a-1), (b-1), (c-1)$  cùng dấu thì  $ac > c + a - 1, bc \geq b + c - 1$

$$\Rightarrow abcd \geq cda + bcd - cd \geq d(c + a - 1) + d(b + c - 1) - cd = d(a + b + c) - 2d$$

Suy ra:  $VT(*) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2d(a+b+c) - 4d + 2$

$$= (a+b+c+d)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(d-1)^2 \geq (a+b+c+d)^2$$

**Nhận xét:** Bất đẳng thức trên yếu hơn bất đẳng thức Tുകervici là:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{abcd} \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c \geq 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} + \frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3} \geq 2 \left( \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \right) (*)$$

### Chứng minh

Xét 3 số  $(a-1), (b-1), (c-1)$ . Trong 3 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là  $(a-1), (b-1)$ , suy ra

$$ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow (a+c+1)(b+c+1) \geq (c+2)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(c+2)(a+b+c)} \geq \frac{1}{(a+c+1)(b+c+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{c+2} + \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{b+c+1}$$

$$\text{Do đó: } VT(*) \geq \frac{2}{a+b+1} + \frac{2}{c+2} + \frac{2}{a+b+c} \geq 2 \left( \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \right) \text{ (đpcm)}$$

**Bài 8.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc + ab + bc + ca \leq 4$  hoặc  $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$ .

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+b+1} + \frac{3}{b+c+1} + \frac{3}{c+a+1} + 1 \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c} (*)$$

### Chứng minh

• Nếu  $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$ . Dễ dàng ta có được:

$$\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} - \frac{1}{c+2}. \text{ Do đó ta chỉ cần chứng minh: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} + \frac{3}{c+2} \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x+2}{3}} \geq \frac{4}{x + \frac{x+2}{3}} = \frac{6}{2x+1} \Rightarrow (1) \text{ đúng} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

• Nếu  $abc + ab + bc + ca \leq 4$

**Bước 1.** Chứng minh bất đẳng thức sau (dành cho bạn đọc):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{9}{a+b+c} \geq 9 \left( \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \right) \left( \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} - \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{b+c+1} - \frac{1}{c+a+1} \right)$$

**Bước 2.** Ta có:  $4 \geq abc + ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 1$ . Suy ra:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 \left( \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} - \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{b+c+1} - \frac{1}{c+a+1} \right)$$

$$\text{Kết hợp với bài 7 suy ra: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+b+1} + \frac{3}{b+c+1} + \frac{3}{c+a+1} + 1$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{9}{a+b+c} - 6\left(\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1}\right) + 9\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1}\right) + 1 \\
&= \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c} - 3\left(\frac{2}{a+b+1} + \frac{2}{b+c+1} + \frac{2}{c+a+1}\right) + \\
&+ 3\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} + \frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3}\right) \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c}
\end{aligned}$$

Sau đây là một số bài tập luyện tập dành cho bạn đọc.

**Bài 9.** Cho  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh:  $xyz(x+2)(y+2)(z+2) \leq \left[1 + \frac{2}{3}(xy + yz + zx)\right]^3$

**Bài 10.** Cho  $\begin{cases} x, y, z \in [-1; 1] \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}} + \sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}} + \sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}} \leq 3$

**Bài 11.** Cho  $\begin{cases} x, y, z, t \in \mathbb{R} \\ \max\{xy, yz, zt, tx\} \leq 1 \end{cases}$ . Chứng minh:

$$\sqrt{1-xy+y^2} + \sqrt{1-yz+z^2} + \sqrt{1-zt+t^2} + \sqrt{1-tx+x^2} \geq 4$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geq \frac{9}{1+abc}$

**Bài 13.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2x_1x_2\dots x_n + n - 2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

**Bài 14.** Chứng minh rằng:  $(3a^2 + 2)(3b^2 + 2)(3c^2 + 2) \geq 5[abc - 2(ab + bc + ca)]^2$

**Bài 15.** Chứng minh rằng:  $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq$   
 $\geq 36[12(abc + bcd + cda + dab) + ab + bc + ca + ad + bd + cd]^2$

Đặt  $S_{k,n} = \sum_{i_1 < \dots < i_k \subset \{1, 2, \dots, n\}} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  ( $k < n$ ) và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

**Bài 16.** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
&(S_{4,4} - S_{2,4} + 1)^2 + (S_{3,4} - S_{1,4})^2 \geq \frac{125}{216}(\sqrt{2}S_{3,4} + \sqrt{3}S_{2,4})^2 \\
&(49S_{4,4} - 371S_{2,4} + 2809)^2 + 371(7S_{3,4} - 53S_{1,4})^2 \geq 360^3(S_{4,4} + S_{2,4} + 3S_{1,4} + 1)^2 \\
&(9S_{4,4} - 21S_{2,4} + 49)^2 + 21(3S_{3,4} - 7S_{1,4})^2 \geq \frac{2000}{7}(S_{4,4} + 2S_{2,4} + 5S_{1,4} + 2)^2 \\
&(S_{5,5} - 2S_{3,5} + 4S_{1,5})^2 + 2(S_{4,5} - 2S_{2,5} + 4)^2 \geq (S_{3,5} - S_{1,5} + 1)^2 \\
&(S_{6,6} - S_{4,6} + S_{2,6} - 1)^2 + (S_{5,6} - S_{3,6} + S_{1,6})^2 \geq \frac{16}{121}(6S_{6,6} - S_{4,6} + 5S_{1,6} + 1)^2 \\
&(8S_{6,6} - 20S_{4,6} + 50S_{2,6} - 125)^2 + 10(4S_{5,6} - 10S_{3,6} + 25S_{1,6})^2 \geq 96,04(S_{4,6} + S_{3,6})^2
\end{aligned}$$

## § 23.9. PHƯƠNG PHÁP SS (SCHUR - SOS)

### I. PHƯƠNG PHÁP SS VỚI BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐẲNG THỨC TẠI TÂM

#### 1. Đặt vấn đề

Khi đứng trước một bài bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị với ba biến số chẳng hạn là  $A(a, b, c) \geq B(a, b, c)$  thì phương pháp hay được sử dụng nhất là phương pháp SOS (xem Chương IV. §17) với phép biến đổi có cấu trúc đối xứng theo định dạng sau đây:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Để có một cách nhìn phong phú hơn về các dạng bài bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị với ba biến số, chúng tôi xin giới thiệu **Phương pháp SS (Schur - SOS)**. Đặc điểm của phương pháp này là chúng ta sẽ chọn phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất trong ba biến số và biến đổi để nhận được biểu thức không đối xứng với phần tử này nhưng lại đối xứng với hai biến số còn lại. Tên gọi **SS (Schur - SOS)** được hình thành là do ta xuất hiện các biểu thức  $(a-b)^2$ ;  $(a-c)(b-c)$  để đưa về định dạng chứng minh:

$$f(a, b, c) = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ trong đó } c = \max(a, b, c) \text{ hoặc } c = \min(a, b, c)$$

Khi đó bất đẳng thức đã cho được chứng minh nếu ta chứng minh được  $M, N \geq 0$ .

Trước hết chúng ta cùng làm quen với một số khai triển thường được sử dụng trong phân tích của phương pháp SS:

$$1. a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a-b)^2 + (a-c)(b-c)$$

$$2. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a-b)^2 + (a+b+c)(a-c)(b-c)$$

$$3. ab(a+b) + bc(b+c) = ca(c+a) - 6abc = 2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c)$$

$$4. ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc = c(a-b)^2 + b(a-c)(b-c)$$

$$5. a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c) = [(a+b)^2 + c^2](a-b)^2 + [ab + (a+c)(b+c)](a-c)(b-c)$$

$$6. a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) - 2abc(a+b+c) =$$

$$= (a+c)(b+c)(a-b)^2 + (2ab+ac+bc)(a-c)(b-c)$$

$$7. a^3b + b^3c + c^3a - abc(a+b+c) = (ca+cb)(a-b)^2 + (a^2+ac)(a-c)(b-c)$$

$$8. \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 = \frac{1}{ab}(a-b)^2 + \frac{1}{ac}(a-c)(b-c)$$

$$9. \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 6 = \frac{2}{ab}(a-b)^2 + \frac{a+b}{abc}(a-c)(b-c)$$

$$10. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{1}{(a+c)(b+c)}(a-b)^2 + \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)$$

$$11. \frac{a+kb}{a+kc} + \frac{b+kc}{b+ka} + \frac{c+ka}{c+kb} - 3 = \frac{k^2(a-b)^2}{(c+ka)(c+kb)} + \frac{k(a-c)(b-c)[(k^2-k+1)a+(k-1)b+kc]}{(a+kb)(b+ka)(c+kb)}$$

$$12. \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{(a+c)(b+c)}(a-b)^2 + \frac{(a+b+c)(a+b+2c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c).$$

Bây giờ chúng ta sẽ cùng làm quen ví dụ mở đầu với bất đẳng thức Schur quen thuộc.

## 2. Các bài tập mẫu minh họa

**Bài 1.** Với các số thực  $a, b, c$  không âm bất kỳ ta luôn có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Sử dụng khai triển:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)(b-c)] \quad (1)$$

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) - 6abc = 2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra bất đẳng thức đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$(a+b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ (luôn đúng do } c = \min(a, b, c) \text{)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$  hoặc  $a=b, c=0$  và các hoán vị.

**Bài 2.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{b+a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \forall a, b, c > 0$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Sử dụng khai triển:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 3 = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)(y-z)}{xz} \text{ thì bất đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng:}$$

$$\left[ \frac{1}{ab} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{1}{ac} - \frac{1}{(a+c)(a+b)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 3.** Chứng minh:  $\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)^2}{(c+a)^2} + \frac{(c+a)^2}{(a+b)^2} + \frac{2abc}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{11}{3} \quad \forall a, b, c \geq 0$

### Chứng minh

Giả sử  $c = \max(a, b, c)$ . Với  $x, y, z$  bất kỳ ta có khai triển sau:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} - 3 = \frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} + \frac{(x+y)(y+z)(x-z)(y-z)}{x^2z^2}$$

Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[ \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2(b+c)^2} - \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{(a+2b+c)(2a+b+c)}{(a+b)^2(a+c)^2} - \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Theo **Chebyshev** ta có:  $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$ . Do  $c = \max(a, b, c)$  nên

$$\frac{(a+2b+c)(b+2a+c)}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq \frac{4(a+b)^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+c^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \quad (1)$$

$$\text{và } \frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \frac{4}{(a+c)(b+c)} \quad (2). \text{ Ta sẽ chứng minh } \frac{2}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \quad (3)$$

Thật vậy:  $(3) \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq ab+bc+ac+c^2$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 \geq (ab + bc + ca) \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Từ (2) và (3) suy ra  $\frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \quad (4)$

Từ (1) và (4) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 8 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 11 \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[ \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Ta có  $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{16}{(b+c)^2} \geq \frac{8}{a^2+b^2} \geq 8a^2 + b^2 + c^2$ . Do  $c = \min(a, b, c)$  nên

$$\begin{aligned} (a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2) &\geq 2\sqrt{ac} \cdot (c+c)(a^2+c^2+c^2) = 4c\sqrt{ac}(a^2+2c^2) \\ &= 4c\sqrt{ac} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2c^2 \right) \geq 4c\sqrt{ac} \cdot 4\sqrt{\frac{2a^6c^2}{27}} > 8a^2c^2 \Rightarrow \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} > \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Do đó ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bình luận:** Chúng ta có thể thấy vẻ đẹp của **phương pháp SS** qua các ví dụ trên, đặc biệt là Bài 3 và Bài 4. Nếu các bạn chứng minh hai ví dụ này bằng phương pháp **SOS** cơ bản đã được đề cập thì sẽ phải xét tới hai trường hợp  $a \geq b \geq c$  và  $a \leq b \leq c$ .

Ngoài ra chúng ta cũng có thể chứng minh Bài 3 và Bài 4 bằng phương pháp **SOS** ngắn gọn hơn nhưng không được tự nhiên với sự trợ giúp của một bổ đề sau đây:

**Bổ đề:** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$  khi đó ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{2} \left( x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 6$

Trong VD3 đặt  $x = \frac{a+b}{b+c}$ ;  $y = \frac{b+c}{c+a}$ ;  $z = \frac{c+a}{a+b}$ , VD 4 đặt  $x = \frac{a}{b}$ ;  $y = \frac{b}{c}$ ;  $z = \frac{c}{a}$  thì  $xyz = 1$ .

Chúng ta sẽ tiếp tục làm quen với phương pháp **SS** qua các ví dụ sau đây:

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3} \quad \forall a, b, c > 0$

**Giải**

Giả sử  $c = \max(a, b, c)$ . Ta có khai triển sau:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + (a-c)(b-c) \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{(c+a)(c+b)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-b)^2 + \\ &+ \left[ \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 \geq (ab + bc + ca) \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Từ (2) và (3) suy ra  $\frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \quad (4)$

Từ (1) và (4) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 8 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 11 \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[ \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Ta có  $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{16}{(b+c)^2} \geq \frac{8}{a^2+b^2} \geq 8a^2 + b^2 + c^2$ . Do  $c = \min(a, b, c)$  nên

$$\begin{aligned} (a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2) &\geq 2\sqrt{ac} \cdot (c+c)(a^2+c^2+c^2) = 4c\sqrt{ac}(a^2+2c^2) \\ &= 4c\sqrt{ac} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2c^2 \right) \geq 4c\sqrt{ac} \cdot 4\sqrt{\frac{2a^6c^2}{27}} > 8a^2c^2 \Rightarrow \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} > \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Do đó ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bình luận:** Chúng ta có thể thấy vẻ đẹp của **phương pháp SS** qua các ví dụ trên, đặc biệt là Bài 3 và Bài 4. Nếu các bạn chứng minh hai ví dụ này bằng phương pháp **SOS** cơ bản đã được đề cập thì sẽ phải xét tới hai trường hợp  $a \geq b \geq c$  và  $a \leq b \leq c$ .

Ngoài ra chúng ta cũng có thể chứng minh Bài 3 và Bài 4 bằng phương pháp **SOS** ngắn gọn hơn nhưng không được tự nhiên với sự trợ giúp của một bổ đề sau đây:

**Bổ đề:** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$  khi đó ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{2} \left( x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 6$

Trong VD3 đặt  $x = \frac{a+b}{b+c}$ ;  $y = \frac{b+c}{c+a}$ ;  $z = \frac{c+a}{a+b}$ , VD 4 đặt  $x = \frac{a}{b}$ ;  $y = \frac{b}{c}$ ;  $z = \frac{c}{a}$  thì  $xyz = 1$ .

Chúng ta sẽ tiếp tục làm quen với phương pháp **SS** qua các ví dụ sau đây:

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3} \quad \forall a, b, c > 0$

**Giải**

Giả sử  $c = \max(a, b, c)$ . Ta có khai triển sau:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + (a-c)(b-c) \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{(c+a)(c+b)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-b)^2 + \\ &+ \left[ \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$



Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có  $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$ .

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \text{ hay } 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ac + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+a)(c+b)} \geq \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{a+b+c}{6(a^3 + b^3 + c^3)}$$

$$\text{Do } c = \max(a, b, c) \text{ nên } \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{6(a^3 + b^3 + c^3)}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$2a^2(b+c) + 2b^2(c+a) + 2c^2(a+b) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 9abc$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Xét các biến đổi sau:

$$2 \sum_{cyc} a^2(b+c) - 12abc = 2 \sum_{cyc} bc(b+c) - 12abc = 4c(a-b)^2 + (2a+2b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$3abc - a^3 - b^3 - c^3 = -(a+b+c)(a-b)^2 - (a+b+c)(a-c)(b-c)$$

$$\text{Do đó } VT - VP = (3c - a - b)(a-b)^2 + (a+b-c)(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Bài 7. Chứng minh rằng: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2 \quad \forall a, b, c \geq 0$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Xét các biến đổi sau:

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 = \frac{1}{ab + bc + ca} (a-b)^2 + \frac{1}{ab + bc + ca} (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1 = \frac{-2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} (a-b)^2 - \frac{1}{(a+b)(b+c)} (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$VT - VP = \left( \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) (a-b)^2 +$$

$$+ \left( \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{1}{(b+c)(c+a)} \right) (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Bài 8. Chứng minh rằng: } \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad \forall a, b, c \geq 0$$

**Chứng minh**

$$\text{Ta có: } VT - 9 = \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 - 9 = \frac{(a-b)^2}{ab} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) + \frac{(a-b)(a-c)}{ac} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right)$$

$$VT - 9 = \frac{2(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-b)(a-c)(a+b)}{abc}$$

$$VT - VP = (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) - \frac{2}{ab} \right) + (c-a)(c-b) \left( \frac{1}{ac} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) - \frac{a+b}{abc} \right)$$



Giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ , ta có:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{ab} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) \geq \frac{3}{ab}$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{1}{ac} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) \geq \frac{a+b}{abc} \Leftrightarrow \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc}{ac \cdot abc} \geq \frac{a+b}{abc}$

$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc \geq ac(a+b)$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc \geq ca^2 + abc \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + 2abc \geq 0$$

**Bài 9.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ . Ta có:

$$VT - 3 = \frac{(a-b)^2}{ab+bc+ca} + \frac{(a-c)(b-c)}{ab+bc+ca} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+b)(b+c)} \right) \geq 0$$

Ta có ngay  $ab+bc+ca \leq (a+c)(b+c)$  và  $ab+bc+ca \leq (a+b)(b+c) \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Bài 10.** Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \frac{a+kc}{a+kb} \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \quad \forall k \leq 1$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$VT - 3 = (a-b)^2 \left( \frac{k^2}{(ka+c)(kb+c)} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{k^2a - ka + k^2c + k^3b + kb - k^2b}{(a+kb)(b+kc)(c+kb)} \right)$$

$$VT - 3 = (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab+bc+ca} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{ab+bc+ca} \right)$$

$$\text{Vậy BDT} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{k^2}{(ka+c)(kb+c)} \right) +$$

$$+ (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{k^2a - ka + k^2c + k^3b + kb - k^2b}{(a+kb)(b+kc)(c+kb)} \right) \geq 0$$

Cuối cùng chỉ cần chứng minh  $(ka+c)(kb+c) \geq k^2(ab+bc+ca)$

$$\text{Và } (a+kb)(b+kc)(c+kb) \geq (k^2a - ka + k^2c + k^3b + kb - k^2b)(ab+bc+ca)$$

Khai triển và sử dụng  $k \leq 1; a \geq c; b \geq c$  ta nhận được đpcm.

**Bài 11.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 4 \quad \forall a, b, c > 0,$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$\text{Xét } \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} - 3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2-1} = -\frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2} - \frac{(a-c)(b-c)}{(a+b+c)^2}. \text{ Khi đó bất đẳng thức trở thành}$$

$$(a-b)^2 \left( \frac{1}{(a+c)(b+c)} - \frac{1}{(a+b+c)^2} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{(a+b)(b+c)} - \frac{1}{(a+b+c)^2} \right) \geq 0$$

Ta có  $(a+c)(b+c) \leq (a+b+c)^2$  và  $(a+b)(b+c) \leq (a+b+c)^2 \Rightarrow \text{đpcm}$

**Các bài tập dưới đây chủ yếu được dựa trên các đẳng thức trong hai dạng sau đây:**

$$\begin{aligned} \text{Dạng 1: } f(a, b, c) &= \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - a - b - c = \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} + \frac{c^2 - a^2}{a} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} - \frac{a^2 - b^2}{a} + \frac{b^2 - c^2}{a} = \frac{a+b}{ab}(a-b)^2 + \frac{b+c}{ac}(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dạng 2: } f(a, b, c) &= \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} + \frac{c^3 - a^3}{a} \\ &= \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} - \frac{a^3 - b^3}{a} - \frac{b^3 - c^3}{a} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}(a-b)^2 + \frac{b^2 + c^2 + bc}{ac}(b-c)^2 \end{aligned}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2}$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - a - b - c &= \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} + \frac{c^2 - a^2}{a} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} - \frac{a^2 - b^2}{a} - \frac{b^2 - c^2}{a} = \frac{a+b}{ab}(a-b)^2 + \frac{b+c}{ac}(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} - (a + b + c) = \frac{2a + 2b}{a^2 + b^2 + c^2}(a-b)^2 + \frac{a + b + 2c}{a^2 + b^2 + c^2}(a-c)(b-c)$$

$$\text{Vậy: } M = \frac{a+b}{ab} - \frac{2(a+b)}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad N = \frac{b+c}{ac} - \frac{a+b+2c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Để thấy  $M \geq 0$ . Ta sẽ chứng minh  $N \geq 0$ . Thật vậy biến đổi bất đẳng thức:

$$N \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(b+c) \geq ac(a+b+2c). \text{ Sử dụng AM - GM, ta có:}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b+c) \geq 2c(a^2 + b^2 + c^2) = c \left[ a^2 + \left( \frac{1}{8}a^2 + 2b^2 \right) + \left( \frac{1}{2}a^2 + 2c^2 \right) + \frac{3}{8}a^2 \right] >$$

$$> c(a^2 + ab + 2ac) = ac(a+b+2c). \text{ Vậy } N \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Bài 13.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)}$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - a^2 - b^2 - c^2 &= \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} + \frac{c^3 - a^3}{a} \\ &= \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} - \frac{a^3 - b^3}{a} + \frac{b^3 - c^3}{a} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}(a-b)^2 + \frac{b^2 + c^2 + bc}{ac}(b-c)^2 \end{aligned}$$

Biến đổi biểu thức sau đây dưới dạng

$$\begin{aligned} &\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} - (a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= \frac{2(a+b)^2}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2}(a-b)^2 + \frac{2(a+c)(b+c)}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2}(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab} - \frac{2(a+b)^2}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2};$$

$$N = \frac{b^2 + c^2 + bc}{ac} - \frac{2(a+c)(b+c)}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2}$$

Ta có:  $(\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + ab) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)3ab$

$$\geq 2ab(2(a^2 + b^2)) \geq 2ab(a+b)^2 \Rightarrow M \geq 0$$

$$(\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + bc) \geq \frac{3}{2}c(b+c)(2(a^2 + b^2 + c^2))$$

$$\geq 2c(a^2b + abc + a^2c + ac^2) = 2ac(a+c)(b+c) \Rightarrow N \geq 0$$

**Bài 14.** Chứng minh rằng:  $(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2)^2 \geq 3abc(a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3)$

**Chứng minh**

$f(a, b, c) = (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2)^2 - 3abc(a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3)$ . Đặt kí hiệu các biểu thức

$$P = a^6b^4 + b^6c^4 + c^6a^4 - a^5b^4c - b^5c^4a - c^5a^4b = a^5b^4(a-c) + b^5c^4(b-a) + c^5a^4(c-b)$$

$$Q = a^5b^2c^3 + b^5c^2a^3 + c^5a^2b^3 - a^5b^4c - b^5c^4a - c^5a^4b$$

$$= ab^5c^2(a^2 - c^2) + bc^5a^2(b^2 - a^2) + ca^5b^2(c^2 - b^2).$$

Suy ra  $f(a, b, c) = P + 2Q$ . Biến đổi các biểu thức  $P, Q$  ta có

$$P = a^5b^4(a-c) - c^5a^4(b-c) + b^5c^4(b-a) - a^5c^4(b-a) - a^5c^4(a-c) + a^5c^4(b-c)$$

$$= c^4(a^5 - b^5)(a-b) + a^5(a-c)(b^4 - c^4) + a^4c^4(a-c)(b-c)$$

$$= a^4(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a-b)^2 + [a^5(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) + a^4c^4](a-c)(b-c)$$

$$Q = ab^5c^2(a^2 - c^2) + bc^5a^2(b^2 - a^2) + ca^5b^2(c^2 - b^2) = ab^5c^2(a^2 - c^2) - a^5b^2c(b^2 - c^2) + a^2bc^5(b^2 - a^2) - ab^2c^5(b^2 - a^2) - ab^2c^5(a^2 - c^2) + ab^2c^5(b^2 - c^2)$$

$$= -abc^5(a^2 - b^2)(a-b) + ab^2c^2(a^2 - c^2)(b^3 - c^3) - ab^2c(b^2 - c^2)(a^4 - c^4) = -abc^5(a+b)(a-b)^2 +$$

$$+ [ab^2c^2(a+c)(b^2 + bc + c^2) - ab^2c(b+c)(a^3 + a^2c + ac^2 + c^3)](a-c)(b-c)$$

$$= -abc^5(a+b)(a-b)^2 + ab^2c(ab^2c + b^2c^2 - a^3b - a^3c - ab^2c - a^2c^2)(a-c)(b-c)$$

Từ đó suy ra  $f(a, b, c) = P + 2Q \geq 0$

**3. Các bài tập áp dụng dành cho bạn đọc tự giải****Bài 1.** Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}, \forall a, b, c \geq 0$$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{abc}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ **Bài 3.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac} + 2$ **Bài 4.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \geq 12$ **Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5$ **Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}$ **Bài 7.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c \forall a, b, c > 0$ **Bài 8.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{81abc}{(a+b+c)^3} \geq \frac{9}{2} \forall a, b, c > 0$ **Bài 9.** Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \forall a, b, c > 0$ **Bài 10.** Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \forall a, b, c > 0$$

**Bài 11.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+2b}{c+2b} + \frac{b+2c}{a+2c} + \frac{c+2a}{b+2a} \geq 3 \forall a, b, c > 0$ **Bài 12.** Chứng minh:  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{4\sqrt{2}(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8+4\sqrt{2} \forall a, b, c > 0$ **Bài 13.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)} + \frac{b^2+ca}{b^2(c+a)} + \frac{c^2+ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \forall a, b, c > 0$ **Bài 14.** Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq (a+b+c) \left( \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab} \right) \forall a, b, c > 0$$

**Bài 15.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 12 \forall a, b, c > 0$ **Bài 16.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+5b}{b+c} + \frac{b^2+5c}{c+a} + \frac{c^2+5a}{a+b} \geq 8$ **Bài 17.** Chứng minh rằng:  $(ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4} \forall a, b, c \geq 0$

## II. PHƯƠNG PHÁP SOS VÀ BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG CÓ ĐẲNG THỨC TẠI TÂM.

### 1. Đặt vấn đề

Như chúng ta đã biết SOS và SS là hai phương pháp khá hiệu quả với các bất đẳng thức 3 biến không chứa căn, nhưng một yếu tố tiên quyết để đưa về dạng chuẩn của phương pháp là bất đẳng thức phải có dấu bằng đạt tại tâm. Vậy với những bài toán không có đẳng thức tại tâm thì sao? Trong mục này chúng tôi đưa ra một số ví dụ quy từ bất đẳng thức tại biên về chứng minh bất đẳng thức tại tâm, công việc tưởng chừng khó khăn hơn này lại giúp ta xác định được một đường lối quen thuộc và rõ ràng hơn để chứng minh. Các bài toán sau đây có thể giúp các bạn nhìn nhận rõ hơn về kỹ thuật này.

### 2. Các bài tập mẫu minh họa

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh:  $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{27}{4}$  (1)

#### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{1}{4}(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)) \leq (a+b+c)^3 \quad (2)$$

Để ý rằng đẳng thức xảy ra khi  $a=b=\frac{3}{2}; c=0$  và các hoán vị nên nếu ta giữ nguyên bất đẳng thức như trên thì khó có thể biến đổi về dạng chuẩn của phương pháp SOS và SS. Chúng ta sẽ xuất hiện ý tưởng là cộng thêm một biểu thức không âm vào vế trái của bất đẳng thức (2) để có thêm điều kiện đẳng thức xảy ra tại tâm  $a=b=c=1$  nhưng vẫn phải bảo toàn điều kiện đẳng thức vẫn xảy ra tại  $a=b=\frac{3}{2}; c=0$ . Trong bài toán này chúng ta cộng thêm biểu thức không âm là  $kabc$ . Để xác định  $k$  ta cho  $a=b=c=1$  ta được  $k=3$ , từ đó ta giả sử  $c = \min(a, b, c)$  và chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây:

$$(a+b+c)^3 \geq 4[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] + 3abc \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ đúng (đpcm)}$$

**Bình luận:** Bước tinh tế nhất trong lời giải trên chính là ý tưởng chuyển từ bất đẳng thức (2) về bất đẳng thức (3). Công việc tưởng chừng làm cho bất đẳng thức chặt hơn này lại giúp tạo nên một đẳng thức nữa cho bất đẳng thức ban đầu, đẳng thức tại tâm. Chính điều này đã giúp ta có những cách đánh giá quen thuộc thông qua hai phương pháp SOS và SS. Từ đó việc tìm ra lời giải cũng tự nhiên và dễ dàng hơn. Chú ý rằng để lượng cộng thêm vào thường có dạng  $kabc \cdot f(a, b, c)$  để đảm bảo cho đẳng thức ban đầu của đề bài vẫn xảy ra (đẳng thức tại biên), trong đó  $f(a, b, c)$  được lựa chọn tùy vào bài toán, thường là để tiện cho việc biến đổi, ta đến với các bài toán tiếp theo.

**Bài 2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$  (1)

**Chứng minh**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)^2 \geq \frac{25}{4}$

Đẳng thức của ví dụ 2 xảy ra khi  $a=b=1, c=0$  và các hoán vị. Tương tự ví dụ 1 ta cộng thêm vào vế phải một lượng  $\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ . Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn:

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)^2 \geq \frac{25}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) + \frac{4(a+b+c)(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{25}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Chú ý rằng:  $\frac{(a+b+c)(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1 + \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:  $(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$

Đây là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc.

Ta sẽ chứng minh lại bằng phương pháp SS

Đặt  $x=a+b$ ;  $y=b+c$ ;  $z=c+a$ . Giả sử  $z = \max\{x, y, z\}$ , ta có  $x+y \geq z$

Bất đẳng thức trên  $\Leftrightarrow (2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9$

$$\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + \left[ (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - 9 \right] \geq 0$$

Ta có:  $2(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) =$

$$-2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) (x-y)^2 - 2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) (x-z)(y-z)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - 9 = \frac{2(x+y)^2}{x^2 y^2} (x-y)^2 + \frac{(x^2 + y^2)(x+z)(y+z)}{x^2 y^2 z^2} (x-z)(y-z)$$

$$\text{Đặt: } M = \frac{2(x+y)^2}{x^2y^2} - \frac{2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{x^2y^2z^2};$$

$$N = \frac{(x^2 + y^2)(x+z)(y+z)}{x^2y^2z^2} - \frac{2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{x^2y^2z^2}$$

Ta sẽ chứng minh  $M \geq 0, N \geq 0$ . Thật vậy ta có:

$$M \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 z^2 \geq (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \Leftrightarrow xyz^2 + xy(z^2 - xy) \geq 0$$

$$N \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x+z)(y+z) - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + z(x^2 + y^2)(x+y-z) \geq 0$$

Các bất đẳng thức trên đều đúng vì  $z = \max\{x, y, z\}$  và  $x + y \geq z$ .

**Bình luận:** Bản chất thực sự của bài toán trên chính là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc, tuy nhiên điều này đã được ẩn đi qua việc khuyết mất đại lượng

$\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$  trong bất đẳng thức (2). Câu hỏi đặt ra là việc tìm ra  $k = 4$  và

$f(a, b, c) = \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$  trong bài toán này liệu có phải là một điều may mắn, hay là một sự trùng hợp ngẫu nhiên. Câu trả lời là không, ta xét phép biến đổi sau:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)^2 \geq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{2}{(a+b)(b+c)} + \frac{2}{(b+c)(c+a)} + \frac{2}{(c+a)(a+b)} \right) \geq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) + \frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[ (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) - \frac{9}{4} \right] + 4 \left[ \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1 \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) - \frac{9}{4} \right] + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Biến đổi đến đây lượng  $\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$  đã hiện ra. Tuy nhiên không phải bài toán nào

cũng có thể dễ dàng tìm ra  $f(a, b, c)$ . Nhiều bài toán yêu cầu chúng ta phải dự đoán và dự đoán không phải bao giờ cũng chính xác. Để làm rõ điều đó, ta xét tiếp ví dụ sau:



**Bài 3.** Chứng minh:  $\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 \quad \forall a, b, c \geq 0$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn vẫn đúng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (1)$$

### Lời giải 1:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} [a(b+c)(a^2+b^2)(a^2+c^2)] \geq 2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^5(b+c) + 2 \sum_{\text{sym}} b^2c^2 + abc \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq 2 \sum_{\text{sym}} a^4(b^2+c^2) + 12a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta có:  $VT - VP = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$

Trong đó:  $M = 2(a^2 + b^2 + c^2)(a+b-c)c \geq 0$

$$N = (a^2 + b^2 + c^2)(a-b)^2 + (a^3 + b^3)c + (a+b)c^3 + 2c(a^2b + b^2c - a^2c - b^2c) \geq 0$$

### Lời giải 2:

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0. \text{ Với:}$$

$$S_a = \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} = \frac{bc(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

Tương tự ta có  $S_b, S_c \geq 0$ , bất đẳng thức được chứng minh

**Bình luận:** Sự lựa chọn  $f(a, b, c) = \frac{abc}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$  với chú ý dễ dàng hơn

cho việc biến đổi đã vô tình làm bất đẳng thức đúng. Tuy nhiên ta tự hỏi nếu thay  $f(a, b, c)$  bởi một lượng khác thì bất đẳng thức sau khi dự đoán liệu có còn chính xác.

Ta hãy thử với  $f(a, b, c) = \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ , ta cần chứng minh:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Đáng tiếc là bất đẳng thức trên không đúng. Phản ví dụ cho bất đẳng thức trên là

$a=b=1, c=\frac{6}{5}$ . Từ đây bạn có thể thấy rằng không phải sự lựa chọn nào cũng mang lại

hiệu quả mong muốn. Sự lựa chọn đôi khi đòi hỏi một chút may mắn, một chút tinh tế và cả một chút nhạy cảm của người làm bất đẳng thức.



**Bài 4.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $(a+b+c) \left( \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \right) \geq 4$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b+c) \left( \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \right) \geq 4 + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (1)$$

**Lời giải 1:**

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{a^2}{b^2+c^2} + \sum_{\text{sym}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 4 + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Trong bài toán 3 ta đã chứng minh được bất đẳng thức:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Công việc còn lại là chứng minh:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)^2 + c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2) \geq 0$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$  bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

**Lời giải 2:** Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \text{ trong đó}$$

$$S_a = \frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_b = \frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)} + \frac{ca-b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)} + \frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_c = \frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)} + \frac{ab-c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)} + \frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , ta chứng minh được  $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$ , áp dụng tiêu chuẩn 2 của phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}, \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

**Lời giải 1:** Bất đẳng thức tương đương với:

$$2 \sum_{\text{sym}} [(a^2+bc)(a^2+b^2)(a^2+c^2)] \geq (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{\text{sym}} a^6 + 2 \sum_{\text{sym}} b^3c^3 + 2abc \sum_{\text{sym}} a^3 + 2abc \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq 3 \sum_{\text{sym}} a^4(b^2+c^2) + 12a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ , ta có:  $VT - VP = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$ , trong đó

$$M = 2(a^4+b^4) + 4ab(a^2+b^2) + a^2b^2 + abc^2 + (a+b)c^3 + (2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) + 2c(a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c) \geq 0$$

$$N = c[(3ab + 2c^2)(a+b) + 4abc + 2c^3 + (a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c)] \geq 0. \text{ Suy ra đpcm}$$

**Lời giải 2:** Đưa bất đẳng thức về dạng SOS:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \text{ trong đó:}$$

$$S_a = \frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)} - \frac{1}{2(b^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_b = \frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)} - \frac{1}{2(c^2+a^2)} + \frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_c = \frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Giả sử  $a \geq b \geq c$  ta chứng minh được  $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$ , áp dụng tiêu chuẩn 2 trong phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

**Bài 6.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \frac{1}{32}$

### Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với:  $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \frac{1}{32}(a+b+c)^6$

Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:

$$(a+b+c)^6 \geq 32(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 473a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^6 \geq 32[a^4(b^2+c^2) + b^4(c^2+a^2) + c^4(a^2+b^2)] + 537a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$M = (a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0. \text{ Trong đó:}$$

$$M = (a+b)^4 + 10(a^3+b^3)c + 17(a+b)abc + 3(a+b)c^3 + 147abc^2 + 17c^4 + 21c(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c) \geq 0$$

$$N = 4(a-b)^4 + c[(a+b)(79ab+7c^2) + 57abc + c^3 + 17(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c)] \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

**Bài 7. Chứng minh:**  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}, \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) + 32a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ , ta có

$$VT - VP = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + 8ab^2c(a-b)^2 + 4abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

**Bài 8. Chứng minh rằng:**  $\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2 \quad \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} [a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)] \geq 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) + 8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^4(b^2+c^2) + 3abc \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq \sum_{\text{sym}} b^3c^3 + 2abc \sum_{\text{sym}} a^3 + 12a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow [(ac+bc-ab)^2 + c^2(4ab+c^2-2ac-2bc)](a-b)^2 + abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$  bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, ta có điều cần chứng minh.

**Bài 9. Chứng minh:**  $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{5} \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \quad \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{5} \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) + \frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \sum_{\text{sym}} \frac{a^2}{b^2+c^2} \geq \frac{12}{5} + \sum_{\text{sym}} \frac{a}{b+c} + \frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (*)$$

Ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức sau:

$$\frac{4}{5} \left( \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \right) \geq \frac{4}{5} \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \right) \geq \frac{1}{5} \cdot 2 \quad (2)$$

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (3)$$

Cộng vế (1), (2) và (3) suy ra (\*) đúng và bất đẳng thức được chứng minh.

**Bài 10.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $a^2b+b^2c+c^2a \leq 4$

### Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với  $a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ , ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$4(a+b+c)^3 \geq 27(a^2b+b^2c+c^2a) + 27abc$$

$$\Leftrightarrow (4a+4b+c)(a-b)^2 + (16b+4c-11a)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Chú ý rằng ta có đẳng thức sau với mọi số thực  $a, b, c$ :

$$P(a-c)(b-c)(a-b)^2 - P(a-b)^2(a-c)(b-c) = 0. \text{ Cho } P = -\frac{4(a+b)}{ab} \text{ ta nhận được:}$$

$$-\frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}(a-b)^2 + \frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab}(a-c)(b-c) = 0$$

Do đó bất đẳng thức có thể viết lại:  $M = (a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$ , trong đó:

$$M = 4a+4b+c - \frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab} = \frac{c(4a^2+4b^2+9ab-4ac-4bc)}{ab} \geq 0$$

$$N = 16b+4c-11a + \frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab} = \frac{(4a+b)(a-2b)^2+4abc}{ab} \geq 0$$

**Bài 11.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ . Chứng minh:  $(a^2b+b^2c+c^2a) + 2(ab^2+bc^2+ca^2) \leq 6\sqrt{3} \quad (1)$

### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leq 2\sqrt{3} \frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$9(a^2b + b^2c + c^2a) + 18(ab^2 + bc^2 + ca^2) + (54\sqrt{3} - 81)abc \leq 2\sqrt{3}(a+b+c)^3$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$  ta có:  $VP - VT = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$ . Với:

$$\begin{aligned} M &= 2\sqrt{3}(a+b) + (14\sqrt{3} - 27)c - \frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-c)(b-c)}{ab} \\ &= \frac{\sqrt{3}c(2a^2 + 2b^2 - 2ac - 2bc + (18 - 9\sqrt{3})ab)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= (8\sqrt{3} - 9)a + (8\sqrt{3} - 19)b + 2\sqrt{3}c + \frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-b)^2}{ab} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2a + (2 + \sqrt{3})b)(a + (1 - \sqrt{3})b)^2 + 2\sqrt{3}abc}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

**Bài 12.** Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không

$$\text{âm } a, b, c: k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + abc(a+b+c)$$

**Chứng minh**

Cho  $a=3, b=1, c=0$  suy ra  $k \geq \frac{27}{256}$ . Ta chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{27}{256}(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$27(a+b+c)^4 \geq 256(a^3b + b^3c + c^3a) + 473abc(a+b+c) \Leftrightarrow M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Với: } M = 27(a+b)^2 - 40ac - 40bc + 180c^2 - \frac{[27(a+b)^2 + 68(a+b)c](a-c)(b-c)}{ab}$$

$$N = 216ab - 148a^2 + 108b^2 - 121ac + 135bc + 27c^2 + \frac{[27(a+b)^2 + 68(a+b)c](a-b)^2}{ab}$$

$$\text{Ta có: } M.ab = c[27(a+b)(a-b)^2 + 189abc + 41c(a+b)^2 - 68c^2(a+b)] \geq 0$$

$$N.ab = (27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + c(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2) + 27abc^2$$

Nếu  $68a^2 + 68b^2 - 189a^2b + 67ab^2 \geq 0$  bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu  $68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2 \leq 0$

$$N.ab \geq (27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + b(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2)$$

Dùng đạo hàm kiểm tra được

$$(27a^2 + 14ab + 3b^2)(a - 3b)^2 + b(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Vậy ta có  $K_{\min} = \frac{27}{256}$ .

**Bài 13.** Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :  $k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$

**Giải**

Cho  $a=2, b=1, c=0$  suy ra  $k \geq \frac{4}{27}$ . Ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:  $4(a+b+c)^4 \geq 27(a^3b + b^3c + c^3a) + 27(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 54abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$ . Trong đó:

$$\begin{aligned} M &= 4(a^2 + b^2) + 13c^2 + 20ab - 7c(a+b) - \frac{(4a^2 + 4b^2 + 20ab + 7ac)(a-c)(b-c)}{ab} \\ &= \frac{c[(a+b)(4a^2 + 4b^2 + 13ab + 7ac) - 7a^2b - c(4a^2 + 4b^2 + 7ab + 7ac)]}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= 4b^2 + 4c^2 - 23a^2 - 7ac + 29ab + 20bc + \frac{(4a^2 + 4b^2 + 20ab + 7ac)(a-b)^2}{ab} \\ &= \frac{(a+b)(4a+b)(a-2b)^2 + ac[4bc + a^2 + 3b^2 + 3ab + 6(a-2b)^2]}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh, ta có  $k_{\min} = \frac{4}{27}$

### 3. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=2 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 1$

**Bài 2.** Chứng minh rằng:  $\frac{ab+ac+4bc}{b^2+c^2} + \frac{bc+ba+4ca}{c^2+a^2} + \frac{ca+cb+4ab}{a^2+b^2} \geq 4 \quad \forall a, b, c$

**Bài 3.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=2 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc \leq 1$

**Bài 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của  $F = \frac{a+kb}{c+kb} + \frac{b+kc}{a+kc} + \frac{c+ka}{b+ka}$  với  $a, b, c \geq 0, (k \geq 0)$

### § 23.10. CÁC TỔNG ĐỐI XỨNG VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

Trong chương II §7 khi tìm hiểu bất đẳng thức Schur chúng ta đã làm quen với việc sử dụng các phép biến đổi dựa trên các đa thức đối xứng Viète để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng ba biến. Trong chương IV, §18, phép dồn biến EMV và trong §22 phương pháp chia để trị DAC, phân phối hợp với phương pháp SOS, chúng ta đã nhận thấy một phép biến đổi rất có hiệu lực khi chứng minh các bất đẳng thức ba biến hoán vị, cụ thể đó là việc tách ra các đại lượng có dạng  $(a-b)(b-c)(a-c)$ . Trong bài viết này chúng kết hợp sức mạnh của hai phương pháp để tấn công triệt để các bất đẳng thức hoán vị.

#### I. ĐỊNH LÝ

Với mọi bộ ba số thực  $a, b, c$  ta ký hiệu  $p = a + b + c$ ;  $q = ab + bc + ca$ ;  $r = abc$ .

Khi đó có các đẳng thức sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = p^4 + 2q^2 + 4pr - 4p^2q$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr;$$

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = pq - 3r$$

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) = p^2q - 2q^2 - pr$$

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r$$

Biểu thức  $f(X) = AX^2 + BX + C$ : 
$$\begin{cases} A \geq 0 \\ X_{\min} = -\frac{B}{2A} \end{cases}$$

$$(+)\ f(X) \geq 0 \ \forall X \Leftrightarrow \Delta = B^2 - 4AC \leq 0$$

$$(+)\ f(X) \geq 0 \ \forall X \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_{\min} \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ C \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{\min} \geq 0 \\ f(X_{\min}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq 0 \\ \Delta = B^2 - 4AC \geq 0 \end{cases}$$

## II. ÁP DỤNG

Chúng ta đã biết phương pháp sử dụng các đại lượng  $p, q, r$  trong việc chứng minh các bất đẳng thức đối xứng, còn ở đây là những ứng dụng cho bất đẳng thức hoán vị vòng quanh, chú ý rằng có nhiều bài toán được dẫn ra là rất khó.

**Ví dụ 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Chứng minh  $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$  (\*)

## Chứng minh

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^2b \leq 8 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2b - \sum_{cyc} ab^2 \leq 8 - \sum_{cyc} a^2b - \sum_{cyc} ab^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq 8 - \sum_{sym} a^2(b+c)$$

Do đó chỉ cần chứng minh khi  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$ , bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} \leq 8 - \sum_{sym} a^2(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4q^3r)} \leq 8 - (pq - 3r)$$

$$\Leftrightarrow (p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4q^3r) \leq (8 - pq + 3r)^2$$

$$\Leftrightarrow 36r^2 + (4p^3 - 24pq + 48)r + 4q^3 - 16pq + 64 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 9r^2 + (p^3 - 6pq + 12)r + q^3 - 4pq + 16 \geq 0$$

$$\text{Với } p=3: f(r) = 9r^2 + (39 - 18q)r + q^3 - 12q + 16 \geq 0$$

Nhận thấy  $r_{\min} = \frac{-39 + 18q}{18}$ . Xét hai trường hợp

$$\text{Nếu } 0 \leq q \leq \frac{39}{18} \Rightarrow r_{\min} \leq 0 \text{ thì: } f(0) = q^3 - 12q + 16 = (q+4)(q-2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nếu } \frac{39}{18} \leq q \leq 3 \Rightarrow r_{\min} \geq 0, \text{ ta có } f(r_{\min}) = 24q^3 - 216q^2 + 648q - 630 \geq 0 \forall q \in \left[\frac{39}{18}; 3\right]$$

Suy ra  $f(r) \geq 0 \forall r \geq 0$  (đpcm).

**Ví dụ 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2a + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leq 6\sqrt{3}$$

## Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với



$$\begin{aligned} 2\sum_{cyc} a^2b + 4\sum_{cyc} ab^2 &\leq 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sum_{sym} a^2(b+c) + \sum_{cyc} ab^2 - \sum_{cyc} a^2b \leq 12\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 3\sum_{sym} a^2(b+c) + (a-b)(b-c)(c-a) \leq 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$ , nghĩa là

$$\begin{aligned} 3\sum_{sym} a^2(b+c) + \sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} &\leq 12\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 3(pq-3r) + \sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r} \leq 12\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r \leq (12\sqrt{3} - 3pq + 9r)^2 \\ &\Leftrightarrow f(r) = 108r^2 + (4p^3 - 72pq + 216\sqrt{3})r + 4q^3 + 8p^2q^2 - 72\sqrt{3}pq + 432 \geq 0 \end{aligned}$$

Tìm được  $r_{\min} = \frac{216q - 108 - 216\sqrt{3}}{108}$ , xét hai trường hợp:

Nếu  $0 \leq q \leq \frac{216\sqrt{3} + 108}{216} \Rightarrow r_{\min} \leq 0$  thì  $f(0) = 4(q + 12 + 6\sqrt{3})(q + 3 - \sqrt{3})^2 \geq 0$

Nếu  $\frac{216\sqrt{3} + 108}{216} \leq q \leq 3 \Rightarrow r_{\min} \geq 0$ , ta có

$$f(r_{\min}) = 4q^3 - 36q^2 + 108q + 81 - 108\sqrt{3} \geq 0 \forall q \in \left[ \sqrt{3 + \frac{1}{2}}; 3 \right]$$

Vì vậy  $f(r)$  không âm với mọi  $r \geq 0$  (đpcm).

**Ví dụ 3.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$$

### Chứng minh

Với  $a = 2, b = 1, c = 0$  ta suy ra  $k \geq \frac{4}{27}$ . Ta sẽ chứng minh rằng đây là giá trị cần tìm, nghĩa là bất đẳng thức đã cho đúng với  $k = \frac{4}{27}$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $p = 3$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{4}{27}(a+b+c)^4 &\geq \sum_{cyc} a^3b + \sum_{sym} b^2c^2 + abc \sum_{sym} a \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geq \left( \sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3 \right) + 2\sum_{sym} b^2c^2 + \left( \sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} ab^3 \right) + 2abc(a+b+c) \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geq \sum_{cyc} a^3(b+c) + 2\sum_{sym} b^2c^2 + (a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c) + 2abc(a+b+c) \end{aligned}$$

Ta chỉ cần xét một trường hợp, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geq p^2q - 2q^2 - pr + 2q^2 - 4pr + 2pr + \\ + p\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}.$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \leq \left(\frac{8}{27}p^4 - p^2q + 3pr\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 36p^2r^2 + \left(\frac{52}{9}p^5 - 24p^3q\right)r + \frac{64}{729}p^3 + 4p^2q^3 - \frac{16}{27}p^6q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \leq \left(\frac{8}{27}p^4 - p^2q + 3pr\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 36p^2r^2 + \left(\frac{52}{9}p^5 - 24p^3q\right)r + \frac{64}{729}p^3 + 4p^2q^3 - \frac{16}{27}p^6q \geq 0$$

Với  $p = 3$ :  $f(r) = 324r^2 + (1404 - 648)r + 36q^3 - 432q + 576 \geq 0$

Xét hai trường hợp

Nếu  $0 \leq q \leq \frac{13}{6} \Rightarrow 39 - 18q \geq 0$ , thì  $f(0) = 36(q+4)(q-2)^2 \geq 0$

Nếu  $\frac{13}{6} \leq q \leq 3$  suy ra.

$$\Delta = (39 - 18q)^2 - 4.9.(q^3 - 12q + 16) = -36q^3 + 324q^2 - 972q + 945 \leq 0 \quad \forall \quad q \in \left[\frac{13}{6}; 3\right]$$

Do đó  $f(r) \geq 0 \forall r \geq 0$  (đpcm).

**Ví dụ 4.** Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực  $a, b, c$ :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x) \quad (*)$$

#### Chứng minh

Nếu  $p = 0$  bất đẳng thức có thể viết lại là  $7(y^2 + z^2 + yz)^2 \geq 0$ , hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp  $p \neq 0$ , không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 3$ , ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\left(\sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3\right) + 3\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} ab^3\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\sum_{cyc} a^3(b+c) + 3(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)$$

Chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$ , bất đẳng thức tương đương với:

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\sum_{sym} a^3(b+c) + 3(a+b+c)\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(p^2 - 2q)^2 \geq 3(p^2q - 2q^2 - pr) + 3p\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}$$

$$\Leftrightarrow 9p^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \leq \left[ 2(p^2 - 2q)^2 - 3(p^2q - 2q^2 - pr) \right]^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) 252p^2r^2 + (84pq^2 - 228p^3q + 48p^5)r + 4p^8 - 44p^4q + 168p^4q^2 - 272p^2q^3 + 196q^4 \geq 0$$

$$\text{Với } p = 3: f(r) = 4(567r^2 + (63q^2 - 1539q + 2916)r + 49q^4 - 612q^3 + 3402q^2 - 8019q + 6561) \geq 0$$

Ta có:

$$\Delta' = (63q^2 - 1539q + 2916)^2 - 2268(49q^4 - 612q^3 + 3402q^2 - 8019q + 6561) = -2187(7q - 18)^2(q - 3)^2 \leq 0$$

Vì vậy  $f(r) \geq 0$  với mọi số thực  $r$  (đpcm)

**Ví dụ 5.** Xác định hằng số thực lớn nhất  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đây đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 3+k$$

**Giải**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \right) + 2k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 6 + 2k - \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{sym}} a^2(b+c)}{abc} + 2k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 6 + 2k + \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \end{aligned}$$

Chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \frac{pq-3r}{r} + \frac{2kq}{p^2-2q} \geq 6 + 2k + \frac{\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}}{r} \\ & (p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3q)(p^2 - 2q)^2 \\ & \leq \left[ (pq - 3r)(p^2 - 2q) + 2kqr - (6 + 2k)r(p^2 - 2q) \right]^2 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử rằng  $p = 3$ . Sau khi khai triển, viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0. \text{ Trong đó}$$

$$A = 81k^2 + 9k^2q^2 + 54kq^2 + 729k - 972q + 108q^2 + 2187 - 54k^2q - 405kq$$

$$B = 2187 - 108q^3 + 1080q^2 - 3159q - 18kq^3 - 243kq + 135kq^2$$

$$C = 4q^5 - 36q^4 + 81q^3$$

Để dàng chứng minh rằng  $A$  và  $C$  không âm. Xét hai trường hợp:

$$\text{Nếu } 0 \leq q \leq \frac{3(k+11-\sqrt{k^2+10k+49})}{2(k+6)} \Rightarrow B \geq 0 \Rightarrow f(r) \geq 0$$

$$\text{Nếu } \frac{3(k+11-\sqrt{k^2+10k+49})}{2(k+6)} \leq q \leq 3 \text{ thì } \Delta = B^2 - 4AC = -9(q-3)^2(2q-9)^2$$

$$(48q^3 + 24kq^3 + 4k^2q^3 - 144kq^2 - 468q^2 - 9k^2q^2 + 162kq + 1296q - 719)$$

Tìm được  $k_{\max} = 3\sqrt[3]{4} - 2$ , đây là giá trị cần tìm..

**Ví dụ 6.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + k(a+b+c) \geq 3(k+1) \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \quad (*)$$

**Chứng minh**

Ta có

$$2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} = \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2}{a} \right) + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2}{a} \right) = \frac{\sum_{\text{cyc}} a^3(b+c)}{abc} + \frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + 2k(a+b+c) \geq 6(k+1) \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{cyc}} a^3(b+c)}{abc} + 2k(a+b+c) - 6(k+1) \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\frac{p^2q - 2q^2 - pr}{r} + 2kp - 6(k+1) \frac{p^2 - 2q}{p} \geq \frac{p\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[ (p^2q - 2q^2 - pr)p + 2kp^2r - 6(k+1)r(p^2 - 2q) \right]^2$$

$$- p^4(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \geq 0$$

Tương tự, giả sử  $p = 3$ , sau khi khai triển ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 72kq^2 + 36k^2q^2 + 324k^2 - 378q + 1134k - 594kq - 216k^2q + 36q^2 + 1539$$

$$B = 2187 - 486kq + 270kq^2 - 36kq^3 - 1944q + 351q^2 - 36q^3$$

$$C = 9q^4$$

Nghiệm  $q_0$  của phương trình  $B = 0$  thỏa mãn  $q_0 \in [0, 3]$  là

$$q_0 = \frac{1}{4(1+k)} \left( \sqrt[3]{M} + \frac{28k^2 - 100k - 119}{\sqrt[3]{M}} + 10k + 13 \right)$$

$$\text{Với } \begin{cases} M = -1475 - 2382k - 960k^2 - 80k^3 + 36\sqrt{N} + 36k\sqrt{N} \\ N = -12k^4 + 324k^3 - 63k^2 + 2742k + 2979 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp:

Nếu  $0 \leq q \leq q_0$  thì  $B \geq 0$ , ta có thể chứng minh rằng  $A$  và  $C$  không âm, vì vậy  $f(f) \geq 0$

Nếu  $q_0 \leq q \leq 3$  thì

$$\Delta = B^2 - 4AC = -729(q-3)^2(16q^3 + 16k^2q^3 + 32kq^3 - 252kq^2 - 189q^2 - 36k^2q^2 + 324kq + 810q - 729)$$

Tìm được  $k_{\max} \approx 1,5855400068$ , đây là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 7.** Xác định hằng số thực lớn nhất  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq \frac{(9+3k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \right) + 2k &\geq \frac{6(3+k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{sym}} a^2(b+c)}{abc} + 2k - \frac{6(3+k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

Ta chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức trên ở dạng

$$\frac{pq-3r}{r} + 2k - \frac{6(3+k)(p^2-2q)}{p^2} \geq \frac{\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[ (pq-3r)p^2 + 2kp^2r - 6(3+k)(p^2-2q)r \right]^2 - (p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r)p^4 \geq 0$$

Giả sử rằng  $p = 3$ , sau khi khai triển ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 144k^2q^2 + 864kq^2 + 1296k^2 + 13608q + 13608k + 1296q^2 - 864k^2q - 7128kq + 37098$$

$$B = 162kq^2 - 486kq - 3645q + 486q^2 + 2187$$

$$C = 81q^3$$

Xét hai trường hợp:

Nếu  $0 \leq q \leq \frac{3(15+2k-\sqrt{153+36k+4k^2})}{4(3+k)}$  thì  $B$  không âm, tương tự ví dụ trước ta có thể chứng

minh rằng  $A \geq 0, C \geq 0$ , nhận được  $f(r) \geq 0$

Nếu  $\frac{3(15+2k-\sqrt{153+36k+4k^2})}{4(3+k)} \leq q \leq 3$  ta có  $\Delta = B^2 - 4AC = -729(q-3)^2$

$$(16k^2q^3 + 96kq^3 + 144q^3 - 36k^2q^2 - 972q^2 - 432kq^2 + 324kq + 1944q - 729)$$

Vì vậy tìm được  $k_{\max} = 3\sqrt[3]{2} - 3$ , đây là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 8.** Tìm giá trị lớn nhất của hằng số  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{k(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} - k + 3$$

**Giải**

Nhân cả hai vế bất đẳng thức với 2 ta có:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \right) &\geq \frac{2k(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} - 2k + 6 + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{sym}} a^2(b+c)}{abc} - \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + 2k - 6 &\geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

Chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$\begin{aligned} \frac{pq-3r}{r} - \frac{2k(p^2-2q)}{q} + 2k - 6 &= \frac{\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3r}}{r} \\ \Leftrightarrow f(r) &= [(pq-3r)q - 2kr(p^2-2q) + (2k-6)rq]^2 \\ &\quad - q^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3r) \geq 0 \end{aligned}$$

Giả sử  $p = 3$ , khai triển ta thu được  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 9k^2q^2 - 54k^2q + 81k^2 - 27kq^2 + 81kq + 27q^2$$

$$B = kq^3 - 27q^3 + 27q^2 - 27kq^2$$

$$C = q^5$$

Vì vậy tìm được  $k_{\max} = 1$ , đây là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 9.** Tìm tất cả các số thực  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực  $a, b, c$ :

$$a(a+kb)^3 + b(b+kc)^3 + c(c+ka)^3 \geq \frac{(k+1)^3}{27}(a+b+c)^4 \quad (*)$$

Giải

Nếu  $p = 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow -(b^2 + bc + c^2)^2 (k - 2)k^2 - k + 1 \geq 0$ .

Vì vậy điều kiện cần là  $k \leq 2$

Xét trường hợp  $p \neq 0$ , không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 3$ . Nhận thấy

$$\begin{aligned} 6k \sum_{cyc} a^3 b + 2k^3 \sum_{cyc} ab^3 &= 3k \left( \sum_{cyc} a^3 b + \sum_{cyc} ab^3 \right) + k^3 \left( \sum_{cyc} ab^3 + \sum_{cyc} a^3 b \right) + \\ &+ 3k \left( \sum_{cyc} a^3 b - \sum_{cyc} ab^3 \right) + k^3 \left( \sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^3 b \right) \end{aligned}$$

$$= (k^3 + 3k) \sum_{sym} a^3 (b + c) + k(k^2 - 3)(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\text{Vì vậy ta có } (*) \Leftrightarrow 2 \sum_{sym} a^4 + 6k \sum_{cyc} a^3 b + 2k^3 \sum_{cyc} ab^3 + 6k^2 \sum_{sym} b^2 c^2 \geq \frac{2(k+1)^3}{27} (a+b+c)^4$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2 \sum_{sym} a^4 + (k^3 + 3k) \sum_{sym} a^3 (b + c) + 6k^2 \sum_{sym} b^2 c^2 - \frac{2(k+1)^3}{27} (a+b+c)^4 \geq \\ \geq k(k^2 - 3)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

Chỉ cần xét trường hợp  $VP \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} &2(p^4 + 2q^2 + 4pr - 4p^2 q) + 3k(p^2 q - 2q^2 - pr) + k^3(p^2 q - 2q^2 - pr) + 6k^2(q^2 - 2pr) - \frac{2(k+1)^3 p^4}{27} \\ &\geq k(k^2 - 3)p\sqrt{p^2 q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3 r} \end{aligned}$$

Bình phương hai vế, thay  $p$  bởi 3, sau khi khai triển ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó:

$$A = 63k^6 + 54k^5 - 27k^4 + 126k^3 + 135k^2 - 108k + 144$$

$$B = 1872 - 918k + 99k^3 - 756k^2 + 27k^5 q^2 + 48q^2 -$$

$$-864q - 90kq^2 + 51k^3 q^2 + 27k^2 q^2 - 1080k^4 + 252k^6$$

$$+ 135k^5 + 648kq - 270k^3 q + 81kq^2 - 90k^4 q^2 + 648k^4 q + 3k^6 q^2 - 135k^6 q - 162k^5 q$$

$$C = 6084 - 1476kq^2 - 492k^3 q^2 + 486k^2 q^2 + 2754kq + 675k^3 q +$$

$$+ 405qk^2 + 225k^4 q^2 - 162k^4 q + 6k^6 q^2$$

$$- 27k^6 q - 81k^5 q - 1404k - 306k^3 - 1323k^2 + 135k^4 + 9k^6 + 54k^5 - 5616q + 1608q^2 + 27k^5 q^3$$

$$- 12q^4 k - 22q^4 k^3 + 21q^4 k^2 + 15k^4 q^4 + k^6 q^4 - 6k^5 q^4 - 216k^2 q^3 - 108k^4 q^3 + 270q^3 k + 171q^3 k^3 - 144q^3 + 4q^4$$

Để dàng chứng minh rằng  $A$  dương. Ta có:



$$\Delta = B^2 - 4AC = -81k^2(q-3)^2(k^2-3)^2 \left[ (3k^6 - 18k^5 + 45k^4 - 66k^3 + 63k^2 - 36k + 12)q^2 + \right. \\ \left. (28k^6 + 78k^5 - 17k^4 + 326k^3 - 372k^2 + 276k - 152)q - 84k^6 - 72k^5 + 274k^4 - 168k^3 + 792k^2 + 144k + 780 \right]$$

suy ra điều kiện đủ của  $k$  là

$$(16k^4 - 5k^3 + 30k^2 - 14k - 56) \leq 0 \Leftrightarrow -0.9377079399 \leq k \leq 1.233289162$$

**Ví dụ 10.** Xác định hằng số lớn nhất  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$ :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với:  $3kabc + \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) (ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 6kabc + \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) \left( \sum_{\text{cyc}} ab^2 + \sum_{\text{cyc}} a^2b \right) \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) \left( \sum_{\text{cyc}} a^2b - \sum_{\text{cyc}} ab^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) (a-b)(b-c)(c-a)$$

Xét trường hợp  $VP \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$6kr + \left( \frac{p^2 - 2q}{q} - 1 - k \right) (pq - 3r) \geq \left( \frac{p^2 - 2q}{q} - 1 - k \right) \sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = [6kqr + (p^2 - (k+3)q)(pq - 3r)]^2 -$$

$$(p^2 - (k+3)q)^2 (p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 1$ . Sau khi khai triển ta có  $f(x) = Ar^2 + Br + C$ . Trong đó

$$A = 108q^2k^2 + 324q^2k + 324q^2 - 108qk - 216q + 36$$

$$B = -36k^2q^3 - 180q^3k - 216q^3 + 4q^2k^2 + 84q^2k + 180q^2 - 8qk - 48q + 4$$

$$C = 4q^3(qk + 3q - 1)^2$$

$$\Delta = 16(3q - 1)^2(qk + 3q - 1)^2(12k^2q^3 + 36q^3k + 36q^3 - q^2k^2 - 24q^2k - 36q^2 + 2qk + 12q - 1)$$

Tìm được  $k_{\max} = k_o \approx 0.8493557485$ , đây là giá trị cần tìm.

+) Tương tự với bất đẳng thức: 
$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + k \frac{3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$



**Ví dụ 11.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + k \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 1$ . Tương tự với ví dụ trước, sau khi biến đổi ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$2 \frac{3(p^2 - 2q)}{p^2} + \frac{k(p^3q - 2q^2 - pr)}{q^2 - 2pr} - 2 - 2k \geq \frac{kp\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}}{q^2 - 2pr}$$

$$\Leftrightarrow 2(3 - 6q) + \frac{k(q - 2q^2 - r)}{q^2 - 2pr} - 2 - 2k \geq \frac{k\sqrt{q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r}}{q^2 - 2r}$$

$$\Leftrightarrow [2(3 - 6q)(q^2 - 2r) + k(q - 2q^2 - r) - 2(k + 1)(q^2 - 2r)]^2 \geq k^2(q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$$

Trong đó:

$$A = 144q^2 + 36qk - 96q + 9k^2 - 12k + 16$$

$$B = -144q^4 - 66q^3k + 96q^3 - 6q^2k^2 + 34q^2k - 16q^2 - 3qk^2 - 4qk + k^2$$

$$C = q^3(36q^3 + 24q^2k - 24q^2 + 4qk^2 + 2k - 14qk + 4q - k^2)$$

$$\text{Ta có: } \Delta = -k^2(3q - 1)^2(108q^4 + 72q^3k - 80q^3 + 16q^3 - 44q^2k + 12q^2k^2 + 8qk - k^2)$$

$$\text{Tìm được } k_{\max} = k_0 \approx 1.424183337$$

$$\text{+) Tương tự với bất đẳng thức: } \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + k \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^3b + b^3c + c^3a} \geq 1 + k$$

**Ví dụ 12.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ . Sau khi biến đổi, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$(1 - 3q)^2(q - 3r)^2 \geq [1 - (2k + 3)q]^2(q^2 + 8qr - 27r^2 - 4q^3 - 3p^3r)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0. \text{ Trong đó:}$$

$$A = 27q^2k^2 + 81q^2k + 81q^2 - 27qk - 54q + 9$$

$$B = -18q^3k^2 - 54q^3k - 54q^3 + 4q^2k^2 + 30q^2k + 45q^2 - 4qk - 12q + 1$$

$$C = q^3(4q^2k^2 + 12q^2k + 9q^2 - qk^2 - 7qk - 6q + k + 1)$$

Nhận thấy::

$$\Delta = -(3q-1)^2(3q-1+2qk)^2(12q^3k^2 + 36q^3k + 36q^3 - 4q^2k^2 - 24q^2k - 36q^2 + 4qk + 12q - 1)$$

$$\text{Tìm được } k_{\max} = k_0 = \frac{9\sqrt[3]{3}}{8} + \frac{3\sqrt[3]{9}}{8} + \frac{3}{8} \approx 2.777562200$$

+) Dưới đây là một số bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{ab^3 + bc^3 + ca^3} \geq 1 + k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{ab^4 + bc^4 + ca^4} \geq 1 + k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2}{a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3} \geq 1 + k$$

**Ví dụ 13.** Cho các số thực không âm  $a, b, c$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây

$$\text{đúng: } \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với:

$$k \sum_{\text{sym}} a^4(b+c) + \left[ \frac{3 \sum_{\text{sym}} a^2}{\left( \sum_{\text{sym}} \right)^2} - 1 - k \right] \sum_{\text{sym}} a^3(b^2 + c^2) \geq$$

$$\geq \left[ \left( \frac{3 \sum_{\text{sym}} a^2}{\left( \sum_{\text{sym}} \right)^2} - 1 - k \right) \sum_{\text{sym}} bc - k \left( \sum_{\text{sym}} a^2 + \sum_{\text{sym}} bc \right) \right] \prod_{a \neq b} (a-b)$$

Chỉ cần xét trường hợp  $VP \geq 0$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 1$ , viết lại bất đẳng thức:

$$\left[ k(q - 3q^3 + 5qr - r) + (2 - 6q - k)(q^2 - qr - 2r) \right]^2 \geq$$

$$\geq (2 - 6q^2 - k)^2 (q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$$

Trong đó:

$$A = 252q^4 + 18kq^3 - 132q^3 + 9k^2q^2 + 114q^2k + 40q^2 + 3qk^2 - 34qk - 20q + 7k^2 - 2k + 4$$

$$B = -180q^5 - 30kq^4 + 120q^4 - 12k^2q^3 - 68kq^3 - 20q^3 + k^2q^2 + 44q^2k - 4qk^2 - 6qk + k^2$$

$$C = q^3(36q^4 - 24q^3 + 24q^2k + 4q^2 + 4qk^2 - 14qk - k^2 + 2k)$$

Ta có:

$$\Delta = -(3q-1)^2(k-2q+6q^2)^2(112q^5 + 8kq^4 - 84q^4 + 4k^2q^3 + 60kq^3 + 16q^3 + 3k^2q^2 - 44q^2k + 2qk^2 + 8qk - k^2)$$

Tìm được  $k_{\max} = k_0 \approx 0.89985123$

+) Sau đây là một số bất đẳng thức cùng dạng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3} \geq 1 + k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3}{a^4b + b^4c + c^4a} \geq 1 + k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2}{a^4b + b^4c + c^4a} \geq 1 + k$$

**Chú ý.** Trong bốn ví dụ trước có thể thay  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$  bởi  $\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$  hoặc dạng như vậy để thu được những bất đẳng thức mới tương tự.

**Ví dụ 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$ , tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + k(ab + bc + ca) \geq k(k+1)(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ , tương tự với ví dụ trước ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 9q^2k^2 + 27q^2k + 27q^2 - 6qk^2 - 27q - 18qk + k^2 + 3k + 9$$

$$B = -9q^3k - 18q^3 + 6q^2k + 19q^2 - qk - 8q + 1; C = q^5$$

$$\text{Nhận thấy } \Delta = -3(3q-1)^2(q-1)^2(4q^3k^2 + 12q^3k + 12q^3 - q^2k^2 - 12q^2k - 16q^2 + 2qk + 8q - 1)$$

$$\text{Tìm được } k_{\max} = k_0 = \frac{\sqrt[3]{1828 + 372\sqrt{93}}}{6} - \frac{106}{3\sqrt[3]{1828 + 372\sqrt{93}}} + \frac{5}{3} \approx 2.581412182$$

**Ví dụ 15.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$3k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{ab + bc + ca} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ , tương tự ví dụ trước ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$  trong đó

$$A = 108k^2q^2 + 81q^2 - 108k^2q + 108kq - 54q + 63k^2 - 36k + 9$$

$$B = -108k^2q^3 - 18kq^3 - 54q^3 + 100k^2q^2 - 69kq^2 + 45q^2 - 57k^2q - 43kq + 112q + 9k^2 - 6k$$

$$C = q^2(4k^2q^3 - 12kq^3 + 9q^3 + 12k^2q^2 + 40kq^2 - 6q^2 - 3k^2q - 21kq + q + 3k)$$

$$\text{Ta có } \Delta = -(3q-1)^2(-3q+1+2kq-3k)^2 x$$

$$x(48k^2q^3 + 36q^3 - 52k^2q^2 + 48kq^2 - 36q^2 + 48k^2q - 28kq + 12q - 9k^2 + 6k - 1)$$

$$\text{Vì vậy } k_{\max} = k_0 \approx 7.698078389$$

$$+) \text{ Bất đẳng thức tương tự } 3k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{a^2b + b^2c + c^2a} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Ví dụ 16.** Tìm giá trị lớn nhất của hằng số  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$3k \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{ab + bc + ca} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ , tương tự ví dụ trên ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$ . Trong đó

$$A = 63k^2$$

$$B = 12k^2q^2 + 9kq^2 - 45kq^2 - 3kq + 9k^2$$

$$C = q^2(16k^2q^2 + 24kq^2 + 9q^2 - 3kq^2 - 17kq - 6q + 3k + 1)$$

$$\text{Nhận thấy: } \Delta = -27k^2(3q-1)^2(16k^2q^2 + 24kq^2 + 9q^2 + 12kq^2 + 2kq - 3k^2)$$

$$\text{Vì vậy } k_{\min} = k_0 \approx -0.3079785278$$

$$+) \text{ Bất đẳng thức tương tự: } 3k \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a + b + c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Ví dụ 17.** Chứng minh bất đẳng thức sau với  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq (3+k) \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^{\frac{2}{3}}$$

**Giải**

Giả sử  $q = 1$ , đặt  $t = \sqrt[3]{p^2 - 2}$ , tương tự ví dụ trước, viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0. \text{ Trong đó}$$

$$A = (k+3)^2t^4 - (2k^2 + 3k - 9)t^2 + (k^2 - 3k + 9)$$

$$B = \sqrt{t^3 + 2} [t^3 - (k+3)t^2 + k - 4]$$

$$C = 1$$

Ta có:  $\Delta = (t-1)^2(t^7 - 2t^6k - 4t^6 + t^5k^2 + 2t^5k + 2t^4k^2 + 8t^4k - 2t^4 + t^3k^2 + 12t^3k + 8t^3 - 2t^2k^2 + 4t^2k - 4tk^2 - 8tk - 8t - 2k^2 - 4k - 4)$

Vì vậy  $k_{\max} = k_0 \approx 0.3820494092$ . Bài toán được giải quyết xong

**Mở rộng 1:** Cho  $a, b, c > 0$ , xác định hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^k$$

**Giải**

Tương tự như trên, giả sử  $q = 1$ , đặt  $t = p^2 - 2$ , ta có:  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$ . Trong đó

$$A = 9(t^{2k} + t^k + 1)$$

$$B = \sqrt{t+2}(t - 3t^k - 4)$$

$$C = 1$$

**Mở rộng 2:** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương, tìm điều kiện cần và đủ của  $k$  và  $t$  sao cho bất đẳng thức

$$\text{sau đúng: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq (3+k) \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^t$$

**Ví dụ 18.** Xác định hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + k(a+b+c) \geq (3+3k) \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

**Giải**

Tương tự các ví dụ trước, giả sử  $p = 1$ , đặt  $t = \sqrt{3-6q}$ , viết lại bất đẳng thức

$$f(r) = Ar^2 + Br + C \geq 0. \text{ Trong đó}$$

$$A = 1296(t^2k^2 + 2t^2k + t^2 - 2k^2t - tk + t + k^2 - k + 7)$$

$$B = 4(18t^5k + 18t^5 - 18t^4k + 9t^4 - 54t^3k - 54t^3 + 54t^2k + 216t^2 - 405)$$

$$C = t^8 - 12t^6 + 54t^4 - 108t^2 + 81$$

Nhận thấy

$$\Delta' = 972(t-1)^2(8t^6t^2 + 16t^6k - t^6 + 60t^5k + 42t^5 - 60t^4k^2 - 60t^4k + 153t^4 - 288t^3k + 36t^3 + 144t^2k^2 - 279t^2 + 324tk - 270t - 108k^2 + 108k - 81)$$

Vì vậy ta tìm được  $k_{\max} = k_0 \approx 4.356328100$

$$\text{+) Bất đẳng thức tổng quát: } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + k(a+b+c) \geq (3+3k) \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^t$$

## III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

**Bài 1.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 3 + k$$

**Bài 2.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq \frac{3}{2} + k$$

**Bài 3.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq k \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \right)$$

**Bài 4.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{(k+1)^3}{8} (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a(a+kb)^3 + b(b+kc)^3 + c(c+ka)^3$$

**Bài 5.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3} (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{3} (a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \geq a(a+b^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3) \\ & \geq \frac{8}{27} (a+b+c)^4 + \frac{1}{125} (a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \end{aligned}$$

**Bài 6.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}} + k \frac{3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

+) Chú ý rằng bài toán này khác với ví dụ 10, có thể nhận ra trong các ví dụ 10, 11, 12, 13 khi thay

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \text{ bởi } \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)' \text{ hoặc } \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} \text{ ta thu được các bất đẳng thức mới, trong}$$

đó có những bất đẳng thức rất khó

**Bài 7:** Cho các số thực dương  $a, b, c$ , xác định điều kiện cần và đủ của  $k$  và  $t$  sao cho bất đẳng thức

$$\text{sau đúng } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq (3+k) \left( \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} \right)'$$

## § 24. NHỮNG BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

### § 24.1. CÁC BÀI TOÁN CÓ NHIỀU LỜI GIẢI

Trong mục này chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức đẹp và có nhiều lời giải. Với lưu ý việc khai thác, mở rộng, tìm tòi một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau là thói quen rất nên được thường xuyên rèn luyện.

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a > c > 0 \\ b > c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$  (1)

#### Chứng minh

• **Cách 1:** Bình phương hai vế ta có (1)  $\Leftrightarrow [\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}]^2 \leq (\sqrt{ab})^2$

$$\Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c(a-c)} \cdot \sqrt{c(b-c)} \leq ab \Leftrightarrow ab + 2c^2 - c(a+b) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 + (a-c)(b-c) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \geq 0 \Leftrightarrow [c - \sqrt{(a-c)(b-c)}]^2 \geq 0 \quad (2)$$

Do (2) đúng nên (1) đúng. Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$

• **Cách 2:** Đặt  $a = c(x+1)$ ;  $b = c(y+1)$  ( $x, y > 0$ ), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{c^2x} + \sqrt{c^2y} \leq c\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \leq xy + x + y + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq xy + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{xy} - 1)^2 \text{ đúng}$$

• **Cách 3:** (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq 1$ . Sử dụng **AM - GM** ta có

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a} + \frac{b}{b} \right) = 1$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} = 1 - \frac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{c}{b} + \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$

• **Cách 4:** Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \sqrt{a-c} \sqrt{c} + \sqrt{c} \sqrt{b-c} \leq$$

$$\leq \sqrt{[(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2][(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2]} = \sqrt{ab}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b-c}} \Leftrightarrow c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$

• **Cách 5:** Đặt 
$$\begin{cases} \vec{u} = (\sqrt{a-c}, \sqrt{c}) \\ \vec{v} = (\sqrt{c}, \sqrt{b-c}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{a-c+c} = \sqrt{a} \\ |\vec{v}| = \sqrt{c+b-c} = \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}| = \sqrt{ab}$$

• **Cách 6:** Đặt  $y = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \Rightarrow (y - \sqrt{c(a-c)})^2 = c(b-c)$

$$\Leftrightarrow [y^2 + c(a-b)]^2 = (2y\sqrt{c(a-c)})^2 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2c(a-b) + c^2(a-b)^2 = 4y^2ac - 4y^2c^2$$

$$\Leftrightarrow f(c) = [(a-b)^2 + 4y^2]c^2 - 2y^2(a+b)c + y^4 = 0$$

Ta có  $y$  thuộc tập giá trị của hàm số  $\Leftrightarrow f(c) = 0$  có nghiệm  $c$

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4y^4(ab - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq ab \Leftrightarrow y \leq \sqrt{ab} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Cách 7:** Phương pháp lượng giác

$$(1) \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq 1. \text{ Đặt } \begin{cases} c/a = \sin^2 x ; 0 < x < \pi/2 \\ c/b = \sin^2 y ; 0 < y < \pi/2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } T = \sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 y} + \sqrt{\sin^2 y \cdot \cos^2 x} = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x+y) \leq 1$$

• **Cách 8:** Phương pháp hình học

Xét tam giác ABC với độ dài các cạnh là

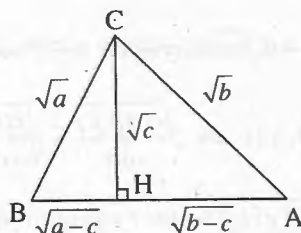
$$CB = \sqrt{a}, CA = \sqrt{b} \text{ và đường cao } CH = \sqrt{c}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{a-c}; AH = \sqrt{b-c}$$

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = 2S_{CBH} + 2S_{CAH} = 2S_{CAB}$$

$$= \sqrt{a} \sqrt{b} \sin C \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \angle BCA = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$



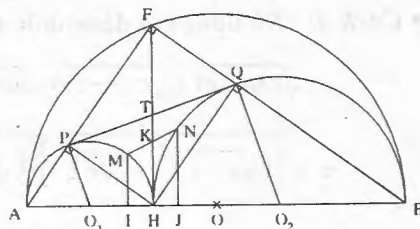
• **Cách 9:** Trên đoạn thẳng AB có độ dài  $a+b$

lấy điểm H sao cho  $HA = a$ ,  $HB = b$ . Trên các

đoạn thẳng HA, HB, lấy các điểm I, J sao cho  $HI$

$= HJ = c$ . Dựng các nửa đường tròn đường kính

AB, HA, HB với các tâm là O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>.





Dựng  $HF \perp AB$ ;  $IM \perp HA$ ;  $JN \perp HB$ . Khi đó dễ dàng ta có

$$IM = \sqrt{IA \cdot IH} = \sqrt{c(a-c)}; \quad JN = \sqrt{JH \cdot JB} = \sqrt{c(b-c)}; \quad HF = \sqrt{HA \cdot HB} = \sqrt{ab}$$

Nối  $MN$  cắt  $HF$  tại  $K$ . Nối  $FA$ ,  $FB$  cắt các nửa đường tròn đường kính  $HA$ ,  $HB$  lần lượt tại  $P$ ,  $Q$ . Ta có  $\angle AFH = \angle AFB = \angle HQB = 90^\circ$ . Từ đó suy ra  $FPHQ$  là hình chữ nhật.

Khi đó  $PQ$  và  $HF$  cắt nhau tại  $T$  là trung điểm của mỗi đường. Mặt khác, ta có  $\angle FPQ = \angle FHQ = \angle FBH = \angle BQO_2$ ,  $\angle FPQ = \angle PQH$

$\Rightarrow \angle PQH = \angle BQO_2 \Rightarrow \angle PQO_2 = 90^\circ \Rightarrow O_2Q \perp PQ$ . Tương tự,  $O_1P \perp PQ$ , suy ra  $PQ$  là tiếp tuyến chung ngoài của hai nửa đường tròn đường kính  $HA$ ,  $HB$ .

Từ đó suy ra trong hình thang  $MIJN$  với đường trung bình  $HK$ , ta có

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = IM + JN = 2HK \leq 2HT = HF = \sqrt{ab}$$

|                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Bài 2.</b> Cho <math>\begin{cases} a, b, c &gt; 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}</math>. Tìm giá trị nhỏ nhất <math>S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}</math></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Chứng minh

• **Cách 1:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}} \\ &\geq \sqrt{17 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}} = \sqrt{17} \left[ \sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}} \right] \\ &\geq \sqrt{17} \left[ 3 \cdot \sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}} \right] = 3\sqrt{17} \sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}} \\ &= \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \min S = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 2:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz**:

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a + \frac{4}{b}\right) \\ + &\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(b + \frac{4}{c}\right) \\ &\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(c + \frac{4}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left( a+b+c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left[ a+b+c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{15}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[ 6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{15}{4} \left( 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \right) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 3 + \frac{45}{4} \cdot 2 \right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \min S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

• **Cách 3: Bô đề: (Bất đẳng thức Minkowski)**

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2} \quad (1)$$

**Áp dụng:**

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\
&= \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 + \frac{15}{16} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\
&\geq \sqrt{2(a+b+c) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{15}{16} \left( 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right)^2} \\
&\geq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \frac{135}{16} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{abc})^2}} \geq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{135}{16} \cdot \frac{1}{\left( \frac{a+b+c}{3} \right)^2}} \\
&\geq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{135}{16} \cdot 4} = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{135}{4}} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \min S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

• **Cách 4: Đặt**  $\overline{u} = \left( a, \frac{1}{b} \right); \overline{v} = \left( b, \frac{1}{c} \right); \overline{w} = \left( c, \frac{1}{a} \right)$

Từ  $|\overline{u}| + |\overline{v}| + |\overline{w}| \geq |\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}|$  dẫn tới:

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\
&\geq \sqrt{(3 \cdot \sqrt[3]{abc})^2 + \left( 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right)^2} = 3 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \\
 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{(abc)^2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{4} + \frac{15}{16} \cdot 4} = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Với  $a=b=c=\frac{1}{2}$  thì  $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

• **Cách 5:**  $S^2 = \left( \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \right)^2 = a^2 + \frac{1}{b^2} + b^2 + \frac{1}{c^2} + c^2 + \frac{1}{a^2}$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)} + 2\sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} + 2\sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)} \\
 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + 2\left[\left(ab + \frac{1}{bc}\right) + \left(bc + \frac{1}{ca}\right) + \left(ca + \frac{1}{ab}\right)\right] \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{15}{16}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \\
 &\quad + 2\left[(ab + bc + ca) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{15}{16}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)\right] \\
 &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{1}{16a^2} \cdot \frac{1}{16b^2} \cdot \frac{1}{16c^2} + \frac{15}{16} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} + \\
 &\quad + 2\left[6 \cdot \sqrt[6]{ab \cdot bc \cdot ca} \cdot \frac{1}{16ab} \cdot \frac{1}{16bc} \cdot \frac{1}{16ca} + \frac{15}{16} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ca}}\right] \\
 &= 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + 2\left[6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\right] = 3\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}\right) \\
 &\geq 3\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{16} \cdot 4\right) = \frac{63}{4} \Rightarrow S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Với  $a=b=c=\frac{1}{2}$  thì  $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

• **Cách 6:** Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \\
 &= 3 \cdot \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]}
 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** mở rộng ta có:

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[6]{\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right] \left[\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right] \left[\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]} \geq 3 \cdot \sqrt{(abc)^{\frac{2}{3}} + (abc)^{-\frac{2}{3}}}$$

Đặt  $t = (abc)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 0 \leq t \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$ . Xét  $f(t) = t + \frac{1}{t}$  với  $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

Ta có:  $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} < 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t)$  giảm trên  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{4} \Rightarrow S \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

**Bài 3.** Cho  $\begin{cases} x, y, z \in [0, 1] \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases}$  Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $\cos(x^2 + y^2 + z^2)$

### Chứng minh

• **Cách 1:** Phương pháp hình học

Do  $x, y, z \in [0, 1]$  suy ra  $0 < x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$  và hàm số  $y = \cos \alpha$  giảm trên  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  nên thay vì tìm  $\text{Min} \cos(x^2 + y^2 + z^2)$  ta sẽ tìm  $\text{Max}(x^2 + y^2 + z^2)$ . Xác định hệ trục tọa độ Oxyz.

Tập hợp các điểm  $M(x, y, z)$  thỏa mãn điều kiện  $x, y, z \in [0, 1]$  chạy trên hình hộp cạnh 1 với các đỉnh:  $A(0, 1, 1)$ ;  $B(1, 1, 1)$ ;  $C(1, 0, 1)$ ;  $D(0, 0, 1)$ ;  $A'(0, 1, 0)$ ;  $B'(1, 1, 0)$ ;  $C'(1, 0, 0)$ ;  $O(0, 0, 0)$ . Tập hợp các điểm

$$M(x, y, z) \text{ thỏa mãn } x + y + z = \frac{3}{2}$$

$$\text{chạy trên mặt phẳng } (P): x + y + z = \frac{3}{2}$$

Vì vậy tập hợp các điểm  $M(x, y, z)$  thỏa mãn

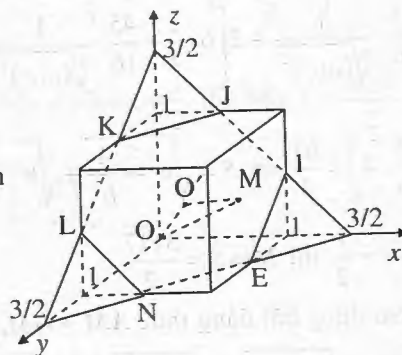
hai điều kiện đề bài là đa giác EIJKN

trong đó các điểm E, I, J, K, L, N

là trung điểm các cạnh hình lập phương.

Gọi  $O'$  là hình chiếu của O trên EIJKN. Ta có  $O'$  là vừa là tâm của hình lập phương vừa là tâm của lục giác đều EIJKN.

Mặt khác  $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$  vì vậy OM là cực đại khi và chỉ khi  $O'M$  là cực đại, hay khi và chỉ khi M trùng với I trong sáu đỉnh E, I, J, K, L, N.



Dẫn tới  $x^2 + y^2 + z^2 \leq OK^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos(x^2 + y^2 + z^2) \geq \cos \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \min \cos(x^2 + y^2 + z^2) = \cos \frac{5}{4}$ , đạt được khi  $(x, y, z)$  là hoán vị của  $(1, 0, \frac{1}{2})$ .

• **Cách 2:** Phương pháp tam thức bậc hai

Do  $x, y, z \in [0, 1]$  suy ra  $0 < x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$  và hàm số  $y = \cos \alpha$  giảm trên  $(0, \frac{\pi}{2})$  nên thay vì tìm  $\min \cos(x^2 + y^2 + z^2)$  ta sẽ tìm  $\max(x^2 + y^2 + z^2)$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $z = \max\{x, y, z\} \Rightarrow z \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Khi đó  $x + y = \frac{3}{2} - z$  và suy ra  $S = x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y)^2 + z^2 = (\frac{3}{2} - z)^2 + z^2 = \frac{9}{4} - 3z + 2z^2 = f(z)$

Đồ thị  $y = f(z)$  là parabol với hệ số tam thức  $a = 2 > 0$

Vì vậy  $\max_{z \in [\frac{1}{2}, 1]} f(z) = \max\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{5}{4}$ . Dẫn tới  $\max S = \frac{5}{4}$

Với  $(x, y, z)$  là hoán vị của  $(1, 0, \frac{1}{2})$  thì  $\min \cos(x^2 + y^2 + z^2) = \cos \frac{5}{4}$ .

**Bài 4.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $T = a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$  (1)

(IMO24 – France 1983)

### Chứng minh

• **Cách 1:** Cách giải đặc biệt biệt ngắn gọn

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a = \max(a, b, c)$  thì

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) = a(b + c - a)(b - c)^2 + b(a - b)(a - c)(a + b - c) \geq 0$$

• **Cách 2:** Cách giải của tác giả bài toán

$$T = \frac{1}{2}[(a - b)^2(b + c - a)(b - c + a) + (b - c)^2(c + a - b)(c - a + b) + (c - a)^2(a + b - c)(a - b + c)] \geq 0$$

• **Cách 3:** Sử dụng bất đẳng thức hoán vị

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c, \text{ dễ dàng chứng minh } \begin{cases} bc \leq ac \leq ab \\ a^2 + bc \geq b^2 + ac \geq c^2 + ab \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị với hai dãy trên ta có

$$bc(a^2 + bc) + ac(b^2 + ac) + ab(c^2 + ab) \leq bc(b^2 + ac) + ac(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

• **Cách 4:** (Cách của đội US)

Giả sử tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $\Delta ABC$

tiếp xúc với BC, CA, AB at M, N, P.

Đặt  $AN = AP = x > 0$ ,  $BP = BM = y > 0$ ,

$CM = CN = z > 0$ , thì

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y \text{ và}$$

bất đẳng thức trở thành  $xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x + y + z) \geq 0$

$$\Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z) \Leftrightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x + y + z$$

$$\text{Ta có: } (z + x + y) \left( \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \right) \geq (x + y + z)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x + y + z$$

• **Cách 5:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Ta có bất đẳng thức

$$a^2b(a-b) + a^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 \left(\frac{b}{c}\right) \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \left(\frac{b}{c} - 1\right) + \left(\frac{a}{c}\right) \left(1 - \frac{a}{c}\right) \geq 0$$

Đặt  $x = \frac{a}{c}$ ;  $y = \frac{b}{c} \Rightarrow x \geq y \geq 1$ . Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$x^3y - x^2y^2 + y^3 - y^2 + x - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = yx^3 - (y^2 + 1)x^2 + x + y^3 - y^2 \geq 0. \text{ Ta có } f'(x) = 3yx^2 - 2(y^2 + 1)x + 1$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2[3yx - (y^2 + 1)] \geq 2[3y^2 - (y^2 + 1)] = 2(y^2 - 1) \geq 0 \quad \forall y \geq 1$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ giảm trên } [y, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq f'(y) = y^3 - 2y + 1 = (y-1)(y^2 + y + 1) \geq 0$$

$$\text{Đến tới } f(x) \text{ giảm trên } [y, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(y) = y(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{q.e.d.})$$

• **Mở rộng 1:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  với độ dài ba cạnh là  $a, b, c$  và  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Khi đó: } a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0$$

**Chứng minh**

Sử dụng quy nạp: với  $n = 2$  ta có:  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$

Giả sử bất đẳng thức đúng tới  $n$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ .

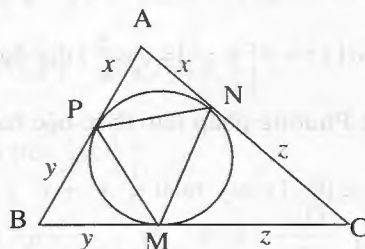
Theo giả thiết quy nạp:  $a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0$

$$\Rightarrow b^n c(b-c) \geq -a^n b(a-b) - c^n a(c-a) \Rightarrow b^{n+1} c(b-c) \geq -a^n b^2(a-b) - c^n ab(c-a)$$

$$\Rightarrow a^{n+1} b(a-b) + b^{n+1} c(b-c) + c^{n+1} a(c-a) \geq a^{n+1} b(a-b) - a^n b^2(a-b) - c^n ab(c-a) + c^{n+1} a(c-a)$$

$$= a^n b(a-b)^2 + c^n a(c-a)(c-b) \geq 0$$

Áp dụng nguyên lý quy nạp suy ra điều phải chứng minh.



• **Mở rộng 2:** Cho  $a, b, c > 0$  và  $\text{Min}(a, b, c) \geq \frac{1}{4} \text{Max}(a, b, c)$ . Chứng minh rằng:

$$T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

**Chứng minh**

$$T = (a-b)^2(ab+bc-ca) + (b-c)^2(bc+ca-ab) + (c-a)^2(ca+ab-bc)$$

**Trường hợp 1:** Nếu  $a \geq b \geq c$  thì ta có:

$$T = (a-b)^2(ab+bc-ca) + ca[(b-c)^2 + (c-a)^2] + b(a-c)[(a-c)^2 - (b-c)^2] \geq 0$$

**Trường hợp 2:** Nếu  $a \geq c \geq b$  thì ta có  $b = \text{Min}(a, b, c) \geq \frac{1}{4}a \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c}} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 1 \Rightarrow$

$\sqrt{bc} + \sqrt{ab} \geq \sqrt{ac} \Rightarrow \sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Đặt

$\sqrt{ab} = x + y; \sqrt{bc} = y + z; \sqrt{ca} = z + x$  ( $x, y, z > 0$ ). Ta có:

$$\begin{aligned} T &= (a-b)^2(ab+bc-ca) + (b-c)^2(bc+ca-ab) + (c-a)^2(ca+ab-bc) \\ &= (a-b)^2(y^2 + yx + yz - xz) + (b-c)^2(z^2 + zx + zy - xy) + (c-a)^2(x^2 + xy + xz - yz) \end{aligned}$$

Do  $a \geq c \geq b \Rightarrow x \geq z \geq y$ . Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$(a-c)^2 x^2 + (b-c)^2 z^2 \geq 2|(a-c)(b-c)|xz = 2(a-c)(c-b)xz \quad (1)$$

$$[(a-c)^2 + (b-c)^2 - (a-b)^2]xz = -2(a-c)(c-b)xz \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &(a-b)^2(y^2 + yx + yz) + (b-c)^2(zy - xy) + (c-a)^2(xy - yz) \\ &= y(a-b)[(2x+y)(a-c) + (2z+y)(c-b)] \geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được:  $T \geq 0$  (đpcm.)

• **Mở rộng 3:** Cho  $a, b, c > 0$  và  $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$  (1)

**Chứng minh**

**Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

$$1. A_1 + A_2 > 0 \vee A_2 + A_3 > 0 \vee A_3 + A_1 > 0$$

$$2. A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 \geq 0$$

Ta có bất đẳng thức  $A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$

**Áp dụng:**

$$T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3$$

$$T = abc \left[ \left( \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \right) - \left( \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \right]$$

Sử dụng công thức  $\frac{x^2}{y} = \frac{x^2 - (x-y)^2}{y} + \frac{(x-y)^2}{y} = 2x - y + \frac{(x-y)^2}{y}$ , ta có:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} = a + b + c + \frac{(a-b)^2}{a} + \frac{(b-c)^2}{b} + \frac{(c-a)^2}{c}$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{a^2(b^2 + c^2) + b^2(c^2 + a^2) + c^2(a^2 + b^2)}{2abc}$$

$$= a + b + c + \frac{1}{2} \left[ \frac{c(a-b)^2}{ab} + \frac{b(c-a)^2}{ca} + \frac{a(b-c)^2}{bc} \right]$$

$$T = abc \left[ \frac{(a-b)^2}{a} + \frac{(b-c)^2}{b} + \frac{(c-a)^2}{c} - \frac{1}{2} \left( \frac{c(a-b)^2}{ab} + \frac{a(b-c)^2}{bc} + \frac{b(c-a)^2}{ca} \right) \right]$$

$$T = (a-b)^2 \left( bc - \frac{c^2}{2} \right) + (b-c)^2 \left( ca - \frac{a^2}{2} \right) + (c-a)^2 \left( ab - \frac{b^2}{2} \right)$$

$$2T = (a-b)^2 (2bc - c^2) + (b-c)^2 (2ca - a^2) + (c-a)^2 (2ab - b^2)$$

$$2T = (a-b)^2 (ab + bc - ca) + (b-c)^2 (bc + ca - ab) + (c-a)^2 (ca + ab - bc)$$

$$\text{Đặt } A_1 = bc + ac - ab; A_2 = ac + ab - bc; A_3 = ab + bc - ca$$

$\Rightarrow A_1 + A_2 = 2ac > 0; A_2 + A_3 = 2ab > 0; A_3 + A_1 = 2bc > 0$ . Mặt khác, đặt  $u = bc; v = ca; w = ab \Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{bc}; \sqrt{v} = \sqrt{ca}; \sqrt{w} = \sqrt{ab}$ , khi đó

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 = (u + v - w)(v + w - u) + (v + w - u)(w + u - v) + (w + u - v)(u + v - w)$$

$$= u^2 - (v - w)^2 + v^2 - (w - u)^2 + w^2 - (u - v)^2 = 2(uv + vw + wu) - (u^2 + v^2 + w^2)$$

$$= 4uv - (u + v - w)^2 = (2\sqrt{uv} + u + v - w)(2\sqrt{uv} - u - v + w)$$

$$= (\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})(\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w})(\sqrt{v} + \sqrt{w} - \sqrt{u})(\sqrt{w} + \sqrt{u} - \sqrt{v}) > 0 \quad (3)$$

Vì  $\sqrt{u}, \sqrt{v}, \sqrt{w}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác, (3) đúng.

Sử dụng **Bổ đề** ta có (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng. (đpcm)

**Bài toán 5.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$

Chứng minh rằng:  $T = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$

(IMO41 - Korea 2000)

**Chứng minh**



• **Chứng minh 1:** Bô đề:  $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

**Áp dụng:**  $\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{b}+1-a\right) \leq a \cdot 1 \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$$\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)b\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+1-a\right)\frac{1}{a} \leq 1 \Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)(ab+b-1)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}-1\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow T = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

• **Chứng minh 2:** Giả sử giữa ba biểu thức  $\left(a-1+\frac{1}{b}\right); \left(b-1+\frac{1}{c}\right); \left(c-1+\frac{1}{a}\right)$  có một biểu thức không âm, chẳng hạn:  $a-1+\frac{1}{b} < 0 \Rightarrow a-1 < 0; \frac{1}{b} < 1$

$$\Rightarrow a < 1 \text{ và } b > 1 \Rightarrow b-1+\frac{1}{c} > 0 \text{ và } c-1+\frac{1}{a} = c+\frac{1-a}{a} > 0 \Rightarrow T < 0 < 1 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Giả sử  $\left(a-1+\frac{1}{b}\right) \geq 0; \left(b-1+\frac{1}{c}\right) \geq 0; \left(c-1+\frac{1}{a}\right) \geq 0$ . Thì,

$$\begin{aligned} & \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right) = b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{b}+a\right) = b\left[a^2 - \left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right] \leq ba^2 \\ & \times \left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{c}+b\right) = c\left[b^2 - \left(1-\frac{1}{c}\right)^2\right] \leq cb^2 \\ & \left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right) = a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}+c\right) = a\left[c^2 - \left(1-\frac{1}{a}\right)^2\right] \leq ac^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)^2 \left(b-1+\frac{1}{c}\right)^2 \left(c-1+\frac{1}{a}\right)^2 \leq a^3 b^3 c^3 \Leftrightarrow T = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

• **Chứng minh 4:** Vì  $abc = 1$  nên trong ba số  $a, b, c$  phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq 1 \geq b$ . Ta có

$$1 - \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}-2\right) + \frac{(a-1)(1-b)}{a} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 5:** Viết lại bất đẳng thức dưới dạng đồng bậc

$$\left(a - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}{b}\right) \left(b - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}{c}\right) \left(c - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}{a}\right) \leq abc$$

Đặt  $a = x^3; b = y^3; c = z^3$ , bất đẳng thức trở thành

$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3}\right) \left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3}\right) \left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \leq (xyz)^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 y - y^2 z + z^2 x)(y^2 z - z^2 x + x^2 y)(z^2 x - x^2 y + y^2 z) \leq (xyz)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x^2y)^3 + 3(x^2y)(y^2z)(z^2x) \geq \sum_{cyc} (x^2y)(y^2z)(x^2y + y^2z) \quad (1)$$

Lại đặt  $m = x^2y$ ;  $n = y^2z$ ;  $p = z^2x$  thì bất đẳng thức (1) có dạng

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ , đúng theo bất đẳng thức **Schur** (đpcm)

• **Chứng minh 6:** Sử dụng giả thiết  $abc = 1$  ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left( a - 1 + \frac{1}{b} \right) + c \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right) &= 2 & ; \frac{1}{b} \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right) + a \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right) &= 2 \\ ; \frac{1}{c} \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right) + b \left( a - 1 + \frac{1}{b} \right) &= 2 \end{aligned}$$

Đặt  $x = \left( a - 1 + \frac{1}{b} \right)$ ;  $y = \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right)$ ;  $z = \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right)$ , ta chỉ cần xét  $x, y, z \geq 0$ . Theo **AM**

- **GM** ta có  $2 = \frac{1}{a}x + cy \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}xy} \Rightarrow xy \leq \frac{a}{c}$ . Chứng minh tương tự  $yz \leq \frac{b}{a}$  và  $zx \leq \frac{c}{b}$ .

Vậy  $(xyz)^2 \leq \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = 1 \Rightarrow xyz \leq 1$  (đpcm)

• **Chứng minh 7:** Đặt  $a = \frac{x}{y}$ ,  $b = \frac{y}{z}$ ,  $c = \frac{z}{x}$  với  $x, y, z > 0$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\left( \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - 1 \right) \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 1 \right) \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - 1 \right) \leq 1 \Leftrightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau với trường hợp không tầm thường  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad (1)$$

• **Chứng minh 7a:** Ba nhân tử ở vế trái của (1) đều lớn hơn hay bằng 0,

sử dụng **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+c-b)(b+a-c)} &\leq \frac{(a+c-b) + (b+a-c)}{2} = a \\ \times \sqrt{(b+a-c)(c+b-a)} &\leq \frac{(b+a-c) + (c+b-a)}{2} = b \\ \sqrt{(a+c-b)(c+b-a)} &\leq \frac{(a+c-b) + (c+b-a)}{2} = c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

• **Chứng minh 7b:** Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tồn tại các số  $m, n, p > 0$  thỏa mãn  $a = m + n, b = n + p, c = p + m$ . Khi đó bất đẳng thức trở thành  $(m + n)(n + p)(p + m) \geq 8mnp$ . Ta có

$$(m + n)(n + p)(p + m) - 8mnp = m(n - p)^2 + n(p - m)^2 + p(m - n)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 7c:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ , khi đó viết bất đẳng thức (1) dưới dạng sau  $a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0 \quad (2)$$

Do bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

• **Chứng minh 7d:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Nếu hai trong ba số  $a, b, c$  bằng nhau thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng. Xét trường hợp  $a > b > c$ , khi

đó bất đẳng thức (2) tương đương với  $\frac{a}{b - c} - \frac{b}{a - c} + \frac{c}{a - b} \geq 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì  $\frac{c}{a - b} > 0$  và  $\begin{cases} a > b > 0 \\ a - c > b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b - c} > \frac{b}{a - c}$ .

• **Chứng minh 7e:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \leq b \leq c$ . Đặt  $b = a + x; c = a + y$  thì  $x, y \geq 0$ . Bất đẳng thức (2) trở thành  $(x^2 - xy + y^2)a + (x - y)^2(x + y) \geq 0$  luôn đúng (đpcm).

• **Chứng minh 7f:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$  và đặt

$$f(a, b, c) = a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b)$$

$$\text{Ta có } f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = (a - b)^2 \left(a + b - \frac{5c}{4}\right) \geq 0$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = c \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 7g:** Biến đổi bất đẳng thức (1) về dạng

$$3abc \geq a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}. \text{ Giả sử } BC = a, CA = b, AB = c \text{ thì bất đẳng thức này trở thành } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}, \text{ luôn đúng với mọi tam giác } ABC.$$

• **Mở rộng 1:** Cho  $a, b, c, t > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$T = \left(a - t + \frac{1}{b}\right) \left(b - t + \frac{1}{c}\right) \left(c - t + \frac{1}{a}\right) \leq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) (1 - t^2) + 4 - 3t.$$

• **Mở rộng 2:** Cho  $a, b, c$  là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\geq 3$$

**Bài toán 6.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc} \quad (1)$$

(Hungarian Mathematical Olympiad 2003)

### Chứng minh

• **Chứng minh 1:**  $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} - \frac{1}{1+abc} + \frac{1}{b(1+c)} - \frac{1}{1+abc} + \frac{1}{c(1+a)} - \frac{1}{1+abc} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a(bc-1)-(ab-1)}{a(b+1)(abc+1)} + \frac{b(ca-1)-(bc-1)}{b(c+1)(abc+1)} + \frac{c(ab-1)-(ca-1)}{c(a+1)(abc+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab-1)\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a(b+1)}\right) + (bc-1)\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{b(c+1)}\right) + (ca-1)\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{c(a+1)}\right)}{abc+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab-1)^2}{a(a+1)(b+1)(abc+1)} + \frac{(bc-1)^2}{b(b+1)(c+1)(abc+1)} + \frac{(ca-1)^2}{c(c+1)(a+1)(abc+1)} \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c>0$ .

• **Chứng minh 2:** Ta có:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \cdot \frac{(1+abc)+a(1+b)}{a(1+b)} = \frac{1}{1+abc} \cdot \frac{ab(1+c)+(1+a)}{a(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} \frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+a}{a(1+b)} \right] \\ \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+b}{b(1+c)} \right] \\ \frac{1}{c(1+a)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{a(1+b)}{1+a} + \frac{1+c}{c(1+a)} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right] + \frac{3}{1+abc} =$$

$$= \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{a(1+b)}{1+a} + \frac{1+c}{c(1+a)} \right]$$

$$\geq \frac{1}{1+abc} \left[ 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{b(1+c)}{1+b} \cdot \frac{1+a}{a(1+b)} \cdot \frac{c(1+a)}{1+c} \cdot \frac{1+b}{b(1+c)} \cdot \frac{a(1+b)}{1+a} \cdot \frac{1+c}{c(1+a)}} \right] = \frac{6}{1+abc}$$

Dẫn tới (1) đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c>0$ .

• **Chứng minh 3:**

**Bổ đề:** Nếu  $\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_2 \leq b_2 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1 \leq b_1 \\ a_2 \geq b_2 \end{cases}$  thì  $a_1b_2 + b_1a_2 \geq a_1a_2 + b_1b_2$ .

**Chứng minh:**  $0 \leq (a_1 - b_1)(b_2 - a_2) = (a_1b_2 + b_1a_2) - (a_1a_2 + b_1b_2) \Rightarrow a_1b_2 + b_1a_2 \geq a_1a_2 + b_1b_2$

Áp dụng: (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} + \frac{abc}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{abc}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{abc}{c(1+a)} \geq 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} + \frac{ab}{1+a} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{bc}{1+b} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{ca}{1+c} \geq 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} + b \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+c} + c \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+a} + a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geq 6$

Sử dụng bổ đề ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} + b \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} \geq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + b \cdot \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+a} + \frac{b}{1+b} \\ + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+c} + c \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} \geq \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + c \cdot \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+b} + \frac{c}{1+c} \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+a} + a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geq \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} + a \cdot \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+c} + \frac{a}{1+a} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} + b \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+c} + c \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+a} + a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geq 6 \Rightarrow (\text{dpcm.})$

• Chứng minh 4:

• Mở rộng : Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

Bài toán 7. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$  Chứng minh rằng:  $0 \leq ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

(IMO25 – Czech 1984)

Chứng minh

• Chứng minh 1: Giả thiết dẫn tới  $a, b, c \in [0, 1] \Rightarrow abc \in [0, 1]$ , suy ra

$$ab+bc+ca-2abc \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} - 2abc = 3(abc)^{\frac{2}{3}} - 2abc \geq 3abc - 2abc = abc \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c)$  là hoán vị của  $(0, 0, 1)$ .

Bổ đề:  $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad \forall a, b, c \geq 0$

Áp dụng: Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow (1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq abc$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - 8abc \leq abc$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc \leq \frac{1}{4}(1+abc) \leq \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3 \right] = \frac{7}{27}$$

• Chứng minh 2: Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức  $ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow 0 < c \leq \frac{1}{3}$

Biến đổi và thế:  $S = ab(1-2c) + c(a+b) = ab(1-2c) + c(1-c)$

$$\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (1-2c) + c(1-c) = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 (1-2c) + c(1-c) = -\frac{1}{2}c^3 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4} = f(c)$$

Ta có:  $f'(c) = -\frac{c}{2}(3c-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=\frac{1}{3} \end{cases}$

|         |   |                |
|---------|---|----------------|
| $c$     | 0 | $\frac{1}{3}$  |
| $f'(c)$ |   | +              |
| $f(c)$  | 1 | $\frac{7}{27}$ |

Bảng biến thiên chỉ ra  $S \leq \text{Max } f(c) = \frac{7}{27}$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

• **Chứng minh 3:**  $a(b+c) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)u = f(u)$

với  $0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$ . Để ý rằng, đồ thị hàm số  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng

với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$ . Ta có  $f(0) = a(1-a) \leq \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$

$$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) = \frac{1}{4}(-2a^3 + a^2 + 1) = \frac{7}{27} - \frac{1}{4}\left(2a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{7}{27}.$$

Vậy  $f(u) \leq \frac{7}{27}$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$ .

**Bài toán 8.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5} \quad (1)$$

(The Japanese's proposal – PSFJIMO38 – Argentina 1997)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:** Đặt  $m = a+b+c$ ;  $a_1 = \frac{a}{m}$ ;  $b_1 = \frac{b}{m}$ ;  $c_1 = \frac{c}{m} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b_1 + c_1 - a_1)^2}{(b_1 + c_1)^2 + a_1^2} + \frac{(c_1 + a_1 - b_1)^2}{(c_1 + a_1)^2 + b_1^2} + \frac{(a_1 + b_1 - c_1)^2}{(a_1 + b_1)^2 + c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{(1-2a_1)^2}{(1-a_1)^2 + a_1^2} + \frac{(1-2b_1)^2}{(1-b_1)^2 + b_1^2} + \frac{(1-2c_1)^2}{(1-c_1)^2 + c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

Ta sẽ chứng minh:  $f(x) = \frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2 + x^2} \geq \frac{23-54x}{25}, \forall x \in (0, 1)$

$$\Leftrightarrow 25(1-2x)^2 \geq (23-54x)[x^2 + (1-x)^2] \Leftrightarrow 2(3x-1)^2(6x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow T = f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) \geq \frac{23 \times 3 - 54(a_1 + b_1 + c_1)}{25} = \frac{3}{5}$$

• **Chứng minh 2:**  $(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{2ab+2ac}{a^2+b^2+c^2+2bc} \leq \frac{12}{5}$

Ký hiệu  $s = a^2 + b^2 + c^2$ , và biến đổi:

$$5s^2 \sum_{\text{sym}} ab + 10s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 20 \sum_{\text{sym}} a^3 b^2 c \leq 6s^3 + 6s^2 \sum_{\text{sym}} ab + 12s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 48a^2 b^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow 6s^3 + s^2 \sum_{\text{sym}} ab + 2s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 8 \sum_{\text{sym}} a^2 b^2 c^2 \geq 10s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 20 \sum_{\text{sym}} a^3 b^2 c$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} (3a^6 + 2a^5 b - 2a^4 b^2 + 3a^4 bc + 2a^3 b^3 - 12a^3 b^2 c + 4a^2 b^2 c^2) \geq 0 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Shur*, nhân cả hai vế với  $4abc$

$$\Rightarrow \sum_{\text{sym}} (4a^4 bc - 8a^3 b^2 c + 4a^2 b^2 c^2) \geq 0$$

$$\text{Suy ra } (3) \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} (3a^6 + 2a^5 b - 2a^4 b^2 - a^4 bc + 2a^3 b^3 - 4a^3 b^2 c) \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM*, ta có bất đẳng thức sau và (3) được chứng minh xong.

$$2 \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{2a^6 + b^6}{3} - a^4 b^2 \right] \geq 0 ; \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{4a^6 + b^6 + c^6}{6} - a^4 bc \right] \geq 0$$

$$2 \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{2a^3 b^3 + c^3 a^3}{3} - a^3 b^2 c \right] \geq 0 ; 2 \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{2a^5 b + a^5 c + ab^5 + ac^5}{6} - a^3 b^2 c \right] \geq 0$$

• **Chứng minh 3:**

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , đặt  $f(a, b, c) = \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2}$

**Bước 1:** Ta sẽ chứng minh  $f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

$$T_1 = \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} \geq \frac{2c^2}{\left(c + \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = T_2$$

Đặt  $A = b + c - a$ ;  $B = c + a - b$ ;  $x = (b + c)^2 + a^2$ ;  $y = (c + a)^2 + b^2$

$$x + y = (b + c)^2 + a^2 + (c + a)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ca + cb)$$

$$Ay - Bx = (b + c - a)[(c + a)^2 + b^2] - (c + a - b)[(b + c)^2 + a^2]$$

$$= [(a+b+c) - 2a][a^2 + b^2 + c^2 + 2ac] - [(a+b+c) - 2b][a^2 + b^2 + c^2 + 2bc]$$

$$= 2(b-a)(a^2 + b^2 + c^2) + 4c(b^2 - a^2) = 2(b-a)(a^2 + b^2 + c^2 + 4ca + 4cb)$$

$$= 2(b-a)[(a^2 + b^2 + c^2 + ca + cb) + 3ca + 3cb] = (b-a)(x+y+6ca+6cb)$$

$$\Rightarrow T_1 - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y} - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{(Ay-Bx)^2}{xy(x+y)} = \frac{(b-a)^2 [x+y+6c(a+b)]^2}{xy(x+y)}$$

$$\text{Đặt } z = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x+y-2[(c+z)^2 + z^2] = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ac + bc) - 2(c^2 + 2z^2 + 2cz)$$

$$= 2(a^2 + b^2 + ac + bc) - (a+b)^2 - 2c(a+b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$\Rightarrow T_2 - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{2c^2}{(c+z)^2 + z^2} - \frac{4c^2}{x+y} = \frac{2c^2 [(x+y) - 2(c+z)^2 - 2z^2]}{[(c+z)^2 + z^2](x+y)} = \frac{2c^2 (a-b)^2}{[(c+z)^2 + z^2](x+y)}$$

$$T_1 \geq T_2 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2 [x+y+6c(a+b)]^2}{xy(x+y)} \geq \frac{2c^2 (a-b)^2}{[(c+z)^2 + z^2](x+y)} \quad (2)$$

$$\text{Nếu } a = b \text{ thì (2) đúng. Nếu } a \neq b \text{ thì (2) } \Leftrightarrow \frac{[x+y+6c(a+b)]^2}{xy} \geq \frac{2c^2}{(c+z)^2 + z^2}$$

$$\text{Ta có } \frac{[x+y+6c(a+b)]^2}{xy} > \frac{(x+y)^2}{xy} \geq \frac{(2\sqrt{xy})^2}{xy} = 4 > 2 = \frac{2c^2}{c^2} > \frac{2c^2}{(c+z)^2 + z^2}$$

**Bước 2:** Ta sẽ chứng minh  $f(a, a, c) \geq \frac{3}{5}$ . Đặt  $u = \frac{a}{c} \geq 1$ , thì

$$f(a, a, c) \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow f(u, u, 1) \geq \frac{3}{5} \quad \forall u \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(2u-1)^2}{4u^2+1} + \frac{2}{(u+1)^2+u^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2u^2+2u+1} - \frac{4u}{4u^2+1} \geq \frac{-2}{5} \Leftrightarrow \frac{2u}{4u^2+1} - \frac{1}{2u^2+2u+1} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(4u^3 + 4u^2 + 2u - 4u^2 - 1) \leq 8u^4 + 8u^3 + 6u^2 + 2u + 1 \Leftrightarrow (u-1)^2 [2(u+1)^2 + 2u^2 + 1] \geq 0$$

• **Chứng minh 4:**

**Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

$$1. A_1 + A_2 \geq 0; A_2 + A_3 \geq 0; A_3 + A_1 \geq 0.$$

$$2. \text{ Nếu } a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \text{ hay } a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq a_{i_3} \text{ thì } A_{i_2} \geq 0 \text{ với } (i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$$

$$\text{Ta có bất đẳng thức } A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$



Áp dụng: (1)  $\Leftrightarrow \frac{2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{2b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{12}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{27}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(b+c)^2+a^2} + \frac{1}{(c+a)^2+b^2} + \frac{1}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2} \quad (2)$$

Đặt  $x = (b+c)^2 + a^2$ ,  $y = (c+a)^2 + b^2$ ,  $z = (a+b)^2 + c^2$  và  $s = a+b+c$

Thì (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{s^2}$

Chú ý rằng:  $x+y+z = a^2+b^2+c^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2$

$$= \frac{5}{3}(a+b+c)^2 + \frac{2}{3}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2] = \frac{5}{3}s^2 + \frac{2}{3}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2] \geq \frac{5}{3}s^2 \quad (3)$$

Dẫn tới  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$  ;  $\frac{27}{5} \cdot \frac{1}{s^2} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Vì vậy, (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{9}{x+y+z} \leq 9 \left( \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{x+y+z} \right)$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 9 \leq 9 \left( \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y+z}{s^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) \leq \frac{18}{5} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} \leq \frac{18}{5} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{s^2} \quad (4)$$

Ta có:  $x-y = (b+c)^2 + a^2 - (c+a)^2 - b^2 = 2c(b-a)$  và

$$xy = [(b+c)^2 + a^2][(c+a)^2 + b^2] \geq c^2(c^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2ca + 2cb + 4ab) = c^2[(a+b+c)^2 + (a+b)^2]$$

Do đó,  $\frac{(x-y)^2}{xy} \leq \frac{4c^2(a-b)^2}{c^2[(a+b+c)^2 + (a+b)^2]} = \frac{4(a-b)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b)^2}$

Tương tự, ta có thể chứng minh:

$$\frac{(y-z)^2}{yz} \leq \frac{4(b-c)^2}{(a+b+c)^2 + (b+c)^2} \quad \text{và} \quad \frac{(z-x)^2}{zx} \leq \frac{4(c-a)^2}{(a+b+c)^2 + (c+a)^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức tương tự ta có:

$$\frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} \leq 4 \left[ \frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(a+b+c)^2 + (b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(a+b+c)^2 + (c+a)^2} \right]$$

Vì vậy (4) đúng nếu ta chứng minh được

$$(a-b)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b)^2} \right] + (b-c)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (b+c)^2} \right] + (c-a)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (c+a)^2} \right] \geq 0 \quad (5)$$

Đặt  $X = \frac{b+c}{a+b+c}$ ;  $Y = \frac{c+a}{a+b+c}$ ;  $Z = \frac{a+b}{a+b+c}$  thì

$$(5) \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Z^2} \right] + (b-c)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{1}{1+X^2} \right] + (c-a)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Y^2} \right] \geq 0$$

Ký hiệu  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ ,  $a_3 = c$  và

$$A_1 = \frac{9}{10} - \frac{1}{1+X^2}; A_2 = \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Y^2}; A_3 = \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Z^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Thì ta có  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$  and  $X \leq Y \leq Z$ . Vì vậy

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3. \text{ Cần chứng minh } A_1 + A_2 \geq 0, \frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{9}{5} \quad (6)$$

Thật vậy, từ  $Y = \frac{c+a}{a+b+c} \geq \frac{c+a}{2a+c} \geq \frac{1}{2}$  thì  $\frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{4}{5}$

Mặt khác,  $\frac{1}{1+X^2} \leq 1$  đúng, bởi vậy (6) đúng. Dẫn tới  $A_1 + A_2 \geq 0$ ;  $A_2 + A_3 \geq 0$ ;

$A_3 + A_1 \geq 0$ , cùng với  $A_2 > 0$ , áp dụng bổ đề, (1) đúng.

**Ghi chú:** (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{1}{(a+b)^2 + c^2} \leq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2}$

Từ đánh giá tốt hơn  $\frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{8}{5}$ , ta cũng có một bất đẳng thức chặt hơn

• **Chứng minh 5:**

**Bổ đề:**  $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$

**Áp dụng:** Đặt  $x = \frac{b+c}{a}$ ;  $y = \frac{c+a}{b}$ ;  $z = \frac{a+b}{c} \Rightarrow x+y+z \geq 6\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} = 6$ ;

Ta sẽ chứng minh:  $xy + yz + zx \geq 2(x+y+z) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c)(c+a)}{ab} \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+3abc}{abc} \geq 2 \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \text{ (đúng theo bổ đề)}$$

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{(y-1)^2}{y^2+1} + \frac{(z-1)^2}{z^2+1} \\ &\geq \frac{[(x-1)+(y-1)+(z-1)]^2}{(x^2+1)+(y^2+1)+(z^2+1)} = \frac{(x+y+z-3)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3} \end{aligned}$$

Ta chứng minh:  $\frac{(x+y+z-3)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(x+y+z-3)^2 \geq 3(x^2+y^2+z^2)+9$

$$\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2 - 30(x+y+z) + 45 \geq 3(x^2+y^2+z^2) + 9$$

$$\Leftrightarrow T = (x+y+z)^2 - 15(x+y+z) + 3(xy+yz+zx) + 18 \geq 0$$

Ta có:  $T \geq (x+y+z)^2 - 15(x+y+z) + 6(x+y+z) + 18$

$$= (x+y+z)^2 - 9(x+y+z) + 18 = [(x+y+z) - 3][(x+y+z) - 6] \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

• **Chứng minh 6:**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b+c)a}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a)b}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b)c}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Chuẩn hóa  $a+b+c=1$ , khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{6}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$2a(1-a) \leq \frac{(1+a)^2}{4} \Leftrightarrow 2a^2-2a+1 \geq 1 - \frac{(1+a)^2}{4} = \frac{(1-a)(a+3)}{4}$$

Suy ra:  $\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} \leq \frac{4(1-a)a}{(1-a)(a+3)} = \frac{4a}{a+3}$

Tương tự:  $\frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} \leq \frac{4b}{b+3}$ ;  $\frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{4c}{c+3}$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên suy ra ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4a}{a+3} + \frac{4b}{b+3} + \frac{4c}{c+3} \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{10}$$

Theo  $AM - GM$   $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{(a+b+c)+9} = \frac{9}{10}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c>0$ .

• **Chứng minh 7:** Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} + \frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2} + \frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{2a^2-6a+9} \leq \frac{3}{5}$$

Nhận xét rằng  $\frac{1}{2x^2-6x+9} \leq \frac{1}{5} - \frac{2}{25}(x-1) \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)^2 \geq 0$ , luôn đúng  $\forall x \geq 0$ .

Suy ra  $\frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2b^2-6b+9} + \frac{1}{2c^2-6c+9} \leq \frac{3}{5} - \frac{2}{25}(a+b+c-3) = \frac{3}{5}$ . (đpcm)

**Mở rộng:** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{[\alpha(b+c)-a]^2}{\alpha(b+c)^2+a^2} + \frac{[\alpha(c+a)-b]^2}{\alpha(c+a)^2+b^2} + \frac{[\alpha(a+b)-c]^2}{\alpha(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3(2\alpha-1)^2}{4\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha \in \left[ \frac{3\sqrt{37}-23}{28}, \frac{3\sqrt{37}+23}{28} \right]$$

**Bài toán 9.** Chứng minh:  $(xy+yz+zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}, \forall x, y, z \geq 0$  (1)

(Iranian Mathematical Olympiad 1996)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1: Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

1.  $A_1 + A_2 \geq 0; A_2 + A_3 \geq 0; A_3 + A_1 \geq 0$ .

2. Nếu  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3}$  hay  $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq a_{i_3}$  thì  $A_{i_2} \geq 0$  với  $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$

Ta có bất đẳng thức  $A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$

**Áp dụng:** (1)  $\Leftrightarrow \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + \left[ \frac{xy}{(x+y)^2} + \frac{yz}{(y+z)^2} + \frac{zx}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} \right) \geq \left[ \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{yz}{(y+z)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{zx}{(z+x)^2} \right]$$

Ta có:  $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} = \frac{(y-z)^2}{2(x+y)(x+z)} + \frac{(z-x)^2}{2(y+z)(y+x)} + \frac{(x-y)^2}{2(z+x)(z+y)}$

$$\text{và } \left[ \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{yz}{(y+z)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{zx}{(z+x)^2} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} + \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(z+x)^2} \right]$$

Vì vậy, (1) sẽ đúng nếu ta chứng minh được:

$$2 \left[ \frac{(y-z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{(z-x)^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{(x-y)^2}{(z+x)(z+y)} \right] \leq \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} + \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(z+x)^2}$$

$$\text{hay } (y-z)^2 \left[ \frac{2}{(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(y+z)^2} \right] + (z-x)^2 \left[ \frac{2}{(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(z+x)^2} \right] + \\ + (x-y)^2 \left[ \frac{2}{(z+x)(z+y)} - \frac{1}{(x+y)^2} \right] \geq 0. \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (xy - xz)^2 \left[ \frac{2}{x^2(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(xy+xz)^2} \right] + (yz - yx)^2 \left[ \frac{2}{y^2(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(yz+yx)^2} \right] + \\ + (zx - zy)^2 \left[ \frac{2}{z^2(z+x)(z+y)} - \frac{1}{(zx+zy)^2} \right] \geq 0$$

$$\text{Đặt } a_1 = yz, a_2 = zx, a_3 = xy \text{ và } A_1 = \frac{2}{x^2(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(xy+xz)^2};$$

$$A_2 = \frac{2}{y^2(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(yz+yx)^2}; A_3 = \frac{2}{z^2(z+x)(z+y)} - \frac{1}{(zx+zy)^2}$$

$$\text{Xác định } A_1 + A_2 = \frac{2}{x+y} \left[ \frac{1}{x^2(x+z)} + \frac{1}{y^2(y+z)} \right] - \left[ \frac{1}{(xy+xz)^2} + \frac{1}{(yz+yx)^2} \right] \quad (3)$$

$$\text{Với } \frac{2}{x^2(x+z)} + \frac{2}{y^2(y+z)} = \frac{2x^2(x+z) + 2y^2(y+z)}{x^2y^2(x+z)(y+z)} = \frac{2(x^3 + y^3) + 2(x^2 + y^2)z}{x^2y^2(x+z)(y+z)}$$

Sử dụng bất đẳng thức  $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$  và  $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$  ta có:

$$\frac{2}{x^2(x+z)} + \frac{2}{y^2(y+z)} \geq \frac{2xy(x+y) + (x+y)^2 z}{x^2y^2(x+z)(y+z)} = \frac{(x+y)[2xy + (x+y)z]}{x^2y^2(x+z)(y+z)}$$

$$\text{Kết hợp với (3) dẫn tới } A_1 + A_2 \geq \frac{2xy + (x+y)z}{x^2y^2(x+z)(y+z)} - \left[ \frac{1}{(xy+xz)^2} + \frac{1}{(yz+yx)^2} \right]$$

$$= \frac{(xy+xz) + (xy+yz)}{x^2y^2(x+z)(y+z)} - \left[ \frac{1}{(xy+xz)^2} + \frac{1}{(yz+yx)^2} \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{xy^2(x+z)} + \frac{1}{yx^2(y+z)} \right] - \left[ \frac{1}{x^2(y+z)^2} + \frac{1}{y^2(z+x)^2} \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{xy^2(x+z)} - \frac{1}{y^2(z+x)^2} \right] + \left[ \frac{1}{yx^2(y+z)} - \frac{1}{x^2(y+z)^2} \right] = \frac{z}{xy^2(x+z)^2} + \frac{z}{yx^2(y+z)^2} > 0$$

Tương tự ta có thể chứng minh  $A_2 + A_3 > 0$  và  $A_3 + A_1 > 0$ .

Bây giờ giả sử  $x \geq y \geq z \geq 0$  thì  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ .

$$\text{Đặt } A_2 = \frac{1}{y^2} \left[ \frac{2}{(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(z+x)^2} \right] = \frac{2(z+x)^2 - (y+z)(y+x)}{y^2(y+z)(y+x)(z+x)^2}$$

Từ  $x \geq y \geq 0$  suy ra  $2(z+x)^2 - (y+z)(y+x) \geq 2(z+x)^2 - (x+z)(x+x) = 2(x+z)z > 0$

Dẫn tới  $A_2 > 0$ . Sử dụng **Bổ đề** ta có đpcm.

### • Chứng minh 2:

**Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

Nếu  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$  thì  $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0$  và  $a_2^2 A_3 + a_3^2 A_2 \geq 0$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

**Áp dụng:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} y+z=2a \\ z+x=2b \\ x+y=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+b+c \\ y=a-b+c \\ z=a+b-c \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}$$

Do  $z \geq y \geq x > 0$  nên  $a \geq b \geq c > 0$ . Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2) \left( \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } A_1 = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2}, A_2 = \frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2}, A_3 = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow A_1(b-c)^2 + A_2(c-a)^2 + A_3(a-b)^2 \geq 0$$

Do  $a \geq b \geq c > 0$  và  $b+c > a$  nên  $A_1 \geq 0$  và  $A_2 \geq 0$

Ta chứng minh  $b^2 A_3 + c^2 A_2 \geq 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 \geq abc$ .

Mà  $b+c > a$  nên ta chỉ cần chứng minh  $b^3 + c^3 \geq (b+c)bc \Leftrightarrow (b-c)^2(b+c) \geq 0$  (đúng)

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z$  hoặc  $x=y, z=0$  hoặc các hoán vị tương ứng.

• **Chứng minh 3:** **Bổ đề** (bất đẳng thức *Schur*)

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0, \quad \forall x, y, z, r > 0$$

**Áp dụng:** Biến đổi bất đẳng thức thành:

$$\sum_{\text{sym}} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức *Schur* với  $r = 1$  ta có:

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức với  $2xyz$  và khai triển chúng theo các tổng đối xứng ta có:

$$\sum_{\text{sym}} (x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0 \quad (2)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* dẫn tới:

$$\begin{cases} x^5y + y^5z + z^5x \geq x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \\ x^5y + y^5z + z^5x \geq x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{\text{sym}} [(x^5y - x^4y^2) + 3(x^5y - x^3y^3)] \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Cộng (2) với (3) dẫn tới: } \sum_{\text{sym}} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$$

**Chú ý:** đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc  $x = y = z > 0$  hoặc  $x = y > 0, z = 0$ ,

hoặc  $y = z > 0, x = 0$ ; hoặc  $z = x > 0, y = 0$

• **Chứng minh 4:** (Chứng minh của Marcin E. Kuczma, Warszawa, Poland)

Không mất tính tổng quát, giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ .

$$\text{Đặt } S = (xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right]$$

$$A = (2x + 2y - z)(x - z)(y - z) + z(x + y)^2$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot z(x + y - 2z)(11x + 11y + 2z)$$

$$C = (x + y)(x + z)(y + z)$$

$$D = (x + y + z)(x + y - 2z) + x(y - z) + y(x - z) + (x - y)^2$$

$$E = \frac{1}{4} \cdot z(x + y)(x + y + 2z)^2(x + y - 2z)^2$$

$$\text{Ta có: } C^2(4S - 9) = (x - y)^2 \left[ (x + y)(A + B + C) + \frac{1}{2}(x + z)(y + z)D \right] + E$$

$$\Rightarrow C^2(4S-9) \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{9}{4}$$

• **Chứng minh 5:** (Vedula N.Murty, Andhra University, Visakhapatnam, India)

Đặt  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Không mất tính tổng quát giả sử  $0 < a \leq b \leq c$ ; với điều kiện  $a + b > c$  suy ra:

$2a^2 - bc < 0 < 2b^2 - ca \leq 2c^2 - ab$ . Biến đổi bất đẳng thức

$$(1) \Leftrightarrow bc(b-c)^2(2a^2-bc) + ca(c-a)^2(2b^2-ca) \geq 0 \quad (2)$$

+ Nếu  $b = c$  thì  $(1) \Leftrightarrow ca(c-a)^2(2b^2-ca) \geq 0$  luôn đúng

+ Nếu  $b < c$  thì  $c - b > 0$ . Ta có:  $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 > c(a+b)$

$$\Rightarrow 2b^2 - ca > bc - 2a^2 > 0 \Rightarrow \frac{bc - 2a^2}{2b^2 - ca} < 1 \Rightarrow \frac{bc}{ac} \cdot \frac{bc - 2a^2}{2b^2 - ca} < \frac{bc}{ac}$$

$$\text{Vì } \frac{c-a}{c-b} \geq 1 \text{ suy ra } \frac{(c-a)^2}{(c-b)^2} \geq \frac{c-a}{c-b} \geq \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{(c-a)^2}{(c-b)^2} \geq \frac{bc}{ac} > \frac{bc}{ac} \left( \frac{bc - 2a^2}{2b^2 - ca} \right)$$

$$\Rightarrow bc(b-c)^2(2a^2-bc) + ca(c-a)^2(2b^2-ca) > 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$  hoặc  $x = y, z = 0$  hoặc các hoán vị.

• **Chứng minh 6: Bước 1:** Chứng minh các công thức:

$$1. (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) = 4Rr + r^2; \quad p^2 = \sum bc - 4Rr - r^2$$

$$2. \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(\sum bc)^2 - 16Rr p^2}{16p^2 R^2 r^2}$$

**Thật vậy:** Sử dụng định lý Viète cho phương trình:

$$1. p-a, p-b, p-c \text{ là ba nghiệm của: } x^3 - px^2 + (4R+r)x - pr^2 = 0$$

$$\Rightarrow (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) = 4Rr + r^2 \Rightarrow p^2 = \sum bc - 4Rr - r^2$$

$$2. \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ là ba nghiệm của: } 4pRrx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 2px - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) =$$

$$= \left( \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr} \right)^2 - 2 \cdot \frac{2p}{4pRr} = \frac{(\sum bc)^2 - 16Rr p^2}{16p^2 R^2 r^2}$$



Bước 2: Chứng minh:  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  (\*)

• **Bổ đề:**  $x'(x-y)(x-z) + y'(y-z)(y-x) + z'(z-x)(z-y) \geq 0 \quad \forall x, y, z > 0 \quad r > 0$

**Chứng minh (\*):** Đặt  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$

$$(*) \Leftrightarrow \left( \frac{x+y+z}{2} \right)^2 \geq 16 \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{xyz(x+y+z)}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} - 5 \cdot \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{4} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} - \frac{5xyz}{4(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 + 5xyz \geq 4(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều.

• **Áp dụng:** Đặt  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow a, b, c$  là độ dài ba cạnh tam giác.

$$(1) \Leftrightarrow [(p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b)] \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (4Rr+r^2) \frac{(\sum bc)^2 - 16Rrp^2}{16p^2R^2r^2} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow (4Rr+r^2) \cdot [(\sum bc)^2 - 16Rrp^2] \geq 36p^2R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow (4Rr+r^2) \cdot [(\sum bc)^2 - 16Rr(\sum bc - 4Rr - r^2)] \geq 36(\sum bc - 4Rr - r^2)R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow (4R+r) \cdot \left[ \left( \frac{\sum bc}{r} \right)^2 - 4R(25R+r) \frac{\sum bc}{r} + 4R(4R+r)(25R+4r) \right] \geq 0 \quad (2)$$

Đặt  $t = \frac{ab+bc+ca}{r} = \frac{\sum bc}{r}$ . Từ Bổ đề 1, 2 dẫn tới:  $t \geq 20R - 4r$ . Ta có::

$$(2) \Leftrightarrow f(t) = (4R+r)t^2 - 4R(25R+r)t + 4R(4R+r)(25R+4r) \geq 0$$

$$f'(t) = 2(4R+r)t - 4R(25R+r) > 0 \quad \forall t \geq 20R - 4r$$

$\Rightarrow$  hàm  $f(x)$  giảm trên  $[20R - 4r, +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(20R - 4r) = 4r(R - 2r)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

• **Mở rộng 1:** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\text{Min}(x, y, z) \geq \frac{1}{4} \text{Max}(a, b, c)$ . Chứng minh:

$$(xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z} + \sum_{\text{cyc}} \left[ \frac{xy}{(x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z} - \frac{3}{2} \geq \frac{5}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} = \frac{(x+y)(x-y)^2 + (y+z)(y-z)^2 + (z+x)(z-x)^2}{2(y+z)(z+x)(x+y)} \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{2(y+z)(z+x)} \geq \frac{5}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 \left( \frac{8}{(y+z)(z+x)} - \frac{5}{(x+y)^2} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 \left( 8(x+y) - 10z - \frac{5(z-y)(z-x)}{x+y} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 (8x+8y-10z) \right] - \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 \frac{5(z-y)(z-x)}{x+y} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T = \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 (8x+8y-10z) \right] - \frac{5(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z \Rightarrow z \geq \frac{1}{4}x$ .

$$\text{Đặt } \frac{T}{2} = (3z+4u+8v)u^2 + (3z-5u-v)v^2 + (3z+4u-v)(u+v)^2 - \frac{5u^2v^2(u+v)^2}{2(2z+u+2v)(2z+v)(2z+u+v)}$$

Từ  $x = z + u + v \leq 4z \Rightarrow u + v \leq 3z$ . Dẫn tới:

$$\frac{T}{2} \geq (5u+9v)u^2 + (-4u)v^2 + 5u(u+v)^2 - \frac{5u^2v^2(u+v)^2}{(0+u+2v)(0+v)(0+u+v)}$$

$$= 10u^3 + 19u^2v + uv^2 - \frac{5u^2v(u+v)}{u+2v} = \frac{10u^4 + 34u^3v + 34u^2v^2 + 2uv^3}{u+2v} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

• **Mở rộng 2:** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\text{Min}(x, y, z) \geq \alpha \text{Max}(a, b, c)$ ;  $\alpha \in [0, 1]$ .

$$\text{Chứng minh: } (xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4} + \frac{\alpha}{4} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

• **Mở rộng 3:** Cho  $x, y, z > 0$  và  $xy + yz + zx \geq \text{Max}\{x^2, y^2, z^2\}$ . Chứng minh:

$$(xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)(y+z)} + \frac{1}{(y+z)(z+x)} + \frac{1}{(z+x)(x+y)} \right] \leq \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$$

## §24.2. VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC THI TOÁN QUỐC TẾ

Chúng ta tiếp tục phân tích một bài toán thi Olympic có nhiều cách giải, đây là một bài toán rất đặc biệt, nó có thể phát biểu theo cả hai cách hình học và đại số. Hơn nữa chính nhờ những cách phát biểu khác nhau đó mà nó có những mở rộng và lời giải hết sức đẹp đẽ.

**Bài toán.** Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là  $a, b, c$  và có diện tích là  $S$ .

Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  (1)

(IMO 3 – Hungary 1961, Weitzenbock's inequality)

**Chứng minh**

• **Lời giải 1:**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$(1) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3 \times 16S^2 = 3[2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]$$

$$\Leftrightarrow 4[(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] = 2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] \geq 0$$

• **Lời giải 2:** 
$$\begin{cases} \sin C = \frac{2S}{ab} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \Rightarrow \frac{4S^2}{a^2b^2} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4a^2b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

Từ  $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$  suy ra  $16S^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 48S^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 3:**  $\sqrt{3} \sin C + \cos C = 2 \sin(C + 30^\circ) \leq 2$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \left( \frac{2S}{ab} \right) + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq 2 \Rightarrow c^2 - a^2 - b^2 + 4ab \geq 4\sqrt{3}S$$

Tương tự ta có:  $b^2 - c^2 - a^2 + 4ca \geq 4\sqrt{3}S$ ;  $a^2 - b^2 - c^2 + 4bc \geq 4\sqrt{3}S$

$$\Rightarrow 4(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 12\sqrt{3}S$$

Mặt khác  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 12\sqrt{3}S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

• **Lời giải 4:** (1) tương đương với  $a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \geq 2\sqrt{3}ab \sin C$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab(\cos C + \sqrt{3} \sin C) + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - (\cos C + \sqrt{3} \sin C)\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \geq 0$$

Ta có  $\Delta = (\cos C + \sqrt{3} \sin C)^2 - 4 \leq (1+3)(\cos^2 C + \sin^2 C) - 4 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$

• **Lời giải 5:**  $a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) - 2\sqrt{3}ab \sin C$   
 $= 2(a-b)^2 + 4ab \left[ 1 - \cos \left( C + \frac{\pi}{3} \right) \right] \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

• **Lời giải 6:**  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$   
 $\leq p \cdot \frac{(p-a)+(p-b)}{2} \cdot \frac{(p-b)+(p-c)}{2} \cdot \frac{(p-c)+(p-a)}{2} = \frac{p}{8} abc \leq \frac{p}{8} \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3$   
 $= \frac{(a+b+c)^4}{16 \times 27} \leq \frac{[(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)]^2}{16 \times 27} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{16 \times 3} \Rightarrow (\text{đpcm})$

• **Lời giải 7:**  $4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq 4\sqrt{3}p\sqrt{\left[ \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \right]^3}$   
 $= \frac{4p^2}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq \frac{(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{3} = a^2 + b^2 + c^2$

• **Lời giải 8:** Đặt  $a = y + z; b = z + x; c = x + y$  với  $x, y, z > 0$  khi đó

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \left[ (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 \right]^2 \geq 16(yz + zx + xy)^2 \geq$$

$$16.3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + xy \cdot yz) = 48xyz(x+y+z) = 48S^2 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

• **Lời giải 9: Bổ đề:**  $mn + np + pm \geq \sqrt{3mnp(m+n+p)} \quad \forall m, n, p > 0$

**Áp dụng:** đặt  $p-a = x, p-b = y, p-c = z \Rightarrow p = x+y+z$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z) \geq$$

$$\sqrt{3(x+y)(y+z)(z+x)} \left[ (x+y) + (y+z) + (z+x) \right] \geq$$

$$\sqrt{3 \times 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{yz} \times 2\sqrt{zx} \times 2(x+y+z)} = 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 10: Bổ đề:**  $8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc$ . Thật vậy:

$$8(p-a)(p-b)(p-c) = 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \times 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \times 2\sqrt{(p-c)(p-a)}$$

$$\leq [(p-a) + (p-b)] \times [(p-b) + (p-c)] \times [(p-c) + (p-a)] = abc$$

**Áp dụng:**  $\times \begin{cases} 3(a^2 + b^2 + c^2) = (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a+b+c)^2 \\ (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq (3\sqrt{a^2 b^2 c^2})^3 = 27a^2 b^2 c^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c) \geq 48p(p-a)(p-b)(p-c) = 48S^2$$

• **Lời giải 11: Bổ đề:**  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**Áp dụng:**  $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq 2\sqrt{3}$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2S \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq \frac{2S \times 9}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 12: Bổ đề:**  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**Áp dụng:**  $a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3\sqrt{3}R$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 9abc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{9abc}{a + b + c} \geq \frac{9abc}{3\sqrt{3}R} = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 13:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow ab \geq ac \geq bc$

$$\Leftrightarrow \frac{2S}{\sin C} \geq \frac{2S}{\sin B} \geq \frac{2S}{\sin A} \Leftrightarrow \sin A \geq \sin B \geq \sin C$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy đơn điệu  $\begin{cases} ab \geq ac \geq bc \\ \sin A \geq \sin B \geq \sin C \end{cases}$  ta có

$$ab\sin A + ac\sin C + bc\sin B \geq ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A$$

$$ab\sin B + ac\sin A + bc\sin C \geq ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A$$

$$\Rightarrow (ab + ac + bc)(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 3(ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A) = 18S$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq 18S \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 14: Bổ đề:**  $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

**Áp dụng:** theo định lý *Cosine* trong tam giác ta có

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 4S \cot A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B = c^2 + a^2 - 4S \cot B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 4S \cot C \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 15:**  $r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow r^3 = (p - a)(p - b)(p - c) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{rS^2}{p^2} = \frac{S^2}{p} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \Leftrightarrow r = p \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\text{Ta có } 1 = \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \geq 3\sqrt{\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2}} \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{4}{3}p^2 = 4\sqrt{3}p^2 \times \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{3}p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 4\sqrt{3}pr = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 16:** Đặt  $x = \frac{b+c-a}{2}$ ;  $y = \frac{c+a-b}{2}$ ;  $z = \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow S = \sqrt{xyz(x+y+z)}$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \geq 4(xy+yz+zx) \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } 4(xy+yz+zx) \geq 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 - 3xyz(x+y+z) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(xy-yz)^2 + (yz-zx)^2 + (zx-xy)^2] \geq 0 \quad (3)$$

Do (3) đúng nên (2) cũng đúng. Vì vậy  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

• **Lời giải 17:** Xét tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC.

Kẻ đường cao AH  $\perp$  BC. Ta có:  $a^2 + b^2 + c^2 = BC^2 + AB^2 + AC^2$

$$= BC^2 + 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \geq \frac{3BC^2}{2} + 2AH^2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3BC^2}{2}} \cdot 2AH^2 = 2\sqrt{3}BC \cdot AH = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 18:** Dựng tam giác đều  $AB_1C$  sao cho B,  $B_1$  ở cùng một phía đối với AC. Sử dụng định lý *Cosine* cho tam giác  $AB_1C$  ta có

$$BB_1^2 = BA^2 + B_1A^2 - 2BA \cdot B_1A \cos \angle BAB_1$$

$$= b^2 + c^2 - 2bccos |A - 60^\circ|$$

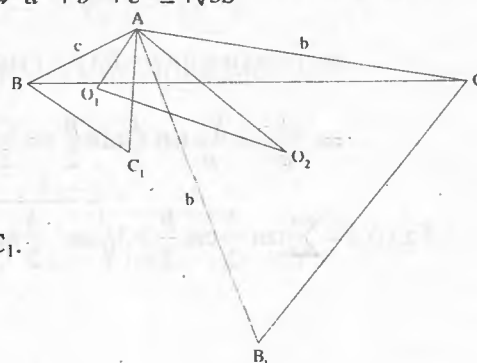
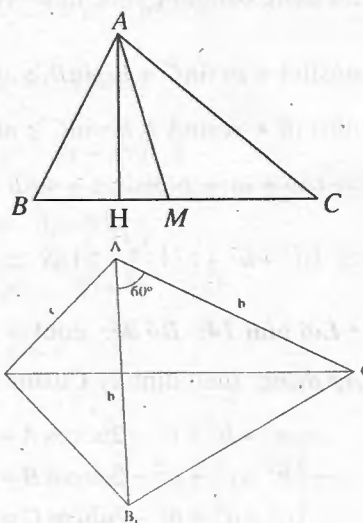
$$= b^2 + c^2 - 2bc(\cos A \cos 60^\circ + \sin A \sin 60^\circ)$$

$$= b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \sqrt{3}bc \sin A = \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S]$$

$$\text{Do } BB_1^2 \geq 0 \text{ suy ra } \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S] \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 19:** Dựng các tam giác đều  $ACB_1$ ,  $ABC_1$  sao cho B,  $B_1$  ở cùng một phía đối với AC và C,  $C_1$  ở cùng một bờ đối với AB.

Gọi  $O_1, O_2$  là tâm của các tam giác đều  $ACB_1$  và  $BC_1A$ .



Xét tam giác  $O_2AO_1$  ta có

$$O_1A = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}}; \quad O_2A = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad \angle O_1AO_2 = |A - 60^\circ|$$

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - 2O_1A \cdot O_2A \cdot \cos|A - 60^\circ| = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - \frac{2bc}{3}(\cos A \cos 60^\circ + \sin A \sin 60^\circ)$$

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - \frac{2bc}{3} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right) = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S)$$

$$\text{Do } O_1O_2^2 \geq 0 \text{ suy ra } \frac{1}{6}[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S] \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

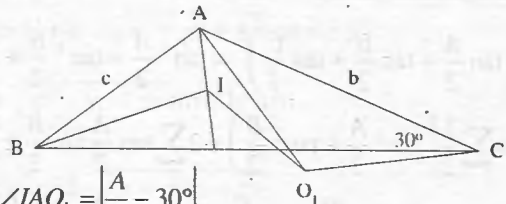
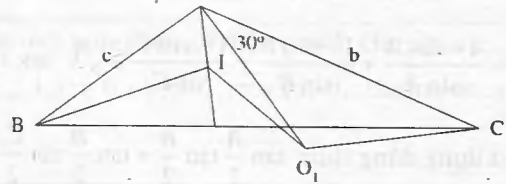
• **Lời giải 20:**

Dựng tam giác cân  $O_1AC$  sao cho  $B$ ,

$O_1$  ở cùng một phía đối với  $AC$  và

$\angle O_1AC = \angle O_1CA = 30^\circ$ . Gọi  $I$  là tâm

đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$ .



$$\text{Xét tam giác } IAO_1: IA = \frac{p-a}{\cos \frac{A}{2}}; \quad O_1A = \frac{b}{\sqrt{3}}; \quad \angle IAO_1 = \left| \frac{A}{2} - 30^\circ \right|$$

$$IO_1^2 = IA^2 + O_1A^2 - 2IA \cdot O_1A \cdot \cos \angle IAO_1 = \frac{(p-a)^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{b^2}{3} - \frac{2(p-a)b}{\sqrt{3} \cos \frac{A}{2}} \cos \left| \frac{A}{2} - 30^\circ \right|$$

$$= \frac{(p-a)^2}{\frac{p(p-a)}{bc}} + \frac{b^2}{3} - \frac{2(p-a)b}{\sqrt{3} \cos \frac{A}{2}} \left( \cos \frac{A}{2} \cos 30^\circ + \sin \frac{A}{2} \sin 30^\circ \right)$$

$$= \frac{(p-a)bc}{p} + \frac{b^2}{3} - (p-a)b - \frac{(p-a)b}{\sqrt{3}} \times \tan \frac{A}{2}$$

$$= \frac{b}{3p} \left[ 3c(p-a) + pb - 3p(p-a) - \sqrt{3}p(p-a) \tan \frac{A}{2} \right]$$

$$= \frac{b}{12p} [6c(b+c-a) + 2b(a+b+c) - 3(b+c+a)(b+c-a) - 4\sqrt{3}pr]$$

$$= \frac{b}{12p} [3a^2 + 3c^2 - b^2 + 2ab + 2bc - 6ac - 4\sqrt{3}S] \geq 0. \text{ Suy ra:}$$

$$\begin{cases} 3a^2 + 3c^2 - b^2 + 2ab + 2bc - 6ac \geq 4\sqrt{3}S \\ 3a^2 + 3b^2 - c^2 + 2ac + 2bc - 6ab \geq 4\sqrt{3}S \\ 3b^2 + 3c^2 - a^2 + 2ab + 2ac - 6bc \geq 4\sqrt{3}S \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 12\sqrt{3}S$$

$$\text{Mặt khác } 2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 5(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 12\sqrt{3}S \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Sau đây là một số mở rộng của bài toán thú vị này

$$\bullet \text{ Mở rộng 1: } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (2)$$

(Bất đẳng thức Hadwinger – Finsler)

$$\text{Lời giải 1: } (2) \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow 4S \left( \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \right) - 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos C}{\sin C} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Sử dụng đẳng thức  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$  ta có:

$$\begin{aligned} \left( \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 &= \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\ &= \sum \frac{1}{2} \left( \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} \right) + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \geq \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\text{Lời giải 2: } (2) \Leftrightarrow [a^2 - (b-c)^2] + [b^2 - (c-a)^2] + [c^2 - (a-b)^2] \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b) \geq \sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (3)$$

$$\text{Let } x = p-a, y = p-b, z = p-c, \text{ suy ra } (3) \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z) \Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0$$

**Lời giải 3:** Áp dụng bài toán gốc cho tam giác MNP, trong đó M, N, P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ban đầu.

$$\bullet \text{ Mở rộng 2: } ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 3: } ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S + \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 4: } a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3 \left( \frac{4S}{\sqrt{3}} \right)^n + [(a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 5: } a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) + \frac{18abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 6: } a^\alpha b^\alpha + b^\alpha c^\alpha + c^\alpha a^\alpha \geq 4^\alpha \sqrt{3^{2-\alpha}} S^\alpha, \quad \forall \alpha \geq 1; \alpha \in \mathbb{R} \quad (4)$$



**Lời giải:** (4)  $\Leftrightarrow \left(\frac{2S}{\sin C}\right)^\alpha + \left(\frac{2S}{\sin A}\right)^\alpha + \left(\frac{2S}{\sin B}\right)^\alpha \geq 4^\alpha \sqrt{3^{2-\alpha}} S^\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^\alpha A} + \frac{1}{\sin^\alpha B} + \frac{1}{\sin^\alpha C} \geq \sqrt{3^{2-\alpha}}$ . Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^\alpha A} + \frac{1}{\sin^\alpha B} + \frac{1}{\sin^\alpha C} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sin^\alpha A} \cdot \frac{1}{\sin^\alpha B} \cdot \frac{1}{\sin^\alpha C}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^\alpha}} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^{3\alpha}}} \geq \frac{3}{\sqrt{3^\alpha}} = \sqrt{3^{2-\alpha}} \end{aligned}$$

• **Mở rộng 7:** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ . Giả sử  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $x + y > 0, y + z > 0, z + x > 0$  và  $xy + yz + zx > 0$ . Chứng minh rằng:  $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4 \cdot \sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$  (5)

**Lời giải:** (5)  $\Leftrightarrow xa^2 + yb^2 + z(a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \geq 2\sqrt{xy + yz + zx} (ab \sin C)$

$$\Leftrightarrow (x+z) \frac{a}{b} + (y+z) \frac{b}{a} \geq 2 \left( z \cos C + \sqrt{xy + yz + zx} \sin C \right) \quad (6)$$

Ta có  $(x+z) \frac{a}{b} + (y+z) \frac{b}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{(x+z) \frac{a}{b} \cdot (y+z) \frac{b}{a}} = 2 \cdot \sqrt{(x+z)(y+z)}$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$z \cos C + \sqrt{xy + yz + zx} \sin C \leq \sqrt{(z^2 + xy + yz + zx)(\cos^2 C + \sin^2 C)} = \sqrt{(x+z)(y+z)}$$

$$\Rightarrow 2 \left( z \cos C + \sqrt{xy + yz + zx} \sin C \right) \leq (x+z) \frac{a}{b} + (y+z) \frac{b}{a} \Rightarrow (6) \text{ đúng}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) \frac{a}{b} = (y+z) \frac{b}{a} \\ \frac{\cos C}{z} = \frac{\sin C}{\sqrt{xy + yz + zx}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{b}{\sqrt{x+z}} \Rightarrow b^2 = \frac{a^2(x+z)}{y+z} \\ \frac{\cos^2 C}{z^2} = \frac{\sin^2 C}{xy + yz + zx} = \frac{1}{(x+z)(y+z)} \end{cases}$$

Thế  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  vào ta có

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + a^2 \cdot \frac{x+z}{y+z} - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{x+z}}{\sqrt{y+z}} \cdot \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \frac{x+z}{y+z} - \frac{2z}{y+z} = \frac{x+y}{y+z} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y+z}} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{c}{\sqrt{x+y}} \end{aligned}$$

$$\text{Vì vậy đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{b}{\sqrt{z+x}} = \frac{c}{\sqrt{x+y}}$$

**Ứng dụng của mở rộng 7 trong tam giác với độ dài 3 cạnh là  $a, b, c$**

$$7.1. a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (1)$$

**Chứng minh.** Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow a^2 \frac{b+c-a}{a} + b^2 \frac{c+a-b}{b} + c^2 \frac{a+b-c}{c} \geq 4\sqrt{3}S$

Sử dụng **mở rộng 7** suy ra chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab} \geq 3 \Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Đây chính là bất đẳng thức **Schur** bậc 3.

$$7.2. a^2b + b^2c + c^2a \geq 8\sqrt[4]{27} \cdot S\sqrt{S}$$

**Chứng minh.** Từ bất đẳng thức Hadwiger – Finsler suy ra  $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$

Sử dụng **mở rộng 7** ta có:  $a^2b + b^2c + c^2a \geq 4\sqrt{ab+bc+ca} \cdot S \geq 8\sqrt[4]{27} \cdot S\sqrt{S}$

$$7.3. 3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S$$

**Chứng minh.** Sử dụng **mở rộng 7** ta có

$$a^2 \frac{bc}{a} + b^2 \frac{ca}{b} + c^2 \frac{ab}{c} \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S \Leftrightarrow 3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S$$

$$7.4. (b+c-a)a^2 + (c+a-b)b^2 + (a+b-c)c^2 \geq 8\sqrt[4]{3} \cdot S\sqrt{S}$$

**Chứng minh.** Sử dụng **mở rộng 7** ta có

$$(b+c-a)a^2 + (c+a-b)b^2 + (a+b-c)c^2 \geq 4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \cdot S$$

Từ bất đẳng thức Hadwiger – Finsler ta có

$$4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \cdot S \geq 4\sqrt{4\sqrt{3}S} \cdot S = 8\sqrt[4]{3} \cdot S\sqrt{S}$$

• **Mở rộng 8:** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{x}{y+z} \cdot a^2 + \frac{y}{z+x} \cdot b^2 + \frac{z}{x+y} \cdot c^2 \geq 2\sqrt{3}S \quad (7) \quad \forall x, y, z > 0$

**Lời giải:** Sử dụng kết quả của **mở rộng 7** ta có

$$\frac{x}{y+z} \cdot a^2 + \frac{y}{z+x} \cdot b^2 + \frac{z}{x+y} \cdot c^2 \geq 4 \times \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x} + \frac{y}{z+x} \cdot \frac{z}{x+y} + \frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} \cdot S$$

Ta sẽ chứng minh  $4 \times \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x} + \frac{y}{z+x} \cdot \frac{z}{x+y} + \frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} \cdot S \geq 2\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(y+z)(z+x)} + \frac{yz}{(z+x)(x+y)} + \frac{zx}{(x+y)(y+z)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)] \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geq 6xyz$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy* ta có

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2 + x^2z \geq 6 \sqrt{x^2y \cdot xy^2 \cdot y^2z \cdot yz^2 \cdot z^2x \cdot zx^2} = 6xyz$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng kéo theo bất đẳng thức (7) cũng đúng.

• **Mở rộng 9:** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } 4\sqrt{3}S + 3 \sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (8)$$

**Lời giải:** Đặt  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$ .

$$\text{Bất đẳng thức (8)} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}S \geq 6(ab + bc + ca) - 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 6[(y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)] - 5\sum (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (9). \text{ Đặt } x = p^2; y = q^2; z = r^2.$$

Do đó (9)  $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{3p^2q^2r^2(p^2 + q^2 + r^2)} \geq (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

$$\Leftrightarrow pqr\sqrt{3(p^2 + q^2 + r^2)} \geq (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

$$\text{Dễ dàng có } \begin{cases} \sqrt{3(p^2 + q^2 + r^2)} \geq p+q+r \\ pqr \geq (p+q-r)(r+p-q)(q+r-p) \end{cases} \Rightarrow \text{(điều phải chứng minh)}$$

**Chú ý:** Từ các bất đẳng thức (2) và (8) ta thu được bất đẳng thức

$$4\sqrt{3}S + 3 \sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 \cdot \sum (a-b)^2 + 4\sqrt{3}S \quad (10)$$

Ta sẽ chứng minh trong kết quả (10) thì các hệ số 3 và 1 của  $\sum (a-b)^2$  là các giá trị tốt nhất, hay là ta chứng minh mở rộng sau:

• **Mở rộng 10:** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ .

Nếu ta có  $4\sqrt{3}S + \alpha \sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq \beta \sum (a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$  thì  $\alpha \geq 3$  và  $\beta \leq 1$ .

**Lời giải:** Đặt

$$\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases} \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

$$\text{Xét hiệu } T_\alpha = 4\sqrt{3}S + \alpha \sum (a-b)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha - 1)(a^2 + b^2 + c^2) - 2\alpha(ab + bc + ca)$$

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha - 1)[(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2] - 2\alpha[(y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)]$$

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + 2(\alpha - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\alpha + 1)(xy + yz + zx). \text{ Let } a' = yz; b' = zx; c' = xy$$

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3xyz(x+y+z)} + (\alpha - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha + 1)(xy + yz + zx)$$

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3(a'b' + b'c' + c'a')} + (\alpha - 1)\left(\frac{b'c'}{a'} + \frac{c'a'}{b'} + \frac{a'b'}{c'}\right) - (\alpha + 1)(a' + b' + c')$$

Đặt  $\bar{a} = b' + c'; \bar{b} = c' + a'; \bar{c} = a' + b' \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác

$$T'_\alpha = \frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3\sum(\bar{p} - \bar{a})(\bar{p} - \bar{b})} + (\alpha - 1)(\bar{p} - \bar{a})(\bar{p} - \bar{b})(\bar{p} - \bar{c}) \sum \frac{1}{(\bar{p} - \bar{a})^2} - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= 2\sqrt{3(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a} - \bar{p}^2)} + (\alpha - 1)\frac{\bar{r}_a^2 + \bar{r}_b^2 + \bar{r}_c^2}{\bar{p}} - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= \sqrt{3[2(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a}) - (\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2)]} + (\alpha - 1)\bar{p}\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= \sqrt{12S\left(\tan \frac{\bar{A}}{2} + \tan \frac{\bar{B}}{2} + \tan \frac{\bar{C}}{2}\right)} + (\alpha - 1)\bar{p}\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= 2\sqrt{3\bar{p}\bar{r}}\left(\tan \frac{\bar{A}}{2} + \tan \frac{\bar{B}}{2} + \tan \frac{\bar{C}}{2}\right) + (\alpha - 1)\bar{p}\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$\frac{\bar{T}'_\alpha}{\bar{p}} = 2\sqrt{3 \tan \frac{\bar{A}}{2} \tan \frac{\bar{B}}{2} \tan \frac{\bar{C}}{2} \left(\tan \frac{\bar{A}}{2} + \tan \frac{\bar{B}}{2} + \tan \frac{\bar{C}}{2}\right)}$$

$$+ (\alpha - 1)\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } u = \tan \frac{\bar{A}}{2}; v = \tan \frac{\bar{B}}{2}; w = \tan \frac{\bar{C}}{2} \Rightarrow uv + vw + wu = 1$$

$$\text{Ta có: } T_\alpha \geq 0 \Rightarrow \frac{\bar{T}'_\alpha}{\bar{p}} = 2\sqrt{3uvw(u+v+w)} + (\alpha - 1)(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha + 1) \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Cho } \begin{cases} u \rightarrow 0 \\ v, w \rightarrow 1 \end{cases} \text{ thì } \frac{\bar{T}'_\alpha}{\bar{p}} \rightarrow 2(\alpha - 1) - (\alpha + 1) = \alpha - 3. \text{ Nếu } \alpha < 3 \text{ thì } \exists u_0, v_0, w_0 \text{ thỏa mãn}$$

$$u_0v_0 + v_0w_0 + w_0u_0 = 1, \text{ tuy nhiên, } \frac{\bar{T}'_{\alpha 0}}{\bar{p}_0} < 0 \text{ mâu thuẫn với } (*) \Rightarrow \text{Min } \alpha = 3$$

$$\text{Tương tự, } \frac{\bar{T}'_\beta}{\bar{p}} = 2\sqrt{3uvw(u+v+w)} + (\beta - 1)(u^2 + v^2 + w^2) - (\beta + 1) \leq 0 \quad (**)$$

$$\text{Nếu } \beta > 1 \text{ thì cho } \begin{cases} u \rightarrow +\infty \\ v, w \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{T}'_\beta}{\bar{p}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists u_1, v_1, w_1 \text{ thỏa mãn}$$

$$u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 1, \text{ tuy nhiên, } \frac{\bar{T}'_{\beta 1}}{\bar{p}_1} > 0 \text{ mâu thuẫn với } (**) \Rightarrow \text{Max } \beta = 1.$$

$$\text{Vì vậy bất đẳng thức } 4\sqrt{3}S + 3 \cdot \sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 \cdot \sum (a-b)^2 + 4\sqrt{3}S \text{ là tốt nhất.}$$

## § 24.3. CÂU CHUYỆN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT-SHAPIRO

### I. 45 CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

Trong kho tàng các bất đẳng thức nổi tiếng, có một bất đẳng thức đã thu hút được sự chú ý của rất nhiều nhà toán học lừng danh trên thế giới trong suốt thế kỷ XX. Đó chính là bất đẳng thức *Nesbitt – Shapiro. Năm 1903*, nhà Toán học Anh *Nesbitt* đã đưa ra bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0 \quad (1)$$

Chúng minh kết quả này không khó, sau đây là **45 cách** chứng minh khác nhau trong đó có nhiều cách do bạn **Dương Đức Lâm** sáng tác và sưu tầm. Các bạn đọc ham thích tìm tòi cũng có thể tự mình tìm thêm một số cách chứng minh khác nữa.

#### 1. Nhóm 1: Sử dụng định nghĩa, biến đổi tương đương, đánh giá đại diện

• **Cách 1:** 
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \left( \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{a-b+a-c}{2(b+c)} + \frac{b-c+b-a}{2(c+a)} + \frac{c-a+c-b}{2(a+b)} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a-b) \left( \frac{1}{c+b} - \frac{1}{c+a} \right)$$

$$= \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)} \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

• **Cách 2:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ , gọi về trái bất đẳng thức là  $S$  ta có

$$S - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{a+b-2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} (a-c)(b-c) \geq 0, \text{ suy ra } S \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 3:** Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8a-b-c}{a+b+c} \Leftrightarrow 4a(a+b+c) \geq (8a-b-c)(b+c) \Leftrightarrow (2a-b-c)^2 \geq 0$$

Khi đó 
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(8a-b-c) + (8b-c-a) + (8c-a-b)}{a+b+c} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 4:** Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(a-1) \Leftrightarrow 2a \geq 3-a+3(3-a)(a-1) \Leftrightarrow 3(a-1)^2 \geq 0$$

Khi đó 
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(a+b+c-3) = \frac{3}{2}$$

• **Cách 5:** Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow 4a \geq (3-a)(3a-1) \Leftrightarrow 2(a-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow VT(1) = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3(a+b+c)-3}{4} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 6:**  $(1) \Leftrightarrow S = \frac{(a-b)+(a-c)}{b+c} + \frac{(b-c)+(b-a)}{c+a} + \frac{(c-a)+(c-b)}{a+b} \geq 0$

Giả sử  $a \geq b \geq c$  thì  $S \geq \frac{a-b+a-c}{c+a} + \frac{b-c+b-a}{c+a} + \frac{c-a+c-b}{c+a} = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$

## 2. Nhóm 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM

• **Cách 7:**  $(1) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2(a+b+c) \left[ \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right] \geq 9$

$\Leftrightarrow T = [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$T \geq 3 \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}} = 9 \Rightarrow (\text{đpcm})$

• **Cách 8:** Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} &= \frac{a}{2} \left( \frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{2a} \right) \geq \frac{a}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{2a}} = a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} &= \frac{b}{2} \left( \frac{2b}{c+a} + \frac{c+a}{2b} \right) \geq \frac{b}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{2b}} = b \\ \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} &= \frac{c}{2} \left( \frac{2c}{a+b} + \frac{a+b}{2c} \right) \geq \frac{c}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2c}} = c \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$

$\Rightarrow \left( \frac{a^2}{b+c} + a \right) + \left( \frac{b^2}{c+a} + b \right) + \left( \frac{c^2}{a+b} + c \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c) \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

• **Cách 9:** Đặt  $\begin{cases} b+c=x>0 \\ c+a=y>0 \\ a+b=z>0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{y+z-x}{2}; b = \frac{z+x-y}{2}; c = \frac{x+y-z}{2}$

Khi đó bất đẳng thức trở thành  $\frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow T = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 3+3=6$ . Ta có:  $T \geq 6 \sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}} = 6$

• **Cách 10:** Gọi về trái bất đẳng thức cần chứng minh là  $T$ .

Đặt  $P = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$ ;  $Q = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow P + Q = 3$  và

$$\begin{cases} T + P = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3 \\ T + Q = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{b+a}{c+a} \cdot \frac{c+b}{a+b}} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2T + (P + Q) = 2T + 3 \geq 3 + 3 \Rightarrow T \geq \frac{3}{2}$$

• **Cách 11:** (1)  $\Leftrightarrow S = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 3$

Theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:  $S \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right)}$

Ta chỉ cần chứng minh:  $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \geq 8(a+b)(b+c)(c+a)$$

Theo **AM - GM**:  $2a+b+c = (a+b) + (a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$

Làm tương tự với 2 bất đẳng thức còn lại rồi nhân theo vế ta có đpcm.

• **Cách 12:** (1)  $\Leftrightarrow S = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có  $S \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) \left(\frac{c}{a+b} + 1\right)}$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$$

Theo **AM - GM**:  $8(a+b+c)^3 = [(a+b) + (b+c) + (c+a)]^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$ .

• **Cách 13:** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}$ ,  $y = \frac{b}{c+a}$ ,  $z = \frac{c}{a+b}$  và  $S = \frac{x+y+z}{3}$

Ta có  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$  hay  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ . Ta cần chứng minh  $S \geq \frac{1}{2}$ .

Theo **AM - GM**, ta có:  $1 = xy + yz + zx + 2xyz \leq 3S^2 + 2S^3 \Leftrightarrow (2S-1)(S+1)^2 \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}$ .

• **Cách 14:** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}$ ,  $y = \frac{b}{c+a}$ ,  $z = \frac{c}{a+b}$  ta có  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$  (\*)

Ta cần chứng minh  $x+y+z \geq \frac{3}{2}$ . Thật vậy, giả sử  $x+y+z < \frac{3}{2}$ , khi đó theo bất đẳng

thức **AM - GM** thì  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}} \geq \frac{9}{3+x+y+z} > \frac{9}{3+\frac{3}{2}} = 2$ .



Bất đẳng thức này mâu thuẫn với (\*) nên điều giả sử  $x + y + z < \frac{3}{2}$  là sai.

$$\text{Vậy } x + y + z \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 15:** Đặt  $x = \frac{b}{c}$ ;  $y = \frac{c}{a}$ ;  $z = \frac{a}{b} \Rightarrow xyz = 1$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{1+zx} + \frac{y}{1+xy} + \frac{z}{1+yz} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2y + y^2z + z^2x) \geq x + y + z + xy + yz + zx.$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$x^2y + y^2z + z^2x = \frac{x^2y + x^2y + z^2x}{3} + \frac{y^2z + y^2z + x^2y}{3} + \frac{z^2x + z^2x + y^2z}{3}$$

$$\geq \sqrt[3]{x^5y^2z^2} + \sqrt[3]{x^2y^5z^2} + \sqrt[3]{x^2y^2z^5} = x + y + z.$$

Tương tự ta có:  $x^2y + y^2z + z^2x \geq xy + yz + zx$ . Cộng hai bất đẳng thức trên ta được đpcm.

• **Cách 16:**  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a(a+b)(a+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ . Sử dụng **AM - GM** ta có:

$$\sum_{cyc} (a^3 + b^3) = \sum_{cyc} (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq \sum_{cyc} (a+b)(2ab - ab) = \sum_{cyc} ab(a+b) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Cách 17:** Ta sẽ chứng minh đại diện

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} \Leftrightarrow 2(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3\sqrt{a}(b+c). \text{ Theo AM - GM ta có}$$

$$2(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) = (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{b^3}) + (\sqrt{a^3} + \sqrt{c^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3b\sqrt{a} + 3c\sqrt{a}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} = \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

• **Cách 18:** Đặt  $x = \frac{a}{c}$ ,  $y = \frac{b}{c}$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow x \geq y \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \text{ Theo AM - GM ta có}$$

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh: } 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{y-1}{2(y+1)} \geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì  $x \geq y \geq 1 \Rightarrow y-1 \geq 0$  và  $2(y+1) \leq (x+1)(x+y)$ .



- **Cách 19:** Làm như cách 18, ta cần chứng minh  $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$  với  $x \geq y \geq 1$ .

Đặt  $A = x + y$  và  $B = xy$ , bất đẳng thức tương đương với  $\frac{x^2 + y^2 + x + y}{(x+1)(y+1)} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

$$\text{hay } \frac{A^2 - 2B + A}{A+B+1} + \frac{1}{A} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2A^3 - A^2 - A + 2 \geq B(7A - 2)$$

Đề ý rằng  $7A - 2 > 0$  và  $A^2 \geq 4B$ , suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$4(2A^3 - A^2 - A + 2) \geq A^2(7A - 2) \Leftrightarrow (A - 2)^2(A + 2) \geq 0 \text{ luôn đúng } \Rightarrow (\text{dpcm})$$

- **Cách 20:** Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**  $a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a \cdot \frac{(b+c)^2}{4}}$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 \geq \frac{27}{4}a(b+c)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{(a+b+c)^3} \geq \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}a\sqrt[3]{\frac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{(a+b+c)^3}}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{(a+b+c)^3}}$$

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta cần chứng minh  $a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c} \geq 3$

$$\text{Theo AM - GM, ta có: } \begin{cases} a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} + 1 \geq 3a \\ b\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{b} + 1 \geq 3b \\ c\sqrt[3]{c} + c\sqrt[3]{c} + 1 \geq 3c \end{cases} \Rightarrow a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c} \geq 3 \text{ (dpcm)}$$

- **Cách 21:** Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$2a + (b+c) \geq 2\sqrt{2a(b+c)} \Leftrightarrow (2a+b+c)^2 \geq 8a^2 \cdot \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{8a^2}{(2a+b+c)^2}$$

$$\text{Từ đó ta chứng minh được } VT(1) \geq \frac{8a^2}{(2a+b+c)^2} + \frac{8b^2}{(2b+c+a)^2} + \frac{8c^2}{(2c+a+b)^2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=3$ , khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{(a+3)^2} + \frac{b^2}{(b+3)^2} + \frac{c^2}{(c+3)^2} \geq \frac{3}{16}. \text{ Đề ý rằng } \frac{a^2}{(a+3)^2} \geq \frac{1}{16} + \frac{3}{32}(a-1) \quad (*)$$

$$\text{Thật vậy, } (*) \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a-1)^2(a-3) \leq 0 \text{ luôn đúng vì } 0 < a < 3.$$

Trong (\*) thay  $a$  lần lượt bởi  $b, c$  rồi cộng theo về các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^2}{(a+3)^2} + \frac{b^2}{(b+3)^2} + \frac{c^2}{(c+3)^2} \geq \frac{3}{16} + \frac{3}{32}(a+b+c-3) = \frac{3}{16}. \text{ (dpcm)}$$

- **Cách 22:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \quad (*)$$

Thật vậy (\*)  $\Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0$

Vì  $a \geq b \geq c$  nên  $\frac{a-b}{b+c} \geq \frac{a-b}{a+c}$  và  $\frac{c-a}{a+b} \geq \frac{c-a}{a+c}$  suy ra

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq \frac{a-b}{a+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+c} = \frac{a-b+b-c+c-a}{a+c} = 0. \text{ tức là (*) đúng.}$$

Từ đó  $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \times \frac{b+c}{c+a} \times \frac{c+a}{a+b}} = 3$  (đpcm)

• **Cách 23: Bỏ đề:**  $\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n, \forall a, b, c > 0; n \in \mathbb{N}$

**Chứng minh:** Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\begin{cases} a^n + (n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{a^n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} a \\ + \begin{cases} b^n + (n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{b^n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} b \\ c^n + (n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{c^n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} c \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^n + b^n + c^n) \geq n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} (a+b+c) - 3(n-1) \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

**Áp dụng:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=1$ . Sử dụng AM – GM, ta có

$$(2-2a)(1+a)(1+a) \leq \left[ \frac{(2-2a) + (1+a) + (1+a)}{3} \right]^3 = \frac{64}{27}$$

Do đó  $\frac{a}{1-a} \geq \frac{27}{32} a(1+a)^2$ . Tương tự  $\frac{b}{1-b} \geq \frac{27}{32} b(1+b)^2, \frac{c}{1-c} \geq \frac{27}{32} c(1+c)^2$ . Từ đó

$$VT(1) = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{27}{32} [(a^3 + b^3 + c^3) + 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)] \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 24:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=1$ . Khi đó  $0 < a, b, c < 1$ . Theo công thức cấp số nhân lùi vô hạn ta có

$$VT(1) = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a^n + b^n + c^n)$$

Sử dụng bỏ đề ở **cách 23** ta được

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a^n + b^n + c^n) \geq 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}. \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Cách 25:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=1$ . Trước hết ta sẽ chứng minh

$$T = \frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2. \text{ Sử dụng kỹ thuật đồng bậc trong AM – GM, ta có}$$

$$T = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2$$

Từ đó, kết hợp với bất đẳng thức quen biết  $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$  với mọi  $x, y \geq 0$ , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{bc}{b+c} - \frac{ca}{c+a} - \frac{ab}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{4}[(b+c) + (c+a) + (a+b)] = \frac{3}{2}$$

• **Cách 26:** Sử dụng bất đẳng thức quen biết  $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$  ta có

$$\left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq 3 \left[ \frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \right]$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=1$ , bất đẳng thức trở thành

$$4[ab(1-c) + bc(1-a) + ca(1-b)] \geq 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 9abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo **AM – GM** và ta có điều phải chứng minh.

• **Cách 27:** Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{2(b+c)^2}} = \frac{9a}{3\sqrt[3]{2a(b+c)(b+c)}} \geq \frac{9a}{2(a+b+c)}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{b}{c+a} + \frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} \geq \frac{9b}{2(a+b+c)} \quad \text{và} \quad \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq \frac{9c}{2(a+b+c)}$$

$$\text{Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên cho ta } 2VT(1) + \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow VT(1) \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 28:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=3$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\frac{a^2}{(3-a)^2} = \frac{2a^3}{2a(3-a)(3-a)} \geq \frac{2a^3}{\left[ \frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3} \right]^3} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3-a} \geq \frac{a\sqrt{a}}{2}$$

$$\text{Tương tự và suy ra } VT(1) = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 29:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với  $\sum_{cyc} \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \sum_{cyc} \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{9}{4}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{a}{b+c}; \quad \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{b}{c+a}; \quad \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{c}{a+b}$$

Ta chỉ cần chứng minh  $\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} + \sum_{cyc} \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} \geq 3$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(a+b)(a+c) + \sum_{cyc} 2bc(b+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo **AM – GM** và ta có đpcm.

### 3. Nhóm 3: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển khác

• **Cách 30:** Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\begin{aligned} & [a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)] \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq (a+b+c)^2 \\ \Rightarrow & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 31:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a, b, c \in (0, 3)$  và  $a+b+c=3$ .

$$\text{Khi đó ta có } (a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+1 \geq a(3-a) \Leftrightarrow \frac{a}{3-a} \geq \frac{a^2}{a+1}$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{3-b} \geq \frac{b^2}{b+1}; \quad \frac{c}{3-c} \geq \frac{c^2}{c+1}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta được

$$VT(1) = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} + \frac{c^2}{c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 32:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \leq b \leq c \Rightarrow a+b \leq a+c \leq b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c \geq c+a \geq a+b \\ \frac{a}{b+c} \leq \frac{b}{c+a} \leq \frac{c}{a+b} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \geq 3 \left[ \frac{a}{b+c} (b+c) + \frac{b}{c+a} (c+a) + \frac{c}{a+b} (a+b) \right] \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) [2(a+b+c)] \geq 3(a+b+c) \Leftrightarrow \\ & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 33:** (1)  $\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a-b-c}{b+c} \geq 0$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c \text{ thì } \begin{cases} 2a-b-c \geq 2b-c-a \geq 2c-a-b \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Chebyshev: } \sum_{cyc} \frac{2a-b-c}{b+c} \geq \frac{1}{3} \left[ \sum_{cyc} (2a-b-c) \right] \left[ \sum_{cyc} \frac{1}{b+c} \right] = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

4. Nhóm 4: Sử dụng bất đẳng thức cận đại

- **Cách 34:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \leq b \leq c \Rightarrow a+b \leq a+c \leq b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b} \end{cases} \text{ Theo bất đẳng thức hoán vị ta có}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \text{ và } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức này ta nhận được đpcm.

• **Cách 35:**  $(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(a+b+c)}{b+c} \geq \frac{3(a+b+c)}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , theo bất đẳng thức hoán vị thì

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} \text{ và } \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c}$$

$$\text{Suy ra } \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{1}{2} \left[ \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} + \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c} \right] = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{1}{4} \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{a+b} = \frac{a+b+c}{2}$$

- **Cách 36:** Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau với mọi  $a, b, c \geq 0$ :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+a)} \quad (1)$$

Thật vậy  $(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 2ab(a+b) + 2bc(b+c) + 2ca(c+a)$ , đúng theo **Schur**.

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc, \text{ đúng theo AM - GM.}$$

- **Cách 37:** Gọi về trái của (1) là  $P$ , ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{2[a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b)] + (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Theo bất đẳng thức **Schur** thì  $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$

kết hợp với  $(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$  suy ra điều phải chứng minh.

- **Cách 38:** Gọi về trái của (1) là  $P$ , ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{(2a+b+c)(a-b)(a-c) + (2b+c+a)(b-a)(b-c) + (2c+a+b)(c-a)(c-b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ , suy ra  $2a+b+c \geq 2b+c+a \geq 2c+a+b$

Sử dụng bất đẳng thức **Vornicu - Schur** (hay bất đẳng thức **Schur** suy rộng) ta có

$$(2a+b+c)(a-b)(a-c) + (2b+c+a)(b-a)(b-c) + (2c+a+b)(c-a)(c-b) \geq 0$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**5. Nhóm 5: Phương pháp giải tích**

• **Cách 39:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Đặt  $x = a \geq b \geq c$ .

Ta có (1)  $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{b+c} + \frac{b}{c+x} + \frac{c}{x+b}$  với  $x \geq b \geq c > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(x+c)^2} - \frac{c}{(x+b)^2} > \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(b+c)^2} - \frac{c}{(b+c)^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ tăng } [b, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(b) = \frac{2b+c}{b+c} \quad (2)$$

Đặt  $x = b \Rightarrow x \geq c > 0$ , xét hàm số  $g(x) = \frac{2x+c}{x+c}$  với  $x \geq c > 0$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{c}{(x+c)^2} > 0 \quad \forall c > 0 \Rightarrow g(x) \text{ tăng trên } [c, +\infty) \Rightarrow g(x) \geq g(c) = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

• **Cách 40:** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$

Xét hàm  $f(t) = \frac{t}{t+1} (t > 0)$  ta có  $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0$  suy ra  $f$  tăng trên  $(0; +\infty)$

Mặt khác  $f''(t) = -\frac{2}{(t+1)^3} < 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$  nên  $f(t)$  lõm trên khoảng  $(0; +\infty)$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} = \frac{1}{3} \left( \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{suy ra } \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y+z = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm})$$

• **Cách 41:** Đặt  $S = a+b+c$  ta có: (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} \geq \frac{3}{2}$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x}{S-x}$  với  $x \in (0, S)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{S}{(S-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2S}{(S-x)^3} > 0 \quad \text{với mọi } x \in (0, S)$$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm lồi trên  $(0, S)$ . Sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$\frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{S}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\frac{S}{3}}{\frac{2S}{3}} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 42:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$  và  $a+b+c=1$ .

Khi đó  $a \geq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{3}$  suy ra  $a+b=1-c \geq \frac{2}{3}$ , nên  $(a, b, c) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

Áp dụng bất đẳng thức *Karamata* cho hàm  $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$ , lồi trên  $(0, 1)$ , đối với bộ

trội  $(a, b, c) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , ta có VT(1)  $= f(a) + f(b) + f(c) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh.

## 6. Nhóm 6: Phương pháp hiện đại

• **Cách 43:** Đặt  $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  và  $t = \frac{a+b}{2}$  ta có

$$f(a, b, c) - f(t, t, c) = \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b+2c)} \geq 0$$

Mặt khác ta lại có  $f(t, t, c) - \frac{3}{2} = \frac{2t}{c+t} + \frac{c}{2t} - \frac{3}{2} = \frac{(c-t)^2}{2t(c+t)} \geq 0$ .

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra  $f(a, b, c) \geq f(t, t, c) \geq \frac{3}{2}$ .

• **Cách 44:** Đặt  $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  và  $t = \sqrt{ab}$ .

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ , ta có  $t \geq c$  và

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, b, t) &= \frac{a(t-c)}{(b+c)(b+t)} + \frac{b(t-c)}{(c+a)(t+a)} + \frac{c-t}{a+b} \\ &\geq \frac{t-c}{a+b} \left( \frac{a}{b+t} + \frac{b}{t+a} - 1 \right) = \frac{t-c}{a+b} \cdot \frac{(a-b)^2}{(b+t)(t+a)} \geq 0 \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có  $f(a, b, t) - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(b+t)(t+a)} + \frac{(a-t)^2}{2(b+t)(a+b)} + \frac{(t-b)^2}{2(a+b)(t+a)} \geq 0$

Suy ra  $f(a, b, c) \geq f(a, b, t) \geq \frac{3}{2}$ .

• **Cách 45:** Nhận xét rằng về trái của bất đẳng thức là một hàm đối xứng đối với ba biến  $a, b, c$ , nếu viết nó dưới dạng đa thức thì được một đa thức có bậc không quá 3. Theo định lí **ABC** ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Một trong ba biến  $a, b, c$  bằng 0, giả sử  $c = 0$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{3}{2} \text{ luôn đúng theo bất đẳng thức } AM - GM.$$

- **Trường hợp 2:** Hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau, giả sử  $b = c$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2b(a+b)} \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.



## II. MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

Chúng ta vừa được làm quen với 45 cách chứng minh bất đẳng thức *Nesbitt*. Điều này nói lên đây thực sự là một bất đẳng thức không khó để chứng minh. Tuy nhiên việc mở rộng bất đẳng thức *Nesbitt* cho  $n$  số thực dương ( $n \geq 4$ ) lại không đơn giản chút nào. Suốt 53 năm nhiều nhà toán học đã tìm cách mở rộng và chứng minh bất đẳng thức trên cho các trường hợp đặc biệt và tổng quát nhưng mãi đến năm 1958 một học trò của *Nesbitt* là *Mordell* mới tìm ra được cách chứng minh cho  $n = 4, 5, 6$  chấm dứt một thời gian dài bài toán chưa có lời giải. Năm 1954, nhà Toán học Mỹ *Shapiro* đã đưa ra mệnh đề tổng quát và nó được gắn với tên gọi **bất đẳng thức Shapiro**

**Mệnh đề 1:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét tính đúng sai của bất đẳng thức sau:

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (2)$$

Ngay từ khi ra đời, bất đẳng thức (2) đã cuốn hút được sự chú ý của rất nhiều người đam mê toán học. Thậm chí nó nổi tiếng đến mức mà năm 1990, tại hội nghị toán học Oberwolfach về các bất đẳng thức, các nhà toán học đã phải nhắc lại toàn bộ lịch sử chứng minh lâu dài của nó mà đôi khi được xem là vô vọng. Bất đẳng thức Shapiro tuy với vẻ bề ngoài cực kì đơn giản nhưng để chứng minh nó là điều vô cùng khó, do chúng ta phải xét một số lượng rất lớn các trường hợp riêng biệt. Điều này không làm cho chúng ta ngạc nhiên, bởi vì *bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi số tự nhiên n*. Trong phần tiếp theo của chuyên đề này, chúng tôi chỉ cố gắng trình bày tóm tắt lại các kết quả quan trọng của các nhà toán học liên quan đến bất đẳng thức (1) mà không đề cập chi tiết đến các chứng minh bởi vì trong một số trường hợp việc chứng minh đòi hỏi phải sử dụng đến các kiến thức của toán cao cấp vượt ra ngoài chương trình toán phổ thông. Trước hết xét trường hợp đơn giản nhất khi  $n = 4$ .

2. Với  $n = 4$ , bất đẳng thức (2) trở thành:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2 \quad \forall a, b, c, d > 0. \quad (3)$

*Chứng minh:* Ta có  $[a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)] \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \right) \geq$

$$\left( \sqrt{a(b+c)} \cdot \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{b(c+d)} \cdot \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{c(d+a)} \cdot \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{d(a+b)} \cdot \sqrt{\frac{d}{a+b}} \right)^2 = (a+b+c+d)^2$$

Suy ra: 
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)}$$

Ta có: 
$$\begin{cases} (a+b+c+d)^2 = [(a+d) + (b+c)]^2 \geq 4(a+d)(b+c) \\ (a+b+c+d)^2 = [(a+b) + (c+d)]^2 \geq 4(a+b)(c+d) \end{cases}$$



$$\Rightarrow 2(a+b+c+d)^2 \geq 4[(a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b))]$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geq \frac{4}{2} = 2. \text{ Suy ra (đpcm)}$$

$$3. \text{ Với } n=5 \text{ thì (2) trở thành: } \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_5} + \frac{a_4}{a_5+a_1} + \frac{a_5}{a_1+a_2} \geq \frac{5}{2} \quad \forall a_i > 0, \quad (4)$$

Chứng minh: Đặt  $a_1 = a_6$ ;  $a_2 = a_7$ . Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^5 a_k (a_{k+1} + a_{k+2}) \cdot \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_1) + a_5(a_1 + a_2)} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_1) + a_5(a_1 + a_2)} \geq \frac{5}{2} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq \frac{5}{2} [a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_1) + a_5(a_1 + a_2)]$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq \frac{5}{4} [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)]$$

$$\Leftrightarrow 5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

$$\Leftrightarrow (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo CBS. Từ đó suy ra (đpcm)

4. Với  $n=6$  thì (2) trở thành:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_5} + \frac{a_4}{a_5+a_6} + \frac{a_5}{a_6+a_1} + \frac{a_6}{a_1+a_2} \geq 3, \quad \forall a_i > 0 \quad (5)$$

Chứng minh: Đặt  $a_7 = a_1$ ;  $a_8 = a_2$ . Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^6 a_k (a_{k+1} + a_{k+2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2 \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_1) + a_6(a_1 + a_2)} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_1) + a_6(a_1 + a_2)} \geq 3 \\ \Leftrightarrow & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2 \geq 3 \sum_{k=1}^6 a_k(a_{k+1} + a_{k+2}) \\ \Leftrightarrow & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 \geq a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + \\ & + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_1) + a_6(a_1 + a_2) - 2a_1a_4 - 2a_2a_5 - 2a_3a_6 \\ \Leftrightarrow & \left[ a_1 + a_4 - \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + a_5 + a_6) \right]^2 + \frac{3}{4}(a_2 - a_3 + a_5 - a_6)^2 \geq 0, \text{ đúng suy ra (đpcm)} \end{aligned}$$

Phương pháp chứng minh (2) bằng bất đẳng thức CBS cho  $n=3,4,5,6$  là một chứng minh rất đẹp. Cách chứng minh này dựa trên một bất đẳng thức gián tiếp là bất đẳng thức:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)} \geq \frac{n}{2} \quad (*) \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Tuy nhiên không thể dùng phương pháp trên nhằm tạo ra (\*) để chứng minh (2) đúng với  $n \geq 7$ , vì khi đó bất đẳng thức (\*) sẽ không còn đúng nữa. Thật vậy, ta sẽ chứng minh (\*) không đúng  $\forall n \geq 7$  bằng phản ví dụ sau đây

• **Phản ví dụ:**

Lấy  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  và  $a_4 = a_5 = a_6 = \dots = a_{n-1} = a_n = \varepsilon$  thì

$$(*) \Leftrightarrow \frac{[3 + (n-3)\varepsilon]^2}{3 + 6\varepsilon + (2n-9)\varepsilon^2} \geq \frac{n}{2} \quad (**)$$

Với  $n \geq 7$ , ta chọn  $\varepsilon = \frac{1}{10n}$  và thế vào biểu thức vế trái của (\*\*) ta có

$$\frac{\left[3 + (n-3) \cdot \frac{1}{10n}\right]^2}{3 + 6 \cdot \frac{1}{10n} + (2n-9) \cdot \frac{1}{100n^2}} < \frac{\left(3 + \frac{1}{10}\right)^2}{3} = \frac{9,61}{3} < \frac{7}{2} \leq \frac{n}{2}$$

• **Kết luận:** Với  $n \geq 7$  thì bất đẳng thức (\*\*) không đúng suy ra (\*) không đúng

Sau khi chứng minh thành công (2) đúng với  $n=3,4,5,6$ , Mordell đã giả định rằng bất đẳng thức Shapiro sẽ không đúng với mọi  $n \geq 7$ . Năm 1956, Lighthill lần đầu tiên đã tìm ra một phản ví dụ cho bất đẳng thức này với  $n=20$ . Hai năm sau, ngoài Mordell, Zulauf và Rankine cũng tìm ra một phản-ví dụ cho  $n=14$ . Zulauf cũng đã có một nhận xét tinh tế là đẳng thức:

$$S_{n+2}(a_1, \dots, a_n, a_{n-1}, a_n) = S_n(a_1, \dots, a_n) + 1 \quad (6)$$

Từ đây ông nhận xét rằng nếu tìm được một phản ví dụ cho (1) với  $n$  nào đó thì cũng sẽ có các phản ví dụ cho  $n+2, n+4, \dots$

Năm 1959, Zulauf lại cho thêm một phản ví dụ khác với  $n=53$ .

Năm 1963, Diananda đã thiết lập được một đẳng thức khác rất ấn tượng, đó chính là:

$$S_{n+2}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = S_n(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{2} - \frac{(a_n - a_{n+1})(a_n - a_1)}{2x_r(a_n + a_1)}$$

Từ đây suy ra, nếu với một bộ giá trị  $(a_1, \dots, a_n)$  nào đó ta có  $S_n(a_1, \dots, a_n) \leq \frac{n}{2}$  và có một giá trị  $r$  nào đó,  $1 \leq r \leq n$ , để mà  $a_{r-1}, a_r, a_{r+1}$  (chỉ số tuần hoàn) đơn điệu (chúng ta có thể giả sử rằng  $r=n$ ), thì sẽ dẫn đến sự đúng đắn của bất đẳng thức  $S_{n+1}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \leq \frac{n+1}{2}$ .

Với  $n$  lẻ thì rõ ràng rằng luôn luôn có một giá trị  $r$  như thế do chuỗi tuần hoàn có độ dài lẻ không thể chuyển giữa sự tăng và sự giảm ở mọi vị trí. Diananda rút ra được định lý sau

**Định lý Diananda.** Nếu (2) sai với  $n=n_0$  lẻ nào đó thì nó sẽ sai với mọi  $n \geq n_0$ . Nếu (2) đúng cho  $n=n_0$  chẵn nào đó thì nó cũng sẽ đúng với mọi  $n \leq n_0$ .

Cùng với định lý này ông đã đưa ra một phản ví dụ cho (1) với  $n=27$ . Điều này có nghĩa là (2) sai với mọi  $n \geq 27$ . Cùng một lập luận như đã được sử dụng trong định lý Diananda cũng cho thấy với  $n$  chẵn, dấu bằng của (2) xảy ra ở mọi điểm.  $a^\alpha = \frac{1}{2}(1+\alpha, 1-\alpha, \dots, 1+\alpha, 1-\alpha)$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) trong khi với  $n$  lẻ nó chỉ xảy ra với  $a^0 = (1, \dots, 1)$ .

Cùng lúc này Djokovic đã chứng minh rằng (2) đúng cho  $n=8$  và Bajanski chứng minh (2) cũng đúng cho  $n=7$ . Năm 1968, Nowosad đã chứng minh (2) đúng cho  $n=10$  và vì vậy theo lý thuyết trên bất đẳng thức Shapiro cũng đúng cho  $n=9$ . Do đó cho đến lúc này, chỉ còn lại có 10 trường hợp chưa được xác định là khi  $n=12$  đối với  $n$  chẵn và  $n=9, 11, \dots, 25$  khi  $n$  lẻ. Năm 1971, Daykin và Malcolm đã chứng minh (2) sai với  $n=25$  và Kristinasen cũng đã chứng minh (2) đúng cho  $n=12$ , và vì vậy đúng cho  $n=11$ . Vào năm này Drinfel'd đã đưa ra một chứng minh rất ngắn gọn, sơ cấp mà lại sáng tạo. Đồng thời ông đã đánh giá xấp xỉ một bất đẳng thức gần với Shapiro đúng với mọi  $n$ :

$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \cdot 0,989133\dots$  Việc chứng minh bất đẳng thức trên dựa theo một định lý nổi tiếng và một bất đẳng thức hoán vị sau đây.

**Định lý Drinfel'd.** Nếu đặt  $g(x)$  là một bao lồi dưới của hai hàm lồi giảm

$$f(x) = 2(e^x + e^{\frac{x}{2}})^{-1} \quad \text{và} \quad h(x) = e^{-x} \quad \text{thì} \quad \inf_n \frac{2}{n} S_n(x_1, \dots, x_n) \geq g(0) \quad \text{đúng với mọi } n.$$

Giá trị thực của  $g(0)$  rất gần với 1:  $g(0) = 0,989133\dots$  và nó không phải là một số đại số.

**Bất đẳng thức hoán vị.** Nếu  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  và  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  thì đối với bất kỳ hoán vị

$$(k_1, \dots, k_n) \text{ nào của các chỉ số } (1, 2, \dots, n), \text{ ta có bất đẳng thức: } \sum_{i=1}^n a_i b_{k_i} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Việc tìm miền đúng của (2) đã kéo dài gần 20 năm sau đó. Bắt đầu vào **năm 1976**, **Godunova** và **Leni** đã chứng minh (2) đúng cho  $n=12$ . Cùng lúc này **Bushell** cũng đã đưa ra một phản ví dụ khác cho  $n=25$  và ông cũng đưa ra một chứng minh sơ cấp mới với  $n=7$ . **Bushell** cùng với **Craven** đã chứng minh rằng (2) đúng với mọi  $n \leq 23$ . **Năm 1979**, **Troesch** và **Searcy** đã xét bài toán đại số các giá trị riêng tương ứng và chứng minh một kết quả ấn tượng: **Bất đẳng thức (2) không đúng với mọi  $n \geq 14$ . Bằng cách dùng máy tính số, ông đã chỉ ra rằng (2) đúng với mọi  $n$  chẵn  $\geq 12$  và  $n$  lẻ  $\leq 23$ . Năm 1985**, trong tạp chí **Math Computing**, **Troesch** đã thành công trong việc đưa ra một chứng minh (2) đúng cho  $n=13$  và đến **năm 1989** ông mới chứng minh được  $n=23$ . Như vậy (2) đã được chứng minh cho tất cả các giá trị  $n$  còn lại là 15, 17, 19 và 21.

Gần 40 năm sau khi **Shapiro** đề xuất bài toán, **Troesch** đã là người kết thúc một giai đoạn lịch sử kéo dài cho việc chứng minh bất đẳng thức rất nổi tiếng này khi mà ông thông qua việc giải bài toán với  $n=23$  và đã hoàn thành việc chứng minh (2) với kết quả ấn tượng như sau:

**Bất đẳng thức (2) đúng với mọi  $n$  chẵn  $\leq 12$  và  $n$  lẻ  $\leq 23$ , mọi giá trị còn lại của  $n$  thì (2) sai.**

Sau ông một số nhà toán khác như **Diananda**, **Mordell** và **Daykin** cũng đã đề xuất một số bài toán mở rộng. **Năm 1992**, **Achim Clausen** đã đề nghị bài toán sau:

$$\text{Mệnh đề 2: Chứng minh: } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+2} + a_{i+3}} \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \forall a_i > 0, \text{ ở đây } \lceil x \rceil \text{ là phần nguyên của } x. (7)$$

Có lẽ đây lại là một thách thức lớn nữa cho các nhà toán học trẻ trong thế kỉ XXI này.

Bây giờ chúng ta quay trở lại vấn đề là tìm  $f(n) = \inf_{a_i > 0} f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , tức là tìm cận dưới của bất

$$\text{đẳng thức Shapiro. Năm 1958, Ranikin đã chứng minh } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n} < \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Năm 1971, Drinfel'd đã chứng minh } \lambda = \frac{1}{2} \varphi(0) = 0.4945668... \text{ tức là chứng minh được:}$$

$$\text{Mệnh đề 3: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.989133 \times \frac{n}{2}, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0 (8)$$

Tạp chí **Kvant** của Nga số 4 năm 1991 đã chứng minh bằng toán sơ cấp 2 kết quả sau đây:

$$\text{Mệnh đề 4: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > (\sqrt{2} - 1)n = 0.41421356n, \forall a_i > 0 (9)$$

$$\text{Mệnh đề 5: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{5}{12}n = 0.41666666n, \forall a_i > 0 (10)$$

Bây giờ tôi xin giới thiệu một cách đánh giá tốt nhất bằng toán sơ cấp về bất đẳng thức này:

$$\text{Mệnh đề 6: } S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.4577996n, \forall a_i > 0 \quad (11)$$

**Chứng minh**

Xét  $0 < \alpha < 1; k \in \mathbb{N}^*$ . Đặt  $a_{n+1} = a_1; a_{n+2} = a_2; \beta = \frac{\alpha^k}{k(1-\alpha)}$ . Ta có:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i + \alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} + k \cdot \frac{\beta(\alpha a_{i+1} + a_{i+2})}{a_{i+1} + a_{i+2}} - k\beta \right] =$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i + \alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} + k \cdot \frac{\beta(\alpha a_i + a_{i+1})}{a_i + a_{i+1}} \right] - k\beta n \geq \sum_{i=1}^n \left[ (k+1) \cdot k+1 \sqrt{\frac{a_i + \alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}}} \cdot \frac{\beta^k (\alpha a_i + a_{i+1})^k}{(a_i + a_{i+1})^k} \right] - k\beta n \quad (12)$$

Ta sẽ chứng minh:  $(a_i + \alpha^k a_{i+1})(\alpha a_i + a_{i+1})^k \geq \alpha^k (a_i + a_{i+1})^{k+1} \quad (13)$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha^k t_i)(\alpha + t_i)^k \geq \alpha^k (1 + t_i)^{k+1} \quad \text{với } t_i = \frac{a_i + 1}{a_i} \geq 0$$

Xét hàm số  $f(t) = (1 + \alpha^k t)(\alpha + t)^k - \alpha^k (1 + t)^{k+1}$  với  $t \geq 0$ .

Ta có:  $f^{(m)}(t) = (1 + \alpha^k t)(\alpha + t)^{k-m} k(k-1) \dots [k-(m-1)] +$   
 $+ m \cdot \alpha^k (\alpha + t)^{k-(m-1)} k(k-1) \dots [k-(m-2)] - \alpha^k (1+t)^{k+1-m} (k+1) k \dots [k-(m-2)]$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = k(k-1) \dots [k-(m-2)] [(k-m+1)\alpha^{k-m} + m\alpha^{2k-m+1} - (k+1)\alpha^k]$$

$$\geq k(k-1) \dots (k-m+2) [(k+1)^{k+1} \sqrt{\alpha^{(k-m)(k-m+1)+m(2k-m+1)}} - (k+1)\alpha^k] = 0$$

Do  $f(t)$  là một đa thức bậc  $k$  nên  $f^{(k)}(t) = \text{const} = f^{(k)}(0) \geq 0$

$$\Rightarrow f^{(k-1)}(t) \geq f^{(k-1)}(0) \geq 0 \Rightarrow f^{(k-2)}(t) \geq f^{(k-2)}(0) \geq 0, \dots, f(t) \geq f(0) = 0$$

Ta có:  $f(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow f(t_i) \geq 0 \quad \forall t_i \geq 0 \Rightarrow (13) \text{ đúng}$

Từ (12) và (13) suy ra:

$$S \geq \sum_{i=1}^n \left[ (k+1) \cdot k+1 \sqrt{\beta^k \alpha^k \cdot \frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}}} \right] - k\beta n = (k+1)(\alpha\beta)^{\frac{k}{k+1}} \cdot \sum_{i=1}^n k+1 \sqrt{\frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}}} - k\beta n$$

$$\geq [(k+1)(\alpha\beta)^{\frac{k}{k+1}} - k\beta] n = \left[ (k+1) \frac{\alpha^k}{[k(1-\alpha)]^{\frac{k}{k+1}}} - \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \right] n$$

$$\text{Đặt } x = k+1 \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}} > 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{x^{k+1}}, \text{ khi đó: } g(x) = (k+1) \cdot \frac{\alpha^k}{[k(1-\alpha)]^{\frac{k}{k+1}}} - \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right)^k x^k \left[\frac{k+1}{k^{\frac{k}{k+1}}} - x\right] = \frac{(x^{k+1} - 1)^k}{x^{k^2}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right]$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{k(x^{k+1} - 1)^{k-1} (k+1)x^k \cdot x^{k^2} - k^2 x^{k^2-1} (x^{k+1} - 1)^k}{x^{2k^2}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - \frac{(x^{k+1} - 1)^k}{x^{k^2}}$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(k+1)k x^{k+1} - k^2 (x^{k+1} - 1)}{x^{k^2+1}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - \frac{x^{k+1} - 1}{x^{k^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(k+1)k x^{k+1} - k^2 x^{k+1} + k^2] \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - x(x^{k+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow k(x^{k+1} + k) \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - x^{k+2} + x = 0 \Leftrightarrow (x^{k+1} + k) \left[(k+1)k^{\frac{1}{k+1}} - kx\right] = x^{k+2} - x$$

$$\Leftrightarrow (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k+1)k^{\frac{k+2}{k+1}} - kx^{k+2} - k^2 x = x^{k+2} - x$$

$$\Leftrightarrow (k+1)x^{k+2} - (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k^2 - 1)x - (k+1)k^{\frac{k+2}{k+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = x^{k+2} - k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k-1)x - k^{\frac{k+2}{k+1}} = 0$$

$$\text{Ta có: } h'(x) = (k+2)x^{k+1} - (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^k + (k-1)$$

$$\geq (k+1) \cdot k^{\frac{1}{k+1}} \sqrt{\left(\frac{k+2}{k} \cdot x^{k+1}\right)^k (k-1) - (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^k} = (k+1) \left[\left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} (k-1)^{\frac{1}{k+1}} - k^{\frac{1}{k+1}}\right] x^k$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} (k-1)^{\frac{1}{k+1}} - k^{\frac{1}{k+1}} \geq 0 \Leftrightarrow (k+2)^{\frac{k}{k+1}} (k-1)^{\frac{1}{k+1}} \geq k$$

$$\Leftrightarrow (k+2)^k (k-1) \geq k^{k+1} \Leftrightarrow \left(\frac{k+2}{k}\right)^k \geq \frac{k}{k-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k \geq 1 + \frac{1}{k-1}$$

$$\text{Ta có: } \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k > 1 + \frac{2}{k} \cdot k = 3 > 1 + \frac{1}{k-1}, \forall k \geq 2 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ tăng trên } (1; +\infty)$$

Mặt khác,  $h(x)$  là hàm liên tục và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ ;  $h(1) = k - k^{\frac{1}{k+1}} - k^{\frac{k+2}{k+1}} < -k^{\frac{1}{k+1}} < 0$

nên phương trình  $h(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x_0 > 1$

$\Rightarrow g'(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x_0 > 1$ .

$\Rightarrow$  Bảng biến thiên của hàm  $g(x)$ . Từ đó suy ra

Max  $g(x) = g(x_0)$  với  $x_0$  là nghiệm của phương trình

$$h(x) = x^{k+2} - k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k-1)x - k^{\frac{k+2}{k+1}} = 0 \text{ và } g(x) = \frac{(x^{k+1} - 1)^k}{x^{k^2}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right].$$

| $x$     | 1 | $x_0$ | $+\infty$ |
|---------|---|-------|-----------|
| $g'(x)$ | + | 0     | -         |
| $g(x)$  |   | Max   |           |

Sử dụng Maple ta tính được các giá trị  $g(x_0)$  tương ứng với cách chọn các giá trị của  $k$ , ví dụ  $k = 500$  thì  $x_0 = 1.013294063$  và  $g(x_0) = 0.4577996$ .

### III. MỘT SỐ DẠNG PHÁT TRIỂN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SHAPIRO

Bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi bộ số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Tuy nhiên ta có thể chứng minh bất đẳng thức Shapiro đúng với bộ số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  đơn điệu

**Mệnh đề 7.** Cho bộ dãy số đơn điệu bất kỳ  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  tức là:

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0 \end{array} \right. \text{ Khi đó ta có } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}$$

#### Chứng minh

$$\text{Đặt } S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; T = \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1} + \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$S + T = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n + a_1} + \frac{a_n + a_1}{a_1 + a_2} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} \cdot \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n + a_1} \cdot \frac{a_n + a_1}{a_1 + a_2}} = n$$

Mặt khác, xét hiệu:

$$S - T = \frac{a_1 - a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 - a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n + a_1} + \frac{a_n - a_1}{a_1 + a_2}$$

$$\text{Biến đổi biểu thức: } a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1).$$

Từ đó suy ra:

$$S - T = (a_1 - a_2) \left( \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right) + (a_2 - a_3) \left( \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right) + \dots + (a_{n-1} - a_n) \left( \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right)$$

• Nếu  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$  thì  $a_1 - a_2 \leq 0; a_2 - a_3 \leq 0, \dots, a_{n-1} - a_n \leq 0$

Do  $a_1 + a_2$  là tổng nhỏ nhất trong các tổng  $a_i + a_j$  nên  $\frac{1}{a_1 + a_2}$  là số lớn nhất trong các số

$$\frac{1}{a_i + a_j} \Rightarrow \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} \leq 0, \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} \leq 0, \dots, \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \leq 0. \text{ Suy ra } S - T \geq 0.$$

• Nếu  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$  thì  $a_1 - a_2 \geq 0; a_2 - a_3 \geq 0, \dots, a_{n-1} - a_n \geq 0$

Do  $a_1 + a_2$  là tổng lớn nhất trong các tổng  $a_i + a_j$  nên  $\frac{1}{a_1 + a_2}$  là số nhỏ nhất trong các số

$$\frac{1}{a_i + a_j} \Rightarrow \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} \geq 0, \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} \geq 0, \dots, \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \geq 0. \text{ Suy ra } S - T \geq 0.$$

Như vậy trong cả hai trường hợp, ta đều có  $S - T \geq 0$  hay  $S \geq T$ , suy ra

$$2S \geq S + T \geq n \Rightarrow S \geq \frac{n}{2}$$

**Chú ý:** Ta cũng có thể chứng minh mệnh đề bằng phương pháp quy nạp



Bây giờ chúng ta sẽ xét một hoán vị khác của  $a_1, a_2, \dots, a_n$  để dẫn đến mệnh đề sau

**Mệnh đề 8:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét bất đẳng thức sau:

$$\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_2}{a_1 + a_3} + \frac{a_3}{a_2 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_1} + \frac{a_1}{a_n + a_2} \geq \frac{cn}{2} \quad (12)$$

**a.** Khi  $c=1$  thì bất đẳng thức có đúng với mọi dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  hay không? Nếu không thì có tồn tại những giá trị xác định của  $n$  để nó đúng hay không?

**b.** Tồn tại hay không một hằng số  $c > 0$  để bất đẳng thức đúng với mọi dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

**c.** Tìm một cận dưới thích hợp cho hàm số  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Xét bất đẳng thức với  $n=3$  ta có:  $\varphi_3 = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_1} + \frac{a_3}{a_1 + a_2} \geq \frac{3}{2}$

Xét bất đẳng thức với  $n=4$  ta có:  $\varphi_4 = \frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} + \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3} \geq 2 \sqrt{\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} \cdot \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3}} = 2$

Ta sẽ chứng minh ba câu **a.** (bất đẳng thức không đúng khi  $n \geq 5$ ), **b.** và **c.** với kết quả: cận dưới đúng của hàm số  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là  $\lambda = 2$ .

Thật vậy chọn  $a_1 = a_2 = 1; a_k = a^k, \forall k \geq 3$  thì  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_k}{a_{k-1} + a_{k+1}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^k}{a^{k-1} + a^{k+1}} = 0, \forall k \geq 4$

Với  $k \leq 3$ :  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_2}{a_1 + a_3} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a^3} = 1, \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_3}{a_2 + a_4} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^3}{1 + a^4} = 0; \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_1}{a_n + a_2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a^n} = 1$ .

Khi đó  $\lim_{a \rightarrow 0} \varphi_n(1, 1, a^3, \dots, a^n) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + a^3} + \frac{a^3}{1 + a^4} + \dots + \frac{a^n}{a^{n-1} + 1} + \frac{1}{a^n + 1} \right) = 2$

Giả sử tồn tại  $c > 0$  sao cho  $\varphi_n \geq \frac{cn}{2}$  thì  $2 \geq \frac{cn}{2}, \forall n \geq 4$ , nhưng điều này vô lí.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mọi  $n \geq 4$  thì  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 2$ .

Thật vậy, sử dụng CBS ta có  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)}$ .

Ta sẽ chứng minh  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$

Nếu  $n$  chẵn thì  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = [(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_n)]^2 \geq$

$$\geq 4(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1})(a_2 + a_4 + \dots + a_n) \geq 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$$

Nếu  $n$  lẻ thì giả sử  $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , khi đó ta có

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n)(a_2 + a_4 + \dots + a_{n-1}) \geq 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$$



Năm 1973, nhà Toán học **Elbert** đã nghiên cứu bất đẳng thức trong mệnh đề sau đây:

**Mệnh đề 9:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét hằng số  $c$  tốt nhất của bất đẳng thức sau:

$$g_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1} \geq cn$$

Nếu đặt  $\psi(x)$  là một bao lồi dưới của hai hàm lồi  $f(x) = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ ;  $h(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x/2}}$

Đặt  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(n)}{n}$  với  $g(n) = \inf_{a_i \geq 0} g_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$  thì  $c = \psi(0) = 0.978012\dots$

Một hướng tiếp cận khác là so sánh các biểu thức hoán vị dạng **Shapiro** chúng ta xét mệnh đề:

**Mệnh đề 10:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét các biểu thức hoán vị sau:

$$E_n = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; \quad F_n = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1}$$

Chứng minh hoặc bác bỏ bất đẳng thức  $E_n \geq F_n$ .

Với  $n=3$  thì có thể viết  $E_3 = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ ;  $F_3 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Trong trường hợp này ta có bất đẳng thức đúng  $E_3 \geq F_3$ . Thật vậy, xét biểu thức

$G = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$ , theo **AM - GM** ta có  $E_3 + G \geq 3 = F_3 + G \Rightarrow E_3 \geq F_3$

Bây giờ chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát với lời giải của nhà toán học Mỹ

**Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, Illinois.**

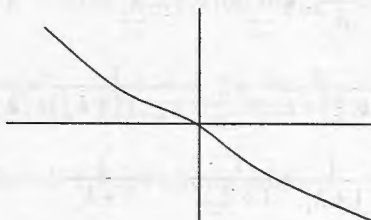
Sử dụng phương pháp bao lồi được phát triển bởi **Drinfeld** ta sẽ bác bỏ bất đẳng thức ở trong **Mệnh đề 10**. Trước khi làm điều này ta cần một kết quả mở đầu sau đây

Gọi  $f(x)$  là hàm được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^x)^{-1}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}(e^{-x} - 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

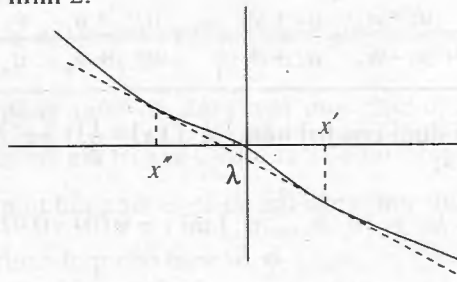
Dễ dàng kiểm tra được rằng  $f(x)$  là hàm lồi trên  $(-\infty, 0)$  và  $(0, +\infty)$ . Từ  $f'(0^-) = -\frac{1}{4}$

và  $f'(0^+) = -\frac{1}{2}$  ta suy ra đồ thị của  $f(x)$  có dạng như hình 1:



Hình 1

Gọi  $g(x)$  là một bao lồi của  $f(x)$  và luôn bé hơn hoặc bằng  $f(x)$ . Đồ thị của  $g(x)$  gồm ba phần như trên hình 2:



Hình 2

$(C_1)$   $y = (1 - e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^x)^{-1}$  khi  $x < x''$ ;  $(C_2)$   $y = \frac{1}{2}(e^{-x} - 1)$  khi  $x > x'$  và  $(C_3)$  là đường tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  khi  $x'' \leq x \leq x'$ .

Kí hiệu  $\lambda$  là tung độ giao điểm của  $(C_3)$  với trục tung. Sử dụng Maple, các bạn đồng nghiệp, **Peter Andrews** và **William Slough**, đã chỉ ra rằng

$$\lambda = -0.0219875218...$$

**Định lí 1.** Với mọi số nguyên dương  $n$  và mọi số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có

$$E_n - F_n \geq \lambda n$$

**Định lí 2.** Trong định lí 1,  $\lambda$  là hằng số tốt nhất. Hay nói cách khác, với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại ít nhất một số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn

$$E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n$$

**Nhận xét.** Chọn  $\varepsilon = \frac{|\lambda|}{2}$ . Khi đó sử dụng định lí 2, tồn tại một số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n = \frac{\lambda}{2}n < 0$ . Đây chính là nhận xét bác bỏ bất đẳng thức nêu ra trong Mệnh đề 10.

**Chứng minh định lí 1.** Trong chứng minh dưới đây chúng ta sử dụng một bất đẳng thức quen biết đó là Bất đẳng thức **hoán vị**: Nếu  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$  thì

$$\sum_{i=1}^n x_k y_{k_i} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ trong đó } (k_1, \dots, k_n) \text{ là một hoán vị của bộ chỉ số } (1, 2, \dots, n).$$

Đặt  $k_1 = \frac{a_2}{a_1}; k_2 = \frac{a_3}{a_2}; \dots; k_n = \frac{a_1}{a_n}$ , khi đó  $k_1 k_2 \dots k_n = 1$ .

$$E_n = \frac{1}{k_1(1+k_2)} + \dots + \frac{1}{k_{n-1}(1+k_n)} + \frac{1}{k_n(1+k_1)}$$

$$F_n = \frac{1}{1+k_1} + \frac{1}{1+k_2} + \dots + \frac{1}{1+k_n}$$

Vậy

$$E_n - F_n = \frac{1}{k_1(1+k_2)} - \frac{1}{1+k_2} + \dots + \frac{1}{k_n(1+k_1)} - \frac{1}{1+k_1} = \left(\frac{1}{k_1} - 1\right) \frac{1}{1+k_2} + \dots + \left(\frac{1}{k_n} - 1\right) \frac{1}{1+k_1}$$

Gọi  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  là một hoán vị của  $(k_1, \dots, k_n)$  sao cho  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ . Khi đó dãy

$\frac{1}{m_1} - 1; \frac{1}{m_2} - 1; \dots; \frac{1}{m_n} - 1$  là dãy giảm và dãy  $\frac{1}{1+m_n}; \frac{1}{1+m_{n-1}}; \dots; \frac{1}{1+m_1}$  là dãy tăng.

Sử dụng bất đẳng thức **Hoán vị** ta có

$$\begin{aligned} E_n - F_n &\geq \left(\frac{1}{m_1} - 1\right) \frac{1}{1+m_n} + \dots + \left(\frac{1}{m_n} - 1\right) \frac{1}{1+m_1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1-m_i}{m_i(1+m_{n+1-i})} + \frac{1+m_{n+1-i}}{m_{n+1-i}(1+m_i)} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i + m_{n+1-i})(1-m_i m_{n+1-i})}{2m_i m_{n+1-i} (1+m_i)(1+m_{n+1-i})} \end{aligned}$$

Đặt  $c_i = m_i m_{n+1-i}$  ta nhận được  $E_n - F_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ , trong đó  $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \frac{m_i + m_{n+1-i}}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}$

Chú ý rằng  $c_1 c_2 \dots c_n = (m_1 m_2 \dots m_n)^2 = (k_1 k_2 \dots k_n)^2 = 1$ .

Nếu  $c_i \geq 1$  thì  $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \frac{m_i + m_{n+1-i}}{m_i + m_{n+1-i} + 1 + m_i m_{n+1-i}} \geq \frac{1-c_i}{2c_i}$ .

Nếu  $c_i < 1$  thì  $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \left(1 - \frac{1+m_i m_{n+1-i}}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}\right) \geq \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \left(1 - \frac{1+m_i m_{n+1-i}}{(1+2\sqrt{m_i m_{n+1-i}})^2}\right)$

$$= \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \left(1 - \frac{1+c_i}{(1+\sqrt{c_i})^2}\right) = \frac{1-\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i} + c_i}$$

ở đây chúng ta sử dụng bất đẳng thức quen biết  $(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})^2, \forall x, y \geq 0$ .

Vậy ta được:  $E_n - F_n \geq \sum_{c_i < 1} \frac{1-\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i} + c_i} + \sum_{c_i \geq 1} \frac{1-c_i}{2c_i}$

Đặt  $c_i = e^{x_i}$ , thì:  $E_n - F_n \geq \sum_{x_i < 0} \left(1 - e^{\frac{x_i}{2}}\right) \left(e^{\frac{x_i}{2}} + e^{x_i}\right) + \sum_{x_i \geq 0} \frac{1}{2} (e^{-x_i} - 1)$

Chú ý rằng từ  $c_1 c_2 \dots c_n = 1$  ta có  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ , bất đẳng thức trở thành

$$E_n - F_n \geq \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

Do  $f(x)$  là hàm lồi nên  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \geq g\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = g(0) = \lambda$

Tóm lại ta có  $E_n - F_n \geq \lambda n$ . Định lí 1 được chứng minh.

**Chứng minh định lý 2.** Với  $\varepsilon > 0$ , gọi  $x'$  và  $x''$  như ở hình 2.

Đặt  $u_0 = e^{x'}$ ,  $v_0 = e^{x''}$ ,  $\alpha_0 = \frac{x''}{x'' - x'}$ , dễ dàng kiểm tra  $\lambda = \alpha_0 \frac{1-u_0}{2u_0} + (1-\alpha_0) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0}$

Chú ý rằng  $u_0^{\alpha_0} v_0^{1-\alpha_0} = 1$  và  $0 < \alpha_0 < 1$ . Với  $n$  đủ lớn có thể tìm được  $\alpha_1$  và  $u_1$  sao cho  $\alpha_1$  là một phân số với mẫu số là  $n$  và tử số là số chẵn,  $u_1^{\alpha_1} v_0^{1-\alpha_1} = 1$ ,

$$\left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{v_0}} \right) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ và } \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0} - \lambda < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Do  $\alpha_1 n$  là chẵn nên ta có thể đặt

$$k_1 = \delta, k_2 = \frac{u_1}{\delta}, k_3 = \delta, k_4 = \frac{u_1}{\delta}, \dots, k_{\alpha_1 n - 1} = \delta, k_{\alpha_1 n} = \frac{u_1}{\delta}, k_{\alpha_1 n + 1} = \dots = k_n = \sqrt{v_0}.$$

Chú ý rằng  $k_1 k_2 \dots k_n = u_1^{\frac{1}{2} \alpha_1 n} v_0^{\frac{1}{2} (1 - \alpha_1) n} = 1$ . Từ đó ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1-k_1}{k_2(1+k_2)} + \dots + \frac{1-k_n}{k_n(1+k_1)} = \frac{1-\delta}{\delta \left(1 + \frac{u_1}{\delta}\right)} \cdot \frac{\alpha_1 n}{2} + \frac{1 - \frac{u_1}{\delta}}{\frac{u_1}{\delta}(1+\delta)} \left( \frac{\alpha_1 n}{2} - 1 \right) \\ & + \frac{1 - \frac{u_1}{\delta}}{\frac{u_1}{\delta}(1 + \sqrt{v_0})} + \frac{1 - \sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}(1 + \sqrt{v_0})} (n - \alpha_1 n - 1) + \frac{1 - \sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}(1 + \delta)} \\ & = n \left[ \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{1-\delta}{\delta + u_1} + \frac{\delta - u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1 \right) + \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(u_1 - \delta\sqrt{v_0})}{u_1 \sqrt{v_0} (1+\delta)(1+\sqrt{v_0})} \right] \\ & \leq n \left[ \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{1-\delta}{\delta + u_1} + \frac{\delta - u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1 \right) + \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{v_0}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } \delta \text{ đủ nhỏ, } \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{1-\delta}{\delta + u_1} + \frac{\delta - u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1 \right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sử dụng (\*), ta suy ra

$$\frac{1-k_1}{k_2(1+k_2)} + \dots + \frac{1-k_n}{k_n(1+k_1)} = n \left( \frac{\varepsilon}{3} + \lambda + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \right) = n(\lambda + \varepsilon)$$

Cuối cùng, ta chọn  $a_1 = 1; \frac{a_{i+1}}{a_i} = k_i, 1 \leq i \leq n-1, \frac{a_1}{a_n} = k_n$ . Điều đó là có thể vì  $k_1 k_2 \dots k_n = 1$ .

Vậy ta có  $E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n$ . Định lý 2 được chứng minh xong.

IV. MỘT SỐ DẠNG PHÁT TRIỂN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC NESBIT

Bài 1. Cho  $a, b, c, d, p, q > 0$  và  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^k}{pb+qc} + \frac{b^k}{pc+qa} + \frac{c^k}{pa+qb} \geq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{p+q}$$

Bài 2. Cho  $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$

Bài 3. Cho  $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left( \frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right)$

Bài 4. Cho  $a, b, c, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{a(b^p + c^p)}{b^{p+1} + c^{p+1}} + \frac{b(c^p + a^p)}{c^{p+1} + a^{p+1}} + \frac{c(a^p + b^p)}{a^{p+1} + b^{p+1}} \right]$$

Bài 5. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \left[ \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)} \right]$$

Bài 6. Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2} \right], \forall a, b, c > 0$

Bài 7. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{ab+bc+ca}$$

Bài 8. Cho  $a \geq b \geq c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}$

Bài 9. Cho  $r, s$  là các số thực dương,  $r < s$  và  $a, b, c \in (r, s)$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} + \frac{(r-s)^2}{2r(r+s)}$$

Bài 10. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 11. a) Cho  $a, b, c > 0$  và số thực  $k$  thỏa mãn  $0 \leq k \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{2}$$

b) Tìm số thực  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức đúng với mọi  $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{2}$$

Bài 12. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2}{3} \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{13}{6}$

Bài 13. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq 2$

Bài 14. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}$

Bài 15. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2abc}{3(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{31}{18}$

Bài 16. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{27abc}{2(a+b+c)^3} \geq 2$

Bài 17. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Bài 18. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 9 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 6$

Bài 19. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 16 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8$

Bài 20. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$

Bài 21. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2 \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^{\frac{2}{3}} \geq 2$

Bài 22. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(b+c)^2} \right) \geq \frac{3}{2} \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq (ab+bc+ca) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(b+c)^2} \right)$$

Bài 23. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

Bài 24. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$

Bài 25. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{bc}{a^2+bc} + \frac{ca}{b^2+ca} + \frac{ab}{c^2+ab}$

Bài 26. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab}$

Bài 27. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{7(a^3+b^3+c^3)}{4(a^3+b^3+c^3)+2abc}$

Bài 28. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3+abc}$$

Bài 29. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{6}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 30. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Bài 31. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

Bài 32. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{16(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Bài 33. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Bài 34. Cho  $a, b, c > 0$  và  $r, s$  là các số thực dương sao cho  $r \geq s$ .

$$\text{Chứng minh: } \frac{a^r}{b^r+c^r} + \frac{b^r}{c^r+a^r} + \frac{c^r}{a^r+b^r} \geq \frac{a^s}{b^s+c^s} + \frac{b^s}{c^s+a^s} + \frac{c^s}{a^s+b^s}$$

Bài 35. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 36. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^3 + \frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 37. Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $n \geq \log_2 3 - 1$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n + \frac{(2^{n+1}-3)abc}{2^{n-3}(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 38. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + 2(\sqrt{8}-3)\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2$$

Bài 39. Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{2c}{a+b}} + (2^n\sqrt{2}-3)\sqrt[n]{\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2^n\sqrt{2}$$

**Bài 40.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $k \geq \log_2 3 - 1$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k + \frac{3(2^{k+1}-3)}{2^k} \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 2$$

**Bài 41.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^n} + \frac{b}{(c+a)^n} + \frac{c}{(a+b)^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(a+b+c)^{n-1}}$$

**Bài 42.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$  và số thực  $\alpha \geq 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

**Bài 43.** Cho  $a, b, c > 0$  và số thực  $k$  thỏa mãn  $k \geq \frac{2}{3}$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$$

**Bài 44.** Cho  $a, b, c > 0$  và số thực  $r$  thỏa mãn  $r \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{a}{b+c}\right)^r + \left(\frac{b}{c+a}\right)^r + \left(\frac{c}{a+b}\right)^r \geq \frac{3}{2^r}$$

**Bài 45.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{3n}{4} - \frac{1}{4} \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \right)$$

**Bài 46.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là dãy số thực dương đơn điệu tăng tức là

$$\begin{cases} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0 \end{cases} \text{ Chứng minh: } \frac{a_1}{a_2+a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}$$

**Bài 47.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{4} \left( \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \right)$$

**Bài 48.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm số thực  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{k \cdot \text{Max}\{(a-b)^2; (b-c)^2; (c-a)^2\}}{ab+bc+ca}$$

**Bài 49.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 1 + \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$

**Bài 50.** Tìm hằng số tốt nhất của  $k$  để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + k \left( \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} - 1 \right)$$



## § 24.4. BẤT ĐẲNG THỨC JACK GARFUNKEL VÀ MỘT SỐ MỞ RỘNG

Một trong các dạng rất khó của bất đẳng thức là bài toán tìm hằng số tốt nhất trong đánh giá. Nói chung với dạng toán này của bất đẳng thức nhiều biến số chỉ có thể tìm được lời giải nếu ta quy được từ bất đẳng thức nhiều biến số về một biến số. Khi đó dấu đẳng thức không nhất thiết đạt tại tâm mà có thể xảy ra tại các điểm lệch nhau. Hằng số tốt nhất trong đánh giá thường là giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của một hàm số nào đó. Chúng ta cùng làm quen về dạng toán này qua bất đẳng thức nổi tiếng của nhà toán học Mỹ *Jack Garfunkel* đưa ra năm 1989.

**Bài toán. [Bài 1490\* tạp chí CRUX]** Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq k\sqrt{a+b+c} \text{ đúng với mọi } a, b, c \text{ là các số thực dương.}$$

Đây là bất đẳng thức khó và đã không có lời giải hoàn chỉnh nào được đưa ra trong một thời gian dài. Khó khăn đầu tiên là ở việc dự đoán giá trị nhỏ nhất của  $k$ , hay nói khác đi là xác định được trường hợp đẳng thức xảy ra. Rất khó đoán trước, là đẳng thức xảy ra không phải trong trường hợp  $a=b=c$  như vẫn thường gặp. Vậy làm thế nào để tìm được giá trị đó. Những tìm tòi sâu sắc về bất đẳng thức trong những năm gần đây cho chúng ta một số kinh nghiệm để giải quyết vấn đề này. Đó là đối với các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị ba biến thì đẳng thức thường xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc biến còn lại đạt giá trị biên.

Sử dụng nhận xét này ta xét  $b=c$ , khi đó bất đẳng thức trở thành:  $\sqrt{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{2} \leq k\sqrt{a+2b}$ .

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz*:  $\sqrt{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)(a+b+b)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{a+2b}$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$ . Từ 2 đánh giá trên suy ra  $k \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Xét các giá trị tại biên:

Nếu  $c=0$ , bất đẳng thức trở thành  $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a+b}$  hay là  $\sqrt{b(a+b)} \leq (k-1)(a+b) + b$ .

Cho  $b=0$  ta thu được  $k \geq 1$ , do đó  $k-1 \geq 0$ . Áp dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có  $(k-1)(a+b) + b \geq 2\sqrt{k-1}\sqrt{b(a+b)}$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(k-1)a = (2-k)b$ , điều này chỉ có thể nếu  $1 \leq k \leq 2$ . Từ đây thu được  $2\sqrt{k-1} \geq 1$  hay là  $k \geq \frac{5}{4}$ .

Do  $\frac{5}{4} > \sqrt{\frac{3}{2}}$  nên  $\frac{5}{4}$  có khả năng là giá trị cần tìm. Ta sẽ đi chứng minh điều đó.

**Bất đẳng thức Jack Garfunkel.** Với các số thực không âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ  $(a, b, c)$  là các hoán vị của  $(3, 1, 0)$ .

Đây là một bất đẳng thức đại số rất nổi tiếng: đẹp, khó và đầy thách thức. Những lời giải của nó đồng thời cũng cho ta những phương pháp mới để chứng minh một số lớp bất đẳng thức khác. Sau đây là một số lời giải chúng tôi tập hợp được từ năm 2003.

**Lời giải 1. [2003, Gabriel Dospinescu]**

$$\text{Đặt } x = \sqrt{\frac{a+b}{2}}, y = \sqrt{\frac{a+c}{2}}, z = \sqrt{\frac{b+c}{2}} \Rightarrow a = x^2 + y^2 - z^2, b = x^2 + z^2 - y^2, c = y^2 + z^2 - x^2$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{y} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{z} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\text{hay } x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ .

Do  $\frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{5}{4} (x + \sqrt{y^2 + z^2})$  nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5}{4} (x + \sqrt{y^2 + z^2})$$

Điều này tương đương với  $f(x) \leq 0$  với mọi  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y$  trong đó:

$$f(x) = 4(y-z)x^3 - yzx^2 + (4z^3 - 4y^3 + 4y^2z + 4yz^2 - 5yz\sqrt{y^2 + z^2})z + 4yz(y^2 - z^2)$$

Nếu  $y = z$  thì  $f(x) = -xy^2(x-y) - xy^3(5\sqrt{2} - 7) \leq 0$ . Giả sử  $y > z$  ta có

$$f(0) = 4yz(y^2 - z^2 \geq 0); \quad f(y) = y^2z(3y + 4z - 5\sqrt{y^2 + z^2}) \leq 0$$

$$f(\sqrt{y^2 + z^2}) = 2yz(4z\sqrt{y^2 + z^2} - y^2 - 5z^2) = -2yz(\sqrt{y^2 + z^2} - 2z)^2 \leq 0$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Vì vậy  $f(x)$  có 1 nghiệm  $x_1 \leq 0$ , 1 nghiệm  $x_2 \in (0, y]$  và 1 nghiệm  $x_3 \geq \sqrt{y^2 + z^2}$ , tức là  $f(x)$

không có nghiệm nằm giữa  $y$  và  $\sqrt{y^2 + z^2}$ , nghĩa là  $f(x)$  không đổi dấu trên  $[y, \sqrt{y^2 + z^2}]$ ,

nhưng  $f(y) \leq 0$  và  $f(\sqrt{y^2 + z^2}) \leq 0$ , vì thế  $f(x) \leq 0$  với mọi  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y$ .

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y^2 + z^2} \\ 2y = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \Leftrightarrow x:y:z = (2:1:\sqrt{3}) \Leftrightarrow a:b:c = 0:3:1.$$

**Bình luận.** Ý tưởng đổi biến  $(a, b, c)$  thành  $(x, y, z)$  là rất tự nhiên. Bước quan trọng nhất trong chứng minh là sử dụng bất đẳng thức  $\frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{5}{4} (x + \sqrt{y^2 + z^2})$ . Đây là một suy nghĩ mạo hiểm, bởi vì nó phá vỡ tính chất hoán vị của bất đẳng thức ban đầu. Từ đánh giá này chúng ta nhận được các biểu thức  $f(y)$  và  $f(\sqrt{y^2 + z^2})$  đơn giản đến không ngờ. Đây quả thực là một lời giải rất đẹp và can đảm.

**Lời giải 2.** [2006, Phạm Kim Hùng] Theo ý tưởng đổi biến trong lời giải 1 ta sẽ chứng minh

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{hay}$$

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)^2}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} (x+y+z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x+y+z)^2$$

với mọi  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ . Bây giờ ta sẽ chứng minh nhận xét sau:

**Nhận xét.** Nếu ta giảm  $x, y, z$  đi cùng một đại lượng  $t$  ( $0 \leq t \leq z$ ) thì vế trái tăng trong khi vế phải giảm. Thật vậy, ta sẽ chứng minh  $f(t) = \frac{(x+y+z-3t)^2}{(x-t)(y-t)(z-t)}$  là hàm tăng trên  $[0, z]$  và

$$g(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} (x+y+z-3t) \sqrt{(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} - (x+y+z-3t)^2 \quad \text{giảm trên } [0, z]$$

Thật vậy, đặt  $m = x-t, n = y-t, p = z-t$  và  $A = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, B = m+n+p$ , khi đó ta có  $m^2 n^2 p^2 f'(t) = (m+n+p)((m+n+p)(mn+np+pm) - 6mnp) \geq 0$  và theo **AM-GM** thì

$$g'(t) = -\left(\frac{15\sqrt{2}}{4} A + \frac{5\sqrt{2}}{4} \frac{B^2}{A} - 6B\right) \leq 0, \text{ tức là } g(t) \text{ giảm trên } [0, z]. \text{ Nhận xét được chứng minh.}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau khi đã cùng giảm  $x, y, z$  đi một lượng  $t$  nằm giữa 0 và  $z$ . Ta chọn  $t$  sao cho  $(x-t)^2 = (y-t)^2 + (z-t)^2$  (dễ thấy tồn tại  $t$  như vậy), vì thế ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $x^2 = y^2 + z^2$ , nghĩa là  $c = 0$ .

$$\text{Khi } c = 0 \text{ bất đẳng thức trở thành } \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a+b} - 2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a+b}} \geq 0, \text{ đúng (đpcm)}$$

**Bình luận.** Lời giải trên đã sử dụng phương pháp dồn biến toàn miền. Đây là một phương pháp rất mạnh để giải các bất đẳng thức ba biến đối xứng hay hoán vị mà đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau hoặc một biến đạt giá trị biên.

Một điểm thú vị nữa trong lời giải trên là việc nhân hai vế của bất đẳng thức với  $(x+y+z)$  trước khi sử dụng nhận xét. Tại sao phải làm việc này? Hãy xét bất đẳng thức:

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x+y+z)$$

Nếu ta cùng giảm  $x, y, z$  đi một đại lượng  $t$  ( $0 \leq t \leq z$ ) thì vế trái tăng. Xét vế phải:

$$f(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} - (x+y+z-3t)$$

Dễ dàng chứng minh hàm số này không tăng cũng không giảm. Vì thế ta không thu được kết luận gì.

**Lời giải 3.** [2007, Võ Quốc Bá Cẩn] Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz** ta có:

$$VT^2 \leq \sum_{cyc} a(5a+b+9c) \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} = 5(a+b+c)^2 \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}$$

Ta cần chứng minh  $(a+b+c) \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \leq \frac{5}{16}$ . Bất đẳng thức này đúng bởi vì:

$$16(VP - VT)(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b) = \\ \sum_{cyc} ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 + 243 \sum_{cyc} a^3 b^2 c + 835 \sum_{cyc} a^3 b c^2 + 232 \sum_{cyc} a^4 b c + 1230 a^2 b^2 c^2 \geq 0$$

**Bình luận.** Bước sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* rất thú vị. Ta có thể giải thích các hệ số 5, 1, 9 được tìm ra như thế nào. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \leq (ax+by+cz) \left( \frac{a}{x(a+b)} + \frac{b}{y(b+c)} + \frac{c}{z(c+a)} \right) \text{ với } x, y, z > 0$$

Một cách tự nhiên ta có thể chọn  $x = a + mb + nc, y = b + mc + na, z = c + ma + nb$  với  $m, n \geq 0$

$$\text{Khi đó ta có } \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \leq \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+b)(a+mb+nc)} \right) \left( \sum_{\text{cyc}} a(a+mb+nc) \right)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a(a+b)(a+mb+nc)^2}{a} = \frac{b(b+c)(b+mc+na)^2}{b} = \frac{c(c+a)(c+ma+nb)^2}{c}$$

Ta đã biết bất đẳng thức ban đầu đẳng thức xảy ra khi  $a = 3, b = 1, c = 0$  (và các hoán vị), thay các giá trị đó vào điều kiện trên ta nhận được  $4(3+m)^2 = (1+3n)^2$  hay  $2m - 3n = -5$ . Ngoài ra, để đơn giản, ta sẽ chọn  $m, n$  thỏa mãn  $\sum_{\text{cyc}} a(a+mb+nc) = (a+b+c)^2$ , nghĩa là  $m+n=2$ .

Vì vậy  $m = \frac{9}{5}, n = \frac{1}{5}$ . Cuối cùng ta cần chứng minh bất đẳng thức hoán vị với bậc 6.

Lời giải tiếp theo thuần túy sử dụng bất đẳng thức *AM – GM*, phần bình luận dành cho bạn đọc.

**Lời giải 4. [2008, Lê Hữu Điền Khuê]**

Giả sử  $a+b+c=1$  và đặt  $A = (a+b)(b+c)(c+a), B = \sum_{\text{cyc}} a^2(b+c)(c+a)$ .

$$\text{Khi đó: } \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c} \Leftrightarrow \left( \sum_{\text{cyc}} a \sqrt{(b+c)(c+a)} \right)^2 \leq \frac{25}{16} A$$

$$\Leftrightarrow B + 2 \sum_{\text{cyc}} ab(a+c) \sqrt{(a+b)(b+c)} \leq \frac{25}{16} A \Leftrightarrow 32 \sum_{\text{cyc}} ab(a+c) \sqrt{(a+b)(b+c)} \leq 25A - 16B$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* cho hai số ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &= 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} ab \sqrt{a+c} \right)^2 = 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (c+a) + 2 \sum_{\text{cyc}} ab^2 c \sqrt{(a+c)(a+b)} \right) \\ &\leq 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (c+a) + 2 \sum_{\text{cyc}} ab^2 c (2a+b+c) \right) = 2^{10} A (ab+bc+ca) (a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc) \\ &= 4 \left[ 32A \sum_{\text{cyc}} bc \right] (8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc) \leq \left[ 32A \sum_{\text{cyc}} bc + (8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc) \right]^2 \end{aligned}$$

Vì thế, chỉ cần chứng minh  $32A(ab+bc+ca) + 8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc \leq 25A - 16B$

$$\Leftrightarrow 32A(ab+bc+ca) + 8(a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc)(a+b+c)^2 \leq 25A(a+b+c)^2 - 16B(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} ab(a+b)(a-3b+2c)^2 + 2abc \left( 3 \sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} ab \right) \geq 0, \text{ đúng (đpcm).}$$

**Nhận xét.** Bước đầu tiên sử dụng *AM – GM* có thể thay thế bởi sử dụng *Cauchy – Schwarz*

$$VT^2 = 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} ab \sqrt{a+c} \right)^2 \leq 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} ab \right) \left( \sum_{\text{cyc}} ab(a+c) \right) = 2^{10} A (ab+bc+ca) (a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc)$$

Bây giờ chúng tôi chuyển sang một số dạng tổng quát của bất đẳng thức này.

Cách tổng quát đơn giản nhất là tăng số biến. Ta có bài toán như sau:

**Bài toán 1.** Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho với các số thực không âm  $a, b, c, d$  ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

Lời giải sau đây được phát triển dựa trên bất đẳng thức *Jack Garfunkel*.

**Lời giải.** Cho  $(a, b, c, d) = (3, 1, 0, 0)$  ta nhận được  $k \geq \frac{5}{4}$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đối

với  $k = \frac{5}{4}$  và do đó  $\frac{5}{4}$  là giá trị cần tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min(a, b, c, d)$ .

Theo bất đẳng thức *Jack Garfunkel* ta có:  $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy } \sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b+c}} &\leq \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}} - \frac{d}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{b+d+a}} \\ &\leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d} - \frac{d}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{b+d+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Do  $d+a+b \geq c+d+a$  nên ta có điều phải chứng minh.

**Nhận xét.** Cũng theo ý tưởng này các bạn có thể giải bài toán sau đây:

**Bài toán 2.** Chứng minh với mọi số thực không âm  $a, b, c, k$  thỏa mãn  $k \leq \max\{a, b, c\}$  ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+k}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+k}} + \frac{c}{\sqrt{c+a+k}} + \frac{k}{\sqrt{a+b+c}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+k}$$

Với  $k = 0$  ta có bất đẳng thức *Jack Garfunkel*.

Lời giải của bài toán 1 còn giúp chúng ta giải được bài toán tổng quát hơn sau đây:

**Bài toán 3.** Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2 và các số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Tìm hằng số thực  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3+\dots+a_n}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1+\dots+a_{n-2}}} \leq k\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_n}$$

**Lời giải.** Cho  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 1, 0, \dots, 0)$  ta nhận được  $k \geq \frac{5}{4}$ . Nếu ta có thể chứng minh bất đẳng

thức với  $k = \frac{5}{4}$  thì  $\frac{5}{4}$  sẽ là giá trị cần tìm. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp.

Với  $n = 3$  ta có bất đẳng thức *Jack Garfunkel*.

Giả sử bất đẳng thức đúng tới  $n$ , ta chứng minh nó cũng đúng với  $n+1$ .

Đặt  $VT = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = A_n$ , thì  $A_n \leq \frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_n}$  với mọi  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$

Ta sẽ chứng minh  $A_{n+1} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_{n+1}}$ . Giả sử  $a_{n-1} = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ .

Đặt  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + a_{n+1}$  và  $B_n = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Thế thì } A_{n+1} &= \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} + \frac{b_2}{\sqrt{b_2 + b_3 + \dots + b_n}} + \dots + \\ &\frac{b_{n-1}}{\sqrt{b_{n-1} + b_n + b_1 + \dots + b_{n-3}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \left( \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \right) + \left( \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \right) \end{aligned}$$

Do đó, từ  $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$  và

$a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}$  suy ra  $A_{n+1} \leq B_n$ .

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp  $B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$ .

Vì vậy  $A_{n+1} \leq B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$ . (đpcm)

**Bình luận:** Có thể thấy mở rộng bài toán theo cách này, các kết quả đạt được là khá trọn vẹn.

Một câu hỏi khác là tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c, d \geq 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k \sqrt{a+b+c+d}$$

Đây là một bài toán rất khó và vẫn chưa có lời giải hoàn chỉnh

Tuy nhiên, sử dụng máy tính, **Ji Chen** đã tìm ra kết quả xấp xỉ như sau:

Giá trị cần tìm  $k = 1,4352668092582209310763 \dots$  là nghiệm của đa thức

$$16k^{16} + 215k^{14} - 6520k^{12} - 119315k^{10} + 2624314k^8 - 13071319k^6 + 4783212k^4 - 63453437k^2 + 2805634$$

Đẳng thức đạt được khi  $d = 0$  và  $a, b, c$  lần lượt là nghiệm của các đa thức bất khả quy sau đây

$$3016x^8 - 30106x^7 + 130587x^6 - 320588x^5 + 285356x^4 - 461664x^3 + 267664x^2 - 85824x + 11584$$

$$1508y^8 + 14679y^7 + 58928y^6 + 124964y^5 + 147560y^4 + 90672y^3 + 19264y^2 - 4752y - 1600$$

$$754z^8 - 5845z^7 + 19716z^6 - 37935z^5 + 45610z^4 - 35003z^3 + 16560z^2 - 4241z + 400$$

Rõ ràng đây không phải một kết quả đẹp. Vì thế vẫn có thể coi đây là một bài toán mở.

Có một kết quả khá đẹp cùng dạng, mặc dù yếu hơn.

**Bài toán 4.** Với các số thực không âm  $a, b, c, d$  chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} < \frac{3}{2} \sqrt{a+b+c+d}$$

**Lời giải.** [Võ Quốc Bá Cẩn]

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c+d=1$  và  $a=c \geq b+d$ . Đặt  $x=a+c$  thì  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Sử dụng bất đẳng thức *Jack Garfunkel* ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c} = \frac{5}{4} \sqrt{1-d} \text{ và}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{c+d+a} = \frac{5}{4} \sqrt{1-b}. \text{ Vì vậy}$$

$$\sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{1-d} - \frac{c}{\sqrt{c+a}} + \frac{5}{4} \sqrt{1-b} - \frac{a}{\sqrt{a+c}}.$$

$$= \frac{5}{4} (\sqrt{1-b} + \sqrt{1-d}) - \sqrt{c+a} \leq \frac{5}{4} \sqrt{2(2-b-d)} - \sqrt{c+a} = \frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x}$$

Dễ dàng kiểm tra  $\frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$  với mọi  $1 \geq x \geq \frac{1}{2}$ . Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý rằng đẳng thức không xảy ra.

Chúng ta có thể thay đổi hệ số của các biến để nhận được các bất đẳng thức thú vị sau đây:

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

Đối với bất đẳng thức này không có dấu đẳng thức, và  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  không phải là hằng số tốt nhất.

Một kết quả mạnh hơn phát biểu trong bài toán dưới đây:

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq k \sqrt{a+b+c}$$

Trong đó  $k = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \sqrt{-1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1.17995968$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = 2+2\sqrt{3}, b=1, c=0$  và các hoán vị.

**Lời giải.** Đặt  $x = \sqrt{a+2b}, y = \sqrt{b+2c}, z = \sqrt{b+2c}$  thì

$$a = \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9}, b = \frac{z^2 + 4x^2 - 2y^2}{9}, c = \frac{y^2 + 4z^2 - 2x^2}{9}$$

Và bất đẳng thức trở thành  $\sum_{cyc} \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$  hay là



Đặt  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + a_{n+1}$  và  $B_n = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Thế thì } A_{n+1} &= \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} + \frac{b_2}{\sqrt{b_2 + b_3 + \dots + b_n}} + \dots + \\ &\quad \frac{b_{n-1}}{\sqrt{b_{n-1} + b_n + b_1 + \dots + b_{n-3}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \left( \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \right) + \left( \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \right) \end{aligned}$$

Do đó, từ  $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$  và

$a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}$  suy ra  $A_{n+1} \leq B_n$ .

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp  $B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$ .

Vì vậy  $A_{n+1} \leq B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$  (đpcm)

**Bình luận:** Có thể thấy mở rộng bài toán theo cách này, các kết quả đạt được là khá trọn vẹn.

Một câu hỏi khác là tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c, d \geq 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k \sqrt{a+b+c+d}$$

Đây là một bài toán rất khó và vẫn chưa có lời giải hoàn chỉnh

Tuy nhiên, sử dụng máy tính, **Ji Chen** đã tìm ra kết quả xấp xỉ như sau:

Giá trị cần tìm  $k = 1,4352668092582209310763 \dots$  là nghiệm của đa thức

$$16k^{16} + 215k^{14} - 6520k^{12} - 119315k^{10} + 2624314k^8 - 13071319k^6 + 4783212k^4 - 63453437k^2 + 2805634$$

Đẳng thức đạt được khi  $d = 0$  và  $a, b, c$  lần lượt là nghiệm của các đa thức bất khả quy sau đây

$$3016x^8 - 30106x^7 + 130587x^6 - 320588x^5 + 285356x^4 - 461664x^3 + 267664x^2 - 85824x + 11584$$

$$1508y^8 + 14679y^7 + 58928y^6 + 124964y^5 + 147560y^4 + 90672y^3 + 19264y^2 - 4752y - 1600$$

$$754z^8 - 5845z^7 + 19716z^6 - 37935z^5 + 45610z^4 - 35003z^3 + 16560z^2 - 4241z + 400$$

Rõ ràng đây không phải một kết quả đẹp. Vì thế vẫn có thể coi đây là một bài toán mở.

Có một kết quả khá đẹp cùng dạng, mặc dù yếu hơn.



**Bài toán 4.** Với các số thực không âm  $a, b, c, d$  chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} < \frac{3}{2} \sqrt{a+b+c+d}$$

**Lời giải.** [Võ Quốc Bá Cẩn]

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c+d=1$  và  $a=c \geq b+d$ . Đặt  $x=a+c$  thì  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **Jack Garfunkel** ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c} = \frac{5}{4} \sqrt{1-d} \text{ và}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{c+d+a} = \frac{5}{4} \sqrt{1-b}. \text{ Vì vậy}$$

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b}} &\leq \frac{5}{4} \sqrt{1-d} - \frac{c}{\sqrt{c+a}} + \frac{5}{4} \sqrt{1-b} - \frac{a}{\sqrt{a+c}} \\ &= \frac{5}{4} (\sqrt{1-b} + \sqrt{1-d}) - \sqrt{c+a} \leq \frac{5}{4} \sqrt{2(2-b-d)} - \sqrt{c+a} = \frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

Để dàng kiểm tra  $\frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$  với mọi  $1 \geq x \geq \frac{1}{2}$ . Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý rằng đẳng thức không xảy ra.

Chúng ta có thể thay đổi hệ số của các biến để nhận được các bất đẳng thức thú vị sau đây:

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

Đối với bất đẳng thức này không có dấu đẳng thức, và  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  không phải là hằng số tốt nhất.

Một kết quả mạnh hơn phát biểu trong bài toán dưới đây:

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq k \sqrt{a+b+c}$$

Trong đó  $k = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1.17995968$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=2+2\sqrt{3}, b=1, c=0$  và các hoán vị.

**Lời giải.** Đặt  $x=\sqrt{a+2b}, y=\sqrt{c+2a}, z=\sqrt{b+2c}$  thì

$$a = \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9}, b = \frac{z^2 + 4x^2 - 2y^2}{9}, c = \frac{y^2 + 4z^2 - 2x^2}{9}$$

Và bất đẳng thức trở thành  $\sum_{cyc} \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$  hay là

$$2 \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2 - z^2}{x} + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2}{x} - 2(x + y + z) \leq 3k \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 3(x + y + z) \text{ hoặc một cách khác}$$

$$2(x - y)(y - z)(x - z) \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \leq 3k \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 3(x + y + z) - 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(x - y)^2}{x}$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $\sqrt{\frac{y^2 + 4z^2}{2}} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ .

Từ điều kiện  $2x^2 \leq y^2 + 4z^2$ , dễ dàng kiểm tra phương trình  $2(x - t)^2 = (y - t)^2 + 4(z - t)^2$  có hai nghiệm  $0 \leq t_1 \leq \min(t_2, z)$  và với mọi  $0 \leq t \leq t_1$  ta có  $2(x - t)^2 \leq (y - t)^2 + 4(z - t)^2$ .

Ta có thể giảm  $x, y, z$  đi một đại lượng  $t$  nằm trong  $[0, t_1]$ , khi đó về trái tăng.

Ta có thể chứng minh về phải giảm, có nghĩa là hàm số

$$f(t) = 3k \sqrt{3((x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2)} - 3(x + y + z - 3t) - 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(x - y)^2}{x - t} \text{ giảm trên } [0, t_1].$$

Thật vậy, đặt  $m = x - t, n = y - t, p = z - t$  thì  $f'(t) = -9k \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} + 9 - 2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2}$

Ta sẽ chứng minh  $2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq 9 - 9k \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}}$

Do  $k > 1$  ta chỉ cần chứng minh  $2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq 9 - 9 \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}}$ . Ta có

$$VP = 9 \left( 1 - \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} \right) = \frac{27(m^2 + n^2 + p^2) - 9(m + n + p)^2}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} (\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} + m + n + p)} \geq \frac{9 \sum_{\text{cyc}} (m - n)^2}{2(m + n + p)^2}$$

Vì vậy chỉ cần chứng minh  $2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq \frac{9 \sum_{\text{cyc}} (m - n)^2}{2(m + n + p)^2}$  hay  $\sum_{\text{cyc}} (m - n)^2 \left( \frac{4}{m^2} - \frac{9}{(m + n + p)^2} \right) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì

$$2(m + n + p) \geq 2m + \sqrt{4n^2 + 4p^2} \geq 2m + \sqrt{n^2 + 4p^2} \geq 3m \geq 3n \geq 3p.$$

Bây giờ ta cần chứng minh bất đẳng thức sau khi đã giảm các biến đi một đại lượng  $t \in [0, t_1]$ .

Nếu chọn  $t = t_1$  ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $2x^2 = y^2 + 4z^2$ ,

nghĩa là  $c = 0$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành  $\frac{a}{\sqrt{a + 2b}} + \sqrt{b} \leq k \sqrt{a + b}$ .

Giả sử  $a + b = 1$  ta phải chứng minh  $g(b) = \frac{1 - b}{\sqrt{1 + b}} + \sqrt{b} \leq k$  với mọi  $b \in [0, 1]$ .

Ta có  $g'(b) = -\frac{(b+3)}{2(1+b)\sqrt{1+b}} + \frac{1}{2\sqrt{b}}$ . Do đó  $g'(b)$  cùng dấu với  $\sqrt{(1+b)^3} - (b+3)\sqrt{b}$ ,

nghĩa là cùng dấu với  $(1+b)^3 - (b+3)^2 b = -3b^2 - 6b + 1$ .

Dễ dàng chứng minh rằng  $\max_{[0,1]} g(b) = g\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = k$ .

Bất đẳng thức được chứng minh. Tổng quát hơn ta có

**Bài toán 7.** Cho  $q$  là số thực thỏa mãn  $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$  hoặc  $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26} \approx 1.193375245$ . Tìm hằng số thực  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực  $a, b, c$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

*Lời giải.*

**Trường hợp 1.** Xét  $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ , cho  $a=b=c=1$  ta nhận được  $k \geq \sqrt{\frac{3}{q+1}}$ .

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức:  $\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq \sqrt{\frac{3}{q+1}}\sqrt{a+b+c}$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz** ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}}\right)^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa}\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh  $\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa} \leq \frac{3}{1+q}$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{a+qb}\right) + \left(1 - \frac{b}{b+qc}\right) + \left(1 - \frac{c}{c+qa}\right) \geq 3 - \frac{3}{1+q} \Leftrightarrow \frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \geq \frac{3}{1+q}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz** ta có

$$\frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(c+qa) + b(a+qb) + c(b+qc)}.$$

Ta chỉ cần chứng minh  $(1+q)(a+b+c)^2 \geq 3(a(c+qa) + b(a+qb) + c(b+qc))$

$$\Leftrightarrow (1-2q)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \Leftrightarrow (1-2q)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy giá trị cần tìm là  $\sqrt{\frac{3}{q+1}}$ .

**Trường hợp 2.**  $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$ . Cho  $x = \sqrt{a+qb}$ ,  $y = \sqrt{b+qc}$ ,  $z = \sqrt{c+qa}$  thì

$$a = \frac{x^2 + q^2 y^2 - qz^2}{9}, b = \frac{z^2 + q^2 x^2 - qy^2}{9}, c = \frac{y^2 + q^2 z^2 - qx^2}{9}.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 + q^2 y^2 - qz^2}{(q^3 + 1)x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{q+1}} \\
& \Leftrightarrow q \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2 - z^2}{x} + (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{q^2}{x} - (q^2 - q)(x + y + z) \leq \\
& \leq \frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (q^2 - q + 1)(x + y + z) \\
& \Leftrightarrow q(x - y)(y - z)(z - x) \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \leq \\
& \leq \frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (q^2 - q + 1)(x + y + z) - (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{(x - y)^2}{x}
\end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp  $\sqrt{\frac{y^2 + qz^2}{q}} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ .

Từ điều kiện  $qx^2 \leq y^2 + q^2 z^2$ , suy ra tồn tại  $0 \leq t_1 \leq z, q(x - t_1)^2 = (y - t_1)^2 + q^2(z - t_1)^2$  và với mọi  $0 \leq t \leq t_1$  ta có  $q(x - t)^2 \leq (y - t)^2 + q^2(z - t)^2$ .

Nếu ta giảm  $x, y, z$  đi một lượng  $t \in [0, t_1]$  thì vế trái tăng, ta chứng minh vế phải giảm, và như thế chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp  $c = 0$ . Xét hàm số

$$f(t) = \frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{(x+t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} - (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{x-t} - (q^2 - q + 1)(x + y + z - 3t)$$

Đặt  $m = x - t, n = y - t, p = z - t$  ta có

$$f'(t) = -\frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} + 3(q^2 - q + 1) - (q^2 - q) \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2}$$

$$\text{Ta phải chứng minh } 3(q^2 - q + 1) \left( 1 - \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right) \leq (q^2 - q) \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2}$$

Từ bất đẳng thức ban đầu, cho  $a = b = c = 1$  thì ta nhận được  $k \geq \sqrt{\frac{3}{1+q}} \Leftrightarrow \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$  vì thế

$$3(q^2 - q + 1) \left( 1 - \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right) \leq 3(q^2 - q + 1) \left( 1 - \frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} \right)$$

Do đó cần chứng minh

$$3(q^2 - q + 1) \frac{3(m^2 + n^2 + p^2) - (m+n+p)^2}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} (\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} + m+n+p)} \leq (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{(m-n)^2}{m^2}$$

hay có thể viết lại là  $S_p(m-n)^2 + S_m(n-p)^2 + S_n(m-p)^2 \geq 0$  trong đó

$$S_p = n^2 p^2 \left[ 2(q^2 - q)(m + n + p)^2 - 3(q^2 - q + 1)m^2 \right],$$

$$S_m = p^2 m^2 \left[ 2(q^2 - q)(m + n + p)^2 - 3(q^2 - q + 1)n^2 \right],$$

$$S_n = m^2 n^2 \left[ 2(q^2 - q)(m + n + p)^2 - 3(q^2 - q + 1)p^2 \right].$$

Vì  $m \geq n \geq p \geq 0$ , ta có  $2(q^2 - q)(m + n + p)^3 \geq 18(q^2 - q)p^2 \geq 3(q^2 - q + 1)p^2$ , do đó  $S_n \geq 0$

Vì vậy từ  $S_n(m - p)^2 \geq S_n(m - n)^2 + S_n(n - p)^2$  ta phải chứng minh

$$S_m + S_n \geq 0 \text{ và } S_n + S_p \geq 0$$

Điều này đúng bởi vì  $\frac{1}{2m^2}(S_m + S_n) = (q^2 - q)(m + n + p)^2(p^2 + n^2) - 3(q^2 - q + 1)n^2 p^2$

$$\geq (q^2 - q) \frac{9}{4}(n + p)^2(p^2 + n^2) - 3(q^2 - q + 1)n^2 p^2 \geq 18(q^2 - q)n^2 p^2 - 3(q^2 - q + 1)n^2 p^2 \geq 0 \text{ và}$$

$$\frac{1}{2n^2}(S_p + S_n) = (q^2 - q)(m + n + p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2 p^2$$

$$\geq (q^2 - q)(m + 2p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2 p^2$$

$$\geq (q^2 - q) \cdot 8mp \cdot 2mp - 3(q^2 - q + 1)m^2 p^2 \geq 0$$

Như vậy ta đã chứng minh  $f(t)$  nghịch biến. Theo lập luận ở trên, ta chỉ cần xét bất đẳng thức

ban đầu trong trường hợp  $c = 0$ , nghĩa là  $\frac{a}{\sqrt{a + qb}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a + b}$ .

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a + b = 1$ , khi đó giá trị nhỏ nhất của  $k$  chính là giá trị lớn nhất

của hàm số  $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+(q-1)x}} + \sqrt{x}$  trên  $[0, 1]$

Ta có  $f'(x) = -\frac{(q-1)x + q + 1}{2\sqrt{(1+(q-1)x)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$  cùng dấu với  $(1+(q-1)x)^3 - x((q-1)x + q + 1)^2$  hay

cùng dấu với  $P(x) = (q-1)^2(q-2)x^3 + (q-1)(q-5)x^2 - (q^2 - q + 4)x + 1$

Các bạn có thể tự chứng minh kết quả sau:

Nếu  $\frac{13+5\sqrt{13}}{26} \leq q < 2$  thì  $P(x)$  có hai nghiệm âm và một nghiệm trong  $(0, 1)$ .

Nếu  $q > 2$  thì  $P(x)$  có một nghiệm âm và hai nghiệm dương  $x_1 \leq \min(1, x_2)$  và  $f(x_1) > f(1)$ .

Nếu  $q = 2$  thì  $P(x)$  chỉ có đúng hai nghiệm phân biệt, 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương  $\in [0, 1]$ .

Trong cả ba trường hợp, ta có kết luận chung:

Giá trị nhỏ nhất của  $k$  là  $\frac{1-x_0}{\sqrt{1+(q-1)x_0}} + \sqrt{x_0}$  trong đó  $x_0$  là nghiệm dương nhỏ nhất của

phương trình  $(q-1)^2(q-2)x^3 + (q-1)(q-5)x^2 - (q^2 - q + 4)x + 1 = 0$

**Nhận xét.** Ta còn có hai trường hợp riêng đặc biệt của bài toán này, đó là:

$$1. \frac{q}{\sqrt{a+4b}} + \frac{b}{\sqrt{b+4c}} + \frac{c}{\sqrt{c+4a}} \leq \left( \frac{17-\sqrt{33}}{6\sqrt{-1+\sqrt{33}}} + \sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{12}} \right) \sqrt{a+b+c}$$

$$2. \frac{a}{\sqrt{2a+3b}} + \frac{b}{\sqrt{2b+3c}} + \frac{c}{\sqrt{2c+3a}} \leq \left( \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{-1+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}} \right) \sqrt{a+b+c}$$

Trường hợp cuối cùng vẫn là hai bài toán mở sau đây:

**Bài toán 8.** Giả sử  $\frac{1}{2} < q < \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $k$  sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

Đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ .

**Bình luận:** Bất đẳng thức **Jack Garfunkel** là trường hợp đặc biệt của bài toán ứng với  $q = 1$ . Do đó bài toán 8 mới thực sự là bài toán tổng quát của của bất đẳng thức **Jack Garfunkel** chứ không phải là bài toán 7. Đối với bài toán này chúng ta không thể (hoặc rất khó để có thể) dự đoán được trường hợp cụ thể xảy ra đẳng thức khi  $q$  nhận một giá trị bất kì trong khoảng

$$\frac{1}{2} < q < \frac{13+5\sqrt{13}}{26}, \text{ do đó tác giả nghĩ rằng, trong bốn cách chứng minh bất đẳng thức Jack}$$

**Garfunkel** ở trên, nếu có một cách có thể giải được bài toán 8 thì đó phải là cách thứ 2 (do các cách còn lại đều dựa trên sự biết trước dấu đẳng thức cụ thể). Nếu không, chúng ta phải tìm ra một hướng giải quyết khác cho bất đẳng thức **Jack Garfunkel**. Rõ ràng bất đẳng thức vẫn còn nhiều điều thú vị đang chờ các bạn đọc khám phá!

**Bài toán 9.** Cho  $k$  là số thực dương nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $M$  sao cho bất đẳng thức  $\frac{a}{(a+b)^k} + \frac{b}{(b+c)^k} + \frac{c}{(c+a)^k} \leq M(a+b+c)^{1-k}$  đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ .

**Bình luận:** Chú ý rằng nếu  $k > 1$  thì không tồn tại giá trị của  $M$ . Thật vậy, cho  $c = 0$  bất đẳng thức trở thành  $\frac{a}{(a+b)^k} + b^{1-k} \leq M(a+b)^{1-k}$ . Cố định  $a$  và cho  $b \rightarrow 0$ , khi đó  $VT \rightarrow +\infty$  trong khi  $VP \rightarrow Ma^{1-k}$ , mâu thuẫn.

Theo dự đoán của chúng tôi,  $M = \max \left( \frac{3^k}{2^k}, 1+k(1-k)^{\frac{1-k}{k}} \right)$ .

Bài viết tạm dừng ở đây, hi vọng được trao đổi với các bạn về bài toán này trong một dịp khác.

## § 24.5. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CÓ LỜI GIẢI HAY

Trong mục này chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức cùng những chứng minh rất đẹp. Có một số bài toán dưới đây đã được đề cập tới ở các chương trước, trong các chương đó, chúng đã được giải với những phương pháp khá chuẩn tắc. Ngược lại, đa số các chứng minh dưới đây rất linh hoạt và không cứng nhắc tuân theo các nguyên tắc trước nữa.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3}{2}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{2} + 2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Đặt  $S = a + b + c$ ;  $T = ab + bc + ca$ ;  $P = abc$ . Thì  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2[(1+b)(1+c) + (1+c)(1+a) + (1+a)(1+b)] = 3(1+a)(1+b)(1+c)$$

$\Leftrightarrow 3P + T = S + 3$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geq \frac{9}{(1+a) + (1+b) + (1+c)} = \frac{9}{S+3}$$

$\Rightarrow 3(S+3) \geq 18 \Leftrightarrow 3S \geq 9 \Leftrightarrow S \geq 3 \Rightarrow S+3 \geq 6$ . Ta sẽ chứng minh  $T \geq 3$ . Nếu  $T < 3$  thì  $3 > T = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{P^2} \Rightarrow P < 1 \Rightarrow 3P + T < 6 \Rightarrow$  mâu thuẫn  $\Rightarrow T \geq 3$ .

$$\text{Ta có: } \frac{a+b+c}{2} + 2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{S}{2} + 2\left(\frac{SP+T^2}{ST-P}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow S(ST-P) + 4(SP+T^2) \geq 9(ST-P) \Leftrightarrow S^2T + S(S+3-T) + 4T^2 \geq 9ST - 3(S+3-T)$$

$$\Leftrightarrow S^2T + S^2 + 6S + 9 + 4T^2 \geq 10ST + 3T \Leftrightarrow (T-3)(S-3)(S+1) + 4(S-T)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Do  $S \geq 3$  và  $T \geq 3$ , nên (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

**Bài 2.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{1+a^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+d^2}{2}} \leq a+b+c+d \quad (1)$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+d} + \frac{1+d^2}{d+a} = a+b+c+d$

• **Chứng minh:** VT - VP =  $\frac{1+a^2}{a+b} - a + \frac{1+b^2}{b+c} - b + \frac{1+c^2}{c+d} - c + \frac{1+d^2}{d+a} - d$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-cd}{c+d} + \frac{1-da}{d+a} = \left( \frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-cd}{c+d} \right) + \left( \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-da}{d+a} \right) \\
 &= (a+b+c+d-abc-bcd-cda-dab) \left[ \frac{1}{(a+b)(c+d)} + \frac{1}{(b+c)(d+a)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\begin{aligned}
 2(a+b+c+d)^2 &= 2(a+b+c+d) \left( \frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+d} + \frac{1+d^2}{d+a} \right) \\
 &= [(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)] \left( \frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+d} + \frac{1+d^2}{d+a} \right) \\
 &\geq \left( \sqrt{a+b} \sqrt{\frac{1+a^2}{a+b}} + \sqrt{b+c} \sqrt{\frac{1+b^2}{b+c}} + \sqrt{c+d} \sqrt{\frac{1+c^2}{c+d}} + \sqrt{d+a} \sqrt{\frac{1+d^2}{d+a}} \right)^2 = \left( \sum_{\text{cyc}} \sqrt{1+a^2} \right)^2 \\
 &\Rightarrow \sqrt{\frac{1+a^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+d^2}{2}} \leq a+b+c+d
 \end{aligned}$$

**Bài 3.** Cho  $x, y, z$  là các số thực. Chứng minh rằng:

$$2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq [(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz]^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned}
 \text{VT}(1) &= 2(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 2(x^6 + y^6 + z^6) + 6(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \\
 \text{VP}(1) &= (x+y+z)^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4xyz(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) \\
 \Rightarrow \text{VT}(1) - \text{VP}(1) &= x^4(y+z-x)^2 + y^4(z+x-y)^2 + z^4(x+y-z)^2 + \\
 &\quad + 2x^2y^2(x-y)^2 + 2y^2z^2(y-z)^2 + 2z^2x^2(z-x)^2 + 2x^2y^2z^2 \geq 0 \\
 \Rightarrow \text{VT}(1) \geq \text{VP}(1) &\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq [(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz]^2
 \end{aligned}$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz = x + y + z + 2$ . Chứng minh rằng:

$$1. xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) \quad (1) \quad 2. \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} \sqrt{xyz} \quad (2)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x+1}; b = \frac{1}{y+1}; c = \frac{1}{z+1} \Rightarrow xyz = x + y + z + 2 \Leftrightarrow a + b + c = 1$$

$$\text{Ta có: } x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}; y = \frac{1-b}{b} = \frac{c+a}{b}; z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$1. xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)(c+a)}{ab} + \frac{(c+a)(a+b)}{bc} + \frac{(a+b)(b+c)}{ca} \geq 2 \left( \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) \geq 2 \sum_{cyc} ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo Schur. Vì vậy,  $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$

$$2. \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} \sqrt{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} \right) = \frac{3}{2}$$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 + \left( 4 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right)^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} - 6 \geq 4 - \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{2(a-b)^2}{2ab} \geq \frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2} \geq \frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 = \frac{(b-c)^2}{bc} = \frac{2(b-c)^2}{2bc} \geq \frac{2(b-c)^2}{b^2+c^2} \geq \frac{2(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2 = \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2(c-a)^2}{2ca} \geq \frac{2(c-a)^2}{c^2+a^2} \geq \frac{2(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} - 6 \geq \frac{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{a^2+b^2+c^2} = 4 - \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

**Bài 6.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{1-x^2y^2} + \frac{yz}{1-y^2z^2} + \frac{zx}{1-z^2x^2} < \frac{7}{20} \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 1$ , thì  $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n \leq \frac{1}{4^n}$ ,  $\forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$

• **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\frac{1}{4^n} = \left[ \left( \frac{a+(b+c)}{2} \right)^2 \right]^n \geq [a(b+c)]^n \geq a^n b^n + a^n c^n + a^n b^{n-1} c \geq a^n b^n + b^n c^n + c^n a^n$$

• **Áp dụng:** Sử dụng công thức tổng cấp số nhân vô hạn ta có:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{xy}{1-x^2y^2} &= \frac{xy}{1-(xy)^2} = xy[1+(xy)^2+(xy)^4+\dots] \\ \frac{yz}{1-y^2z^2} &= \frac{yz}{1-(yz)^2} = yz[1+(yz)^2+(yz)^4+\dots] \\ \frac{zx}{1-z^2x^2} &= \frac{zx}{1-(zx)^2} = zx[1+(zx)^2+(zx)^4+\dots] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{xy}{1-x^2y^2} + \frac{yz}{1-y^2z^2} + \frac{zx}{1-z^2x^2} &\leq (xy+yz+zx) + \sum_{k=1}^{\infty} [(xy)^{2k+1} + (yz)^{2k+1} + (zx)^{2k+1}] \\ &< \frac{1}{3}(x+y+z)^2 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{60} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{1}{2} - \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{1}{2} - \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2-2a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{(c+a)^2-2b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{(a+b)^2-2c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6(b+c)^2-12a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{6(c+a)^2-12b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{6(a+b)^2-12c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6(b+c)^2-12a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + 1 + \frac{6(c+a)^2-12b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + 1 + \frac{6(a+b)^2-12c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} + 1 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{(3b+3c-2a)^2}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{(3c+3a-2b)^2}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{(3a+3b-2c)^2}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\left[3\left(\frac{b+c}{a}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 4} + \frac{\left[3\left(\frac{c+a}{b}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + 4} + \frac{\left[3\left(\frac{a+b}{c}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 4} \geq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$T \geq \frac{\left[3\left(\frac{b+c}{a}\right) - 2 + 3\left(\frac{c+a}{b}\right) - 2 + 3\left(\frac{a+b}{c}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 4 + 3\left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + 4 + 3\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 4} = \frac{\left[3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right) - 6\right]^2}{3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 12} = S.$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh rằng } S \geq 3 \Leftrightarrow \left[3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right) - 6\right]^2 \geq 9\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 36$$

$$\Leftrightarrow 9\left[\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)\right]^2 - 36\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right) \geq 9\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 2\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) \geq 2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì nó là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức **Schur**.

$$\text{Vì vậy } T \geq S \geq 3 \Rightarrow \frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Bài 8. Cho } a, b, c > 0. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = abc\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) + a^2 + b^2 + c^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Nhưng } abc\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) &\leq abc\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] \\ &= \frac{abc}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2) và (3) } \Rightarrow (1) \text{ đúng, nghĩa là } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \quad (1)$$

## Chứng minh

**Chứng minh 1:** • **Bổ đề:**  $(ab + bc + ca) \left[ \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$

• **Áp dụng:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 &\geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \left[ \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right] \\ &\geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \frac{9}{4(ab+bc+ca)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

**Chứng minh 2:** Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 &= \frac{a^4}{a^2(b+c)^2} + \frac{b^4}{b^2(c+a)^2} + \frac{c^4}{c^2(a+b)^2} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a+b+c)} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh  $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca}$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2[ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)] \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c) \quad (2)$$

Ta có:  $2[ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)] \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (3)$

Nhưng  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c) = \frac{1}{2}[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2] \geq 0$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c) \quad (4)$$

Từ (3), (4)  $\Rightarrow$  (2) đúng. Vì vậy  $\left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca}$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3} < (ab + bc + ca) \left( \frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+a} \right) \leq \frac{5}{3} \quad (1)$$

## Chứng minh

Đặt  $T = ab + bc + ca$ ;  $P = abc$ . Ta có:

$$\frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+a} = 2 + \frac{1+a^2}{a+b} - (a+c) + \frac{1+b^2}{b+c} - (b+a) + \frac{1+c^2}{c+a} - (c+b)$$

$$= 2 + \frac{1-ab-bc-ca}{a+b} + \frac{1-ab-bc-ca}{b+c} + \frac{1-ab-bc-ca}{c+a}$$

$$= 2 + (1-T) \left( \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right) = 2 + \frac{(1-T)(1+T)}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 2 + \frac{1-T^2}{T-abc}$$

Ta sẽ chứng minh:  $1 \leq 2T + \frac{T(1-T^2)}{T-abc}$  (2) and  $2T + \frac{T(1-T^2)}{T-abc} \leq \frac{5}{3}$  (3)

Ta có:  $0 < T = ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$

(2)  $\Leftrightarrow T^2(2-T) + abc(1-2T) \geq 0$  đúng bởi vì  $0 < T \leq \frac{1}{3}$

(3)  $\Leftrightarrow abc(5-6T) \leq T(2-6T+3T^2)$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$T = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{a+b+c} = 9abc$$

$\Rightarrow T(2-6T+3T^2) \geq 9abc(2-6T+3T^2)$ . Ta sẽ chứng minh  $9abc(2-6T+3T^2) \geq abc(5-6T)$

$\Leftrightarrow 9(2-6T+3T^2) \geq 5-6T \Leftrightarrow (1-3T)(13-9T) \geq 0$  đúng bởi vì  $0 < T \leq \frac{1}{3}$

Vì vậy (2) và (3) được chứng minh. Kéo theo (1) đúng.

**Bài 11.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx + xyz = 4$ .

Chứng minh rằng:  $3 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2)$  (1)

### Chứng minh

Đặt  $\sqrt{yz} = 2 \cos A$ ;  $\sqrt{zx} = 2 \cos B$ ;  $\sqrt{xy} = 2 \cos C$  trong đó  $A, B, C$  là các góc nhọn. Ta có:  $xy + yz + zx + xyz = 4 \Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$ . Suy ra  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác, nghĩa là  $A + B + C = \pi$ . Vì thế

$$\bullet \quad 3 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 = 3 \left( \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}}{\sqrt{xyz}} \right)^2 = \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$\bullet \quad (x+2)(y+2)(z+2) = \left( \frac{\sqrt{xy}\sqrt{xz}}{\sqrt{yz}} + 2 \right) \left( \frac{\sqrt{yz}\sqrt{yx}}{\sqrt{zx}} + 2 \right) \left( \frac{\sqrt{zx}\sqrt{zy}}{\sqrt{xy}} + 2 \right)$$

$$= \left( \frac{2 \cos B \cos C}{\cos A} + 2 \right) \left( \frac{2 \cos C \cos A}{\cos B} + 2 \right) \left( \frac{2 \cos A \cos B}{\cos C} + 2 \right)$$

$$= \left[ \frac{\cos(B-C) + \cos(B+C)}{\cos A} + 2 \right] \left[ \frac{\cos(C-A) + \cos(C+A)}{\cos B} + 2 \right] \left[ \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{\cos C} + 2 \right]$$

$$= \left[ \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{\cos A} \right] \left[ \frac{\cos(C-A) - \cos(C+A)}{\cos B} \right] \left[ \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos C} \right]$$

$$= \frac{2 \sin B \sin C}{\cos A} \cdot \frac{2 \sin C \sin A}{\cos B} \cdot \frac{2 \sin A \sin B}{\cos C} = \frac{8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2 \cos A \cos B \cos C} \geq \frac{8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \left( 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \geq 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $\frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$

$$\geq \frac{1}{\left( \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3} + \frac{1}{2 \left( \frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{3} \right)^3} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

**Bài 12.** Cho  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1 a_n} [n(a_1 + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)] \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{xz}{y} + y \leq x + z$  với  $0 < x \leq y \leq z$  (2)

• **Chứng minh:**  $\frac{xz}{y} + y \leq x + z \Leftrightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} + 1 \leq \frac{x}{y} + \frac{z}{y}$ . Đặt  $a = \frac{x}{y}; b = \frac{z}{y} \Rightarrow 0 < a \leq 1 \leq b$ .

Ta có: (2)  $\Leftrightarrow ab + 1 \leq a + b \Leftrightarrow 0 \leq (a-1)(1-b)$  (đúng)

• **Áp dụng:** với  $n = 3$ :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{a_1 a_3} [3(a_1 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3)] \Leftrightarrow \frac{a_1 a_3}{a_2} + a_2 \leq a_1 + a_3$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với  $n = m-1 \geq 3$ , ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức cũng đúng với  $n = m$ . Sử dụng bất đẳng thức với  $m-1$  số  $0 < a_1 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_m$ ,

ta có:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1 a_m} \left[ (m-1)(a_1 + a_m) - \left( \sum_{k=1}^m a_k - a_2 \right) \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{a_1 a_m} \left[ (m-1)(a_1 + a_m) - \sum_{k=1}^m a_k + \frac{a_1 a_m}{a_2} + a_2 \right] \leq \frac{1}{a_1 a_m} \left[ m(a_1 + a_m) - \sum_{k=1}^m a_k \right]$$

**Bài 13.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx = \sqrt{xyz}$ . Chứng minh rằng:

$$x + y + z + (\text{Max}\{x, y, z\} - \text{Min}\{x, y, z\})^2 \leq \frac{1}{3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:** Giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ . Đặt  $a = \sqrt{\frac{yz}{x}}; b = \sqrt{\frac{zx}{y}}; c = \sqrt{\frac{xy}{z}} \Rightarrow a + b + c = 1$

$$(1) \Leftrightarrow ab + bc + ca + (bc - ab)^2 \leq \frac{1}{3} \quad (2). \text{ Đặt } p = a + c \leq 1; q = ac \Rightarrow 0 < q \leq \frac{1}{4} p^2.$$

$$\text{Thì } (2) \Leftrightarrow 3p(1-p) + 3q + 3(1-p)^2(p^2 - 4q) - 1 \leq 0, \forall p \in [0, 1], \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right] \Leftrightarrow$$

$$3p^4 - 6p^3 + 3p - 12p^2q + 24pq - 9q - 1 \leq 0, \forall p \in [0, 1], \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right]$$

$$\Leftrightarrow f(q) = q(-12p^2 + 24p - 9) + 3p^4 - 6p^3 + 3p - 1 \leq 0, \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right]$$

Từ việc  $f(q)$  là hàm tuyến tính, suy ra  $\text{Max}_{0 \leq q \leq \frac{1}{4} p^2} f(q) \leq \text{Max}\left\{f(0); f\left(\frac{1}{4} p^2\right)\right\}$

$$f(0) = 3p^4 - 6p^3 + 3p - 1 = g(p) \Rightarrow g'(p) = 3(2p-1)(2p^2 - 2p - 1), \forall p \in [0, 1]$$

$$\text{Dẫn tới } g'(p) = 0 \text{ tại } p = \frac{1}{2} \in (0, 1). \text{ Lập bảng biến thiên } \Rightarrow g(p) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{4} p^2\right) = -\frac{9}{4} p^2 + 3p - 1 = -\left(\frac{3}{2} p - 1\right)^2 \leq 0. \text{ Thật vậy, } f(q) \leq 0 \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right] \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 2:** Đặt  $a = \sqrt{\frac{yz}{x}}; b = \sqrt{\frac{zx}{y}}; c = \sqrt{\frac{xy}{z}} \Rightarrow a + b + c = 1$

$$\frac{1}{3} - ab - bc - ca = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

$$= \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 6abc) \geq \frac{1}{3}[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \quad (\text{Schur})$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = (a+b+c) \sum_{\text{cyc}} a(b-c)^2 \geq (|ab-bc| + |bc-ca| + |ca-ab|)^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $ab \geq bc \geq ca$ . Thì, dễ dàng có đẳng thức:

$$|ab-bc| + |bc-ca| + |ca-ab| = 2(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\})$$

$$\Rightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 4(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - ab - bc - ca \geq \frac{4}{3}(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \geq x + y + z + \frac{4}{3}(\text{Max}\{x, y, z\} - \text{Min}\{x, y, z\})^2$$



**Bài 14.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a - l_a l_b - l_b l_c - l_c l_a \geq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

### Chứng minh

Gọi  $S$  là diện tích của tam giác có độ dài ba cạnh là  $a, b, c$ . Dễ dàng chứng minh rằng  $m_a, m_b, m_c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S' = \frac{3}{4}S$ . Sử dụng bất đẳng thức **Finsler – Khadivinger** ta có:

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a \geq \frac{1}{2}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 2\sqrt{3}S' = \frac{3}{8}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}S$$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{1}{2}p^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}S \geq l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a$ . Ta có:  $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$

$$\Rightarrow l_a l_b = \frac{4abc^2}{(a+c)(b+c)} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \text{ Hơn nữa, luôn tồn tại tam giác } XYZ \text{ thỏa mãn}$$

$$\sin X = \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}}; \sin Y = \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}}; \sin Z = \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức  $4(xy \sin^2 Z + yz \sin^2 X + zx \sin^2 Y) \leq (x+y+z)^2$ , ta có:

$$l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \leq \frac{abc}{a+b+c} \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right) \text{ khi } x = \cos \frac{A}{2}; y = \cos \frac{B}{2}; z = \cos \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 3\sqrt{3} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \left( \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} \right)^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Từ } S = p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \Rightarrow abc = 4SR = \frac{p^3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

Đặt  $A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}; B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}; C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow A'B'C'$  là tam giác nhọn. Ta có thể chứng minh

$$3\sqrt{3} + \tan A' + \tan B' + \tan C' \geq 2 \left( \cot \frac{A'}{2} + \cot \frac{B'}{2} + \cot \frac{C'}{2} \right).$$

Sử dụng bất đẳng thức **Tiberiu Popoviciu**: Nếu  $f$  là hàm lồi trên  $(a, b)$ , nghĩa là

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right), \forall x, y \in (a, b), \text{ thì,}$$

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2 \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right], \forall x, y, z \in (a, b)$$

**Bài 15.** Cho  $a, b, c, d > 0$  và  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3) + 20 \geq (ab+bc+cd+da+ac+bd)^2 \quad (1)$$



**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2$  (2)

• **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$ , thì

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (ab - cd)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 + d^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 \geq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (ab - cd)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 + \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)]^2 \geq (ab - cd)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ  $a \geq b \geq c \geq d$  thì  $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \geq 2ab - c^2 - d^2 \geq 0$ . Kéo theo

$$\begin{aligned} VT(3) &\geq \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \geq \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 + \frac{1}{2}(2ab - c^2 - d^2)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(c - d)^4 + \frac{1}{2}(2ab - c^2 - d^2)^2 = \frac{1}{4}(1+1)[(c-d)^4 + (2ab - c^2 - d^2)^2] \\ &\geq \frac{1}{4}[(c-d)^2 + (2ab - c^2 - d^2)]^2 = \frac{1}{4}(2ab - 2cd)^2 = (ab - cd)^2 = VP(3) \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** sử dụng bất đẳng thức *Schur* ta có:

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) \geq 0$$

$$VT(1) - VP(1) = aT(b, c, d) + a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2d^2 - d^2a^2 - a^2c^2 - b^2d^2 \geq 0$$

**Bài 16.** Cho  $x \geq y \geq z > 0$  và  $y^2 \geq xz$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} + \frac{x^2y}{z} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(z-x)(y-x)^2}{x} + \frac{(x-y)(y-z)^2}{y} + \frac{(y-z)(x-z)^2}{z} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{(y-z)(x-z)}{z} - \frac{(x-y)^2}{x}; B = \frac{(y-z)^2}{y} - \frac{(x-y)(x-z)}{x}, \text{ thì}$$

$$xzA + xyB = x(y-z)(x-z) - z(x-y)^2 + x(y-z)^2 - y(x-y)(x-z) = 2(x-z)(y^2 - xz) \geq 0$$

$$\Rightarrow A \geq 0 \text{ hoặc } B \geq 0, \text{ nếu } A \geq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow (x-z)A + \frac{(x-y)(y-z)^2}{y} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Nếu}$$

$$B \geq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow (x-y)B + \frac{(y-z)(x-z)^2}{z} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 17.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + ca + a^2} \right| < \frac{1}{3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow 3|(a+b+c)(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)| < (a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$

Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng cách chứng minh lần lượt các bất đẳng thức dưới đây:

- $|(a+b+c)(ab+bc+ca)| \leq \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$
- $8|(a-b)(b-c)(c-a)| < 8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$
- $\frac{27}{64}(a+b)(b+c)(c+a) \leq (a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$

**Bài 18.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 6$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} \geq \sqrt{15+ab+bc+ca} \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(uv + vw + wu) \left[ \frac{1}{(u+v)^2} + \frac{1}{(v+w)^2} + \frac{1}{(w+u)^2} \right] \geq \frac{9}{4}, \forall u, v, w > 0$

• **Áp dụng:** Đặt  $1+a = 9x; 1+b = 9y; 1+c = 9z; x, y, z > \frac{1}{9}$  và  $x + y + z = 1$

$$(1) \Leftrightarrow 3(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 9\sqrt{xy + yz + zx} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx} \quad (2)$$

Đặt  $x = \frac{1}{m^2}; y = \frac{1}{n^2}; z = \frac{1}{p^2}$ , trong đó  $m, n, p > 0 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1$ .

Thì ta có  $m = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{1+a}}; n = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{\sqrt{1+b}}; p = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{3}{\sqrt{1+c}}$ .

Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác,  $m, n, p$  cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{(1+1)(x+y)}} = \frac{4}{\sqrt{2(1+z)}} \geq \frac{1}{\sqrt{z}}, \forall z > \frac{1}{9}$$

Sử dụng bổ đề ta có:  $(uv + vw + wu) \left[ \frac{1}{(u+v)^2} + \frac{1}{(v+w)^2} + \frac{1}{(w+u)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \quad (*)$

Đặt  $m = u + v; n = v + w; p = w + u \Rightarrow u = \frac{p+m-n}{2}; v = \frac{m+n-p}{2}; w = \frac{n+p-m}{2}$

$$\text{Thì (*)} \Leftrightarrow (2mn + 2np + 2pm - m^2 - n^2 - p^2) \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9$$

$$\text{Từ } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1 \Rightarrow 2mn + 2np + 2pm \geq 9 + m^2 + n^2 + p^2 \geq 6\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (3)$$

$$\text{Thay } m = \frac{1}{\sqrt{x}}; n = \frac{1}{\sqrt{y}}; p = \frac{1}{\sqrt{z}} \text{ vào (3), ta có } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx}$$

$$\text{Vì vậy (2) đúng, suy ra } \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} \geq \sqrt{15+ab+bc+ca}$$

**Bài 19. [Polish MO – 1992]** Cho các số thực  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2 \geq (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \quad (1)$$

### Chứng minh

• Nếu  $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \leq 0$  thì (1) là đúng.

• Chứng minh  $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) > 0$

Nếu có hai nhân tử âm, ví dụ  $(b^2+c^2-a^2) < 0; (c^2+a^2-b^2) < 0$  thì

$$2c^2 = (b^2+c^2-a^2) + (c^2+a^2-b^2) < 0 \Rightarrow \text{mâu thuẫn} \Rightarrow$$

$$(b^2+c^2-a^2) > 0; (c^2+a^2-b^2) > 0; (a^2+b^2-c^2) > 0 \text{ thì}$$

$$\begin{cases} (b+c-a)^2(c+a-b)^2 - (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) = 2(a-b)^2(a^2+b^2-c^2) \geq 0 \\ (c+a-b)^2(a+b-c)^2 - (c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = 2(b-c)^2(b^2+c^2-a^2) \geq 0 \\ (a+b-c)^2(b+c-a)^2 - (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) = 2(c-a)^2(c^2+a^2-b^2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b+c-a)^4(c+a-b)^4(a+b-c)^4 \geq (b^2+c^2-a^2)^2(c^2+a^2-b^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2$$

$$\Rightarrow (b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2 \geq (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$

$$\text{Bài 20. [CRUX 854]} \text{ Cho } x, y, z > 0. \text{ Đặt } A = \frac{yz}{(y+z)^2} + \frac{zx}{(z+x)^2} + \frac{xy}{(x+y)^2}$$

$$B = \frac{yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{zx}{(z+y)(x+y)} + \frac{xy}{(x+z)(y+z)}$$

$$\text{Chứng minh rằng: } 1. 4A + 8B \leq 9 \quad 2. A + 3B \geq 3$$

### Chứng minh

$$1. \bullet \text{Bổ đề: } \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\bullet \text{Chứng minh: } \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \left( \frac{x-y}{x+y} - \frac{x-y}{z+x} \right) + \left( \frac{y-z}{y+z} - \frac{y-z}{z+x} \right)$$

$$= \frac{(x-y)(z-y)}{(x+y)(z+x)} + \frac{(y-z)(x-y)}{(y+z)(z+x)} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

• **Áp dụng:** (1)  $\Leftrightarrow 8\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq 4\left(\frac{3}{4} - A\right) \Leftrightarrow 2\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq \frac{3}{4} - A$ . Ta có:

$$\frac{3}{4} - A = \left[ \frac{1}{4} - \frac{yz}{(y+z)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{zx}{(z+x)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right] = \frac{(y-z)^2}{4(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{4(z+x)^2} + \frac{(x-y)^2}{4(x+y)^2}$$

$$B - \frac{3}{4} = \frac{yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{zx}{(z+y)(x+y)} + \frac{xy}{(x+z)(y+z)} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4[yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)] - 3(x+y)(y+x)(z+x)}{4(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{4[yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y) - 6xyz] - 3[(x+y)(y+x)(z+x) - 8xyz]}{4(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2}{4(x+y)(y+x)(z+x)}$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \frac{2[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2]}{(x+y)(y+x)(z+x)} \leq \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(z+x)^2} + \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (y-z)^2 \left[ \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} - 2x \right] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (y-z)^2 \frac{(x-y)(x-z)}{y+z} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-y)(y-z)(z-x) \left( \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right) = \frac{[(x-y)(y-z)(z-x)]^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 0$$

$$2. (2) \Leftrightarrow 3\left(B - \frac{3}{4}\right) \geq \frac{3}{4} - A \Leftrightarrow \frac{\sum 3x(y-z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \sum \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum (y-z)^2 \left[ 3x - \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \geq \sum (y-z)^2 \left[ \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} - 2x \right] \quad (3)$$

Sử dụng  $\sum (y-z)^2 \left[ \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} - 2x \right] = \frac{(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ , thì

$$(3) \Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \geq \frac{(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (4)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ . Từ  $(y-z)^2 \leq y^2 \leq (y+z)y$  và

$0 \leq (x-y)(x-z) \leq (x+y)(x+z)$ , (4) đúng nếu ta có thể chứng minh

$$y(x-z)^2 \geq (x-y)(x-z)y \Leftrightarrow y(x-z)(y-z) \geq 0 \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Ghi chú:** (1) và (2) có thể viết lại thành  $0 \leq 2\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq \frac{3}{4} - A \leq 3\left(B - \frac{3}{4}\right)$  (5)

Dễ thấy 2 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức trên. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng 3 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức vừa nêu.

Thật vậy, giả sử tồn tại  $\alpha < 1$  thỏa mãn  $\frac{3}{4} - A \leq (2+\alpha)\left(B - \frac{3}{4}\right)$  đúng  $\forall x, y, z > 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} - A\right) - 2\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq \alpha\left(B - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \alpha \sum x(y-z)^2 \geq \frac{(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (6)$$

$$\text{Cho } z \rightarrow 0^+ \text{ trong (6) ta có: } \alpha xy(x+y) \geq \frac{(x-y)^2 x^2 y^2}{(x+y)xy} = \frac{(x-y)^2 xy}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x+y)^2 \geq (x-y)^2 \quad (7) \quad \forall x, y > 0.$$

Cho  $x=1$  và  $y \rightarrow 0^+$  trong (7) ta có  $\alpha \geq 1$ , điều này mâu thuẫn với giả sử  $\alpha < 1$ . Vì vậy 3 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức  $\frac{3}{4} - A \leq 3\left(B - \frac{3}{4}\right)$ .

**Bài 21.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $xy > 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy} \geq \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+y^2}{2} - xy}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y)}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x-y)^2}{x+y} \quad (2)$$

Nếu  $x+y < 0$  thì bất đẳng thức hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp  $x+y > 0$ .

Do đó (2)  $\Leftrightarrow x+y \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)^2$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)^2 \leq (1^2+1^2)\left(\frac{x^2+y^2}{2} + xy\right) = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$$

**Bài 22.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_{11} \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{11} \leq 1000$ . Chứng minh rằng tồn tại  $i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  thỏa mãn  $a_{i+1} - a_i < 1 + 3\sqrt[3]{a_i a_{i+1}}$

**Chứng minh**

Sử dụng đẳng thức:  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

Ta có:  $a^3 + b^3 + c^3 < 3abc \Leftrightarrow a, b, c$  là ba số đôi một phân biệt và  $a+b+c < 0$

Suy ra  $a_{i+1} - a_i - 1 < 3\sqrt[3]{a_i a_{i+1}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_{i+1}} - \sqrt[3]{a_i} - \sqrt[3]{1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_{i+1}} - \sqrt[3]{a_i} < 1$

Từ  $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{11} \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[3]{a_1} < \sqrt[3]{a_2} < \sqrt[3]{a_3} < \dots < \sqrt[3]{a_{11}} \leq 10$

$\Rightarrow (\sqrt[3]{a_2} - \sqrt[3]{a_1}) + (\sqrt[3]{a_3} - \sqrt[3]{a_2}) + \dots + (\sqrt[3]{a_{11}} - \sqrt[3]{a_{10}}) = \sqrt[3]{a_{11}} - \sqrt[3]{a_1} \leq 10 - 1 = 9$

$\Rightarrow \min\{(\sqrt[3]{a_2} - \sqrt[3]{a_1}), (\sqrt[3]{a_3} - \sqrt[3]{a_2}), \dots, (\sqrt[3]{a_{11}} - \sqrt[3]{a_{10}})\} \leq \frac{9}{10} < 1 \Rightarrow (\text{đpcm}).$

**Bài 23.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ;  $abcd \neq 0$  thỏa mãn  $a+b+c+d=0$ .

Đặt  $S_1 = ab + bc + cd$ ;  $S_2 = ac + ad + bd$ .

Tìm điều kiện để cặp số thực dương  $(\alpha, \beta)$  thỏa mãn  $S = \alpha S_1 + \beta S_2 \leq 0$ .

**Chứng minh**

Đặt  $\begin{cases} a+d=A \\ b+c=B \end{cases} \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A$ ;  $\begin{cases} d=A-a \\ c=B-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=A-a \\ c=-A-b \end{cases}$

$S = \alpha S_1 + \beta S_2 = \alpha(ab + bc + cd) + \beta(ac + ad + bd)$

$S = \alpha[ab + b(-A-b) + (-A-b)(A-a)] + \beta[a(-A-b) + a(A-a) + b(A-a)]$

$$S = \alpha(ab - bA - b^2 - A^2 - bA + aA + ab) + \beta(-aA - ab + aA - a^2 + bA - ab)$$

$$S = 2\alpha ab - 2\alpha bA - \alpha b^2 - \alpha A^2 + \alpha aA + -2\beta ab - \beta a^2 + \beta bA$$

$$S = f(A) = -\alpha A^2 + (\alpha a + \beta b - 2\alpha b)A + 2\alpha ab - \alpha b^2 - 2\beta ab - \beta a^2$$

Do  $(-\alpha) < 0$  suy ra  $S = f(A) \leq 0 \Leftrightarrow \Delta_A \leq 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha a + \beta b - 2\alpha b)^2 + 4\alpha(2\alpha ab - \alpha b^2 - 2\beta ab - \beta a^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - 4\alpha\beta)a^2 + (4\alpha^2 - 6\alpha\beta)ab + (\beta^2 - 4\alpha\beta)b^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha - 4\beta)a^2 + 2\alpha(2\alpha - 3\beta)ab + \beta(\beta - 4\alpha)b^2 \leq 0 \quad (1). \text{ Xét hai trường hợp:}$$

• **Trường hợp 1:**  $0 < \alpha \leq \beta$ , chia hai vế của (1) cho  $b^2 \neq 0$  và đặt  $t = \frac{a}{b}$ , ta có:

$$g(t) = \alpha(\alpha - 4\beta)t^2 + 2\alpha(2\alpha - 3\beta)t + \beta(\beta - 4\alpha) \leq 0 \quad \forall t$$

Từ  $\alpha(\alpha - 4\beta) < 0$  suy ra  $g(t) \leq 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \Delta'_g \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2(2\alpha - 3\beta)^2 - \alpha\beta(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 \leq 0. \text{ Let } x = \frac{\alpha}{\beta} \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1] \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3x + 1) \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$$

Vì vậy, với  $0 < \alpha \leq \beta$  thì  $S = \alpha S_1 + \beta S_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \quad (2)$

• **Trường hợp 2:**  $0 < \beta \leq \alpha$ , chia hai vế của (1) cho  $a^2 \neq 0$  và đặt  $u = \frac{\beta}{\alpha}$ , ta có:

$$h(u) = \beta(\beta - 4\alpha)u^2 + 2\alpha(2\alpha - 3\beta)u + \alpha(\alpha - 4\beta) \leq 0 \quad \forall u$$

Do  $\beta(\beta - 4\alpha) < 0$  suy ra  $h(u) \leq 0 \quad \forall u \Leftrightarrow \Delta'_h \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2(2\alpha - 3\beta)^2 - \alpha\beta(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + 1 \leq 0. \text{ Đặt } y = \frac{\beta}{\alpha} \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 2y^2 - 2y + 1 \leq 0 \quad \forall y \in (0, 1] \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - 3y + 1) \leq 0 \quad \forall y \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 \leq 0 \quad \forall y \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq 1$$

Vì vậy, với  $0 < \beta \leq \alpha$  thì  $S = \alpha S_1 + \beta S_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \quad (3)$

• **Kết luận:** từ (2) và (3) kéo theo:  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \vee \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$

**Bài 24.** Chứng minh:  $a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \geq 2(ab + bc + ca)$ ,  $\forall a, b, c > 0 \quad (1)$

**Chứng minh**



$$(1) \Leftrightarrow T = (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (a-2)(b-2)(c-2) \geq 0$$

Trong ba biểu thức  $(a-2)$ ;  $(b-2)$ ;  $(c-2)$ , luôn tồn tại hai biểu thức cùng dấu, chẳng hạn  $(a-2)(b-2) \geq 0$ .

$$\text{Ta có: } T \geq 2(a-2)(b-2) + (a-2)(b-2)(c-2) + (c-2)^2 = (a-2)(b-2)c + (c-2)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 2$ .

**Bài 25.** Cho  $f(a, b, c)$  là hàm số liên tục và đối xứng với  $a, b, c$  dương.

Chứng minh: Nếu  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$  thì  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc})$

### Chứng minh

Định nghĩa các dãy số  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$ ,  $\{w_n\}$  như sau:  $u_1 = \sqrt{ab}$ ;  $v_1 = \sqrt{ab}$ ;  $w_1 = c$ ;

$u_{n+1} = v_{n+1} = \sqrt{v_n w_n}$ ;  $w_{n+1} = u_n$ . Thì  $f(a, b, c) \geq f(u_n, v_n, w_n) \geq f(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1})$  và  $u_n v_n w_n$

$= abc$ . Đặt  $x_0 = \ln c$ ;  $x_1 = \frac{\ln a + \ln b}{2}$ ;  $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ . Thì  $u_n = v_n = e^{x_n}$ ;  $w_n = e^{x_{n-1}}$ . Do

$$(x_{n+1} - x_n) = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}), \quad \{x_n\} \text{ hội tụ.}$$

Hơn nữa  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \sqrt[3]{abc}$ . Vì vậy  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc})$

**Bài 26.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

### Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right)}$$

Đặt  $x = \frac{a}{c}$ ,  $y = \frac{b}{a}$ ;  $z = \frac{c}{b}$  thì  $x, y, z > 0$  và  $xyz = 1$ , ta có bất đẳng thức  $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = t^3 + 1$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: } t = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \geq \sqrt[3]{2\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot 2\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot 2\sqrt{\frac{z}{x}}} = 2$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^3 + 1} \geq 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \geq (1+t)^2 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) \geq 0 \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$



**Chứng minh**

$$\begin{aligned}
 VT &= (a^2 + b^2 + c^2) \left[ \frac{1}{a(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b(c^2 + a^2)} + \frac{1}{c(a^2 + b^2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)] \left[ \frac{1}{a(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b(c^2 + a^2)} + \frac{1}{c(a^2 + b^2)} \right] \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \\
 &\geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \\
 &\geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} = 3 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)
 \end{aligned}$$

**Bài 28.** Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $0 < x < y \leq 1$ ;  $0 < x < z \leq 1$ ;  $3x + 2y + z \leq 4$ .

Tìm giá trị lớn nhất của  $T = 3x^2 + 2y^2 + z^2$

**Chứng minh 1**

$$\begin{aligned}
 \text{Do } 3x + 2y + z &\leq 4 \Rightarrow 3x \leq 4 - 2y - z \Rightarrow 3x^2 \leq x(4 - 2y - z) = 4x - 2xy - zx \\
 \Rightarrow T = 3x^2 + 2y^2 + z^2 &\leq 4x - 2xy - zx + 2y^2 + z^2 = 4x + 2y(y - x) + z(z - x) \\
 &\leq 4x + 2(y - x) + (z - x) = x + 2y + z \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3} + 2 + 1\right)(3x^2 + 2y^2 + z^2)} = \sqrt{\frac{10}{3} \cdot T} \\
 \Rightarrow \sqrt{T} &\leq \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow T \leq \frac{10}{3}. \text{ Với } x = \frac{1}{3}; y = z = 1 \text{ thì } \text{Max } T = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

**Chứng minh 2**

**Trường hợp 1.**

$$\text{Nếu } x < \frac{1}{3} \text{ thì } T = 3x^2 + 2y^2 + z^2 < 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 + 1^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow \text{Max } T < \frac{10}{3}.$$

**Trường hợp 2.** Xác định  $x \geq \frac{1}{3}$  thì từ các điều kiện  $0 < x < y \leq 1$ ;  $0 < x < z \leq 1$ ,

$$\text{dẫn tới: } \begin{cases} (y-x)(1-y) \geq 0 \\ (z-x)(1-z) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + y - x - y^2 \geq 0 \\ xz + z - x - z^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq xy + y - x \\ z^2 \leq xz + z - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T = 3x^2 + 2y^2 + z^2 &\leq 3x^2 + 2(xy + y - x) + xz + z - x = x(3x + 2y + z) + 2y + z - 3x \\
 &\leq 4x + (2y + z - 3x) = (3x + 2y + z) - 2x \leq 4 - 2x \leq 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

**Kết luận:** với  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = z = 1$  thì  $\text{Max } T = \frac{10}{3}$

**Bài 29.** Cho  $a, b, c, x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y} + \frac{1}{2}(a+b+c) \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

## Chứng minh

$$\begin{aligned}
& \frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y} + (a+b+c) - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&= \left( \frac{ax}{y+z} + a \right) + \left( \frac{by}{z+x} + b \right) + \left( \frac{cz}{x+y} + c \right) - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&= a \cdot \frac{x+y+z}{y+z} + b \cdot \frac{x+y+z}{z+x} + c \cdot \frac{x+y+z}{x+y} - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&= \frac{1}{2}[(y+z) + (z+x) + (x+y)] \left( \frac{a}{y+z} + \frac{b}{z+x} + \frac{c}{x+y} \right) - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&\geq \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \frac{1}{2}(a+b+c) = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}
\end{aligned}$$

**Bài 30.** Cho  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ ;  $a+b+c=2$ ;  $ab+bc+ca \leq abc+1$ . Chứng minh rằng:

$$(ax+by+cz)^2 \geq 4[(1-a)yz + (1-b)zx + (1-c)xy]$$

## Chứng minh

Từ  $a+b+c=2$  và  $ab+bc+ca \leq abc+1$ , suy ra  $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0$ .

Không mất tính tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Do đó  $a \geq 1$ ;  $b < 1$ ;  $c < 1$ ;  $b+c \leq 1$ .

Đặt  $u = \frac{ac+2b-2}{a}$ ;  $v = \frac{ab+2c-2}{a}$ . Ta sẽ chứng minh  $b^2 - u^2 = c^2 - v^2$

$$b^2 - u^2 = (b+u)(b-u) = \left(b + \frac{ac+2b-2}{a}\right) \left(b - \frac{ac+2b-2}{a}\right)$$

$$b^2 - u^2 = \frac{ab+ac+2b-a-b-c}{a} \cdot \frac{ab-ac-2b+a+b+c}{a} = \frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2} \geq 0$$

$$c^2 - v^2 = (c+v)(c-v) = \left(c + \frac{ab+2c-2}{a}\right) \left(c - \frac{ab+2c-2}{a}\right)$$

$$c^2 - v^2 = \frac{ca+ab+2c-a-b-c}{a} \cdot \frac{ca-ab-2c+a+b+c}{a} = \frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
bc+2a-2-uv &= bc+2a-2 - \frac{(ac+2b-2)(ab+2c-2)}{a^2} \\
&= \frac{a^2bc+2a^3-2a^2-a^2bc-2ab^2+2ab-2ac^2-4bc+4c+2ac+4b-4}{a^2} \\
&= \frac{2(a^3-a^2-ab^2+ab-ac^2-2bc+2c+ac+2b-2)}{a^2} = \frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2}
\end{aligned}$$

Suy ra  $b^2 - u^2 = c^2 - v^2 = bc+2a-2-uv \geq 0$ . Mặt khác ta có:

$$0 \leq (ax+uy+vz)^2 + (b^2-u^2)y^2 + (c^2-v^2)z^2 + 2(b^2-u^2)yz$$

$$\begin{aligned}
&= a^2x^2 + u^2y^2 + v^2z^2 + 2(ac+2b-2)xy + 2(ab+2c-2)xz + 2uvyz + (b^2-u^2)y^2 + \\
&\quad + (c^2-v^2)z^2 + 2(bc+2a-2-uv)yz
\end{aligned}$$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(ac + 2b - 2)xy + 2(ab + 2c - 2)xz + 2(bc + 2a - 2)yz$$

$$\text{Vậy } (ax + by + cz)^2 \geq 4[(1-a)yz + (1-b)zx + (1-c)xy]$$

**Bài 31.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 2(xy + yz + zx)$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$\sqrt{3xyz(x+y+z)} = \sqrt{(xyz + xyz + xyz)(x+y+z)} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có

$$x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + z(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y}) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} &\geq \sqrt{xy}(x+y) + \sqrt{yz}(y+z) + \sqrt{zx}(z+x) \\ &\geq \sqrt{xy}(2\sqrt{xy}) + \sqrt{yz}(2\sqrt{yz}) + \sqrt{zx}(2\sqrt{zx}) = 2(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

**Bài 32.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i + b_i}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } A_i = \frac{1}{a_i}; B_i = \frac{1}{b_i} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{B_i}} = \frac{1}{\frac{A_i + B_i}{A_i B_i}} = \frac{A_i B_i}{A_i + B_i}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{B_i}}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n B_i} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n B_i}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n A_i \cdot \sum_{i=1}^n B_i \geq \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} \cdot \left( \sum_{i=1}^n A_i + \sum_{i=1}^n B_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} \cdot \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) \quad (2)$$

$$\text{VT(2)} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \sum_{i=1}^n B_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_i B_j) = \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i)$$

$$\begin{aligned} \text{VP(2)} &= \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} \cdot \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} (A_j + B_j) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( A_i B_i \frac{A_i + B_i}{A_i + B_i} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \\
(2) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i) \geq \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ (A_i B_j + A_j B_i) - \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(A_i B_j - A_j B_i)^2}{(A_i + B_i)(A_j + B_j)} \geq 0
\end{aligned}$$

**Bài 33.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
(y+z) \frac{yc+zb}{a} + (z+x) \frac{za+xc}{b} + (x+y) \frac{xb+ya}{c} &\geq \\
&\geq (x+y)(x+z) + (y+z)(y+x) + (z+x)(z+y) \quad (1)
\end{aligned}$$

### Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$VT(1) = \sum_{cyc} \left[ \frac{b}{a} z(z+y) + \frac{a}{b} z(z+x) \right] \geq \sum_{cyc} 2 \sqrt{\left[ \frac{b}{a} z(z+y) \right] \left[ \frac{a}{b} z(z+x) \right]} = \sum_{cyc} 2z \sqrt{(z+y)(z+x)}$$

$$Ta \text{ sẽ chứng minh } 2 \sum_{cyc} x \sqrt{(x+y)(x+z)} \geq \sum_{cyc} (x+y)(x+z) \quad (2)$$

Đặt  $u^2 = y+z$ ,  $v^2 = x+z$ ,  $w^2 = x+y$ , thì (2)

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} (v^2 + w^2 - u^2)vw \geq \sum_{sym} v^2 w^2 \Leftrightarrow 2 \sum_{sym} u^3 v \geq \sum_{sym} (u^2 v^2 + u^2 vw) = 2 \sum_{cyc} (u^2 v^2 + u^2 vw)$$

đúng theo bất đẳng thức **Muirhead**. Vì vậy (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

**Bài 34.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực phân biệt. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \geq 2 \quad (1)$$

### Chứng minh

Đầu tiên chú ý rằng:  $A = \frac{a}{b-c} \cdot \frac{b}{c-a} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{c}{a-b} + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{a}{b-c} = -1$

$$Do \text{ đó: } \left( \frac{a}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c-a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a-b} \right)^2 \geq -2A = 2 \quad (2)$$

$$\text{và } \left| \frac{a}{b-c} \cdot \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \cdot \frac{c}{a-b} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \cdot \frac{a}{b-c} \right| \geq |A| = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \left( \left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \right)^2 \geq 4 \Rightarrow \left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \geq 2$$

**Bài 35.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a} \right| > \sqrt{6} - 1 \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đầu tiên đặt } A = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}; B = \frac{b}{b-a} + \frac{c}{c-b} + \frac{a}{a-c}$$

Ta có  $A + B = 3$ . Giả sử  $A \geq 0$ .

$$(A-B)^2 = (2B-3)^2 = \left( \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right)^2 = \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left( \frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{c+a}{c-a} \right)^2 - 2 = C - 2$$

$$\text{Từ } (a-b)^2 \leq c^2, \text{ suy ra } C \geq 12, \text{ nên } A \geq \frac{3 + \sqrt{C-2}}{2} \geq \sqrt{6} - 1$$

Xét trường hợp  $A \leq 0$ . Ta có  $B \geq 0$ , nên  $B = \frac{3 + \sqrt{C-2}}{2}$ , bởi vậy để chứng minh

$$A \leq 1 - \sqrt{6}, \text{ ta phải chứng tỏ rằng } C > 27 + 4\sqrt{6}$$

Đặt  $a = y + z; b = z + x; c = x + y$  và giả sử rằng  $x \geq y \geq z$  thì:

$$\begin{aligned} C(x, y, z) &= \left( \frac{x+y+2z}{x-y} \right)^2 + \left( \frac{2x+y+z}{y-z} \right)^2 + \left( \frac{x+2y+z}{z-x} \right)^2 \\ &\geq C(x, y, 0) = \left( \frac{x+y}{x-y} \right)^2 + \left( \frac{2x+y}{y} \right)^2 + \left( \frac{x+2y}{x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} \frac{\partial C(x, y, 0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial C(x, y, 0)}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ ta thu được } \text{Min } C(x, y, 0) > 27 + 4\sqrt{6}$$

**Bài 36.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,  $x, y, z \geq 0, xy + yz + zx = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } ax + by + cz \geq \sqrt{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } T = ax + by + cz \text{ và } S = (ax + by + cz)^2. \text{ Thì } S = T^2 \text{ và } S = \frac{(ax + by + cz)^2}{xy + yz + zx}.$$

Với  $z = 0$  ta có  $xy = 1$ , suy ra  $S = (ax + by)^2 \geq 4ab$ . Ta sẽ tìm  $\text{Min} S < 4ab$ .

$$\text{Với } z \neq 0, \text{ đặt } \frac{x}{z} = u \text{ và } \frac{y}{z} = v. \text{ Thì } S = \frac{(au + bv + c)^2}{u + v + uv}, u, v > 0$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2 + 2abuv + 2acu + 2bcv}{u + v + uv}$$

$$\Leftrightarrow S(u + v + uv) = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2 + 2abuv + 2acu + 2bcv$$

$$\Leftrightarrow F(u) = a^2u^2 + [(2ab - S)v + 2ac - S]u + b^2v^2 + (2bc - S)v + c^2 = 0$$

Ta có:  $F(u) = 0$  có ít nhất một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = [(2ab - S)v + 2ac - S]^2 - 4a^2[b^2v^2 + 2(bc - S)v + c^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow G(v) = S(S - 4ab)v^2 + 2[(2ab - S)(2ac - S) - 2a^2(2bc - S)]v + (2ac - S)^2 - 4a^2c^2 \geq 0$$

Từ  $0 < S < 4ab$  suy ra  $G(v) \geq 0$  có ít nhất một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = [(2ab - S)(2ac - S) - 2a^2(2bc - S)]^2 - S(S - 4ab)[(2ac - S)^2 - 4a^2c^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow S^2[S + 2a(a - b - c)]^2 - S^2(S - 4ab)(S - 4ac) \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow v = \frac{a - b + c}{a + b - c}; u = -\frac{(2ab - S_0)v + 2ac - S_0}{2a^2}$$

Đặt  $x = uz$ ,  $y = vz$  vào đẳng thức  $xy + yz + zx = 1$ , ta có:

$$(uv + v + u)z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{uv + u + v}}, v = \frac{a - b + c}{a + b - c}; u = -\frac{(2ab - S_0)v + 2ac - S_0}{2a^2}$$

$$\text{Vì vậy } \min T = \min(ax + by + cz) = \sqrt{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

**Bài 37.** Cho  $n, k$  là các số nguyên với  $n \geq k \geq 3$ . Cho  $t_1, t_2, \dots, t_n$  là các số thực dương thỏa mãn  $(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) < (n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k)^2$  (1)

Chứng minh rằng mỗi số trong  $k$  số  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  bé hơn tổng của  $k-1$  số còn lại với mọi  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

### Chứng minh

Giả sử tồn tại  $t_1, t_2, \dots, t_k$  và  $t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} \leq t_k$ , ta chứng minh

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_k) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_k} \right) \geq 2(k-1)^2 + 2 \quad (2)$$

Thật vậy, đặt  $(k-1)^2 + 1 = p$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\begin{aligned} (t_1 + \dots + t_k) \left( \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_k} \right) &= (t_1 + \dots + t_{k-1}) \left( \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}} \right) + \frac{t_1 + \dots + t_{k-1}}{t_k} + t_k \left( \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}} \right) + 1 \\ &\geq (k-1)^{k-1} \sqrt[k-1]{t_1 \dots t_{k-1}} \cdot (k-1)^{k-1} \sqrt[k-1]{\frac{1}{t_1} \dots \frac{1}{t_{k-1}}} + \frac{t_1 + \dots + t_{k-1}}{t_k} + \frac{(k-1)^2 t_k}{t_1 + \dots + t_{k-1}} + 1 \end{aligned}$$

$$\geq (k-1)^2 + [(k-1)^2 + 1]^{(k-1)^2} \sqrt{\left(\frac{t_k}{t_1 + \dots + t_{k-1}}\right)^{(k-1)^2 - 1}} + 1$$

$$\geq (k-1)^2 + [(k-1)^2 + 1]^{(k-1)^2} \sqrt{\left(\frac{t_k}{t_k}\right)^{(k-1)^2 - 1}} + 1 = 2(k-1)^2 + 2 \Rightarrow (2) \text{ đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1} = a > 0 \\ t_k = (k-1)a \end{cases}$ . Xét hai khả năng:

• Nếu  $n = k$  thì (2) mâu thuẫn với (1)

• Nếu  $n \geq k + 1$  thì

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^k t_i\right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i}\right) + \left(\sum_{i=k+1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=k+1}^n \frac{1}{t_i}\right) + \sum_{i=k+1}^n \left[ \left(\sum_{j=1}^k t_j\right) \frac{1}{t_i} + \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{t_j}\right) t_i \right]$$

$$\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + (n-k) \cdot 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k t_i\right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i}\right)}$$

$$\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + 2(n-k) \sqrt{2(k-1)^2 + 2}$$

$= (n-k + \sqrt{2(k-1)^2 + 2})^2 = (n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k)^2$ . Điều này mâu thuẫn với (2). Vì vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 38.** Cho  $a_1, \dots, a_n$  là các số thực dương ( $3 \leq n \in \mathbb{N}$ ) thỏa mãn

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \frac{3}{3n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \quad (1). \text{ Chứng minh rằng}$$

$a_i, a_j, a_k$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi  $1 \leq i < j < k \leq n$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử tồn tại  $i, j, k$  thỏa mãn  $a_i, a_j, a_k$  không là độ dài ba cạnh một tam giác, giả sử là  $a_1, a_2, a_3$  với  $a_3 > a_1 + a_2$ .

**Bước 1.** Ta sẽ chứng minh  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq \frac{3}{8} (a_1 + a_2 + a_3)^2 \quad (2)$

$$(2) \Leftrightarrow 8(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 3(a_1 + a_2 + a_3)^2 \Leftrightarrow 5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 6(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)$$

$$\Leftrightarrow T = 5\left[a_3 - \frac{3}{5}(a_1 + a_2)\right]^2 + 5(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{5}(a_1 + a_2)^2 - 6a_1 a_2 \geq 0$$

$$\text{Ta có } T \geq 5\left[(a_1 + a_2) - \frac{3}{5}(a_1 + a_2)\right]^2 + 5(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{5}(a_1 + a_2)^2 - 6a_1 a_2$$

$$= \frac{4}{5}(a_1 + a_2)^2 + 5(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{5}(a_1 + a_2)^2 - 6a_1 a_2 = 4(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow (2) \text{ đúng.}$$

**Bước 2.** Ta sẽ chứng minh  $I = 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 8a_k^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)a_k \geq 0, \forall 4 \leq k \leq n$  (3). Ta có:

$$I \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + a_3)^2 + 8a_k^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)a_k = 8\left[a_k - \frac{3}{8}(a_1 + a_2 + a_3)\right]^2 \geq 0$$

**Bước 3.** Ta sẽ chứng minh  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{3}{3n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$  (4)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (3n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 3(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= 8[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 3(a_1 + a_2 + a_3)^2] + \\ &+ \sum_{k=4}^n [3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 8a_k^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)a_k] + [(n-3)(a_4^2 + \dots + a_n^2) - (a_4 + \dots + a_n)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng bởi vì (2), (3) cũng đúng theo bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz**, ta có  $(n-3)(a_4^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_4 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow$  (4) đúng.

Do (4) mâu thuẫn với (1), suy ra giả sử ban đầu là sai  $\Rightarrow$  (đpcm)

**Bài 39. [Austrian – Polish MO – 1999]** Cho  $5 \leq n \in \mathbb{N}$ . Tìm các số thực tốt nhất  $k_1, k_2$

$$\text{thỏa mãn } k_1 < T = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < k_2, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \quad (1)$$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh  $k_1 = 1, k_2 = n - 1$ . Thật vậy, đặt  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , thì

$$T > \frac{a_1}{S} + \frac{a_2}{S} + \dots + \frac{a_n}{S} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{S} = \frac{S}{S} = 1. \text{ Giả sử } T > 1 + x \text{ với } x > 0.$$

$$\text{Đặt } a_1 = 1, a_2 = t, \dots, a_n = t^{n-1} (t > 0) \text{ thì } T = \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-1}} + \frac{n-1}{1+t}$$

$$\text{Đặt } t > \frac{n-1-x}{x} \Rightarrow \frac{n-1}{1+t} < \frac{n-1}{1+\frac{n-1-x}{x}} = x \Rightarrow T < 1+x \Rightarrow \text{mâu thuẫn.}$$

Vì vậy,  $k_1 = 1$  là cận dưới lớn nhất.

Sử dụng tính chất: nếu  $0 < x < y$  và  $m > 0$  thì  $\frac{x}{y} < \frac{x+m}{y+m}$ , suy ra

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} < \frac{S - a_2}{S}, \frac{a_2}{a_2 + a_3} < \frac{S - a_3}{S}, \dots, \frac{a_n}{a_n + a_1} < \frac{S - a_1}{S} \Rightarrow T < \frac{nS - S}{S} = n - 1$$

Giả sử  $T < n - 1 - x$  với  $x > 0$ .

$$\text{Đặt } a_1 = 1, a_2 = t, \dots, a_n = t^{n-1} (t > 0) \text{ thì } T = \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-1}} + \frac{n-1}{1+t} > \frac{n-1}{1+t}$$

$$\text{Đặt } t < \frac{x}{n-1-x} \Rightarrow \frac{1}{1+t} < \frac{n-1-x}{n-1} \Rightarrow \frac{n-1}{1+t} > n-1-x \Rightarrow T > n-1-x \Rightarrow \text{mâu thuẫn.}$$

Vì vậy,  $k_2 = n - 1$  là cận trên nhỏ nhất.



**Bài 40.** Đặt  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ .

Chứng minh rằng:  $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq (3a + c)(3b + a)(3c + b)$

**Chứng minh**

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) - (3a + c)(3b + a)(3c + b) = 2 \sum_{cyc} (b + c)(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 41.** Đặt  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow a(b+ac)(c+ab) + b(c+ab)(a+bc) + c(a+bc)(b+ca) \geq \frac{3}{2}(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

$$\Leftrightarrow 3abc + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3a^2b^2c^2 + abc(a^2 + b^2 + c^2) \text{ với } a + b + c = 3$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 + 2abc(ab + bc + ca) \geq 3a^2b^2c^2 + 12abc$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 - 3abc(a + b + c) \geq abc[3 + 3abc - 2(ab + bc + ca)]$$

$$\Leftrightarrow 3c^2(a-b)^2 + 3b^2(c-a)^2 + 3a^2(a-b)^2 \geq$$

$$\geq abc[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) + 9abc - (a+b+c)(ab+bc+ca)]$$

$$\Leftrightarrow \left(3a^2 + bca^2 - \frac{1}{2}abc\right)(b-c)^2 + \left(3b^2 + cab^2 - \frac{1}{2}abc\right)(c-a)^2 + \left(3c^2 + abc^2 - \frac{1}{2}abc\right)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{Đặt } A_1 = 3a^2 + bca^2 - \frac{1}{2}abc; A_2 = 3b^2 + cab^2 - \frac{1}{2}abc; A_3 = 3c^2 + abc^2 - \frac{1}{2}abc$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow A_1 \geq A_2 \geq A_3$ . Ta có  $A_2 + A_3 = 3(b^2 + c^2) + abc(b+c) - abc \geq 6bc - abc = (6-a)bc \geq 0$ .

Suy ra  $A_1(b-c)^2 + A_2(c-a)^2 + A_3(a-b)^2 \geq (A_2 + A_3)(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$

**Bài 42.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $ab + bc + ca = 3$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c \geq b \geq a \Rightarrow bc \geq \frac{ab+bc+ca}{3} = 1$ . Do đó

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} - \frac{2}{1+bc} = \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+bc}\right) + \left(\frac{1}{1+c^2} - \frac{1}{1+bc}\right) = \frac{(b-c)^2(bc-1)}{(1+b^2)(1+c^2)(1+bc)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+bc}. \text{ Ta sẽ chứng minh } \frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{1+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(3+bc+2a^2) \geq 3(1+a^2)(1+bc) \Leftrightarrow a^2+ab+ac \geq 3a^2bc \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq abc$$

Ta có:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \frac{ab+bc+ca}{3} \cdot \sqrt[3]{abc} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} \cdot \sqrt[3]{abc} = abc$  (đpcm)

**Bài 43.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a+b+c+abc=1$ .

Chứng minh rằng:  $ab+bc+ca \leq \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc}$  (1)

### Chứng minh

Đặt  $m = \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow 3m = a+b+c = 1-abc \Rightarrow$

$$A = \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc} = \frac{(3-3m)(3-6m)}{6+3m} = \frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m}$$

$$\Rightarrow A - 3m^2 = \frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m} - 3m^2 = \frac{3(1-3m-m^3)}{2+m} = 3 \cdot \frac{abc-m^3}{2+m}$$

Ta có (1)  $\Leftrightarrow ab+bc+ca \leq A \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{m^3-abc}{2+m} \leq 3m^2 - (ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{2+m} \leq 3(a+b+c)^2 - 9(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 27abc \leq 3(2+m)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad (2)$$

$$3m = 1-abc \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 2+m \geq 7m = \frac{7}{3}(a+b+c) \Rightarrow 3(2+m) \geq 4(a+b+c)$$

Nhưng  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ . Suy ra (2) sẽ đúng nếu ta có thể chứng minh  $(a+b+c)^3 - 27abc \leq 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \text{ đúng theo Schur.}$$

**Bài 45.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  và  $abc+bcd+cda+dab=4$ .

Chứng minh rằng:  $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4$

### Chứng minh

Luôn tồn tại  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $abc+bcd+cda+dab=4xyz$ ;  $xyz=1$ ;

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=2(xy+yz+zx); 3(a+b+c+d)=4(x+y+z).$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{4}{3}(x+y+z) \right]^2 - 4(xy+yz+zx) \geq 4 \Leftrightarrow 4(x+y+z)^2 - 9(xy+yz+zx) \geq 9$$

$$VT = 3(x^2+y^2+z^2) + (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 9\sqrt{x^2y^2z^2} + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (x-y)^2 \geq 9$$

## CHƯƠNG VI. TỔNG KẾT

### § 25.1 TÓM TẮT NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

#### 1.1 Bất đẳng thức AM – GM:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

#### 1.2 Bất đẳng thức AM – GM suy rộng:

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  Khi đó 
$$\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \geq \left( a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}$$

#### 2.1 Bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

#### 2.2 Bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz suy rộng:

Cho  $m$  bộ số thực không âm  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n); (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n); \dots; (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$

$$\text{Khi đó: } (a_1 b_1 \dots p_1 + a_2 b_2 \dots p_2 + \dots + a_n b_n \dots p_n)^m \leq (a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m) \dots (p_1^m + p_2^m + \dots + p_n^m)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 : b_1 : \dots : p_1 = a_2 : b_2 : \dots : p_2 = \dots = a_n : b_n : \dots : p_n$$

#### 3.1 Bất đẳng thức Holder:

Cho 2 bộ số  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $p, q \in \mathbb{Q}^+$  sao cho  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\text{Khi đó ta có: } (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

#### 3.2 Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $p, q \in \mathbb{R}$  sao cho  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Khi đó ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^{pq} \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^q (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^p \quad (3) \quad \forall pq \neq 0$$

(Bất đẳng thức Francis – Lithewood)

### 3.3 Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder

Cho  $m$  bộ số  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $\begin{cases} p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+ \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \dots l_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_2}} \dots \left( \sum_{i=1}^n l_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

### 3.4 Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder

Cho  $m$  bộ số  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $m$  số thỏa mãn  $\begin{cases} \alpha, \beta, \dots, \lambda > 0 \\ \alpha + \beta + \dots + \lambda = 1 \end{cases}$

Khi đó ta có 
$$\sum_{i=1}^n (a_i^\alpha b_i^\beta \dots l_i^\lambda) \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^\beta \dots \left( \sum_{i=1}^n l_i \right)^\lambda$$

### 4.1 Bất đẳng thức Minkowski

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $1 < p \in \mathbb{Q}^+$ , khi đó  $\left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}}$

### 4.2 Mở rộng của bất đẳng thức Minkowski

Cho  $m$  bộ số thực dương  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $\begin{cases} q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^+ \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \end{cases}$

a.  $\left( \sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( \sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[ \sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p > 1$

b.  $\left( \sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( \sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p < 1$

### 5.1 Bất đẳng thức Chebyshev

Cho hai dãy hữu hạn các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , khi đó

- Nếu có 2 dãy đơn điệu cùng chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  thì

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

- Nếu có 2 dãy đơn điệu ngược chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  thì

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

### 5.2 Bất đẳng thức Chebyshev suy rộng:

Cho  $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$  thỏa mãn  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$ .

- Nếu có 2 dãy đơn điệu cùng chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  thì

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + \dots + m_n a_n b_n \geq (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n)(m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n)$$

- Nếu có 2 dãy đơn điệu ngược chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  thì

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + \dots + m_n a_n b_n \leq (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n)(m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

### 6.1 Bất đẳng thức Hoán vị cho hai dãy đơn điệu cùng chiều

- Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự cùng chiều nhau chẳng hạn là hai dãy đơn điệu

tăng  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ . Gọi  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  là 1 hoán vị tùy ý của  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , khi đó ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$$

## 6.2 Bất đẳng thức Hoán vị cho hai dãy đơn điệu ngược chiều

Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự ngược chiều nhau chẳng hạn là

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}. \text{ Gọi } (t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ là 1 hoán vị tùy ý của } (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ khi đó ta có}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$$

## 6.3 Bất đẳng thức Hoán vị tổng quát

Vì với mọi dãy hữu hạn ta có thể đánh số và sắp lại thứ tự nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử có hai dãy số thực hữu hạn được sắp xếp thứ tự cùng chiều tức là

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

Gọi  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  là 1 hoán vị tùy ý của  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Đặt  $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ ;  $T = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$ ;  $s = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$ , khi đó  $s = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq T = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n \leq S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

**Nhận xét:**

- Số các bất đẳng thức hoán vị chính là số hoán vị của bộ  $n$  số  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  nên có  $(n!)$  bất

$$\text{đẳng thức hoán vị và } \max_{(t_1, \dots, t_n)} T = S; \quad \min_{(t_1, \dots, t_n)} T = s$$

- Bất đẳng thức hoán vị xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi một trong hai dãy  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  hoặc

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ là dãy dừng, tức là } \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

- Ta cũng có các bất đẳng thức hoán vị tương tự như trên nếu cố định bộ  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  và gọi

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ là một hoán vị tùy ý của } (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

## 6.4 Các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức hoán vị

Giả sử  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  là một hoán vị của  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

- Nếu  $f(x)$  là hàm số không giảm trên  $(a, b)$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) \geq x'_1 f(x_1) + x'_2 f(x_2) + \dots + x'_n f(x_n)$$

- Nếu  $f(x)$  là hàm số không tăng trên  $(a, b)$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) \leq x'_1 f(x_1) + x'_2 f(x_2) + \dots + x'_n f(x_n)$$

- Nếu  $f(x), g(x)$  là hàm số không giảm trên  $(a, b)$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \geq f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + \dots + f(x_n)g(x'_n)$$

- Nếu  $f(x)$  là hàm số không giảm trên  $(a, b)$  và  $g(x)$  là hàm số không tăng trên  $(a, b)$  thì  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có bất đẳng thức sau

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \leq f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + \dots + f(x_n)g(x'_n)$$

### 7.1 Bất đẳng thức Schur

Với  $a, b, c \geq 0$  và  $k$  là số thực bất kì ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

### 7.2 Bất đẳng thức Schur suy rộng 1 (Vornicu Schur)

Xét bất đẳng thức:  $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$  (1)

Khi đó (1) đúng với mọi  $a \geq b \geq c \geq 0$  và  $x, y, z \geq 0$  nếu thỏa mãn 1 trong các khả năng:

- $x \geq y$  (hoặc  $z \geq y$ )
- $ax \geq by$
- $bz \geq cy$  (nếu  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác)

$$\text{iiV. } \sqrt{x} + \sqrt{z} \geq \sqrt{y}$$

$$\text{iv. } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$$

### 7.3 Bất đẳng thức Schur suy rộng 2

Cho  $p, q, x, y, z, a, b, c$  là các số dương sao cho  $(a, b, c)$  và  $(x, y, z)$  là các bộ đơn điệu cùng chiều. Khi đó ta luôn có:

$$x[(a^p - b^p)(a^q - c^q) + (a^q - b^q)(a^p - c^p)] + y[(b^p - c^p)(b^q - a^q) + (b^q - c^q)(b^p - a^p)] \\ + z[(c^p - a^p)(c^q - b^q) + (c^q - a^q)(c^p - b^p)] \geq 0 \quad (1)$$

### 7.4 Bất đẳng thức Schur suy rộng 3

**Định lý 4:** Xét bất đẳng thức sau, trong mỗi hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\sum f(a-b)f(a-c)f(a-d)f(a-e) \geq 0$$

Khi đó để bất đẳng thức đúng thì hàm số  $f$  phải thỏa mãn 2 điều kiện sau đây:

- $f$  là hàm đơn điệu tăng.
- $xf(x) \geq 0$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$

### 7.5 Bất đẳng thức Schur mở rộng cho tam giác

Cho hai tam giác với độ dài các cạnh tương ứng  $ABC(a, b, c); A_1B_1C_1(a_1, b_1, c_1)$ . Khi đó:

$$a_1bc(a^\alpha - b^\alpha)(a^\alpha - c^\alpha) + b_1ca(b^\alpha - c^\alpha)(b^\alpha - a^\alpha) + c_1ab(c^\alpha - a^\alpha)(c^\alpha - b^\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \geq 1$$

### 7.6 Hệ quả bất đẳng thức Schur với cấu trúc đối xứng 3 biến

Cho  $a, b, c \geq 0$ , đặt  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + bc + ca$ ,  $r = abc$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} p^2 &\geq 3q & p^2q + 3pr &\geq 4q^2 & p^2q &\geq 3pr + 2q^2 & q^3 + 9r^2 &\geq 4pqr \\ q^2 &\geq 3pr & pq^2 + 3qr &\geq 4p^2r & pq^2 &\geq 2p^2r + 3qr & 2q^3 + 9r^2 &\geq 7pqr \\ p^3 &\geq 27r & p^4 + 3q^2 &\geq 4p^2q & 2p^3 + 9r &\geq 7pq & p^3r + q^3 &\geq 6pqr \\ p^3 + 9r &\geq 4pq; & p^4 + 4q^2 + 6pr &\geq 5p^2q \end{aligned}$$

### 8.1 Bất đẳng thức Muirhead

• **Định nghĩa:** Giả sử các biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$  và bộ số mũ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

**Ký hiệu:** Tập biến số  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ; Tập số mũ  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

Đa thức đối xứng  $S$  với các biến số của tập  $X$  và số mũ của tập  $\alpha$  là

$$S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} \cdot S_{X \setminus \{a_1\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_1\}} + \dots + a_n^{\alpha_n} \cdot S_{X \setminus \{a_n\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_n\}}$$

Hai bộ số  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  gọi là hai bộ số đồng bậc khi và chỉ khi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

Cho hai bộ số  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  đồng bậc, ta nói bộ  $\alpha$  trội hơn bộ  $\beta$  và

$$\text{viết kí hiệu } \alpha \succ \beta \text{ khi và chỉ khi ta có } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k \quad \forall k = \overline{1, n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{cases}$$

• **Định lý Muirhead với số mũ thực:**

Xét các biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó nếu  $\alpha \succ \beta$  tức là

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k \quad \forall k = \overline{1, n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{cases} \text{ thì } S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \geq S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = S_X^\beta$$

**Đảo lại:** Nếu mọi bộ  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  gồm  $n$  số thực dương ta có  $S_X^\alpha \geq S_X^\beta$  thì  $\alpha \succ \beta$

### 8.2 Hệ quả: Bất đẳng thức ASYM

Cho  $m$  bộ số  $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$  với  $m, n \in \mathbb{Z}^+$

, đặt  $t_i = \frac{\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \dots + \alpha_{mi}}{m} \quad \forall i = \overline{1, n}$ . Khi đó với các biến số  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  ta có:

$$S_{\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n}} + S_{\alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n}} + \dots + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}\dots\alpha_{mn}} \geq m S_{t_1 t_2 \dots t_n}$$



## 9. Các định lý Fermat cho hàm một biến số

### 9.1 Định lý về hàm đơn điệu

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $[a, b]$ .

- Nếu  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$  thì  $f(x)$  tăng trên  $[a, b]$  và  $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$ ,  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$
- Nếu  $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$  thì  $f(x)$  giảm trên  $[a, b]$  và  $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$ ,  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$

### 9.2 Định lý về điều kiện cần để hàm số có cực trị

Giả sử  $y = f(x)$  xác định trên một lân cận đủ bé của điểm  $x_0 \in (a, b)$  và có đạo hàm tại điểm  $x_0$ . Khi đó nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$

### 9.3 Định lý 1 về điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử  $y = f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và  $x_0 \in (a, b)$ . Trong một lân cận đủ bé  $\varepsilon > 0$  của điểm  $x_0$ , nếu  $f'(x)$  thay đổi dấu khi  $x$  đi qua  $x_0$  (có thể không tồn tại  $f'(x_0)$ ), thì  $f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$ .

- Nếu  $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  và  $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.
- Nếu  $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  và  $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$  thì  $x_0$  là điểm cực đại

### 9.4 Định lý 2 về điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử  $y = f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và  $x_0 \in (a, b)$ . Trong một lân cận đủ bé  $\varepsilon > 0$  của điểm  $x_0$ , hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 liên tục, đồng thời  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) \neq 0$  thì  $x_0$  là một điểm cực trị của hàm số với sự phân loại chi tiết:

- Nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm  $f(x)$ .
- Nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của hàm  $f(x)$ .

## 10. Định lý Lagrange hàm một biến số

Nếu hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và có đạo hàm trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại ít nhất một giá trị  $c$  (với  $a < c < b$ ) sao cho  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## 11. Định lý Lagrange hàm nhiều biến số

### 11.1 Điều kiện cần của cực trị hàm nhiều biến

Giả sử hàm số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$  xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền  $D = \{X(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in (a_i, b_i), i = \overline{1, n}\}$  khi đó ta có định lý:

**Định lý:** Điều kiện cần để hàm số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt được cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$  là tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$\begin{cases} w'_{x_i} = f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

### 11.2 Điều kiện đủ của cực trị hàm nhiều biến

Giả sử  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$  là một điểm dừng của hàm số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$  và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Như đã biết, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số  $n$  biến số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tại điểm  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$  là một dạng toàn

phương của  $n$  biến số  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ :  $d^2 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j$

Trong đó  $a_{ij}$  là các đạo hàm riêng cấp hai:  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{X})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

**Định lý:**

1. Nếu  $d^2 f$  là một dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là điểm cực tiểu của hàm số  $f(X)$ ;
2. Nếu  $d^2 f$  là một dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là điểm cực đại của hàm số  $f(X)$ .
3. Nếu  $d^2 f$  là một dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  không phải là điểm cực trị của hàm số  $f(X)$ .

Ma trận của dạng toàn phương  $d^2 f$  là ma trận vuông với các phần tử là các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng  $\bar{X}$  (gọi là ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó: } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{X})}{\partial x_i \partial x_j}. \text{ Đặt } H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Một trong các phương pháp xem xét tính xác định của một dạng toàn phương là dựa vào các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương đó. Chú ý rằng, định thức con  $H_k$  tạo thành từ  $k$  dòng đầu và  $k$  cột đầu của nó. Như vậy  $H$  có  $n$  định thức con chính từ cấp 1 đến  $n$ .

Áp dụng định lý về dấu hiệu dạng toàn phương xác định ta có quy tắc sau đây:

### Quy tắc xác định cực trị bằng xét dấu các định thức con chính

1. Nếu tất cả các định thức con chính của ma trận  $H$  đều dương ( $H_k > 0$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, n$ ) thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là *điểm cực tiểu* của hàm số  $f(X)$ .
2. Nếu  $(-1)^k H_k > 0$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, n$ , tức là ma trận  $H$  có tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là *điểm cực đại* của hàm số  $f(X)$ .

## 12. Bất đẳng thức Bernoulli

### 12.1 Dạng nguyên thủy của bất đẳng thức

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực cùng dấu và lớn hơn  $(-1)$ . Khi đó ta có:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

### 12.2 Dạng cơ bản của bất đẳng thức

• Số mũ tự nhiên:  $\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$  ta có  $(1 + a)^n \geq 1 + na$

• Số mũ thực:

$\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$  và  $0 \leq r \leq 1$  ta có  $(1 + a)^r \leq 1 + ra$

$\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$  và  $(r \leq 0) \cup (r \geq 1)$  ta có:  $(1 + a)^r \geq 1 + ra$

### 12.3 Dạng tổng quát của bất đẳng thức

• Trường hợp 1:  $\forall x > -1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$  ta có:  $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

Hệ quả 1:  $\forall t > 0, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$  ta có:  $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$

Hệ quả 2:  $u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \leq \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta, \forall u > 0, \forall 0 < \alpha < \beta$ . Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = 1}$

Hệ quả 3:  $u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^{\alpha-1} \leq \alpha u_0^{\alpha-1} u, \forall u, u_0 > 0, \forall 0 < \alpha < 1$  Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = u_0}$

• Trường hợp 2:  $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$  ta có:  $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

Hệ quả 1:  $\forall t > 0, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$  ta có:  $t^\alpha \geq \alpha t + (1 - \alpha)$

Hệ quả 2:  $u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) > \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta, \forall u > 0, \forall \alpha > \beta > 0$ . Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = 1}$

Hệ quả 3:  $u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^{\alpha-1} \geq \alpha u_0^{\alpha-1} u, \forall u, u_0 > 0, \forall \alpha > 1$  Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = u_0}$

## 13. Bất đẳng thức Jensen

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0; 1]$  với  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ ,

• Nếu  $f(x)$  là hàm lồi trên  $\mathbb{I}$  thì ta có bất đẳng thức

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

• Nếu  $f(x)$  là hàm lõm trên  $\mathbb{I}$  thì ta có bất đẳng thức

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

**14. Bất đẳng thức Karamata**

Cho 2 bộ  $n$  số thực được sắp thứ tự  $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  với  $(a) \succ (b)$  tức là thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \dots \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

- Nếu  $f$  là hàm lồi trên  $I$  thì  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$
- Nếu  $f$  là hàm lõm trên  $I$  thì  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$

**15. Bất đẳng thức với các hàm lồi bên phải và lõm bên trái****15.1 Định lý hàm số lồi bên phải (Định lý RCF)**

Cho  $f(u)$  là một hàm số xác định trên khoảng  $I \subset \mathbb{R}$  và lồi với  $u \geq s, s \in I$ .

Nếu  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$  (1)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = ns \\ x_2 = x_3 = \dots = x_n \geq s \end{cases} \text{ thì (1) cũng đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I \text{ thỏa mãn } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq s$$

**15.2 Định lý hàm số lõm bên trái (Định lý LCF)**

Cho  $f(u)$  là hàm xác định trên khoảng  $I \subset \mathbb{R}$  và lõm với  $u \leq s, s \in I$ .

Nếu  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$  (2)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = ns \\ x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq s \end{cases} \text{ thì (2) cũng đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I \text{ thỏa mãn } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq s$$

**15.3 Định lý hàm lõm bên trái – lồi bên phải (Định lý LCRCF).**

Cho  $a < c$  là các số thực,  $f$  là hàm liên tục trên khoảng  $I = [a, +\infty)$ , lõm trên  $[a, c]$  và lồi trên  $[c, +\infty)$ . Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S = \text{const}$ , thế thì biểu thức

$E = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  đạt giá trị lớn nhất với  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$

**15.4 Định lý điểm uốn đơn (Định lý SIP).**

Cho  $f$  là hàm khả vi cấp 2 trên  $\mathbb{R}$  với điểm uốn đơn, cho  $S$  là số thực cố định và cho

$g(x) = f(x) + (n-1)f\left(\frac{S-x}{n-1}\right)$ . Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$ , thì  $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$

## 16. Bất đẳng thức Popoviciu và các dạng mở rộng

### 16.1 Bất đẳng thức Popoviciu (1965)

Cho hàm  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $x, y, z \in \mathbb{I}$ , khi đó ta có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

### 16.2 Mở rộng 1 Bất đẳng thức Popoviciu (A. Lupas, 1982)

Cho hàm  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $x, y, z \in \mathbb{I}$ , khi đó với mọi  $p, q, r > 0$  ta có:

$$pf(x) + qf(y) + rf\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \geq$$

$$\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right)$$

### 16.3 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Popoviciu (Vasile Cirtoaje, 2002)

Nếu  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$  thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + n(n-2)f(a) \geq (n-1)[f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)],$$

### 16.4 Mở rộng 3 Bất đẳng thức Popoviciu (Vasile Cirtoaje, 2004)

Nếu  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$  thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + \frac{n}{n-2}f(a) \geq \frac{2}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)$$

trong đó  $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , và  $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$  với mọi  $i$ .

### 16.5 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Popoviciu (Bill Zhao, 2005)

Nếu  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$ , thì

$$\binom{m-1}{n-2} \sum_{k=1}^n f(a_k) + n \binom{m-2}{n-2} f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} f\left(\frac{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}}{m}\right)$$

### 17.1 Bất đẳng thức Petrovica

Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[0, a]$ . Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, a]$  sao cho  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \in [0, a]$ .

Khi đó ta có:  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-1)f(0)$

### 17.2 Mở rộng 1 Bất đẳng thức Petrovica

Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[0, a]$  và  $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$ . Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\right]$  và

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i < a. \text{ Khi đó ta có bất đẳng thức } \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1\right)f(0)$$

### 17.3 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Petrovica (Vasic)

Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[0, a]$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$1. x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, a] \quad 2. p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1 \quad 3. \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i \in [0, a]$$

$$4. \sum_{i=1}^{n_1-1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2-1} p_i x_i = \dots = \sum_{i=n_{k-1}}^n p_i x_i \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1})$$

Khi đó ta có bất đẳng thức: 
$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq k f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^n p_i\right) f(0)$$

## 18. Bất đẳng thức trong tích phân Riman

### 18.1 Bất đẳng thức cơ bản trong tích phân Riman

• **Mệnh đề 1:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  và  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

• **Mệnh đề 2:** Nếu  $f, g$  liên tục trên  $[a, b]$  và  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

• **Mệnh đề 3:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thỏa mãn  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  và hàm số  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx > 0$

• **Mệnh đề 4:** Nếu  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thỏa mãn  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$

và  $f(x), g(x)$  không đồng nhất với nhau trên  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$

• **Mệnh đề 5:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thỏa mãn  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$  và

hàm  $f(x)$  không đồng nhất với  $m$  hoặc  $M$  thì  $m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$

• **Mệnh đề 6:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

• **Mệnh đề 7:** Nếu  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) g(x)| dx$

• **Định lý về giá trị trung bình:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thì tồn tại ít nhất 1

điểm  $c \in [a, b]$  sao cho  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

• **Định lý mở rộng về giá trị trung bình:** Giả sử  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$ .

Nếu  $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$  hoặc  $g(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$  thì tồn tại ít nhất một điểm  $c \in [a, b]$  sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

### 18.2 Bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz

Cho hai hàm số  $f, g$  liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có:  $\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

### 18.3 Bất đẳng thức Young

Cho  $p, q > 1$  thỏa mãn  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Khi đó ta có:  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b > 0$

### 18.4 Bất đẳng thức Hilbert

Nếu  $a_i, b_j \geq 0; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; p > 1$ , thì khi đó:  $\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_n b_m}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} \left( \sum_{n=1}^k a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{m=1}^k b_m^q \right)^{\frac{1}{q}}$

### 18.5 Bất đẳng thức tích phân Holder

Cho  $p, q > 1$  với  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  và  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$ .

Khi đó ta có:  $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 > 0: A|f(x)|^p = B|g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b]$

### 18.6 Bất đẳng thức tích phân Minkowski

Cho  $p > 1$  và  $f, g$  là hàm số liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có:

$$\left( \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

### 18.7 Bất đẳng thức tích phân Diaz

Cho  $f(x), g(x)$  là các hàm liên tục trên  $[a, b], f(x) \neq 0$  và  $m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ .

Khi đó ta có:  $\int_a^b g^2(x)dx + Mm \int_a^b f^2(x)dx \leq (M+m) \int_a^b f(x)g(x)dx$

### 18.8 Bất đẳng thức tích phân G.Polya

Cho  $f, g$  là các hàm liên tục trên  $[a, b]$  và  $\begin{cases} 0 < a \leq f(x) \leq A \\ 0 < b \leq g(x) \leq B \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{Khi đó ta có: } \frac{(ab + AB)^2}{4aAbB} \geq \frac{\int_a^b g^2(x) dx \cdot \int_a^b f^2(x) dx}{\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2} \geq \frac{4aAbB}{(ab + AB)^2}$$

### 18.9 Bất đẳng thức tích phân Chebyshev

Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục và đơn điệu trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có:

a. Nếu  $f(x), g(x)$  là hai hàm cùng đồng biến hoặc là hai hàm cùng nghịch biến thì ta có

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \geq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right)$$

b. Nếu  $f(x), g(x)$  có tính đơn điệu ngược chiều nhau tức là một hàm đồng biến và một hàm nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right)$$

### 19. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)

Xét bất đẳng thức  $A \geq B$  trong đó  $A, B$  là các biểu thức chứa các biến số  $a, b, c$ .

Giả sử ta biến đổi được bất đẳng thức  $A - B \geq 0$  có dạng:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1). \text{ Xét các mệnh đề sau:}$$

**19.1 Mệnh đề 1:** Nếu  $S_a \geq 0; S_b \geq 0; S_c \geq 0$  thì

$$S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Đây là một trường hợp tầm thường. Dưới đây ta sẽ xét các dấu hiệu khác để (1) đúng.

**19.2 Mệnh đề 2:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thỏa mãn 2 điều kiện:

$$\text{i) } S_a + S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0.$$

$$\text{ii) Nếu } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \text{ thì } S_b \geq 0$$

$$\text{Khi đó ta có } S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$



**19.3 Mệnh đề 3:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn điều kiện:

Nếu  $a \leq b \leq c$  hoặc  $a \geq b \geq c$  thì  $S_a \geq 0, S_c \geq 0$  và  $S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$

Khi đó ta có  $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**19.4. Mệnh đề 4:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn điều kiện:

Nếu  $a \leq b \leq c$  thì  $S_a \geq 0, S_b \geq 0$  và  $b^2S_c + c^2S_b \geq 0$

Khi đó ta có  $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**19.5. Mệnh đề 5:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn 2 điều kiện:

$$\text{i) } S_a + S_b > 0 \vee S_b + S_c > 0 \vee S_c + S_a > 0$$

$$\text{ii) } S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$$

Khi đó ta có  $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**19.6. Mệnh đề 6:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn điều kiện:

$$\text{i) } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c$$

$$\text{ii) Tồn tại } \alpha > 0 \text{ sao cho } S_a + \alpha^2S_c + (\alpha+1)^2S_b \geq 0$$

$$\text{iii) } \begin{cases} |a-b| \geq \alpha|c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + \frac{\alpha+1}{\alpha}S_b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \geq \alpha|a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + \frac{\alpha+1}{\alpha}S_b \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có:  $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**Hệ quả:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn các điều kiện

$$\text{i) } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \quad \text{ii) } S_a + S_c + 4S_b \geq 0$$

$$\text{iii) } \begin{cases} |a-b| \geq |c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + 2S_b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \geq |a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + 2S_b \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có:  $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$

## 20. PHƯƠNG PHÁP DÒN BIẾN (MV)

### 20.1 BẤT ĐẲNG THỨC 3 BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT TẠI GIÁ TRỊ BIẾN ĐỐI XỨNG

• Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức  $f(x, y, z) \geq 0$  với  $x, y, z$  là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Khi đó ta sẽ thực hiện 2 bước chính sau:

**Bước 1:** (Kỹ thuật dồn về 2 biến bằng nhau) Đánh giá  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$  với  $t$  là biến sao cho bộ số  $(t, t, z)$  thỏa mãn mọi tính chất của bộ  $(x, y, z)$ .

**Bước 2:** Đánh giá  $f(t, t, z) \geq 0$ .

**Chú ý:** Đối với các bất đẳng thức đồng bậc ta có thể làm cho chúng minh đơn giản hơn bằng cách chuẩn hóa các biến trong bất đẳng thức trước khi thực hiện 2 bước

#### 20.1.1 Bất đẳng thức không điều kiện:

Đối với những bất đẳng thức không có điều kiện thì dồn biến theo các đại lượng trung bình

chẳng hạn  $t = \frac{x+y}{2}; t = \sqrt{xy}; t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ ... là kỹ thuật chính dùng để dồn 2 biến bằng nhau.

#### 20.1.2 Dồn biến với bất đẳng thức có điều kiện

Để chứng minh bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  với các biến  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $g(a, b, c) = 0$  thì thực hiện bước 1 ta cần chứng minh  $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$  với  $t$  là biến thỏa mãn  $g(a, t, t) = 0$

### 20.2 DÒN BIẾN BẰNG KỸ THUẬT HÀM SỐ

Giả sử cần chứng minh  $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$  với  $t = \frac{y+z}{2}$ , ta xét hàm:  $g(s) = f(x, t+s, t-s)$  với  $s \geq 0$ . Sau đó chứng minh  $g$  tăng  $\forall s \geq 0$  (thường sử dụng đạo hàm), suy ra  $g(s) \geq g(0)$ .

### 20.3 BẤT ĐẲNG THỨC 3 BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT ĐƯỢC TẠI BIÊN

Xét bất đẳng thức  $f(x, y, z) \geq 0$  với  $x, y, z \geq 0$ , ta sẽ chứng minh  $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$ , trong đó  $s, t$  là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến  $a, b, c$ . Thích hợp ở đây chính là việc bộ số  $(0, s, t)$  phải thỏa mãn tất cả các điều kiện của  $(a, b, c)$ , đồng thời hiệu  $d = f(x, y, z) - f(0, s, t) \geq 0$  cần đơn giản nhất có thể.

Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng  $f(0, s, t) \geq 0$ .

#### Định lý dồn biến mạnh [SMV-Strongly Mixing Variables]

Cho: •  $D \in \mathbb{R}^n, D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq \alpha, \sum x_i \geq \alpha, \sum x_i = ns = \text{const}\}$  và  $s_0 = (s, s, \dots, s) \in D$

• Phép biến đổi  $T: D \rightarrow D$  như sau: với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D, a \neq s_0$ ,

ta chọn ra 2 chỉ số  $i \neq j$  nào đó (tùy theo hàm  $f$  bên dưới) sao cho  $a_i \neq a_j$ , rồi thay  $a_i, a_j$  bởi trung bình cộng của chúng.

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số liên tục thỏa mãn:  $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$ .

Khi đó:  $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$

## 20.4 ĐỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH [UMV – UNDERFINE MIXING VARIABLES]

**Định lý UMV:**

Cho  $D \subset \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $D$  đóng và bị chặn. Gọi  $\Lambda$  là tập hợp các phần tử trong  $D$  có  $t$  thành phần bằng 0 và  $n - t$  thành phần bằng nhau ( $t \geq 0$ ).

- Xét 2 phép biến đổi  $T_1, T_2: D \rightarrow D$  như sau: Với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Lambda$ , chọn ra 2 chỉ số  $i \neq j$  sao cho  $a_i = \min\{a_i > 0, i = 1, \dots, n\}$  và  $a_j = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , sau đó thay  $a_i, a_j$  bởi  $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$  (ứng với  $T_1$ ) và  $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$  (ứng với  $T_2$ ).

- Giả sử  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục thỏa mãn:  $f(a) \geq \min\{f(T_1(a)), f(T_2(a))\}, \forall a \in D$

Khi đó ta có  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$

## 20.5 ĐỒN BIẾN VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Là phương pháp dồn biến nữa dành cho hàm lồi được dựa trên cơ sở hai định lý sau:

**Định lý 1:** Cho  $f$  là hàm lồi  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta có:  $f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a+b-x), \forall x \in [a, b]$

**Định lý 2:** (bất đẳng thức *Jensen*) Cho  $f$  là hàm số lồi  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Khi đó:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b] \text{ ta có: } f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = n f(T)$$

## 20.6 ĐỒN BIẾN BẰNG QUY NẠP THỪA

Giả sử ta cần chứng minh một bất đẳng thức của  $n$  biến  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có điều kiện ràng buộc là  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , trong đó đẳng thức xảy ra khi  $n$  biến bằng nhau. Chính đẳng thức ràng buộc này không cho phép chúng ta giải bài toán bằng quy nạp. Tuy nhiên, nếu chúng ta sửa điều kiện ràng buộc lại thành  $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$  thì khi đó ta có thể giả sử, chẳng hạn  $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  để có  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} \geq 1$  và ta có thể dùng giả thiết cho  $n-1$  biến này để quy về trường hợp  $n-1$  biến bằng nhau. Sau đây là một ví dụ đặc sắc cho kỹ thuật này.

## 20.7 DÒN BIẾN TOÀN MIỀN [EMV – ENTIRELY MIXING VARIABLES]

Tất cả những kỹ thuật dồn biến mà chúng ta đã được đề cập ở các mục trên đều có một đặc điểm chung là khi thực hiện phép dồn biến:  $f(a,b,c) \geq f(a',b',c')$  thì bộ ba số  $(a,b,c)$  và  $(a',b',c')$  đều có một đại lượng đặc trưng giống nhau, chẳng hạn như tổng, tích...

Phương pháp *EMV* cũng có đại lượng đặc trưng không đổi sau khi dồn biến. Tuy nhiên, sự khác biệt hoàn toàn so với các phương pháp dồn biến trước là: “Đại lượng đặc trưng không đổi khi sử dụng *EMV* là hiệu các biến, tức là các đại lượng  $a-b, b-c, c-a$ ”.

Tư tưởng chủ đạo của *EMV* là chứng minh khi tăng hoặc giảm các biến đi cùng một đại lượng, bất đẳng thức yếu đi hoặc không đổi. Từ đó chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp một biến ở biên.

Chú ý rằng nếu sử dụng *EMV* trong bất đẳng thức  $n$  biến, khi dồn một biến về biên, thì bất đẳng thức còn  $n-1$  biến, tuy nhiên, nếu số biến còn lại vẫn  $\geq 3$  thì việc chứng minh là khá phức tạp. Vì vậy *EMV* thường sử dụng trong bất đẳng thức ba biến với phương pháp dồn biến có biên tại 0 hoặc dồn biến với các đại lượng trong tam giác.

## 20.8. DÒN BIẾN TỔNG QUÁT [GMV – GENERAL MIXING VARIABLES]

Đây là một định lý rất tổng quát, bao gồm gần như toàn bộ các khả năng dồn biến.

**20.8.1** Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

**Định nghĩa 1:**

- Không gian  $\mathbb{R}^n$  là tập hợp các bộ thứ tự  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i$ .
- Một dãy  $\{x_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m})\}$  trong  $\mathbb{R}^n$  gọi là hội tụ về  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  nếu từng dãy  $x_{i,m}$  hội tụ về  $z_i$  khi  $m \rightarrow \infty, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .
- Cho  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Một hàm số  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gọi là liên tục trên  $D$  nếu: với mọi dãy  $\{x_m\} \subset D$  và với mọi  $z \in D$  sao cho  $\{x_m\}$  hội tụ về  $z$ , thì ta đều có:  $f(x_m)$  hội tụ về  $f(z)$ .

**Định nghĩa 2:** Cho  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Ta nói:

- $D$  đóng nếu với mọi dãy  $\{x_m\} \subset D$  và với mọi  $z \in \mathbb{R}^n$  sao cho  $\{x_m\}$  hội tụ về  $z$ , thì ta có  $z \in D$ .
- $D$  bị chặn nếu tồn tại số thực  $M$  sao cho:  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ , thì  $|x_i| \leq M, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Chúng ta có kết quả căn bản sau đây (sẽ chứng minh ở cuối mục này)

**Định lý Weierstrass:** Cho  $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ , và  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục. Thì  $f$  đạt giá trị nhỏ nhất trên  $D$ , nghĩa là tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho:  $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Chúng ta cũng có kết quả tương tự với giá trị lớn nhất.

• **Bình luận:** Định lý này là một mở rộng của một kết quả quen thuộc: "Cho  $[a, b]$  là 1 khoảng đóng trong  $\mathbb{R}$  và  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục, thì  $f$  có giá trị nhỏ nhất trên  $[a, b]$ ". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng.

**20.8.2 Định lý GMV:** Ta sẽ luôn giả thiết rằng:

- $D$  là 1 tập con trong  $\mathbb{R}^n$ , và  $\Lambda$  là 1 tập con đóng của  $D$ .
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số liên tục liên tục sao cho  $f$  có giá trị nhỏ nhất trên  $\Lambda$ .
- $T_1, \dots, T_k : D \rightarrow D$  là các phép biến đổi sao cho  $T_1(x) = \dots = T_k(x) = x, \forall x \in \Lambda$ .

Ta sẽ đặt ra các tiêu chuẩn để giá trị nhỏ nhất của  $f$  trên  $\Lambda$  cũng chính là giá trị nhỏ nhất của  $f$  trên  $D$ . Ta có

**Định lý GMV1:** Nếu

- $f(x) \geq \min_{j=1,k} \{f(T_j(x))\}, \forall x \in D \setminus \Lambda$
  - $\forall j = \overline{1, k}, \forall x \in D$  ta có  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_j^m(x) \in \Lambda$ , trong đó  $T_j^0(x) = x, T_j^m(x) = T_j(T_j^{m-1}(x))$
- thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ .

Hơn nữa, đẳng thức không xảy ra trên  $D \setminus \Lambda$  nếu  $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

**Định lý GMV2:** Nếu

- $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ .
- $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ , hơn nữa đẳng thức không xảy ra trên  $D \setminus \Lambda$ .

**Định lý GMV3:** Nếu

- $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ .
- $f(x) \geq \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$
- Tồn tại các hàm số  $h_j$  liên tục  $D \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn:  $h_j(x) > h_j(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ .

## 21. PHƯƠNG PHÁP ABC

Xét lớp các bất đẳng thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  có thể đưa về bất đẳng thức hàm  $f(a, b, c)$  chỉ chứa các đại lượng  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ ,  $abc$  so sánh với hằng số. Khi đó chúng ta sẽ khảo sát hàm  $f(a, b, c)$  theo biến  $abc$  với hai đại lượng cố định là  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ .

**21.1 Định lý 1:** Nếu  $f(abc, ab + bc + ca, a + b + c)$  là hàm đơn điệu trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**21.2 Định lý 2:** Nếu  $f(abc, ab + bc + ca, a + b + c)$  là hàm lồi trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị lớn nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**21.3 Định lý 3:** Nếu  $f(abc, ab + bc + ca, a + b + c)$  là hàm lõm trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

### 21.4 Định lý ABC mở rộng

i) Cho  $a, b, c$  đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng  $abc, a + b + c$  đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì  $ab + bc + ca$  sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau.

ii) Cho  $a, b, c$  đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng  $abc$ ,  $ab + bc + ca$  đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì  $a + b + c$  sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau.

### 21.5. ĐỊNH LÝ ABC TỔNG QUÁT

**21.5.1 Khả ABC:** Ta gọi  $f(a, b, c)$  là một biểu thức khả ABC nếu như bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  có thể được chứng minh dựa vào định lý ABC để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (Điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với  $abc$ )

**21.5.2 Định lý :** Xét một biểu thức đối xứng  $n$  biến  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , trong đó  $f$  có giá trị nhỏ nhất và  $n \geq 3$ . Ta sẽ coi  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  như là một biểu thức ba biến  $g(a_1, a_2, a_3)$  với các số  $a_4, a_5, \dots, a_n$  được coi như là các hằng số. Khi đó nếu  $g$  khả ABC thì bất đẳng thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$  có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i)  $m$  biến bằng nhau,  $n - m$  biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với  $abc$ )

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên

## 22. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC HÓA BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ (GLA)

### 22.1 PHƯƠNG PHÁP GLA VỚI 3 BIẾN SỐ VÀ PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TAM GIÁC

• Với  $a, b, c > 0$ , đặt  $x = b + c, y = c + a, z = a + b$  thì  $x, y, z$  trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ với  $p, R, r, S$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác XYZ. Khi đó ta có các đẳng thức và các định lý quan trọng sau đây:

#### 22.1.1 Các đẳng thức cơ bản

$$1. a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2; ab + bc + ca = 4Rr + r^2$$

$$\text{Hệ quả: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \frac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$$

$$2. (a+b)(b+c)(c+a) = xyz = 4Rrp; abc = (p-x)(p-y)(p-z) = \frac{S^2}{p} = pr^2$$

$$\text{Hệ quả: } \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{r}{4R}; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4R+r}{pr}; \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{r^2}$$

$$3. \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2(2R-r)}{r}$$

$$4. a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)] + 3abc \\ = p(p^2 - 8Rr - 2r^2 - 4Rr - r^2) + 3pr^2 = p(p^2 - 12Rr)$$

$$5. a^4 + b^4 + c^4 = (p^2 - 8Rr - 2r^2)^2 - 2(4Rr + r^2)^2 + 4p^2r^2 = p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2$$

$$6. \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$$

$$7. 16S^2 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4)$$

$$8. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - 3 = \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr}$$

$$9. \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2r^2}$$

$$10. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp}$$

$$11. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2} = \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2r^2p^2} - \frac{1}{Rr}$$



$$12. \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{abc} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}$$

$$13. a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = (ab+bc+ca)^3 - 3abc(a+b)(b+c)(c+a) = r^3(4R+r)^3 - 12p^2r^3R$$

$$14. \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} = \frac{p^4 - 8(2R+r)p^2 + 5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2 - 2p^4r^2 - 2r^3(4R+r)^3}$$

$$15. (a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b) = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3a^2b^2c^2 + abc(a^3+b^3+c^3) \\ = r^3(4R+r)^3 - 12R^2r^3p + 3p^2r^4 + p^2r^2(p^2 - 12Rr) = r^2[r(4R+r)^3 + 3p^2r^2 + p^4 - 24Rrp^2]$$

### 22.1.2 Các định lý

1. Định lý 1: Tam giác có hai góc  $\geq 60^\circ \Leftrightarrow p \geq \sqrt{3}(R+r)$

Tam giác có hai góc  $\leq 60^\circ \Leftrightarrow p \leq \sqrt{3}(R+r)$

Tam giác có một góc bằng  $60^\circ \Leftrightarrow p = \sqrt{3}(R+r)$

2. Định lý 2: Với mọi tam giác ta có các bất đẳng thức

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

3. Định lý 3: Với mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức:

$$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2; a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R+r)^2 \quad (1); ab+bc+ca \geq 2R^2 + 12Rr + 4r^2$$

4. Định lý 4: Với mọi tam giác ta có  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$

5. Định lý 5: Với mọi tam giác ta có  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R}$  (\*)

### 22.1.3 Phương pháp chung

Để chứng minh một bất đẳng thức đối xứng  $F(a,b,c) \geq G(a,b,c)$  với  $a, b, c$  không âm, ta đặt  $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ , khi đó  $x, y, z$  trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ. Sau đó ta phải chứng minh  $f(p) = VT - VP \geq 0$ . Xét dấu  $f'(p)$  rồi tìm cách đánh giá  $p$  theo  $R, r$ .

Ta chú ý đến đánh giá rất quan trọng sau đây:

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\text{Khi đó nếu đặt } \begin{cases} p_1 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \\ p_2 = \sqrt{2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \end{cases} \text{ thì } p \in [p_1, p_2]$$



**Nhận xét:**

1. Nếu  $\Delta XYZ$  cân thì  $p = p_1$  hoặc  $p = p_2$ .

• Nếu giá trị lớn nhất  $f(p)$  hoặc giá trị nhỏ nhất  $f(p)$  đạt tại  $p = p_1$  thì  $\Delta XYZ$  cân có 2 góc đáy bằng nhau và  $\leq 60^\circ$ , khi đó trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn biến còn lại  $\Leftrightarrow$  Trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

• Nếu giá trị lớn nhất  $f(p)$  hoặc giá trị nhỏ nhất  $f(p)$  đạt tại  $p = p_2$  thì  $\Delta XYZ$  cân có 2 góc đáy bằng nhau và  $\geq 60^\circ$ , khi đó trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn biến còn lại  $\Leftrightarrow$  Trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

2. Khi đưa bất đẳng thức về dạng chứa  $p, R, r$  nếu có biểu thức chứa  $r$  làm nhân tử chung thì khi  $r = 0$  hay trong 3 biến  $a, b, c$  có 1 biến bằng 0 thì đẳng thức xảy ra.

3. Từ các nhận xét 1 và 2 suy ra nếu  $f(p)$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại  $p_1$  hoặc  $p_2$  hoặc  $r = 0$  thì công việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức với 2 biến số.

Với câu hỏi đặt ra là khi nào  $f(p)$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại  $p_1$  hoặc  $p_2$  ta có kết luận sau:

3.1. Nếu  $f'(p) \geq 0, \forall p \in [p_1, p_2]$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_1); \text{Max } f(p) = f(p_2)$

Nếu  $f'(p) \leq 0, \forall p \in [p_1, p_2]$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_2); \text{Max } f(p) = f(p_1)$

Đẳng thức xảy ra khi  $p = p_1$  hoặc  $p = p_2$  ứng với trong 3 biến số  $a, b, c$  có 2 biến số bằng nhau hoặc có một biến số bằng 0.

| $p$     | $p_1$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|
| $f'(p)$ | +        |          |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_2)$ |

| $p$     | $p_1$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|
| $f'(p)$ | -        |          |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_2)$ |

3.2. Nếu  $f'(p_0) = 0; f''(p) \geq 0$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_0); \text{Max } f(p) = \text{Max}\{f(p_1), f(p_2)\}$

Nếu  $f'(p_0) = 0; f''(p) \leq 0$  thì  $\text{Max } f(p) = f(p_0); \text{Min } f(p) = \text{Min}\{f(p_1), f(p_2)\}$

| $p$     | $p_1$    | $p_0$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|----------|
| $f'(p)$ | -        | 0        | +        |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_0)$ | $f(p_2)$ |

| $p$     | $p_1$    | $p_0$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|----------|
| $f'(p)$ | +        | 0        | -        |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_0)$ | $f(p_2)$ |

4. Trong một số ít các bài toán ta tìm Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất bằng cách tính đạo hàm theo biến  $t = p^2$  hoặc theo  $R$  hoặc theo  $r$ .

**Chú ý.** Hãy nhớ lại cách chứng minh hình học ở trên, chính từ chứng minh đó suy ra ngay với mọi  $R, r$  cố định thì có thể tìm được ba số thực không âm  $a', b', c'$  mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác  $X'Y'Z'$  với độ dài 3 cạnh là  $b'+c', c'+a', a'+b'$

cũng có  $R = R'$  và  $r = r'$ . Như thế, kết hợp nhận xét này với các kết quả ở trên ta suy ra trong các trường hợp hàm  $f(p)$  đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần xét hai trường hợp đối với ba biến  $a, b, c$  ban đầu là hoặc trong 3 biến có 1 biến bằng 0, hoặc trong 3 biến có 2 biến bằng nhau.

## 22.2 PHƯƠNG PHÁP GLA CHO $n$ BIẾN SỐ:

Giả sử  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $n$  biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  ( $n \geq 4$ )

Xét 3 biến số bất kì  $a_m, a_n, a_p$  ( $m, n, p \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ) và cố định các biến số còn lại như hằng số. Đặt  $x = a_m + a_n, y = a_n + a_p, z = a_p + a_m$ , khi đó  $x, y, z$  là 3 cạnh của tam giác XYZ và 3 biến số  $a_m, a_n, a_p$  có thể đưa về thành 3 biến  $p, R, r$  (trong đó  $p, R, r$  là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ). Ta có các kết quả mở rộng sau đây:

**22.2.1** Một đa thức đối xứng  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 1 đơn điệu theo  $p, R$  hoặc  $r$  đều đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến số bằng nhau.

$$\text{Tức là: } f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq f(\underbrace{a_1, \dots, a_{n-1}}_{n-1 \text{ số } a}, x) \text{ hoặc } f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(\underbrace{a_1, \dots, a_{n-1}}_{n-1 \text{ số } a}, x)$$

(ở đây ta chọn 3 biến  $a_1, a_2, a_3$  để chuyển về  $p, R, r$ )

- Nếu  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$  thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

- Nếu  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq 0$  thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$

Do  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$  nên  $f(p, R, r, a_4, \dots, a_n)$  đồng biến theo  $p$ .

$$\text{Tức là: } f(p_1, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(p_2, R, r, a_4, \dots, a_n)$$

Theo như nhận xét 3 trong 21.1.3 ta có:

- $p = p_1$  khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy tức là trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Do  $a_1, a_2, a_3$  được chọn một cách tùy ý để chuyển về  $p, R, r$  và  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được:  $f(\underbrace{x, y, \dots, y}_{n-1}) \leq f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ( $x \geq y$ )

•  $p = p_2$  khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy tức là trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Do  $a_1, a_2, a_3$  được chọn một cách tùy ý để chuyển về  $p, R, r$  và  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được:  $f(\underbrace{x, \dots, x}_{n-1}, y) \geq f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (x \leq y)$

**22.2.2** Mọi đa thức  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 2  $f''(p) \geq 0$  đều đạt giá trị lớn nhất khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

**22.2.3** Mọi đa thức  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 2  $f''(p) \leq 0$  đều đạt giá trị nhỏ nhất khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

**22.2.4** Nếu  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thì từ các nhận xét **3.1, 3.2**

trong **22.1.3** ta mới chỉ có một kết quả tạm thời là giá trị nhỏ nhất của và giá trị lớn nhất của  $f$  đạt được khi có 1 số biến số bằng nhau và 1 số biến số thì chưa so sánh được (vì có thể có một số biến số bằng 0). Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn là khi  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thì vẫn có kết luận: giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất  $f$  đạt được khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

Thật vậy, giả sử giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  đạt tại

$(0, \dots, 0, a, \dots, a, b)$ . Xét bộ 3 số  $(0, a, b)$  thì theo các nhận xét **3.1, 3.2** trong **22.1.3** ta có  $a = 0$  hoặc  $b = 0$ . Nếu  $a = 0$  thì giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất sẽ đạt tại  $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, b)$  suy ra kết

luận đúng. Nếu  $b = 0$  thì lại xét tiếp 2 bộ  $(a, a, 0); (0, 0, a)$ . Áp dụng tiếp các kết luận 21.1.3, ta suy ra  $a = 0$ . Giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất đạt tại  $(0, 0, \dots, 0)$ . Vậy các kết luận trên đã được mở rộng ra đối với các biến không âm.

## 22.3. PHƯƠNG PHÁP GLA TÔNG QUÁT:

**Định lý:** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\begin{cases} abc = const \\ ab + ac + bc = const \end{cases}$  khi đó ta có:

- Nếu  $f(a, b, c)$  là một hàm đồng biến theo  $a + b + c$  thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại;  $f(a, b, c)$  đạt *max* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.
- Nếu  $f(a, b, c)$  là một hàm nghịch biến theo  $a + b + c$  thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại;  $f(a, b, c)$  đạt *max* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

**23. PHƯƠNG PHÁP EV (EQUAL VARIABLE THEOREM)**

**23.1 Bổ đề.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử các số thực không âm  $x \leq y \leq z$  thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \quad (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \quad (2)$$

Trong đó  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Với  $p = 0$ , phương trình thứ 2 trở thành  $xyz = abc > 0$ . Như thế tồn tại hai số thực  $x_1, x_2$  với  $0 \leq x_1 < x_2$ , thỏa mãn  $x \in [x_1, x_2]$ , hơn nữa

- 1) Nếu  $x = x_1$  và  $p \leq 0$  thì  $0 < x < y = z$
- 2) Nếu  $x = x_1$  và  $p > 1$  thì hoặc  $0 = x < y \leq z$  hoặc  $0 < x < y = z$
- 3) Nếu  $x \in (x_1, x_2)$  thì  $x < y < z$
- 4) Nếu  $x = x_2$  thì  $x = y < z$

**23.2 Mệnh đề.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \quad (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \quad (2)$$

Trong đó  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Với  $p = 0$ , phương trình (2) trở thành  $xyz = abc > 0$ . Giả sử

$f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là hàm lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ , và đặt  $F_3(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$

- 1) Nếu  $p \leq 0$  thì  $F_3$  nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  $0 < x = y < z$ , và  $F_3$  nhận giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $0 < x < y = z$
- 2) Nếu  $p > 1$  và hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u = 0$  hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$ , thì  $F_3$  lớn nhất chỉ khi  $0 < x = y < z$ , và nhỏ nhất chỉ khi hoặc  $x = 0$  hoặc  $0 < x < y = z$ .

**23.3 Định lý EV (Định lý về các biến số bằng nhau)**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số thực không âm, và  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Trong đó  $p$  là số thực,  $p \neq 1$ .

Với  $p = 0$ , phương trình thứ hai được quy ước thay thế bởi điều kiện  $x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n > 0$ .

Giả sử  $f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, \infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là lồi nghiêm ngặt trên  $(0, \infty)$ , và đặt  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

- Nếu  $p \leq 0$  thì  $F_n$  lớn nhất khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$$0 \leq x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$$

- Nếu  $p > 0$  và hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u=0$  hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$  thì  $F_n$  lớn nhất khi

$$0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n, \text{ và nhỏ nhất khi } x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n$$

Trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

#### 23.4 Các hệ quả của định lý EV

**Hệ quả 1.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ; ( $n \geq 3$ ) và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Hơn nữa, hoặc  $f(x)$  liên tục tại  $x=0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . Như thế

$F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Hệ quả 2.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ; ( $n \geq 3$ ) và giả sử  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, \infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Như

thế  $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ; ( $n \geq 3$ ) và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Như thế  $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 4.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Trong đó  $p$  là một số thực,  $p \neq 0, p \neq 1$

a) Với  $p < 0$ ,  $P = x_1 x_2 \dots x_n$  nhận giá trị nhỏ nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhận giá trị lớn nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $p > 0$ ,  $P = x_1 x_2 \dots x_n$  nhận giá trị nhỏ nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhận giá trị lớn nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 5.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

1. Nếu  $p \leq 0$  ( $p = 0$  dẫn tới  $x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n > 0$ )

a) Với  $q \in (p, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc

$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $q \in (-\infty, 0) \cup (p, 1)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , với chỉ số  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nào đó

2. Nếu  $0 < p < 1$

a) Với  $q \in (0, 1) \cup (p, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc

$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $q \in (-\infty, p) \cup (1, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , với chỉ số  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nào đó

3. Nếu  $p > 1$ :

a) Với  $q \in (0, 1) \cup (p, \infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_{k+2} = \dots = x_n$  trong đó

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

b) Với  $q \in (-\infty, 0) \cup (1, p)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong

đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Hệ quả 6.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm,  $p \in \{1, 2\}$  và giả sử

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \text{ thỏa mãn}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Biểu thức  $E = \sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$$x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n, \text{ trong đó } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

**Hệ quả 7.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2; \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$$

Biểu thức  $E = \sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$$x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n \text{ trong đó } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

## 24. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ (DIVIDE AND CONQUER)

### 24.1 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI HÀM 1 BIẾN

**Định lý:** Cho  $f(x, y)$  là hàm liên tục từ  $[a, b] \times [a, b]$  vào  $\mathbb{R}$ , tăng theo biến  $x$  và giảm theo biến  $y$ . Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i)  $f(x, x) > 0$ , với mọi  $x$  thuộc  $[a, b]$

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m+1} = b$  sao cho:

$$f(x_n, x_{n+1}) > 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots, m$$

### 24.2 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI HÀM 2 BIẾN

**Định lý:** Cho  $f(x, y, z)$  là hàm liên tục trên  $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$  vào  $\mathbb{R}$ , tăng theo biến  $y$  và giảm theo biến  $z$ . Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i)  $f(x, y, y) > 0, \forall x \in [a, b], y \in [c, d]$ .

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng  $c = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{m+1} = d$  sao cho:

Với mọi  $n = 0, 1, \dots, m$  thì  $f(x, y_n, y_{n+1}) > 0, \forall x \in [a, b]$

### 24.3 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN

• **Bước 1:** Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta gọi là các điểm "nhảy cảm"), khoanh vùng chúng lại xét riêng ra. Phần còn lại ta chỉ làm việc với các bất đẳng thức thực sự.

• **Bước 2:** Biến đổi, chuẩn hóa các bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp rồi dứt điểm bằng cách bấm nhỏ theo từng biến để xử lý.



## 25. BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT-SHAPIRO

### 25.1 Bất đẳng thức Nesbitt

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0 \quad (1)$$

### 25.2 Bất đẳng thức Shapiro

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét tính đúng sai của bất đẳng thức sau:

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng với mọi  $n$  chẵn  $\leq 12$  và  $n$  lẻ  $\leq 23$ , mọi giá trị còn lại của  $n$  thì (2) sai

### 25.3 Bất đẳng thức Shapiro với dãy đơn điệu

Cho bộ dãy số đơn điệu bất kỳ  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  tức là:

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0 \end{array} \right. \quad \text{Khi đó ta có} \quad \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}$$

### 25.4 Đánh giá xấp xỉ bất đẳng thức Shapiro

$$\text{Kvant 4/1991: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > (\sqrt{2} - 1)n = 0.41421356n, \forall a_i > 0$$

$$\text{Kvant 4/1991: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{5}{12}n = 0.41666666n, \forall a_i > 0$$

$$\text{Trần Phương 2004: } S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.4577996n, \forall a_i > 0$$

$$\text{Drinfel'd 1971 } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.989133 \times \frac{n}{2}, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

$$\text{Elbert 1973: } \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1} \geq 0.978012n, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, Illinois (2002).

$$\text{Đặt } E_n = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; \quad F_n = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1}, \forall a_i > 0$$

Và  $\lambda = -0.0219875218\dots$  Khi đó ta có các định lý sau:

**Định lý 1.** Với mọi số nguyên dương  $n$  và mọi số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có  $E_n - F_n \geq \lambda n$

**Định lý 2.** Trong Định lý 1,  $\lambda$  là hằng số tốt nhất. Hay nói cách khác, với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại ít nhất một số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n$



### 26.1 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa với số mũ tự nhiên

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  và  $m, k \in \mathbb{N}^*$  thỏa mãn  $m < k$ , khi đó ta có bất đẳng thức:

$$T_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}} \geq \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n}} = T_m$$

### 26.2 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  và  $p, q \in \mathbb{Q}^+$  thỏa mãn  $p < q$ , khi đó ta có bất đẳng thức

$$T_q = \left( \frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left( \frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = T_p$$

### 26.3 Bất đẳng thức trung bình đối xứng

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Kí hiệu các tổng và các giá trị trung bình tương ứng:

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{và} \quad T_1 = \frac{S_1}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad \text{và} \quad T_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}} = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{\binom{n}{2}}}$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} \dots a_{i_k} \quad \text{và} \quad T_k = \sqrt[k]{\frac{S_k}{\binom{n}{k}}} = \sqrt[k]{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{a_{i_1} \dots a_{i_k}}{\binom{n}{k}}}$$

$$S_n = a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{và} \quad T_n = \sqrt[n]{\frac{S_n}{\binom{n}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\binom{n}{n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\text{Đặt } P_1 = \frac{S_1}{n}; P_2 = \frac{S_2}{\binom{n}{2}}; \dots; P_k = \frac{S_k}{\binom{n}{k}}; \dots; P_n = \frac{S_n}{\binom{n}{n}}$$

$$\text{Ở đây } \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \binom{n}{0} = C_n^0 = C_n^n = \binom{n}{n} = 1$$

#### 26.3.1 Bất đẳng thức Newton:

$$P_{k-1} P_{k+1} < P_k^2 \quad \text{và} \quad S_{k-1} S_{k+1} \leq S_k^2$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

#### 2563.2 Bất đẳng thức Maclaurin

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_k \geq T_{k+1} \geq \dots \geq T_n$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra trong } (n-1) \text{ bất đẳng thức} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

**27. Các bất đẳng thức sử dụng tam thức bậc hai****27.1 Bất đẳng thức Aczela**

Cho  $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$$

**27.2 Bất đẳng thức G.Polya**

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$  Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

**27.3 Bất đẳng thức Abel**

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong đó  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ .

Đặt  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Gọi  $m = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ;  $M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

khi đó ta có:  $mb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq Mb_1$

**27.4 Bất đẳng thức Diaz**

Cho 2 dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  trong đó  $a_1a_2\dots a_n \neq 0$

Giả sử  $m, M$  là 2 số thỏa mãn  $m \leq \frac{b_k}{a_k} \leq M \quad \forall k = \overline{1, n}$

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n b_k^2 + mM \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^n a_k b_k$

**27.5 Bất đẳng thức Kantorovis 1**

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  và 2 số  $m, M$  thỏa mãn điều kiện

$$0 < m \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq M. \text{ Khi đó ta có: } \left[ \sum_{k=1}^n b_k a_k^2 \right] \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} a_k^2 \right] \leq \frac{1}{4} \left[ \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2 \left[ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^2$$

**27.6 Bất đẳng thức Kantorovis 2**

Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) thỏa mãn điều kiện  $0 < m \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq M$ .

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \left( \sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2$

### 27.7 Bất đẳng thức Grussa

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$ . Khi đó  $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{4} (A-a)(B-b)$

### 28. Bất đẳng thức Sleyfer

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i^2} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$

### 29. Bất đẳng thức Vâyetrat

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Đặt  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Khi đó ta có các bất đẳng thức

a)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+S_n$

b)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq 1-S_n, \forall 0 \leq a_i \leq 1$

c)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall S_n < 1$

d)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall 0 \leq a_i \leq 1; S_n < 1$

### 30. Bất đẳng thức Ky Fan

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương trong  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ . Khi đó  $\frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^n} \leq \frac{\prod_{k=1}^n (1-x_k)}{\left[\sum_{k=1}^n (1-x_k)\right]^n}$

### 31. Bất đẳng thức A.M.Ostrowski

Cho hai dãy không tỷ lệ  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  và dãy số thực  $x = (x_1, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$

### 32. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd

Với mọi dãy số thực  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  thỏa mãn điều kiện  $a_i, b_j \neq a_j b_i$  ứng

với  $i \neq j$ , ta đều có 
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2} \leq \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$$

## 27. Các bất đẳng thức sử dụng tam thức bậc hai

### 27.1 Bất đẳng thức Aczela

Cho  $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$$

### 27.2 Bất đẳng thức G.Polya

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$  Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

### 27.3 Bất đẳng thức Abel

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong đó  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ .

Đặt  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Gọi  $m = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ;  $M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

khi đó ta có:  $mb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq Mb_1$

### 27.4 Bất đẳng thức Diaz

Cho 2 dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  trong đó  $a_1a_2\dots a_n \neq 0$

Giả sử  $m, M$  là 2 số thỏa mãn  $m \leq \frac{b_k}{a_k} \leq M \quad \forall k = \overline{1, n}$

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n b_k^2 + mM \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^n a_k b_k$

### 27.5 Bất đẳng thức Kantorovis 1

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  và 2 số  $m, M$  thỏa mãn điều kiện

$$0 < m \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq M. \text{ Khi đó ta có: } \left[ \sum_{k=1}^n b_k a_k^2 \right] \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} a_k^2 \right] \leq \frac{1}{4} \left[ \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2 \left[ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^2$$

### 27.6 Bất đẳng thức Kantorovis 2

Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) thỏa mãn điều kiện  $0 < m \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq M$ .

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \left( \sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2$

### 27.7 Bất đẳng thức Grussa

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$ . Khi đó  $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{4} (A-a)(B-b)$

### 28. Bất đẳng thức Sleyfer

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + n \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^n a_i^2} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$

### 29. Bất đẳng thức Vâyetstrat

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Đặt  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Khi đó ta có các bất đẳng thức

a)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1 + S_n$

b)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq 1 - S_n, \forall 0 \leq a_i \leq 1$

c)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall S_n < 1$

d)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall 0 \leq a_i \leq 1; S_n < 1$

### 30. Bất đẳng thức Ky Fan

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương trong  $(0, \frac{1}{2}]$ . Khi đó  $\frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^n} \leq \frac{\prod_{k=1}^n (1-x_k)}{\left[ \sum_{k=1}^n (1-x_k) \right]^n}$

### 31. Bất đẳng thức A.M.Ostrowski

Cho hai dãy không tỷ lệ  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  và dãy số thực  $x = (x_1, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$

### 32. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd

Với mọi dãy số thực  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  thỏa mãn điều kiện  $a_i, b_j \neq a_j b_i$  ứng

với  $i \neq j$ , ta đều có 
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2} \leq \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$$

**33. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd**

Giả sử  $p_{ij} (i, j = 1, \dots, n; i \neq j)$  thỏa mãn điều kiện  $p_{ij} = p_{ji}$ ,  $p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij} \neq 0$

khi đó với mọi cặp dãy số thực  $a_1, \dots, a_n$  và  $b_1, \dots, b_n$  sao cho  $a_i b_j \neq a_j b_i (i \neq j)$ , ta đều có

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2} \leq \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{p_{ij} a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$$

**34. Bất đẳng thức Beckenbach**

Cho  $x_i, y_i > 0 \forall i \in \overline{1, n}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $p \in [1; 2]$ . Khi đó

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^{p-1}} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i^p}{\sum_{i=1}^n y_i^{p-1}}$$
**35. Bất đẳng thức SuranYi**

Cho các số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1 a_2 \dots a_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})$$

**36. Bất đẳng thức Vasile**

Cho các số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n + n(n-1)a_1 a_2 \dots a_n \geq a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

**37. Bất đẳng thức Jack Garfunkel**

Với các số thực không âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ  $(a, b, c)$  là các hoán vị của  $(3, 1, 0)$ .

## § 25.2. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Bài 1. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2} \sqrt{27 + (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}$$

Bài 2. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sqrt{\frac{3}{2} \left( \sum_{cyc} \frac{a+b}{c} \right)} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{a(b+c)} \leq 1 + \frac{1}{3} \left( \sum_{cyc} \frac{a+b}{c} \right)$$

Bài 3. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh: 
$$(a+b+c)^2 (a^2b+b^2c+c^2a) \geq 9abc(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 4. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \leq \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)}$$

Bài 5. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$(a^2+b^2+c^2)^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 2(a+b+c)^3 - 27abc$$

Bài 6. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} \leq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt{2}(ab+bc+ca)}$$

Bài 7. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+bc} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$$

Bài 8. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+b}{a+c}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Bài 9. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \frac{2}{3} \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$$

Bài 10. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+c} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Bài 11. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Bài 12. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Bài 13. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}} \geq \sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}}$$

Bài 14. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng: 
$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}} \geq \sqrt{10 - \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}}$$

Bài 15. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{2(a+b)+c} \geq \frac{2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{5}$$

Bài 16. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{ab(a^2+bc)}{b+c} \geq \sqrt{3abc(a^2b+b^2c+c^2a)}$

Bài 17. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $0 \leq k \in \mathbb{R}$  và  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{b+a}} + k \sqrt[n]{\frac{a^3b^4 + b^3c + c^3a}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \geq 2\sqrt[k+1]$$

Bài 18. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $4 \leq k \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} + k \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq 2\sqrt{k}$$

Bài 19. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{15}{8} \sqrt{\frac{50(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq \frac{25}{4}$$

Bài 20. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{b+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b+a}} + \frac{65}{84} \sqrt[3]{\frac{65(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}}$$

Bài 21. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$ ,  $k > 0$ , chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{(2k-3\sqrt{k}+2)a+kb+c} + \frac{b}{(2k-3\sqrt{k}+2)b+kc+a} + \frac{c}{(2k-3\sqrt{k}+2)c+ka+b} \leq \frac{1}{k-\sqrt{k}+1}$$

Bài 22. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $k \geq 2$  và  $p \geq 0$ , chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a^2+4(k+p)^3bc}{b^2+pbc+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+4(k+p)^3ca}{c^2+pac+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2+4(k+p)^3ab}{a^2+pab+b^2}} \geq 3k+2p$$

Bài 23. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$



Bài 24. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + 9 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 6$

Bài 25. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + 16 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8$

Bài 26. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Bài 27. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 9 \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 5$

Bài 28. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:

$$\frac{a^4}{b^2+c^2} + \frac{b^4}{c^2+a^2} + \frac{c^4}{a^2+b^2} + 12\sqrt{6}(ab+bc+ca) \geq 15(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 29. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{a(a+b)}{a^2+2b^2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2abc}{a+b+c}}$

Bài 30. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2+3bc}{2(b^2+c^2)}} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 31. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b-c}{k(a^2+b^2)+ab} \leq \frac{9}{2k+1} \cdot \frac{1}{a+b+c}$$

Bài 32. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a+5b}{c\sqrt{a^2+5b^2}} \geq \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Bài 33. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{10(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{15}{2}$

Bài 34. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 128 \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}} \geq 46$

Bài 35. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $k > 0$ . Chứng minh:

$$(ab+bc+ca)^k \left[ \frac{1}{(a+b)^{2k}} + \frac{1}{(b+c)^{2k}} + \frac{1}{(c+a)^{2k}} \right] \geq \text{Max} \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{k}}; \frac{(k-1)^k + (k-1)k^k}{k^k(k-1)} \right\}$$

Bài 36. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{\alpha a^n}{(b+c)^n}\right) \left(1 + \frac{\alpha b^n}{(c+a)^n}\right) \left(1 + \frac{\alpha c^n}{(a+b)^n}\right) \geq \text{Min}\left\{(\alpha+1)^2; \left(\frac{\alpha+2^n}{2^n}\right)^3\right\}$$

Bài 37. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{12(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq \frac{41}{9}$$

Bài 38. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} a^2 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 + 2(b^2 + c^2)} \right) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2 + bc + c^2}{a^2 + (b+c)^2}$

Bài 39. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0, 3 \leq n \in \mathbb{N} \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b^n + c^n)}{a^2 + bc} \geq a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$

Bài 40. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{a^2 + bc} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Bài 41. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a^2}{b} + b \right) \geq 2 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)}$

Bài 42. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + b^2}{c(a+b)} \geq (a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\frac{3}{abc(a+b+c)}}$

Bài 43. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2 + 2bc} \geq 1 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

Bài 44. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{c(c+a)} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a+b+c)}$

Bài 45. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{9(a^2 + b^2)}{2(a+b+c)^2 + 9(a^2 + b^2)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 46. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{b+c}{a}} \geq 2 \sqrt{3 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}$

Bài 47. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a+b}{c^2}} \geq 3\sqrt{2} \sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}$

Bài 48. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b-c}{a^2 + ab + b^2} \leq \frac{3}{a+b+c}$

Bài 49. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{c(a+b)} \geq 3 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$

Bài 50. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{2a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}} \geq 2$

Bài 51. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 2\sqrt{2} \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq (1+\sqrt{2})^2$

Bài 52. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 53. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq 2 \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} + 1$$

Bài 54. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b+c) \geq \frac{9+3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Bài 55. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq 2 \left( \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \right)$

Bài 56. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $23 + 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(1+a)(1+b)(1+c)$

Bài 57. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $18 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(1+a)(1+b)(1+c)$

Bài 58. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab+bc+ca > 0 \text{ và } C_k = \max \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{k}}, \frac{(k-1)^k + k^k(k-1)}{k^k(k-1)} \right) \end{cases}$ . Chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{k}}} \leq C_k (a+b+c)^{\frac{k-1}{k}} \quad (\text{với } k=2, \text{ chúng ta có bất đẳng thức Jackgarfukel})$$

Bài 59. Cho  $0 < a < b < c < 1$ . Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c) \geq (a+b+c+3abc) \left( \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right)$$

Bài 60. Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a+b+c+d}{2} \leq \sqrt[3]{(1+abcd) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)}$

Bài 61. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sqrt[3]{a + \frac{b^2}{c}} + \sqrt[3]{b + \frac{c^2}{a}} + \sqrt[3]{c + \frac{a^2}{b}} \geq \sqrt[3]{12abc + 42}$

**Bài 62.** Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum \frac{1}{a_i(a_{i+1}+1)} \geq \frac{n}{2}$ . Trong đó quy ước:  $a_{n+1} = a_1$

**Bài 63.** Chứng minh:  $2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq ((x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz)^2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

**Bài 64.**  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(a_1^n + n - 1)(a_2^n + n - 1) \dots (a_n^n + n - 1) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$$

**Bài 65.** Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 a_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}$$

**Bài 66.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \geq \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}}}}$$

**Bài 67.** Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n^2 + a_n}} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

**Bài 68.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $n > 0$ . Chứng minh:  $\frac{abc}{n(a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3n-1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$

**Bài 69.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$abc + bcd + cda + dab + \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq \frac{2}{2 - \sqrt[3]{2}}(a + b + c + d)$$

**Bài 70.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{3}(a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \geq a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq \\ & \geq \frac{8}{27}(a+b+c)^4 - \frac{1}{125}(a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \end{aligned}$$

**Bài 71. [Iran National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương phân biệt. Chứng minh:  $\left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| > 1$

**Bài 72. [Iran National Mathematical Olympiad 2007]**

Tìm số  $T$  lớn nhất sao cho  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq T(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})^2$  đúng với mọi  $a, b, c, d, e \geq 0$  và thỏa mãn điều kiện  $a + b = c + d + e$ .

**Bài 73. [Middle European Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a + b + c + d = 4$ .

Chứng minh rằng:  $a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$

**Bài 74. [Middle European Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{2} \leq a, b, c, d \leq 2$  và  $abcd = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $S = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right)$

**Bài 75. [China Northern Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác sao cho  $a + b + c = 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $T = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{3}abc$

**Bài 76. [China Northern Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$  và  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a^k}{a+b} + \frac{b^k}{b+c} + \frac{c^k}{c+a} \geq \frac{3}{2}$

**Bài 77. [Croatia Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

**Bài 78. [Romania Junior Balkan Team Selection Tests 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c \geq ab + bc + ca$

**Bài 79. [Romania Juior Balkan Team Selection Tests 2007]**

Cho  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4} |(x-y)(y-z)(z-x)|$

**Bài 80. [Yugoslavia National Olympiad 2007]**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng với số tự nhiên  $k$  bất kỳ ta có:

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1} + y^k + z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1} + z^k + x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1} + x^k + y^k} \geq \frac{1}{7}$$

**Bài 81. [Cezar Lupu & Tudorel Lupu, Romania TST 2007]**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}, (n \geq 2)$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ .

Chứng minh rằng:  $\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \leq n$ .

**Bài 82. [Macedonia Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $1 + \frac{3}{ab + bc + ca} \geq \frac{6}{a + b + c}$

**Bài 83. [Italian National Olympiad 2007]**

a) Với  $n \geq 2$ , tìm giá trị lớn nhất hằng số  $c_n$  sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + 1} \geq c_n \text{ đúng với mọi } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ thỏa mãn } a_1 a_2 \dots a_n = 1$$

b) Với  $n \geq 2$ , tìm giá trị lớn nhất hằng số  $d_n$  sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{2a_1 + 1} + \frac{1}{2a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{2a_n + 1} \geq d_n \text{ đúng với mọi } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ thỏa mãn } a_1 a_2 \dots a_n = 1$$

**Bài 84. [France Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$$

**Bài 85. [Greece National Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \geq ab+bc+ca$$

**Bài 86. [Bulgaria Team Selection Test 2007]**

Cho  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Tìm giá trị tốt nhất của hằng số  $C(n)$  sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq j < i \leq n} (2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}) \text{ đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1) \text{ thỏa mãn } (1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$$

**Bài 87. [Poland Second Round 2007]**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d) - 4$$

**Bài 88. [Turkey Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c} + \frac{1}{bc+2a^2+2a} + \frac{1}{ac+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ac}$$

**Bài 89. [Moldova National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a_k \geq \frac{1}{k}, \forall k = \overline{1, n}$ . Chứng minh rằng:

$$(a_1+1)\left(a_2+\frac{1}{2}\right) \dots \left(a_n+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2^n}{(n+1)!} (1+a_1+2a_2+\dots+na_n)$$

**Bài 90. [Moldova National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ . Đặt  $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}$$

**Bài 91. [Peru Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Chứng minh:  $a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$

**Bài 92. [Peru Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c$  là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$$

**Bài 93. [Romania Team Selection Tests 2007]**

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1 \end{cases}$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $S = (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)$

**Bài 94. [Ukraine Mathematical Festival 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$a) \left(a + \frac{1}{a+1}\right) \left(b + \frac{1}{b+1}\right) \left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}$$

$$b) 27(a^3 + a^2 + a + 1)(b^3 + b^2 + b + 1)(c^3 + c^2 + c + 1) \geq 64(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$$

**Bài 95. [Asian Pacific Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1$$

**Bài 96. [Brazilian Olympiad Revenge 2007]**

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  với  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

**Bài 97. [India National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(x + y + z)^2 (yz + zx + xy)^2 \leq 3(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2)(x^2 + xy + y^2)$$

**Bài 98. [British National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $(a^2 + b^2)^2 \geq (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

**Bài 99. [Korean National Mathematical Olympiad 2007]**

Tìm tất cả các giá trị  $k$  dương để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{c+kb} + \frac{b}{a+kc} + \frac{c}{b+ka} \geq \frac{1}{2007}$$

**Bài 100. [Hungary-Israel National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 \leq 1, a^2 + b^2 \leq 5, a^2 + b^2 + c^2 \leq 14, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 30$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c + d \leq 10$



### § 25.3 NHÌN LẠI VÀ MỞ RA

Các bạn thân mến! Vậy là các bạn đã cùng chúng tôi đi tới mục cuối cùng của cuốn sách lớn này. Quả thực các bạn đã bước những bước đi thật dài, bắt đầu với những bất đẳng thức đại số cổ điển (*AM – GM, Cauchy – Schwarz, Holder, Minkowski, Chebyshev*) tới những bất đẳng thức cận đại (bất đẳng thức *hoán vị, Shur, Muirhead*). Từ những hòn đá tảng của phương pháp giải tích (ứng dụng của đạo hàm, các định lý *Lagrange, Bernoulli, Jensen, Karamata, RCF, LCF, Popoviciu*, ứng dụng của tích phân *Riman*) chuyển sang làm quen với những phương pháp đầy mới mẻ, những viên kim cương sáng lấp lánh trong thế giới bất đẳng thức đại số sơ cấp hiện đại (*S.O.S, MV, A.B.C, G.L.A, E.V, D.A.C*). Các bạn đã được thưởng thức những bài viết rất đặc sắc về bất đẳng thức theo nhiều cách tiếp cận khác nhau (*U.C.T*, ứng dụng của phép đổi biến, đổi biến thuận nghịch, ứng dụng của định lý *Viet – Rolle*, các bất đẳng thức không thuần nhất, hoán vị). Các bạn cũng đã cùng chúng tôi khảo sát nhiều bài toán riêng rất đặc biệt, những bài toán có nhiều lời giải, và mỗi lời giải lại có một ý nghĩa khác nhau, đôi khi cũng có cả những bài toán chỉ có một cách giải, nhưng cách giải của nó lại thực sự ấn tượng. Hàng chục chuyên đề, hàng trăm ví dụ và hàng nghìn bài toán. Đó chính xác là tất cả những gì chúng tôi đã trình bày với các bạn. Nhưng qua tất cả những trang sách đó, các bạn đã thu lượm được cho mình những gì, đây mới thực sự là điều chúng tôi cảm thấy trân trọng nhất khi thực hiện công việc biên soạn nội dung cuốn sách. Vì lẽ đó, các bạn hãy tiếp tục cùng chúng tôi “đi” nốt những dòng dưới đây sau khi đã trải qua một quá trình tự rèn luyện không dễ dàng ở những chương trước. Chúng tôi hi vọng những phân tích này sẽ giúp chúng tôi (những người làm sách) và các bạn (những độc giả đầy đam mê) có thể trở nên gần gũi với nhau hơn, và như vậy, hẳn nội dung cuốn sách cũng sẽ tới với các bạn đọc một cách dễ dàng hơn trước.

Đối với hầu hết mọi người, bắt đầu bao giờ cũng là một việc khó. Chương thứ nhất của cuốn sách được dành riêng để trình bày về năm bất đẳng thức đại số kinh điển. Lần lượt là *AM – GM, Cauchy – Schwarz, Holder, Minkowski, Chebyshev*, trong đó bốn bất đẳng thức đầu tiên có thể dùng để chứng minh lẫn nhau. Không dễ để có thể diễn tả hết sức mạnh của các bất đẳng thức này đối với những bất đẳng thức cổ điển thông qua một vài ví dụ cụ thể. Hơn nữa nếu có thể nắm vững và ứng dụng được chúng trong các bài toán cụ thể một cách linh hoạt thì có thể coi như bạn đã “biết” khá nhiều về các bất đẳng thức đại số. Vì lẽ đó, chúng tôi lựa chọn cách trình bày quy phạm, đi từ dễ đến khó, chi tiết ở từng định lý, cận kề trong từng ví dụ và lựa chọn một số lượng bài tự giải khá lớn để bạn đọc luyện tập. Bên cạnh đó chúng tôi cũng đã gửi gắm khá nhiều những kỹ thuật áp dụng các bất đẳng thức cổ điển mới vào từng trang sách. Tiêu biểu phải nhắc lại, đó là kỹ thuật chọn điểm rơi, cân bằng hệ số, kỹ thuật tách phân thức âm và

đánh giá mẫu số trong ứng dụng của bất đẳng thức  $AM - GM$ . Kỹ thuật sắp xếp biến để áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cũng là một kỹ thuật tinh tế và đáng chú ý, các bạn cần thực hành nhiều nếu muốn sử dụng thành thạo trong các bài toán đối xứng, và kể cả một số bài toán hoán vị nữa.

Trong chương II, chúng tôi tiếp tục cách trình bày quy phạm khi tiến hành giới thiệu các bất đẳng thức cận đại. Các bất đẳng thức đó lần lượt là bất đẳng thức hoán vị, bất đẳng thức *Schur* và bất đẳng thức *Muirhead*. Có thể hiểu bất đẳng thức hoán vị là cái nhân của bất đẳng thức *Chebyshev*, và do đó những bài toán đối xứng có thể giải bằng *Chebyshev* cũng giải được nhờ bất đẳng thức hoán vị, hơn nữa có khá nhiều bài toán hoán vị chỉ có thể sử dụng bất đẳng thức hoán vị để giải quyết vì nếu sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* thì các đánh giá sẽ trở nên rất phức tạp. Cũng trong chương này chúng ta đã bắt đầu công phá các bất đẳng thức đối xứng một cách có hệ thống hơn. Bắt đầu với việc sử dụng bất đẳng thức *Schur* nhờ việc quy các bất đẳng thức ban đầu về các bài toán đơn giản hơn trên các đa thức *Viet* ba biến cơ bản  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + bc + ca$ ,  $r = abc$ . Tiếp theo đó lược đồ *Young* cùng những phép biến đổi đối xứng, bất đẳng thức *Muirhead*, và đặc biệt là bất đẳng thức *ASYM* đã đưa ra một con đường “chuẩn mực” khi giải các bài toán đối xứng. Đó là quy bất đẳng thức đối xứng về các đa thức đối xứng cơ bản của các biến, sau đó sử dụng những đánh giá trên các đa thức đối xứng cơ bản đó để đưa ra kết luận bài toán. Phương pháp này đặc biệt tỏ ra có hiệu lực khi ta đã có trước trong tay những đánh giá đủ chặt, đặc biệt là khi có sự trộn lẫn của các tổng đối xứng đồng bậc khác nhau.

Bước vào chương III, lần đầu tiên trong cuốn sách này các bạn được làm quen với những ứng dụng của phép đạo hàm; và có thể ngay lập tức nhận thấy sức mạnh tiềm tàng của phương pháp khảo sát hàm số trong chứng minh bất đẳng thức. Thật vậy, nếu là bất đẳng thức một biến, ta có thể áp dụng trực tiếp định lý *Fermat* về các điểm tới hạn, nếu là bất đẳng thức nhiều biến, ta có thể khảo sát lần lượt theo từng biến. Dù là bài toán đơn giản hay có hình thức phức tạp, kết quả vẫn đạt được khi chúng ta kiểm soát được dấu của đạo hàm của các hàm số thông qua các không điểm của chúng. Phát triển sâu sắc hơn ý tưởng này, bài toán cực trị có ràng buộc trên lý thuyết đã được giải quyết triệt để nhờ các định lý *Lagrange*. Một mặt khác công cụ đạo hàm và các định lý của giải tích cho phép ta khảo sát hình dáng của các hàm số chính xác tới từng “địa phương” (sự tăng giảm của hàm số tại một điểm). Tuy nhiên với những bất đẳng thức nhiều biến thì số “địa phương” sẽ bị tăng lên quá nhanh và quá “lớn”. Do đó cần có những hướng tiếp cận đặc biệt khác. Các bất đẳng thức *Jensen*, *Karamata*, *RCF*, *LCF*, *Popoviciu* được phát triển theo cùng một tư tưởng. Đó là với những hàm đủ tốt (đạo hàm cấp 2 thỏa mãn các tính chất nào đấy) thì ta có thể tiến hành dồn các bộ nhiều biến về một số bộ nhiều biến khác đặc biệt hơn. Như vậy bài toán sẽ trở nên khá dễ dàng. Cuối cùng, vẫn giữ nguyên tinh thần của phương pháp giải tích, chúng ta lại tìm cách tiếp cận các bất đẳng thức một cách “toàn cục”, đó chính là những ứng dụng đặc sắc của tích phân *Riman*. Trong chương này, mặc dù vẫn cố gắng đáp ứng những chuẩn mực

trong cách trình bày lý thuyết và bài tập, chúng tôi đã chủ động tạo cho các bạn một nhịp suy nghĩ tìm tòi để cải tiến các phương pháp, khắc phục nhược điểm, phát huy ưu điểm của chúng. Đây cũng là một cách khởi động tốt để các bạn có thể bước vào chương thứ tư, chương bao gồm các bài toán rất đẹp, các ý tưởng rất mới, cũng là chương hay và khó nhất cuốn sách.

Chương IV, những viên kim cương của bất đẳng thức sơ cấp hiện đại. Đây thực sự là tập hợp của những hướng đi mới, những ý tưởng mới nhằm công phá thế giới bất đẳng thức đa dạng và phong phú. Đây cũng là lần đầu tiên những ý tưởng này được đặt cạnh nhau trong một mối quan hệ thống nhất. Bắt đầu với phương pháp *S.O.S*, phương pháp này được phát triển nhờ việc đánh giá các hệ số của tổng bình phương có dạng  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$ , hoặc dạng cải tiến của nó là  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(a-c)$  dùng để xử lý tốt hơn đối với các bất đẳng thức hoán vị. Tiếp theo đó là ý tưởng về phép dồn biến. Như đã nói, ý tưởng của phương pháp dồn biến là không chứng minh “ngay” như *S.O.S* mà tìm cách thu hẹp bài toán  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  trên tập  $D$  về tập  $\Lambda$  nhỏ hơn, ở đây tập  $\Lambda$  có những tính chất đặc biệt nào đó, rồi sau đó mới xử lý cụ thể trên tập  $\Lambda$ . Ý tưởng rất đơn giản này đã được triển khai với hàng loạt định lý rất mạnh như *S.M.V*, *U.M.V*, *G.M.V*, mỗi định lý thích hợp với những bất đẳng thức có số biến khác nhau. Sau phương pháp dồn biến, chúng ta đến với chùm ba phương pháp *A.B.C*, *G.L.A*, *E.V*. Và mặc dù bắt đầu với mục đích đổi biến để tiến hành khảo sát nhằm giảm biến, hầu như ngay lập tức có thể nhận thấy ba phương pháp này đã thực hiện cùng một ý tưởng, đó là dồn biến gián tiếp. Khác với dồn biến trực tiếp, để dồn biến gián tiếp ta tiến hành đổi biến trước, rồi mới thực hiện phép dồn biến trên các biến mới, sau đó có thể lại quay lại làm việc trên các biến cũ, các biến đó lúc này đã được dồn về những trường hợp đặc biệt. Ý tưởng tình tế này cũng đồng thời đặt ra một câu hỏi khó là có những phép đổi biến nào thực sự có ý nghĩa và hiệu quả, đây vẫn còn là câu hỏi mở. Cuối cùng, phương pháp chia để trị đưa ra và triển khai một ý tưởng không mới, nhưng không hề đơn giản. Đó là thay vì tìm cách chứng minh trên toàn miền xác định ta tìm cách chia nhỏ thành các miền đơn giản hơn, để sau khi có những đánh giá trên từng miền ta có thể kết hợp những kết quả đó lại nhờ những định lý nổi dài. Đây là tất cả những ý tưởng lớn nhất đã được triển khai trong suốt chương bốn. Trong chương này các bất đẳng thức đối xứng đã được giải quyết một cách khá triệt để, một bài toán cũng có thể được giải quyết bằng tất cả các phương pháp, tùy tình huống cụ thể mà lời giải sẽ có độ phức tạp khác nhau. Trong một chương mà cảm hứng sáng tạo có thể bắt gặp ở tất cả các bài toán, chúng tôi lựa chọn sử dụng một cách trình bày mang đậm tính tìm tòi khám phá, cách trình bày quy phạm truyền thống đã được nới lỏng với niềm tin rằng các bạn, những độc giả rất năng động, sẽ tiếp thu được những ý tưởng và những phương pháp này một cách đúng đắn và đầy đủ nhất khi được chứng kiến lại chính xác con đường mà các tác giả đã đi qua để tìm ra

chúng. Chúng tôi kì vọng rằng sau khi đã quen thuộc với các đặt và giải quyết vấn đề trong từng chuyên đề, các bạn cũng sẽ có những sáng tạo của riêng mình trong tương lai.

Sau bốn chương đầu với cách trình bày khá quen thuộc, ở chương cuối cùng, chương năm, chúng tôi đã tổng hợp và chọn lọc một số bài viết, cũng như bài toán đặc sắc nhất để gửi tới các bạn. Đó là phương pháp *U.C.T*, đó là bất đẳng thức *Nesbitt – Sharpiro*, đó là kỹ thuật *p, q, r* hoán vị, và đó là rất nhiều bài toán với lời giải độc đáo cùng một danh sách dài các bài tập không có lời giải. Và còn nhiều chuyên đề hơn nữa chúng tôi muốn gửi tới các bạn. Có tất cả những điều đó vì chúng tôi muốn nói với các bạn rằng thế giới bất đẳng thức còn rất rộng và còn rất nhiều điều thú vị. Tất cả những phương pháp đã có, theo một khía cạnh nào đó, chỉ là tương đối, và dĩ nhiên không thể là toàn năng, chính vì thế luôn có những điều mới mẻ đón chờ các bạn ở phía trước sự sáng tạo và tinh thần làm việc nghiêm túc. Để minh họa cho điều đó bây giờ thay vì đánh giá sức mạnh của những phương pháp đã có, chúng ta hãy thử cùng nhau nhìn lại xem, còn những bài toán nào vẫn đang ở ngoài tầm với, hiển nhiên rằng việc tiếp tục tìm tòi về những bài toán còn sót lại và hướng tới những điều mới lạ sẽ là chương kết không thể thích hợp hơn với một bản nghiên cứu rộng khắp như cuốn sách mà chính các bạn đang cầm trên tay.

Các bất đẳng thức thường được phân loại theo nhiều cách. Phân chia theo số biến ta có bất đẳng thức ba biến, bốn biến, và bất đẳng thức nhiều biến. Phân chia theo hình thức ta có bất đẳng thức đối xứng, bất đẳng thức hoán vị. Phân chia theo đặc tính ta có bất đẳng thức thuần nhất, bất đẳng thức không thuần nhất. Mỗi phương pháp tỏ ra có ưu thế với dạng này không có gì đảm bảo vẫn giữ được ưu thế đó khi áp dụng để giải quyết những bài toán thuộc dạng khác. Trước hết chúng ta hãy xem các bất đẳng thức đối xứng, thuần nhất, bởi vì đây là dạng bất đẳng thức đơn giản, quen thuộc, và phổ biến nhất. Đối với những bất đẳng thức dạng này việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển thường đem lại hiệu quả cao. Một hướng đi rất mang hơi hướng cận đại khi tấn công các bất đẳng thức trong nhóm này là sử dụng các bất đẳng thức *Muirhead*, *Shur* và *ASYM*. Ý tưởng chủ chốt là do mọi bất đẳng thức đối xứng đều có thể quy về bất đẳng thức trộn lẫn giữa các tổng đối xứng cơ bản của các biến ban đầu, cho nên nếu có những bất đẳng thức cơ sở đủ mạnh, thì ta cũng sẽ dễ dàng có được những kết quả cần chứng minh. Hạn chế ở đây là với những bất đẳng thức có sẵn như *Muirhead*, *Shur* và *ASYM* thì việc giải quyết những khó khăn phát sinh khi có nhiều tổng đối xứng bậc khác nhau xuất hiện cùng trong bài toán trở nên rất khó khăn. Cụ thể hơn, có thể liệt kê lại ở đây 13 bài toán rất khó và hơn nữa trong số chúng chưa có lời giải trọn vẹn. Các bạn có thể xem lại các ký hiệu trong chuyên đề về bất đẳng thức *Muirhead*.

**Bài 1:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng  $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$$

**Bài 2:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  
 $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1c_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2; M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$$

**Bài 3:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $S_{a_1b_1} + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_3b_3c_3}$  trong đó  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2; a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

**Bài 4:** Cho các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $S_{a_1a_2\dots a_n} + kS_{c_1c_2\dots c_n} \geq (k+1)S_{b_1b_2\dots b_n}$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$  là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán sau:

**Bài 5:** Cho các biến không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $S_{a_1a_2\dots a_n} - S_{b_1b_2\dots b_n} \geq k(S_{c_1c_2\dots c_n} - S_{d_1d_2\dots d_n})$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n), (d_1, d_2, \dots, d_n)$  là các dãy số nguyên dương không giảm:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

**Bài 6:** Cho dãy số không tăng  $\{a_n\}$  và 1 hoán vị của nó  $\{b_n\}$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ). Chứng minh rằng nếu  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$  thì  $\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{a_n} x_2^{a_{n-1}} \dots x_n^{a_1}$ .

**Chú ý:** Bài toán trên có ý nghĩa đối với bất đẳng thức hoán vị tương tự như bất đẳng thức **Muirhead** đối với bất đẳng thức đối xứng. Làm mạnh hơn bài toán trên ta có:

**Bài 7:** Cho 2 dãy không tăng  $\{a_n\}, \{b_n\}$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

Dãy biến  $\{x_n\}$  không tăng và không âm có  $\{y_n\}$  là 1 hoán vị của nó.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}$$

Và tương tự quá trình ta sẽ có những bài bất đẳng thức hoán vị sau:

**Kí hiệu:**  $C_X^\alpha = \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Đặc biệt nếu  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  là các số tự nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là:  $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Ngoài ra nếu  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$  thì  $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$

**Bài 8:** Cho  $M, a_1, b_1, a_2, b_2$  là các số nguyên dương sao cho:  $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ ;  $a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$ . Cho 2 biến  $x, y \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $x, y \geq 0$ :

$$C_M + kC_{a_2 b_2} \geq (k+1)C_{a_1 b_1}$$

**Bài 9:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_m + kC_{a_2 b_2 c_2} \geq (k+1)C_{a_1 b_1 c_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$$

**Bài 10:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_m + kC_{a_2 b_2 c_2} \geq (k+1)C_{a_1 b_1 c_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2; M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2;$$

**Bài 11:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_{a_1 b_1} + kC_{a_3 b_3 c_3} \geq (k+1)C_{a_2 b_2 c_2}$  trong đó  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2; a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3;$$

**Bài 12:** Cho các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_{a_1 a_2 \dots a_n} + kC_{c_1 c_2 \dots c_n} \geq (k+1)C_{b_1 b_2 \dots b_n}$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$  là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán sau:

**Bài 13:** Cho các biến không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_{a_1 a_2 \dots a_n} - C_{b_1 b_2 \dots b_n} \geq k(C_{c_1 c_2 \dots c_n} - C_{d_1 d_2 \dots d_n})$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n), (d_1, d_2, \dots, d_n)$  là các dãy số nguyên dương không giảm  
cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$



$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

Đây thực sự là những bài toán rất khó có lời giải trọn vẹn. Tuy nhiên nếu có thể có lời giải trọn vẹn cho bài toán nào đó trong số những bài toán này thì ta sẽ lại có thể có thêm những bất đẳng thức đối xứng thuần nhất rất chặt, và những chứng minh sáng sủa hơn cho nhiều bài toán đối xứng cũ. Từ bài 6 trở đi, các kết quả tìm được sẽ hỗ trợ trực tiếp việc giải các bài toán hoán vị. Bây giờ, chúng ta hãy nói một chút về các bài toán hoán vị. Rõ ràng trong cả cuốn sách này đã có rất nhiều lần chúng ta công phá các bài toán hoán vị bằng nhiều cách với những công cụ khác nhau. Tuy nhiên mọi việc vẫn rất khó khăn. Vậy đâu là khó khăn chính. Có thể nói đơn giản khó khăn chính nằm ở chỗ đẳng thức trong các bất đẳng thức hoán vị là rất khó kiểm soát. Thông thường trong các bất đẳng thức đối xứng thì đẳng thức xảy ra tại những vị trí khá đẹp, như các biến bằng nhau, hoặc 1 biến đạt giá trị biên và các biến còn lại bằng nhau. Ngoại lệ có một số bất đẳng thức đối xứng mà dấu bằng đạt được khi các biến rất lệch nhau, số này rất ít. Tuy nhiên đối với các bất đẳng thức hoán vị thì việc đẳng thức xảy ra khi các biến rất lệch nhau, lệch cả tâm và ở rất xa biên là rất thường gặp. Thường thì khi đó đẳng thức sẽ xảy ra khi các biến thỏa mãn một hoặc một vài hệ thức đặc biệt nào đó, và do đó có thể có trường hợp đẳng thức xảy ra tại vô hạn bộ số (các bộ này thậm chí không tỷ lệ với nhau). Đâu sẽ là hướng đi sáng sủa nhất với những bài toán loại này. Cho đến giờ chúng ta có hai hướng đi sau đây. Hướng đi thứ nhất là sử dụng các phương pháp vốn dành cho bất đẳng thức đối xứng kèm theo một số sự cải tiến nào đó. Chẳng hạn có thể cải tiến phương pháp *S.O.S*, *D.A.C* và thậm chí cả phương pháp sử dụng *Shur* dựa vào phép biến đổi bài toán về dạng tổng các bình phương như sau  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(c-a)$ . Hướng đi này tỏ ra có hiệu quả trong rất nhiều bài toán khó, đặc biệt khi nó được hỗ trợ bởi một số bất đẳng thức phụ đủ mạnh. Hướng đi thứ hai là tìm cách đổi biến nhằm quy tất cả các trường hợp đẳng thức xảy ra khi các biến ban đầu lệch nhau về trường hợp đẳng thức xảy ra khi các biến mới khá "đẹp". Để thực hiện được điều đó chúng ta cần sử dụng đến những định lý đã nêu ra trong mục phương pháp *G.L.A* tổng quát. Theo đó đối với bất đẳng thức cần chứng minh có dạng  $F(a,b,c) \geq 0$ , ta sẽ chọn cách đổi biến thích hợp có thể dẫn tới bất đẳng thức  $A' + B' + C' \geq \text{const}$ . Sau đó chứng minh rằng với mọi giá trị có thể của  $A, B, C$  luôn tồn tại  $a', b', c'$  sao cho khi đổi biến ta nhận được  $A', B', C'$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} A'B' = B'C' + C'A' = AB + BC + CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A' - B')(B' - C')(C' - A') = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Lúc này ta đã có thể áp dụng định lý 1 và định lý 2 trong mục 20.VIII để quy bài toán về trường hợp trong 3 biến  $A, B, C$  có 2 biến bằng nhau. Thực ra ta cần chứng minh hệ (\*) có nghiệm vì định lý 1 chỉ được phát biểu cho  $R_+^3$ , trong khi đó  $(A, B, C)$  chỉ chạy trong 1 tập con nào đó của  $R_+^3$ , vì chúng còn bị ràng buộc bởi một quan hệ qua chính

phép đổi biến. Tuy nhiên đây cũng chính là “gót chân Asin” của phương pháp này. Tại sao vậy. Bởi vì trước khi đổi biến chúng ta không thể biết được hệ (\*) có nghiệm hay không. Trong một số trường hợp đơn giản thì ta có thể khẳng định ngay điều đó. Nhưng trong trường hợp tổng quát thì mọi việc không có gì chắc chắn. Hơn nữa ngay cả khi đã quy về trường hợp đẳng thức đơn giản của biến mới, nếu cách đổi biến quá phức tạp thì khi quay lại biến cũ chúng ta cũng sẽ gặp rất nhiều khó khăn về mặt tính toán. Để hình dung được những khó khăn đó các bạn có thể thử tìm phép đổi biến thích hợp với bài toán sau đây:

#### Bài 14. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{k(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}} + 9 - k$$

Như vậy vấn đề này có thể nói là mới đang ở vạch xuất phát và vẫn đang đợi những tìm tòi của chính các bạn trong tương lai. Chúng ta hãy chuyển sang các bất đẳng thức không thuần nhất. Có thể coi các bất đẳng thức này là 1 phần của các bất đẳng thức đối xứng. Bởi vì nó vẫn là sự trộn lẫn giữa các tổng đối xứng cơ bản trên các biến gốc, số bất đẳng thức như thế này tuy không thực sự nhiều, cách phát biểu có thể hơi cồng kềnh, nhưng đặc biệt ấn tượng.

Đặt  $S_{k,n} = \sum_{i_1 < \dots < i_k \subset \{1, 2, \dots, n\}} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  ( $k < n$ ) và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó ta có các bất đẳng

thức sau

$$\text{Bài 15. } (S_{4,4} - S_{2,4} + 1)^2 + (S_{3,4} - S_{1,4})^2 \geq \frac{125}{216} (\sqrt{2}S_{3,4} + \sqrt{3}S_{2,4})^2$$

$$\text{Bài 16. } (49S_{4,4} - 371S_{2,4} + 2809)^2 + 371(7S_{3,4} - 53S_{1,4})^2 \geq 360^3 (S_{4,4} + S_{2,4} + 3S_{1,4} + 1)^2$$

$$\text{Bài 17. } (9S_{4,4} - 21S_{2,4} + 49)^2 + 21(3S_{3,4} - 7S_{1,4})^2 \geq \frac{2000}{7} (S_{4,4} + 2S_{2,4} + 5S_{1,4} + 2)^2$$

$$\text{Bài 18. } (S_{5,5} - 2S_{3,5} + 4S_{1,5})^2 + 2(S_{4,5} - 2S_{2,5} + 4)^2 \geq (S_{3,5} - S_{4,5} + 1)^2$$

$$\text{Bài 19. } (S_{6,6} - S_{4,6} + S_{2,6} - 1)^2 + (S_{5,6} - S_{3,6} + S_{1,6})^2 \geq \frac{16}{121} (6S_{6,6} - S_{4,6} + 5S_{1,6} + 1)^2$$

$$\text{Bài 20. } (8S_{6,6} - 20S_{4,6} + 50S_{2,6} - 125)^2 + 10(4S_{5,6} - 10S_{3,6} + 25S_{1,6})^2 \geq 96,04(S_{4,6} + S_{3,6})^2$$

Như vậy, có thể nói các bài toán hoán vị và các bài toán không thuần nhất (không mẫu mực) sẽ là những hướng đi chủ yếu của chúng ta trong tương lai, tất nhiên, những bài toán đối xứng thuần nhất vẫn là một mảnh đất màu mỡ để các bạn tiếp tục triển khai những ý tưởng mới của mình. Chúng tôi sẽ liệt kê lại một số bài toán hoán vị có dạng khá đơn giản, nhưng việc giải quyết được nó vẫn là những câu hỏi mở, thách thức bạn đọc.



**Bài 21. [Phan Thành Việt]** Cho  $x, y, z > 0, xyz = 1$ . Tìm  $k$  tốt nhất để

$$\frac{x+y^2}{y+z^k} + \frac{y+z^2}{z+x^k} + \frac{z+x^2}{x+y^k} \geq 3.$$

**Ghi chú:** bất đẳng thức đúng với  $k = 1, 2, 3, 4$  nhưng sai với  $k = 5$ .

**Bài 22. [Mở rộng bất đẳng thức Jackgarfukel]**

1. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ k > 1 \end{cases}$  và  $C_k = \max \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{k}}, \frac{(k-1)^k + k^k (k-1)}{k^k (k-1)} \right)$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{k}}} \leq C_k (a+b+c)^{\frac{k-1}{k}} \quad (\text{với } k=2, \text{ chúng ta có bất đẳng thức Jackgarfukel})$$

2. Cho  $a, b, c > 0$  và  $q$  là hằng số thực dương. Tìm  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

3. Cho  $a, b, c, d > 0$ . Tìm số thực  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

**Bài 23. [Cậu bé quàng khăn đỏ - MnF]** Cho  $a, b, c > 0, abc = 1$ . Tìm  $k$  tốt nhất để

$$\frac{a}{b^k+2} + \frac{b}{c^k+2} + \frac{c}{a^k+2} \geq 1$$

**Ghi chú:** Bất đẳng thức đúng với  $k = 4$  nhưng sai với  $k = 5$ . Lưu ý rằng khi  $k$  gần với giá trị tốt nhất thì  $a, b, c$  chạy tới ba giá trị lệch nhau và lệch biên.

**Bài 24. [Dương Đức Lâm]** Cho  $a, b, c \geq 0; a+b+c=3$ . Tìm số dương  $k$  tốt nhất để

$$\frac{ab}{k+a^2} + \frac{bc}{k+b^2} + \frac{ca}{k+c^2} \leq \frac{3}{k+1}$$

**Ghi chú:** Về hình thức, bài toán này gần giống với bài toán 3.5 của §18 (Phương pháp dồn biến), và ở đó ta đã phải sử dụng kỹ thuật dồn biến bằng hàm số rất vất vả. Tuy nhiên bài toán ở trên lại là bài toán hoán vị và đã khó hơn gấp nhiều lần. Cũng như bài 23, đẳng thức xảy ra ở bài này cũng lệch tâm và lệch biên.

**Bài 25. [Dương Đức Lâm]** Cho  $a, b, c \geq 0; a+b+c=3$  và  $k > 0$ .

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{1}{a^2+b+k} + \frac{1}{b^2+c+k} + \frac{1}{c^2+a+k}$

**Ghi chú:** Xét trường hợp riêng  $k=1$ , bằng phương pháp dồn biến bạn Võ Quốc Bá Cẩn đã tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức xấp xỉ 0.9168... là nghiệm của một phương trình bậc cao với những tính toán rất phức tạp; còn giá trị lớn nhất thì có thể dự đoán xấp xỉ 1.3532... bằng máy tính và rất khó có thể tìm được một đánh giá thích hợp vì đẳng thức xảy ra khi ba biến lệch nhau và lệch biên (không có biến nào bằng 0).

**Bài 26. [Phan Thành Việt]** Xét tập hợp  $D$  gồm  $n$  số thực dương thỏa mãn  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} = n+1$ .

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$  trên  $D$ .

**Ghi chú:** Lớp bài toán không thuần nhất thuộc dạng này còn rất nhiều và ngay cả với những bài toán đối xứng nó cũng ẩn chứa những khó khăn nhất định.

**Bài 27. [Phạm Kim Hùng]** Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a + b + c = 1$  và các số thực  $r, s$ .

Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của  $a^r b^s + b^r c^s + c^r a^s$ .

**Ghi chú:** Bài toán này đã xuất hiện hơn 3 năm trên các diễn đàn thảo luận, tuy nhiên, cho đến nay vẫn chỉ có những lời giải cho một số trường hợp đặc biệt.

**Bài 28. [Phạm Kim Hùng]** Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\frac{a+kb}{b+kc} + \frac{b+kc}{c+ka} + \frac{c+ka}{a+kb}$  với  $a, b, c, k > 0$

**Ghi chú:** Với  $k = 1$  thì ta có bất đẳng thức  $AM - GM$ , với  $k = 2$  bài toán có một lời giải khá đẹp. Trong trường hợp tổng quát, chúng ta chưa có lời giải trọn vẹn.

Thông thường, sau khi một bất đẳng thức được chứng minh, ta thường tìm cách tham số hóa nó và đặt ra các bài toán tìm hằng số tốt nhất để bài toán vẫn đúng, bài 21, 23, 24 là những điển hình. Việc đặt ra các câu đố như thế thực sự là những thách thức lớn với những phương pháp hiện có. Tất nhiên, những câu đố có hình dạng quá phức tạp sẽ bị bỏ qua, và người ta sẽ chỉ tập trung vào những bài toán có dạng đơn giản và đẹp dễ nhất. Các bài toán 27 và 28 là những ví dụ rất tốt. Trên thực tế kể từ lúc chúng được đặt ra, đã có rất nhiều phương pháp mới ra đời, nhưng vẫn chưa đủ để giải quyết triệt để, và vì thế vẫn đang cần những cố gắng tìm tòi tiếp theo.

Các bạn thân mến! Vậy là chúng tôi đã trình bày tất cả những gì mình muốn gửi gắm tới các bạn. Đó là những kiến thức rất cơ bản về bất đẳng thức, những nền tảng vững chắc để các bạn vừa có thể tiếp tục tìm tòi sâu hơn về thế giới của các dấu lớn hơn nhỏ hơn, vừa có thể tìm được những ứng dụng trong các bài toán thực tế. Đó là những tư tưởng và những tìm tòi rất nghiêm túc cả về lý thuyết lẫn thực hành của nhiều tác giả. Các tư tưởng ấy đã được phát triển một cách triệt để. Và cũng nhờ đó nó trở thành những phương pháp đẹp dễ nhất hiện nay. Chúng tôi hi vọng rằng tinh thần sáng tạo ấy sẽ được các bạn tiếp tục và phát triển lên những tầng cao hơn. Trong Toán học, không chỉ có riêng bất đẳng thức, nhưng để có thể học và làm toán tốt, thì tinh thần sáng tạo là yếu tố không thể thiếu. Một mong mỏi lớn của chúng tôi khi bắt tay thực hiện cuốn sách này là phải làm sao xây dựng được một cuốn từ điển bất đẳng thức sơ cấp dành cho tất cả các đối tượng bạn đọc. Quả thực chúng tôi đã cố gắng hết sức để thể hiện được tâm nguyện đó trên từng trang sách. Nhưng qua thời gian chúng tôi nhận thấy việc truyền được cảm hứng sáng tạo và tinh thần học tập toán học tới các bạn đọc giả đã là một cái gì đó lớn lao hơn như thế rất nhiều. Vì vậy chúng tôi hi vọng các bạn đọc giả sẽ đón nhận những kiến thức được trình bày một cách chủ động và tích cực nhất có thể. Có như thế cuốn sách này mới thực sự có ích. Chúc các bạn thành công!

## Lời kết

*"Non sông Việt Nam có trở nên vẻ vang hay không, dân tộc Việt Nam có được vẻ vang sánh vai các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần rất lớn ở công học tập của các cháu."*

(Hồ Chí Minh nhân dịp khai trường đầu tiên của nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa năm 1946)

*Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics.*

Simeon Poisson

*"Nhà giáo không phải là người nhồi nhét kiến thức mà đó là công việc của người khơi dậy ngọn lửa cho tâm hồn."* (Uyliam Batơ Dit)

### 1. Sự ra đời của cuốn sách:

Chúng ta đã đi đến trang cuối cùng của một cuốn sách đã được tác giả hoài thai **20 năm** và được chấp bút trong gần **10 năm**. Trong suốt cuộc hành bút này, cảm xúc của tác giả cũng được thay đổi theo thời gian. Bắt đầu là khát vọng tuổi trẻ với ước muốn được viết về mảng kiến thức đam mê nhất từ khi còn là học sinh phổ thông. Tiếp đó là sự bỏ trợ quảng bá hình ảnh cá nhân để dạy luyện thi đại học với một cuốn sách đầu tay: ***Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh Bất đẳng thức*** do Nhà xuất bản TP.HCM phát hành năm 1993. Sau này cảm xúc được bổ sung đầy đủ hơn khi được biết về sự đầu tư công phu của các gia đình có con em đam mê học toán với mong muốn trở thành học sinh giỏi thi quốc gia, quốc tế. Nhiều gia đình tốn rất nhiều tiền của lo cho con ăn học nhiều thầy khác nhau, thậm chí có gia đình phải thế chấp nhà để lấy tiền cho con học luyện thi Toán quốc tế. Như vậy đằng sau của tám huy chương là: "Học sinh Việt Nam đã mất rất nhiều thời gian chỉ để học được một kiến thức hay một kỹ năng phục vụ cho một cuộc thi nào đó", khác với học sinh nước ngoài ***với cùng một đơn vị thời gian*** ngoài việc tự học chuyên sâu môn học yêu thích họ còn được nắm bắt nhiều kiến thức kỹ năng bổ ích thiết thực và gần gũi với cuộc sống. Phải chăng với ***các học sinh giỏi*** chúng ta không nên dạy học theo kiểu ***"nhồi giết kiến thức"***, cho vài ba bài toán để học sinh nghĩ gần hết buổi học rồi chữa mà nên dạy học theo ***"nhu cầu ăn kiến thức của học sinh"*** với phương thức đối thoại cởi mở: "Trao toàn bộ thông tin, tài liệu cho học sinh và hướng dẫn học sinh cách tiếp cận, xử lý thông tin rồi cách mở rộng vấn đề, cách tạo ra các vấn đề mới". Nhận thức là như vậy nhưng việc biến thành hành động lại liên quan trực tiếp đến một sự kiện, đó là chuyến viếng thăm của ***Tổng thống Mỹ Bill Clinton*** sang thăm Việt Nam từ **16/11/2000** đến **20/11/2000**. Tác giả đã dõi theo sự hiện diện của Tổng thống Mỹ khi đến thăm Văn Miếu Quốc Tử Giám, gặp gỡ thân thiện với người dân Hà Nội tại khu phố cổ buôn bán Hàng Đào và đặc biệt vào lúc **16h ngày 17/11/2000** khi gặp gỡ với các giảng viên và sinh viên **ĐH QGHN** Tổng thống đã phát biểu: ***"We cannot change the past. What we can change is the future"*** tạm dịch là: ***"Chúng ta không thể thay đổi được quá khứ, cái mà chúng ta thay đổi là tương lai"***.

Chính câu nói này đã làm tác giả rời bỏ ***"mảnh đất màu mỡ luyện thi đại học"*** từ năm 2001 cho đến nay để quyết tâm viết một cuốn sách giới thiệu nền Toán học phổ thông của Việt Nam ra thế giới và cũng là thông điệp mong muốn được đáp lại thiện chí của Tổng thống Bill Clinton: ***"Khép lại quá khứ đau thương để hướng đến tương lai"***.

Với ý định giới thiệu cuốn sách không chỉ mang ý nghĩa thuần túy về Toán học mà còn mang ý nghĩa về sự liên tưởng với tư duy cuộc sống, từ năm 2003 tác giả đã sưu tầm và mua các đoạn phim tư liệu để tạo ra một video clip dài 60 phút giới thiệu về cuốn sách.

## 2. Vai trò của Toán học trong cuộc sống

Có hai quan điểm cực đoan đối lập nhau về quan niệm vai trò của Toán học trong đời sống xã hội. Một quan điểm suy tôn Toán học là ông vua của các ngành khoa học đến mức đồng nhất hai khái niệm thông minh có nghĩa là phải giỏi toán. Một quan điểm cổ súy cho các ngành kinh tế, tài chính, quản trị kinh doanh mà xem nhẹ vai trò của Toán học. Về quan điểm đầu tiên chúng ta có thể thấy sự lạc hậu khi không cập nhật thông tin nắm bắt kiến thức mới. Các nhà khoa học **Howard Gardner, Thomas Armstrong** đã chỉ ra có bảy loại hình thông minh mà khả năng thông minh về tính toán chỉ là một trong bảy loại hình này. Tất nhiên thông minh về Toán học là loại hình thông minh chủ đạo nên dễ có thể nắm bắt nhanh chóng khi chuyển sang các lĩnh vực khác. Người giỏi Toán là người có khả năng suy luận logic tốt, tính toán cẩn thận và kiên trì suy nghĩ khi gặp tình huống khó, nắm vững những khái niệm, nguyên tắc trừu tượng cơ bản để có thể áp dụng chúng vào những bài toán cụ thể. Những đức tính đó là yếu tố cho việc thành công trong mọi lĩnh vực cần đến đầu óc (trừ các lĩnh vực nghệ thuật?). Về quan điểm xem nhẹ vai trò của Toán học cũng bộc lộ sự tiếp cận trí thức một cách hời hợt mang nặng văn hóa tiêu dùng kiểu mĩ ăn liền. Toán học không chỉ hiện diện phổ biến với các phép toán số học trong các giao dịch, buôn bán thông thường mà nó luôn ẩn hiện với vai trò công cụ không chỉ trong các ngành khoa học như Vật lý, Thiên văn, Công nghệ thông tin, Hóa học, Sinh học mà còn được ứng dụng rộng rãi trong các ngành Y học, Kinh tế, Tài chính, Ngân hàng và cả ngành Luật pháp... Để có thể phóng được các tàu vũ trụ **Apollo** và lắp ghép chúng trong không gian thì phải có sự đóng góp của phương trình vi phân, đạo hàm riêng, hình học vi phân, lý thuyết biểu diễn, đại số toán tử,... trong Vật lý học hiện đại. Để có thể trao đổi mua bán qua Internet mà không sợ bị trộm cắp tài khoản thì phải cần đến ứng dụng của lý thuyết mã hóa thông tin với những ứng dụng của toán rời rạc, lý thuyết số và hình học đại số. Các nhà kinh tế học được giải Nobel gần đây đều có liên quan đến môn kinh tế lượng với sự đóng góp quan trọng của các mô hình toán học. Những điều trên mọi người có thể nghe đâu đó đã đề cập đến nhưng chúng ta chưa thấy hết vai trò ẩn của Toán học trong tư duy logic áp dụng cho các vấn đề xã hội. Nhân đây tôi xin kể hai câu chuyện vui về tư duy logic. Chuyện thứ nhất là lần tôi được mời làm giám khảo cho cuộc thi nữ sinh thanh lịch của một trường đại học tại Hà Nội. Ở phần thi ứng xử tôi có đặt một câu hỏi cho một nữ sinh với nội dung: *"Theo em điều kiện cần để một người đàn ông lấy được một người vợ trẻ là gì?"*. Rất nhanh chóng nữ sinh đã trả lời với nhiều điều kiện: *"người đàn ông đó phải tài giỏi, có học vị, địa vị, có nhà, tài sản, có sức khỏe..."* Khi đó tôi nói đây là câu hỏi logic chứ không phải là màn thi hiểu biết xã hội. Điều kiện cần là điều kiện chung nhất để cấu thành nên một sự vật hiện tượng nào đó mà nếu tước bỏ đi thì không thể tạo ra được sự vật hiện tượng này nữa. Em đưa ra 1 loạt các điều kiện nhưng đó không phải là điều kiện bao quát chung nhất vì vẫn có thể 1 người lái xe ôm không có tài sản, địa vị, học vị mà vẫn có vợ là các tiếp viên trẻ, đẹp. Ở đây điều kiện cần để 1 người đàn ông lấy được cô *vợ trẻ* rất đơn giản *"Ông ấy phải già đã!"* bởi vì nếu *mất thuộc tính già* thì không thể có khái niệm *lấy được vợ trẻ* được! Tất nhiên đây chỉ là điều kiện cần mà không phải là điều kiện đủ vì thực tế cho thấy nếu chỉ có mỗi thuộc tính *"già"* thôi thì rất khó lấy được vợ chứ chưa nói đến lấy được vợ trẻ (đầy triển vọng trăm năm cô đơn)

Câu chuyện thứ hai là một cô bạn gái lâu ngày gặp lại mời tôi đến nhà ăn trưa cùng gia đình. Khi đó tôi nói: *"Được rồi nhưng nếu trời mưa thì anh không đến đâu nhé!"*. Lần gặp lại cô ấy đã trách tôi là: *"Mất lịch sự"* vì hôm đó trời trong xanh, nắng dịu dàng mà anh đã sai hẹn không đến và cũng không gọi điện làm cả nhà chờ cơm mãi. Tôi cười và đáp lại: Anh đâu có sai hẹn, khi đã nói: *"Nếu trời mưa thì anh không đến"* không có nghĩa là *"Trời nắng chắc chắn anh sẽ đến"* mà chỉ tương đương với câu: *"Khi anh đến thì trời chắc chắn không mưa"*.

Hai câu chuyện trên là một minh chứng thú vị về sử dụng tư duy logic trong ngôn ngữ. Mở rộng ra nếu chúng ta phải tư vấn soạn thảo các văn bản pháp luật, hợp đồng kinh tế cho các đối tác thì vai trò của tư duy logic là rất quan trọng. Chẳng hạn ta biến thể câu chuyện thứ hai thành một điều kiện trong hợp đồng giao nhận hàng nhập khẩu giữa hai bên: *"Nếu trời mưa thì bên A không giao hàng tại chân công trình cho bên B"*, như vậy khi trời nắng bên A vẫn có thể giao nhận tại một chỗ khác cách xa hàng trăm kilômét (tại Cảng chẳng hạn) mà vẫn không bị sai hợp đồng!...

Hiện nay tại Mỹ và các nước phương Tây nghề luật sư là nghề có thu nhập cao nhất và mặc dù chúng ta có nhiều người làm Giáo sư tại các trường Đại học, Viện nghiên cứu nhưng không có một ai trở thành một luật sư nổi tiếng tại các nước này. Bởi có lẽ điều kiện cần để trở thành luật sư giỏi là phải có năng khiếu Toán học và ngôn ngữ nhưng những người Việt Nam có khả năng này đều đi vào các ngành khoa học tự nhiên mà quên đi mất ngành Luật đầy hấp dẫn. Trong nước cũng vậy chúng ta cũng cần rất nhiều người có tư duy logic hoạt động trong các lĩnh vực xã hội để kiện toàn các văn bản pháp luật hoặc tư vấn cho các đối tác trong nước kí kết hợp đồng kinh tế với các đối tác nước ngoài mà không cần phải thuê luật sư nước ngoài tư vấn...

Chúng tôi vừa nêu ra vai trò của Toán học dưới nhiều khía cạnh khác nhau với kết luận

- Toán học đóng vai trò nền tảng then chốt để phát triển khoa học tự nhiên cũng như là sợi dây logic để kết nối các vấn đề xã hội.
- Không nên và không thể đồng nhất chỉ có một loại hình trí thông minh là Toán học
- Có rất nhiều con đường rộng mở cho những người có tư duy Toán học. Những người xuất sắc nhất có thể tiên phong đi đầu trong các lĩnh vực sáng tạo của các chuyên ngành tự nhiên. Những người tiếp sau có thể sử dụng tư duy Toán học vào các ngành nghề xã hội như: Y tế, Kinh tế, Tài chính, Ngân hàng, Xây dựng, Môi trường... và ngành Luật.

### 3. Vai trò của bất đẳng thức ở bậc học phổ thông

Bất đẳng thức được giới thiệu cho học sinh ngay từ lớp 4, 5 bậc Tiểu học với khái niệm so sánh phân số. Ở lớp 6 là sự so sánh các lũy thừa với số mũ tự nhiên. Ở lớp 7, 8 là so sánh các biểu thức đại số dạng đa thức, phân thức. Ở lớp 9, 10 học sinh được giới thiệu bất đẳng thức *Côsi* (AM – GM), *Buniakowski* (CBS) (2 số rồi đến  $n$  số) để có thêm công cụ chứng minh bất đẳng thức cho các biểu thức chứa căn. Ở lớp 11, 12 các em được trang bị thêm phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng đạo hàm, tích phân và các phương pháp tham khảo: Tam thức bậc hai; Hình học, Vectơ và Lượng giác...



Nhìn tổng quát trong chương trình Toán phổ thông ta có thể nói bất đẳng thức đóng vai trò rất quan trọng trong việc phát triển tư duy Toán học nói riêng và phát triển tư duy logic nói chung. Bạn đọc có thể đồng cảm với nhận định này khi đã đọc qua hơn 1000 trang trong cuốn sách này. Mặc dù có thể nói đây là một cuốn sách viết rất công phu và chi tiết giới thiệu các phương pháp đặc sắc nhất chứng minh bất đẳng thức đại số, nhưng nói chung trừ các học sinh giỏi quốc gia, quốc tế thì những bạn đọc còn lại vẫn gặp khó khăn khi giải các bất đẳng thức không tầm thường có trong sách hoặc nằm ngoài sách. Sự hấp dẫn của bất đẳng thức chính là tính đa dạng không lặp lại nằm trong tư tưởng của những người đặt ra các đề toán mới. Tất nhiên nếu chúng ta dùng các công cụ mạnh được giới thiệu trong sách như: *Muirhead, Đạo hàm, SOS, ABC, MV, EV, RCF, LCF, GLA, DAC...* thì hầu như mọi bài đều có thể giải được. Ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh đến tính hấp dẫn của bất đẳng thức còn được hiểu không chỉ về độ khó mà còn được nhìn nhận theo khía cạnh sử dụng công cụ hạn chế để chứng minh. Do có rất nhiều công cụ khác nhau để chứng minh bất đẳng thức nên đòi hỏi người giải phải nhận diện chính xác đặc điểm rồi từ đó lựa chọn công cụ cho phù hợp. Bất đẳng thức là một lĩnh vực khó nhưng cái khó không nằm ở gánh nặng về lượng kiến thức mà ở yêu cầu về óc quan sát, linh cảm tinh tế và sức sáng tạo dồi dào của người giải.

#### 4. Ý nghĩa của việc ứng dụng tư duy bất đẳng thức vào cuộc sống

Trong cuốn sách này ngoài việc giới thiệu một cách đầy đủ những viên kim cương trong bất đẳng thức thì điều tác giả tâm đắc nhất là: "*Kỹ thuật chọn điểm rơi*" với tính triết học được thể hiện trong câu chuyện về bộ phim "*Têhêran 43*" đã được giới thiệu ở phần mở đầu cuốn sách. Tuy nhiên dù bạn đọc có thể lĩnh hội đầy đủ các phương pháp để có thể giải quyết mọi bài bất đẳng thức thì vẫn chỉ là một kết quả khiêm tốn (không khác gì một người chơi giỏi cờ vua) nếu các bạn không vận dụng được ảnh hưởng của "*Kỹ thuật chọn điểm rơi*" sang các lĩnh vực dự báo, đánh giá hay so sánh những sự vật hiện tượng diễn ra trong đời sống. Bởi vì Bất đẳng thức toán học là so sánh tĩnh còn đánh giá sự biến đổi trong cuộc sống là so sánh động và: "*Trong một thế giới vận động và biến đổi, con người vẫn nhận thức được những gì đã xảy ra hoặc đang xảy ra nhưng luôn gặp khó khăn khi đánh giá về những gì sẽ đến. Người ta trần trụi với những bất đẳng thức tương lai khi phải đưa ra những quyết định cho cuộc đời mình và có khi cho vận mệnh của cả một dân tộc. Những ngã đường mở ra trước mắt, ngã đường nào dẫn đến thành công, ngã đường nào sẽ gặp thất bại. Chỉ khi thời gian qua đi con người mới hiểu được tính đúng, sai của quyết định trong quá khứ.*". Chúng ta có thể lấy thêm những ví dụ điển hình minh họa cho vấn đề dự báo để chọn điểm rơi trong cuộc sống.

– Ngày xưa các gia đình và các thiếu nữ thôn quê luôn khát khao được Vua tuyển làm cung phi, nhưng họ đâu ngờ rằng do vua có hàng trăm cung tần mỹ nữ nên mới có câu nói: "*cuộc đời của người cung phi chỉ là cái may mắn dẫn đến niềm cô đơn tẻ tái!*"

– Không ai có thể ngờ rằng, sự mở đầu hôn lễ huy hoàng của Công nương *Diana* với Thái tử Vương quốc Anh *Charles* lại dẫn đến một kết cục đầy bi thảm.

– Ngày 7/11/1917 Chủ nghĩa Mác–Lênin đã đột phá thành công với cách mạng Nga, mở toang cánh cửa con đường tiến thẳng lên Chủ nghĩa xã hội cho nước Nga và nhiều dân tộc khác trên thế giới. Năm 1991, Mikhail Gorbachov với chính sách cải tổ đã nhấn chìm con đường tiến lên Chủ nghĩa xã hội của nước Nga và mở đầu cho sự sụp đổ hệ thống các nước xã hội chủ nghĩa ở Đông Âu. Nước Nga đã mất 74 năm đi theo con đường của chủ nghĩa xã hội và giờ đây họ đã quay về con đường phát triển của chủ nghĩa tư bản...

– Sau thất bại nặng nề trong Đại chiến thế giới lần thứ II, giới lãnh đạo Nhật chia làm 2 phe theo 2 đường lối xây dựng đất nước. Một đường lối dẫn ví dụ thảm họa chiến tranh và bom nguyên tử để xây dựng các nhà máy ở trong núi cho an toàn (thời gian xây dựng 5 – 7 năm). Một đường lối khác tính đến chu kỳ xảy ra chiến tranh để thuyết phục xây dựng nhanh các nhà máy tại các thành phố ven biển nhằm giảm chi phí xuất nhập khẩu tạo gia tốc tăng trưởng đột phá (thời gian xây dựng 1 – 2 năm). Nhật Hoàng đã sáng suốt chọn phương án hai và thực tiễn đã chứng minh quyết định này đúng khi chỉ sau 15 năm nước Nhật đã vươn lên trở thành cường quốc thứ hai trên thế giới về kinh tế.

### 5. So sánh giá trị sản phẩm để suy ngẫm trong nền kinh tế tri thức

Việt Nam đứng thứ hai thế giới về xuất khẩu gạo và cà phê, đứng thứ nhất về xuất khẩu hạt tiêu và hạt điều nhưng GDP của Việt Nam xếp hạng 123 trên thế giới. Nhưng thông điệp mà nhà báo *Thomas Friedman* của tờ báo *New York Times* muốn đưa ra là khái niệm dùng trọng lượng và giá trị của sản phẩm để so sánh trình độ Quốc gia. Hãy xem một ví dụ: để thu được 500 USD, người ta có thể làm gì?

– Tập đoàn Than và Khoáng sản Việt Nam bán 5 tấn than đá.

– Nông dân ở Đồng bằng sông Cửu Long bán 2 tấn gạo.

– Trung Quốc bán chiếc xe gắn máy trọng lượng 100kg.

– Hãng Sony bán chiếc tivi trọng lượng 10kg.

– Hãng Nokia bán chiếc điện thoại trọng lượng 0,1kg.

– Hãng Intel bán con chip máy tính trọng lượng 0,01kg.

– Hãng Microsoft bán một phần mềm trọng lượng 0kg.

Còn rất nhiều những sản phẩm có giá trị cao nhưng trọng lượng chỉ là 0kg như các phát minh sáng chế hay giá trị thương hiệu... Hàm lượng tri thức càng cao, trọng lượng sản phẩm càng nhẹ. Đo lường xuất khẩu bằng tấn hàng đã trở nên vô nghĩa. Giá trị sản phẩm được đo bằng hàm lượng chất xám và giá trị kinh tế chứ không phải bằng trọng lượng. Quan trọng hơn nữa, đó là bao nhiêu giá trị gia tăng và bao nhiêu lợi nhuận.

**Kết luận:** Xã hội là một giá trị tổng hòa, sự phát triển của các cá nhân hay của các ngành nghề đều phải hướng đến mục đích phục vụ sự phát triển của xã hội. Trong sự biến đổi vận động muôn màu của xã hội, Toán học luôn đóng vai trò nền tảng then chốt để phát triển khoa học tự nhiên cũng như là sợi dây logic để kết nối các vấn đề xã hội. Rèn luyện tư duy bất đẳng thức cũng là rèn luyện tư duy toán học và là những bước đi đầu tiên nhưng rất quan trọng đối với mỗi học sinh trong việc chuẩn bị hành trang tư duy để bước vào nền kinh tế tri thức.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2009

Trần Phương

## PHỤ LỤC

### I. THỐNG KÊ TÁC GIẢ CÁC CHUYÊN ĐỀ VÀ BÀI VIẾT

| CHƯƠNG I: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀN                    |                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| §1. Bất đẳng thức AM – GM và các kỹ thuật chọn điểm rơi                     | Trần Phương                     |
| §2. Bất đẳng thức Cauchy – BunhiaCôpski – Schwarz và kỹ thuật chọn điểm rơi | Trần Phương và Võ Quốc Bá Cẩn   |
| §3. Bất đẳng thức Holder và kỹ thuật chọn điểm rơi                          | Trần Phương và Võ Quốc Bá Cẩn   |
| §4. Bất đẳng thức Minkowski và kỹ thuật sử dụng                             | Trần Phương                     |
| §5. Bất đẳng thức Chebyshev và kỹ thuật sử dụng                             | Trần Phương                     |
| CHƯƠNG II. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CẠN ĐẠI                   |                                 |
| §6. Bất đẳng thức hoán vị và kỹ thuật sử dụng                               | Trần Phương                     |
| §7. Bất đẳng thức Schur và kỹ thuật sử dụng                                 | Trần Phương và Lê Trung Kiên    |
| §8. Định lý Muirhead và bất đẳng thức đối xứng                              | Trần Phương và Hoàng Trọng Hiền |
| CHƯƠNG III. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH                  |                                 |
| §9. Định lý Fermat và ứng dụng trong bất đẳng thức                          | Trần Phương                     |
| §10. Định lý Lagrange và các ứng dụng trong bất đẳng thức                   | Trần Phương                     |
| §11. Bất đẳng thức Bernoulli và các ứng dụng                                | Trần Phương                     |
| §12. Bất đẳng thức Jensen và kỹ thuật sử dụng                               | Trần Phương                     |
| §13. Bất đẳng thức Karamata và kỹ thuật sử dụng                             | Trần Phương                     |
| §14. Bất đẳng thức với các hàm số lồi bên phải và lõm bên trái              | Vasile Cirtoaje                 |
| §15. Bất đẳng thức Popoviciu                                                | Vasile Cirtoaje                 |
| §16. Bất đẳng thức trong tích phân Riman                                    | Trần Phương                     |



| CHƯƠNG IV. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI |                                     |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| §17. Phương pháp phân tích tổng bình phương (SOS)          | Trần Tuấn Anh<br>và Trần Phương     |
| §18. Phương pháp đơn biến (MV)                             | Phan Thành Việt và<br>Lê Trung Kiên |
| §19. Phương pháp ABC                                       | Nguyễn Anh Cường                    |
| §20. Phương pháp hình học hóa đại số (GLA)                 | Bùi Việt Anh                        |
| §21. Phương pháp EV                                        | Vasile Cirtoaje                     |
| §22. Phương pháp chia để trị (DAC)                         | Phan Thành Việt                     |
| CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC                 |                                     |
| §23.1. Về một dãy bất đẳng thức bậc ba và ứng dụng         | Cao Minh Quang                      |
| §23.2. Đối biến số để sáng tạo và chứng minh bất đẳng thức | Phan Thành Việt                     |
| §23.3. Phương pháp đánh giá hàm số tại biên                | Trần Phương<br>Phạm Văn Thuận       |
| §23.4. Phương pháp tiếp tuyến chứng minh bất đẳng thức     | Lê Phi Hùng                         |
| §23.5. Phương pháp hệ số bất định                          | Võ Quốc Bá Cẩn                      |
| §23.6. Các phép biến đổi theo các độ dài trong tam giác    | Trần Phương                         |
| §23.7. Đánh giá các hệ số của đa thức bằng định lý Viète   | Trần Phương                         |
| §23.8. Bất đẳng thức không thuần nhất                      | Nguyễn Quốc Hưng Nguyên             |
| §23.9. Phương pháp SS                                      | Bạch Ngọc Thành Công                |
| §23.10. Các tổng đối xứng và bất đẳng thức hoán vị         | Bạch Ngọc Thành Công                |
| §24.1. Các bài toán có nhiều lời giải                      | Trần Phương                         |
| §24.2. Về một bất đẳng thức thi toán quốc tế               | Trần Phương                         |
| §24.3. Câu chuyện về bất đẳng thức Nesbitt - Shapiro       | Trần Phương                         |
| §24.4. Bất đẳng thức Jack Garfunkel và một số mở rộng      | Lê Hữu Điền Khuê                    |
| §24.5. Các bất đẳng thức có lời giải hay                   | Trần Phương                         |
| CHƯƠNG VI. TỔNG KẾT                                        | Trần Phương                         |

## II. THỐNG KÊ TÊN TÁC GIẢ CÁC BÀI TOÁN THAM KHẢO

(không thống kê các bài toán của tác giả Trần Phương)

*Chú thích kí hiệu các bài toán:* 21.9: Bài toán 9 của §21; 7.2.17: Bài toán 17 của §7.2;  
1.II.3: Bài toán 3 của mục II §1; 1.2.III.4: Bài toán 4 của mục III §1.2

### CHƯƠNG I. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CỎ ĐIỀN

**Dương Đức Lâm:** 1.V.8, 1.V.9, 1.VI.7, 1.VI.8, 1.VII.12, 1.VIII.7, 1.XI.10, 1.XII.9, 1.XV.4, 1.XVI.22, 1.XVI.24, 1.XVI.27, 1.XVI.32, 1.XVI.34, 1.XVI.36, 1.XVI.38, 1.XVI.42, 1.XVI.46, 1.XVI.52, 1.XVI.53, 1.XVI.54, 1.XVI.56, 1.XVI.59, 1.XVI.61, 1.XVI.65, 2.2.4, 2.3.I.6, 2.3.I.9, 2.3.III.15, 2.3.III.16, 2.3.III.23, 2.3.III.25, 2.IV.36, 2.IV.38, 2.IV.40, 2.IV.41, 2.IV.44, 2.IV.45, 2.IV.50; 3.2.I.13, 3.2.IV.9, 3.2.IV.11, 3.2.IV.14, 3.2.IV.15, 3.2.IV.17, 3.2.IV.19, 3.2.IV.23, 3.2.IV.30; 5.I.16.

**Trần Quốc Luật:** 1.VI.7, 1.VI.9, 1.VI.11, 1.X.3, 1.X.14, 1.XVI.40, 1.XVI.41, 3.2.IV.16.

**Võ Quốc Bá Cẩn:** 1.XVI.25, 2.2.16, 2.3.III.2, 2.3.III.5, 2.3.III.6, 2.3.III.20, 2.IV.32, 2.IV.39, 3.2.II.9, 3.2.IV.18,

**Phạm Kim Hùng:** 1.VII.14, 1.XI.7; 2.2.7, 2.3.III.8, 2.IV.47; 3.2.I.11; 3.2.II.6, 5.I.17,

**Vasile Cirtoaje:** 1.VIII.9, 1.IX.10, 1.XVI.30, 1.XVI.48; 2.2.8, 2.2.19, 2.IV.48; 3.2.II.2, 3.2.IV.25; 5.I.9, 5.I.19, 5.I.22.

**Darij Grinberg:** 1.IV.6, 1.IX.5; 2.2.13, 2.3.III.24, 2.3.III.26, 5.I.20.

**Michael Rozenberg:** 2.IV.46; 3.2.IV.20, 3.2.IV.21.

**Phan Thành Nam:** 1.XV.7, 1.XVI.23; 2.2.15, 2.3.III.9.

**Phan Thành Việt:** 1.XII.13; 3.2.II.1, 3.2.II.4, **Trần Tuấn Anh:** 1.I.11, 1.V.2, 1.XII.12.

**Trần Nam Dũng:** 1.IX.4, 1.XVI.26.; **Phạm Hữu Đức:** 1.XV.3; 2.2.17, 2.3.III.18

**Phạm Văn Thuận:** 1.XV.8, 1.XVI.33.; **Mircea Lascu:** 1.VI.4; **Lê Trung Kiên:** 1.IX.9

**Phạm Thành Tín:** 1.X.9; **Gabriel Dospinescu:** 1.XVI.43.; **Nayel:** 1.XVI.60.

**Bạch Ngọc Thành Công:** 1.XVI.57 ; **Samin Riasa:** 2.2.18 ; **Jack Garfunkel:** 2.3.III.1

**Nguyễn Việt Anh:** 2.3.III.4; **Nguyễn Anh Tuấn:** 2.3.III.17; **Vũ Đình Quý:** 2.3.III.21,

**Nguyễn Văn Thạch:** 2.IV.37; 3.2.IV.29 ; **Harazi:** 2.IV.42 ; **Fedor Petrov:** 2.IV.43.

**Sung Yoon Kim:** 2.IV.49 ; **Hojoo Lee:** 3.2.I.12 ; **Alexey Gladkich:** 3.2.I.15.

**Tripleth:** 3.2.II.3 ; **Parkdoosung:** 3.2.II.5 ; **Lê Hữu Điền Khuê:** 3.2.II.8

**CHƯƠNG II. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CẶN ĐẠI**

**Vasile Cirtoaje:** 7.2.2, 7.2.10, 7.2.11, 7.2.12, 7.2.20, 7.2.21, 7.3.III.4, 7.3.III.18, 7.3.IV.35, 7.3.IV.37, 7.3.IV.39.

**Dương Đức Lâm:** 7.2.17, 7.3.III.3, 7.3.III.6, 7.3.IV.23, 7.3.IV.26, 7.3.IV.28, 7.3.IV.30.

**Phạm Kim Hùng:** 7.2.13, 7.3.III.5, 7.3.III.6, 7.3.III.9, 7.3.IV.24, 7.3.IV.25.

**Phạm Hữu Đức:** 7.2.5, 7.2.15, 7.3.III.17, 7.3.IV.23.

**Võ Quốc Bá Cẩn:** 7.2.6, 7.2.14, 7.2.19, 7.3.III.8.

**Nguyễn Thúc Vũ Hoàng:** 7.3.III.2, 7.3.III.7, 7.3.III.11.

**Phạm Sinh Tân:** 7.3.III.10, 7.3.III.15, 7.3.III.19.

**Ji Chen:** 7.2.4 ; **Walther Janous:** 7.2.7 ; **Hojoo Lee:** 7.2.8, 7.2.9.

**Nguyễn Anh Tuấn:** 7.3.III.16 ; **Darij Grinberg:** 7.3.IV.27.

**CHƯƠNG III. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH**

**Vasile Cirtoaje:** 14.2.1, 14.2.2, 14.2.3, 14.2.4, 14.2.5, 14.2.10, 14.2.12, 14.2.14, 14.2.16, 14.2.19, 14.2.21, 14.2.26, 14.2.28, 14.2.31, 15.5, 15.9.

**Jack Garfunkel:** 9.2.VI.5 ; **Trần Nam Dũng:** 10.2.VI.2;

**Phạm Kim Hùng:** 10.2.VII.9, 14.2.29.

**Marian Tetiva:** 14.2.27 ; **Bín Zhao:** 15.2; **Gabriel Dospinescu:** 15.7.

**CHƯƠNG IV. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI**

**Hojoo Lee:** 17.III.3, 17.III.23, 18.4.2, 19.III.4, 20.V.26,

**Phạm Kim Hùng:** 17.III.5, 17.III.6, 17.IV.5, 17.IV.25; 18.3.3, 18.4.6, 18.5.7, 18.7.4, 18.11.2, 18.XIII.6, 18.XIII.20, 18.XIII.29, 18.XIII.30, 18.XIII.42, 19.V.9, 20.V.13, 20.VII.4.5, 20.VII.4.10, 20.VII.4.19, 20.VIII.4, 20.VIII.6, 20.VIII.11, 21.11, 21.12, 21.34, 22.IV.1, 22.V.4, 22.VI.1, 22.VIII.8,

**Vasile Cirtoaje:** 17.III.9, 17.III.15, 17.III.16, 17.III.20, 17.III.24, 17.IV.14; 18.2.4, 18.XIII.12, 18.XIII.15, 19.II.15, 19.III.1, 19.III.19, 19.IV.6, 19.IV.7, 19.IV.9, 19.IV.10, 19.IV.6, 19.IV.8, 19.IV.9, 19.IV.13, 19.V.6, 19.V.12, 19.V.13, 19.V.14, 19.VI.9, 20.VII.4, 20.VII.4.3, 20.VII.4.7, 20.VII.4.13, 20.VIII.9, 20.VIII.10; 21.1, 21.3, 21.6, 21.9, 21.10, 21.11, 21.14, 21.15, 21.17, 21.18, 21.20, 21.21, 21.23, 21.24, 21.25, 21.26, 21.27, 21.28, 21.29, 21.31, 21.33, 21.34,

**Võ Quốc Bá Cẩn:**

17.III.12, 18.2.9, 18.XIII.34, 18.XIII.35, 19.III.7, 19.III.8, 19.VI.18, 19.VI.29,

- Nguyễn Văn Thạch:** 17.III.13, 17.III.14, 19.VI.18; **Trần Quốc Luật:** 17.IV.12,
- Dương Đức Lâm:** 17.III.17, 17.IV.3, 17.IV.4, 17.IV.5, 17.IV.8, 17.IV.9, 17.IV.13, 17.IV.15, 17.IV.17, 17.IV.18, 17.IV.22, 17.IV.23, 17.IV.24; 18.XIII.25, 18.XIII.26, 18.XIII.31, 18.XIII.32, 18.XIII.37, 18.XIII.48, 18.XIII.49, 19.II.10, 19.IV.11, 19.IV.12, 19.IV.13, 19.VI.19, 19.VI.25, 19.VI.27, 19.VI.28, 19.VI.30, 20.V.31, 20.VIII.5,
- Lê Trung Kiên:** 17.III.22, 18.2.9, 18.4.3, 18.7.1, 18.7.2, 18.10.5, 18.10.8, 18.10.12, 18.10.13, 18.10.14, 18.XIII.16, 18.XIII.18, 18.XIII.22, 18.XIII.33.
- Phạm Hữu Đức:** 17.III.21, 17.IV.20, 17.IV.21; **DarijGrinberg:** 17.IV.2, 19.II.9, 20.VII.4.9
- Michael Rozenberg:** 17.IV.16, 21.16; **Trần Nam Dũng:** 18.2.7, 19.IV.5, 21.32, 22.V.3,
- Nguyễn Anh Cường:** 17.IV.19; 19.II.1, 19.II.4, 19.II.6, 19.II.13, 19.II.16, 19.II.17, 19.III.17, 19.IV.2, 19.V.1, 19.V.2, 19.V.3, 19.V.8, 19.VI.5, 19.VI.7, 19.VI.8, 19.VI.13, 19.VI.16, 19.VI.17, 19.VI.20, 19.VI.21, 19.VI.23, 19.VI.24, 20.VI.9, 22.V.2,
- Phan Thành Nam:** 18.2.5, 18.2.6, 18.4.5, 18.5.3, 18.6.5, 18.11.1, 18.12.4, 18.13.1, 18.XIII.13, 18.XIII.41, 18.XIII.44, 18.XIII.45; 21.5, 22.V.3, 22.VIII.2,
- Phan Thành Việt:** 18.3.4, 18.12.3, 18.XIII.17, 18.XIII.38, 18.XIII.52, 18.XIII.55, 18.XIII.56, 18.XIII.58, 22.IV.2, 22.IV.3, 22.VI.2, 22.VI.4, 22.VIII.1, 22.VIII.3, 22.VIII.4, 22.VIII.6, 22.VIII.7, 22.VIII.9, 22.VIII.10,
- Bùi Việt Anh:** 19.III.5; 20.V.10, 20.V.11, 20.V.12, 20.V.13, 20.V.14, 20.V.15, 20.V.16, 20.V.17, 20.V.18, 20.V.19, 20.V.20, 20.V.21, 20.V.22, 20.V.23, 20.V.24, 20.V.27, 20.V.28, 20.V.29, 20.V.30, 20.V.31, 20.V.32, 20.V.33, 20.VI.6, 20.VI.7, 20.VI.8, 20.VII.3, 20.VIII.7,
- Jackgarfukel:** 18.4.4, 18.XIII.39, 18.XIII.40; **Nguyễn Minh Đức:** 18.5.1.
- Đào Hải Long:** 18.10.1; **Đinh Ngọc An:** 18.12.2; **Murray Klamkin:** 18.XIII.7.
- Trần Hồ Thanh Phú:** 18.XIII.57; **Mircea Lascu:** 19.2.11, 20.VII.4.2.
- Nguyễn Việt Anh:** 19.III.19; **Phạm Sinh Tân:** 19.III.20; **Nguyễn Anh Tuấn:** 19.III.22.
- Gabriel Dospinescu:** 19.V.7, 21.19; **Bodan:** 19.VI.1; **Vũ Đình Quý:** 19.VI.10, 20.V.4,
- Nguyễn Duy Khánh:** 20.V.8, 20.V.9; **W.I.Gridasov:** 20.VI.1; **Marian Tetiva:** 20.VII.4.2.
- Faruk Zejnulahi:** 20.VII.4.8; **Walther Janous:** 20.VII.4.18, 20.VIII.9, 21.14,
- Janos Suranyi:** 21.22; **Nguyễn Trường Thọ:** 22.V.1,
- "Cậu bé quà khăn đỏ": 22.VI.3, 22.VIII.5.
- CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC.**
- Nguyễn Thúc Vũ Hoàng:** 23.5.I.1, 23.5.I.4, 23.5.IV.2,

## DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [www.mathlinks.ro](http://www.mathlinks.ro)                      [www.kalva.demon.co.uk](http://www.kalva.demon.co.uk)
- [www.diendantoanhoc.net](http://www.diendantoanhoc.net)                      [www.mathnfriend.org](http://www.mathnfriend.org)
- C.H. Hardy, J.E. Littlewood, G.Polya – Inequalities, Cambridge University press (1952)
- D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink – Classic and New Inequalities in Analysis, Kluwer academic publishers.
- Titu Andresscu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinesu, Micea Lascu  
Old and New Inequality, Gil publishing house
- Vasile Cirtoaje – Algebraic inequalities, Gil publishing house 2006
- Titu Andresscu, ZumingFeng – Mathematical Olympiads 1998 – 2002  
Problem and Giải from Around the world.
- Titu Andresscu and Rawzvan Gelca – Putnam and Beyond, Springer (2007)
- J. Michael Steele – The Cauchy-Schwarz Master Class, Mathematical association of America, Cambridge University press (2004)
- Thomas J. Mildorf – Olympiad Inequalities (2006)
- IMO Shortlist, 1990 – 2007
- Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil – The William Lowell Putnam  
Mathematical Competition 1985 – 2000: Problems, Giảis and Commentary.
- Crux Mathematicorum & Mathematical Mayhem (Canada, 1995–2005)
- Kvant Magazine (Russia, 1990 – 2002)
- Gazeta Matematica (Romania, 1996 – 2004)
- Komal Mathematical Magazine (Hungary, 1996 – 2000)
- Mathematical Refletions (4/2006)
- Hojoo Lee – Topics in Inequalities (2005)
- Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (Việt Nam, 1990 – 2008)
- Tuyển tập các bài toán Olympic 30 - 4 (1999 – 2005)
- Phan Huy Khải – 500 Bài toán bất đẳng thức – Nhà xuất bản Hà Nội 1994
- Nguyễn Văn Mậu – Bất đẳng thức, định lý và áp dụng, Nhà xuất bản Giáo dục 2006
- Phạm Kim Hùng – Sáng tạo bất đẳng thức, Nhà xuất bản Tri thức 2006
- Phạm Văn Thuận – Bất đẳng thức suy luận và khám phá, Nhà xuất bản ĐH QGHN 2007

Cuối cùng là một bài hát của Tác giả dành tặng cho bạn đọc. Đây là một trong sáu bài hát của tác giả được sáng tác theo nguyên lý tổ hợp trong âm nhạc và được VTV phát sóng trong một số sự kiện lớn. Bài hát được sáng tác ngày 29/7/2007 để chào mừng IMO 48 diễn ra thành công tốt đẹp. Bài hát được tổng duyệt lúc 11h00 ngày 30/7/2007 và được BTC chọn làm bài hát chính thức trong lễ bế mạc IMO 48. Ngay sau đó bài hát đã được vang lên vào khoảnh khắc cuối cùng lúc 18h20 trong lễ bế mạc IMO 48 được VTV1 truyền hình trực tiếp tại TT Hội nghị Quốc gia.

## FLAME OF IMO

Music : TRẦN PHƯƠNG

Word: Trương Diệu Linh

Ballad (♩ = 66)

Side - by - side we're com - ing All for Vic - to - ry  
Bạn bè năm châu tới đây. Bao khát khao thi tài,

Let's light up with str - ong be - lief in win O -  
cùng thắp sáng lên rực cháy trong tim niềm tin. Mở

pen up our hearts In the love for Maths And  
rộng vòng tay bốn phương. Trong tình yêu toán học cùng

hand in hand b - right - ly shine I M O  
nắm tay nhau chờ đón vinh quang I M O

I M O holds us to - gether to make us al - ways shine  
I M O kết nối chúng ta, để chúng ta luôn tỏa sáng

I M O holds na - tions - together to make a bet - ter world  
I M O kết nối năm châu, để khắp năm châu rạng ngời

I M O lights up thòu sands of ta - lens  
I M O in flames ở the human know - ledge  
I M O thắp sáng bao tài năng tri thức  
I M O sáng mãi nơi đỉnh cao tri thức.

Though the way a - head we'll try the best to come  
gi - vng us a dream and will  
con đường đi phía trước, Dù còn lắm chông gai vượt qua  
Chấn trời xa mơ ước. Và còn

1.  
be still in our heart  
mãi trong ta. I M O

2.



$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-4xz-4yz)}{(x^2+yz)(y^2+zx)(x+y+2z)^2} \geq 0 \Leftrightarrow xy-4xz-4yz \geq 0 \quad (4)$$

Từ đó, ta thấy nếu  $z \leq \frac{y}{8}$ , ta có đánh giá:  $4z \leq \frac{y}{2} \leq \frac{xy}{(x+y)}$ , suy ra  $xy-4yz-4zx \geq 0$ . Vậy

(4) đúng suy ra (3) đúng. Trong trường hợp này ta chứng minh theo kiểu "dồn biến"

thông thường: từ (3) suy ra ta cần chứng minh:  $f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) > 2\sqrt{2} \quad (5)$

$$\text{Đặt } t = \frac{x+y}{2}. \text{ Ta có: } (5) \Leftrightarrow f(t, t, z) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{t(2t+z)}{t^2+zt}} + \sqrt{\frac{z(2t+z)}{z^2+t^2}} > 2\sqrt{2} \quad (6)$$

$$\text{Chuẩn hóa cho } t = 1, \text{ khi đó } (6) \Leftrightarrow g(z) = 2\sqrt{\frac{2+z}{1+z}} + \sqrt{\frac{z(2+z)}{z^2+1}} > 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vì } g'(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{2}} - (1+z)}{(1+z)^{\frac{7}{2}}} + \frac{1+z-z^2}{\sqrt{z(2+z)(z^2+1)^3}} > 0 \quad (\text{do } z \leq \frac{y}{8} \leq \frac{x+y}{16} = \frac{t}{8} = \frac{1}{8})$$

suy ra  $f(z) > f(0) > 2\sqrt{2}$  (đpcm).

Vậy khi  $z \leq \frac{y}{8}$  thì bài toán đã được chứng minh, và ta chỉ phải xét trường hợp còn lại (mà khi đó bất đẳng thức không còn "chặt chẽ" nữa).

• **Bước 2a:** (chuẩn bị)

Xét khi  $z > \frac{y}{8}$ . Chuẩn hóa cho  $y = 1$  suy ra  $1 \geq z \geq \frac{1}{8}$ ,  $x \geq 1$  và

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+z}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+zx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+x}} > 2\sqrt{2} \quad (7)$$

• **Bước 2b:** (chia để trị)

Chia để trị theo biến  $z$  để quy về bài toán một biến  $x$  nhờ dãy  $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

(Chú ý: Bước này đã được trình bày trong ví dụ 2 của 3.)

Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn!

• **Ghi chú.** Bài toán đẹp đề này được Phạm Kim Hùng giới thiệu trên Diễn đàn Toán học dưới dạng một vấn đề mở và không có lời giải trong một thời gian dài. Lời giải ở trên của chúng tôi là lời giải đầu tiên cho nó. Tuy nhiên, sau đó Nguyễn Thành Nhân đã cho biết một lời giải khác rất ngắn gọn.

**Cách 2.** Ta giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Đặt  $c = k^2(a+b)$  với  $k > 0$ .

Nếu  $k \leq 1$  thì  $c^2 + ab \leq ab + bc + ca$ . Kết hợp với  $b^2 + ac \leq ab + bc + ca$ ,

$$a^2 + bc \leq ab + bc + ca \text{ suy ra } f(a, b, c) \geq 3.$$

Xét khi  $k > 1$ . Ta có:  $c^2 + ab \leq k^2(a+b)c + k^2ab \leq k^2(ab + bc + ca) \quad (1)$

$$a^2 + bc + b^2 + ca \leq (a+b)^2 + a(b+c) \leq (a+b)^2(1+k^2) = \frac{k^2+1}{k^2}c(a+b) < \frac{k^2+1}{k^2}(ab+bc+ca) \quad (2)$$



Từ (1) và (2) ta có:  $f(a, b, c) \geq \frac{1}{k} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+bc+b^2+ca}} > \frac{1}{k} + \frac{2\sqrt{2}k}{k^2+1} = f(k)$

Ta chứng minh  $f(k) > 2\sqrt{2}$  với mọi  $k > 0$  (không cần  $k > 1$ ). Điều này có được đơn giản bằng biến đổi tương đương:

$$f(k) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{k} > \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}(\sqrt{k^2+1}+k)} \Leftrightarrow k^2+1+k\sqrt{k^2+1} > 2\sqrt{2}k$$

Bất đẳng thức cuối đúng do  $k^2+1+k\sqrt{k^2+1} > 2k^2+1 > 2\sqrt{2}k \Rightarrow$  (đpcm)

• **Nhận xét:** Đây là một lời giải độc đáo nhưng không phải dễ dàng nghĩ ra. Do đó, cũng dễ hiểu khi lời giải bằng chia để trị là lời giải đầu tiên, vì tư tưởng trong phương pháp chia để trị rất đơn giản và dễ thực hiện.

Chúng ta tiếp tục với một trường hợp mà đẳng thức xảy ra ở hai chỗ.

**Bài toán 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm.

Chứng minh rằng:  $\frac{a^4}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^4}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$

### Chứng minh

Không mất tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Chú ý dấu bằng xảy ra tại hai chỗ là  $a = b = c$  và  $b = c = 0, a$  tùy ý. Ta sẽ "khoanh vùng" từng chỗ rồi mới chia để trị.

$$\begin{aligned} \text{Bước 1a: Đánh giá: VT} &= \frac{a^6}{a^4+a^3b+a^2b^2} + \frac{b^6}{b^4+b^3c+b^2c^2} + \frac{c^6}{c^4+c^3a+c^2a^2} \\ &\geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^4+b^4+c^4+a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \end{aligned}$$

Do đó, bài toán sẽ được chứng minh nếu có:

$$ab^3+bc^3+ca^3 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \Leftrightarrow \sum_3 (ab^3+ba^3-2a^2b^2) + \sum_3 (ab^3-ba^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 + (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \geq 0 \quad (1)$$

Nếu  $a \geq c \geq b$  ta có ngay (đpcm).

Nếu  $a \geq b \geq c$  khi đó để có (1) ta cần chứng minh

$$ab(a-b)^2 + ca(c-a)^2 \geq (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c) \geq 0 \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** thì  $ab(a-b)^2 + ca(c-a)^2 \geq 2a(a-b)(a-c)\sqrt{bc}$

và chú ý  $a+b+c \leq 3a$ , nên để chứng minh (2) ta cần có  $\frac{4}{9}bc \geq (b-c)^2$ .

Dễ thấy điều này đúng khi  $b \leq 1.92c$ .

**Bước 1b:** Xét  $b \geq 1.92c$ . Khi đó điểm nhạy cảm thứ nhất  $a = b = c$  không còn nữa, trong bước này ta sẽ giải quyết nốt điểm nhạy cảm thứ 2.

Nếu  $b = 0$  thì đơn giản, nếu không có thể chuẩn hóa cho  $b = 1$  khi đó bất đẳng thức ở đề bài trở thành  $\frac{a^4}{a^2+a+1} + \frac{1}{1+c+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} - \frac{a^3+1+c^3}{a+1+c} \geq 0$  (3)

Chú ý rằng khi chuẩn hoá như vậy điểm nhảy cảm thứ 2 suy biến thành:

$c = 0, b = 1, a = +\infty$ . Xét khi  $\frac{1}{6} \geq c \geq 0$ , ta chia thành hai trường hợp:

+ Nếu  $a \leq 4$  thì bất đẳng thức là thực sự và ta chỉ cần đánh giá đơn giản để thấy bất đẳng thức (3) là đúng.

+ Nếu  $a > 4$ , khi đó bất đẳng thức có **điểm nhảy cảm** là  $c = 0, b = 1, a = +\infty$  nên không thể dùng "chia để trị". Tuy nhiên trường hợp này ta có thể chứng minh bằng đạo hàm

Đặt  $f(c) = \frac{a^4}{a^2+a+1} + \frac{1}{1+c+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} - \frac{a^3+1+c^3}{a+1+c}$ ,  $\forall c \in \left[0; \frac{1}{6}\right]$ ,  $\forall a > 4$ .

Ta có:  $f'(c) \geq 0 \forall c \in \left[0; \frac{1}{6}\right] \Rightarrow f(c) \geq f(0) = \frac{a^4}{a^2+a+1} + 1 - \frac{a^3+1}{a+1} \geq 0 \Rightarrow$  (đpcm)

**Bước 2:** Xét khi  $c \geq \frac{1}{6}$  và  $1 \geq 1.92c$ , tức là  $0.53 \geq c \geq \frac{1}{6}$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3) (hai điểm nhảy cảm đã được tách li nên "chia để trị" chắc chắn sẽ phát huy tác dụng) bằng chia để trị theo biến  $c$  để quy bất đẳng thức (3) về bài toán một biến theo  $a$  nhờ dãy sau:  $0.53; 0.45; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$ .

Tổng hợp các bước đã xét ở trên ta có bài toán được chứng minh xong.

• **Nhận xét:** Khi đặt ra bài toán này, chúng tôi đã dùng chia để trị để kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức như lời giải trên. Sau đó nó được đưa lên trên Mathlinks.ro và ở đó chúng tôi đã nhận được một lời giải khác rất độc đáo của một bạn người Hàn Quốc như sau:

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^4}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^4}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{3abc}{a+b+c} + \sum_{cyc} (a^2 - ab)$$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^4}{a^2+ab+b^2} - a^2 + ab \right) \geq \frac{3abc}{a+b+c}$ . Kết quả bài toán có được nhờ đánh giá:

$$\sum_{cyc} \left( \frac{a^4}{a^2+ab+b^2} - a^2 + ab \right) = \sum_{cyc} \frac{ab^3}{a^2+ab+b^2} = \sum_{cyc} \frac{b^2}{1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3+\sum_{cyc} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)} = \frac{(a+b+c)abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{3abc}{a+b+c}$$

• **Bình luận:** Lời giải đẹp một cách bất ngờ. Qua hai ví dụ trên, chúng ta thấy rằng cách giải bằng chia để trị không hẳn là duy nhất. Tuy nhiên, đối với các bài toán thực sự khó mà muốn có một lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ thì không hề đơn giản (như chúng ta thấy, những "lời giải thứ hai" mà chúng tôi giới thiệu đều rất độc đáo). Đó cũng là lý do chúng tôi nhấn mạnh đến tính tự nhiên và đơn giản của phương pháp chia để trị. Chúng ta kết thúc mục này bằng một bài toán khó, mà chúng tôi rất mong sẽ có một lời giải đơn giản cho nó từ các bạn.

**Bài toán 3.** Cho  $x, y, z \geq 0$  và  $x + y + z = 3$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{x}{1+y+yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+z+zx}} + \sqrt{\frac{z}{1+x+xy}} \geq \sqrt{3}$  (1)

**Giải**

Không mất tổng quát có thể giả sử  $x = \max(x, y, z)$ . Chú ý rằng có hai trường hợp xảy ra dấu đẳng thức là  $x = y = z = 1$  và  $x = 3, y = z = 0$ .

**Bước 1:** (khoanh vùng điểm nhạy cảm)

Ta biến đổi về trái bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+y+yz}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3}\sqrt{1+z+zx}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3}\sqrt{1+x+xy}} \\ & \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+x^2y+x^2yz} + \sqrt{y}\sqrt{y^2+y^2z+y^2zx} + \sqrt{z}\sqrt{z^2+z^2x+z^2xy}} \\ & \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)(x^2+x^2y+x^2yz+y^2+y^2z+y^2zx+z^2+z^2x+z^2xy)}} \\ & = \frac{(x+y+z)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x+xyz(x+y+z)}} \end{aligned}$$

Do vậy để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & (x+y+z)^3 \geq 3[x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x+xyz(x+y+z)] \\ & \Leftrightarrow (x+y+z)^3 \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + 3(x^2y+y^2z+z^2x) + 9xyz \\ & \Leftrightarrow 2(xy^2+yz^2+zx^2) \geq x^2y+y^2z+z^2x+3xyz \\ & \Leftrightarrow (xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x) - 6xyz \geq 3(x^2y+y^2z+z^2x-xy^2-yz^2-zx^2) \\ & \Leftrightarrow x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 3(x-y)(y-z)(x-z) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ đó, ta thấy nếu  $x \geq z \geq y$  thì (2) đúng. Do đó, ta chỉ việc xét khi  $x \geq y \geq z$

Nếu  $2z \geq y$ , ta có:  $(x-z)^2 \geq (x-z)(x-y); (x-z)^2 + (x-y)^2 \geq 2(x-z)(x-y)$

$$\Rightarrow \frac{y}{y-z}(x-z)^2 + \frac{z}{y-z}(x-y)^2 \geq 2(x-z)^2 + (x-y)^2 \geq 3(x-z)(x-y)$$

$\Rightarrow$  (2) đúng và ta có (đpcm). Vậy ta chỉ còn phải xét khi  $y \geq 2z$ .

**\*Chú ý:** Sau bước này hai biến  $y$  và  $z$  đã được tách li ra xa và cả hai chỗ "nhạy cảm" nên vấn đề còn lại chỉ là "chia để trị"! Tuy nhiên do (2) còn có thể khai thác thêm nên nhân tiện ta giải quyết một vùng nữa cho gọn gàng trước khi dứt điểm.

Nếu  $2y \geq x$ , đặt  $a = x - z, b = y - z$  suy ra  $2b \geq a \geq 0$ . Ta quy (2) về chứng minh

$$(a+z)b^2 + (b+z)a^2 + z(a-b)^2 \geq (a-b)ab$$

Để có điều này ta chỉ cần chứng minh  $ab^2 + ba^2 \geq 3(a-b)ab \Leftrightarrow 2b \geq a$  (đúng)

Vậy bây giờ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu khi  $x \geq 2y$  và  $y \geq 2z$ .

**Bước 2a:** (chuẩn bị) Xét khi  $x \geq 2y$  và  $y \geq 2z$ . Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{x \cdot \frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2 + y \cdot \frac{x+y+z}{3} + yz}} + \sqrt{\frac{y \cdot \frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2 + z \cdot \frac{x+y+z}{3} + zx}} + \sqrt{\frac{z \cdot \frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2 + x \cdot \frac{x+y+z}{3} + xy}} \geq \sqrt{3} \quad (3)$$

Chuẩn hóa cho  $y = 1$  ta có:  $(3) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2 + 5x + 2xz + 4 + 14z + z^2}} +$   
 $+ \sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+5xz+2z+4x^2+14x+1}} \geq 1 \quad (4)$

Nếu  $x \geq 7$  thì do  $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$  nên cứ chỗ nào  $z$  đồng biến thì thay  $z = 0$ , chỗ nào  $z$  nghịch biến thì thay  $z = \frac{1}{2}$ , khi đó ta có đánh giá các bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2 + 5x + 2xz + 4 + 14z + z^2}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}} \geq$$

$$\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2 + 6x + \frac{45}{4}}} + \sqrt{\frac{x+1}{x^2 + 9x + \frac{9}{2}}} \geq 1, \forall x \geq 7. \text{ Do đó, ta chỉ cần xét khi } x \leq 7.$$

**Bước 2b:** (Chia để trị) Ta chứng minh (4) bằng cách chia theo  $z$  để đưa về một biến theo  $x$  nhờ dãy sau:  $0, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ . Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

## V. QUAN HỆ GIỮA PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP S.O.S

Các bạn thân mến, trong mục trước chúng tôi đã trình bày cách áp dụng trực tiếp chia để trị cho các bài toán. Mặc dù tư tưởng đơn giản nhưng một nhược điểm là lời giải khá dài, mà nguyên nhân chính là do những đánh giá của chúng ta quá đơn giản (nhất là trong Bước 1 – “khoanh vùng điểm nhạy cảm”). Tuy nhiên, chia để trị có tư tưởng chính rất đơn giản và linh hoạt nên có thể kết hợp với các phương pháp khác một cách vô cùng uyển chuyển để đạt mục tiêu: giải quyết bài toán. Nếu các bạn thành thạo một phương pháp khác thì các bạn có thể kết hợp chia để trị với phương pháp đó và sức mạnh của các phương pháp sẽ tăng lên đáng kể. Đây mới chính là đặc tính thú vị nhất của chia để trị.

Để minh họa, chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn một số ý tưởng kết hợp chia để trị với phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Đây là một phương pháp mạnh đã được dùng từ lâu nhưng mới được hệ thống hóa và phổ biến rộng rãi gần đây. Tư tưởng chính là quy một bất đẳng thức thuần nhất ba biến  $a, b, c$  về dạng

$$S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$$

Trước khi bắt đầu, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một cách phân tích khác. Đối với các bất đẳng thức ba biến đối xứng thì việc quy về dạng S.O.S như trên là đơn giản, tuy nhiên đối với các bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì cách quy trên đôi khi không thích hợp và tạo ra các hệ số  $S_1, S_2, S_3$  rất cồng kềnh và khó xử lý. Trong trường hợp đó, có một cách khác là quy về dạng sau đây:

$$S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(a-c)$$

Cách quy này có 3 cái lợi. Thứ nhất, đối với các dạng hoán vị vòng quanh thì nó tự nhiên và đơn giản hơn cách đưa về S.O.S chính thống. Thứ hai, nếu về trái và  $S$  không âm thì ta chỉ phải xét trường hợp  $a \geq b \geq c$  mà bỏ qua trường hợp  $a \geq c \geq b$  (lưu ý là trong bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì ta chỉ có thể giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$  và nói chung phải xét 2 trường hợp  $a \geq b \geq c$  và  $a \geq c \geq b$ ). Thứ ba, và quan trọng nhất, là trong dạng trên, khi  $a, b, c$  xấp xỉ bằng nhau thì về trái xấp xỉ 0 với lũy thừa 2, trong khi về phải xấp xỉ 0 với lũy thừa 3. Điều này đặc biệt thích hợp với phương pháp chia để trị, vì khi đó việc tách ly trường hợp  $a = b = c$  là rất đơn giản.

Chúng ta hãy xem một ví dụ để thấy được lợi ích của cách biến đổi này.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$\frac{a^3}{2a^2 + b^2} + \frac{b^3}{2b^2 + c^2} + \frac{c^3}{2c^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

### Chứng minh

Sau đây là lời giải của Phan Thành Nam được đăng trên *Diễn đàn Toán học*.

Bằng cách biến đổi tương đương, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3 - ab^2}{2a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a^3 - ab^2)(2b^2 + c^2)(2c^2 + a^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} a^3 b^2 c^2 + 2 \sum_{cyc} a^3 c^4 + 2 \sum_{cyc} a^5 b^2 + \sum_{cyc} a^5 c^2 \geq 4 \sum_{cyc} ab^4 c^2 + 2 \sum_{cyc} ab^2 c^4 + 2 \sum_{cyc} a^3 b^4 \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} (a^5 b^2 + a^3 b^2 c^2 - 2a^4 b^2 c) + \sum_{cyc} (a^5 c^2 + a^3 b^2 c^2 - 2a^4 b c^2) \geq 2 \sum_{cyc} (a^4 b^4 - a^3 c^4) \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^3 b^2 (a-c)^2 + \sum_{cyc} a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2(a-b)(a-c)(c-b) \left( \sum_{cyc} a^2 b^2 + \sum_{cyc} a^2 b c \right) \end{aligned}$$

Bây giờ giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $c \leq b$  thì bất đẳng thức đúng nên ta chỉ phải xét khi  $a \geq c \geq b$ . Ta sẽ chứng minh

$$2a^3 b^2 (a-c)^2 + 2a^2 c^3 (c-b)^2 + a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2(a-c)(c-b)(a^3 c^2 + a^3 c b + a^3 b^2)$$

Xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** Xét khi  $c - b \leq a - c$ , ta có

$$2a^3 b^2 (a-c)^2 + a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2a^3 b^2 (a-c)(c-b) + 4a^3 c^2 (a-c)(c-b)$$

Vì  $a^3 b^2 + 2a^3 c^2 \geq a^3 (c^2 + bc + b^2)$  nên suy ra (đpcm).

**Trường hợp 2.** Xét khi  $c - b \geq a - c$ , tương tự như trên ta có:

$$2a^2 c^3 (c-b)^2 + a^3 c^2 (a-b)^2 \geq 2a^2 c^3 (a-c)(c-b) + 4a^3 c^2 (a-c)(c-b)$$

Vì:  $a^2 c^3 + 2a^3 c^2 - a^3 (c^2 + bc + b^2) \geq a^2 c^2 b + a^3 c b - a^3 (bc + b^2)$

$= a^3b(c-b) + a^2bc(c-a) \geq 0$  nên ta cũng có (đpcm).

Vì bài toán trên khá đơn giản nên vai trò của chia để trị là không thực sự rõ nét. Tuy nhiên, trong các ví dụ sau ta sẽ thấy tư tưởng chia để trị nổi rõ trong cách chia trường hợp, khi mà mỗi tiêu chuẩn đơn lẻ của S.O.S không đủ để giải quyết.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$2(x^5 + y^5 + z^5) + 9(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2) \geq 11(x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3) \quad (1)$$

**Giải**

**Bước 1.** Biến đổi bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$2(x^5 + y^5 + z^5 - x^2y^3 - y^2z^3 - z^2x^3) + 9(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 - x^2y^3 - y^2z^3 - z^2x^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} [S_1(y-z)^2 + S_2(z-x)^2 + S_3(x-y)^2] + 9(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx) \geq 0 \quad (2)$$

$$S_1 = 2y^3 + 4y^2z + 6yz^2 + 3z^3; S_2 = 2z^3 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3; S_3 = 2x^3 + 4x^2y + 6xy^2 + 3y^3$$

Từ đó, nếu  $x \geq y \geq z$  thì ta có ngay (đpcm), do đó chỉ cần phải xét khi  $x \geq z \geq y$ .

Ta có:  $2(x-y)^2 S_3 = 2[(x-z) + (z-y)]^2 S_3 \geq 8(x-z)(z-y) S_3$

$$2(z-x)^2 S_2 + 2(y-z)^2 S_1 \geq 4(x-z)(z-y) \sqrt{S_1 S_2}$$

Do đó, (2) đúng nếu ta chứng minh được  $8S_3 + 4\sqrt{S_1 S_2} \geq 45(xy+yz+zx)(x-y)$  (3)

Ta có:  $8S_3 - 45(x-y)(xy+yz+zx) = 16x^6 - 13yx^2 + 93y^2x - 45zx^2 > 15x^3 - 45zx^2$

Do đó nếu  $x \geq 3z$  thì ta có ngay (đpcm). Bây giờ xét khi  $x \leq 3z$ . Nếu  $2y \geq z$  thì

$$S_1 S_2 > [(2y)^2 z + 3(2y)z^2 + 3z^3] S_2 > 7z^3 S_2 = 7z^3 (2z^2 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3)$$

Do đó, ta cần chứng minh:  $15x^3 - 45zx^2 + 4\sqrt{7z^3(2z^3 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3)} \geq 0$  (4)

Chuyển về rồi bình phương lên thì (4) tương đương:

$$112z^3(2z^3 + 4z^2x + 6zx^2 + 3x^3) \geq (45zx^2 - 15x^3)^2 \quad (5). \text{ Khai triển ra và}$$

đặt  $t = \frac{x}{z}$  thì (5)  $\Leftrightarrow 244 + 488t + 732t^2 + 366t^3 - (2025t^4 - 1350t^5 + 225t^6) \geq 0$  (6)

Để thấy (6) đúng  $\forall t \in [1, 3]$  nên (1) đúng.

**Bước 2.** Nhiệm vụ còn lại của chúng ta là xét trường hợp  $3z \geq x \geq z \geq 2y$ .

Chuẩn hóa cho  $z = 1$  thì điều kiện viết lại là  $3 \geq x \geq 1$  và  $\frac{1}{2} \geq y$ . Biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow 2x^5 + 2y^5 + 2 + 9x^3y^2 + 9y^3 + 9x^2 - 11x^2y^3 - 11y^2 - 11x^3 \quad \forall x \in [1, 3], y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Đặt  $f(x, a, b) = 2x^5 + 2a^5 + 2 + 9x^3a^2 + 9a^3 + 9x^2 - 11x^2b^3 - 11b^2 - 11x^3$  thì bất đẳng thức cần chứng minh là  $f(x, y, y) > 0$ . Lưu ý là  $f$  tăng theo  $a$  và giảm theo  $b$ .



Chia để trị theo y bằng dãy sau: 0; 0.1; 0.15; 0.2; 0.25; 0.3; 0.35; 0.4; 0.45; 0.5

ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

Trong bài toán trên, S.O.S đã giúp chúng ta giải quyết nhanh chóng điểm "nhảy cảm". Nhưng sau khi đạt được mục đích này, chúng ta đã linh hoạt trở lại bất đẳng thức ban đầu và dứt điểm bằng chia để trị. Trong trường hợp này thì chia để trị là tư tưởng chính còn S.O.S là kĩ thuật. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể dùng S.O.S làm đường lối chính và dùng chia để trị làm kĩ thuật.

**Bài toán 3.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$23(a+b+c) + 13\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) \geq 36\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 13 \sum_{cyc} \left( \frac{a^3}{b^2} + a - 2\frac{a^2}{b} \right) \geq 10 \sum_{cyc} \left( \frac{a^2}{b} + b - 2a \right) \Leftrightarrow \frac{13}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} \geq \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} + \sum_{cyc} \left[ \frac{a(a-b)^2}{b^2} - \frac{(a-b)^2}{b} \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^3}{b^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $a \geq c \geq b$  thì:

$$\frac{(a-b)^3}{b^2} = \frac{(a-c+c-b)^3}{b^2} \geq \frac{(a-c)^3 + (c-b)^3}{b^2} \geq \frac{(a-c)^3}{a^2} + \frac{(c-b)^3}{c^2} \Rightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^3}{b^2} \geq 0$$

Nên ta chỉ cần xét khi  $a \geq b \geq c$ . Khi đó:

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^3}{b^2} \geq \frac{(a-b)^3}{a^2} + \frac{(b-c)^3}{a^2} - \frac{(a-b+b-c)^3}{a^2} = \frac{-3(a-b)(b-c)(a-c)}{a^2}$$

$$\text{Do đó, ta chỉ cần chứng minh: } \frac{3}{10} \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b^2} \geq \frac{3(a-b)(b-c)(a-c)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left[ \frac{a(a-b)^2}{b^2} + \frac{b(b-c)^2}{c^2} + \frac{c(c-a)^2}{a^2} \right] \geq 10(a-b)(b-c)(a-c)$$

Ta đánh giá đơn giản bằng bất đẳng thức **AM - GM**:

$$\frac{a(a-b)^2}{b^2} + \frac{b(b-c)^2}{c^2} \geq 2\frac{1}{c}(a-b)(b-c); \quad \frac{c(c-a)^2}{a^2} \geq \frac{4c(a-b)(b-c)}{a^2}$$

$$\text{nên chỉ cần chứng minh: } 2\frac{a^2}{c} + 4c \geq 10(a-c) \Leftrightarrow a^2 + 7c^2 \geq 5ac \text{ (đúng)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Chúng ta kết thúc mục này bằng một bài toán của Phạm Kim Hùng. Bài toán này đã được giới thiệu trên *Diễn đàn Toán học* với tên gọi là "Thách Thức 2", và có thể xem như một trong những ví dụ khó nhất đối với phương pháp S.O.S. Sau đây, chúng ta sẽ xem tư tưởng chia để trị hoạt động thế nào khi kết hợp với cách biểu diễn S.O.S chính thống. Lời giải sau đây cũng của Phan Thành Nam, và là lời giải đầu tiên cho bài toán này trên *Diễn đàn Toán học*.



**Bài toán 4.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$\left(\frac{a^2}{b} + c\right)^2 + \left(\frac{b^2}{c} + a\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a} + b\right)^2 \geq 12 \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 + 2ab + 2bc}{b^2} - 4 \cdot \frac{a+b}{a+b+c} \right) (a-b)^2 \geq 0 \quad (2). \text{ Chuẩn hóa: Cho } a + b + c = 1 \text{ thì}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 - b^2 + 2b}{b^2} - 5 + 4c \right) (a-b)^2 \geq 0 \text{ hay } \sum_{cyc} C(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tổng quát, ta giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $c > b$  thì ta có ngay (đpcm) vì  $\sum_{cyc} \frac{a^2 b}{c} - \sum_{cyc} \frac{a^2 c}{b} = \frac{(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$  nên dưới đây ta chỉ cần xét khi  $a \geq b \geq c$ . Trong phần còn lại, ta sẽ chia thành các trường hợp để xét.

**Trường hợp 1.** Xét  $b \geq \frac{1}{3}$  (hay  $b - c \geq a - b$ ). Ta xét 2 trường hợp con sau đây:

**1.1.** Xét  $b \geq \frac{1}{3}, c \geq \frac{1}{4}$ . Ta có:  $C \geq \frac{2}{b} + 4c - 5 \geq 0$  và  $A \geq 0$ . Chú ý  $a \leq \frac{1}{2}$  nên ta có:

$$\frac{1}{4}A + B \geq \frac{1}{2c} + \left(a + \frac{1}{a}\right) + 4b + \frac{c}{a^2} - 5 - \frac{5}{4} \geq \frac{3}{2} + \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} + \frac{1/4}{(1/2)^2} - 5 - \frac{5}{4} > 0$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(c-a)^2 \geq \frac{A}{4}(a-c)^2 + B(a-c)^2 \geq 0$$

**1.2.** Xét  $b \geq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{4}$ . Ta có:

$$C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(a-c)^2 \geq (C+1-4c)(a-c)^2 + (A-1+4C)(b-c)^2 + B(a-c)^2$$

Tương tự như trên:  $C+1-4c \geq 0, A-1+4C \geq 0$ . Chú ý  $a \leq \frac{2}{3}$  nên ta có:

$$\frac{1}{4}(A-1+4C) + B \geq \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{3c} + \frac{13}{4}c\right) + 4b + \frac{1}{4c} - 5 - \frac{3}{2} \geq \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) + 2 + \frac{4}{3} + 1 - 5 - \frac{3}{2} = 0$$

**Trường hợp 2.** Xét  $b \leq \frac{1}{3}$ . Ta luôn có:  $C \geq \frac{2}{b} - 5 \geq 1, A \geq \frac{2}{c} - 5 \geq 1$ .

Do đó ta chỉ cần quan tâm khi  $B < 0$ . Xét 2 trường hợp con sau đây:

**2.1.** Xét  $b \leq \frac{1}{3}, c \geq \frac{1}{6}$  (khi đó  $a \leq \frac{2}{3}$ ). Ta có:

$$\frac{1}{2}A + B \geq \left(5c + \frac{1}{c}\right) + \left(2a + \frac{1}{a}\right) - 7.5 \geq \left(\frac{5}{3} + 3\right) + \left(2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) - 7.5 = 0$$

$$\frac{1}{2}C + B \geq \left(\frac{9}{2}a + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2b} + 4b\right) + 3c - 7.5 \geq 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \frac{3}{6} - 7.5 > 0$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2 + A(b-c)^2 + B(a-c)^2 \geq (-B)[2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 - (a-c)^2] \geq 0$$

2.2. Xét khi  $b \leq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{6}$  (khi đó  $a \geq \frac{1}{2}$ ). Ta lại chia thành 2 trường hợp con:

2.2.1. Xét khi  $b \leq 0.3$  và  $c \leq \frac{1}{6}$ . Tương tự trường hợp 2.1, ta có:

$$\frac{1}{2}A + B \geq \frac{1}{c} + \left(2a + \frac{1}{a}\right) - 7.5 \geq 6 + 2\sqrt{2} - 7.5 > 0$$

$$\frac{1}{2}C + B \geq \left(\frac{50}{9}a + \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2b} + 4b\right) - 7.5 \geq 2\sqrt{\frac{50}{9}} + 2\sqrt{2} - 7.5 > 0 \text{ và suy ra (đpcm).}$$

2.2.2. Xét khi  $b \geq 0.3$  và  $c \leq \frac{1}{6}$ . Do  $b \leq \frac{1}{3}$  nên  $2(a - b) \geq (a - c)$

Do  $3.75b \geq 1 + 0.75c$  nên  $2.75(b - c) \geq (a - c)$ . Từ đó suy ra:

$$C = \frac{a}{b^2} + \frac{1}{b} + 4c - 5 \geq 9a + \frac{1}{b} - 5 \geq \frac{9}{2} + 3 - 5 = 2.5$$

$$A = \frac{b}{c^2} + \frac{1}{c} + 4a - 5 \geq 36b + \frac{1}{b} + 4a - 5 \geq 36 \times 0.3 + 6 + \frac{4}{2} - 5 \geq 13.8$$

$$\Rightarrow C(a - b)^2 + A(b - c)^2 \geq \frac{2.5}{2^2}(a - c)^2 + \frac{13.8}{2.75^2}(a - c)^2 \geq 2.4(a - c)^2$$

$$\text{và } B + 2.4 \geq \frac{1}{a} + 4b - 5 + 2.4 \geq \frac{1}{0.7} + 4 \times 0.3 - 5 + 2.4 > 0$$

nên:  $C(a - b)^2 + A(b - c)^2 + B(a - c)^2 \geq 0$ . Vậy bài toán chứng minh xong.

## VI. PHẢI CHĂNG LÀ LỜI GIẢI DUY NHẤT?

Các bạn thân mến, có lẽ mỗi chúng ta đều mong muốn mỗi bài toán hay đều có một lời giải đẹp tương xứng. Trong các mục trước, chúng ta đã thấy mặc dù giải quyết các bài toán rất khó bằng một đường lối đơn giản nhưng giải bằng chia để trị không hẳn là lời giải duy nhất. Trong mục này, chúng tôi dẫn ra đây bốn ví dụ minh họa đầy đủ sức mạnh và tính nghệ thuật của của phương pháp chia để trị, đồng thời chuyển tới các bạn câu hỏi rằng, liệu đây có phải là lời giải duy nhất?

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^7}{a^6+b^6} + \frac{b^7}{b^6+c^6} + \frac{c^7}{c^6+a^6} \geq \frac{a+b+c}{2}, \forall a, b, c > 0$

Trước khi nêu lời giải, chúng tôi xin giới thiệu sơ lược về bài toán thú vị này. Tác giả bài toán, Phạm Kim Hùng, đã giới thiệu bài toán mở sau đây trên *Diễn đàn Toán học* trong chủ đề có tên là "Very difficult inequality"

**Bài toán mở:** Với các hằng số  $k > 1$  nào thì bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a^k}{a^{k-1}+b^{k-1}} + \frac{b^k}{b^{k-1}+c^{k-1}} + \frac{c^k}{c^{k-1}+a^{k-1}} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

**Bình luận:** Bằng biến đổi đơn giản, ta thấy rằng nếu bất đẳng thức đúng với  $k$  thì nó cũng đúng với  $k' < k$ , do đó hằng số lớn nhất cũng có nghĩa là tốt nhất. Bài toán 1 khẳng định bài toán đúng với  $k = 7$ , hơn nữa trong trường hợp  $k = 8$  thì có phản ví dụ

(xem Nhận xét ở phần sau). Mặc dù vẫn chưa giải quyết được bài toán mở nhưng có thể khẳng định đây là một trong những bất đẳng thức mạnh và khó nhất hiện nay. Lời giải dưới đây dựa trên lời giải của Phan Thành Nam đã đăng trên *Diễn đàn Toán học*, một lời giải đầy tính nghệ thuật và lãng mạn.

**Lời giải bài toán 1.** Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh:

$$a \cdot \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + b \cdot \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} + c \cdot \frac{c^6 - a^6}{c^6 + a^6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c) \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + (b-c) \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} + c \left( \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} + \frac{c^6 - a^6}{c^6 + a^6} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c) \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} + (b-c) \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} - c \left( \frac{a^6 - b^6}{a^6 + b^6} \cdot \frac{b^6 - c^6}{b^6 + c^6} \cdot \frac{c^6 - a^6}{c^6 + a^6} \right) \geq 0$$

Tất nhiên, ta có thể giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Từ bất đẳng thức cuối, ta thấy nếu  $b \geq c$  thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do đó ta chỉ cần xét khi  $a \geq c \geq b$ . Để đơn giản, ta chuẩn hóa: Cho  $c = 1$ , và tất nhiên chỉ cần xét khi  $a > 1 > b$ . Ta tiếp tục biến đổi:

$$(a-1) \frac{1+b^6}{1-b^6} + (1-b) \frac{a^6+b^6}{a^6-b^6} \geq \frac{a^6-1}{a^6+1} \Leftrightarrow (a-1) \frac{1+b^6}{1-b^6} + (1-b) \left( 1 + \frac{2b^6}{a^6-b^6} \right) \geq 1 - \frac{2}{a^6+1}$$

$$\Leftrightarrow (a-1) \frac{1+b^6}{1-b^6} + \frac{2}{a^6+1} + \frac{2(1-b)b^6}{a^6-b^6} - b \geq 0 \quad (1). \text{ Ta sẽ chứng minh } f(a, b, b) > 0$$

$$\text{với } f(a, x, y) = (a-1) \frac{1+x^6}{1-x^6} + \frac{2}{a^6+1} + \frac{2(1-y)x^6}{a^6-x^6} - y > 0$$

Chú ý rằng đây là bất đẳng thức thực sự. Để chứng minh, ta chỉ cần chia theo  $b$  để đưa về các bất đẳng thức 1 biến theo  $a$ , bằng dãy sau đây:

$$0, 0.6, 0.67, 0.7, 0.73, 0.75, 0.77, 0.8, 0.85, 0.9, 1.$$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

#### • Nhận xét:

a) Trong biến đổi trên ta đã sử dụng hằng đẳng thức:  $u+v+w+uvw=0$  với:

$$u = \frac{x-y}{x+y}, v = \frac{y-z}{y+z}, w = \frac{z-x}{z+x} \quad (\text{vì } (1+u)(1+v)(1+w) = (1-u)(1-v)(1-w))$$

Bằng cách này, ta đã làm xuất hiện các đại lượng "xấp xỉ 0" là  $a-b, b-c, c-a$  mà ta đã đề cập ở mục trước.

b) Các bạn có thể thấy là trong lời giải trên không có bước "khoanh vùng điểm nhạy cảm".

Vì sao vậy? Thực ra, khi thực hiện việc chia 2 vế cho  $\frac{1-b^6}{1+b^6} \cdot \frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}$  tức là ta đã

chia các đại lượng "xấp xỉ" 0 cho nhau. Chính vì vậy, điểm nhạy cảm khi các biến bằng nhau đã được giải quyết. Đây chính là "chìa khóa" của lời giải này. Kỹ thuật này cũng có thể dùng rất thích hợp với dạng S.O.S có thêm đại lượng  $(a-b)(b-c)(c-a)$  mà ta đã đề cập ở mục trước.

c) Trong bài toán mở đã giới thiệu, khi  $k = 8$  thì ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức sau với mọi  $a > 1 > b$ :  $(a-1)\frac{1+b^7}{1-b^7} + \frac{2}{a^7+1} + \frac{2(1-b)b^7}{a^7-b^7} > b$

Thực hiện việc chia để trị theo  $b$  ta thu được dãy: 0; 0.55; 0.57; 0.58; 0.585

Ta thấy dãy dần tiến về 0.6 nên thử cho  $b = 0.6$  vào rồi chia để trị theo  $a$  thì thấy  $a$  tiến về 1.3. Điều đó dẫn đến dự đoán là bất đẳng thức sai, và quả thật thay  $a = 1.3$ ,  $b = 0.6$ ,  $c = 1$  vào thì ta nhận được câu trả lời phủ định! Cũng bằng cách đó, thậm chí ta có thể tìm được phản ví dụ cho  $k = 7.5$ . Điều này chứng tỏ bài toán với trường hợp  $k = 7$  là rất mạnh.

**Bài toán 2.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2+3c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2+3a^2}} \geq \frac{3}{2}$$

### Chứng minh

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^3+3ab^2}} \geq \frac{a^2}{\sqrt{a^3+2a^2b^2+b^3}} = \frac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$$

Từ đó, thay  $(a, b, c)$  bởi  $(a^2, b^2, c^2)$ , ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây

$$(\text{với mọi } a, b, c > 0): \frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2} \quad (1)$$

Ta chứng minh (1) bằng chia để trị từ đơn giản đến phức tạp.

• Ta có thể giả sử  $a \geq b, c$ . Nếu  $b \geq c$  thì:

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} - \frac{b^4}{a^3+b^3} - \frac{c^4}{b^3+c^3} - \frac{a^4}{c^3+a^3} \\ &= \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)} \geq 0 \end{aligned}$$

nên dưới đây ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp  $a \geq c \geq b$ .

• Trường hợp  $a \leq 2b$  (và  $a \geq c \geq b$ ). Ta có:  $\frac{2a^4}{a^3+b^3} - a - \frac{3}{2}(a-b) = \frac{3b^2+ab-a^2}{2(a^3+b^3)}(a-b)^2$

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} - (a+b+c) = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + a+b+c} \leq \frac{3(a-c)^2 + 3(c-b)^2}{2(a+b+c)}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh:  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$  với:

$$S_1 = \frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3} - \frac{3}{a+b+c} > \frac{3c^2}{b^3+c^3} - \frac{3}{b+c} > 0$$

$$S_2 = \frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3} - \frac{3}{a+b+c} > \frac{3a^2}{c^3+a^3} - \frac{3}{a+c} > 0; S_3 = \frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3} \geq \frac{4b^2-a^2}{a^3+b^3} \geq 0$$

và điều này hiển nhiên đúng.

• Trường hợp  $a \geq 3c \geq 3b$ . Ta có:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} = \frac{a}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^3} \geq \frac{a}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{28}a > \frac{\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}a = \frac{\sqrt{3\left(a^2+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}\right)}}{2} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}.$$

• Cuối cùng, ta xét trường hợp  $a \geq 2b$ ,  $a \leq 3c$  (và  $a \geq c \geq b$ ). Khi đó, bất đẳng thức là thực sự. Chuẩn hóa cho  $a = 1$ , và đưa về bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{a^3+1} > \frac{\sqrt{3(1+b^2+c^2)}}{2} \quad (2) \text{ với } b \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ và } c \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

Thực hiện chia để trị theo  $b$  để quy về bài toán một biến theo  $c$  nhờ dãy

0, 0.3, 0.4, 0.45, 0.5. Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn.

• **Nhận xét:** Tất nhiên sau khi giải quyết điểm "nhảy càn", ta có thể trở về chứng minh trực tiếp bất đẳng thức ở đề bài. Tuy nhiên ở đây chúng ta cố gắng chứng minh (1) vì nó là 1 bất đẳng thức đẹp và ý nghĩa. Một hệ quả của bất đẳng thức (1) là

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Đây là một trường hợp riêng của bài toán mở đã giới thiệu ở bài toán 1, và cũng là một hệ quả trực tiếp của bài toán 1. Bản thân bài toán hệ quả này đã là khá mạnh và là một ví dụ ẩn tượng cho phương pháp S.O.S, tuy nhiên phương pháp này đã bộc lộ giới hạn khi đối mặt với các bất đẳng thức mạnh hơn. Bạn đọc có thể xem lời giải bài toán 2 bằng cách sử dụng bất đẳng thức **Holder** đã được trình bày ở §3, nhưng với bất đẳng thức mạnh hơn (1), rất khó để có sự lựa chọn khác.

Chúng ta tiếp tục với một bài toán rất nổi tiếng sau đây

**Bài toán 3.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^4+2} + \frac{y}{z^4+2} + \frac{z}{x^4+2} \geq 1$$

Bài toán này được giới thiệu trên diễn đàn Mathfriend.net với nickname tác giả là "**Cậu bé vàng khăn đỏ**". Đáng sau hình thức tuyệt đẹp là một bất đẳng thức rất khó, và mặc dù nhận được rất nhiều sự quan tâm nhưng cho đến bây giờ ở đó vẫn chưa có lời giải. Chú ý rằng nếu thay mũ 4 bởi mũ 5 thì bài toán không còn đúng.

### Chứng minh

Do  $xyz = 1$  nên ta có thể thay  $(x, y, z)$  bởi  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$  với  $a, b, c > 0$  và viết lại bất đẳng

thức cần chứng minh: 
$$\frac{a^5}{(2a^4+b^4)c} + \frac{b^5}{(2b^4+c^4)a} + \frac{c^5}{(2c^4+a^4)b} \geq 1$$

(Chú ý: các bạn thử suy nghĩ tại sao thay bộ  $(x, y, z)$  bởi bộ  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$  mà không phải là bộ  $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ ? Cách thay thứ 2 có gì bất lợi so với cách thứ nhất?)

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$VT = \frac{a^6}{(2a^4+b^4)ca} + \frac{b^6}{(2b^4+c^4)ab} + \frac{c^6}{(2c^4+a^4)bc} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{(2a^4+b^4)ca + (2b^4+c^4)ab + (2c^4+a^4)bc}$$

Do đó, để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chứng minh:

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geq 2(ab^5+bc^5+ca^5) + abc(a^3+b^3+c^3) \quad (1)$$

Nhìn bề ngoài thì có vẻ như đây chỉ là một bất đẳng thức đơn giản, và dấu bằng cũng chỉ xảy ra tại một chỗ duy nhất là  $a = b = c$ . Tuy nhiên bất đẳng thức (1) lại là một bất đẳng thức mạnh và khó đến kì dị. Đây thực sự là một điều đáng ngạc nhiên. Sau đây, chúng tôi xin đề xuất một cách tấn công:

Không mất tính tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Nếu  $a \geq b \geq c$  thì:

$$(a^5c+b^5a+c^5b) - (a^5b+b^5c+c^5a) = (a-b)(b-c)(c-a)[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+abc] \leq 0$$

nên thay  $(a, b, c)$  bởi  $(a, c, b)$  thì về trái bất đẳng thức không đổi trong khi về phải bất đẳng thức tăng lên. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp  $a \geq c \geq b$  (như đã nói, đây là một kĩ thuật rất thường dùng để giải quyết bớt một trường hợp khi gặp bài toán hoán vị vòng quanh).

Bây giờ ta thử dùng phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Viết lại:

$$(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3-3abc) \geq 2abc \left[ \frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} - (a^3+b^3+c^3) \right]$$

$$\text{và sử dụng các phân tích: } a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{a+b+c}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\frac{3a^4}{b} + b^3 - 4a^3 = \frac{(3a^2+2ab+b^2)}{b} (a-b)^2 \text{ ta viết lại bất đẳng thức trên về dạng:}$$

$$S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{với } S_1 = S - 4ab(3b^2 + 2bc + c^2); S_2 = S - 4bc(3c^2 + 2ca + a^2)$$

$$S_3 = S - 4ca(3a^2 + 2ab + b^2); \text{ trong đó } S = 3(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

Nếu  $a = c$  hoặc  $b = c$  thì bài toán đơn giản. Ngược lại, ta thực hiện biến đổi:

$$(2) \Leftrightarrow (S_1 + S_3)(c-b)^2 + (S_2 + S_3)(c-a)^2 + 2S_3(a-c)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_1 + S_3}{2} \cdot \frac{c-b}{a-c} + \frac{S_2 + S_3}{2} \cdot \frac{a-c}{c-b} + S_3 \geq 0 \quad (3)$$

Khi chia xuống như vậy thì điểm nhạy cảm đã được tách li, nên bất đẳng thức (3) là một bất đẳng thức thực sự. Do đó "chia để trị" chắc chắn phát huy tác dụng:

Chuẩn hóa cho  $c = 1$  khi đó  $a > 1$  và  $b < 1$ . lúc này:  $VT(3) = f(a, b, b) =$



$$= \frac{(1-b)[3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)]}{a-1}$$

$$+ \frac{(a-1)[3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)]}{1-b}$$

$$+ 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-4a(3a^2+2ab+b^2)$$

Đặt  $u(a) = 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)$

$$v(a) = 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)$$

Ta sẽ chứng minh  $u(a) > 0, v(a) > 0$  bằng 2 phương pháp khác nhau.

Ta có:  $u'(a) = 12a^3 + 3b^3 + 3 + 9a^2b - 9a^2 - 4b - 12ab - 2b^2 > 0 \quad \forall a > 1, b < 1$

nên  $u(a) > u(1) = 6 + 6b^3 - 10b + 3b^4 - 2b^2 > 0$

Ta không thể dùng đạo hàm để chứng minh  $v(a) > 0$ . Hãy lưu ý đây là những bất đẳng thức thực sự nên chia để trị chắc chắn phải đi đến kết quả. Sử dụng chia để trị theo  $b$  để quy về bài toán một biến theo  $a$  nhờ đây: 0; 0.5; 0.75; 0.9; 1 ta sẽ chứng minh được  $v(a) > 0$ . Bây giờ trở lại bài toán.

$$\text{Đặt } f(a, b_1, b_2) = \frac{(1-b_2)[3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2a(3b_2^2+2b_2+1)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2)]}{a-1}$$

$$+ \frac{(a-1)[3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2)]}{1-b_1}$$

$$+ 3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-4a(3a^2+2ab_2+b_2^2) \text{ với } 0 \leq b_1 < b_2 \leq 1.$$

Không khó khăn ta có thể chứng minh được:  $f(a, b, b) > f(a, b_1, b_2) \quad \forall b \in [b_1, b_2]$

Hàm  $f(a, b_1, b_2)$  không hẳn đã đồng biến theo  $b_1$  và nghịch biến theo  $b_2$ , tuy nhiên  $f(a, b, b) > f(a, b_1, b_2)$  đúng,  $\forall b \in [b_1, b_2]$  được suy ra từ các đánh giá sau:

$$3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)$$

$$> 3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2a(3b_2^2+2b_2+1)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2), \forall b \in [b_1, b_2]$$

$$\text{và } 3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)$$

$$> 3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2), \forall b \in [b_1, b_2]$$

Cuối cùng, ta thực hiện phép chia để trị theo biến  $b$  để quy về bất đẳng thức 1 biến theo  $a$  nhờ đây:

0; 0.29; 0.42; 0.51; 0.56; 0.6; 0.63; 0.65; 0.67; 0.685; 0.714; 0.726; 0.736; 0.746; 0.756;  
0.765; 0.774; 0.783; 0.792; 0.801; 0.81; 0.821; 0.833; 0.847; 0.863; 0.883; 0.91; 0.95; 1

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

• **Nhận xét:** Ở đây một lần nữa kỹ thuật chia các đại lượng xấp xỉ 0 mà ta đã dùng trong bài toán 1 lại phát huy tác dụng. Tuy nhiên, vì nó quá đơn giản nên việc chia để



trị phải thực hiện khá dài dòng. Nhưng cách làm này không phải là duy nhất, và chúng tôi hi vọng bạn đọc sẽ có cách giải khác ngắn gọn hơn.

Chúng ta kết thúc mục này với một bài toán đã giới thiệu ở đầu chuyên đề.

**Bài toán 4.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x + y + z = 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

Trước khi giải bài này, xin nói đôi lời về xuất xứ của nó. Bài toán này đã được đưa lên Diễn đàn Toán học và Mathsfriend.net nhưng vẫn không nhận được lời giải. Nó được làm mạnh từ bài toán dưới đây của Phan Thành Nam.

**Bài toán ban đầu.** Cho  $x, y, z \in [-1, 1]$  và  $x + y + z = 0$ . Chứng minh rằng:

$$T = \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 3$$

Sau đây là lời giải đầu tiên của tác giả bài toán, một lời giải hay về mặt ý tưởng.

**Bổ đề 1:** Cho các số thực  $a, b, u, v$  sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó 2 điều sau là tương đương:

$$(i) \sqrt{a+u^2} + \sqrt{b+v^2} \geq \sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}$$

$$(ii) 4(u-v)(bu-av) \geq (a-b)^2$$

Trở lại bài toán. Ta xét thử khi nào thì có bất đẳng thức dưới dạng sau:

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}} + \sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}} \geq \sqrt{2(2+x+y)+\frac{(y+z)^2}{4}} \quad (1). \text{ Theo bổ đề 1 thì (1) đúng khi}$$

$$(y-z)[y(1+y)-z(1+x)] \geq (x-y)^2 \text{ hay } (y-z)^2 + (y^3-z^3) \geq (x-y)^2$$

$$\text{Xét 3 bất đẳng thức sau: } (y-z)^2 + (y^3-z^3) \geq (x-y)^2 \quad (2)$$

$$(z-x)^2 + (z^3-x^3) \geq (y-z)^2; (x-y)^2 + (x^3-y^3) \geq (z-x)^2$$

Do khi cộng 3 bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức đúng nên phải có ít nhất một trong 3 bất đẳng thức đúng. Không giảm tổng quát, giả sử (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}}, b = \sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}} \text{ thì (1) } \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4-2z+\frac{x^2}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ đó ta có: } \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} = \sqrt{a^2+\frac{3}{4}y^2} + \sqrt{b^2+\frac{3}{4}z^2}$$

$$\geq \sqrt{(a+b)^2 + \frac{3}{4}(|y|+|z|)^2} \geq \sqrt{4-2z+\frac{3}{4}(|y|+|z|)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức ở trên ta tiếp tục thực hiện việc "đòn cân":

$$T \geq \sqrt{4-2z+\frac{3}{4}(|y|+|z|)^2} + \sqrt{1+z+\frac{3}{4}x^2} \geq \sqrt{(\sqrt{4-2z}+\sqrt{1+z})^2 + \frac{3}{4}(|x|+|y|+|z|)^2}$$

$$\geq \sqrt{(\sqrt{4-2z} + \sqrt{1+z})^2} + 3z^2 \quad (\text{do } |x| + |y| + |z| \geq |x+y| + |z| = 2|z|)$$

$$\text{Cuối cùng, ta có: } \sqrt{(\sqrt{4-2z} + \sqrt{1+z})^2} + 3z^2 \geq 3 \Leftrightarrow (\sqrt{4-2z} + \sqrt{1+z})^2 + 3z^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4-2z)(1+z)} \geq 4+z-3z^2 \Leftrightarrow 4(4-2z)(1+z) \geq (4+z-3z^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 15z^2 + 6z^3 - 9z^4 \geq 0 \Leftrightarrow 3z^2(1+z)(5-3z) \geq 0 \quad (\text{đúng } \forall z \in [-1; 1])$$

Vậy bài toán chứng minh xong! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 0$ .

Bài toán này đã được đưa lên *Diễn đàn Toán học*, và ở đó đã nhận được lời giải rất đơn giản sau đây của thầy Trần-Nam Dũng.

**Bổ đề 2:** Cho các số thực  $a, b$  sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa.

$$\text{Khi đó: } \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow ab \geq 0$$

Trở lại bài toán: Trong 3 số  $x+y^2, y+z^2, z+x^2$  phải có 2 số cùng dấu (tức là tích của chúng  $\geq 0$ ), ta có thể giả sử là  $x+y^2$  và  $y+z^2$ . Khi đó, áp dụng bổ đề:

$$\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 1 + \sqrt{(1+x+y+z^2)+y^2} + \sqrt{(1+z)+x^2} \geq$$

$$\geq 1 + \sqrt{(\sqrt{1+x+y+z^2} + \sqrt{1+z})^2} + (y+x)^2 \geq 1 + \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2} + z^2$$

$$\text{Cuối cùng, ta chứng minh: } (\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + z^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 2+2z^2+2\sqrt{(1-z+z^2)(1+z)} \geq 4 \Leftrightarrow z^2 + \sqrt{1+z^3} \geq 1.$$

$$\text{Nếu } z \geq 0 \text{ thì } \sqrt{1+z^3} \geq 1; \text{ nếu } z < 0 \text{ thì } z^2 + \sqrt{1+z^3} \geq z^2 + 1 + z^3 = 1 + z^2(1+z) \geq 1.$$

Bài toán chứng minh xong!

Như vậy Bài toán 4 là kết quả làm mạnh của chúng tôi cho bài toán ban đầu, ở đây đẳng thức xảy ra tại hai chỗ là  $x = y = z = 0$  và  $x = 0, y = 1, z = -1$ . Việc xuất hiện hai điểm "nhảy cảm" như trên khiến các đánh giá ở trên lập tức gặp trở ngại. Tuy nhiên bằng "chia để trị" ta dễ dàng khắc phục.

**Lời giải bài toán 4.**

**Bước 1a:** (khoanh vùng điểm nhảy cảm thứ nhất)

Trước hết chúng ta cứ việc lặp lại con đường cũ của thầy Trần Nam Dũng:

Trong ba số  $x + \frac{7}{9}y^2, y + \frac{7}{9}z^2, z + \frac{7}{9}x^2$  phải có ít nhất 1 cặp cùng dấu mà ta có thể giả

sử là  $(x + \frac{7}{9}y^2)(y + \frac{7}{9}z^2) \geq 0$ . Khi đó ta có đánh giá:

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 1 + \sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2+y+\frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}$$

$$= 1 + \sqrt{\left(1 - z + \frac{7}{9}z^2\right) + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{\left(1 + z\right) + \frac{7}{9}z^2} \geq 1 + \sqrt{\left(1 - z + \frac{7}{9}z^2\right) + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{\left(1 + z\right) + \frac{7}{9}z^2}$$

**\*Nhận xét:** bước đánh giá ở chỗ này chỉ đảm bảo dấu bằng ở vị trí thứ nhất xảy ra, còn khi  $x \approx 0$ ,  $y \approx 1$ ,  $z \approx -1$  thì biểu thức bên phải đã nhỏ hơn 3 nên việc chứng minh trực tiếp là không tương. Chính vì vậy mục tiêu của bước này chỉ là tách li ba biến  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ra khỏi vùng nhạy cảm thứ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Xét } \left(\sqrt{1 - z + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1 + z}\right)^2 + \frac{7}{9}z^2 &\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{9}z^2 + \frac{7}{9}z^2} \geq 1 - \frac{7}{9}z^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4z^2}{3} + \frac{7z^3}{9} - \frac{49z^4}{81} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{49}{81}z^2 - \frac{7}{9}z - \frac{4}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - 3\sqrt{57}}{14} \leq z \leq \frac{9 + 3\sqrt{57}}{14} \end{aligned}$$

Như vậy  $z \geq -0.95$  thì bài toán được giải quyết. Do vậy ở bước tiếp theo ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu đúng  $\forall z \in [-1, -0.95]$  nữa là xong.

**Bước 1b:** (khoanh vùng điểm nhạy cảm thứ 2)

Xét  $y \in [0.7, 1]$ ,  $x \in [0.95 - y, 1 - y]$  và  $z \in [-1, -0.95]$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ban đầu đúng. Thật vậy, biến đổi tương đương:

$$\sqrt{1 + x + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}(x + y)^2} + \sqrt{1 - x - y + \frac{7}{9}x^2} \geq 3$$

Ta xem  $y$  là một hằng số bất kì thuộc  $[0.7, 1]$ . Đặt

$$f(x) = \sqrt{1 + x + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}(x + y)^2} + \sqrt{1 - x - y + \frac{7}{9}x^2} - 3, \quad \forall x \in [0.95 - y, 1 - y]$$

Nhiệm vụ của ta là chứng minh  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0.95 - y, 1 - y]$ . Ta có:

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 + 9x + 7y^2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7x + 7y}{\sqrt{9 + 9y + 7(x + y)^2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{-9 + 14x}{\sqrt{9 - 9x - 9y + 7x^2}}$$

$$\text{Đặt } g(a, b, y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 + 9b + 7y^2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7a + 7y}{\sqrt{9 + 9y + 7(b + y)^2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{-9 + 14a}{\sqrt{9 - 9a - 9y + 7b^2}}$$

Hàm  $g(a, b, y)$  tăng theo  $a$  và giảm theo  $b$  nên  $f'(x) = g(x, x, y) \leq g(1 - y, 0.95 - y, y)$

Dễ dàng kiểm tra  $g(1 - y, 0.95 - y, y) < 0, \forall y \in [0.7, 1]$  (đây là bất đẳng thức thực sự 1 biến số). Vậy  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [0.95 - y, 1 - y]$ , suy ra  $f(x)$  giảm trên  $[0.95 - y, 1 - y]$ .

$$\text{Do đó } f(x) \geq f(1 - y) = \sqrt{2 - y + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{\frac{16}{9} + y} + \sqrt{\frac{7}{9}(1 - y)^2} - 3$$

Đặt  $h(y) = f(1 - y)$ ,  $y \in [0.7, 1]$ . Ta dễ dàng kiểm tra  $h'(y) < 0 \quad \forall y \in [0.7, 1]$  (đây là bất đẳng thức thực sự một biến số) nên  $h(y) \geq h(1) = 0$ .

• **Bước 2a:** (chuẩn bị)

Xét các trường hợp còn lại là  $z \in [-1; -0.95]$ ,  $y \in [-0.05; 0.7]$ . Hai điểm nhảy cảm đã được tách li và bất đẳng thức của ta lúc này là một bất đẳng thức thực sự. Thay  $x = -z - y$  vào bất đẳng thức ban đầu, ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{1 - z - y + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}z^2} + \sqrt{1 + z + \frac{7}{9}(y + z)^2} \geq 3$$

Đặt  $a = -z$  thì  $a \in [0.95; 1]$  và bất đẳng thức trên được viết lại:

$$\sqrt{1 + a - y + \frac{7}{9}y^2} + \sqrt{1 + y + \frac{7}{9}a^2} + \sqrt{1 - a + \frac{7}{9}(y^2 + 2ya + a^2)} \geq 3$$

• **Bước 2b:** (chia để trị)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức cuối khi  $y \in [-0.05; 0.7]$  và  $a \in [0.95; 1]$ ,

Sử dụng phương pháp chia để trị theo biến  $y$  để quy về bài toán một biến theo  $a$  nhờ dãy sau:  $-0.05; 0.35; 0.48; 0.57; 0.62; 0.65; 0.68; 0.7$

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

## VII. KIỂM TRA BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ MỘT BIẾN SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẬP

Đối với bất đẳng thức thực sự một biến số, ta cũng có thể kiểm tra bằng phương pháp lập nhờ kết quả sau đây.

**1. Định lý.** Cho  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  một hàm tăng và liên tục,  $[a, b]$  là 1 khoảng đóng trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó hai mệnh đề sau đây là tương đương:

(i)  $f(x) > x, \forall x \in [a, b]$

(ii) Dãy  $x_0 = a, x_n = f(x_{n-1})$  thỏa mãn:  $x_n > b$  với  $n$  đủ lớn.

### Chứng minh

(i) suy ra (ii):

Từ (i) nói riêng ta có  $f(a) > a$ . Điều này cũng có nghĩa là  $x_1 > x_0$ , mà  $f$  tăng nên suy ra dãy  $\{x_n\}$  là dãy tăng. Giả sử  $x_n \leq b, \forall n$  thì dãy  $\{x_n\}$  tăng và bị chặn trên (bởi  $b$ ) nên hội tụ về một giới hạn  $c \in [a, b]$ . Từ định nghĩa  $x_n = f(x_{n-1})$  và  $f$  liên tục, cho  $n \rightarrow +\infty$  để chuyển qua giới hạn ta được  $c = f(c)$ . Điều này mâu thuẫn với (i).

(ii) suy ra (i): Giả sử tồn tại  $c \in [a, b]$  sao cho  $f(c) \leq c$ . Vì  $x_0 = a \leq c$  nên bằng quy nạp, ta có:  $x_n = f(x_{n-1}) \leq f(c) \leq c$ . Điều này mâu thuẫn với (i).

Lưu ý rằng, cũng như ở 2., ở đây chúng ta chỉ cần hiểu ý nghĩa định lý để áp dụng, còn trong trình bày thì chỉ dùng những sự kiện hiển nhiên. Hơn nữa, chiều ta sẽ sử dụng chỉ là "(ii) suy ra (i)" và khi đó chỉ cần  $f$  đồng biến là đủ.

**2. Ví dụ 1.** Chứng minh rằng với  $x \in [0, 1]$  thì:  $\sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 > x+1$

**Chứng minh**

$$\sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 > x+1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x+1} + x^7 + \frac{1}{10}(x+1)^4 - 1 > x, \forall x \in [0, 1]$$

Để thấy  $f$  đồng biến trên  $[0, 1]$ . Giả sử tồn tại  $z \in [0, 1]$  sao cho  $z \geq f(z)$ .

Ta có:  $z \geq 0 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0) = 0.1 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.1) > 0.19$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.19) > 0.29 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.29) > 0.4 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.4) > 0.56$$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.56) > 0.85 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(0.85) > 1.85 > 1.$$

Do  $z > 1$  mâu thuẫn với giả sử  $z \in [0, 1]$  nên suy ra  $f(x) > x, \forall x \in [0, 1]$  (đpcm)

• **Nhận xét 1:** Định lý trên cho ta một cách chia để trị "tối ưu" cho các bất đẳng thức thực sự một biến số có dạng  $f(x) - x > 0$  với  $f$  là hàm tăng và liên tục. Một câu hỏi tự nhiên là khi nào một bất đẳng thức có thể quy về dạng trên. Thực tế chỉ ra rằng hầu hết các bất đẳng thức một biến số đều có thể biến đổi được về dạng trên và có nhiều cách làm như vậy. Nhưng ở đây chúng tôi giới thiệu một cách dùng được cho nhiều trường hợp với việc sử dụng mệnh đề sau:

• **Mệnh đề:** giả sử  $g$  khả vi liên tục trên  $\mathbb{R}$  (hàm  $g$  có đạo hàm và đạo hàm liên tục) và  $g'(x) \leq -M, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó bất đẳng thức  $g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$  tương đương với bất đẳng thức  $f(x) > x, \forall x \in [a, b]$ , trong đó  $f(x) = x + \frac{g(x)}{M}, \forall x \in [a, b]$  là hàm tăng và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . (Chú ý rằng miền xác định  $\mathbb{R}$  có thể thay bằng các miền khác thích hợp mà không ảnh hưởng gì).

**3. Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi  $x > 1$  thì:  $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3.5 > 0$  (1)

**Chứng minh**

Đặt  $g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 3.5$  thì  $g'(x) = 8x^3 - 6x^2 - 4x - 1$  chưa chắc dương.

Tuy nhiên:  $g'(x) + 3 = (8x^3 - 8x^2) + (2x^2 - 4x + 2) \geq 0$ . Do đó, ta thay (1) bởi bất đẳng

thức tương đương là  $f(x) > x$  với  $f(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 3.5}{3}$

Ta thấy  $f$  đồng biến trên miền  $x > 1$ . Giả sử tồn tại  $z > 1$  sao cho  $z \geq f(z)$ .

Thì ta có:  $z > 1 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1) = 1.16 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.16) = 1.2$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.2) = 1.23 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.23) = 1.26 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.26) = 1.29$$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.29) = 1.33 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.33) = 1.39 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.39) = 1.51$$

$$\Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.51) = 1.79 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(1.79) = 3.24 \Rightarrow z \geq f(z) \geq f(3.24) = 47$$

Nhưng rõ ràng khi  $z > 47$  thì  $f(z) > z$  nên ta có (đpcm).

• **Nhận xét 2:** Đối với bài toán 1 biến số thì phương pháp lập là rất tiện dụng và đặc biệt thích hợp khi dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra bất đẳng thức. Tuy nhiên, nó không thể mở rộng cho bài toán 2 biến (hay nói chính xác hơn là chúng tôi chưa mở rộng được nó cho bài toán hai biến). Do đó để các bạn dễ theo dõi, ở II. chúng tôi chỉ giới thiệu một cách làm mà có thể nối kết với trường hợp 2 biến.

**VIII. NHÌN LẠI PHƯƠNG PHÁP DAC VÀ NHỮNG BÀI TOÁN THÁCH THỨC****1. Nhìn lại phương pháp DAC**

Các bạn thân mến, phương pháp chia để trị ra đời để giải quyết những bài toán khó mà chúng tôi đã thực sự gặp trở ngại khi áp dụng các phương pháp khác. Do đó, chúng tôi mong bạn đọc cũng sẽ sử dụng nó với mục đích này, vì thực tế chúng tôi vẫn thích một lời giải khác, nếu có, hơn là một lời giải bằng chia để trị. Tuy nhiên, điều đó không làm giảm ý nghĩa của phương pháp, bởi như các nhà toán học vẫn thường nói: "Trước khi tìm một lời giải đẹp, hãy tìm một lời giải đã!"

Theo đánh giá của chúng tôi thì bước khó nhất trong phương pháp này chính là "bước 1". Đây là bước đòi hỏi chúng ta phải giải được bài toán trong một trường hợp "nhỏ", nhưng "quan trọng". Như chúng ta thấy trong các ví dụ, bước này thường chứa nhiều biến hóa và nói chung là không đơn giản. Tuy nhiên, khó khăn này nằm ở bản chất bài toán, vì các bạn hãy tưởng tượng, nếu chúng ta không thể giải quyết bài toán trong một trường hợp nhỏ thì làm gì có hi vọng giải nó trong trường hợp tổng quát. Nói như vậy nghĩa là chia để trị không thể giúp chúng ta né tránh khó khăn, mà chỉ giúp chúng ta nhận thấy khó khăn thực sự ở đâu và cho phép chúng ta đối mặt trực tiếp với chúng (chúng ta chỉ phải giải quyết bài toán trong từng trường hợp nhỏ và không phải bận tâm đến các tình huống khác). Chính sự tập trung này sẽ cho chúng ta cơ hội nhiều hơn để giải quyết vấn đề. Như vậy, chia để trị không chỉ là vấn đề kỹ thuật mà còn liên quan đến khía cạnh tư duy. Đây là một điều rất quan trọng.

Các bạn thân mến, phương pháp chia để trị được hoàn thiện từ những ý tưởng ban đầu của Phan Thành Nam với nhiều lời giải đã đăng trên Diễn đàn Toán học. Trước đây, vì một số lý do, có nhiều bạn không hiểu được tư tưởng này và cho là lời giải quá quá phức tạp, hoặc nhầm lẫn với phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Tuy nhiên, chúng tôi hi vọng bây giờ các bạn đã hoàn toàn thông suốt tư tưởng này. Cuối cùng, chúng tôi lưu ý rằng sức mạnh của phương pháp chia để trị nằm ở sự linh hoạt của nó, mặc dù sơ đồ chứng minh đã đầy đủ, nhưng đối với mỗi bài toán riêng ta cần có cách đánh giá và ước lượng riêng tương ứng.

**2. Những bài toán thách thức**

Như chúng tôi đã nói, phương pháp chia để trị ra đời với mục đích giải quyết các bất đẳng thức khó, thậm chí rất khó, mà chủ yếu là các bài toán chưa có lời giải. Do đó, phần bài tập cũng khá đặc biệt một chút. Chúng tôi dẫn ra đây 10 bài toán mà mỗi bài đều chưa có lời giải hoàn chỉnh được công bố. Theo đánh giá của chúng tôi thì đây là các bất đẳng thức đẹp và khó. Hi vọng các bạn sẽ thu được nhiều điều thú vị khi tìm cách giải chúng



**Bài 1.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thì:

$$3\sqrt{3}\left(\frac{a^3}{2a^2+b^2} + \frac{b^3}{2b^2+c^2} + \frac{c^3}{2c^2+a^2}\right) \geq \sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} + \sqrt{c^2+ca+a^2}$$

**Bài 2:** Cho  $x, y, z \in (-1; 1)$  và  $x + y + z = 0$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{1}{\sqrt{1+x+\frac{1}{3}y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y+\frac{1}{3}z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z+\frac{1}{3}x^2}} \geq 3$$

**Bài 3:** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2 + z} + \frac{y^3 - z^3}{y^3 + z^2 + x} + \frac{z^3 - x^3}{z^3 + x^2 + y} \leq 0$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng với  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$  thì:

$$\sqrt{\frac{a}{2+b^2}} + \sqrt{\frac{b}{2+c^2}} + \sqrt{\frac{c}{2+a^2}} \geq \sqrt{3}$$

**Bài 5:** Cho  $x, y, z \geq 0$  và  $xy + yz + zx = 3$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}x+y}} + \frac{y}{\sqrt{\frac{5}{4}y+z}} + \frac{z}{\sqrt{\frac{5}{4}z+x}} \geq 2$$

**Bài 6:** Cho  $x, y, z > 0$ ,  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2x+y^2+z^3} + \sqrt{2y+z^2+x^3} + \sqrt{2z+x^2+y^3} \geq 6$$

**Bài 7:** Cho  $x, y, z > 0$ ,  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+z^2} \leq \sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+z^2} + \sqrt{z+x^2}$$

**Bài 8:** Cho  $a, b, c > 0$ , chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{3a^3+2b^3} + \frac{b^4}{3b^3+2c^3} + \frac{c^4}{3c^3+2a^3} \geq \frac{a+b+c}{5}$$

**Bài 9:** Cho  $x, y, z > 0$ ,  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{y+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{z+x^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

**Bài 10:** Cho  $x, y, z > 0$ ,  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y^2}{y+z^k} + \frac{y+z^2}{z+x^k} + \frac{z+x^2}{x+y^k} \geq 3$$

với  $k = 1, 2, 3, 4$ . Tìm phản ví dụ với  $k = 5$ .



## Nhìn lại chương IV

Sáu cuộc hành trình đầy khó khăn nhưng cũng đầy hứng thú đã kết thúc, bây giờ là lúc để chúng ta dừng chân và nhớ lại tất cả những gì vừa trải qua. Cũng là lúc để chúng ta một lần nữa được chiêm ngưỡng vẻ đẹp của những viên kim cương hiện đại, lần này những viên kim cương đẹp để ấy đã được đặt cùng nhau trong một bức tranh gần như là hoàn mỹ, bao quát cả thế giới bất đẳng thức. Bắt đầu với với phương pháp tổng bình phương SOS, tiếp đến là phương pháp dồn biến MV, các phương pháp đánh giá tích ABC, hình học hóa đại số GLA và định lý biến số bằng nhau EV, cuối cùng là phương pháp chia đề trị DAC.

Phương pháp phân tích tổng bình phương, như tên gọi của nó, lấy ý tưởng từ định lý  $x^2 \geq 0$  với mọi  $x$  thực và có cơ sở chặt chẽ là các định lý Hilbert nói rằng mọi đa thức thuần nhất và không âm có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của các hàm hữu tỷ thực. Tuy nhiên việc biểu diễn các đa thức thuần nhất thành tổng các bình phương của các hàm hữu tỷ thực theo định lý Hilbert chỉ mang tính lý thuyết mà không có tính thực hành. Phương pháp phân tích tổng bình phương đã chỉ ra một cách khắc phục điều đó. Cụ thể, đối với bất đẳng thức ba biến đối xứng (hoán vị) ta có thể đưa được nó về dạng đơn giản  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$ . Từ biểu diễn đó ta tiến hành tìm hiểu mối quan hệ giữa các hệ số  $S_1, S_2, S_3$ . Nếu các hệ số đó có mối quan hệ đủ tốt, chẳng hạn như những điều kiện trong 5 mệnh đề mục II §17 thì ta có thể có ngay kết quả mong đợi. Ngoài ra đối với các bài toán hoán vị ta có thể tìm cách đưa bất đẳng thức về dạng  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(a-c)$ . Sau đó mới tiến hành đánh giá các hệ số  $S_1, S_2, S_3, S$ . Cách làm này có nhiều lợi thế đặc biệt đối với các bài toán hoán vị (có thể xem lại các ghi chú trong mục V §22, phương pháp chia đề trị).

Không giống như phương pháp phân tích tổng bình phương SOS, phương pháp dồn biến tìm cách thu hẹp bài toán  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  trên tập  $D$  về tập  $\Lambda$  nhỏ hơn. Tập  $D$  là tập con của  $\mathbb{R}^n$  trong khi đó  $\Lambda$  là tập con gồm các phần tử của  $D$ , thỏa mãn thêm tính chất nào đó, ví dụ mỗi phần tử của  $\Lambda$  thường có nhiều thành phần bằng nhau (dồn các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  về các giá trị trung bình) hoặc có nhiều thành phần nằm trên biên (dồn biến về biên). Để tiến hành điều đó, với mỗi phần tử  $x$  bất kỳ trong  $D$  ta sẽ tìm một dãy các phần tử khác  $x', x'', \dots$  sao cho  $F(x) \geq F(x') \geq F(x'') \geq \dots$ . Trong đó giới hạn của dãy này là một phần tử của  $\Lambda$  và như vậy chỉ cần cần chứng minh  $F(x) \geq 0$  với mọi  $x$  thuộc  $\Lambda$ . Dãy  $x, x', x'', \dots$  được xác định bởi một toán tử  $T$  nào đó, sao cho  $x' = T(x), x'' = T(x'), \dots$ . Đối với định lý dồn biến mạnh SMV (dồn biến về tâm) là  $T_1$  được định nghĩa trong định lý 1 mục V §18, và đối với định lý dồn biến không xác định UMV (dồn biến ra biên) là phép toán  $T = \min\{T_1, T_2\}$  trong đó  $T_1$  là phép toán được định nghĩa trong SMV và  $T_2$  được định nghĩa trong mục VII §18. Cuối cùng, định lý GMV ở mục XII đã tổng quát triệt để hai định lý SMV và UMV bằng cách đã chỉ ra một dãy

$T_1, T_2, \dots, T_n$  có tính chất đủ tốt để toán tử  $T$  định nghĩa bởi  $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  giúp cho sơ đồ chứng minh ở trên được vận hành như mong đợi. Cũng nên lưu ý rằng nếu như **SMV** chỉ thực sự hiệu quả với các bài toán bốn biến nhưng sẽ gặp khó khăn với các bài toán nhiều biến thì **UMV** và **GMV** nhờ các toán tử  $T$  xác định thoải mái hơn đã khắc phục được yếu điểm đó để trở thành công cụ rất hiệu quả đối với các bài toán nhiều biến.

Hai phương pháp **ABC**, **GLA** đi theo một hướng khác. Cụ thể, như đã biết bất đẳng thức một biến được coi là đã được giải quyết trọn vẹn nhờ các công cụ hàm số hoặc định lý **Fermat**. Một sự kiện hợp lý là bất đẳng thức càng ít biến thì càng dễ tấn công. Theo đó khi có bất đẳng thức  $F(a, b, c) \geq 0$  với ràng buộc  $\Phi(a, b, c)$  ta có thể cố định 2 biến  $a, b$  và coi  $F$  là hàm một biến  $G$  theo  $c$  để khảo sát. Tuy nhiên tùy theo ràng buộc  $\Phi$ , dạng của  $G$  và miền xác định phức tạp của  $c$  theo  $a$  và  $b$  khiến cho cách giải quyết này không hiệu quả. Để khắc phục điều đó phương pháp **ABC** thực hiện một phép đổi biến với  $A = a + b + c; B = ab + bc + ca; C = abc$ , bất đẳng thức ban đầu trở thành  $H(A, B, C) \geq 0$ . Đến đây ta cố định  $A, B$  và coi  $H$  là hàm một biến  $K$  theo  $C$ , ta có thể khảo sát  $K$  và đưa ra kết luận bài toán. Miền xác định của  $C$  lúc này sẽ là tập con nào đó của các khoảng được cho cụ thể trong các mệnh đề 1 và 2 mục I §19.

Cũng tương tự như vậy phương pháp **GLA** tiến hành đổi biến  $a, b, c$  thành  $p, R, r$  trong đó  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $XYZ$  có độ dài ba cạnh lần lượt là  $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ . Bất đẳng thức mới lúc này sẽ là  $H(p, R, r) \geq 0$ . Ta cố định  $R, r$  và coi  $H$  là hàm một biến  $K$  theo  $p$ , ta có thể khảo sát  $K$  và đưa ra kết luận bài toán. Chú ý là miền xác định của  $p$  lúc này sẽ là tập con của khoảng được cho cụ thể trong định lý III.3 §20.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: “đâu là sự khác biệt chủ yếu giữa **ABC** và **GLA**”. Thực ra có thể thấy ngay rằng hai phương pháp này chỉ hiệu quả khi các hàm một biến theo  $C$  và  $p$  đủ tốt (đơn điệu). Độ tốt của các hàm này lại phụ thuộc vào dạng của bất đẳng thức ban đầu. Kinh nghiệm cho thấy đổi biến theo **ABC** tuy đơn giản nhưng lại chỉ hiệu quả đối với các dạng đa thức, hoặc phân thức ít chứa căn, còn khi gặp các biểu thức nhiều tầng căn thì đánh giá hàm một biến theo  $C$  là rất khó khăn. Ngược lại, mặc dù đổi biến theo **GLA** hơi phức tạp, nhưng đối với các dạng chứa nhiều căn thức thì việc khảo sát hàm một biến theo  $p$  lại là khá thuận tiện. Như vậy sự khác biệt giữa **ABC** và **GLA** chủ yếu nằm ở phạm vi ứng dụng.

Một điểm đáng chú ý khác là với  $\Phi$  đủ tốt, chẳng hạn trong trường hợp  $\Phi = \{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0\}$  thì với mọi  $A, B$  cố định luôn tồn tại  $a, b, c$  sao cho trong ba số này có một số bằng 0 hoặc hai số bằng nhau để  $C$  đạt các giá trị biên, cũng như vậy, với mọi  $R, r$  cố định luôn tồn tại ba số thực không âm  $a', b', c'$  mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác  $X'Y'Z'$  với độ dài 3 cạnh là  $b' + c', c' + a', a' + b'$  cũng có  $R = R'$  và  $r = r'$ , khi đó  $p'$  cũng đạt các giá trị biên. Đó lần lượt là nội dung của các mệnh đề 3 và 4 mục I §19 và các ghi chú trong mục VII §20. Từ các mệnh đề đặc biệt này dẫn tới kết quả là nếu hàm  $K(C)$  và  $K(p)$  đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp trong ba biến  $a, b, c$  có một biến bằng 0 hoặc 2 biến bằng nhau. Hai kết quả khá tương đồng này giữa

**ABC** và **GLA** cho thấy rằng quá trình giám biến sau khi đổi biến đã dẫn tới một hiện tượng thú vị: thực chất ta đã gián tiếp thực hiện một phép “đồn biến”.

Mặt khác, nhận xét rằng trong **GLA** thực chất của việc cố định  $R$ ,  $r$  là cố định  $ab + bc + ca$  và  $\frac{a+b+c}{abc}$ , còn việc khảo sát  $p$  đồng nghĩa với khảo sát  $a + b + c$ . Định lý **ABC** mở rộng cho phép chọn tùy ý 2 trong 3 biến  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ ,  $abc$  để cố định và khảo sát theo biến còn lại. Về phía mình định lý biến số bằng nhau **EV** mục I, §21 trong trường hợp riêng  $n = 3$  và  $p = 0$  nghiệm lại một phần của định lý **ABC** mở rộng, ở đó ta cố định  $a + b + c$  và  $abc$  để khảo sát theo  $ab + bc + ca$ . Trong trường hợp  $n = 3$  và  $p = 2$  ta cũng thu được một phần định lý **ABC** mở rộng, ở đó ta cố định  $a + b + c$  và  $ab + bc + ca$  để khảo sát theo  $abc$ . Trong trường hợp tổng quát định lý biến số bằng nhau là một mở rộng thực sự triệt để khi cố định  $a + b + c$  và  $a^n + b^n + c^n$  ( $n = 3$ ) và khảo sát được một lớp hàm  $F$  xác định bởi một số điều kiện khá chặt chẽ. một là hàm  $F$  phải có tính chất phân lý biến:  $F(a, b, c) = f(a) + f(b) + f(c)$ , hai là đẳng thức của  $F$  phải đủ tốt ( $f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là lời nghiệm ngặt trên  $(0, +\infty)$ ), ngoài ra còn một số điều kiện bổ sung. Chính điều đó cũng khiến tầm ứng dụng của **EV** không thực sự rộng, đặc biệt đối với các bất đẳng thức hoán vị thì định lý **EV** gần như trở nên vô hiệu.

Câu hỏi đặt ra là với các bài toán hoán vị liệu có thể có những cách đổi biến khác tiện ích hơn không, và nếu phải chọn biến cố định trước khi khảo sát hàm số theo các biến còn lại thì chọn như thế nào là tối ưu. Vấn đề này đã từng được đề cập một chút trong mục VI §19, tuy nhiên cách giải quyết khi đó là dùng một phép đối xứng hóa, và như thế vẫn có rất nhiều yếu điểm. Định lý 1 và định lý 2 mục IX §20 là một hướng đi mới. Chú ý rằng một khó khăn trong các bài toán bất đẳng thức là việc có các số mũ, chính các số mũ khiến cho các phương pháp gặp rất nhiều khó khăn. Định lý 2 đã giúp ta xử lý vấn đề này. Cụ thể đối với các bất đẳng thức  $F(a, b, c) \geq 0$  ta tìm cách đưa về dạng  $A' + B' + C'$ , sau đó dựa vào định lý 2 và định lý 1, công việc còn lại là chứng minh các hệ kiểu (\*) (ví dụ 1 và ví dụ 2 mục IX §20) có nghiệm. Đây là một sự mở rộng thực sự của cả **ABC** và **GLA**. Và về thực chất, chúng ta đang phát triển tiếp hiện tượng “đồn biến gián tiếp” như đã đề cập ở trên.

Phép đồn biến gián tiếp này đặc biệt có lợi đối với các bất đẳng thức hoán vị, vì đối với các bất đẳng thức đó thì khó khăn chính nằm ở việc dấu đẳng thức xảy ra khi các biến  $a, b, c$  rất lệch nhau. Nhưng với phép đặt thích hợp, tất cả các trường hợp đó đều sẽ nằm trong một điều kiện duy nhất, chẳng hạn  $A = B$ . Chú ý rằng khó khăn chính nằm ở việc chọn phép đổi biến thích hợp để ta vừa đưa được bất đẳng thức về dạng mong muốn, vừa đảm bảo hệ (\*) nói trên có nghiệm.

Đây sẽ là một vấn đề mở thực sự khó, thách thức các bạn đọc ham mê sáng tạo bất đẳng thức.

Điều cuối cùng chúng tôi muốn nói đến là phương pháp chia để trị (**DAC**). Mặc dù phương pháp này được xếp cùng một mục nhưng tinh thần của nó lại hoàn toàn khác với các phương pháp **SOS**, **MV**, **ABC**, **GLA**, **EV**. Cụ thể đối với bất đẳng thức  $F(x) \geq 0$  trên miền  $D$ , phương pháp chia để trị tìm cách chia nhỏ miền  $D$  thành các miền  $D_1, D_2, \dots$  sao cho trên mỗi miền đó ta có thể có những đánh giá đơn giản, sau đó dựa vào kết quả các định lý nổi dài ta đi tới điều cần chứng minh. Đây là một tư tưởng rất phổ biến không chỉ trong lĩnh vực bất đẳng thức, mà còn rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực Toán học và đặc biệt là trong Tin học.

## CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

### § 23. NHỮNG BÀI VIẾT CHỌN LỌC VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

#### § 23.1. VỀ MỘT DÂY BẤT ĐẲNG THỨC BẬC BA VÀ ỨNG DỤNG

##### I. DÂY BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC BẬC 3

**Mệnh đề:** Với hai số thực dương  $x, y$  ta chứng minh được

$$\frac{xy(x+y)}{2} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} \leq \frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3} \quad (1)$$

Đây là một bất đẳng thức rất đơn giản dành cho học sinh THCS. Tuy nhiên chúng ta sẽ thấy nó có nhiều ứng dụng giá trị trong chứng minh bất đẳng thức. Trước hết ta sẽ chứng minh dây các bất đẳng thức này.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \geq \frac{xy(x+y)}{2} \Leftrightarrow (x+y)^3 \geq 4xy(x+y) \Leftrightarrow x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

$$\frac{x^3+y^3}{2} = \frac{(x+y)(3x^2-3xy+3y^2)}{6} = \frac{(x+y)[2(x-y)^2+(x^2+xy+y^2)]}{6} \geq \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}$$

$$\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} = \frac{(x+y)(4x^2+4xy+4y^2)}{24} = \frac{(x+y)[3(x+y)^2+(x-y)^2]}{24} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$$

Sử dụng bất đẳng thức  $AM - GM$  ta có

$$\frac{(x^3+y^3)}{2} = \frac{(x+y)^4(4x^2-4xy+4y^2)}{4(x+y)^3} \leq \frac{[(x+y)^2+(x+y)^2+(4x^2-4xy+4y^2)]^3}{27 \cdot 4(x+y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3}$$

Dễ dàng thấy rằng (1) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi  $x = y$ .

##### II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Sau đây ta sẽ nêu một số ví dụ minh họa việc ứng dụng dây bất đẳng thức (1)

**Bài 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad (2)$$

##### Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức (1), với mọi số thực dương  $d$ , ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \frac{c^3+d^3}{2} \geq \left(\frac{c+d}{2}\right)^3$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, và tiếp tục áp dụng bất đẳng thức (1) ta nhận được

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^3 \geq 2 \left[\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right)\right]^3 = \frac{1}{32}(a+b+c+d)^3$$

Với  $d = \frac{a+b+c}{3}$ , từ bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{2} \geq \frac{1}{32} \left(a+b+c + \frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 2 \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ hay}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq 4 \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ hay } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 2. [Crux]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, từ (2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} &\geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left[\frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{6}\right]^3 \geq \\ &\frac{1}{6^3} \cdot (3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)})^3 = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \end{aligned}$$

Do đó, kết hợp việc sử dụng bất đẳng thức  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , với mọi  $x, y > 0$ , ta được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}} + \frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}} + \frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq 2$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $\sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} \geq b + c$

Do đó  $a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} \geq a + b + c$ . Suy ra  $\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}} \leq \frac{b+c}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $\frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}} \leq \frac{c+a}{a+b+c}$ ,  $\frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq \frac{a+b}{a+b+c}$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{b+c}{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}} + \frac{c+a}{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}} + \frac{a+b}{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}} \leq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 4. [USA 1997]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

Do đó  $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$ . Suy ra  $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}$

Tương tự ta có  $\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)}$ ,  $\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)}$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{a+b+c} \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{abc}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 5. [Romania 1997]** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xyz = 1$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} + \frac{y^9 + z^9}{y^6 + y^3z^3 + z^6} + \frac{z^9 + x^9}{z^6 + z^3x^3 + x^6} \geq 2$$

**Chứng minh**

Bằng cách đặt  $a = x^3, b = y^3, c = z^3$  thì  $abc = 1$ . Bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq 2$$

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x+y}{3}$ , suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \\ & \geq \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c) \geq \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 2 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$  hay  $x = y = z = 1$ .

**Bài 6. [Poland 2007]** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$

Chứng minh rằng: 
$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d) - 4 \quad (3)$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có  $\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{x+y}$ . Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + d^2}{c+d} + \frac{d^2 + a^2}{d+a}$$



Vì vậy, để chứng minh (3), ta cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+d^2}{c+d} + \frac{d^2+a^2}{d+a} \leq 2(a+b+c+d) - 4$$

Ta lưu ý rằng  $a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ . Do đó, nếu đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$  thì ta

có được  $x+y+z+t=4$  và khi đó, (4) được viết dưới dạng  $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+t} + \frac{1}{t+x} \geq 2$ .

Sử dụng bất đẳng thức  $(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2, a_i > 0, i=1,2,\dots,n$ , ta được

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+t} + \frac{1}{t+x} \geq \frac{4}{(x+y)+(y+z)+(z+t)+(t+x)} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=t=1$  hay  $a=b=c=d=1$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $k \geq \frac{2}{3}$ . Chứng minh rằng:  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

#### Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{2}{3}(a+b+c) = \frac{2a+(b+c)+(b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{2a \cdot (b+c)^2} \text{ hay } \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{a}{a+b+c}$$

Do đó với  $k = \frac{2}{3}$  thì  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

Nếu  $k > \frac{2}{3}$ , ta đặt  $m = \frac{3}{2}k$  thì  $m > 1$ . Sử dụng  $\frac{x^m+y^m+z^m}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m, \forall x, y, z > 0$

Đặt  $x = \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}, y = \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}, z = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}$  thì  $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$

**Bài 8.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xyz = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y} \geq 1$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

$$\text{Chứng minh rằng } (a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$

**Bài 10.** [JBMO 2002, Shortlist] Cho  $a, b, c$  là các số thực dương.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3} + \sqrt[3]{4b^3+4c^3} + \sqrt[3]{4c^3+4a^3} \leq \frac{4a^2}{a+b} + \frac{4b^2}{b+c} + \frac{4c^2}{c+a}$$



## § 23. 2. ĐỔI BIẾN SỐ ĐỂ SÁNG TẠO VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phép đổi biến số ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức đã được đề cập khá nhiều trong cả cuốn sách. Thậm chí trong chương IV khi phân tích về hai phương pháp ABC và GLA chúng tôi đã chỉ ra cho các bạn thấy rằng phép đổi biến không chỉ giúp chúng ta có nhiều thuận lợi hơn trong việc chứng minh trực tiếp bất đẳng thức mà cũng rất có ích trong cả việc giảm biến hoặc thực hiện các phép “dồn biến gián tiếp”. Do những ý nghĩa đó, bài viết này sẽ tập trung tìm hiểu kỹ hơn về các nguyên tắc cơ bản của phép đổi biến.

### I. ĐỔI BIẾN ĐỂ SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC

Nếu bạn đọc theo dõi cuốn sách từ đầu cho đến trang này thì bạn đã trải qua rất nhiều phương pháp (các viên kim cương) để giải các bất đẳng thức khó và rất khó. Tuy nhiên, dù bạn có giải được một bài toán khó thì không có nghĩa là bạn đã chinh phục được nó 100% mà theo chúng tôi bạn chỉ chinh phục được 49%. Giá trị 51% còn lại sẽ thuộc về người sáng tác ra đề toán. Như vậy, người sáng tác ra đề toán được đánh giá cao hơn người giải bài toán bởi vì các bài toán đều không phải là “từ trên trời rơi xuống”, mà thường được bắt nguồn từ một vài ý tưởng nào đó. Vậy làm thế nào có thể sáng tạo ra một đề toán nói chung và một bất đẳng thức thú vị nói riêng? Câu trả lời luôn nằm trong tầm tay của các bạn vì có rất nhiều con đường để khám phá và sáng tạo ra các bài toán. Trong phần mở đầu của bài viết này chúng tôi sẽ tạo cảm xúc sáng tạo cho bạn từ những vấn đề đơn giản nhất trong bất đẳng thức.

**Bài toán 1.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  (1)

Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow 1 \geq 8 \cdot \frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b}$ . Đặt  $x = \frac{a}{b+c}$ ,  $y = \frac{b}{c+a}$ ,  $z = \frac{c}{a+b}$ , thì bất đẳng thức trở thành:  $1 \geq 8xyz$ . Vì bất đẳng thức này chứa các biến mới  $x, y, z$  nên ta cần phải thiết lập mối quan hệ giữa  $x, y, z$ . Để ý rằng:  $1+x = \frac{a+b+c}{b+c}$ , hay  $\frac{1}{1+x} = \frac{b+c}{a+b+c}$ . Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Như vậy chúng ta tạo ra bài toán mới sau đây (ký hiệu ST được hiểu là sáng tạo):

**ST 1.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$  (2).

Chứng minh rằng:  $8xyz \leq 1$

Không mấy khó khăn, ta có thể phát biểu bài toán tổng quát:

**ST 2.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ;  $\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = n-1$ . Chứng minh  $x_1 \dots x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$  (3)

Đây là một bài toán khó. Tuy nhiên nếu biết “nguồn gốc” của nó thì việc tìm ra lời giải sẽ đơn giản. Từ bài toán này chúng ta có thể đặc biệt hóa để tạo ra bài toán sau đây:

**ST 3.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} + \frac{3z}{1+z} = 1$ . Chứng minh  $xy^2z^3 \leq \frac{1}{5^6}$

Bây giờ xét  $x, y, z > 0$ . Áp dụng bài toán 1 với  $a = y + z, b = z + c, c = x + y$ , ta có:

$(S+x)(S+y)(S+z) \geq 8(S-x)(S-y)(S-z)$  ở đây  $S = x + y + z$ . Mặt khác, theo bài toán 1 thì:  $(S-x)(S-y)(S-z) \geq 8xyz$ , nên:  $(S+x)(S+y)(S+z) \geq 8^2xyz$ . Kết hợp lại ta nhận được:  $(S^2 - x^2)(S^2 - y^2)(S^2 - z^2) \geq 8^3 x^2 y^2 z^2$ . Từ đó ta có bài toán 4

**ST 4.** Cho  $x, y, z > 0$ . Đặt  $S = x + y + z$ . Chứng minh  $\left(\frac{S^2}{x^2} - 1\right)\left(\frac{S^2}{y^2} - 1\right)\left(\frac{S^2}{z^2} - 1\right) \geq 8^3$  (4)

Để “che dấu” bớt S, ta cho  $S \leq 1$  và nhận được bài toán mới:

**ST 5.** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) > 8^3$  (5)

Đây là một bài toán khá hay. Nhưng ta sẽ thấy nó hay hơn qua mối quan hệ với bài toán dưới đây:

**ST 6.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$  (6)

(IMO2001)

Đặt  $x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}$ ;  $y = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}}$ ;  $z = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}$ , bất đẳng thức cần trở thành:

$x + y + z \geq 1$ . Bây giờ ta sẽ tìm mối liên hệ giữa  $x, y, z$ . Từ đẳng thức  $\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2} = 1$  ta thiết lập được mối quan hệ giữa  $x, y, z$ :

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2 + 8bc} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{8bc}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = 8^3$$

Như vậy ta cần chứng minh bài toán sau:

**ST 7.** Cho  $x, y, z > 0$ ,  $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = 8^3$ . Chứng minh rằng:  $x + y + z \geq 1$  (7)

Rõ ràng đây là một phát biểu theo dạng “ngược” của bài toán 5. Và đây cũng là một lời giải cho bài 6:

Bây giờ chúng ta tiếp cận bài toán 1 với  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh một tam giác. Sử dụng định lý hàm số sin trong tam giác ta có  $a = 2R \sin A; b = 2R \sin B; c = 2R \sin C$  khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right) \left(2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}\right) \left(2 \sin \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2}\right) \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

Biến đổi và rút gọn tiếp theo ta nhận được một bất đẳng thức khá hay trong tam giác.

**ST 8.** Chứng minh:  $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$  với mọi tam giác ABC

Như vậy từ một bài toán (1) rất đơn giản chúng ta có thể đổi biến để sáng tạo ra 8 bài toán mới. Chúng ta sẽ thực hiện tiếp ý tưởng này với một bài toán sau đây.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc} \quad \forall a, b, c \geq 0.$$

Đây cũng là một bài toán quen thuộc với nhiều bạn. Cách chứng minh ngắn nhất là đánh giá:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \text{ suy ra}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{ab(a+b+c)} = \sum_{cyc} \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Bây giờ đặt  $x = \frac{abc}{b^3 + c^3 + abc}; y = \frac{abc}{c^3 + a^3 + abc}; z = \frac{abc}{a^3 + b^3 + abc}$ , thì bất đẳng thức đã cho

trở thành  $x + y + z \leq 1$ . Từ đẳng thức  $\frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2} = 1$  suy ra mối quan hệ giữa  $x, y, z$  như sau:

$$\frac{1}{x} = \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + 1 \Rightarrow \frac{2a^2}{bc} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - 1\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - 1\right) = 8$$

Để cho gọn, ta thay đổi hình thức, thế  $x, y, z$  bởi các ký hiệu nghịch đảo  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$  và đi đến:

**ST 1.** Cho  $x, y, z > 1$  thỏa mãn điều kiện:  $(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) = 8$

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$ .

Để ý rằng nếu  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  thì  $x, y, z > 1$ , ta sẽ phát biểu lại bài toán dưới dạng “ngược”:

**ST 2.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện:  $xy + yz + zx = xyz$

Chứng minh rằng:  $(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) \leq 8$

Qua 2 ví dụ nhỏ trên, có lẽ các bạn cũng đã hình dung ra một cách “sáng tạo bài toán mới” không tầm thường từ những bài toán rất đơn giản. Để rèn luyện tư duy sáng tạo bạn cần phải xây dựng thói quen lật đi lật lại vấn đề, suy nghĩ mở rộng, phân biệt giữa hình thức và bản chất.

Chính việc khai thác bài toán dưới các góc độ khác nhau sẽ giúp bạn thu được rất nhiều kiến thức quan trọng hơn rất nhiều so với việc đọc lời giải của nó mang lại, và cao hơn nữa nó sẽ giúp bạn sáng tạo ra các bài toán mới. Bây giờ các bạn hãy rèn luyện việc sáng tạo theo ý tưởng đổi biến của 2 ví dụ trên qua các bài toán sau:

**Bài 3.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{1}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{1}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

**Bài 6.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c = abc$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 \left( \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \right)$$

**Bài 8.** a. Chứng minh rằng:  $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad \forall a, b, c > 0$

b. Chứng minh rằng:  $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$  với  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực phân biệt.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2$$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{4}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$a(b+c)^3 + b(c+a)^3 + c(a+b)^3 \geq 0$$

**Bài 13.** Cho  $a, b, c \in [1, 2]$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$$

**Bài 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

## II. PHÉP ĐỔI BIẾN NGHỊCH ĐẢO TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Khi giải toán, mục đích chung của phép đổi biến số là nhằm chuyển tình thế từ bài toán khó biến đổi sang trạng thái dễ biến đổi hoặc đưa về các dạng toán gần gũi hơn. Chúng ta có thể gặp kỹ thuật đổi biến số không chỉ ở trong chứng minh bất đẳng thức mà còn ở trong các dạng toán giải phương trình, giới hạn, tích phân ... Trong các chương trước chúng ta cũng bắt gặp rất nhiều lần các bất đẳng thức giải bằng phương pháp đổi biến số, bây giờ chúng tôi xin giới thiệu một kỹ thuật đổi biến có thể đặt tên là: “Phép đổi biến nghịch đảo”.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{ab+bc+ca} + \frac{bcd}{bc+cd+da} + \frac{cda}{cd+da+ab} + \frac{dab}{da+ab+bc} \leq \frac{a+b+c+d}{3} \quad (1)$$

*Phân tích và tìm tòi lời giải*

**Bước 1:** Đánh giá độ chặt của bất đẳng thức (1)

Một hướng tư duy đơn giản là sử dụng **AM – GM** để có đánh giá đại diện:

$$\frac{abc}{ab+bc+ca} \leq \frac{(a+b+c)^3}{27(ab+bc+ca)}, \text{ tương tự cho 3 biểu thức còn lại ta được, khi đó ta có:}$$

$$VT(1) \leq \frac{(a+b+c)^3}{27(ab+bc+ca)} + \frac{(b+c+d)^3}{27(bc+cd+da)} + \frac{(c+d+a)^3}{27(cd+da+ab)} + \frac{(d+a+b)^3}{27(da+ab+bc)}$$

Từ đó cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{9(ab+bc+ca)} + \frac{(b+c+d)^3}{9(bc+cd+da)} + \frac{(c+d+a)^3}{9(cd+da+ab)} + \frac{(d+a+b)^3}{9(da+ab+bc)} \leq a+b+c+d \quad (1')$$

Tuy nhiên do  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$  nên ta có đánh giá:

$$\frac{(a+b+c)^3}{9(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9(ab+bc+ca)} = \frac{a+b+c}{3}$$

$$\text{Tương tự suy ra } VT(1') \geq \frac{a+b+c}{3} + \frac{b+c+d}{3} + \frac{c+d+a}{3} + \frac{d+a+b}{3} = a+b+c+d.$$

Như vậy cách đánh giá này không thành công và bài toán của chúng ta là có ý nghĩa.

**Bước 2:** Bây giờ ta sẽ bình tĩnh để tìm lời giải bài toán theo một lối tư duy khác sâu sắc hơn. Đề

ý là:  $\frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{1}{\frac{ab+bc+ca}{abc}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ , do đó để giúp bài toán trở nên “gọn gàng”

với một hình thức dễ chịu hơn, ta đổi biến bằng cách đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$ .

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{y+z+t} + \frac{1}{z+t+x} + \frac{1}{t+x+y} \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \quad (2)$$

Theo *AM - GM* ta có:  $VP(2) = \frac{1}{9} \sum_{cyc} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{9} \sum_{cyc} \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{1}{3} \sum_{cyc} \frac{1}{x+y+z} = VT(2)$

**Nhận xét:** Việc đổi biến bằng cách lấy nghịch đảo  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$  là khá tự nhiên, và đây cũng chính là một kĩ thuật mà chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn trong bài viết này. Thực ra bằng một kĩ thuật đánh giá khác khó nhìn hơn một chút, cũng cho ta kết quả:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 27xyz \Rightarrow \frac{xyz}{xy+yz+zx} \leq \frac{x+y+z}{27}. \text{ Như vậy đổi biến trong bài}$$

này chưa hẳn là con đường duy nhất, tuy nhiên ở ví dụ sau các bạn sẽ nhận thấy rằng cách đổi biến như trên phải là con đường tắt yếu:

$$\text{Bài 2. Cho } a, b, c, d > 0 \text{ thỏa mãn: } \frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} + \frac{1}{2+d^2} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng:  $abcd \geq ab+ac+ad+bc+cd+db$

**Phân tích và tìm tòi lời giải**

$$\text{Ta có: } abcd \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}$$

Để bài toán đơn giản hơn ta đặt  $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}, d = \frac{1}{t}$  và quý về bài toán sau:

$$\text{Cho } x, y, z, t > 0 \text{ thỏa mãn: } \frac{x^2}{2x^2+1} + \frac{y^2}{2y^2+1} + \frac{z^2}{2z^2+1} + \frac{t^2}{2t^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng:  $1 \geq xy+xz+xt+yz+yt+zt$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2x^2+1} + \frac{y^2}{2y^2+1} + \frac{z^2}{2z^2+1} + \frac{t^2}{2t^2+1} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{2(x^2+y^2+z^2+t^2+2)}$$

$$\text{Suy ra } x^2+y^2+z^2+t^2+2 \geq (x+y+z+t)^2 \Leftrightarrow 1 \geq xy+xz+xt+yz+yt+zt \text{ (đpcm)}$$

Qua hai ví dụ đơn giản có lẽ các bạn đã phần nào thấy được vẻ đẹp của phương pháp đổi biến. Tuy nhiên để cảm nhận rõ hơn sức mạnh của phương pháp này, chúng ta hãy tiếp tục sử dụng đổi biến để giải quyết ví dụ rất đặc sắc sau đây:

**Bài 3.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $\sqrt[3]{5} \min(a, b, c) > \max(a, b, c)$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{5a^3-bcd} + \frac{1}{5b^3-cda} + \frac{1}{5c^3-abc} + \frac{1}{5d^3-abc} \geq \frac{64}{(a+b+c+d)^3} \quad (1)$$

**Phân tích và tìm tòi lời giải**

**Bước 1: Tìm hiểu bài toán:**

Điều kiện  $\sqrt[3]{5} \min(a, b, c) > \max(a, b, c)$  là cần thiết vì giả sử bỏ điều kiện này đi thì bài toán không còn đúng nữa, chẳng hạn cho  $a=10$  và  $b=c=d=1$ . Điều kiện này có ý nghĩa là để xác lập các bất đẳng thức đúng  $5a^3-bcd > 0, 5b^3-cda > 0, 5c^3-dab > 0, 5d^3-abc > 0$ .



**Bước 2:** Trở lại vấn đề, phân tích bài toán, rõ ràng khi nhìn vào bất đẳng thức (1) chúng ta có cảm giác là dường như bất đẳng thức này khá chặt và quả thật cũng rất khó tìm được một cách đánh giá khả thi để công phá bài toán (các bạn có thể thử bằng các đánh giá quen thuộc mà các bạn đã biết để cảm nhận rõ hơn điều này). Tuy nhiên hãy thử một phép đổi biến nho nhỏ:

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ ,  $t = \frac{1}{d}$ . Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^2}{5yzt - x^3} + \frac{y^2}{5ztx - y^3} + \frac{z^2}{5txy - z^3} + \frac{t^2}{5xyz - t^3} \geq \frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz + yzt + ztx + txy)^3} \quad (2)$$

Do  $\frac{x^2}{5yzt - x^3}, \frac{y^2}{5ztx - y^3}, \frac{z^2}{5txy - z^3}, \frac{t^2}{5xyz - t^3} > 0$  nên theo bất đẳng thức CBS ta có:

$$VT(2) \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{5(xyz + yzt + ztx + txy) - (x^3 + y^3 + z^3 + t^3)} \geq \frac{(x + y + z + t)^2}{4(xyz + yzt + ztx + txy)}$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh } \frac{(x + y + z + t)^2}{4(xyz + yzt + ztx + txy)} \geq \frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz + yzt + ztx + txy)^3}$$

$$\text{Hay } (x + y + z + t)^2 (xyz + yzt + ztx + txy)^2 \geq 256x^2y^2z^2t^2.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM - GM. Vậy ta có điều phải chứng minh!

**Nhận xét:** Ở bất đẳng thức (1) ta nhận thấy  $5a^3$  là “đại lượng mạnh” trong khi  $bcd$  là “đại lượng yếu”, từ đó ta thấy nếu  $5a^3 - bcd$  càng lớn thì  $\frac{1}{5a^3 - bcd}$  càng nhỏ, đây chính là nguyên nhân gây cho ta cảm giác rằng bất đẳng thức (1) khá chặt, và cũng gây khó dễ trong các phép đánh giá. Tuy nhiên bằng cách đổi biến nghịch đảo  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ ,  $t = \frac{1}{d}$  ta nhận được bất đẳng thức (2) với một tình trạng khác hẳn: trong bất đẳng thức này  $5yzt$  là đại lượng yếu còn  $x^3$  là đại lượng mạnh, nên  $5yzt - x^3$  càng nhỏ, đồng nghĩa với  $\frac{1}{5yzt - x^3}$  càng lớn. Do đó

bất đẳng thức (1) đã trở thành bất đẳng thức (2) khá lỏng. Để các bạn hiểu thêm về hiệu quả của phép đổi biến này chúng ta xét thêm một bài toán khó sau đây:

**Bài 4.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Tìm hằng số  $k > -1$  bé nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(ka + \sqrt{bc})(ka + \sqrt{cd})(ka + \sqrt{db})}} \geq \frac{4}{k+1} \quad (1)$$

#### Phân tích và tìm tòi lời giải

**Bước 1:** Phân tích bài toán, rõ ràng đẳng thức xảy ra tại vị trí thứ nhất mà ai cũng dễ dàng nhận ra đó là  $a = b = c = d$ . Tuy nhiên để tìm được  $k$  tốt nhất thì ta cần phải xác định thêm một vị trí khác nữa mà đẳng thức có thể xảy ra. Tất nhiên trong những trường hợp như thế này thì vị trí đầu bằng ở biên là nơi ta thường hay hướng đến:



Thử cho  $a$  tiến tới 0 và  $b, c, d$  là hằng số khi đó VT(1) tiến tới 1, nên để bất đẳng thức (1) luôn đúng thì phải có  $1 \geq \frac{4}{1+k}$  hay  $k \geq 3$ . Nhiều khả năng  $k = 3$  là giá trị nhỏ nhất để bất đẳng thức (1) đúng và ta sẽ chứng minh điều này.

**Bước 2:** Chứng minh cho trường hợp  $k = 3$ . Lúc này bất đẳng thức xảy ra tại hai chỗ đó là  $a = b = c = d$  hoặc  $a \rightarrow 0$  ( $b, c, d$  là các hằng số bất kỳ). Do đó trong các đánh giá ta cần phải đặc biệt chú ý sao cho dấu bằng phải đảm bảo xảy ra tại hai vị trí nói trên. Khi  $k = 3$ , (1) trở

thành:  $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(3a + \sqrt{bc})(3a + \sqrt{cd})(3a + \sqrt{db})}} \geq 1$  (2). Theo bất đẳng thức **Minkowski** ta có:

$$3a + \sqrt{bc} = \sqrt{(3a)(3a)} + \sqrt{bc} \leq \sqrt{(3a+b)(3a+c)}$$

$$3a + \sqrt{cd} = \sqrt{(3a)(3a)} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(3a+c)(3a+d)}$$

$$3a + \sqrt{db} = \sqrt{(3a)(3a)} + \sqrt{db} \leq \sqrt{(3a+d)(3a+b)}$$

Nhân vế theo vế suy ra  $(3a + \sqrt{bc})(3a + \sqrt{cd})(3a + \sqrt{db}) \leq (3a+b)(3a+c)(3a+d)$

Do đó để chứng minh (2) ta cần chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(3a+b)(3a+c)(3a+d)}} \geq 1$  (3)

Bất đẳng thức dưới mẫu có dạng  $(a+3b)(a+3c)(a+3d)$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**:

$$(a+3b)(a+3c)(a+3d) \leq \left( \frac{a+3b+a+3c+a+3d}{3} \right)^3 = (a+b+c+d)^3$$

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ ,  $t = \frac{1}{d}$  khi đó:

$$VT(3) = \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{x^3}{(3y+x)(3z+x)(3t+x)}} \geq \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{x^3}{\left(\frac{3y+x+3z+x+3t+x}{3}\right)^3}} = \sum_{cyc} \frac{x}{x+y+z+t} = 1$$

Cuối cùng các bạn đọc hãy tự giải các bài tập sau để rèn luyện thêm về kỹ thuật đổi biến này

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $2 \min(a, b, c) > \max(a, b, c)$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 - bc} + \frac{1}{4b^2 - ca} + \frac{1}{4c^2 - ab} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

**Bài 6.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt[n-1]{\frac{a_2 a_3 \dots a_n}{((n-1)a_1 + a_2)((n-1)a_1 + a_3) \dots ((n-1)a_1 + a_n)}} \geq 1$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d > 0$  và  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{1+2d} + \frac{bcd}{1+2a} + \frac{cda}{1+2b} + \frac{dab}{1+2c} \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

### § 23.3. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ TẠI BIÊN

Phương pháp này lần đầu tiên được thể hiện ở bài toán 1 dưới đây trong cuốn sách của tác giả *Phương pháp mới giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán* do Nhà xuất bản Giáo dục xuất bản năm 1995, sau này được trích dẫn trong phần "*Những lời giải ấn tượng*" của cuốn sách *Ba thập kỷ đề thi đại học môn Toán* do Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM xuất bản năm 2000. Bài viết này được hoàn thiện trên cơ sở tham khảo một số ví dụ minh họa của bài viết đăng trong tạp chí *Mathematical Reflektions* 4/2006 và các tài liệu trên Internet.

#### I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ CÁC ĐỊNH DẠNG HÌNH HỌC CƠ BẢN

##### 1. Nguyên lý chung

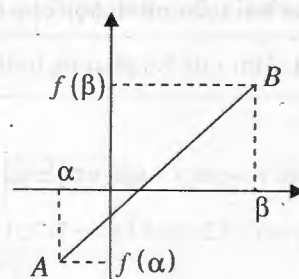
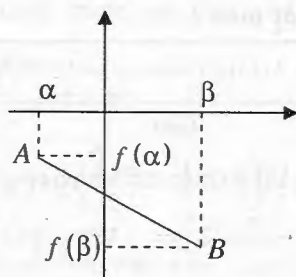
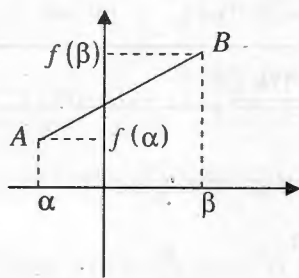
1.1. Bất phương trình (bất đẳng thức)  $f(x) \geq m$  đúng  $\forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) \geq m$

1.2. Bất phương trình (bất đẳng thức)  $f(x) \leq m$  đúng  $\forall x \in D \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) \leq m$

1.3. Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $D$  và  $\min_{x \in D} f(x) = m$ ;  $\max_{x \in D} f(x) = M$  thì tập giá trị của  $f(x)$

là  $[m; M]$  hay  $m \leq f(x) \leq M$  với mọi  $x \in D$

##### 2. Hàm bậc nhất



Hàm số  $f(x) = ax + b, \forall x \in [\alpha, \beta]$  có đồ thị là một đoạn thẳng nên có các tính chất sau

$$2.1. f(x) = ax + b \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \geq 0$$

$$2.2. f(x) = ax + b \leq 0, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq 0$$

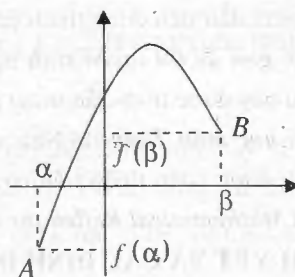
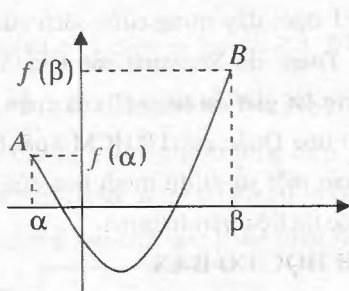
$$2.3. f(x) = ax + b \geq m, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq m \\ f(\beta) \geq m \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \geq m$$

$$2.4. f(x) = ax + b \leq m, \forall x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq m \\ f(\beta) \leq m \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq m$$

2.5. Nếu  $f(x) = ax + b, \forall x \in [\alpha, \beta]$  thì  $\min\{f(\alpha), f(\beta)\} \leq f(x) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

2.6. Nếu hàm  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$  là hàm bậc nhất theo từng biến số  $x_k \in [\alpha, \beta]$  thì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất  $\Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n \in \{\alpha, \beta\}$

### 3. Hàm bậc hai và hàm lồi, hàm lõm



3.1. Nếu  $f(x) = ax^2 + bx + c, (a > 0)$  với  $x \in [\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$

3.2. Nếu  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$

3.3. Nếu  $f(x) = ax^2 + bx + c, (a < 0)$  với  $x \in [\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \geq \min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$

3.4. Nếu  $f(x)$  là hàm lõm trên  $[\alpha, \beta]$  thì  $f(x) \geq \min\{f(\alpha), f(\beta)\}, \forall x \in [\alpha, \beta]$

## II. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

### 1. Các bài toán minh họa cho hàm bậc nhất

**Bài 1.** Tìm  $x$  để bất phương trình  $x^2 + 2x(\sin y + \cos y) + 1 \geq 0$  đúng với  $\forall y \in \mathbb{R}$ .

*Giải*

Đặt  $u = \sin y + \cos y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , khi đó biến đổi bất phương trình về dạng sau:

$$g(u) = (2x)u + (x^2 + 1) \geq 0, \forall u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Leftrightarrow \min_{u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} g(u) \geq 0$$

Do đồ thị  $y = g(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  nên

$$\min_{u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} g(u) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(-\sqrt{2}) \geq 0 \\ g(\sqrt{2}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq \sqrt{2} + 1 \\ |x| \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

**Bài 2.** [Mathematical Reflections 4/2006]

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$  Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$  (1)

*Chứng minh*

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + (b+c)^2 - 2bc + abc \geq 4 \Leftrightarrow a^2 + (3-a)^2 + (a-2)bc \geq 4$$

$$\Leftrightarrow f(u) = (a-2)u + 2a^2 - 6a + 5 \geq 0 \text{ trong đó } 0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(3-a)^2.$$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(3-a)^2\right]$ . Nhìn vào hai đầu mút ta có:

$$f(0) = 2a^2 - 6a + 5 = 2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0; f\left(\frac{1}{4}(3-a)^2\right) = \frac{1}{4}(a-1)^2(a+2) \geq 0$$

nên  $f(u) \geq 0; u \in \left[0; \frac{1}{4}(3-a)^2\right]$  hay  $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$

**Bài 3.** Chứng minh rằng:  $2(a+b+c)-(ab+bc+ca) \leq 4, \forall a, b, c \in [0, 2]$ .

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức về dạng sau  $f(a) = (2-b-c)a + 2(b+c) - bc \leq 4, \forall a, b, c \in [0, 2]$

Đồ thị  $y = f(a)$  là một đoạn thẳng với  $a \in [0, 2]$  nên  $f(a) \leq \max\{f(0); f(2)\}$

Ta có  $f(0) = 4 - (2-b)(2-c) \leq 4; f(2) = 4 - bc \leq 4 \Rightarrow f(a) \leq 4, \forall a, b, c \in [0, 2]$

**Bài 4. [IMO 25 – Tiệp Khắc 1984]**

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng:  $ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$  (1)

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow a(b+c) + (1-2a)bc \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow a(1-a) + (1-2a)bc \leq \frac{7}{27}$

$\Leftrightarrow f(u) = a(1-a) + (1-2a)u \leq \frac{7}{27}$  với  $0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$ . Nhìn vào 2 đầu mút ta có

$$f(0) = a(1-a) \leq \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$$

$$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) = \frac{1}{4}(-2a^3 + a^2 + 1) = \frac{1}{4}\left[\frac{28}{27} - 2\left(a - \frac{1}{3}\right)^2\left(a + \frac{1}{6}\right)\right] \leq \frac{7}{27}$$

Vậy  $f(u) \leq \frac{7}{27}, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$  hay  $ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh:  $a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}$  (1)

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1-c)^3 - 3ab(1-c) + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow ab(9c-3) + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(u) = (9c-3)u + 3c^2 - 3c + \frac{3}{4} \geq 0 \text{ với } 0 \leq u = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-c)^2}{4}$$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right]$ .

Nhìn vào 2 đầu mút ta có  $f(0) = 3\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; f\left(\frac{1}{4}(1-c)^2\right) > 0$

Vậy  $f(u) \geq 0, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right]$  hay  $a^3+b^3+c^3+6abc \geq \frac{1}{4}$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh:  $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1$  (1)

**Chứng minh**

Biến đổi bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow 4[(a+b)^3 - 3ab(a+b)] + 4c^3 + 15abc \geq 1$

$$\Leftrightarrow 4[(1-c)^3 - 3ab(1-c)] + c^3 + 15abc \geq 1 \Leftrightarrow 4(1-c)^3 + 12ab(c-1) + 4c^3 + 15abc \geq 1$$

$$\Leftrightarrow f(u) = (27c-12)u + 4c^3 + 4(1-c)^3 \geq 1 \text{ với } 0 \leq u = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-c)^2}{4}$$

Đồ thị  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right]$ . Nhìn vào 2 đầu mút ta có

$$f(0) = 3(2c-1)^2 + 1 \geq 1; f\left(\frac{1}{4}(1-c)^2\right) = 1 + (1-c)^2 \left(\frac{19}{4} - c\right) \geq 1$$

$$\text{Vậy } f(u) \geq 1, \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-c)^2\right] \text{ hay } 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1.$$

**Bài 7.** Chứng minh rằng:  $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$

**Chứng minh**

Biểu diễn bất đẳng thức dưới dạng hàm bậc nhất biến số  $a$ , tham số  $b, c, d$ , ta có:

$$f(a) = [1 - (1-b)(1-c)(1-d)]a + (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d \geq 1, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$$

Đồ thị  $y = f(a), \forall a \in [0, 1]$  là một đoạn thẳng nên  $\min_{a \in [0, 1]} f(a) = \min\{f(0), f(1)\}$

$$\text{Ta có } f(1) = b + c + d + 1 \geq 1, \forall b, c, d \in [0, 1]$$

$$f(0) = (1-b)(1-c)(1-d) + b + c + d \Leftrightarrow g(b) = [1 - (1-c)(1-d)]b + (1-c)(1-d) + c + d$$

Đồ thị  $y = g(b), \forall b \in [0, 1]$  là một đoạn thẳng nên  $\min_{b \in [0, 1]} g(b) = \min\{g(0), g(1)\}$

$$\text{Ta có } g(1) = c + d + 1 \geq 1; g(0) = (1-c)(1-d) + c + d = 1 + cd \geq 1 \Rightarrow f(0) = g(b) \geq 1, \forall b \in [0, 1]$$

$$\text{Vậy } f(a) \geq 1 \text{ hay } (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$$

**Bài 8.** Chứng minh:  $S = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1, \forall a, b, c \in [0, 1]$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ , khi đó

$$S \leq \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \Leftrightarrow f(a) = \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) - 1 \leq 0, \forall a, b, c \in [0, 1]$$

Đồ thị  $y = f(a), \forall a \in [0, 1]$  là một đoạn thẳng nên  $\max_{a \in [0, 1]} f(a) = \max\{f(0), f(1)\}$ . Ta có

$$f(0) = \frac{b+c}{b+c+1} + bc - (b+c) = \frac{bc(b+c) - (b^2 + c^2) - bc}{b+c+1} \leq \frac{(b^2 + c^2)\left(\frac{b+c}{2} - 1\right) - bc}{b+c+1} \leq 0$$

$$f(1) = \frac{1+b+c}{b+c+1} - 1 = 0. \text{ Từ đó suy ra } f(a) \leq 0, \forall a, b, c \in [0, 1] \Rightarrow S \leq 1, \forall a, b, c \in [0, 1]$$

**Bài 9.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} \in [-1, 1]$  với  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{2n} x_{2n+1} + x_{2n+1} x_1$$

**Giải**

Nếu coi  $x_1$  là biến số và cố định các biến số  $x_2, x_3, \dots, x_n$  thì  $S$  là hàm bậc nhất với  $x_1$  nên

$\min_{x_1 \in [-1, 1]} S(x_1) = \min\{S(-1), S(1)\}$ . Làm tương tự với các biến số  $x_k$  suy ra  $\min S$  đạt tại các giá

trị  $x_k \in \{-1, 1\}, \forall k = \overline{1, 2n+1}$ . Do có  $2n+1$  số hạng  $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$  nên trong tập hợp

$\{x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_{2n} x_{2n+1}, x_{2n+1} x_1\}$  tồn tại ít nhất 1 phần tử nhận giá trị dương. Không mất tính

tổng quát, giả sử  $x_1 x_2 = 1$ . Khi đó  $S = 1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2n} x_{2n+1} + x_{2n+1} x_1 \geq 1 - 1 - 1 - \dots - 1 = 1 - 2n$ .

Với  $x_1 = x_2 = 1; x_3 = x_5 = \dots = x_{2n+1} = -1; x_4 = x_6 = \dots = x_{2n} = 1$  thì  $\min S = 1 - 2n$

## 2. Các bài toán minh họa cho tam thức bậc hai hoặc hàm lồi

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d \in [0, 1]$ , chứng minh rằng:

$$a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \leq \frac{8}{27}$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp đại diện  $b \geq d$ . Đặt về trái là hàm số

$f(a, b, c, d) = a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2)$  hay biến đổi dưới dạng

$$f(a, b, c, d) = (b-d)a^2 + (d^2 - b^2)a + b^2 c + c^2 d - bc^2 - cd^2$$

Với  $b \geq d$  thì  $f(a, b, c, d)$  là một tam thức bậc hai biến  $a$ , với hệ số bậc hai  $b-d \geq 0$  (hàm lồi)

nên ta có  $f(a, b, c, d) \leq \max\{f(0, b, c, d), f(1, b, c, d)\}$  với mọi  $a \in [0, 1]$

Ta sẽ chứng minh  $f(0, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$  và  $f(1, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$ .

• Chứng minh  $f(0, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$

Thật vậy, ta xét  $f(0, b, c, d) = c(b-d)(b+d-c)$  với hai khả năng sau:

+ Nếu  $b+d-c < 0$  thì  $f(0, b, c, d) = c(b-d)(b+d-c) \leq 0 < \frac{8}{27}$ .

+ Nếu  $b+d-c > 0$  thì theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$f(0, b, c, d) \leq \left( \frac{c+b-d+b+d-c}{3} \right)^3 = \left( \frac{2b}{3} \right)^3 \leq \frac{8}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} a=0, b=1 \\ c=b-d=b+d-c \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c, d) = \left(0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

• Chứng minh  $f(1, b, c, d) \leq \frac{8}{27}$

Thật vậy biểu diễn  $f(1, b, c, d) = (1-c)d^2 + (c^2-1)d + b + b^2c - b^2 - bc^2$

là một tam thức bậc hai nên ta có  $f(1, b, c, d) \leq \max\{f(1, b, c, 1), f(1, b, c, 0)\}$

$+ f(1, b, c, 1) = (1-b)c^2 + (b^2-1)c + b - b^2 \leq \max\{f(1, b, 1, 1); f(1, b, 0, 1)\}$

$f(1, b, 1, 1) = 0; f(1, b, 0, 1) = b - b^2 = b(1-b) \leq \left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{8}{27}$

$+ f(1, b, c, 0) = b + b^2c - b^2 - bc^2 = b(1-c)(1+c-b) \leq \left[\frac{b+(1-c)+1+c-b}{3}\right]^3 = \frac{8}{27}$

**Kết luận:** Tổng hợp các khả năng đã xét ta có

$f(a, b, c, d) = (b-d)a^2 + (d^2-b^2)a + b^2c + c^2d - bc^2 - cd^2 \leq \frac{8}{27}, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$

$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \leq \frac{8}{27}, \forall a, b, c, d \in [0, 1]$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c, d)$  là một hoán vị  $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Giả sử  $a \leq b \leq c$ . Khi đó  $\max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\} = (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2$  và ta có

(1)  $\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x+a+c) - \sqrt[3]{xac} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2, a \leq x = b \leq c$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\sqrt{ac}, f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3}\sqrt{ac} \geq 0, \forall x \geq 0$ . Suy ra  $f(x)$  lồi trên  $[0, +\infty)$

và do đó  $f(x) = \max\{f(a), f(c)\}$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $f(a) \geq f(c)$ . Bài toán

chuyển thành việc chứng minh  $f(a) = \frac{1}{3}(2a+c) - \sqrt[3]{a^2c} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 = a+c-2\sqrt{ac}$ .

$\Leftrightarrow 2\sqrt{ac} \leq \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c + \sqrt[3]{a^2c} \Leftrightarrow 6\sqrt{ac} \leq a+2c+3\sqrt[3]{a^2c}$ . Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$a+2c+3\sqrt[3]{a^2c} = a+c+c+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c} \geq 6\sqrt[6]{a.c.c.a^2.c} = 6\sqrt{ac}$  (đpcm)

**Bài 3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực không âm, chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}$$

**Chứng minh**



**Bổ đề:** Nếu  $f(x) = x - nq^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{x} + p$  với  $x \in [a, b]$  với  $q \geq 0$  thì  $f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}$ .

**Áp dụng:** Giả sử  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , khi đó  $\max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \left( \sqrt[n]{a_i} - \sqrt[n]{a_j} \right)^2 \right\} = \left( \sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_n} \right)^2$ .

và ta cần chứng minh  $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n} \leq 0$ .

Đặt  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n}$

Với cách coi  $a_k \in [a_n, a_1]; k = \overline{1, n}$  làm biến số và cố định các biến còn lại thì dễ ý rằng

với  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  nên  $\sqrt[n]{\prod_{i \neq k} a_i} \in [a_n, a_1]; \forall k = \overline{2, n-1}$  và hàm  $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$  có

dạng hàm  $f(x)$ . Áp dụng bổ đề bằng cách thay  $a_k$  bởi  $a_1, a_n$  vào vế phải dưới đây ta có

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max\{F(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_1, a_{k+1}, \dots, a_n), F(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_n, a_{k+1}, \dots, a_n)\}$$

Áp dụng lần lượt cho  $k = 2, 3, \dots, n-1$  ta có  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max_{t_i \in \{a_1, a_n\}} F(t_1, t_2, \dots, t_n)$

Giả sử có  $m$  số  $t_i (1 \leq i \leq n)$  bằng  $a_1; (n-m)$  số  $t_i (1 \leq i \leq n)$  bằng  $a_n$ . Khi đó,

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, \dots, t_n) &= ma_1 + (n-m)a_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n} \\ &= (m-n)a_1 - ma_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} + 2n\sqrt{a_1 a_n} \end{aligned}$$

Nếu  $m \leq \frac{n}{2}$ , ta đặt  $P(a_n) = (m-n)a_1 - ma_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} + 2n\sqrt{a_1 a_n}$

$$\text{Tính đạo hàm, } P'(a_n) = -m - (n-m) \sqrt[n]{\frac{a_1^n}{a_n^{n-m}}} + n \sqrt{\frac{a_1}{a_n}} = m \left( \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}} - 1 \right) + n \left( \sqrt{\frac{a_1}{a_n}} - \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}} \right)$$

$$\text{Vì } a_n \leq a_1 \text{ nên } \frac{a_1}{a_n} \geq 1, \text{ suy ra } \sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}} \geq 1 \text{ và } \left( \frac{a_1}{a_n} \right)^{1/2} \geq \left( \frac{a_1}{a_n} \right)^{m/n}$$

Từ đó suy ra  $P'(a_n) \geq 0$ , dẫn đến hàm  $P(a_n)$  đồng biến, do đó  $P(a_n) \leq P(a_1) = 0$

Nếu  $m > \frac{n}{2}$ , ta đặt  $Q(a_1) = (m-n)a_1 - ma_n - n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}} + 2n\sqrt{a_1 a_n}$ .

$$\text{Tính đạo hàm } Q'(a_1) = m \left( \sqrt{\frac{a_n}{a_1}} - \sqrt[n]{\frac{a_n^{n-m}}{a_1^{n-m}}} \right) + (n-m) \left( \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}} - 1 \right)$$

$$\text{Vì } 0 \leq a_n \leq a_1 \text{ nên } \left( \frac{a_n}{a_1} \right)^{1/n} \leq 1, \text{ và } \left( \frac{a_n}{a_1} \right)^{1/2} \leq \left( \frac{a_n}{a_1} \right)^{(n-m)/n}$$

Từ đó suy ra  $Q'(a_1) \leq 0$  dẫn đến hàm  $Q(a_1)$  nghịch biến, do đó  $Q(a_1) \leq Q(a_n) = 0$ .

Vậy  $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - n(a_1 + a_n) + 2n\sqrt{a_1 a_n} \leq 0$

### 3. Giá trị nhỏ nhất trong tập hợp các giá trị lớn nhất

Dạng toán này sử dụng mệnh đề quan trọng sau đây:

**Mệnh đề.** Cho  $x, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  với  $\alpha < \beta$  khi đó ta có  $\min_a \left\{ \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |x - a| \right\} = \frac{\beta - \alpha}{2}$

#### Chứng minh

**Nhận xét:**  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  thì  $\max(a, b) \geq a$  và  $\max(a, b) \geq b \Rightarrow \max(a, b) \geq \frac{a+b}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ . Áp dụng nhận xét này ta có

$$\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |x - a| = \max \{ |\alpha - a|, |\beta - a| \} \geq \frac{|\alpha - a| + |\beta - a|}{2} \geq \frac{|(\alpha - a) + (\beta - a)|}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha - a| = |\beta - a| \\ (a - \alpha)(\beta - a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

**Bài 1.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-2 \leq x \leq 3} |3x^2 - 6x + 2a - 1| \right\}$

#### Giải

Đặt  $t = 3x^2 - 6x - 1$ . Sử dụng tam thức bậc hai hoặc lập BBT ta có  $-2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq t \leq 23$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min_{-4 \leq t \leq 23} \left\{ \max |t + 2a| \right\}$ . Áp dụng mệnh đề ta có

$$\max_{-4 \leq t \leq 23} |t + 2a| = \max \{ |-4 + 2a|, |23 + 2a| \} \geq \frac{|-4 + 2a| + |23 + 2a|}{2} = \frac{|4 - 2a| + |23 + 2a|}{2} \geq \frac{27}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow 4 - 2a = 23 + 2a \Leftrightarrow a = \frac{-19}{4}$$

**Bài 2.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} |x^3 - 3x + 4a + 1| \right\}$

#### Giải

$$\text{Đặt } t = x^3 - 3x + 1$$

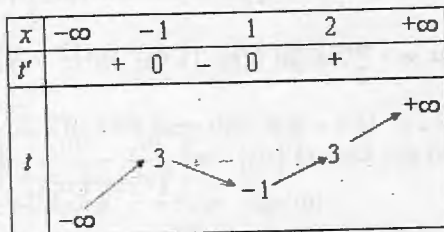
$$t' = 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, y_1 = 3 \\ x_2 = 1, y_2 = -1 \end{cases}$$

Nhìn BBT suy ra  $-1 \leq t \leq 3 \quad \forall x \in [-1, 2]$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min_{-1 \leq t \leq 3} \left\{ \max |t + 4a| \right\}$

$$\max_{-1 \leq t \leq 3} |t + 4a| = \max \{ |-1 + 4a|, |3 + 4a| \} \geq \frac{|-1 + 4a| + |3 + 4a|}{2} = \frac{|1 - 4a| + |3 + 4a|}{2} \geq \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Vậy } \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} |x^3 - 3x + 4a + 1| \right\} = 2 \Leftrightarrow 1 - 4a = 3 + 4a \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4}$$



**Bài 3.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2a + \frac{5}{3} \right| \right\}$

**Giải**

Đặt  $t = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}$  với  $x \in [-1, 2]$

Ta có  $t' = x(x+1)(x-2)$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2 \\ y_1 = \frac{5}{4}; y_2 = \frac{5}{3}; y_3 = -1 \end{cases}$$

|      |           |            |       |            |            |            |           |
|------|-----------|------------|-------|------------|------------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $0$   | $2$        | $+\infty$  |            |           |
| $t'$ |           | $-$        | $0$   | $+$        | $0$        | $+$        |           |
| $t$  | $+\infty$ |            | $5/4$ |            | $5/3$      |            | $+\infty$ |
|      |           | $\searrow$ |       | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |           |
|      |           |            |       |            | $-1$       |            |           |

Từ bảng biến thiên suy ra  $-1 \leq t \leq \frac{5}{3} \quad \forall x \in [-1, 2]$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-1 \leq t \leq 5/3} |t - 2a| \right\}$

$$\max_{-1 \leq t \leq 5/3} |t - 2a| = \max \left\{ |-1 - 2a|, \left| \frac{5}{3} - 2a \right| \right\} \geq \frac{|-1 - 2a| + \left| \frac{5}{3} - 2a \right|}{2} = \frac{|1 + 2a| + \left| \frac{5}{3} - 2a \right|}{2} \geq \frac{4}{3}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow 1 + 2a = \frac{5}{3} - 2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

Vậy với  $a = \frac{1}{6}$  thì  $\min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2a + \frac{5}{3} \right| \right\} = \frac{4}{3}$

**Bài 4.** Tìm  $S = \min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| -\frac{1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1 \right| \right\}$

**Giải**

Đặt  $t = -\frac{1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1$  với  $x \in [-1, 2]$

Ta có  $t' = -x^5 + 5x^4 - 4x^3 = -x^3(x-1)(x-4)$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 4 \\ y_1 = 1; y_2 = \frac{5}{6}; y_3 = \frac{259}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{6} \leq t \leq \frac{19}{3} \quad \forall x \in [-1, 2]$$

|      |           |            |                |            |     |            |               |            |                |            |     |            |           |
|------|-----------|------------|----------------|------------|-----|------------|---------------|------------|----------------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $0$            | $1$        | $2$ | $4$        | $+\infty$     |            |                |            |     |            |           |
| $t'$ |           | $+$        | $0$            | $-$        | $0$ | $+$        | $0$           | $-$        |                |            |     |            |           |
| $t$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{7}{6}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{5}{6}$ | $\nearrow$ | $\frac{19}{3}$ | $\searrow$ | $M$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-7 \leq t \leq 19} |t - 3a| \right\}$

Ta có  $\max_{-7 \leq t \leq 19} |t - 3a| = \max \left\{ \left| \frac{-7}{6} - 3a \right|, \left| \frac{19}{3} - 3a \right| \right\}$

$$\geq \frac{\left| \frac{-7}{6} - 3a \right| + \left| \frac{19}{3} - 3a \right|}{2} = \frac{\left| \frac{7}{6} + 3a \right| + \left| \frac{19}{3} - 3a \right|}{2} \geq \frac{15}{4}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{7}{6} + 3a = \frac{19}{3} - 3a \Leftrightarrow a = \frac{31}{36}$

Vậy với  $a = \frac{31}{36}$  thì  $\min_a \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 2} \left| \frac{-1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1 \right| \right\} = \frac{15}{4}$

**Bài 5.** Cho  $f(x) = f(x) = x + \sqrt{1-x^2} - a$ . Tìm  $\min \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\}$

*Giải*

Đặt  $x = \cos \alpha$  với  $\alpha \in [0, \pi]$  suy ra  $t = x + \sqrt{1-x^2} = \cos \alpha + \sin \alpha \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Bài toán trở thành: Tìm  $\min \left\{ \max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} |t - a| \right\}$ . Ta có

$$\begin{aligned} \max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} |t - a| &= \max \{ |-\sqrt{2} - a|, |\sqrt{2} - a| \} \geq \frac{|-\sqrt{2} - a| + |\sqrt{2} - a|}{2} \\ &= \frac{|\sqrt{2} + a| + |\sqrt{2} - a|}{2} \geq \frac{|\sqrt{2} + a + \sqrt{2} - a|}{2} = \sqrt{2}. \text{ Với } a = 0 \text{ thì } \min \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

**Bài 6.** Cho  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} + a$ . Tìm  $\min \left\{ \max_{1 \leq x \leq 5} |f(x)| \right\}$

*Giải*

Đặt  $t = \sqrt{x-1} \in [0, 2]$  và  $u = \frac{x + \sqrt{x-1}}{x - \sqrt{x-1}} \Leftrightarrow u = g(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1}$

$\Rightarrow g'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [0, 2]$ . Lập bảng biến thiên suy ra

$1 \leq g(t) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq u \leq 3 \quad \forall t \in [0, 2]$ . Áp dụng bổ đề ta có

$$\max_{1 \leq u \leq 3} |u + a| = \max \{ |1 + a|, |3 + a| \} \geq \frac{|-1 - a| + |3 + a|}{2} \geq \frac{|-1 - a + 3 + a|}{2} = 1$$

Với  $a = -2$  thì  $\min \left\{ \max_{1 \leq x \leq 5} |f(x)| \right\} = 1$

### III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

**Bài 1.** Chứng minh rằng  $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc, \forall a, b, c \in [1, 2]$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc$$

**Bài 3.** Chứng minh rằng  $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10, \forall a, b, c \in [1, 2]$

**Bài 4.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$1 + 9abc \geq 4(ab + bc + ca)$$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$1 + 6(a^3 + b^3 + c^3) \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d, e \in [p, q]; 0 < p < q$ . Chứng minh rằng:

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

**Bài 8.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [p, q] (p, q \geq 0)$ . Chứng minh rằng

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \leq n^2 + C(n)\frac{(p-q)^2}{4pq}$$

Trong đó  $C(n) = n^2$  nếu  $n$  chẵn và  $C(n) = n^2 - 1$  nếu  $n$  lẻ.

**Bài 9.** Chứng minh rằng  $\left|\frac{a}{b-c}\right| + \left|\frac{b}{c-a}\right| + \left|\frac{c}{a-b}\right| \geq 2, \forall a, b, c > 0$

**Bài 10.** Chứng minh:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_1 a_2 - a_2 a_3 - \dots - a_n a_1 \leq \left[ \frac{n}{2} \right], \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$

**Bài 11.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [\alpha, \beta]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2$$

**Bài 12.** Cho  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 2a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 13.** Cho  $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4 + 5a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-4 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 14.** Cho  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1 - 3a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\}$

**Bài 15.** Cho  $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x + 2a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-2 \leq x \leq \frac{3}{2}} |f(x)| \right\}$

**Bài 16.** Cho  $f(x) = \frac{(4a-2)x - 12a + 5}{x-3}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 17.** Cho  $f(x) = \frac{x^2 + (a+3)x + (2a+3)}{x+2}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-4 \leq x \leq -\frac{5}{2}} |f(x)| \right\}$

**Bài 18.** Cho  $f(x) = \frac{(a+2)x^2 + 4x + (a+5)}{x^2 + 1}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 2} |f(x)| \right\}$

**Bài 19.** Cho  $f(x) = \frac{x^3 + (a+3)x^2 + (3-a)x + (a+1)}{x^2 - x + 1}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \right\}$

**Bài 20.** Cho  $f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 3a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 0} |f(x)| \right\}$

**Bài 21.** Cho  $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + 2a$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{1 \leq x \leq \sqrt{2}} |f(x)| \right\}$

**Bài 22.** Cho  $f(x) = x - 4a + \ln(x^2 - 3)$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{2 \leq x \leq 2\sqrt{3}} |f(x)| \right\}$

**Bài 23.**  $f(x) = \frac{3(a \sin^4 x + \cos^4 x) + 2(a \cos^2 x + 2 \sin^2 x)}{3 \sin^4 x + 2 \cos^2 x}$ . Tìm  $\text{Min} \left\{ \text{Max}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right\}$

**Bài 24.** Tìm  $\text{Min}_{a,b,c} \left\{ \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c| \right\}$

### § 23.4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Trong phần hàm lồi bất đẳng thức Jensen, hàm nửa lồi, nửa lõm với các định lý RCF, LCF, LCRCF chúng ta thường gặp các bất đẳng thức có dạng phát biểu sau đây:

**Mệnh đề:** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ ,  $n \in \mathbb{N}$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = nu$ , với  $u \in D$ .

Khi đó ta có:  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(u)$  hoặc  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(u)$ .

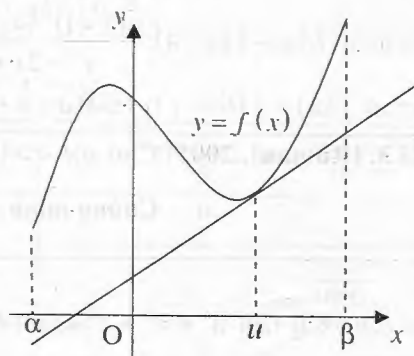
Đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = u$ .

Tuy nhiên với một số dạng hàm số  $y = f(x)$  không lồi (không lõm) trên miền  $D = [\alpha, \beta]$  nhưng vẫn có đồ thị nằm trên tiếp tuyến  $y = Ax + B$  tại điểm  $x = u \in [\alpha, \beta]$  có phương trình là  $y = f'(u)(x - u) + f(u)$  hay viết gọn dưới dạng  $y = Ax + B$  thì ta có thể nghĩ đến chuyện đánh giá  $f(x) \geq Ax + B, \forall x \in [\alpha, \beta]$ . Từ đó suy ra

$$\begin{cases} f(a_1) \geq Aa_1 + B \\ f(a_2) \geq Aa_2 + B \\ \dots \\ f(a_n) \geq Aa_n + B \end{cases}$$

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq n(Au + B) = nf(u)$$

Sau đây chúng ta xét các bài toán tiêu biểu.



**Bài 1. [Hong Kong, 2005]** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ .

Chứng minh rằng:  $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$  (1)

**Chứng minh**

(1)  $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}; \forall a, b, c, d \in (0, 1)$  trong đó  $f(x) = 6x^3 - x^2, x \in (0, 1)$

Do hai vế là biểu thức đối xứng với  $a, b, c, d$  nên dễ thấy đẳng thức xảy ra tại điểm rơi  $a = b = c = d$  kết hợp với  $a + b + c + d = 1$  suy ra điểm rơi là  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ .

Từ đó xét tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x = \frac{1}{4}$  có phương trình:  $y = \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$ .

Mặt khác  $f(x) - \left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(4x - 1)^2(3x + 1) \geq 0, \forall x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) \geq \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}, \forall x \in (0, 1)$

Suy ra  $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5}{8}(a + b + c + d) - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}; \forall a, b, c, d \in (0, 1)$



**Bài 2. [USA, 2003]** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

**Chứng minh**

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$  thì bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \leq 24 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 24$$

trong đó hàm số đặc trưng là  $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}; x \in (0, 3)$ .

Phương trình tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x=1$  là  $y=4x+4$ .

Xét hiệu  $f(x) - (4x+4) = \frac{(x-1)^2(4x+3)}{x^2-2x+3} \leq 0$  hay  $f(x) \leq 4x+4, \forall x \in (0, 3)$

Suy ra  $f(a) + f(b) + f(c) \leq 4(a+b+c) + 12 = 24$

**Bài 3. [Rumani, 2005]** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$  (1)

**Chứng minh**

Do  $a, b, c > 0$  nên  $a^2 + b^2 + c^2 < (a+b+c)^2 = 9$ . Từ đó nếu có một trong ba số  $a, b, c$  nhỏ hơn  $\frac{1}{3}$  chẳng hạn  $a < \frac{1}{3}$  thì  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 > a^2 + b^2 + c^2$  nên (1) được chứng minh.

Xét  $a, b, c \geq \frac{1}{3}$ , kết hợp với  $a+b+c=3$  suy ra  $a, b, c \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$ . Biến đổi bất đẳng thức

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - a^2 + \frac{1}{b^2} - b^2 + \frac{1}{c^2} - c^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 0, \forall a, b, c \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$  trên  $[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$ . Tiếp tuyến của đồ thị  $y = f(x)$  tại  $x=1$  là

$$y = -4x + 4. \text{ Ta có } f(x) - (-4x + 4) = \frac{(x-1)^2[2-(x-1)^2]}{x^2} \geq 0, \forall x \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{3}], \text{ suy ra}$$

$$f(x) \geq -4x + 4, \forall x \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{3}] \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq -4(a+b+c) + 12 = 0$$

**Bài 4. [Trung Quốc, 2005]** Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ .

Chứng minh rằng:  $10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$

**Chứng minh**

Đặt  $f(x) = 10x^3 - 9x^5$ . Khi đó bất đẳng thức  $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$ .

**Trường hợp 1.** Trong ba số  $a, b, c$  có một số, giả sử  $a \geq \frac{9}{10}$ . Khi đó ta có  $a \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$  và

$b, c \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ . Xét hàm số  $f(x)$  trên  $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$  có  $f'(x) = 15x^2(2 - 3x^2) \leq 0, \forall x \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ .

Suy ra  $f(x)$  nghịch biến trên  $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$  nên  $f(a) \geq f(1) = 1, \forall a \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]$ . Mặt khác với

$b, c \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$  thì  $f(b) = 10b^3 - 9b^5 \geq 0; f(c) = 10c^3 - 9c^5 \geq 0$  nên  $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$

**Trường hợp 2.** Các số  $a, b, c \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$ , khi đó tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x = \frac{1}{3}$  có

phương trình  $y = \frac{25}{9}x - \frac{16}{27}$ . Ta có

$$f(x) - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) = 10x^3 - 9x^5 - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) = -\frac{1}{27}(3x-1)^2(27x^3 + 18x^2 - 21x - 16).$$

Đặt  $g(x) = 27x^3 + 18x^2 - 21x - 16$ . Xét hàm số  $g(x)$  trên  $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ .

Ta có  $g'(x) = 81x^2 + 36x - 21, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$  hoặc  $x = -\frac{7}{9}$

Bảng biến thiên của  $g(x)$  trên  $\left[0, \frac{9}{10}\right]$ :

Từ BBT và  $g(0) = -16, g\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{637}{1000}$

$$\Rightarrow g(x) < 0, \forall x \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{25}{9}x - \frac{16}{27}\right) \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{25}{9} \cdot (a+b+c) - 3 \cdot \frac{16}{27} = 1$$

**Kết luận:** Bất đẳng thức được chứng minh trong cả hai trường hợp. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$  hoặc  $(a, b, c)$  là một hoán vị bất kỳ của bộ số  $(1, 0, 0)$ .

**Bài 5. [Moldova, 2005]** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$

**Chứng minh**

Vì  $2ab \leq a^2 + b^2$  nên  $0 < 8 - (a^2 + b^2) \leq 2(4 - ab) \Rightarrow \frac{1}{4-ab} \leq \frac{2}{8 - (a^2 + b^2)}$  do đó

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq \frac{2}{8 - (a^2 + b^2)} + \frac{2}{8 - (b^2 + c^2)} + \frac{2}{8 - (c^2 + a^2)}$$

Để vận dụng giả thiết  $a^4 + b^4 + c^4 = 3$  ta đặt  $x = (b^2 + c^2)^2, y = (c^2 + a^2)^2, z = (a^2 + b^2)^2$

thì  $x, y, z > 0$  và  $x = y + z = (b^2 + c^2)^2 + (c^2 + a^2)^2 + (a^2 + b^2)^2 \leq 4(a^4 + b^4 + c^4) = 12$ .

Từ đó  $0 < x, y, z < 12$ . Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2}$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{8-\sqrt{t}}$  trên  $(0, 12)$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $y = f(t)$  tại

$t = 4$  có phương trình  $y = \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$ . Mặt khác xét biến đổi:

$$\frac{1}{8-\sqrt{t}} - \left( \frac{1}{144}t + \frac{5}{36} \right) = -\frac{1}{144}(\sqrt{t} - 2)^2(4 - \sqrt{t}) \leq 0 \text{ hay } f(t) \leq \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}, \forall t \in (0, 12)$$

$$\text{Từ đó } f(x) + f(y) + f(z) \leq \frac{1}{144}(x+y+z) + 3 \cdot \frac{5}{36} \leq \frac{1}{144} \cdot 12 + \frac{15}{36} = \frac{1}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 4 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

**Bài 6. [Ba Lan, 1996]** Cho  $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}$

**Chứng minh**

Đặt  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Khi đó bất đẳng thức  $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}$

Ta có  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$  Suy ra bảng biến thiên của  $f(x)$

|         |           |            |        |            |       |            |           |
|---------|-----------|------------|--------|------------|-------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$       | $-1$   | $-1/3$     | $1$   | $2$        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$        | $0$    | $+$        | $0$   | $-$        |           |
| $f(x)$  | $0$       | $\searrow$ | $-1/2$ | $\nearrow$ | $1/2$ | $\searrow$ | $0$       |

**Trường hợp 1:** Tồn tại một số chẳng hạn  $a \in (-\infty, -3] \Rightarrow b+c \geq 4$  nên trong hai số  $b, c$  tồn tại ít nhất một số, chẳng hạn  $b \geq 2$ . Khi đó ta có  $f(a) + f(b) + f(c) < 0 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

**Trường hợp 2:** Tồn tại một số, chẳng hạn  $a \in \left(-3, -\frac{1}{3}\right]$ . Khi đó

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq -\frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

**Trường hợp 3:** Cả ba số  $a, b, c \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ . Khi đó tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $x = \frac{1}{3}$

$$\text{có phương trình là: } y = f'(x)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}.$$

$$\text{Ta có } f(x) - \left(\frac{18}{25}x + \frac{3}{50}\right) = -\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(1+x^2)} \leq 0 \text{ hay } f(x) \leq \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}, \forall x > -\frac{1}{3}$$

$$\text{Từ đó suy ra } f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{18}{25}(a+b+c) + 3 \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{10}$$

**Kết luận:** Vậy bài toán được chứng minh, đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ .

### § 23. 5. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Chúng ta sẽ tiếp tục các ý tưởng cân bằng hệ số ở chương I và chương III cũng như mở rộng việc xấp xỉ một hàm số với tiếp tuyến được nêu trong §23.4. Chú ý rằng nếu như các ý tưởng cân bằng hệ số trong chương I thuần túy mang màu sắc đại số thì trong chương III phương pháp nhân tử Lagrange lại chỉ thuần túy mang màu sắc giải tích và ít có khả năng thực hành. Trong bài viết này chúng tôi tìm cách kết hợp thật linh hoạt hai phương pháp đó để đi đến những lời giải thật trọn vẹn và sáng sủa cho một lớp rất rộng các bất đẳng thức ít hay nhiều biến, đối xứng hay hoán vị...

#### Tóm tắt nội dung

- I. Phần 1: Mở đầu
- II. Phần 2. Kỹ thuật chuẩn hóa và U.C.T
- III. Phần 3. U.C.T và kỹ thuật phân tách các trường hợp
- IV. Phần 4. Kết hợp bất đẳng thức Vornicu Schur với U.C.T
- V. Phần 5. Một dạng biểu diễn thú vị
- VI. Phần 6. Các bài toán với điều kiện chứa cấu trúc nhân
- VII. Phần 7. U.C.T mở rộng
- VIII. Phần 8. Kỹ thuật U.C.T trong bất đẳng thức lượng giác
- IX. Phần 9. Bài tập áp dụng

#### I. MỞ ĐẦU

Trong một số dạng toán bất đẳng thức nhiều biến đối xứng, chúng ta có thể tách một bất đẳng thức ban đầu thành các bất đẳng thức bộ phận cùng có chung một qui luật nào đó và đưa bài toán về việc chứng minh đại diện cho một bất đẳng thức bộ phận. Như vậy mấu chốt của phương pháp này chính là việc phát hiện ra các bất đẳng thức bộ phận mà ta có thể gọi là bất đẳng thức cơ sở. Tuy nhiên hầu hết các lời giải mà chúng ta gặp trên các tài liệu đều không chỉ dẫn việc xây dựng bất đẳng thức cơ sở dẫn đến sự thất bại của bạn đọc trong việc trình bày lời giải một cách không tự nhiên. Phái chằng bất đẳng thức cơ sở được tạo ra một cách mò mẫm thử nghiệm rất nhiều lần hay việc xây dựng các bất đẳng thức nhiều biến được tạo ra từ chính việc lấy trước bất đẳng thức cơ sở. Câu trả lời là hoàn toàn không phải như vậy. Bên ngoài vẻ đẹp của các dạng bất đẳng thức này đều chứa đựng một nội dung có tính chất qui luật. Chúng ta sẽ cùng nhau làm quen với phương pháp nhằm phát hiện ra các bất đẳng thức cơ sở với các dạng bất đẳng thức nhiều biến đối xứng. Phương pháp này có tên gọi là "*Phương pháp hệ số bất định*", tên tiếng Anh là *Undefined Coefficient Technique (U.C.T.)*

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5 \quad (1)$$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$ , (2a)

$$\frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2b}{3} \quad (2b); \quad \frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2c}{3} \quad (2c)$$

Thật vậy xét chứng minh đại diện (2a)  $\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2} \geq 0$  đúng  $\forall a > 0$

Cộng (2a), (2b), (2c) với chú ý  $a + b + c = 3$  suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét:** Lời giải trên sẽ tự nhiên nếu chúng ta giải thích được cách phát hiện bất đẳng thức cơ sở cho việc chứng minh (1). Để ý rằng các biến số trong điều kiện và trong cả hai biểu thức của bất đẳng thức (1) quan hệ với nhau theo liên kết cộng nên ta có thể tách theo từng biến để chứng minh bất đẳng thức cơ sở làm đại diện. Suy nghĩ tự nhiên nhất của chúng ta là chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} \geq 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức này không hoàn toàn đúng  $\forall a > 0$ .

Về mặt logic thì việc xây dựng bất đẳng thức trên có vẻ không ổn vì chúng ta sẽ không sử dụng đến điều kiện  $a + b + c = 3$ . Do đó chúng ta sẽ xây dựng một bất đẳng thức dạng giả định mà về phải có thể sử dụng điều kiện  $a + b + c = 3$ , tức là chúng ta xét các bất đẳng thức viết dưới dạng giả định sau đây:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + ma + n \quad (3a); \quad \frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{5}{3} + mb + n \quad (3b); \quad \frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{5}{3} + mc + n \quad (3c)$$

Trong đó  $m$  và  $n$  là các hệ số chưa xác định. Cộng (3a), (3b), (3c) ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3} \geq 5 + m(a+b+c) + 3n = 5 + 3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số  $m$  và  $n$  phải thỏa mãn điều kiện  $m + n = 0 \Leftrightarrow n = -m$ .

Thế  $n = -m$  vào (3a) dẫn đến  $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \quad (3)$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là  $m$  để bất đẳng thức (2) là đúng.

Để ý rằng với  $a = b = c = 1$  thì bất đẳng thức (1) xảy ra dấu bằng nên việc biến đổi bất đẳng thức (3) cần làm xuất hiện nhân tử  $(a - 1)$ . Thật vậy ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left( \frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} - m \right) \geq 0 \quad (4)$$

Khi cho  $a = 1$  thì ta có  $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} = -\frac{2}{3}$  từ đó ta dự đoán rằng với  $m = -\frac{2}{3}$  thì biến đổi (4) sẽ xuất hiện biểu thức  $(a-1)^2$ .

Với  $m = -\frac{2}{3}$  thì bất đẳng thức cơ sở là:  $\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

### Chứng minh

Ta sẽ xác định hệ số  $m$  để bất đẳng thức sau là đúng:  $\frac{2}{a^2+1} \geq 1 + m(a-1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1} \geq m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left( -\frac{a+1}{a^2+1} - m \right) \geq 0.$$

Với  $a = 1$  thì  $-\frac{a+1}{a^2+1} = -1$  nên chọn  $m = -1$ . Khi đó:  $\frac{2}{a^2+1} \geq 2 - a \Leftrightarrow \frac{a(a-1)^2}{a^2+1} \geq 0$  (đúng)

Tương tự suy ra:  $\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+1} \geq \sum_{cyc} \frac{2-a}{2} = 4 - \frac{1}{2} \sum_{cyc} a = 2 \Rightarrow$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = 1$ .

**Nhận xét:** Dùng AM - GM cũng chứng minh được:  $\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$

**Bài 3. [Algebraic Inequalities Old and New Method]**

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$

### Chứng minh

Ta cần tìm  $m$  sao cho  $\frac{1}{a^2+b+c} = \frac{1}{a^2-a+3} \leq \frac{1}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow -\frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)} \leq m(a-1)$  đúng

Tương tự như trên ta tìm dự đoán rằng với  $m = -\frac{1}{9}$  thì bất đẳng thức cơ sở đúng.

$$\text{Thật vậy ta có } \frac{1}{a^2 - a + 3} \leq \frac{4}{9} - \frac{a}{9} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2 - a + 3)} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2 - a + 3)}$$

**Nhận xét.** Bài toán tổng quát đã được giải quyết bằng định lý **LCF** trong "Algebraic Inequalities – Old and New method" của tác giả Vasile Cirtoaje.

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{a_1^2 - a_1 + n} + \frac{1}{a_2^2 - a_2 + n} + \dots + \frac{1}{a_n^2 - a_n + n} \leq 1$$

**Bài 4.** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ .

$$\text{Chứng minh: } 2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + ab + ac + ad + bc + bd + dc}$$

### Chứng minh

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 = 2(2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d) = \sqrt{2(2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

$$\text{Ta cần tìm } m \text{ sao cho } 2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + m(a^2-1) \Leftrightarrow (a^2-1) \left[ \frac{(2a+1)^2}{2(a+1)} - m \right] \geq 0 \quad (*) \text{ đúng}$$

Cho  $a=1$ , dự đoán  $m = \frac{9}{4}$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (\*) đúng với  $m = \frac{9}{4}$ .

$$\text{Thật vậy } 2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + \frac{9}{4}(a^2-1) \Leftrightarrow (a-1)(8a^2 - a - 7) \geq 0 \Leftrightarrow (8a+7)(a-1)^2 \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=d=1$ .

**Bài 5.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27$

### Chứng minh

$$\text{Ta tìm } m \text{ sao cho } \frac{4}{a} + 5a^2 \geq 9 + m(a^3-1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)(5a^2+5a-4)}{a} \geq m(a-1)(a^2+a+1)$$

Cho  $a=1$  ta có thể dự đoán rằng  $m=2$ . Ta sẽ chứng minh:  $\frac{4}{a} + 5a^2 \geq 7 + 2a^3 \quad (1)$



$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(-2a^2+a+4)}{a} \geq 0. \text{ Do } a \leq \sqrt[3]{3} \Rightarrow -2a^2+a+4 \geq 0 \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

$$\text{Từ đó: } \sum_{cyc} \left( \frac{4}{a} + 5a^2 \right) \geq 21 + 2 \sum_{cyc} a^3 = 27 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

$$\text{Bài 6. Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4}{3}(a+b+c) \geq 7$$

### Chứng minh

Nhận xét với  $a=b=c=1$  thì đẳng thức xảy ra. Ta có  $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a, b, c \in (0, \sqrt{3})$

Ta sẽ tìm số thực  $m$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a \in (0, \sqrt{3})$

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{3}a \geq m(a^2 - 1) + \frac{7}{3} \Leftrightarrow f(a) = 3ma^3 - 4a^2 + (7-3m)a - 3 \leq 0$$

Ta cần tìm  $m$  sao cho  $f(a) \leq 0 \quad \forall a \in (0, \sqrt{3})$  và  $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ .

Dự đoán  $a = 1$  là điểm cực đại của  $f(a)$ , khi đó:  $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 9m - 8 + 7 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$ .

Do đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cơ sở:  $\frac{1}{a} + \frac{4}{3}a \geq \frac{1}{6}(a^2 - 1) + \frac{7}{3}$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương:  $(a-1)^2(6-a) \geq 0$  đúng do  $a \in (0, \sqrt{3})$ .

Tương tự và suy ra  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4}{3}(a+b+c) \geq \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2-3) + 7 = 7$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

$$\text{Bài 7. Cho } \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \end{cases}. \text{ Chứng minh rằng: } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{n}{8}$$

### Chứng minh

Ta sẽ tìm hệ số  $m$  sao cho  $\frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{1}{8} + m(a_i - 1) \Leftrightarrow \frac{(5-3a_i)(a_i-1)}{8(3a_i^2+5)} \leq m(a_i-1)$

Với  $a_i = 1$  thì  $\frac{5-3a_i}{8(3a_i^2+5)} = \frac{1}{32}$  nên ta dự đoán  $m = \frac{1}{32}$  thì bất đẳng thức cơ sở trên là

đúng. Thật vậy:  $\frac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \frac{1}{8} + \frac{(a_i-1)}{32} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(5+a_i)(a_i-1)^2}{32(3a_i^2+5)}$  (đúng).

Dấu bằng  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

**Bình luận:** Qua các bài toán mở đầu ta có thể thấy rằng các dạng bất đẳng thức trên không hề quan tâm đến số biến. Ta hoàn toàn có thể tổng quát với  $n$  biến mà không làm ảnh hưởng đến cách giải. Xét mô hình tổng quát sau đây:

**Bài toán tổng quát:** Cho các số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn điều kiện:

$$h(a_1) + h(a_2) + \dots + h(a_n) = 0 \quad (*). \text{ Chứng minh rằng } f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq 0$$

Lớp các bài toán này thường có điều kiện (\*) là  $\sum_{i=1}^n a_i^k = n$  và có thể được giải quyết bằng cách xây dựng bất đẳng thức cơ sở có chung qui luật cho các biến.

Vì các biểu thức mang tính đối xứng nên đẳng thức thường đạt tại các điểm cực trị là các biến số bằng nhau. Khi đó ta phải xác định hệ số  $m$  sao cho bất đẳng thức  $f(a_i) \geq m \cdot h(a_i)$  hay  $[g(a_i)]^{2k} p(a_i) \geq 0$  đúng  $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn (\*)

Trong đó  $g(a_i) = (a_i - x_k)$  với  $x_k$  là điểm cực trị của bất đẳng thức.

Bài toán sẽ được giải quyết nếu  $p(a_i) \geq 0$ . Trong trường hợp  $p(a_i) \geq 0$  chỉ đúng trong một miền nghiệm nào đó thì ta sẽ tiến hành chia trường hợp để giải quyết bài toán. Tuy nhiên trong phần 1 này ta sẽ không đề cập những bài toán như vậy mà sẽ đề cập ở phần sau.

Sau khi đã tìm ra bất đẳng thức cơ sở thì việc chứng minh nó không quá khó khăn có thể dựa trên phương pháp phân tích nhân tử hoặc sử dụng đạo hàm.

Qua một vài ví dụ mở đầu bạn đọc có thể hiểu được mục đích của U.C.T. Ở các phần tiếp theo việc xác định hệ số sẽ được trình bày một cách sơ lược bởi vì những bài toán đó mang tính phức tạp nhiều hơn mà U.C.T chỉ đơn thuần là bước đệm để đi đến lời giải chứ không thể đưa ta cách chứng minh trực tiếp.

## II. KỸ THUẬT CHUẨN HÓA VÀ U.C.T

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một khoảng không gian mới với lớp bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến và kỹ thuật chuẩn hóa kết hợp với U.C.T. Trước hết ta sẽ nhắc lại định nghĩa

- Đa thức  $f(a, b, c)$  đối xứng  $\Leftrightarrow f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$
- Đa thức  $f(a, b, c)$  thuần nhất trên miền  $D \Leftrightarrow f(ka, kb, kc) = k^n f(a, b, c)$   
 $\forall k, a, b, c \in D, k \neq 0, n = \text{const}$

Hiểu một cách đơn giản đa thức thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Do một số tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến số để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt  $a^n + b^n + c^n = k, abc = p, ab + bc + ca = r, \dots$ . Đây là kỹ thuật rất quan

trọng giúp ta đơn giản hóa và qui bất đẳng thức về chứng minh theo từng biến. Hãy cùng đến với một số bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến để thấy công dụng của U.C.T

**Bài 1. [Nesbitt]** Chứng minh rằng  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c > 0$  (1)

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=3$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$  (2)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:  $\frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + m(a-1) \Leftrightarrow \frac{3(a-1)}{2(3-a)} \geq m(a-1)$

Dễ dàng dự đoán  $m = \frac{3}{4}$ . Ta có:  $\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3(a-1)^2}{4(3-a)} \geq 0$  luôn đúng.

Vậy  $\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4}$ . Tương tự ta có:  $\frac{b}{3-b} \geq \frac{3b-1}{4}; \frac{c}{3-c} \geq \frac{3c-1}{4}$

Cộng về theo về ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi  $a=b=c$ .

**Bài 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2+b^2+c^2 \quad (2)$$

Ta cần xác định  $m$  để bất đẳng thức cơ sở sau là đúng:  $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2+m(a-1)$

hay  $\left[ \frac{(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3} + m \right] (a-1) \leq 0$ . Với  $a=1$  thì  $\frac{(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3} = 6$

khi đó chọn  $m=-6$ , ta sẽ chứng minh:  $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2-6(a-1) \quad (2a)$

Thật vậy ta có:  $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2-6(a-1) \Leftrightarrow \frac{a(6-a)(a-1)^2}{a^2-2a+3} \geq 0$  đúng  $\forall a \in (0,3)$ .

Tương tự ta có:  $\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} \geq b^2-6(b-1) \quad (2b); \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq c^2-6(c-1) \quad (2c)$

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng  $\Rightarrow$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 3. [Đề thi Olympic 30 – 4, khối 11, lần XII – 2006]**

Chứng minh rằng  $\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}, \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta có bất đẳng thức (1) tương đương với  $\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$

Tương tự như trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} \leq \frac{21+9a}{25} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}. \text{ Điều này hiển nhiên đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Bài 4.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)} \quad (1)$

**Chứng minh**

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4} \quad (2)$

Dự đoán bất đẳng thức cơ sở là  $\frac{a}{(3-a)^2} \geq \frac{2a-1}{4} \quad (2a) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2} \geq 0$  luôn đúng

$\forall a \in (0,3)$ . Tương tự ta có:  $\frac{b}{(3-b)^2} \geq \frac{2b-1}{4} \quad (2b); \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{2c-1}{4} \quad (2c).$

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng  $\Rightarrow$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{1}{2} \quad (1)$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa  $a+b+c=3$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{1}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} \geq \frac{8a-7}{6} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)} \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng vì  $0 \leq a \leq 3 \Rightarrow 39-8a \geq 39-24=15 > 0$ .

Tương tự với các biến còn lại ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Bài 6. [USAMO 2003]**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh: 
$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \leq 8 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=1$ . Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} \leq \frac{12a+4}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2+(1-a)^2}$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

**Bài 7. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:**

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3} + \frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3} + \frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3} \leq \frac{12}{a+b+c} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=3$ , bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3} + \frac{(b+3)^2}{4b^3+(3-b)^3} + \frac{(c+3)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leq 4, (2).$$

Xét đại diện  $\frac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3} \leq \frac{2(a+1)}{3}, (2a)$

Thật vậy, ta có  $\frac{2(a+1)}{3} - \frac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3} = \frac{(2a^2+12a+9)(a-1)^2}{3(a^3+3a^2-9a+9)} \geq 0$

Tương tự ta có:  $\frac{(b+3)^2}{4b^3+(3-b)^3} \leq \frac{2(b+1)}{3} \quad (2b); \quad \frac{(c+3)^2}{4c^3+(3-c)^3} \leq \frac{2(c+1)}{3} \quad (2c)$

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng  $\Rightarrow$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 8. Cho các số không âm  $a, b, c, d$ . Chứng minh rằng:**

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{c^2+d^2+a^2} + \frac{c}{d^2+a^2+b^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Giả sử  $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ , khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{d}{1-d^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \Leftrightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2} \times 2a^2 \times (1-a^2) \times (1-a^2) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2 + 2(1-a^2)}{3} \right)^3 = \frac{4}{27} \Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Tương tự, ta có  $\frac{b}{1-b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2, \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2, \frac{d}{1-d^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} d^2$

Cộng lần lượt các bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 trong 4 số  $a, b, c, d$  bằng nhau, số còn lại bằng 0

### Bài 9. [Crux mathematicorum]

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}{\sqrt[3]{2}} \quad \forall a, b, c > 0 \quad (1)$

#### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh  $\frac{4\sqrt[3]{2} x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq 5x^2 - 1, \quad \forall x > 0 \quad (2)$

Thật vậy, nếu  $x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$  thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

Nếu  $x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ : Xét  $f(x) = \frac{128x^9}{(x^3+1)(5x^2-1)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{384x^8(1-x)(2x^2-3x-3)}{(x^3+1)^2(5x^2-1)^4}$ .

Ta có:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ . Ta dễ dàng kiểm tra được rằng  $f'(x) > 0$  với mọi

$x \in \left(1, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$ .

Do đó  $f(x) \geq \min\{f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\} = 1 \quad \forall x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Vậy bất đẳng thức (2) đúng.

Sử dụng bất đẳng thức này với  $x$  lần lượt thay bởi  $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$ , ta có

$$\frac{\sqrt[3]{2} a}{\sqrt[3]{a+b}} \geq \frac{5}{4} a^{2/3} - \frac{1}{4} b^{2/3}; \quad \frac{\sqrt[3]{2} b}{\sqrt[3]{b+c}} \geq \frac{5}{4} b^{2/3} - \frac{1}{4} c^{2/3}; \quad \frac{\sqrt[3]{2} c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{5}{4} c^{2/3} - \frac{1}{4} a^{2/3}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c > 0$ .

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 + ab + 4b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 + bc + 4c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{4c^2 + ca + 4a^2}} \geq \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Ta chứng minh  $\frac{6x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq 3x - 1, \forall x \geq 0$ .

Ta có  $\frac{36x^4}{4x^2 + x + 4} - (3x - 1)^2 = \frac{(x-1)^2(15x-4)}{4x^2 + x + 4} \geq 0$  đúng,

suy ra  $\frac{6x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} \geq |3x - 1| \geq 3x - 1$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = 1$ .

Sử dụng bất đẳng thức trên với phép thế lần lượt thay  $x$  bởi  $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ , ta có:

$$\frac{6a^2}{\sqrt{4a^2 + ab + 4b^2}} \geq 3a - b; \quad \frac{6b^2}{\sqrt{4b^2 + bc + 4c^2}} \geq 3b - c; \quad \frac{6c^2}{\sqrt{4c^2 + ca + 4a^2}} \geq 3c - a$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài 11.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^7 + 7}} \leq \frac{3}{2}$

**Chứng minh**

Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7x}{48} \quad \forall x \in (0, 3) \quad (2)$ . Xét  $f(x) = (31 - 7x)^3(x^7 + 7)$

Ta có:  $f'(x) = 7(31 - 7x)^2(x - 1)(21 + 21x + 21x^2 + 21x^3 + 21x^4 + 21x^5 - 10x^6)$

Rõ ràng  $f'(x) = 0$  chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và  $x_0 \in (1, 3)$ .

Khi  $x$  đi qua 1 theo chiều tăng thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương, qua  $x_0$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên ta có  $f(x) \geq \min\{f(1), f(3)\} = 48^3, \forall x \in (0, 3)$ . Suy ra (2)

đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = 1$ . Sử dụng bất đẳng thức (2) ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7a}{48}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{b^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7b}{48}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{c^7 + 7}} \leq \frac{31 - 7c}{48}$$

Do đó  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^7 + 7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^7 + 7}} \leq \frac{1}{48}[93 - 7(a + b + c)] = \frac{3}{2}$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .



## III. U.C.T VÀ KỸ THUẬT PHÂN TÁCH CÁC TRƯỜNG HỢP

Ở các phần trên ta đã làm quen với một số bài toán khi đưa về dạng

$$f(a_i) \geq m \cdot h(a_i) \Leftrightarrow g(a_i)^{2k} p(a_i) \geq 0$$

Nếu  $p(a_i) \geq 0$  thì có ngay điều phải chứng minh. Tuy nhiên không phải bao giờ nó cũng xuất hiện  $p(a_i) \geq 0$ . Trong trường hợp  $p(a_i) \geq 0$  chỉ đúng với một miền nghiệm nào đó thì việc chứng minh sẽ phải đi qua một chiều hướng khác, đó là xét thêm trường hợp biến  $a_i$  ngoài miền xác định để  $p(a_i) \geq 0$ . Thường thì bước này phức tạp và đòi hỏi người làm phải có những đánh giá mang sự tinh tế nhiều hơn. Chúng ta sẽ đến với một số bài toán tiêu biểu cho kỹ thuật này.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \quad (1)$$

## Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ . Xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1. Nếu  $a \geq 3 \Rightarrow b + c + d \leq 1 \Rightarrow 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq \frac{1}{2}, 0 \leq d \leq \frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) - (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \\ &\geq (1+a^4) - (1+a^3)(1+1^3) \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \left[ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] = a^4 - \frac{7}{3}a^3 - \frac{4}{3} \geq 3a^3 - \frac{7}{3}a^3 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(a^3 - 2) > 0 \\ &\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2: Nếu  $3 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ , thì (1)  $\Leftrightarrow \sum_{cyc} [2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)] \geq 0$

Xét hàm số  $f(x) = 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) - x + 1$  với  $0 \leq x \leq 3$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{8x^3}{x^4+1} - \frac{6x^2}{x^3+1} - 1 = \frac{(x-1)(-x^6+x^5+x^4+7x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^3+1)}$$

Dễ thấy  $f'(x) = 0$  chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và  $x_0 \in (2, 3)$ . Khi  $x$  đi qua 1 theo chiều tăng dần thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương, khi  $x$  đi qua  $x_0$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên ta

$$\text{có } f(x) \geq \min\{f(1), f(3)\} = \min\{0, 2(\ln 41 - \ln 14 - 1)\} = 0, \forall x \in [0, 3]$$

$$\text{Suy ra } 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) \geq x - 1 \quad \forall x \in [0, 3] \Rightarrow \sum_{cyc} [2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)] \geq \sum_{cyc} (a - 1) = 0$$

Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 2.** Chứng minh  $\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(a+c)^2} + \frac{c^2}{c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3}{5}$ ,  $\forall a, b, c > 0$  (1)

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+(3-a)^2} + \frac{b^2}{b^2+(3-b)^2} + \frac{c^2}{c^2+(3-c)^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{3}{5} \quad (2)$$

Ta sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{12a-7}{25} \Leftrightarrow (8a-21)(a-1)^2 \geq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq 1 \geq c$ . Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1:  $c \geq \frac{21}{8} \Rightarrow 8a-21 \geq 8b-21 \geq 8c-21 \geq 0$ .

+ Trường hợp 2:  $\max\{a, b, c\} \leq \frac{21}{8}$

Khi đó ta có:  $f(a) = \frac{a^2}{2a^2-6a+9} = \frac{1}{1+\left(\frac{3-a}{a}\right)^2} \geq \frac{49}{50} > \frac{1}{5}$

Do  $f(a)$  đồng biến trên  $(0, 3]$  nên điều này hiển nhiên đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 3. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]**

Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a+b+c+d=2 \end{cases}$ . Chứng minh  $\frac{1}{3a^2+1} + \frac{1}{3b^2+1} + \frac{1}{3c^2+1} + \frac{1}{3d^2+1} \geq \frac{16}{7}$  (1)

**Chứng minh**

Ta cần xác định hệ số để bất đẳng thức sau là đúng  $\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{4}{7} + m(2a-1)$

Dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{52-48a}{49} \Leftrightarrow \frac{3(2a-1)^2(12a-1)}{49(3a^2+1)} \geq 0$

Tương tự với các biến còn lại. Xét hai trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1:  $\min\{a, b, c, d\} \geq \frac{1}{12} \Rightarrow 12a-1 \geq 12b-1 \geq 12c-1 \geq 12d-1 \geq 0$

+ Trường hợp 2:  $d < \frac{1}{12} \Rightarrow 1+3d^2 < \frac{49}{48} \Rightarrow \frac{1}{1+3d^2} > \frac{48}{49}$

Xét tương tự với các biến còn lại ta tìm ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ .

**Bài 4. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + b^2 + a^2} \geq 0 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{1}{c^5 + b^2 + a^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh trường hợp  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$  là đủ.

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có  $\frac{2a^6}{a^2 + 1} \leq \frac{2a^6}{2\sqrt{a^2}} = a^5$

Đặt  $a^2 = x, b^2 = y, c^2 = z$  lúc đó ta có  $x + y + z = 3$  và do đó ta phải chứng minh

$$1 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\frac{2x^3}{x+1} - x + 3} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{3-x}{6} - \frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{(x-1)^2(-2x^2 + 3x + 3)}{6(2x^3 - x^2 + 2x + 3)} \right) \geq 0 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq 1 \geq z$ . Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1:  $y + z \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$

Khi đó ta có:  $-2x^2 + 3x + 3 > 0, -2y^2 + 3y + 3 > 0, -2z^2 + 3z + 3 > 0 \Rightarrow (2)$  đúng.

+ Trường hợp 2:  $y + z \leq 1 \Rightarrow x \geq 2$

Khi đó ta có:  $(2x^3 - x^2 + 2x + 3) - 5(x+1) = 2x^3 - x^2 - 3x - 2$

$$= x^3 \left( 2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \geq x^3 \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^3} \right) = \frac{x^3}{2} > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \leq \frac{1}{5}$$

Như vậy ta cần chứng minh:  $\frac{z+1}{2z^3 - z^2 + 2z + 3} + \frac{y+1}{2y^3 - y^2 + 2y + 3} \leq \frac{4}{5}$

Ta sẽ chứng minh  $\frac{k+1}{2k^3 - k^2 + 2k + 3} \leq \frac{2}{5} \quad \forall k \in [0, 1] \Leftrightarrow 4k^3 \geq (k+1)(2k-1) \quad \forall k \in [0, 1]$

Nếu  $k \leq \frac{1}{2}$  thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng nên (2) đúng suy ra (đpcm).

Nếu  $k \geq \frac{1}{2}$  thì

$$4k^3 - (k+1)(2k-1) \geq 4k^3 - 2(2k-1) = 2(2k^3 - 2k + 1) \geq 2(k^2 - 2k + 1) = 2(k-1)^2 \geq 0$$

Từ  $y+z \leq 1 \Rightarrow y, z \in [0, 1] \Rightarrow \frac{z+1}{2z^3 - z^2 + 2z + 3} \leq \frac{2}{5}; \frac{y+1}{2y^3 - y^2 + 2y + 3} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow (2)$  đúng.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét.** Đây là một kết quả mạnh hơn cho bài toán 3 trong kì thi IMO 2005 của tác giả **Vasile Cirtoaje**. Bài toán gốc ban đầu là với điều kiện  $abc \geq 1$ . Điều kiện của bài toán trên chặt hơn vì theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \Rightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow abc \geq 1$$

Chúng ta hãy đến với lời giải của chính tác giả bài toán trên, được trích từ quyển *Algebraic Inequalities, Old and New Method*. Ta qui về việc chứng minh bài toán sau:

**Bài 5.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq 1$$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1:  $a \leq \sqrt{2} \Rightarrow a, b \leq \sqrt{2}$ . Ta sử dụng các bất đẳng thức cơ sở sau

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} \leq \frac{3 - a^2}{6}, \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} \leq \frac{3 - b^2}{6}, \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq \frac{3 - c^2}{6}$$

Thật vậy xét biến đổi  $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} - \frac{3 - a^2}{6} = \frac{(a-1)^2(a^5 + 2a^4 - 3a^2 - 6a - 3)}{6(a^5 + 3 - a^2)}$ ,

và đánh giá  $a^5 + 2a^4 - 3a^2 - 6a - 3 = a^2 \left( a^3 + 2a^2 - 3 - \frac{6}{a} - \frac{3}{a^2} \right)$

$$\leq a^2 \left( 2\sqrt{2} + 4 - 3 - 3\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = -a^2 \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) < 0$$

+ Trường hợp 2:  $a > \sqrt{2}, a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow b^2 + c^2 < 1$

Khi đó ta có:  $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} < \frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2}$

Mặt khác  $\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} < \frac{1}{2\sqrt{2}a^2 + 3 - a^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)a^2 + 3} < \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)2 + 3} < \frac{1}{6}$

Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được  $\frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2} \leq \frac{5}{6}$

Thật vậy ta có  $\frac{1}{3-b^2} + \frac{1}{3-c^2} - \frac{5}{6} = \frac{9(b^2+c^2-1)-5b^2c^2}{6(3-b^2)(3-c^2)} \leq 0$

Như vậy bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=1$ .

**Nhận xét.** Lời giải của tác giả Vasile Cirtoaje ngay từ đầu cũng đã sử dụng U.C.T nhưng nó lại đưa ta đến cách xét trường hợp khá lè vì phải so sánh biến với  $\sqrt{2}$ . Đây là một bài toán đẹp với nhiều mở rộng thú vị.

**Bài 6.** Tìm hằng số  $k$  tốt nhất để bất đẳng thức đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2+(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{kb^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{kc^2+(a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$

**Giải**

Cho  $a=b=1, c=0$  ta được  $k \geq 5$ . Ta sẽ chứng minh 5 chính là giá trị cần tìm,

tức là chứng minh: 
$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{(a+b+c)}{3}} \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left( \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}} \right)^2 \leq (a+b+c) \sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2},$$

ta chứng minh: 
$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2} \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa  $a+b+c=1$  và  $a \geq b \geq c \geq 0$  suy ra  $a \geq \frac{1}{3} \geq c \geq 0$ .

Bất đẳng thức (2)  $\Leftrightarrow \frac{a^2}{6a^2-2a+1} + \frac{b^2}{6b^2-2b+1} + \frac{c^2}{6c^2-2c+1} \leq \frac{1}{3}$ .

Ta phải xét hai trường hợp:

+ TH1:  $c \geq \frac{1}{8}$  ta có  $9 - \sum_{cyc} \frac{27a^2}{6a^2-2a+1} = \sum_{cyc} \left( 12a - 1 - \frac{27a^2}{6a^2-2a+1} \right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(8a-1)}{6a^2-2a+1} \geq 0$

+ TH 2:  $c \leq \frac{1}{8}$  ta có:  $\frac{6a^2}{6a^2-2a+1} + \frac{6b^2}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1} - 2$

$$= \frac{2a-1}{6a^2-2a+1} + \frac{2b-1}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1} = \frac{a-b-c}{6a^2-2a+1} + \frac{b-c-a}{6b^2-2b+1} + \frac{6c^2}{6c^2-2c+1}$$

$$= \frac{2(a-b)^2(3c-2)}{(6a^2-2a+1)(6b^2-2b+1)} + c \left( \frac{6c}{6c^2-2c+1} - \frac{1}{6a^2-2a+1} - \frac{1}{6b^2-2b+1} \right)$$

Ta cần chứng minh:  $\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} \leq \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$

Vì  $c \leq \frac{1}{8}$  nên  $\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} \leq 1$  vậy ta sẽ chứng minh  $1 \leq \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$

Nếu  $b \leq \frac{1}{3}$  thì  $1 \leq \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$  nên bất đẳng thức được chứng minh

Nếu  $b \geq \frac{1}{3}$  thì áp dụng bất đẳng thức CBS, ta chỉ cần chứng minh

$$4 \geq 6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 2 \Leftrightarrow [2(a + b) + c](a + b + c) \geq 3(a^2 + b^2)$$

Từ giả thiết  $b \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3b \geq a$ , do đó:  $[2(a + b) + c](a + b + c) \geq 2(a + b)^2$

$$= 3(a^2 + b^2) + 4ab - a^2 + b^2 \geq 3(a^2 + b^2) + a(3b - a) \geq 3(a^2 + b^2) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

Vậy hằng số  $k$  tốt nhất là 5.

**Bài 7.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 3b + 3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - 3c + 3}} \leq 3$  (1)

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ .

Đề ý rằng  $\frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} \leq x + 1 \quad \forall x \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  (2)

Thật vậy, (2)  $\Leftrightarrow (x + 1)\sqrt{x^2 - 3x + 3} \geq 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + x - 1) \geq 0$  (đúng)

Suy ra: Nếu  $a \geq b \geq c \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  thì sử dụng bất đẳng thức (2) ta có (1) được chứng minh.

Xét  $0 < c \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ . Khi đó, có hai khả năng sau xảy ra:

+ Nếu  $b \leq 1$ , ta có:  $a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ;  $b^2 - 3b + 3 = (b - 1)^2 - b + 2 \geq 1$

$$c^2 - 3c + 3 = (1 - c)^2 - c + 2 \geq \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2 = \frac{16}{(\sqrt{5} + 1)^2}$$

Do đó: VT (1)  $\leq \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + 1 < 3$

+ Nếu  $b \geq 1$ , suy ra  $2 \geq a \geq b \geq 1$ . Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$  với  $1 \leq x \leq 2$

Ta có:  $f''(x) = \frac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2 - 3x + 3)^{5/2}} < 0 \Rightarrow f(x)$  là hàm lõm.

Do đó theo bất đẳng thức **Jensen** ta có:  $f(a) + f(b) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}}$

Ta phải chứng minh:  $\frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{(3-2t)^2 - 3(3-2t) + 3}} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{4t^2 - 6t + 3}} \leq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{36(t-1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2 - 3t + 3)^2(4t^2 - 6t + 3)^2} \geq 0 \quad (3)$$

Có thể kiểm tra (3) đúng nên (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

#### Bài 8. [Mở rộng từ Poland 1996]

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng  $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq \frac{1}{3} \geq c$ . Xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1:  $c \geq -\frac{3}{4}$  ta có

$$\frac{9}{10} - \left( \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \right) = \sum_{cyc} \left( \frac{18a}{25} + \frac{5}{30} - \frac{a}{a^2 + 1} \right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \geq 0$$

+ Trường hợp 2:  $c \leq -\frac{3}{4}$ . Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có  $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} \leq 1$

Khi đó nếu  $\frac{c}{c^2 + 1} \leq -\frac{9}{10} \Leftrightarrow -5 - 2\sqrt{6} \leq c \leq -\frac{3}{4}$  ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét trường hợp:  $-5 - 2\sqrt{6} \geq c$  khi đó ta có  $3 + \sqrt{6} \leq a \Rightarrow \frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{1}{5}$ . Từ đây suy ra:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ .



#### IV. KẾT HỢP BẤT ĐẲNG THỨC VORNICU SCHUR VỚI U.C.T

Trong chương II chúng tôi đã giới thiệu bất đẳng thức Schur mở rộng và các ứng dụng. Bây giờ chúng ta sẽ thấy sự kết hợp giữa **Vornicu Schur** với **U.C.T** sẽ tạo ra những lời giải khá ấn tượng và đẹp mắt. Trước hết chúng ta hãy nhắc lại bất đẳng thức **Vornicu Schur**.

**1. Bất đẳng thức Vornicu Schur:** Cho  $a \geq b \geq c$  và  $A, B, C \geq 0$  khi đó bất đẳng thức

$A(a-b)(a-c) + B(b-c)(b-a) + C(c-a)(c-b) \geq 0$  là đúng khi và chỉ khi

i.  $A \geq B$  hoặc  $C \geq B$

ii.  $A \times a \geq B \times b$

iii.  $B \times c \geq C \times b$  (Nếu  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác)

iv.  $\sqrt{A} + \sqrt{C} \geq \sqrt{B}$

**2. Hai dạng biến đổi chính tắc và các ứng dụng của dạng 2**

**Dạng 1.**  $A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 &= A(a-b)(a-c+c-b) + B(b-c)(b-a+a-c) + C(c-a)(c-b+b-a) \\ &= \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} A(b-c)(b-a) = \sum_{cyc} (A+B)(b-c)(b-a) \end{aligned}$$

**Dạng 2.**  $A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 &= \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} A(a-b)^2 + \sum_{cyc} A(c-a)^2 = 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} (A+B)(a-b)^2 \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} (2A+B+C)(a-b)(a-c) = \sum_{cyc} (4A+B+C)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Dạng 1 là dạng phân tích chính tắc của phương pháp S.O.S một phương pháp đã lấy làm quen thuộc với nhiều người. Từ phép phân tích trên ta có thể thấy rằng mối liên hệ giữa phương pháp S.O.S và bất đẳng thức Vornicu Schur là rất mật thiết. Tuy nhiên trong bài viết này chúng ta sẽ không đề cập vấn đề này mà chúng ta sẽ chỉ xem xét dạng 2 ở trên. Vì tính ứng dụng của nó trong **U.C.T** là nhiều hơn và nó cũng là một sự kết hợp mang nhiều ý nghĩa.

Bây giờ hãy mở đầu bằng một bài toán trông có vẻ đơn giản nhưng cũng không quá dễ để tìm ra lời giải nếu không chọn đúng đường đi.

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh  $3(a^4 + b^4 + c^4) + a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq 6(a^3 + b^3 + c^3)$

### Chứng minh

Theo U.C.T dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau

$$3a^4 + a^2 + 2 \geq 6a^3 - 4a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

Ta quy bài toán về chứng minh  $\sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$

$$\text{Thật vậy } \sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a-3)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a-a-b-c)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a-b-c)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (4a^2 + b^2 + c^2 - 4)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$  khi đó ta có

$$4a^2 + b^2 + c^2 - 4 \geq 4b^2 + a^2 + c^2 - 4 \geq 4c^2 + b^2 + a^2 - 4$$

$$\text{Lại có } 4c^2 + a^2 + b^2 - 4 \geq 4c^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - 4 = 4c^2 + \frac{(3-c)^2}{2} - 4 = \frac{(3c-1)^2}{2} \geq 0$$

Theo định lí 1 ta có (đpcm).

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 1 \text{ hoặc } (a, b, c) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

**Nhận xét:** Bài toán sẽ được giải quyết trong trường hợp  $3a^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Trường

hợp còn lại  $a \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$  rõ ràng sẽ khó giải quyết vì vẻ phải của điều kiện trong trường hợp 2

khá lè, nhiều khả năng sẽ dẫn đến những tính toán phức tạp không cần thiết. Tuy nhiên cần chú ý một điều là đẳng thức của bài toán này xảy ra tại hai điểm cực trị vì vậy không thể áp dụng mỗi U.C.T vì dạng phát biểu của kỹ thuật này sẽ cho ta duy nhất một điểm cực trị cần tìm. Như vậy việc kết hợp giữa U.C.T và bất đẳng thức Vornicu Schur không đơn thuần là giải quyết bài toán một cách đẹp mắt mà còn hướng ta đến việc giải quyết trường hợp đẳng thức xảy ra khi có hai biến bằng nhau và khác biến còn lại.

**Bài 2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$  (1)

### Chứng minh

Ta cần xác định hệ số  $m$  cho bất đẳng thức cơ sở sau:  $2a^3 + 3 \geq 5a^2 + m(a-1)$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2 - 3a - 3) \geq m(a-1)$ . Với  $a = 1$  thì  $2a^2 - 3a - 3 = -4$  nên chọn  $m = -4$ .

Bất đẳng thức  $2a^3 + 3 \geq 5a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1) \geq 0$

Tương tự với các biến  $b, c$  ta suy ra:

Bất đẳng thức (1)  $\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1) + (b-1)^2(2b-1) + (c-1)^2(2c-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (2a-b-c)^2(2a-1) + (2b-c-a)^2(2b-1) + (2c-a-b)^2(2c-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 6a(a-b)(a-c) + 6b(b-c)(b-a) + 6c(c-a)(c-b) \geq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Khi đó theo bất đẳng thức **Vornicu Schur** ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$  cùng các hoán vị.

**Nhận xét.** Lại một bài toán đơn giản nhưng điều thú vị ở bài toán này là đẳng thức đạt được tại 2 điểm. Nếu như giải một cách thông thường bằng U.C.T thì không thể giải quyết bài toán một cách triệt để và một lần nữa bất đẳng thức Vornicu Schur lại phát huy tác dụng của nó.

### Bài 3. [Romania TST 2006]

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$  (1)

#### Chứng minh

Theo U.C.T dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau  $\frac{1}{a^2} + 4a \geq a^2 + 4$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(2a-b-c)^2(1+2a-a^2)}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (4A+B+C)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Trong đó  $A = \frac{1+2a-a^2}{a^2}, B = \frac{1+2b-b^2}{b^2}, C = \frac{1+2c-c^2}{c^2}$ . Không mất tính tổng quát giả sử

$$a \geq b \geq c \text{ khi đó ta có } A - B = \frac{1+2b-b^2}{b^2} - \frac{1+2a-a^2}{a^2} = \frac{(a-b)(2ab+a+b)}{a^2b^2} \geq 0$$

Từ đó suy ra  $4C + A + B \geq 4B + A + C \geq 4A + B + C$

Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $3 = a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{abc}$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3. \text{ Do đó } 4A+B+C = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{8}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 6 =$$

$$= \left( \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{6}{a} \right) + 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \right) \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \right) \geq 2 \left( \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} - 3 \right) \geq 2(3-3) = 0$$

Theo định lí 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=1$

**Bài 4.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{a^5+b^5+c^5-3}{a^3+b^3+c^3-3} \geq \frac{5(5\sqrt{3}-7)}{\sqrt{3}+1}$  (1)

### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( a^5 - \frac{5(5\sqrt{3}-7)}{\sqrt{3}+1} a^3 + \frac{24\sqrt{3}-36}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-1)^2 \left( a^3 + 2a^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} a + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (4M_a + M_b + M_c)(a-b)(a-c) \geq 0, \text{ trong đó}$$

$$M_a = a^3 + 2a^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} a + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

$$M_b = b^3 + 2b^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} b + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}; M_c = c^3 + 2c^2 + \frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} c + \frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

$$\text{Ta có } 4M_a + M_b + M_c = 4a^3 + b^3 + c^3 + 2(4a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} a + \frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \geq$$

$$\geq 4a^3 + \frac{(b+c)^3}{3} + 8a^2 + (b+c)^2 + \frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} a + \frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \geq$$

$$4a^3 + \frac{(3-a)^3}{3} + 8a^2 + (3-a)^2 + \frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} a + \frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} = \frac{15(a+3-2\sqrt{3})^2(a+4\sqrt{3}-3)}{4} \geq 0.$$

$$\text{Tương tự, ta có: } 4M_b + M_c + M_a \geq 0, \quad 4M_c + M_a + M_b \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2$ .

$$\text{Ta có: } (4M_a + M_b + M_c) - (4M_b + M_c + M_a) = 3(M_a - M_b)$$

$$= 3(a^3 - b^3) + 6(a-b) \left( a+b + \frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 3(a^3 - b^3) + 6(a-b) \left( 2 + \frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \right) \geq 0$$

$$\text{Do đó: } \sum_{\text{cyc}} (4M_a + M_b + M_c)(a-b)(a-c)$$

$$= (a-b)[(a-c)(4M_a + M_b + M_c) - (b-c)(4M_b + M_c + M_a)] + (4M_c + M_a + M_b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

V. MỘT DẠNG BIỂU DIỄN THỨ VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu từ một đẳng thức và sẽ thấy sự phát triển thứ vị từ nó

$$1 = \frac{a^k + b^k + c^k}{a^k + b^k + c^k} = \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{b^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{c^k}{a^k + b^k + c^k}$$

Đẳng thức này trông đơn giản nhưng lại đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà không thể sử dụng được kỹ thuật xác định hệ số khi xuất hiện lũy thừa bậc  $p$ . Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp, vì vậy chúng ta sẽ sử dụng đạo hàm với hai định lý cơ bản sau đây:

1. Định lý Fermat.

Giả sử hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và có cực trị địa phương tại  $x_0 \in [a, b]$ . Khi đó nếu  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

2. Định lý Roll. Giả sử  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và khả vi trong khoảng  $(a, b)$ . Khi đó nếu tồn tại  $x_1, x_2 \in (a, b)$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$  thì tồn tại  $x_0 \in (x_1, x_2)$  sao cho  $f'(x_0) = 0$

**Bài 1.** Tìm hằng số  $k > 0$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{kb^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

Giải

Cho  $a=1, b=c=0$  ta có  $k \leq \frac{1}{2}$ . Ta sẽ chứng minh  $k = \frac{1}{2}$  là giá trị tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Thật vậy khi  $k = \frac{1}{2}$  thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}} \geq 1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k}$

Ở đây ta chuẩn hóa  $b=c=1$  để việc xác định hệ số được đơn giản hơn.

Khi đó ta cần xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} \geq \frac{a^k}{a^k + 2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0$

Đặt  $f(a) = a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2$ . Ta có  $f(a) \geq 0, f(1) = 0$  nên theo định lý Fermat ta có

$f'(1) = 0$ . Do  $f'(a) = (k+2)a^{k+1} - 4ka^{2k-1} + 2a$  nên  $f'(1) = (k+2) - 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$ .

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}}$

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức

V. MỘT DẠNG BIỂU DIỄN THỦ VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu từ một đẳng thức và sẽ thấy sự phát triển thú vị từ nó

$$1 = \frac{a^k + b^k + c^k}{a^k + b^k + c^k} = \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{b^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{c^k}{a^k + b^k + c^k}$$

Đẳng thức này trông đơn giản nhưng lại đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà không thể sử dụng được kỹ thuật xác định hệ số khi xuất hiện lũy thừa bậc  $p$ . Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp, vì vậy chúng ta sẽ sử dụng đạo hàm với hai định lý cơ bản sau đây:

1. Định lý Fermat.

Giả sử hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và có cực trị địa phương tại  $x_0 \in [a, b]$ . Khi đó nếu  $f$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

2. Định lý Roll. Giả sử  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và khả vi trong khoảng  $(a, b)$ . Khi đó nếu tồn tại  $x_1, x_2 \in (a, b)$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$  thì tồn tại  $x_0 \in (x_1, x_2)$  sao cho  $f'(x_0) = 0$

**Bài 1.** Tìm hằng số  $k > 0$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{kb^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

**Giải**

Cho  $a=1, b=c=0$  ta có  $k \leq \frac{1}{2}$ . Ta sẽ chứng minh  $k = \frac{1}{2}$  là giá trị tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Thật vậy khi  $k = \frac{1}{2}$  thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq 1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k}$

Ở đây ta chuẩn hóa  $b=c=1$  để việc xác định hệ số được đơn giản hơn.

Khi đó ta cần xác định hệ số  $k$  sao cho  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} \geq \frac{a^k}{a^k + 2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0$

Đặt  $f(a) = a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2$ . Ta có  $f(a) \geq 0, f(1) = 0$  nên theo định lý Fermat ta có

$f'(1) = 0$ . Do  $f'(a) = (k+2)a^{k+1} - 4ka^{2k-1} + 2a$  nên  $f'(1) = (k+2) - 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$ .

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}}$

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức

cơ sở là đúng. Tuy nhiên bất đẳng thức cơ sở trên chỉ là phỏng đoán logic, nên có thể nó sẽ không đúng. Ngoài ra, một số bài toán khi biến đổi tương đương gặp khó khăn thì nên “tùy cơ ứng biến” cho các tình huống cụ thể. Chúng ta tiếp tục quay lại bài toán trên với phép chứng minh cho bất đẳng thức cơ sở.

Theo bất đẳng thức **Holder** ta có

$$(1+1)^{\frac{1}{4}} \left( b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \geq b+c \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{4}} \left( \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4} \right)^{\frac{3}{4}} \geq b+c \Leftrightarrow \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4} \geq 2\sqrt[3]{\left(\frac{b+c}{2}\right)^4}.$$

Đặt  $t = \frac{b+c}{2}$  thì ta phải chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8t^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4+2\sqrt[3]{t^4}}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^4} + 2\sqrt[3]{t^4} \geq \sqrt[3]{a}\sqrt{a^2+8t^2} \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{t^2})^2 \geq 0, \text{ đúng}$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$  hoặc  $a=t>0, b=c=0$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Có thể tìm hệ số  $k$  bằng cách sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** như sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \geq \frac{a^k}{a^k+2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^{k+2} + a^2 \geq 2a^{2k}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức **AM – GM** thì  $a^{k+2} + a^2 \geq 2\sqrt{a^{k+4}}$ .

Như vậy ta có cần xác định  $k$  sao cho  $2\sqrt{a^{k+4}} = 2a^{2k} \Leftrightarrow a^{k+4} = a^{4k} \Leftrightarrow k+4=4k \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$

**Bài 2. [IMO 2001]** Chứng minh  $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1, \forall a, b, c > 0$  (1)

### Chứng minh

Tương tự như trên ta xây dựng được bất đẳng thức cơ sở:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \quad (2)$$

Thật vậy (2)  $\Leftrightarrow a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3} \geq a^{1/3}\sqrt{a^2+8bc}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:  $b^{4/3} + c^{4/3} \geq 2b^{2/3}c^{2/3} = 2t^{4/3}$ , trong đó  $t = \sqrt{bc}$

Ta cần chứng minh:  $a^{4/3} + 2t^{4/3} \geq a^{1/3}\sqrt{a^2+8t^2} \Leftrightarrow 4t^{4/3}(a^{2/3} - t^{2/3})^2 \geq 0$  (đúng)

Như vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh. Sử dụng tương tự cho  $b, c$  rồi cộng lại

$$\text{ta có } \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$  hoặc  $b \rightarrow 0, c \rightarrow 0$ .



**Bài 3.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{a^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$$

**Chứng minh**

Xây dựng được bất đẳng thức cơ sở:  $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$  (\*)

Có thể chứng minh bất đẳng thức cơ sở này trên theo nhiều cách:

**Cách 1:** Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow 2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2 \geq a(b+c)^3$ . Thật vậy ta có

$$2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2 \geq a^2(b+c)^2 + \frac{(b+c)^4}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)^6}{4}} = a(b+c)^3$$

**Cách 2:** Theo bất đẳng thức  $AM - GM$  ta có:

$$\sqrt{1+k^2} = \sqrt{(1+k)(1-k+k^2)} \leq \frac{(1+k)+(1-k+k^2)}{2} = 1 + \frac{k^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ sở trên ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Áp dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhau hoặc có hai biến dần về 0.

**Bài 4.** Chứng minh  $\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3} + \frac{b^3}{b^3+(c+a)^3} + \frac{c^3}{c^3+(a+b)^3} \geq \frac{1}{3}$ ,  $\forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức  $CBS$ , ta có:

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3} + \frac{b^3}{b^3+(c+a)^3} + \frac{c^3}{c^3+(a+b)^3} \geq \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{a^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \right)^2$$

$$\text{Theo bài 3 ta có } \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{a^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

## VI. CÁC BÀI TOÁN VỚI ĐIỀU KIỆN CHỨA CẤU TRÚC NHÂN

Ở trên ta đã xét kĩ thuật U.C.T. với điều kiện cho trước  $a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k + a_n^k = n$ . Bây giờ

chúng ta sẽ xét kĩ thuật U.C.T. với dạng điều kiện  $\prod_{i=1}^n a_i^k = C$ . Khi đó việc tìm ra bất đẳng

thức cơ sở khá khó khăn vì ta không thể đánh giá theo từng biến được nữa. Lúc này muốn áp dụng U.C.T chúng ta phải dùng đến một số tính chất của hàm số.

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \geq \sqrt{2}$

**Chứng minh**

Áp dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left( \frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \right)^2 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c} \right) \geq (a+b+c)^3$$

Do đó ta cần phải chứng minh:  $(a+b+c)^3 \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c}$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} a^3 + 3 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + 3 \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} + 6 \geq 4 \sum_{\text{cyc}} ab + 4 \sum_{\text{cyc}} a + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \geq \sum_{\text{cyc}} ab; \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \geq \sum_{\text{cyc}} ab; 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \leq \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a}$$

Từ đó ta có:  $VT - VP \geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + \frac{5}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \frac{5}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - 4 \sum_{\text{cyc}} ab - 4 \sum_{\text{cyc}} a + 6$

$$\geq \sum_{\text{cyc}} a^3 + \sum_{\text{cyc}} ab - 4 \sum_{\text{cyc}} a + 6 = \sum_{\text{cyc}} \left( a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2 \right)$$

Xét  $f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 + 2 \ln x$  với  $x > 0$  ta có:  $f'(x) = (x-1) \left( 3x + 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

Nếu  $x < 1$  thì  $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$ , nếu  $x \geq 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x}$  do đó  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Dễ dàng kiểm tra rằng  $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x > 0$  hay  $x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 \geq -2 \ln x, \forall x > 0$ .

Như vậy ta có:  $\sum_{\text{cyc}} \left( a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2 \right) \geq -2 \sum_{\text{cyc}} \ln a = 0$ . Bài toán được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh  $\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq 1$  (1)

**Chứng minh**

Xét hai trường hợp sau

+ TH1:  $\min\{a, b, c\} \leq \frac{1}{2}$ , giả sử là  $a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 3a^2 + (a-1)^2 \leq 1 \Rightarrow (1)$  đúng

+ TH 2:  $\min\{a, b, c\} > \frac{1}{2}$ , khi đó ta xét đánh giá  $\frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} + k \ln x$

Ở đây ta qui về hàm số Lôgarit với chú ý  $\ln a + \ln b + \ln c = 0$ .

Tiếp tục quan sát thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Từ đó ta có phải xác định  $k$  sao cho  $f'(1) = 0$ :  $f(x) = \frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3}$

Ta có:  $f'(x) = \frac{2(16x^4 - 16x^3 - x + 1)}{3x(4x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2(x-1)(16x^3 - 1)}{3x(4x^2 - 2x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (do  $x > \frac{1}{2}$ ).

Dễ dàng kiểm tra được  $f(x) \geq f(1) = 0$ ,  $\forall x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln x \quad \forall x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq \sum_{cyc} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln x \right) = 1 - \frac{2}{3} \ln(abc) = 1$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$  hoặc  $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty, c \rightarrow 0^+$  và các hoán vị.

**Nhận xét:** Sau đây là lời giải tóm tắt nhưng rất ấn tượng của Vasile Cirtoaje.

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở:  $\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{2a^3 + 1} \Leftrightarrow \frac{2a(a-1)^2}{(4a^2 - 2a + 1)(2a^3 + 1)} \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng với mọi số thực không âm. Từ đó ta có (đpcm)

**Bài 3.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$  (1)

### Chứng minh

Trước hết, ta sẽ chứng minh  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} + \ln x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1.8]$

Thật vậy, ta có:  $f'(x) = \frac{1-2x}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x^3-x^2-1)}{x(x^2-x+1)^2}$

Rõ ràng phương trình  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm  $x \in (0, 2]$ ,

do đó ta dễ dàng kiểm tra được  $f(x) \leq \min\{f(1), f(1.8)\} = 0$

Như thế, nếu cả 3 số  $a, b, c$  đều không lớn hơn 1.8 thì ta có (đpcm), vì khi đó

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} = f(a) + f(b) + f(c) \leq 3 - \ln a - \ln b - \ln c = 3$$

Ngược lại, nếu tồn tại  $a$  sao cho  $a \geq 1.8$ . Nếu  $a \geq 2$ , ta có

$$VT(1) = \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{2^2-2+1} + \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{4}} = 3$$

Như thế, ta chỉ cần xét  $a \leq 2$ , tức là  $2 \geq a \geq 1.8$ .

Giả sử  $b \geq c$ , khi đó do  $a \leq 2$  nên  $b \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Nếu  $a \geq 1.9$ , ta có

$$VT(1) = \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{1.9^2-1.9+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1} + \frac{1}{\frac{3}{4}} < 3$$

Nếu  $a \leq 1.9$ , suy ra  $b \geq \frac{1}{\sqrt{1.9}}$  khi đó ta có:

$$VT(1) = \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{1.8^2-1.8+1} + \frac{1}{\frac{1}{1.9}-\frac{1}{\sqrt{1.9}}+1} + \frac{1}{\frac{3}{4}} < 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét:** Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách khác như sau

Ta sẽ chứng minh  $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} \geq 1 \quad \forall x, y, z > 0, xyz = 1$  (1)

Thật vậy, tồn tại  $m, n, p > 0$  sao cho  $x = \frac{np}{m^2}, y = \frac{pm}{n^2}, z = \frac{mn}{p^2}$  khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{m^4}{m^4+m^2np+n^2p^2} + \frac{n^4}{n^4+n^2pm+p^2m^2} + \frac{p^4}{p^4+p^2mn+m^2n^2} \geq 1 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có

$$\begin{aligned} VT(2) &\geq \frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2+mnp(m+n+p)} \\ &\geq \frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+2(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)} = 1 \end{aligned}$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức trên khi thay  $x, y, z$  bởi  $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{a^4+a^2+1} + \frac{b^4}{b^4+b^2+1} + \frac{c^4}{c^4+c^2+1} &\geq 1 \Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1} + \frac{2(b^2+1)}{b^4+b^2+1} + \frac{2(c^2+1)}{c^4+c^2+1} \leq 4 \\ \Leftrightarrow \frac{(a^2+a+1)+(a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)} + \frac{(b^2+b+1)+(b^2-b+1)}{(b^2+b+1)(b^2-b+1)} + \frac{(c^2+c+1)+(c^2-c+1)}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)} &\leq 4 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \right) + \left( \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \right) &\leq 4 \end{aligned}$$

Lại sử dụng bất đẳng thức trên, ta có  $\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \geq 1$

Suy ra  $\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \leq 3$ . Vậy ta có đpcm.

**Bài 4.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} + \frac{1+d}{1+d^2} \leq 4$  (1)

#### Chứng minh

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{\ln x}{2} - 1$  với  $x > 0$ , ta có  $f'(x) = \frac{(x-1)(x^3-x^2-3x-1)}{2x(x^2+1)^2}$

Để thấy phương trình  $x^3-x^2-3x-1=0$  chỉ có duy nhất một nghiệm  $x_0 \in (1, 4]$ ,

do đó ta có:  $f(x) \leq \max\{f(1), f(4)\} = 0 \quad \forall x \in (0, 4]$

Và như thế, ta đi đến nếu cả 4 số  $a, b, c, d$  đều không lớn hơn 4 thì ta có đpcm vì

$$VT(1) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leq 4 - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b + \ln c + \ln d) = 4$$

Nếu tồn tại 1 số, chẳng hạn là  $a \geq 4$ . Khi đó, chú ý rằng với mọi  $x > 0$ , ta có

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{21}{17} - \frac{21x^2-17x+4}{17(x^2+1)} \leq \frac{21}{17} \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{21}{17}$$

Từ đây, ta được  $VT(1) \leq \frac{1+a}{1+a^2} + \frac{3 \times 21}{17} \leq \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{3 \times 21}{17} = 4$ .

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 5.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa mãn  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ .

Chứng minh rằng  $\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \dots + \sqrt{a_n^2+1} \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  (1)

#### Chứng minh

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$  với  $x > 0$

Khi đó ta có:  $f'(x) = \frac{(x-1)[-2x^2 + x - 1 - 2x^2\sqrt{2(x^2+1)}]}{x\sqrt{2(x^2+1)}(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1})} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Qua 1 thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên  $f'(x) \leq f'(1) = 0, \forall x > 0$ .

Điều đó có nghĩa là  $\sqrt{x^2+1} \leq 2\sqrt{x} - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x, \forall x > 0$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở này cho  $n$  biến và cộng vế theo vế ta có

$$VT(1) \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n)$$

$$= \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln \prod_{i=1}^n a_i = \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

**Nhận xét:** Bài toán trên còn có thể giải quyết bằng một bất đẳng thức cơ sở quen thuộc:

$$\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}(x - \sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x} - 1)^4, \forall x > 0$$

Sử dụng bất đẳng thức trên lần lượt cho  $n$  biến cộng lại ta có:

$$VT(1) \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \sqrt{2}\left(n - \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}\right) \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

#### Bài 6. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$

#### Chứng minh

Ta cần xác định hệ số  $k$  sao cho:  $a^2 + 9bc = a^2 + \frac{9}{a} \geq 10a + k \ln a$ . Tương tự các phần trước ta

tìm được  $k = -17$ . Ta sẽ chứng minh:  $f(a) = a^2 + \frac{9}{a} - 10a + 17 \ln a \geq 0$

$$\text{Thật vậy: } f'(a) = 2a - \frac{9}{a^2} - 10 + \frac{17}{a} = \frac{2a^3 - 10a^2 + 17a - 9}{a^2} = \frac{(a-1)(2a^2 - 8a + 9)}{a^2}$$

Ta có  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ . Từ đây, ta dễ dàng thấy được  $f(a) \geq f(1) = 0, \forall a > 0$

hay  $a^2 + \frac{9}{a} - 10a \geq -17 \ln a$ . Sử dụng tương tự với  $b, c$  rồi cộng lại vế theo vế, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Bài 7.** Cho các số dương  $a, b, c, d, e, f$  thỏa mãn  $abcdef = 1$ , chứng minh rằng:

$$\frac{2a+1}{a^2+a+1} + \frac{2b+1}{b^2+b+1} + \frac{2c+1}{c^2+c+1} + \frac{2d+1}{d^2+d+1} + \frac{2e+1}{e^2+e+1} + \frac{2f+1}{f^2+f+1} \leq 6 \quad (1)$$

**Chứng minh**

Xét hàm số  $F(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{\ln x}{3} - 1$  với  $x > 0$ , ta có

$$F'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{1}{3x} = \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 - 6x - 1)}{3x(x^2 + x + 1)^2}$$

Chú ý rằng phương trình  $x^3 - 3x^2 - 6x - 1 = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm  $x_0 \in [4, 12]$ , từ đây ta dễ dàng suy ra được  $F(x) \leq \max\{f(1), f(12)\} = 0 \quad \forall x \in (0, 12]$

Do đó, nếu  $\max\{a, b, c, d, e, f\} \leq 12$ , ta có:

$$VT(1) = F(a) + F(b) + F(c) + F(d) + F(e) + F(f) \leq 6 - \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c + \ln d + \ln e + \ln f) = 6$$

Nếu  $\max\{a, b, c, d, e, f\} \geq 12$ , giả sử  $a = \max\{a, b, c, d, e, f\} \geq 12$ , khi đó với chú ý rằng với mọi

$$x > 0 \text{ thì } \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{7}{6} - \frac{7x^2-5x+1}{6(x^2+x+1)} \leq \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x+1} \leq \frac{7}{6}$$

$$\text{Do đó } VT(1) \leq \frac{2a+1}{a^2+a+1} + \frac{5 \times 7}{6} \leq \frac{2 \times 12+1}{12^2+12+1} + \frac{5 \times 7}{6} < 6$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 1$ .

**Bài 8.** Cho các số dương  $a, b, c, d, e, f$  thỏa mãn  $abcdef = 1$ , chứng minh rằng:

$$\frac{a-1}{a^2+a+1} + \frac{b-1}{b^2+b+1} + \frac{c-1}{c^2+c+1} + \frac{d-1}{d^2+d+1} + \frac{e-1}{e^2+e+1} + \frac{f-1}{f^2+f+1} \leq 0$$

**Chứng minh**

$$\text{Xét hàm số } F(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{\ln x}{3} \text{ với } x > 0, \text{ ta có } F'(x) = \frac{(x-1)(-x^3 - 6x^2 - 3x + 1)}{3x(x^2+x+1)^2}$$

Chú ý rằng phương trình  $-x^3 - 6x^2 - 3x + 1 = 0$  chỉ có duy nhất 1 nghiệm  $x_0 > \frac{1}{5}$ .



từ đây ta dễ dàng suy ra được  $F(x) \leq \max \left\{ f(1), f\left(\frac{1}{11}\right) \right\} = 0, \forall x \geq \frac{1}{11}$

Do đó, nếu  $\min\{a, b, c, d, e, f\} \geq \frac{1}{11}$  ta có:

$$VT(1) = F(a) + F(b) + F(c) + F(d) + F(e) + F(f) \leq \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c + \ln d + \ln e + \ln f) = 0$$

Nếu  $\min\{a, b, c, d, e, f\} \leq \frac{1}{11}$  và giả sử  $a = \min\{a, b, c, d, e, f\}$  thì  $a \leq \frac{1}{11}$

Đề ý rằng với mọi  $x > 0$  thì  $\frac{x-1}{x^2+x+1} \leq \frac{(\sqrt{3}+1)-1}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}+1) + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$

$$\text{Do đó } VT(1) \leq \frac{a-1}{a^2+a+1} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \leq \frac{\frac{1}{11}-1}{\frac{1}{11^2} + \frac{1}{11} + 1} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) < 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 1$

**Bài 9.** Cho các số dương  $a, b, c, d, e, f, g$  có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1)(e^2 - e + 1)(f^2 - f + 1)(g^2 - g + 1) \geq 1 \quad (1)$$

### Chứng minh

Bất đẳng thức (1) tương đương với  $\sum_{cyc} \ln(a^2 - a + 1) \geq 0$

Xét hàm số  $F(x) = \ln(x^2 - x + 1) - x + 1$ . Ta có  $F'(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{x^2 - x + 1}$

Từ đây, ta có  $F(x) \geq \min\{f(1), f(2.75)\} = 0, \forall x \in (0, 2.75]$

Do đó nếu các số  $a, b, c, d, e, f, g$  không vượt quá 2.75 ta có ngay đpcm vì

$$\sum_{cyc} \ln(a^2 - a + 1) = \sum_{cyc} F(a) \geq \sum_{cyc} (1 - a) = 0$$

Ngược lại, giả sử tồn tại  $a \geq 2.75$ . Khi đó, chú ý rằng  $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \forall x \in \mathbb{R}$  nên

$$\sum_{cyc} \ln(a^2 - a + 1) \geq \ln(a^2 - a + 1) + 6 \ln \frac{3}{4} \geq \ln(2.75^2 - 2.75 + 1) + 6 \ln \frac{3}{4} > 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = g = 1$ .

## VII. U.C.T MỜ RỘNG

Ngay từ phần mở đầu chúng ta đã đặt vấn đề xác định hệ số  $m$  theo bất đẳng thức  $h(a_i) \geq f(a_i) + ma^k + n$  với điều kiện của bài toán là  $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = n$ . Tuy nhiên cách xác định đó đối với một số bài toán lại không hiệu quả. Điều đó cũng không phải hoàn toàn là không tốt. Vì nó sẽ thôi thúc chúng ta tìm ra các dạng xác định hệ số khác. Một cách trực quan chúng ta sẽ phân tích một bài toán cụ thể để thấy được những gì đã được nêu ra ở trên.

**Bài 1. [Tập chí Crux, Canada]** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$

Chứng minh:  $\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \leq \frac{3}{8}$

### Chứng minh

Điều đầu tiên là chúng ta nghĩ đến việc thiết lập một bất đẳng thức cơ sở dạng

$$\frac{8}{9-x} \leq 1 + mx + n \Rightarrow \frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x-1), \text{ từ đó dự đoán } m = \frac{1}{8}.$$

Nhưng rất tiếc với  $m = \frac{1}{8}$  thì bất đẳng thức trên hoàn toàn không đúng kể cả tư tưởng chia trường hợp như ở phần 3 cũng không thể áp dụng được. Thật vậy với  $m = \frac{1}{8}$  ta có

$$\frac{8}{9-x} \leq \frac{7+x}{8} \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)^2}{8(9-x)}, \text{ bất đẳng thức này không luôn đúng.}$$

Tuy nhiên ta có thể sử dụng U.C.T với một ý tưởng mới mẻ hơn bằng cách thiết lập bất đẳng thức cơ sở sau:  $\frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x^2 - 1) + n(x-1)$  (\*)

Việc xác định hệ số trong bất đẳng thức trên đòi hỏi sự chặt chẽ trong lập luận vì đôi khi nơi lỏng lẻo miền nghiệm của biến sẽ khiến cho bài toán không đúng. Có nhiều hệ số thỏa mãn để tạo thành đại lượng bình phương  $(x-1)^2$  nhưng ta phải xác định sao cho dấu của bất đẳng thức (\*) là đúng. Ta có: (\*)  $\Leftrightarrow 0 \leq (x-1) \left[ m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} \right]$  (\*\*)

Từ phân tích trên rõ ràng ta phải xác định  $n$  theo  $m$  sao cho xuất hiện nghiệm  $x = 1$  để hình thành đại lượng  $(x-1)^2$ , tức là  $m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{9-x} - m(x+1) \Rightarrow n = \frac{1}{8} - 2m$

Thế vào (\*\*) ta có (\*\*)  $\Leftrightarrow 0 \leq (x-1) \left[ m(x+1) - 2m + \frac{1}{8} - \frac{1}{9-x} \right] \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 (72m - 8mx - 1)$

Dễ thấy rằng việc xác định hệ số ở đây không còn đơn giản như trước. Nó đòi hỏi ta phải tìm ra những ước lượng chặt chẽ để bất đẳng thức không đổi chiều. Sử dụng điều kiện

$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$  ta có đánh giá  $3 > \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$  và còn có thể làm chặt hơn nữa:

$\frac{9}{4} \geq \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$ . Tuy nhiên đối với bài toán này thì chỉ cần sử dụng điều kiện yếu là  $3 > \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$ . Bây giờ ta cần xác định hệ số  $m$  để bất đẳng thức trên đúng  $\forall x \in [0; 3)$ .

Nếu  $m < 0$  thì với  $x = 0$  ta nhận được một bất đẳng thức ngược chiều. Vậy có thể dự đoán  $m \geq 0$ , khi đó  $72m - 1 - 8mx \geq 72m - 1 - 24 = 48m - 1$

Ta cần có  $48m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{48}$ . Vậy nên ta sẽ dự đoán  $m = \frac{1}{48} \Rightarrow n = \frac{1}{12}$ .

Bây giờ ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức cơ sở đúng với  $m = \frac{1}{48}, n = \frac{1}{12}$ .

Thật vậy ta có:  $\frac{8}{9-x} \leq \frac{x^2+4x+43}{48} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-x)}{48(9-x)}$  (luôn đúng)

Áp dụng bất đẳng thức cơ sở trên với các biến  $ab, bc, ca$  ta có:

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{1}{48}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca) + \frac{43}{16}$$

Ta cần chứng minh:  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca \leq 15$  (2)

Đặt  $k = ab + bc + ca$ , áp dụng bất đẳng thức  $AM - GM$  và bất đẳng thức  $Schur$  ta có:

$k \leq 3, abc \geq \max\left\{0, \frac{4x-9}{3}\right\}$ . Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu  $4x \leq 9$  thì

$$VT(2) = (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc = k^2 + 4k - 6abc \leq \frac{81}{16} + 9 = \frac{225}{16} < 15$$

+ Trường hợp 2. Nếu  $4x \geq 9$  thì:  $VT(2) = (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc$

$$= k^2 + 4k - 6abc \leq k^2 + 4k - 2(4k - 9) = (k-1)(k-3) + 15 \leq 15$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Tiếp theo chúng tôi sẽ không đi vào chi tiết mà chỉ đưa ra cách thiết lập bất đẳng thức cơ sở một cách khái quát. Chúng ta hãy đến với bài toán sau

## Bài 2. [Moldova TST 2005]

Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$

### Chứng minh

Với  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$  ta luôn có  $\frac{3}{4-x} \leq \frac{2x^2+x+12}{15} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-2x)}{15(4-x)}$

Lại có  $\max\{ab, bc, ca\} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$  nên ta có

$$\frac{3}{4-ab} + \frac{3}{4-bc} + \frac{3}{4-ca} \leq \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + ab + bc + ca + 36}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** và **CSB** ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4 = 3 : ab + bc + ca \leq \sqrt{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \leq 3$$

Cộng các bất đẳng thức cơ sở trên về theo về ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .

**Nhận xét:** Đây là một bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$  và bất đẳng thức **AM – GM**.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} \right) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{4}{8-a^2-b^2} \right) \geq \frac{2}{8-2ab} = \frac{1}{4-ab}, \forall a, b \in [0; 2].$$

$$\text{Qui bài toán về chứng minh } \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} + \frac{1}{4-c^2} \leq 1.$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau } \frac{1}{4-a^2} \leq \frac{a^4+15}{18}.$$

|                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Bài 3.</b> Cho <math>\begin{cases} a, b, c, d &gt; 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \end{cases}</math>. Chứng minh: <math>\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2</math> (1)</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Chứng minh

Đây là một bài toán khó vì vậy việc thiết lập hệ số phải cần những đánh giá chặt chẽ và suy luận hợp lí. Chúng ta hãy cùng phân tích con đường đi đến lời giải của bài toán này

$$\text{Ta sẽ xác định hệ số } m, n \text{ sao cho } \frac{2}{3-x} \leq 1 + m(x^2 - 1) + n(x - 1), \forall x \in \left[ 0; \frac{8}{3\sqrt{3}} \right]$$

$$\text{Nhu đã phân tích ở trên ta tìm ra } n = \frac{1}{2} - 2m, \text{ khi đó (1)} \Leftrightarrow (x-1)^2(6m-1-2mx) \geq 0$$

$$\text{Để thấy } m \geq 0 \Rightarrow 6m-1-2mx \geq 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m. \text{ Ta cần có } 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}}$$

$$\text{Do } \frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}} < \frac{1}{6-\frac{16}{5}} = \frac{5}{14} \text{ nên ta chỉ cần có } m \geq \frac{5}{14}. \text{ Vậy chọn } m = \frac{5}{14} \Rightarrow n = -\frac{3}{14}$$

$$\Rightarrow \text{Bất đẳng thức cơ sở: } \frac{2}{3-x} \leq \frac{5x^2-3x+12}{14} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(8-5x)}{14(3-x)} \text{ đúng } \forall x \in \left[ 0; \frac{8}{3\sqrt{3}} \right]$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở với chú ý  $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$  suy ra ta cần

$$\text{chứng minh: } 5(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2) - 3(abc + bcd + cda + dab) \leq 8 \text{ (2)}$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng nhiều cách. Sau đây xin trình bày một cách dựa vào kỹ thuật hàm lồi.

Đặt  $t^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, k^2 = \frac{c^2+d^2}{2}, x=ab, y=cd$  khi đó, ta có  $t^2 \geq x, k^2 \geq y$ .

Bất đẳng thức (2)  $\Leftrightarrow f(x) = 10x^2k^2 + 10y^2t^2 - 3x\sqrt{2y+2k^2} - 3y\sqrt{2x+2t^2} - 8$

Ta có  $f''(x) = 20k^2 + \frac{3y}{\sqrt{(2x+2t^2)^3}} \geq 0 \Rightarrow f(x)$  là hàm lồi  $\Rightarrow f(x) \leq \max\{f(t^2), f(0)\}$

Ta có  $f(0) = (yt\sqrt{2}+1)(5yt\sqrt{2}-8) \leq 0$  do  $yt\sqrt{2} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$

$$f(t^2) = 10y^2t^2 - 6yt + 10k^2t^2 - 3t\sqrt{2y+2k^2} - 8 = g(y)$$

Tương tự như trên ta cũng có  $g(y)$  là hàm lồi nên  $g(y) \leq \max\{g(k^2), g(0)\}$

Ta cũng có  $g(0) = (kt\sqrt{2}+1)(5kt\sqrt{2}-8) \leq 0$  do  $kt\sqrt{2} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$

$$g(t^2) = 4(kt-1)(5kt+1) \leq 0 \text{ do } kt\sqrt{2} \leq \frac{k^2+t^2}{2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

**Nhận xét:** Trong lời giải này, chúng ta thấy những đánh giá tinh tế của **U.C.T** đóng vai trò là một bàn đạp quan trọng để đi đến lời giải. Tiếp theo chúng ta sẽ thấy được sức mạnh của **U.C.T** qua 2 lời giải đối lập nhau đối với 2 bài toán cũng đối lập nhau về mức độ mạnh, yếu của đánh giá bất đẳng thức.

**Bài 4.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ .

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-bd} \leq 8 \quad (1)$$

**Chứng minh**

**Bổ đề.** Nếu  $x, y, z \geq 0$  và  $2x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{4}{3}$  thì  $\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-xz} \leq \frac{2}{1-xu}$  với  $u = \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}$

**Chứng minh:** Thật vậy, bất đẳng thức  $\Leftrightarrow \left(1-x \cdot \frac{y+z}{2}\right) \left(1-x\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right) \leq (1-xy)(1-xz) \Leftrightarrow$

$$\frac{y+z}{2} \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} x^2 - yzx^2 \leq x \left( \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} x - yzx \leq x \left( \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \left[ \left( \frac{y+z}{2} \right)^2 - yz \right] + x \left( \frac{y+z}{2} \right) \left( \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2} \right) \leq \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-z)^2}{4} \leq \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{x(y+z)}{2} \right] \frac{(y-z)^2}{\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y+z}{2}} \Leftrightarrow \frac{(y-z)^2}{4} \cdot \frac{x \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + x(y+z) - 1}{\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y+z}{2}} \leq 0 \quad (2)$$

(2) đúng vì  $u \geq \frac{y+z}{2}$  và do đó  $3x \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow x^2(y^2+z^2) \leq \frac{2}{9}$

Nhưng bất đẳng thức này đúng vì  $2x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{4}{3}$ . Bỏ để được chứng minh.

**Áp dụng:** Giả sử  $|a^2 - b^2| \leq \frac{1}{3}$ , đặt  $a^2 + b^2 = 2x^2$  và  $c^2 + d^2 = 2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Sử dụng bổ đề trên, ta có  $\frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-ad} \leq \frac{2}{1-ay}$  và  $\frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-bd} \leq \frac{2}{1-by}$

Vì  $2y^2 + a^2 + b^2 = 1 < \frac{4}{3}$  nên theo bổ đề trên, ta cũng có  $2 \left( \frac{1}{1-ay} + \frac{1}{1-by} \right) \leq \frac{4}{1-xy}$

Ta sử dụng các bất đẳng thức quen-thuộc  $\frac{1}{1-ab} \leq \frac{1}{1-x^2}$  và  $\frac{1}{1-cd} \leq \frac{1}{1-y^2}$

$\Rightarrow f(a,b,c,d) \leq \frac{4}{1-xy} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2}$ . Ta sẽ chứng minh  $\frac{4}{1-xy} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \leq 8$

Đặt  $t = xy$ ,  $t \leq \frac{1}{4}$ , khi đó bất đẳng thức  $\Leftrightarrow (4t-1)(4t^2-t+1) \leq 0$  (luôn đúng)

**Bài 5.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3} \quad (1)$

### Chứng minh

Tương tự các bài trước, ta thiết lập được bất đẳng thức  $\frac{9}{1-x} \leq 32x^2 + 10$ ,  $\forall x \leq \frac{1}{2}$

Từ đây, ta suy ra được  $VT(1) \leq \frac{32}{9}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2) + \frac{40}{9}$

$= \frac{32}{9}(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) + \frac{40}{9} \leq \frac{8}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + \frac{40}{9} = \frac{16}{3} \Rightarrow$  (đpcm)

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = \pm \frac{1}{2}$ .

**Nhận xét:** Rõ ràng bài toán 5 mạnh hơn hẳn bài toán 4 vì sử dụng 5 ta có ngay kết quả của 4. Ngoài ra, ta còn có một cách “làm mạnh” khác cho bài toán trên.

**Bài 6.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{d+a}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2} \leq 8$$

### Chứng minh

Bài toán này đã được bạn ZhaoBin đưa ra một lời giải rất đẹp bằng cách sử dụng bất đẳng thức **CBS**. ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một lời giải khác theo tư tưởng **U.C.T**. Sử dụng bất đẳng thức trong bài, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4 \leq 6$$

Thật vậy, ta có  $(a+b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2) - (a-b)^4 \leq 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta suy ra được  $LHS \leq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 6$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Thật tự nhiên, câu hỏi sau được đặt ra, liệu bất đẳng thức sau có đúng?

**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{d+a}{2}\right)^2} \leq \frac{16}{3}$$

Thật tiếc là bất đẳng thức này không đúng! Với ví dụ  $a = b = 0.4$  và  $c = d = \sqrt{0.84}$ .

**Bài 8.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1$

### Chứng minh

Ta có thể thiết lập được bất đẳng thức sau  $\frac{48}{5-x} \leq x^2 + x + 10, \forall 2 \geq x > 0$ . Do đó:

+, Nếu  $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq 2$  thì sử dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh  $a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + abc + bcd + cda + dab \leq 8$

Bất đẳng thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng dồn biến, **EV** hoặc hàm lồi.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng  $a \geq b \geq c \geq d$ . Đặt  $f(a, b, c, d)$  là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng  $f(a, b, c, d)$  đạt giá trị lớn nhất nếu và chỉ nếu  $a = b = c$ .

Nếu  $a > c$ , ta xét hiệu  $h = f(t, b, t, d) - f(a, b, c, d)$ , trong đó  $t = \frac{a+c}{2}$ . Ta có:



$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d) - \frac{1}{2}(a-c)^2b^2d^2 + (b^2+d^2)\left(\frac{1}{16}(a+c)^4 - a^2c^2\right) \\ &\geq \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d) - \frac{1}{2}(a-c)^2b^2d^2 = \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d-b^2d^2) \\ &\geq \frac{1}{2}(a-c)^2(b+d-bd) \geq \frac{1}{2}(a-c)^2(b-bd) \geq 0 \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là nếu  $a > c$  thì ta có thể thay  $a, c$  bởi  $\frac{a+c}{2}, \frac{a+c}{2}$  để có giá trị lớn hơn của  $f(a, b, c, d)$ . Mặt khác, giá trị lớn nhất chắc chắn tồn tại, và từ đó, ta suy ra giá trị lớn nhất đạt được nếu và chỉ nếu  $a = b = c$ .

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $f(t, t, t, d) \leq 8$  với điều kiện  $3t + d = 4, 1 \leq t \leq \frac{4}{3}$

Hay là  $t^3 + 3(4-3t)t^2 + t^6 + 3(4-3t)^2t^4 \leq 8 \Leftrightarrow 4(2+4t+3t^2+4t^3-7t^4)(t-1)^2 \geq 0$ . Ta có

$$2+4t+3t^2+4t^3-7t^4 = t^4\left(\frac{2}{t^4} + \frac{4}{t^3} + \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t} - 7\right) \geq t^4\left(\frac{2}{(4/3)^4} + \frac{4}{(4/3)^3} + \frac{3}{(4/3)^2} + \frac{4}{(4/3)} - 7\right) = \frac{t^4}{128} \geq 0.$$

Nếu  $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \geq 2$  và giả sử  $abc \geq 2$ , khi đó, chú ý rằng với mọi  $x, y \geq 0, x+y \leq 5$ ,

$$\text{ta có } \frac{1}{5} + \frac{1}{5-x-y} - \frac{1}{5-x} - \frac{1}{5-y} = \frac{xy(10-x-y)}{5(5-x)(5-y)(5-x-y)} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} \leq \frac{1}{5-x-y} + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} + \frac{1}{5-z} \leq \frac{1}{5-x-y-z} + \frac{2}{5}, \forall \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x+y+z \leq 5 \end{cases}$$

Chú ý rằng  $\sum_{cyc} (a^2b^2c^2 + abc) \leq 8$  và  $abc \geq 2$  nên  $bcd + cda + dab < 5$ , do đó

$$\frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq \frac{1}{5-d(ab+bc+ca)} + \frac{2}{5}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-d(ab+bc+ca)} \leq \frac{3}{5}$$

Đặt  $x = 4-d$  do  $abc \geq 2$  nên  $4 \geq x = a+b+c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

Theo bất đẳng thức AM - GM thì  $abc \leq \frac{1}{27}x^3, ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}x^2$

$$\text{Do đó, ta chỉ cần chứng minh } \frac{1}{5-\frac{1}{27}x^3} + \frac{1}{5-\frac{1}{3}x^2(4-x)} \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{Hay } f(x) = x^6 - 4x^5 - 80x^3 + 360x^2 - 675 \leq 0$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x^4(x-4) + 4x^3(x-12) + 48x(15-4x) < 0$$

$$\text{Suy ra } f(x) \text{ là hàm nghịch biến, do đó } f(x) \leq f(3\sqrt[3]{2}) = 27(48\sqrt[3]{4} - 77) < 0$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = 1$ .

**Bài 9.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3+a^2-2bc} + \frac{1}{3+b^2-2ca} + \frac{1}{3+c^2-2ab} \leq \frac{9}{8}$$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi  $x \in [-1, 1]$  thì  $\frac{8}{3+x} \leq \frac{9x^2 - 12x + 43}{16}$

Thật vậy, ta có  $\frac{9x^2 - 12x + 43}{16} - \frac{8}{3+x} = \frac{(x+1)(3x+1)^2}{16(3+x)} \geq 0$

Sử dụng bất đẳng thức này, với chú ý rằng  $\{a^2 - 2bc, b^2 - 2ca, c^2 - 2ab\} \in [-1, 1]$ , ta suy ra được

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{8}{3+a^2-2bc} \leq \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} (9(a^2 - 2bc)^2 - 12(a^2 - 2bc) + 43)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh  $\frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} (9(a^2 - 2bc)^2 - 12(a^2 - 2bc) + 43) \leq 9$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{\text{cyc}} a^4 + 3 \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} a^2 bc - 4 \sum_{\text{cyc}} ab(a^2 + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 (3a+3b-4c)^2 + \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} c^2 (a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  hoặc  $(a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

### VIII. KỸ THUẬT U.C.T. TRONG BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Trong các phần trước chúng ta đã thấy được vai trò của U.C.T. trong các bất đẳng thức đại số. Thế nhưng đối với các bài toán lượng giác thì sao? Chúng ta sẽ tìm được ngay lời giải đáp về sức mạnh của U.C.T. trong phần này. Trước hết chúng ta quan tâm đến mệnh đề quan trọng sau đây:

#### Mệnh đề:

Nếu  $f(x)$  là hàm khả vi bậc 2 và lồi trên khoảng  $(a, b)$  thì  $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y), \forall x, y \in (a, b)$

Nếu  $f(x)$  là hàm khả vi bậc 2 và lõm trên khoảng  $(a, b)$  thì  $f(x) \leq f(y) + f'(y)(x-y), \forall x, y \in (a, b)$

### Chứng minh

Nhận xét: Mệnh đề trên là một hệ quả trực tiếp của định lý **Lagrange**:

Nếu  $x = y$  thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Nếu  $x \neq y$  thì theo định lý **Lagrange**, tồn tại 1 số thực  $c \in (x, y)$  (hoặc  $c \in (y, x)$ ) sao cho

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$

+, Nếu  $x > y$ , lúc này  $c \in (x, y)$ , do  $f(x)$  là hàm lồi nên  $f'(x)$  đồng biến, do đó  $f'(c) \geq f'(y)$ , suy ra  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq f'(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$  (do  $x > y$ )

+, Nếu  $y > x$  lúc này  $c \in (y, x)$ , do  $f(x)$  là hàm lồi nên  $f'(x)$  đồng biến, do đó  $f'(c) \leq f'(y)$ , suy ra  $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$  (do  $x < y$ )

Tương tự ta có kết quả khi  $f$  là hàm lõm và mệnh đề được chứng minh.

**Hệ quả:** Với kỹ thuật U.C.T, ta cần tìm số thực  $k$  sao cho bất đẳng thức  $f(x) \geq k(x - \alpha) + m$  có nghiệm bội  $x = \alpha$  thì hiển nhiên theo mệnh đề trên, ta suy ra được  $k = f'(\alpha)$ . Đây là một kết quả khá thú vị và có nhiều ứng dụng.

Chúng ta hãy xét một số ví dụ để làm rõ điều này.

**Bài 1.** Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

#### Chứng minh

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Ta cần thiết lập bất đẳng thức  $\cos x \leq k\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}; \forall x \in (0, \pi)$

Xét hàm số  $f(x) = \cos x$  với  $x \in (0, \pi)$ , ta có  $f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

do đó ta được  $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ta cần chứng minh  $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}, \forall x \in (0, \pi)$

Đây là một bất đẳng thức vừa liên quan đến các “đại lượng” lượng giác vừa liên quan đến biến thực nên ta không thể sử dụng biến đổi tương đương như các bài toán trước mà phải sử dụng đạo hàm.

Xét  $g(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ . Ta có:  $g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra được

$$g(x) \leq \max\left\{g\left(\frac{\pi}{3}\right), g(\pi)\right\} = 0, \forall x \in (0, \pi)$$

Sử dụng bất đẳng thức này lần lượt với  $A, B, C$  rồi cộng lại, ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(A + B + C - \pi) = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\triangle ABC$  đều.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

## Chứng minh

Tương tự như trên, ta thiết lập được bất đẳng thức  $\sin x \leq \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall x \in (0, \pi)$

Thật vậy, xét hàm số  $f(x) = \sin x$ , ta có  $f''(x) = -\sin x < 0 \forall x \in (0, \pi)$ , suy ra

$$f(x) \leq f'(x)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall x \in (0, \pi)$$

Từ đây, sử dụng lần lượt với  $A, B, C$  rồi cộng lại, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} + \frac{\left(1 - \sin \frac{B}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}\left(1 + \sin \frac{B}{2}\right)} + \frac{\left(1 - \sin \frac{C}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2}\left(1 + \sin \frac{C}{2}\right)} \geq 2 + \sqrt{3} \quad (1)$$

## Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2}\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \geq \frac{\left[\sum_{cyc} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\right]^2}{\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta có:  $\sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \leq \left(\frac{\sin \frac{A}{2} + 1 - \sin \frac{A}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Tương tự, ta có  $\sin \frac{B}{2}\left(1 - \sin \frac{B}{2}\right) \leq \frac{1}{4}; \sin \frac{C}{2}\left(1 - \sin \frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) &\leq \frac{1}{4} \sum_{cyc} \left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 + \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \cos \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sin A\right) \end{aligned}$$

Chú ý rằng:  $\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}, \sum_{cyc} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \sum_{cyc} \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right) \leq \frac{1}{4} \left(3 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{9(2 + \sqrt{3})}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2}\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \geq \frac{16}{9(2 + \sqrt{3})}$$

Thay vào (2) suy ra 
$$\sum_{cyc} \frac{(1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2})}{\sin \frac{A}{2}(1 + \sin \frac{A}{2})} \geq \frac{16}{9(2 + \sqrt{3})} \left[ \sum_{cyc} (1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2}) \right]^2$$

Do đó, để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16}{9(2 + \sqrt{3})} \left[ \sum_{cyc} (1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2}) \right]^2 \geq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (1 - \sin \frac{A}{2})(1 + \cos \frac{A}{2}) \geq \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \right) \geq -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Do  $\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}$  nên ta chỉ cần chứng minh  $\sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$  (3)

Xét hàm số  $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x + x - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$  với  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có:  $f'(x) = -\sin x + 1 - \cos 2x = \sin x(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Qua  $\frac{\pi}{6}$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương nên  $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do  $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  nên  $f\left(\frac{A}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0$

$$\Rightarrow \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \geq \left(\frac{\pi}{6} - \frac{A}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Tương tự, ta có  $\cos \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \sin B \geq \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ;  $\cos \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \sin C \geq \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$

Do đó  $\sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin A \right) \geq \sum_{cyc} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{A}{2} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$ .

Với các bài toán đối xứng như thế, các bạn có thể dễ dàng thiết lập được bất đẳng thức cơ sở nhưng còn các bài toán bất đối xứng thì sao? Liệu có thể thiết lập được dễ dàng như trên? Cái khó ở đây, chính là biết được đẳng thức xảy ra khi nào? Từ đó, ta mới có thể dễ dàng tìm được lời giải cho bài toán! Sau đây là một ví dụ:

**Bài 4. [VNTST 2001]** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ 2lab + 2bc + 8ca \leq 12 \end{cases}$  Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ .

**Giải**

Mới nhìn, bài toán này chẳng có vẻ gì là 1 bài toán lượng giác cả, nhưng các bạn yên tâm “kỹ pháp” lượng giác vẫn có thể áp dụng được cho bài này!

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ;  $y = \frac{2}{b}$ ;  $z = \frac{3}{c}$  thì ta có  $x, y, z > 0$ ,  $2x + 4y + 7z \leq 2xyz$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x + y + z$

Nếu  $2x + 4y + 7z < 2xyz$ , đặt  $x = kx', y = ky', z = kz'$  sao cho  $2x' + 4y' + 7z' = 2x'y'z'$

suy ra  $k > 1$  và do đó  $P = x + y + z = k(x' + y' + z') > x' + y' + z'$

Như thế, để tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ , ta chỉ cần xét  $2x + 4y + 7z = 2xyz$ .

Một điều đáng chú ý là với đẳng thức  $2x + 4y + 7z = 2xyz$  ta không thể đưa về lượng giác ngay được vì chẳng có 1 đẳng thức nào như thế cả, nhưng nó lại gợi nhớ cho ta đến đẳng thức:

Nếu  $A, B, C$  là 3 góc của một tam giác thì  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Từ đây ta nảy ra ý tưởng tìm cách chuyển về đẳng thức trên và ta có:

Đặt  $x = \sqrt{7}m, y = \frac{\sqrt{7}}{2}n, z = \frac{2\sqrt{7}}{7}p$  thì ta có  $m, n, p > 0, m + n + p = mnp$

từ đó tồn tại các góc nhọn  $A, B, C$  sao cho  $m = \tan A, n = \tan B, p = \tan C$

khi đó từ  $m + n + p = mnp$  ta suy ra  $A, B, C$  là 3 góc nhọn của 1 tam giác

Biểu thức  $P$  được viết lại như sau:  $P = \frac{\sqrt{7}}{14}(14 \tan A + 7 \tan B + 4 \tan C)$

Xét hàm số  $f(x) = \tan x$  với  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , ta có  $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$

Suy ra  $f(x)$  là một hàm lồi, và do đó theo bổ đề trên, ta có:

$$f(A) \geq f\left(\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)\left(A - \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7}\left(A - \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(B) \geq f\left(\arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right)\left(B - \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7}\left(B - \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(C) \geq f(\arctan \sqrt{7}) + f'(\arctan \sqrt{7})(C - \arctan \sqrt{7}) = \sqrt{7} + 8(C - \arctan \sqrt{7})$$

$$\text{Mặt khác: } \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7} + \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7} + \arctan \sqrt{7} = \pi \Rightarrow P = \frac{\sqrt{7}}{14}[14f(A) + 7f(B) + 4f(C)]$$

$$\geq \frac{\sqrt{7}}{14}\left[15\sqrt{7} + 32(A + B + C) - 32\left(\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7} + \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7} + \arctan \sqrt{7}\right)\right] = \frac{15}{2}$$

$$\text{Với } A = \arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}; B = \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}; C = \arctan \sqrt{7} \text{ thì } \min P = \frac{15}{2}$$

Đọc lời giải trên, các bạn ắt hẳn sẽ đặt câu hỏi làm sao ta có thể chọn được các số  $\arctan \frac{3\sqrt{7}}{7}; \arctan \frac{5\sqrt{7}}{7}; \arctan \sqrt{7}$  một cách hợp lí để có thể sử dụng bổ đề trên dựa theo tư tưởng U.C.T? Tất nhiên đó không phải là điều ngẫu nhiên, thực ra ta đã làm như sau

Sử dụng bổ đề trên, ta có

$$f(A) \geq f(M) + f'(M)(A-M); f(B) \geq f(N) + f'(N)(B-N); f(C) \geq f(P) + f'(P)(C-P)$$

$$\Rightarrow 14 \tan A + 7 \tan B + 4 \tan C$$

$$\geq 14 \tan M + 7 \tan N + 4 \tan P + 14 f'(M)(A-M) + 7 f'(N)(B-N) + 4 f'(P)(C-P)$$

Do  $A, B, C$  là 3 góc của một tam giác nhọn nên ta cũng phải chọn  $M, N, P$  sao cho chúng cũng là 3 góc của một tam giác nhọn. Hơn nữa, để tận dụng được giả thiết này, ta cần chọn  $M, N, P$  sao cho  $14f'(M) = 7f'(N) = 4f'(P)$

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} \frac{\pi}{2} > M, N, P > 0 \\ M + N + P = \pi \\ 14f'(M) = 7f'(N) = 4f'(P) \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được kết quả như trên!

#### IX. BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Bài 1. [Diễn đàn Toán học]** Cho  $a, b, c, d, e \geq 0$ ;  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1$ .

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } \frac{a^2}{1-a^3} + \frac{b^2}{1-b^3} + \frac{c^2}{1-c^3} + \frac{d^2}{1-d^3} + \frac{e^2}{1-e^3}$$

**Bài 2. [Crux Mathematicorum, Problem 3032]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

**Bài 3. [Mathematical Excalibur, Vol 9, Num 1, 8/2004]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

**Bài 4. [Old and New Inequalities]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Bài 5. [Old and New Inequalities]**

$$\text{Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{27}{10}$$

**Bài 6. [Old and New Inequalities]** Cho  $a, b, c \in (1, 2)$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \geq 1$$



**Bài 7.** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương thỏa mãn  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3} + \frac{1}{1+b+b^2+b^3} + \frac{1}{1+c+c^2+c^3} + \frac{1}{1+d+d^2+d^3} \geq 1$$

**Bài 8. [China TST 2004]** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63cda}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63dab}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}} \geq 1$$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(3a+b+c)^3}{(b+c)^3 + 3a^3} + \frac{(3b+c+a)^3}{(c+a)^3 + 3b^3} + \frac{(3c+a+b)^3}{(a+b)^3 + 3c^3} \leq \frac{375}{11}$$

**Bài 11.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^2}{7(a+b)^2 + 17c^2} + \frac{(b+c-a)^2}{7(b+c)^2 + 17a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{7(c+a)^2 + 17b^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5(a+b+c)^2}$$

**Bài 12.** Cho tam giác ABC nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \tan A + 2 \tan B + 5 \tan C$$

**Bài 13.** Cho các số dương ABC, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sin^m A \sin^n B \sin^p C$$

trong đó  $m, n, p$  là các số dương cho trước.

**Bài 14. [VMEO 2005]** Cho trước các số dương  $a, b, c$  và  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $ax + by + cz = xyz$ , tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x + y + z$

.....

## § 23.6. CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN THUẬN NGHỊCH THEO CÁC ĐỘ DÀI TRONG TAM GIÁC

Một bất đẳng thức có thể phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau. Trong mục này nhờ các phép đổi biến thuận nghịch theo các độ dài trong tam giác, chúng ta có thể biến các bất đẳng thức đại số thành bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, và ngược lại, biến các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số. Tùy trường hợp cụ thể ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở dạng đơn giản nhất có thể.

### I. ĐỊNH NGHĨA

#### 1. Phép đổi biến thuận

Cho  $x, y, z > 0$ , phép đổi biến  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2}$  được gọi là phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$

##### • Tính chất:

$$\begin{cases} a+b = z + \frac{x+y}{2} = z+c > c \\ b+c = x + \frac{y+z}{2} = x+a > a \\ c+a = y + \frac{z+x}{2} = y+b > b \end{cases}$$

• **Ý nghĩa:** Với các bất đẳng thức đại số ba biến  $x, y, z > 0$ , phép đổi biến nêu trên cho phép ta chuyển các bất đẳng thức đại số thành các bất đẳng thức trong tam giác với độ dài ba cạnh  $a, b, c$ . Sử dụng các hàm lượng giác trong tam giác, chúng ta có thể thu được lời giải cho bài toán một cách đơn giản hơn.

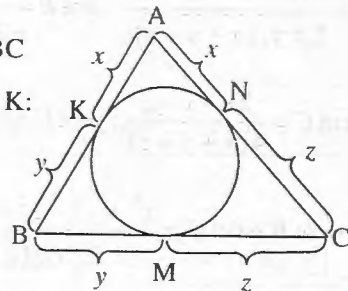
#### 2. Phép đổi biến nghịch

Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Do tam giác ABC luôn có đường tròn nội tiếp nên luôn tồn tại  $x, y, z > 0$  sao cho  $a = y+z$ ;  $b = z+x$ ;  $c = x+y$ .

Thật vậy, giả sử đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, K:

$$\begin{cases} x = AN = AK = p - a > 0 \\ y = BK = BM = p - b > 0 \\ z = CM = CN = p - c > 0 \end{cases}$$



• **Ý nghĩa:** nếu một bất đẳng thức giữa độ dài các cạnh của một tam giác không thể quy về các hàm lượng giác thì chúng vẫn có thể quy về bất đẳng thức đại số với các biến  $x, y, z > 0$  và thuận tiện hơn trong việc tìm lời giải.

II. BIỂU DIỄN CÁC ĐẠI LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THEO CÁC BIẾN  $x, y, z > 0$ 

Cho  $x, y, z > 0$ . Đặt  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2}$ , suy ra  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác ABC, ta sẽ biểu diễn các đại lượng của tam giác ABC:

$$x = 2(p - a); \quad y = 2(p - b); \quad z = 2(p - c); \quad p = \frac{x+y+z}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{4}; \quad R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{(x+y+z)xyz}}; \quad r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)}; \quad \sin B = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)}; \quad \sin C = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos A = \frac{x(x+y+z) - yz}{(x+y)(x+z)}; \quad \cos B = \frac{y(x+y+z) - zx}{(y+z)(y+x)}; \quad \cos C = \frac{z(x+y+z) - xy}{(z+x)(z+y)}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\tan A = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z) - yz}; \quad \tan B = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z) - zx}; \quad \tan C = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z) - xy}$$

$$\tan B \tan C = \frac{4(x+y+z)}{2x+y+z}; \quad \tan C \tan A = \frac{4(x+y+z)}{2y+z+x}; \quad \tan A \tan B = \frac{4(x+y+z)}{2z+x+y}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{[x(x+y+z) - yz][y(x+y+z) - zx][z(x+y+z) - xy]}$$

$$\cot A = \frac{x(x+y+z) - yz}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}; \quad \cot B = \frac{y(x+y+z) - zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}; \quad \cot C = \frac{z(x+y+z) - xy}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$\cot B \cot C = \frac{2x+y+z}{4(x+y+z)}; \quad \cot C \cot A = \frac{2y+z+x}{4(x+y+z)}; \quad \cot A \cot B = \frac{2z+x+y}{4(x+y+z)}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}; \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}; \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}; \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}}; \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{x+y+z} [\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)}]}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}}; \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{zx}{y(x+y+z)}}; \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}}$$

$$\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{x}{x+y+z}; \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = \frac{y}{x+y+z}; \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{z}{x+y+z}$$

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xyz}{(x+y+z)^3}} = \frac{1}{x+y+z} \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{yz}}; \cot \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{zx}}; \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{xy}}$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(x+y+z)^3}{xyz}} = \sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} (x+y+z)$$

$$\sin 2A = \frac{4\sqrt{xyz(x+y+z)} [x(x+y+z) - yz]}{[(x+y)(x+z)]^2}; \cos 2A = \frac{[x(x+y+z) - yz]^2 - 4xyz(x+y+z)}{[(x+y)(x+z)]^2}$$

$$\begin{aligned} \cos 2(B-C) = & \frac{y^2z^2(x+y+z)^4 - 2xyz(3y^2+3z^2-8yz)(x+y+z)^3 + x^2(x^4+y^4-16yz(y+z)+36y^2z^2)}{(y+z)^4(x+y)^2(x+z)^2} + \\ & + \frac{x^2(x^4+y^4-16yz(y+z)+36y^2z^2)(x+y+z)^2 - 2x^3yz(3y^2+3z^2-8yz)(x+y+z) + x^4y^2z^2}{(y+z)^4(x+y)^2(x+z)^2} \end{aligned}$$

$$\cos(B-C) = \frac{xyz(6x+5y+5z)}{(x+y)(x+z)(y+z)^2} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \cdot \left( \frac{6x}{y+z} + 5 \right)$$

$$\cos(B-C) + \cos(C-A) + \cos(A-B) = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \left[ 6 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + 15 \right]$$

$$\sin(B-C) = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}(z^2-y^2)}{(x+y)(x+z)(y+z)^2} = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}(z-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{2x+y+z}{y+z} \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \cdot \frac{2x+y+z}{\sqrt{x(y+z)}}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} + \cos \frac{A-B}{2} &= \\ &= \sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \left[ 2 \left( \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \right) + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \right] \end{aligned}$$

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{y-z}{y+z} \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}; \quad \sin^2 \frac{B-C}{2} = \frac{x(x+y+z)(y-z)^2}{(x+y)(x+z)(y+z)^2}$$

$$\sin^2 \frac{B-C}{4} = \frac{x(x+y+z)(y-z)^2}{2(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} \left[ (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (2x+y+z)\sqrt{yz} \right]}$$

$$h_a = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}; \quad h_b = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z+x}; \quad h_c = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y}$$

$$h_a^2 = \frac{xyz(x+y+z)}{(y+z)^2}; \quad h_b^2 = \frac{xyz(x+y+z)}{(z+x)^2}; \quad h_c^2 = \frac{xyz(x+y+z)}{(x+y)^2}$$

$$m_a^2 = \frac{4x^2 + y^2 + z^2 + 4x(y+z) - 2yz}{16} = \frac{x(x+y+z)}{4} + \frac{(y-z)^2}{16} = \frac{(2x+y+z)^2}{16} - \frac{yz}{4}$$

$$l_a^2 = \frac{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}{(2x+y+z)^2}; \quad l_b^2 = \frac{y(y+z)(y+x)(x+y+z)}{(2y+z+x)^2}; \quad l_c^2 = \frac{z(z+x)(z+y)(x+y+z)}{(2z+x+y)^2}$$

$$r_a^2 = \frac{yz(x+y+z)}{4x}; \quad r_b^2 = \frac{zx(x+y+z)}{4y}; \quad r_c^2 = \frac{xy(x+y+z)}{4z}; \quad r_b r_c = \frac{x(x+y+z)}{4}$$

III. ỨNG DỤNG PHÉP ĐỔI BIẾN THUẬN

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  $64xyz(x+y+z)^3 \leq 27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2, \forall x, y, z > 0$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

• **Chứng minh:**  $T = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left( \frac{\sin A}{\sqrt{3}} \cdot \cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}} \cdot \cos A \right)$   
 $\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( \sin^2 A + \frac{3}{4} \right) + \left( \sin^2 B + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \left( \frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B \right) + \left( \frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

• **Áp dụng:** Bất đẳng thức đã cho tương đương  $\frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm). Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow x = y = z.$$

**Bài 2:** Chứng minh:  $8\sqrt{xyz} \left[ \sqrt{x(x+y)(x+z)} + \sqrt{y(y+z)(y+x)} + \sqrt{z(z+x)(z+y)} \right]$

$$\leq 18xyz + 5[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)], \forall x, y, z > 0$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \forall \Delta ABC$

• **Chứng minh:**  $T = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right) + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$   
 $\leq \frac{1}{2} \left[ \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)^2 + 1^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{3}{2}$

• **Áp dụng:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[ \sqrt{xy(x+y)} + \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} \right]^2 \leq \frac{9}{4}(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow x = y = z.$$

**Bài 3.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{x+y+z}(\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)})}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \forall \Delta ABC$

• **Chứng minh:**  $T = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left( \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{B}{2} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{A}{2} \right)$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{3}{4} \right) + \left( \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \left( \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{3} + \sin^2 \frac{B}{2} \right) + \left( \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{3} + \sin^2 \frac{A}{2} \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

• **Áp dụng:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều } \Leftrightarrow x = y = z.$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \leq \frac{9}{4(x+y+z)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $T = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

• **Chứng minh:**  $T = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) \cdot 1 + \sin A \sin B - \cos A \cos B$

$$\leq \frac{1}{2} [(\cos A + \cos B)^2 + 1^2] + \frac{1}{2} (\sin^2 A + \sin^2 B) - \cos A \cos B \leq \frac{3}{2}$$

• **Áp dụng:** Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:



$$(*) \Leftrightarrow \frac{2(p-a)}{4bc} + \frac{2(p-b)}{4ca} + \frac{2(p-c)}{4ab} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{b+c-a}{bc} + \frac{c+a-b}{ca} + \frac{a+b-c}{ab} \right) \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc} + \frac{(a+b+c)(c+a-b)}{ca} + \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2 - a^2}{bc} + \frac{(c+a)^2 - b^2}{ca} + \frac{(a+b)^2 - c^2}{ab} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 3 \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 2.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}; \frac{zx}{y}; \frac{xy}{z} \right\}$ . Chứng minh rằng:

$$64x^3y^3z^3(x+y+z)^3 \geq 27 \left[ [x(x+y+z) - yz][y(x+y+z) - zx][z(x+y+z) - xy] \right]^2 \quad (*)$$

### Chứng minh

• **Bổ đề:**  $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**  $(*) \Leftrightarrow \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{[x(x+y+z) - yz][y(x+y+z) - zx][z(x+y+z) - xy]} \geq 3\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z) - yz} \cdot \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z) - zx} \cdot \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z) - xy} \geq 3\sqrt{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}; \frac{zx}{y}; \frac{xy}{z} \right\} \Leftrightarrow \cos A > 0; \cos B > 0; \cos C > 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$

Mặt khác (1)  $\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 3.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2 \geq 12xyz(x + y + z) \quad (*)$$

### Chứng minh

• **Bổ đề:**  $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:** (\*)  $\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} \geq \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)-yz}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} + \frac{y(x+y+z)-zx}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} + \frac{z(x+y+z)-xy}{2\sqrt{xyz}(x+y+z)} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 6.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \quad \forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{\sqrt{x+y+z} [\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)}]}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \quad (1). \end{aligned}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$

**Bài 7.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x(y+z)^2 + x(y+z)^2 + x(y+z)^2}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \leq \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}, \quad \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:**

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+6xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} + 1 \leq \frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)-zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)-xy}{(z+x)(z+y)} \leq \\
 &\leq \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{dpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 8.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$8x^2y^2z^2 \geq [x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy] \quad (*)$$

### Chứng minh

• **Bổ đề:**  $\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}, \forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**

Nếu  $[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy] \leq 0$  thì (\*) đúng.

Xét  $[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy] > 0$

Ta có:

$$\begin{cases} [y(x+y+z)-zx] + [z(x+y+z)-xy] = (y+z)^2 > 0 \\ [z(x+y+z)-xy] + [x(x+y+z)-yz] = (z+x)^2 > 0 \\ [x(x+y+z)-yz] + [y(x+y+z)-zx] = (x+y)^2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x(x+y+z)-yz > 0; y(x+y+z)-zx > 0; z(x+y+z)-xy > 0$ . Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]} \geq (x+y+z)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$x(x+y+z)-yz > 0; y(x+y+z)-zx > 0; z(x+y+z)-xy > 0 \Leftrightarrow \Delta ABC$  nhọn

$$(1) \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 9.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq xyz \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{[x(x+y+z)-yz][y(x+y+z)-zx][z(x+y+z)-xy]}{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} \leq \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$

**Bài 10.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq \left[ \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \right]^2 \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2$

• **Áp dụng:**  $(*) \Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)} \geq$

$$\geq \left[ \frac{\sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \right]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)} \geq$$

$$\geq \left[ \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \right]^2 \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bài 11.** Cho  $x, y, z > 0$  and  $x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z} \right\}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \quad (*)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ,  $\forall \Delta ABC$  nhọn

• **Áp dụng:**  $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \left[ \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{x+y+z} \right] \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến  $x, y, z$  ta có:

$$x + y + z > \text{Max} \left\{ \frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z} \right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Bình luận:** Nhờ phương pháp đổi biến này và các công thức chuyển đổi giữa các đại lượng trong tam giác  $ABC$  và các biến  $x, y, z$  trình bày trong mục II, chúng ta có thể khẳng định rằng: "Có bao nhiêu bất đẳng thức tam giác lượng thì sẽ có bấy nhiêu bất đẳng thức đại số tương đương".

#### IV. ÁP DỤNG PHÉP ĐỔI BIẾN NGHỊCH

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Sử dụng phương pháp đổi biến nghịch  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$ , chứng minh các bất đẳng thức sau:

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$  (\*)

**Chứng minh**

$$(*) \Leftrightarrow \sum (y+z) [(z+x)^2 + (x+y)^2] > \sum (y+z)^3 + 2(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow \sum (y+z) [2x^2 + y^2 + z^2 + 2x(y+z)] > \sum [y^3 + 3yz(y+z) + z^3] + 4xyz + 2 \sum yz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum x^2 (y+z) + \sum (y+z)(y^2 + z^2) + 2 \sum x(y+z)^2 > \\ > 2 \sum x^3 + 3 \sum yz(y+z) + 4xyz + 2 \sum yz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum yz(y+z) + \sum (y^3+z^3) + \sum yz(y+z) + 2 \sum yz(y+z) + 12xyz > \\ > 2 \sum x^3 + 5 \sum yz(y+z) + 4xyz \Leftrightarrow 8xyz > 0$$

**Bài 2.** Chứng minh rằng:  $a^3(p-a) + b^3(p-b) + c^3(p-c) \leq pabc$  (\*)

**Chứng minh**

$$(*) \Leftrightarrow x(y+z)^3 + y(z+x)^3 + z(x+y)^3 \leq (x+y+z)(y+z)(z+x)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \sum x[y^3+z^3+3yz(y+z)] \leq (x+y+z)[2xyz + \sum yz(y+z)]$$

$$\Leftrightarrow \sum yz(y^2+z^2) + 3xyz \sum (y+z) \leq 2xyz(x+y+z) + xyz \sum (y+z) + \sum yz(y^2+z^2) + 2 \sum y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow 2xyz(x+y+z) \leq 2(x^3+y^3+z^3) \Leftrightarrow \sum (x+y)(x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

**Bài 3.** Chứng minh rằng:  $a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) \geq 0$  (\*)

**Chứng minh**

$$(*) \Leftrightarrow (y+z)^2(y-x) + (z+x)^2(z-y) + (x+y)^2(x-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum y(y+z)^2 - \sum x(y+z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum x^3 + \sum yz^2 + 2 \sum y^2z - [\sum yz(y+z) + 6xyz] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum x^3 + \sum y^2z - 6xyz \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq 6 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2}{yz} \cdot \frac{y^2}{zx} \cdot \frac{z^2}{xy} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y}} = 6 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

**Bài 4. [IMO 1983]** Chứng minh rằng:  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$  (\*)

**Chứng minh**

$$(*) \Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x+y+z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x+y+z) \Leftrightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x+y+z$$

$$\text{Ta có: } (z+x+y) \left( \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \right) \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x+y+z \quad (\text{đpcm})$$

### § 23.7. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ CÁC HỆ SỐ CỦA ĐA THỨC BẰNG ĐỊNH LÝ VIỆT

Trong nhiều trường hợp, ta sẽ gặp rất nhiều khó khăn nếu như cố gắng tìm cách chứng minh trực tiếp các bất đẳng thức với các biến ban đầu. Tuy nhiên nếu tinh táo hơn một chút, chỉ bằng một (hoặc một vài) phép đổi biến đơn giản nào đó chúng ta sẽ quy được bất đẳng thức cần chứng minh về dạng quen thuộc và đơn giản hơn rất nhiều. Trong mục này chúng ta hãy cùng sử dụng định lý Viète để thực hiện các phép đổi biến như vậy. Ngoài ra chúng ta cũng sẽ nhận được nhiều tính chất rất đẹp giữa chính các hệ số đa thức nhờ những thông tin về số nghiệm của đa thức đó.

**Phương pháp:** Để chứng minh các bất đẳng thức ở dạng này ta thực hiện theo hai bước:

**Bước 1:** Sử dụng định lý Viète chuyển các bất đẳng thức giữa các hệ số của đa thức thành bất đẳng thức giữa các nghiệm của đa thức.

**Bước 2:** Sử dụng bất đẳng thức đại số để chứng minh bất đẳng thức giữa các nghiệm và từ đó suy ra bất đẳng thức giữa các hệ số của đa thức.

#### A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

**Bài 1.** Xét tập hợp I gồm các tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{ sao cho } f(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \in [0, 1].$$

$$\text{Tìm } \max_{f(x) \in I} \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$$

#### Chứng minh

Sử dụng định lý Viète ta có  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  và  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\ &= 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq 2 + \frac{x_1+x_2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq 2 + \frac{1+x_1x_2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 3 \end{aligned}$$

Với  $2a = 2c = -b \neq 0$  hay  $f(x) = a(x-1)^2$ ,  $a \neq 0$  thì  $\max_{f(x) \in I} \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = 3$

**Bài 2.** Giả sử phương trình  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  ( $a > 0$ ) có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \in [2, +\infty). \quad \text{Chứng minh: } (4a-b)\left(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2(4a-2b+c) \quad (1)$$

#### Chứng minh

Sử dụng định lý Viète ta có  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  và  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , do đó

$$(4a-b)\left(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2(4a-2b+c) \Leftrightarrow \left(4 - \frac{b}{a}\right)\left(2 + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \geq 2\left(4 - 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow (4+x_1+x_2)\left(2 + \sqrt{x_1 x_2}\right) \geq 2(4+2x_1+2x_2+x_1 x_2)$$



$$\Leftrightarrow \frac{4+x_1+x_2}{4+2x_1+2x_2+x_1x_2} \geq \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{(2+x_1)+(2+x_2)}{(2+x_1)(2+x_2)} \geq \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+x_1} + \frac{1}{2+x_2} \geq \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{x_1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{x_2}{2}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2}}} \quad (2)$$

Đặt  $u^2 = \frac{x_1}{2}$ ,  $v^2 = \frac{x_2}{2}$  thì (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1+v^2} \geq \frac{2}{1+uv} \quad \forall u, v \geq 1$

Ta có  $\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1+v^2} - \frac{2}{1+uv} = \left( \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+uv} \right) + \left( \frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{1+uv} \right) =$   
 $\frac{v-u}{1+uv} \left( \frac{u}{1+u^2} - \frac{v}{1+v^2} \right) = \frac{v-u}{1+uv} \cdot \frac{u(1+v^2) - v(1+u^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{(v-u)^2(uv-1)}{(1+uv)(1+u^2)(1+v^2)} \geq 0$

Vì vậy (2) được chứng minh do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

**Bài 3.** Giả sử  $ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 0$  (1) ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:  $\frac{2a-b}{a+c-b} + \frac{a}{b} > 0$  (2)

#### Chứng minh

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (x-1)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ;  $x = x_1$ ;  $x = x_2$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}} + \frac{1}{\frac{b}{a}} > 0 \Leftrightarrow \frac{2+x_1+x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2} - \frac{1}{x_1+x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (2+x_1+x_2)(x_1+x_2) - (1+x_1x_2+x_1+x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1+x_2-1+x_1^2+x_2^2+x_1x_2 > 0 \quad (3)$$

Do 1,  $x_1$ ,  $x_2$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên (3) đúng  $\Rightarrow$  (2) đúng.

**Bài 4.** Giả sử phương trình  $x^3 - x^2 + ax + b = 0$  có ba nghiệm dương (có thể bằng nhau).

Chứng minh rằng:  $\frac{2a-3b+1}{a-b+2} \leq \frac{3}{4} \quad (2)$

#### Chứng minh

Giả sử phương trình có ba nghiệm  $x_1, x_2, x_3 > 0$ . Sử dụng định lý Viète ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a; \quad x_1x_2x_3 = -b$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3) + 1} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \frac{x_3}{1+x_3} \leq \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{1+x_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+x_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+x_3}\right) \leq 3 - \frac{9}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \geq \frac{9}{3 + (x_1 + x_2 + x_3)}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}} \geq \frac{9}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

**Bài 5.** Giả sử  $ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm dương.

Chứng minh rằng:  $\sqrt[3]{1 + \frac{c+d-b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{d}{a}} \geq 1$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \geq (1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3})^3 \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• **Áp dụng:**  $\sqrt[3]{1 + \frac{c+d-b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{d}{a}} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} \geq \left(1 + \sqrt[3]{\frac{d}{a}}\right)^3$

$$\Leftrightarrow 1 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1x_2x_3 \geq (1 + \sqrt[3]{x_1x_2x_3})^3$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \geq (1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3})^3 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 6.** Giả sử  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm dương.

Chứng minh rằng:  $\frac{3abc + 8b^3 - 3da^2}{a^3} \geq 0$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• **Áp dụng:**  $\frac{3abc + 8b^3 - 3da^2}{a^3} \geq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} + 8\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{d}{a} \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 8(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3x_1x_2x_3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3 + 3x_1x_2x_3 - 8(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3x_1x_2x_3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3 \text{ là đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 7.** Giả sử phương trình  $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$  có nghiệm dương

Chứng minh rằng:  $2 + b \geq 63c$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right) \geq 64$  với  $\begin{cases} x_1, x_2, x_3 > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

• **Áp dụng:**  $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$  (1)  $\Leftrightarrow c\left(\frac{1}{x}\right)^3 - b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} - a = 0$  (2)

Nếu  $x_1, x_2, x_3$  là các nghiệm của (1) thì  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$  là các nghiệm của (2)

$$\text{Ta có } 2 + b \geq 63c \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 64$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) + \left( \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} \right) + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \geq 64$$

$$\Leftrightarrow \left( 1 + \frac{1}{x_1} \right) \left( 1 + \frac{1}{x_2} \right) \left( 1 + \frac{1}{x_3} \right) \geq 64 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 8.** Giả sử phương trình  $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$  có nghiệm dương.

Chứng minh rằng:  $\frac{a^2 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac}{ab - c} \geq \frac{a}{2}$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• **Áp dụng:**  $\frac{a^2 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac}{ab - c} \geq \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)}{4ab - c} \geq \frac{a}{2}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2[(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^2 - 2x_1 x_2 x_3(x_1 + x_2 + x_3)]}{ab - c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - x_1 x_2 x_3} \geq 0$$

Ta có  $x_1^2(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) = x_1^2[x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3] = x_1^2(x_1^2 + b)$

$$A = \frac{x_1^2(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + x_2^2(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + x_3^2(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}{(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 9.** Giả sử phương trình  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  có ba nghiệm dương

Chứng minh rằng:  $\frac{c}{\sqrt{b^2 - 2ac}} \leq \frac{1}{3} \sqrt{b^2 - 2b}$

**Chứng minh**

Giả sử phương trình có ba nghiệm là  $x_1, x_2, x_3 > 0$  khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{3}{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}}} \leq \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} \leq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}$$

Sử dụng định lý Viète ta có  $\sqrt{\frac{3}{b^2 - 2a}} \leq \frac{3c}{b} \leq \sqrt[3]{c} \leq \frac{a}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 - 2b}{3}}$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{3c^2}{b^2 - 2ac}} \leq \sqrt{\frac{a^2 - 2b}{3}} \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{b^2 - 2ac}} \leq \frac{\sqrt{a^2 - 2b}}{3} \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 10.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$9(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) \leq 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + vw + wu) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}$

• **Áp dụng:** Xét đa thức  $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ .

Ta có

$$P(x) = 4x^3 - 3(a + b + c + d)x^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)x - (abc + abd + acd + bcd)$$

Sử dụng định lý Viète ta có:  $mn + np + pm = \frac{1}{2}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ ;

$$m + n + p = \frac{3}{4}(a + b + c + d); \quad mnp = \frac{1}{4}(abc + abd + acd + bcd)$$

Ta có  $(mn + np + pm)^2 \geq 3(mn \cdot np + mp \cdot pn + pm \cdot mn) = 3mnp(m + n + p)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 \geq \frac{9}{16}(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd)$$

$$\Rightarrow 9(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) \leq 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

**Bài 11.** Giả sử  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ . Chứng minh  $3\left(\sum a_i\right)\left(\sum a_i a_j a_k\right) \leq \left(\sum a_i a_j\right)^2$

**Chứng minh**

Xét  $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có bốn nghiệm thực dương  $m, n, p, q$ .

$$\text{Ta có } P'(x) = 5x^4 - 4\left(\sum a_i\right)x^3 + 3\left(\sum a_i a_j\right)x^2 - 2\left(\sum a_i a_j a_k\right)x + \sum a_i a_j a_k a_m$$

Sử dụng định lý Viète ta có

$$m + n + p + q = \frac{4}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$mn + np + pq + mp + mq + nq = \frac{3}{5}\sum a_i a_j$$

$$mnp + npq + pqm + qmn = \frac{2}{5}\left(\sum a_i a_j a_k\right)$$

Áp dụng bài tập trước ta có:

$$9(m + n + p + q)(mnp + mnq + mpq + npq) \leq 4(mn + mp + mq + np + nq + pq)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(\sum a_i\right)\left(\sum a_i a_j a_k\right) \leq \left(\sum a_i a_j\right)^2$$

**Bài 12.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq (a+b+c+d)^3 + 2(abc+abd+acd+bcd)$$

**Chứng minh**

Đặt  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng đẳng thức **Cauchy** và bất đẳng thức **AM-GM** ta có

$$(m+n+p)(mn+np+pm) - mnp = (m+n)(n+p)(p+m)$$

$$(m+n)(n+p)(p+m) \leq \left[ \frac{(m+n) + (n+p) + (p+m)}{3} \right]^3 = \frac{8}{27}(m+n+p)^3$$

$$\Rightarrow (m+n+p)(mn+np+pm) \leq \frac{8}{27}(m+n+p)^3 + mnp \quad (1)$$

Sử dụng định lý Viète ta có  $mn+np+pm = \frac{1}{2}(ab+bc+ca+cd+da+bd)$

$$m+n+p = \frac{3}{4}(a+b+c+d); \quad mnp = \frac{1}{4}(acb+bcd+cda+dab)$$

Thay ba đẳng thức này vào (1) ta nhận được chứng minh.

**Bài 13.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left[ \frac{9}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2) + \frac{5}{8}(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \right]^2 \geq \frac{1}{4}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 + \frac{27}{16}(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)$$

**Chứng minh**

Xét đa thức:  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng bất đẳng thức:  $(m+n+p)(m^2+n^2+p^2) \geq 9mnp$ . Suy ra

$$(m^2+n^2+p^2+mn+np+pm)^2 \geq (mn+np+pm)^2 + 9(m+n+p)mnp$$

**Bài 14.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{9(a+b+c+d)^2}{16} + \frac{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{abc+abd+acd+bcd} \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd+9$$

**Chứng minh**

Xét đa thức:  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng bất đẳng thức:  $m^2 + \frac{2}{m} = m^2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \geq 3$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2 \frac{mn+np+pm}{mnp} = m^2 + \frac{2}{m} + n^2 + \frac{2}{n} + p^2 + \frac{2}{p} \geq 9$$

Thế  $a, b, c, d$  theo  $m, n, p \Rightarrow$  (đpcm)

**Bài 15.** Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \quad \forall a, b, c, d > 0$$

**Chứng minh**

Xét đa thức  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ .

Sử dụng định lý **Rolle** suy ra  $P'(x)$  có ba nghiệm  $m, n, p$ . Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** và định lý **Viète** ta có

$$mn+np+pm \geq 3\sqrt[3]{(mnp)^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

**Bài 16. [Việt Nam MO 2002]** Cho đa thức  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  có ba nghiệm thực. Chứng minh rằng:  $12ab + 27c \leq 6a^3 + 10\sqrt{(a^2 - 2b)^3}$  (1)

**Chứng minh**

Gọi  $x_1, x_2, x_3$  là ba nghiệm của  $P(x)$ . Sử dụng định lý Viète ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b; x_1x_2x_3 = -c \Rightarrow a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow 6(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 27x_1x_2x_3 + 10\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3} \quad (2)$$

• Nếu  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$  thì (2) là đúng  $\Rightarrow$  (1) là đúng

• Xét  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $x_1^2 \leq x_2^2 \leq x_3^2$ . Chú ý rằng hai vế của (2) đều là các biểu thức đối xứng bậc 3, do đó ta có thể chuẩn hóa  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ .

Từ đây suy ra:  $x_3^2 \geq 3$  và  $2x_1x_2 \leq 6$ . Do đó: (2)  $\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \leq 10$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\begin{aligned} [2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3]^2 &= [2(x_1 + x_2) + (2 - x_1x_2)x_3]^2 \\ &\leq [2^2 + (2 - x_1x_2)^2][(x_1 + x_2)^2 + x_3^2] = [8 - 4x_1x_2 + (x_1x_2)^2][9 + 2x_1x_2] \\ &= 2(x_1x_2)^3 + (x_1x_2)^2 - 20x_1x_2 + 72 = (x_1x_2 + 2)^2(2x_1x_2 - 7) + 100 \leq 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \leq 10 \Rightarrow (2) \text{ là đúng } \Rightarrow (1) \text{ là đúng}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = x_3 = 2 \Leftrightarrow a = -3, b = 0, c = 4.$$

**Bài 17.** Giả sử phương trình  $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$  với  $a, b, c, d > 0$  có bốn nghiệm thực thuộc khoảng  $(0, \frac{1}{2})$ . Chứng minh rằng:  $21a + 164c \geq 80b + 320d$

**Chứng minh**

Gọi bốn nghiệm của phương trình là  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, \frac{1}{2})$

Sử dụng định lý **Viète** ta có các hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b/a \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = c/a \\ x_1x_2x_3x_4 = d/a \end{cases}$$

$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } 21a + 164c \geq 80b + 320d \Leftrightarrow 21 + 164 \frac{c}{a} \geq 80 \frac{b}{a} + 320 \frac{d}{a}$$

$$\Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \geq$$

$$\geq 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320x_1x_2x_3x_4$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có

$$(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) \leq \left( \frac{1 - 2x_1 + 1 - 2x_2 + 1 - 2x_3}{3} \right)^3 = \left( \frac{1 + 2x_4}{3} \right)^3. \text{ Suy ra}$$

$$\times \begin{cases} 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) \leq (1 + 2x_4)^3 \\ 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_3)^3 \\ 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_2)^3 \\ 27(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_1)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 81(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) \leq (1 + 2x_1)(1 + 2x_2)(1 + 2x_3)(1 + 2x_4)$$

$$\Leftrightarrow 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320x_1x_2x_3x_4 \leq$$

$$\leq 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$

**Bài 18.** [Hongkong MO 1997] Cho  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  là đa thức bậc  $n \geq 2$  với các nghiệm thực  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Chứng minh rằng:

$$f(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq 2n^2 \quad \forall x > b_1, b_2, \dots, b_n$$

**Chứng minh**

$$\text{Ta có } f(x) = (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n) \Rightarrow f(x+1) = (1+x-b_1)(1+x-b_2)\dots(1+x-b_n)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có



$$f(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq f(x+1) \cdot n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)}}$$

$$= (1+x-b_1)\dots(1+x-b_n) n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)\dots(x-b_n)}} = n \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n}{x-b_1} \dots \frac{(1+x-b_n)^n}{x-b_n}}$$

Đặt  $t = x - b_i > 0 \quad \forall x > b_i$ . Khi  $n \geq 2$  ta có

$$(1+t)^n \geq 1+nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 = \frac{1}{2}[n(n-1)t^2 - 2nt + 2] + 2nt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{n(n-1)}t - \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} \right)^2 + \frac{n(n-2)}{n(n-1)} \right] + 2nt \geq 2nt. \text{ Suy ra}$$

$$f(x+1) \left( \frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n}{x-b_1} \dots \frac{(1+x-b_n)^n}{x-b_n}} \geq n \cdot \sqrt[n]{(2n)^n} = 2n^2$$

**Bài 19.** Cho đa thức  $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$  với  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$  có  $n$  nghiệm thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Chứng minh rằng:  $P(x) \geq (x+1)^n \quad \forall x \geq 0$

**Chứng minh**

**Bổ đề:** (bất đẳng thức Minkowski 2)

$$\sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n} + \sqrt[n]{c_1c_2\dots c_n} \leq \sqrt[n]{(b_1+c_1)(b_2+c_2)\dots(b_n+c_n)} \quad \forall b_i, c_i \geq 0$$

**Áp dụng:** Do  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$  nên các nghiệm của  $P(x)$  là  $x_1, x_2, \dots, x_n < 0$

Sử dụng định lý Viète ta có  $(-1)^n x_1x_2\dots x_n = 1$ . Sử dụng bổ đề ta có

$$\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \sqrt[n]{(x+|x_1|)(x+|x_2|)\dots(x+|x_n|)} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n} + \sqrt[n]{|x_1x_2\dots x_n|} = x+1 \Rightarrow P(x) \geq (x+1)^n$$

**Bài 20.** Giả sử đa thức bậc  $n$   $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  có  $n$  nghiệm thực.

Chứng minh rằng:  $a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1}a_2$

**Chứng minh**

$$0 \leq (x_1-x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + \dots + (x_1-x_n)^2 + (x_2-x_3)^2 + \dots + (x_2-x_n)^2 +$$

$$+ (x_3-x_4)^2 + \dots + (x_3-x_n)^2 + (x_4-x_5)^2 + \dots + (x_{n-1}-x_n)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j = (n-1) \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j \right] - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (n-1)(a_1^2 - 2a_2) - 2a_2 = (n-1)a_1^2 - 2na_2 \Leftrightarrow a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1}a_2 \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 21.** Giả sử  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  ( $a_0 \neq 0$ )

có  $n$  nghiệm thực dương. Chứng minh rằng:  $\left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n \geq \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$

**Chứng minh**

Ta có  $\frac{a_{n-1}}{a_0} = x_1x_2\dots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$ . Sử dụng **bất đẳng thức AM - GM**

$$\Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_0} \geq n x_1x_2\dots x_n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}} \Leftrightarrow \left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n \geq (x_1x_2\dots x_n)^{n-1} = \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$$

**Bài 22.** Giả sử  $P_n(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x + (-1)^na_n = 0$

có  $n$  nghiệm thực dương. Chứng minh rằng:  $\sqrt[n]{1 + \sum_{i=1}^n a_i} \geq 1 + \sqrt[n]{a_n}$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\right)^n \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

• **Áp dụng:** Giả sử phương trình có  $n$  nghiệm là  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

Ta có  $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Trong đó  $a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$  Suy ra  $\sqrt[n]{1 + \sum_{i=1}^n a_i} \geq 1 + \sqrt[n]{a_n}$  (đpcm).

**Bài 23.** Cho đa thức  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  có  $n$  nghiệm thực

Chứng minh rằng:  $|a_ka_{n-k}| \geq \binom{n}{k}^2 |a_n|$

**Chứng minh**

Ta có  $S_1 = \sum_{k=1}^n x_k = -a_1$ ;  $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k} = (-1)^k a_k$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**. Ta có

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k} \geq \binom{n}{k} \left[ (x_1\dots x_n)^{\frac{n-1}{k-1}} \right]^{\frac{1}{\binom{n}{k}}} \Rightarrow |a_k| \geq \binom{n}{k} |a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}} \quad \forall k = \overline{1, n}$$

$$\text{và } |a_{n-k}| \geq \binom{n}{n-k} |a_n|^{\frac{\binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n}{n-k}}}. \text{ Do } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{n-k} + \binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{n-k}$$

$$\Rightarrow |a_ka_{n-k}| \geq \binom{n}{k}^2 |a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n}{k}}} \Leftrightarrow |a_ka_{n-k}| \geq \binom{n}{k}^2 |a_n| \quad (\text{đpcm})$$

**Bài 24.** Giả sử đa thức  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  có  $n$  nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: 
$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k a_{n-k}}{a_n} \right| \geq \binom{2n}{n} - 1$$

**Chứng minh**

Sử dụng bài 23 ta có 
$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k a_{n-k}}{a_n} \right| \geq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$
  

$$= \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} \binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{0} = \binom{2n}{n} - 1$$

**Bài 25.** Giả sử  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  có  $n$  nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: 
$$\left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \right| \geq \binom{k}{i} \left| \frac{a_k}{C_n^k} \right| \quad \forall i \leq k \leq n$$

**Chứng minh**

Xét đa thức:  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Đạo hàm  $(n-k)$  lần ta có

$$P_n^{(n-k)}(x) = n(n-1)\dots(k+1)x^k + (n-1)(n-2)\dots k \cdot a_1 x^{k-1} + \dots +$$

$$+ (n-k+1)(n-k)\dots 2a_{k-1}x + (n-k)\dots 2 \times 1 a_k$$

hay 
$$P_n^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!} x^k + \frac{(n-1)!}{(k-1)!} a_1 x^{k-1} + \frac{(n-2)!}{(k-2)!} a_2 x^{k-2} + \dots + \frac{(n-k)!}{1!} a_k$$

$$\Rightarrow R_k(x) = \frac{k!}{n!} P_n^{(n-k)}(x) = x^k + \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} a_1 x^{k-1} + \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} a_2 x^{k-2} + \dots + \frac{\binom{n-k-1}{1}}{\binom{n}{k}} a_{k-1} x + \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Sử dụng hệ quả định lý **Rolle** “giữa hai nghiệm của đạo hàm cấp  $m$  luôn tồn tại một nghiệm của đạo hàm cấp  $(m+1)$ ” suy ra tính chất sau:

Nếu  $P_n(x)$  có các nghiệm đều dương thì  $P_n^{(n-k)}(x)$  cũng có các nghiệm đều dương, tức là  $R_k(x)$  có các nghiệm đều dương. Theo bài 23 đối với đa thức

$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  ta có  $|a_k| \geq \binom{n}{k} |a_n| \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} \quad \forall k = \overline{1, n}$  nên áp dụng kết quả này cho đa thức

$$R_k(x) = \frac{k!}{n!} P_n^{(n-k)}(x) = x^k + \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} a_1 x^{k-1} + \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} a_2 x^{k-2} + \dots + \frac{\binom{n-k+1}{1}}{\binom{n}{k}} a_{k-1} x + \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \right| \geq \binom{k}{i} \left| \frac{a_k}{C_n^k} \right| \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{k}{i}}$$

**Bài 26.** Giả sử  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  có  $n$  nghiệm thực dương

Chứng minh rằng:  $\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^k \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^i \quad \forall i \leq k \leq n$

**Chứng minh**

Theo bài 25:  $\left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \right| \geq \binom{k}{i} \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\frac{\binom{k-1}{i-1}}{C_i^k}}$  suy ra  $\left| \frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k} \binom{k}{i}} a_i \right|^{\binom{k}{i}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\binom{k-1}{i-1}}$

Ta có  $\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k} \binom{k}{i}} = \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!} = \frac{(n-i)!i!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{i}}$  do đó

$$\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^{\binom{k}{i}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\binom{k-1}{i-1}} \quad \forall i \leq k \Leftrightarrow \left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^{\frac{k!}{i!(n-k)!}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|^{\frac{(k-1)!}{(i-1)!(n-k)!}}$$

Lũy thừa bậc  $\frac{(n-k)!(i-1)!}{(k-1)!}$  cả hai vế ta có  $\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right|^{\frac{k}{i}} \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right| \Rightarrow (\text{đpcm})$

**Bài 27.** Giả sử  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  có  $n$  nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng:  $\left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \right| \left| \frac{a_{k-i}}{\binom{n}{k-i}} \right| \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right| \quad \forall 1 \leq i \leq k \leq n$

**Chứng minh**

Sử dụng kết quả của bài 23 đối với đa thức  $R_k(x)$  ta nhận được

$$\left| \frac{\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}} a_i \cdot \frac{\binom{n-k+i}{i}}{\binom{n}{k}} a_{k-i}}{\frac{a_k}{\binom{n}{k}}} \right| \geq \binom{k}{i}^2 \Rightarrow \left| \frac{a_i a_{k-i}}{a_k} \right| \geq \frac{\binom{n}{k} \binom{k}{i}^2}{\binom{n-i}{k-i} \binom{n-k+i}{i}} = \frac{k!(n-k)!n!}{(n-i)!(n-k+i)!i!(k-i)!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_i a_{k-i}}{a_k} \right| \geq \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{\frac{n!}{(k-i)!(n-k+i)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{k-i}}{\binom{n}{k}} \Leftrightarrow \left| \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \cdot \frac{a_{k-i}}{\binom{n}{k-i}} \right| \geq \left| \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \right|$$

**Hệ quả:** Cho  $k = n$  ta có  $\left| \frac{a_i a_{n-i}}{a_n} \right| \geq \binom{n}{i}^2$

**B. BÀI TẬP TỰ GIẢI**

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  $ab + bc + cd + da + \frac{3}{2} \cdot \frac{a+b+c+d}{abc+abd+bcd+cda} \leq$   
 $\leq 3(abc+abd+bcd+cda)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{a+b+c+d}{abc+abd+bcd+cda} \right)^2 \quad \forall a, b, c, d > 0$

**Bài 2.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$10 - 3(abc + acd + abd + bcd) \leq \frac{3(a+b+c+d) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{4(abc+acd+abd+bcd)} +$$

$$+ \frac{36(abc+acd+abd+bcd)}{3(a+b+c+d) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + 12(abc+acd+abd+bcd)^2}$$

**Bài 3.** Cho các số thực  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 + 9(a+b+c+d)^2 \geq$$

$$\geq 6(abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + 6(abc+abd+acd+bcd)$$

**Bài 4.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c+d+p)(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp) \leq$$

$$\leq 9(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)^2$$

**Bài 5.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c+d+p)(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)$$

$$\leq 8(a+b+c+d+p)^3 + 10(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)$$

**Bài 6.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c+d+p)^2}{25} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(ab+ac+ad+ap+bc+bd+dp+cd+cp+dp)}{(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)} \geq 1$$

**Bài 7.** Cho các số thực  $a, b, c, d, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{5}(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp) +$$

$$+ \frac{3(a+b+c+d+p)}{abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp} \leq$$

$$\leq \frac{12}{25}(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)^2 +$$

$$+ \left( \frac{a+b+c+d+p}{abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp} \right)^2$$

**Bài 8.** Giả sử phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có hai nghiệm  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{2a-b}{a-b+c} \geq \frac{a(6a+b+8c)}{(a+c)(3a-b+c)}$

**Bài 9.** Giả sử  $|a(b-c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab|$ . Chứng minh: nếu phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm thực thì tồn tại ít nhất 1 nghiệm  $x_0 \in (0, \sqrt{3}-1)$

**Bài 10.** Giả sử phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm thực dương (có thể bằng nhau). Chứng minh rằng:  $\frac{4abc - b^3 - 3a^2d}{da^3 - abc} \geq \frac{3}{2}$

**Bài 11.** Giả sử phương trình  $x^3 - px^2 + qx - p = 0$  với  $p, q > 0$  có ba nghiệm thực

$x_1, x_2, x_3 \geq 1$ . Chứng minh rằng:  $p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q+3)$

**Bài 12.** Giả sử phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm  $x_1, x_2, x_3 > 0$ .

Chứng minh rằng:  $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq \frac{-b^3c^2}{81a^5}$

**Bài 13.** Giả sử phương trình  $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$  có bốn nghiệm thực  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 \geq 8$

**Bài 14.** Giả sử  $P(x) = x^{2006} + a_1x^{2005} + \dots + a_{2005}x + a_{2006}$  có 2006 nghiệm thực phân biệt và  $a_{2001} = 2001$ ;  $a_{2003} = 2003$ . Chứng minh  $|a_{2002}| > 2002$

**Bài 15.** Cho đa thức  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  với các hệ số  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq 7$ . Chứng minh rằng: nếu  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực thì  $a_1 \geq 2$ .

**Bài 16.** Cho  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  và  $Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$

Giả sử  $P(x) \nmid Q(x)$  và tồn tại  $b_k$  sao cho  $|b_k| > \binom{m}{k} 2006^k$

Chứng minh rằng tồn tại  $a_j$  thỏa mãn  $|a_j| > 2005$ .

**Bài 17.** Giả sử  $x_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Chứng minh rằng:

$$\sqrt[p]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}}{\binom{n}{p}}} \geq \sqrt[p]{\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{\binom{n}{k}}} \quad \forall 1 \leq p \leq k \leq n$$

**Bài 18.** Giả sử  $x_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_i \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_i} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-i} \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-i}}}{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} \geq \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{k-i}}{\binom{n}{k}}$$

### § 23.8. BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG THUẦN NHẤT

Trong chương I mục bất đẳng thức AM – GM chúng ta đã làm quen với các bất đẳng thức có sự pha trộn giữa các tổng đối xứng không đồng bậc. Đó chính là những ví dụ đầu tiên về các bất đẳng thức không thuần nhất. Có thể nhận thấy rằng bất đẳng thức không thuần nhất thường rất khó. Đối với các bất đẳng thức loại này phương pháp giải tích cung cấp cho ta rất nhiều công cụ tốt. Tuy nhiên, dưới đây chúng tôi sẽ chỉ sử dụng phương pháp đại số để tấn công thế giới đầy mới mẻ này.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c, d$  là những số thực. Chứng minh rằng:

$$(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq 324[abcd + 4(abc + bcd + cda + dab) + 1]^2$$

#### Chứng minh

Xét 4 số sau  $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$ . Hiển nhiên trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu giả sử  $a^2 - 1, b^2 - 1$ . Khi đó:  $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5) =$

$$= 7(a^2 - 1)(b^2 - 1) + 18(9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1) \geq 18(9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)$$

Tiếp tục xét 3 số:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (27a^2b^2 - 20(a^2 + b^2) + 13)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) =$   
 $= 7(c^2 - 1)(d^2 - 1) + 18(9c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1) \geq 18(9c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1)$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:

$$\begin{aligned} (13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) &\geq 18^2(9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)(9c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 1) \\ &= 324(a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)(c^2d^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4c^2d^2 + 4c^2d^2 + 1) \\ &\geq 324[abcd + 4(abc + bcd + cda + dab) + 1]^2 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $(c^2 - 1), (27a^2b^2 - 20(a^2 + b^2) + 13)$  cùng dấu. Khi đó:

$$\begin{aligned} (9a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 1)(13c^2 + 5) &= (c^2 - 1)(27a^2b^2 - 20(a^2 + b^2) + 13) + \\ &+ 18[5a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1] \geq 18[5a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:  $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq$

$$\begin{aligned} &\geq 18^2[5a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1](13d^2 + 5) \\ &= 324[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1) \\ &\geq 324[abcd + 4(abc + bcd + cda + dab) + 1]^2 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .



**Bài 2.** Cho  $a, b, c, d$  là những số thực. Chứng minh rằng:

$$(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2$$

**Chứng minh**

Xét 4 số sau  $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$ . Hiển nhiên trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu giả sử  $a^2 - 1, b^2 - 1$ . Khi đó:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7) =$

$$= (a^2 - 1)(b^2 - 1) + 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4) \geq 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)$$

Tiếp tục xét 3 số:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) =$   
 $= (c^2 - 1)(d^2 - 1) + 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \geq 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4)$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:

$$\begin{aligned} (5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) &\geq 12^2(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \\ &= 9(a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 + 2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3b^2 + 3 + 4a^2 + 4b^2 + 4 + 4 + 5) \\ &\quad (c^2d^2 + 2c^2 + 2c^2d^2 + 2c^2d^2 + 2d^2 + 3 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2d^2 + 4 + 4 + 4c^2 + 4d^2 + 5) \\ &\geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2 \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $(c^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(5c^2 + 7) =$

$$\begin{aligned} &= (a^2b^2 - 1)(c^2 - 1) + 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9] \\ &\geq 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq$

$$\begin{aligned} &\geq 36[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9](5d^2 + 7) \\ &\geq 9[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1) \\ &\geq 9[a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3a^2 + 3b^2c^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4a^2 + \\ &\quad + 4b^2 + 4c^2 + 4 + 9](d^2 + 2 + 2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 3 + 3 + 3d^3 + 3 + 3d^2 + 3d^2 + 4 + 4 + 4 + 4d^2 + 9) \end{aligned}$$

$$\geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c, d, e$  là những số thực. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & (5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq \\ & \geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2 \end{aligned}$$

**Chứng minh**

Xét 4 số  $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$ . Hiển nhiên trong 4 số sẽ có 2 số cùng dấu giả sử  $a^2 - 1, b^2 - 1$ . Khi đó:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)$

$$= (a^2 - 1)(b^2 - 1) + 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4) \geq 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)$$

Tiếp tục xét 3 số:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) =$   
 $= (c^2 - 1)(d^2 - 1) + 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \geq 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4)$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:

$$\begin{aligned} & (5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq 12^2(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \\ & = 9(a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 + 2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3b^2 + 3 + 4a^2 + 4b^2 + 4 + 4 + 5) \\ & \quad (c^2d^2 + 2c^2 + 2c^2d^2 + 2c^2d^2 + 2d^2 + 3 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2d^2 + 4 + 4 + 4c^2 + 4d^2 + 5) \\ & \geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2 \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $(c^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$  cùng dấu. Khi đó:  $(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(5c^2 + 7)$   
 $= (a^2b^2 - 1)(c^2 - 1) + 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9]$   
 $\geq 3[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9]$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta được:  $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq$   
 $\geq 36[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9](5d^2 + 7)$   
 $\geq 9[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1)$

$$\geq 9[a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3a^2 + 3b^2c^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4 + 9](d^2 + 2 + 2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 3 + 3 + 3d^3 + 3 + 3d^2 + 3d^2 + 4 + 4 + 4 + 4d^2 + 9)$$

$$\geq 9[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5]^2$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ .

**Bài 4.** Cho số thực  $\alpha \geq 2$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  ( $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ). Tìm tất cả các số  $k$  sao cho tồn tại

hằng số  $C_k > 0$  thỏa mãn:  $(x_1^\alpha + 1) \dots (x_n^\alpha + 1) \geq C_k (x_1 + \dots + x_n)^k$  (\*).

Khi đó, tìm số  $C_k$  tốt nhất.

### Chứng minh

Chứng minh gồm 2 bước:

Bước 1: Tìm giá trị  $k$  và dự đoán số tốt  $C_k$

Cho  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$  thì (\*) trở thành:  $x_n^\alpha + 1 \geq C_k x_n^k$  (\*\*) với  $C_k > 0$

Nếu  $k < 0$  thì (\*\*) không đúng vì ta cho  $x_n \rightarrow +0$ , khi đó  $VT(**) \rightarrow 1$  còn  $VP(**) \rightarrow +\infty$ .

Còn nếu  $k \geq \alpha$  thì (\*\*) cũng không đúng vì ta cho  $x_n \rightarrow +0$ , khi đó  $VT(**) < VP(**)$  còn  $VP(**) \rightarrow +\infty$ . Do đó, ta sẽ chứng minh với  $k \in [0, \alpha]$  thì sẽ tồn tại hằng số  $C_k > 0$  thỏa

mãn (\*). Thật vậy:  $(x_1^\alpha + 1) \dots (x_n^\alpha + 1) \geq \sum_{i=1}^n x_i^\alpha + 1$

$$\geq n \left( \frac{1}{n} \sum x_i \right)^\alpha + 1 = \frac{\left( \sum x_i \right)^\alpha}{n^{\alpha-1}} + \frac{\alpha-k}{k} \cdot \frac{k}{\alpha-k} \geq \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1}{n^{\frac{(\alpha-1)k}{\alpha}}} \left( \frac{k}{\alpha-k} \right)^{\frac{\alpha-k}{\alpha}} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k$$

Điều đó chứng tỏ  $\exists C_k > 0$  thỏa mãn bất đẳng thức (\*).

Dự đoán  $C_k$ : Cho  $x_i = \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $i = \overline{1, n} \Rightarrow C_k \leq \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \right)^\alpha (n^{-k}) \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}}$

Ta sẽ chứng minh  $C_k = \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \right)^\alpha (n^{-k}) \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}}$  là hằng số tốt nhất cần tìm.

Bước 2: Chứng minh. Trước hết ta cần chỉ ra:

$$\text{Với } k \geq 0 \text{ ta luôn có: } x^\alpha + 1 \geq \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{-\frac{k}{2}} \left[ x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM - GM:

$$\begin{aligned} x^\alpha + 1 &= (x^2)^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{\alpha n - k}{k} \left[ \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{\alpha n}{k} \left[ \frac{x^2 + \frac{\alpha n - k}{k} \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\alpha n}{k} \left[ \frac{x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} + \frac{\alpha - k}{k} \cdot n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\geq \frac{\alpha n}{k} \left[ \frac{\left[ x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{k}{\alpha}} \cdot \left[ n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha - k}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}} \right]^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{\frac{-k}{2}} \left[ x^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } VT(*) &\geq \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{\frac{-k}{2}} \left[ x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right]^{\frac{k}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - k} \right)^n \left( \frac{\alpha n - k}{k} \right)^{\frac{kn}{\alpha}} n^{\frac{-kn}{2}} \left[ \prod_{i=1}^n \left( x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \right]^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Chú ý dấu “=” xảy ra khi  $x = \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ . Cuối cùng ta chỉ cần chỉ ra:

$$\prod_{i=1}^n \left( x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \geq n^{n-2} \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2(n-1)}{\alpha}} (x_1 + \dots + x_n)^2 \quad (**)$$

Thật vậy, xét  $n$  số  $x_i^2 + \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}, i = \overline{1, n}$ . Trong  $n$  số này sẽ có 2 số cùng dấu. Giả sử

$x_i^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}, x_j^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}}$  cùng dấu với  $i \neq j$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} &\left( x_i^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \left( x_j^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \\ &= \left( x_i^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) \left( x_j^2 - \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) + n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[ x_i^2 + x_j^2 + (n-2) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \\ &\geq n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[ x_i^2 + x_j^2 + (n-2) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } VT(**) \geq n \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[ x_1^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \dots$$

$$\left[ x_i^2 + x_j^2 + (n-2) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right] \dots \left[ x_n^2 + (n-1) \left( \frac{k}{\alpha n - k} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right].$$

Chú ý rằng nếu  $\left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 - \beta \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right), \left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 - \gamma \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$  cùng dấu thì

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + (n-\beta) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\gamma) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 - \beta \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 - \gamma \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) + \\ & + n \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\beta-\gamma) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right] \geq n \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\beta-\gamma) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right] \end{aligned}$$

với  $\beta, \gamma$  nguyên dương thỏa mãn  $n > \beta + \gamma$ .

Dựa vào chú ý trên ta có thể chứng minh được bằng  $(n-3)$ .

Xét  $(n-1-k)$  (tiếp theo)  $k = \overline{0, n-4}$

$$VT(***) \geq n^{n-2} \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2(n-2)}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 + (n-m) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n-m} b_i^2 + m \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

Với  $m$  nguyên bé hơn  $n$  và  $a_i^2 \neq b_j^2, \{a_i^2, b_j^2\} \subset \{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$  với  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n-m}$

Cuối cùng, áp dụng bất đẳng thức CBS ta được:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 + (n-m) \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) \left(m \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n-m} b_i^2\right) \geq \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^{n-m} b_i\right)^2 \\ & = \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2. \text{ Suy ra } VT(***) \geq n^{n-2} \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2(n-1)}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \Leftrightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x_i = \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Kết luận: Tất cả các giá trị  $k$  cần tìm là  $k \in [0, \alpha]$ . Hằng số tốt

$$C_k = \left(\frac{\alpha n}{\alpha n - k}\right)^n (n^{-k}) \left(\frac{\alpha n - k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}$$

**Nhận xét:**

1. Với trường hợp  $\alpha=2, n=3$  có lời giải bằng kỹ thuật 2, rất đẹp như sau:

Đặt  $x_1 = \operatorname{tg} a, x_2 = \operatorname{tg} b, x_3 = \operatorname{tg} c$ ,  $a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Bất đẳng thức cần chứng minh  $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{C_k} \geq (\cos a \cos b \cos c)^{2-k} (\cos a \cos b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \sin a \cos b \cos c)^k \quad (1)$$

Ta có:  $\cos a \cos b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \sin a \cos b \cos c = \sin a \sin b \sin c + \sin(a+b+c)$

và  $\sin a \sin b \sin c \leq \sin^3 \left( \frac{a+b+c}{3} \right) = n^3$ ;  $\sin(a+b+c) = 3n - 4n^3$ ;

$\cos a \cos b \cos c \leq \cos^3 \left( \frac{a+b+c}{3} \right) = (1-n^2)^{\frac{3}{2}}$ . Do đó, để chứng minh (1) ta cần chỉ ra:

$$\frac{1}{C_k} \geq (1-n^2)^{\frac{3}{2}(2-k)} (n^3 + 3n - 4n^3)^k \Leftrightarrow \frac{1}{C_k} \geq (1-n^2)^{\frac{6-k}{2}} (3n)^k.$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} (1-n^2)^{\frac{6-k}{2}} (3n)^k &= \left( \frac{2}{6-k} \cdot 3(1-n^2) \right)^{\frac{6-k}{2}} \cdot \left( \frac{2}{k} \cdot 3n^2 \right)^{\frac{k}{2}} \cdot 3^k \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \cdot \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} \\ &\leq 3^k \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} \left( \frac{3(1-n^2) + 3n^2}{\frac{6-k}{2} + \frac{k}{2}} \right)^{\frac{6-k}{2} + \frac{k}{2}} = 3^k \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} = \frac{1}{C_k}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } C_k = 3^{-k} \cdot \left( \frac{6-k}{6} \right)^{\frac{6-k}{2}} \left( \frac{k}{6} \right)^{\frac{k}{2}} = 3^{-k} \left( \frac{6}{6-k} \right)^3 \left( \frac{6-k}{k} \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow n = \sqrt{\frac{k}{6}} \text{ hay } x_1 = x_2 = x_3 = \left( \frac{k}{6-k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \text{ Với } \alpha=2, n=3, k=2 \text{ thì: } (x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1) \geq \frac{3}{4}(x_1+x_2+x_3)^2$$

Đặt  $a = \sqrt{2}x_1, b = \sqrt{2}x_2, c = \sqrt{2}x_3$  ta được:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2 \geq 9(ab+bc+ca)$$

Đây là bài Asian Pacific Mathematica Olympiad 2004.

3. Ta có thể tổng quát hóa để thu được bài toán:

Cho trước số thực  $\alpha \geq 2, 2 \leq n \in \mathbb{N}, n \geq m \in \mathbb{N}$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Tìm tất cả các số  $k$  sao

cho tồn tại hằng số  $C_k > 0$  thỏa mãn:  $\prod_{i=1}^n (x_i^2 + 1) \geq C_k \left( \sum_{0 < i_1 < \dots < i_m \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_m} \right)^k$

Khi đó tìm số tốt  $C_k$

Kết quả:  $k \in [0, \alpha]$  và  $C_k = \left( \frac{\alpha n}{\alpha n - mk} \right)^n (C_n^m)^{-k} \left( \frac{mk}{\alpha n - mk} \right)^{\frac{mk}{\alpha}}$  là giá trị tốt nhất.

Lời giải chi tiết hoàn toàn tương tự như trên (bạn đọc tự hoàn thành).

**Chú ý.** Khi  $\alpha=2, n=3, m=2$  thì ta nhận được bài toán VMEO 3 sau:

Tìm tất cả các số thực  $k$  sao cho tồn tại hằng số  $C_k > 0$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực  $a, b, c$  tùy ý.  $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq C_k |ab+bc+ca|^k$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c)$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geq ab + bc + ca + a + b + c$$

Xét 3 số  $(a-1), (b-1), (c-1)$ , trong 3 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là  $(a-1), (b-1)$ , suy ra  $ab \geq a + b - 1$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + c(a+b-1) + 2 \\ &= \frac{1}{2}(a-b)^2 + (c-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + ab + bc + ca + a + b + c \geq ab + bc + ca + a + b + c \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Ngoài cách giải như trên ta còn các cách giải sau đây:

• **Cách 2:**

Ta có bất đẳng thức Tukurvici:  $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2\sqrt{abc} \geq ab + bc + ca + a + b + c$

Mà  $2\sqrt{abc} \leq abc + 1$  nên suy ra đpcm

• **Cách 3:** Đặt  $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 - a - b - c - ab - bc - ca$

Nếu  $a, b, c > 3$  thì  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$  hay  $abc > ab + bc + ca$ , do đó

$$f(a, b, c) > a^2 + b^2 + c^2 + 2 - a - b - c > 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Nếu có 1 số bé hơn hoặc bằng 3, giả sử là  $a \leq 3$ .

$$\text{Khi đó: } f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \frac{(3-a)(b-c)^2}{4} \geq 0$$

Ta cần chứng minh:  $f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \geq 0$ . Ta có:

$$f(a, x, x) = a^2 + x^2 + ax^2 + 2 - a - 2x - 2ax = (a+1)(x-1)^2 + (a-1)^2 \geq 0 \quad \forall x$$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2abcd + 2 \geq (a + b + c + d)^2 \quad (*)$$

**Chứng minh**

Xét 4 số  $(a-1), (b-1), (c-1), (d-1)$ . Trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là  $(a-1), (b-1)$ , suy ra  $abcd \geq cda + bcd - cd$ .

• Nếu  $(c-1), (d-1)$  cùng dấu thì  $cd \geq c + d - 1$ , suy ra:

$$abcd \geq cda + bcd - cd \geq (c + d - 1)(a + b) - cd = (a + b)(c + d) - a - b - cd$$

$$\text{Do đó: } VT(*) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(a + b)(c + d) - 2a - 2b - 2cd + 2$$

$$= (a + b + c + d)^2 + (a - b)^2 + 2(c - d)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq (a + b + c + d)^2 \quad (\text{đpcm})$$

• Nếu  $(a-1), (b-1), (c-1)$  cùng dấu thì  $ac > c + a - 1, bc \geq b + c - 1$

$$\Rightarrow abcd \geq cda + bcd - cd \geq d(c + a - 1) + d(b + c - 1) - cd = d(a + b + c) - 2d$$



Suy ra:  $VT(*) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2d(a+b+c) - 4d + 2$

$$= (a+b+c+d)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(d-1)^2 \geq (a+b+c+d)^2$$

**Nhận xét:** Bất đẳng thức trên yếu hơn bất đẳng thức Tുകervici là:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{abcd} \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c \geq 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} + \frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3} \geq 2 \left( \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \right) (*)$$

**Chứng minh**

Xét 3 số  $(a-1), (b-1), (c-1)$ . Trong 3 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là  $(a-1), (b-1)$ , suy ra

$$ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow (a+c+1)(b+c+1) \geq (c+2)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(c+2)(a+b+c)} \geq \frac{1}{(a+c+1)(b+c+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{c+2} + \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{b+c+1}$$

$$\text{Do đó: } VT(*) \geq \frac{2}{a+b+1} + \frac{2}{c+2} + \frac{2}{a+b+c} \geq 2 \left( \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \right) \text{ (đpcm)}$$

**Bài 8.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc + ab + bc + ca \leq 4$  hoặc  $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$ .

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+b+1} + \frac{3}{b+c+1} + \frac{3}{c+a+1} + 1 \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c} (*)$$

**Chứng minh**

• Nếu  $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$ . Dễ dàng ta có được:

$$\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{a+2} - \frac{1}{b+2} - \frac{1}{c+2}. \text{ Do đó ta chỉ cần chứng minh: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} + \frac{3}{c+2} \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{3}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x+2}{3}} \geq \frac{4}{x + \frac{x+2}{3}} = \frac{6}{2x+1} \Rightarrow (1) \text{ đúng} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

• Nếu  $abc + ab + bc + ca \leq 4$

**Bước 1.** Chứng minh bất đẳng thức sau (dành cho bạn đọc):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{9}{a+b+c} \geq 9 \left( \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \right) \left( \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} - \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{b+c+1} - \frac{1}{c+a+1} \right)$$

**Bước 2.** Ta có:  $4 \geq abc + ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \geq 1$ . Suy ra:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 \left( \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} - \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{b+c+1} - \frac{1}{c+a+1} \right)$$

$$\text{Kết hợp với bài 7 suy ra: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+b+1} + \frac{3}{b+c+1} + \frac{3}{c+a+1} + 1$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{9}{a+b+c} - 6\left(\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1}\right) + 9\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1}\right) + 1 \\
&= \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c} - 3\left(\frac{2}{a+b+1} + \frac{2}{b+c+1} + \frac{2}{c+a+1}\right) + \\
&+ 3\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} + \frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3}\right) \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c}
\end{aligned}$$

Sau đây là một số bài tập luyện tập dành cho bạn đọc.

**Bài 9.** Cho  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh:  $xyz(x+2)(y+2)(z+2) \leq \left[1 + \frac{2}{3}(xy + yz + zx)\right]^3$

**Bài 10.** Cho  $\begin{cases} x, y, z \in [-1; 1] \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}} + \sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}} + \sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}} \leq 3$

**Bài 11.** Cho  $\begin{cases} x, y, z, t \in \mathbb{R} \\ \max\{xy, yz, zt, tx\} \leq 1 \end{cases}$ . Chứng minh:

$$\sqrt{1-xy+y^2} + \sqrt{1-yz+z^2} + \sqrt{1-zt+t^2} + \sqrt{1-tx+x^2} \geq 4$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geq \frac{9}{1+abc}$

**Bài 13.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2x_1x_2\dots x_n + n - 2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

**Bài 14.** Chứng minh rằng:  $(3a^2 + 2)(3b^2 + 2)(3c^2 + 2) \geq 5[abc - 2(ab + bc + ca)]^2$

**Bài 15.** Chứng minh rằng:  $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq$   
 $\geq 36[12(abc + bcd + cda + dab) + ab + bc + ca + ad + bd + cd]^2$

Đặt  $S_{k,n} = \sum_{i_1 < \dots < i_k \subset \{1, 2, \dots, n\}} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  ( $k < n$ ) và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

**Bài 16.** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
&(S_{4,4} - S_{2,4} + 1)^2 + (S_{3,4} - S_{1,4})^2 \geq \frac{125}{216}(\sqrt{2}S_{3,4} + \sqrt{3}S_{2,4})^2 \\
&(49S_{4,4} - 371S_{2,4} + 2809)^2 + 371(7S_{3,4} - 53S_{1,4})^2 \geq 360^3(S_{4,4} + S_{2,4} + 3S_{1,4} + 1)^2 \\
&(9S_{4,4} - 21S_{2,4} + 49)^2 + 21(3S_{3,4} - 7S_{1,4})^2 \geq \frac{2000}{7}(S_{4,4} + 2S_{2,4} + 5S_{1,4} + 2)^2 \\
&(S_{5,5} - 2S_{3,5} + 4S_{1,5})^2 + 2(S_{4,5} - 2S_{2,5} + 4)^2 \geq (S_{3,5} - S_{1,5} + 1)^2 \\
&(S_{6,6} - S_{4,6} + S_{2,6} - 1)^2 + (S_{5,6} - S_{3,6} + S_{1,6})^2 \geq \frac{16}{121}(6S_{6,6} - S_{4,6} + 5S_{1,6} + 1)^2 \\
&(8S_{6,6} - 20S_{4,6} + 50S_{2,6} - 125)^2 + 10(4S_{5,6} - 10S_{3,6} + 25S_{1,6})^2 \geq 96,04(S_{4,6} + S_{3,6})^2
\end{aligned}$$

## § 23.9. PHƯƠNG PHÁP SS (SCHUR - SOS)

### I. PHƯƠNG PHÁP SS VỚI BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐẲNG THỨC TẠI TÂM

#### 1. Đặt vấn đề

Khi đứng trước một bài bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị với ba biến số chẳng hạn là  $A(a, b, c) \geq B(a, b, c)$  thì phương pháp hay được sử dụng nhất là phương pháp SOS (xem Chương IV. §17) với phép biến đổi có cấu trúc đối xứng theo định dạng sau đây:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Để có một cách nhìn phong phú hơn về các dạng bài bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị với ba biến số, chúng tôi xin giới thiệu **Phương pháp SS (Schur - SOS)**. Đặc điểm của phương pháp này là chúng ta sẽ chọn phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất trong ba biến số và biến đổi để nhận được biểu thức không đối xứng với phần tử này nhưng lại đối xứng với hai biến số còn lại. Tên gọi **SS (Schur - SOS)** được hình thành là do ta xuất hiện các biểu thức  $(a-b)^2$ ;  $(a-c)(b-c)$  để đưa về định dạng chứng minh:

$$f(a, b, c) = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ trong đó } c = \max(a, b, c) \text{ hoặc } c = \min(a, b, c)$$

Khi đó bất đẳng thức đã cho được chứng minh nếu ta chứng minh được  $M, N \geq 0$ .

Trước hết chúng ta cùng làm quen với một số khai triển thường được sử dụng trong phân tích của phương pháp SS:

1.  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a-b)^2 + (a-c)(b-c)$
2.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a-b)^2 + (a+b+c)(a-c)(b-c)$
3.  $ab(a+b) + bc(b+c) = ca(c+a) - 6abc = 2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c)$
4.  $ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc = c(a-b)^2 + b(a-c)(b-c)$
5.  $a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c) = [(a+b)^2 + c^2](a-b)^2 + [ab + (a+c)(b+c)](a-c)(b-c)$
6.  $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) - 2abc(a+b+c) =$   
 $= (a+c)(b+c)(a-b)^2 + (2ab + ac + bc)(a-c)(b-c)$
7.  $a^3b + b^3c + c^3a - abc(a+b+c) = (ca + cb)(a-b)^2 + (a^2 + ac)(a-c)(b-c)$
8.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 = \frac{1}{ab}(a-b)^2 + \frac{1}{ac}(a-c)(b-c)$
9.  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 6 = \frac{2}{ab}(a-b)^2 + \frac{a+b}{abc}(a-c)(b-c)$
10.  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{1}{(a+c)(b+c)}(a-b)^2 + \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)$
11.  $\frac{a+kb}{a+kc} + \frac{b+kc}{b+ka} + \frac{c+ka}{c+kb} - 3 = \frac{k^2(a-b)^2}{(c+ka)(c+kb)} + \frac{k(a-c)(b-c)[(k^2-k+1)a + (k-1)b + kc]}{(a+kb)(b+ka)(c+kb)}$
12.  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{(a+c)(b+c)}(a-b)^2 + \frac{(a+b+c)(a+b+2c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)$

Bây giờ chúng ta sẽ cùng làm quen ví dụ mở đầu với bất đẳng thức Schur quen thuộc.

## 2. Các bài tập mẫu minh họa

**Bài 1.** Với các số thực  $a, b, c$  không âm bất kỳ ta luôn có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Sử dụng khai triển:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)(b-c)] \quad (1)$$

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) - 6abc = 2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra bất đẳng thức đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$(a+b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ (luôn đúng do } c = \min(a, b, c) \text{)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$  hoặc  $a=b, c=0$  và các hoán vị.

**Bài 2.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{b+a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \forall a, b, c > 0$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Sử dụng khai triển:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 3 = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)(y-z)}{xz} \text{ thì bất đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng:}$$

$$\left[ \frac{1}{ab} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{1}{ac} - \frac{1}{(a+c)(a+b)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bài 3.** Chứng minh:  $\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)^2}{(c+a)^2} + \frac{(c+a)^2}{(a+b)^2} + \frac{2abc}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{11}{3} \quad \forall a, b, c \geq 0$

### Chứng minh

Giả sử  $c = \max(a, b, c)$ . Với  $x, y, z$  bất kỳ ta có khai triển sau:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} - 3 = \frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} + \frac{(x+y)(y+z)(x-z)(y-z)}{x^2z^2}$$

Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[ \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2(b+c)^2} - \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{(a+2b+c)(2a+b+c)}{(a+b)^2(a+c)^2} - \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Theo **Chebyshev** ta có:  $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$ . Do  $c = \max(a, b, c)$  nên

$$\frac{(a+2b+c)(b+2a+c)}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq \frac{4(a+b)^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+c^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \quad (1)$$

$$\text{và } \frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \frac{4}{(a+c)(b+c)} \quad (2). \text{ Ta sẽ chứng minh } \frac{2}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \quad (3)$$

Thật vậy:  $(3) \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq ab+bc+ac+c^2$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 \geq (ab + bc + ca) \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

Từ (2) và (3) suy ra  $\frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \quad (4)$

Từ (1) và (4) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 8 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 11 \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[ \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Ta có  $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{16}{(b+c)^2} \geq \frac{8}{a^2+b^2} \geq 8a^2 + b^2 + c^2$ . Do  $c = \min(a, b, c)$  nên

$$\begin{aligned} (a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2) &\geq 2\sqrt{ac} \cdot (c+c)(a^2+c^2+c^2) = 4c\sqrt{ac}(a^2+2c^2) \\ &= 4c\sqrt{ac} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2c^2 \right) \geq 4c\sqrt{ac} \cdot 4\sqrt{\frac{2a^6c^2}{27}} > 8a^2c^2 \Rightarrow \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} > \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Do đó ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bình luận:** Chúng ta có thể thấy vẻ đẹp của **phương pháp SS** qua các ví dụ trên, đặc biệt là Bài 3 và Bài 4. Nếu các bạn chứng minh hai ví dụ này bằng phương pháp **SOS** cơ bản đã được đề cập thì sẽ phải xét tới hai trường hợp  $a \geq b \geq c$  và  $a \leq b \leq c$ .

Ngoài ra chúng ta cũng có thể chứng minh Bài 3 và Bài 4 bằng phương pháp **SOS** ngắn gọn hơn nhưng không được tự nhiên với sự trợ giúp của một bổ đề sau đây:

**Bổ đề:** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$  khi đó ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{2} \left( x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 6$

Trong VD3 đặt  $x = \frac{a+b}{b+c}$ ;  $y = \frac{b+c}{c+a}$ ;  $z = \frac{c+a}{a+b}$ , VD 4 đặt  $x = \frac{a}{b}$ ;  $y = \frac{b}{c}$ ;  $z = \frac{c}{a}$  thì  $xyz = 1$ .

Chúng ta sẽ tiếp tục làm quen với phương pháp **SS** qua các ví dụ sau đây:

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3} \quad \forall a, b, c > 0$

**Giải**

Giả sử  $c = \max(a, b, c)$ . Ta có khai triển sau:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + (a-c)(b-c) \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{(c+a)(c+b)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-b)^2 + \\ &+ \left[ \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 \geq (ab + bc + ca) \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$

**Bài 4.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 8 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 11 \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[ \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-b)^2 + \left[ \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right] (a-c)(b-c) \geq 0$$

Ta có  $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{16}{(b+c)^2} \geq \frac{8}{a^2+b^2} \geq 8a^2 + b^2 + c^2$ . Do  $c = \min(a, b, c)$  nên

$$\begin{aligned} (a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2) &\geq 2\sqrt{ac} \cdot (c+c)(a^2+c^2+c^2) = 4c\sqrt{ac}(a^2+2c^2) \\ &= 4c\sqrt{ac} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2c^2 \right) \geq 4c\sqrt{ac} \cdot 4\sqrt{\frac{2a^6c^2}{27}} > 8a^2c^2 \Rightarrow \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2} > \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Do đó ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c$ .

**Bình luận:** Chúng ta có thể thấy vẻ đẹp của **phương pháp SS** qua các ví dụ trên, đặc biệt là Bài 3 và Bài 4. Nếu các bạn chứng minh hai ví dụ này bằng phương pháp **SOS** cơ bản đã được đề cập thì sẽ phải xét tới hai trường hợp  $a \geq b \geq c$  và  $a \leq b \leq c$ .

Ngoài ra chúng ta cũng có thể chứng minh Bài 3 và Bài 4 bằng phương pháp **SOS** ngắn gọn hơn nhưng không được tự nhiên với sự trợ giúp của một bổ đề sau đây:

**Bổ đề:** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$  khi đó ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{2} \left( x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 6$

Trong VD3 đặt  $x = \frac{a+b}{b+c}$ ;  $y = \frac{b+c}{c+a}$ ;  $z = \frac{c+a}{a+b}$ , VD 4 đặt  $x = \frac{a}{b}$ ;  $y = \frac{b}{c}$ ;  $z = \frac{c}{a}$  thì  $xyz = 1$ .

Chúng ta sẽ tiếp tục làm quen với phương pháp **SS** qua các ví dụ sau đây:

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3} \quad \forall a, b, c > 0$

**Giải**

Giả sử  $c = \max(a, b, c)$ . Ta có khai triển sau:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + (a-c)(b-c) \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{(c+a)(c+b)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-b)^2 + \\ &+ \left[ \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)} \right] (a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có  $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$ .

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \text{ hay } 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ac + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+a)(c+b)} \geq \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{a+b+c}{6(a^3 + b^3 + c^3)}$$

$$\text{Do } c = \max(a, b, c) \text{ nên } \frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{6(a^3 + b^3 + c^3)}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$

**Bài 6.** Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$2a^2(b+c) + 2b^2(c+a) + 2c^2(a+b) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 9abc$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Xét các biến đổi sau:

$$2 \sum_{cyc} a^2(b+c) - 12abc = 2 \sum_{cyc} bc(b+c) - 12abc = 4c(a-b)^2 + (2a+2b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$3abc - a^3 - b^3 - c^3 = -(a+b+c)(a-b)^2 - (a+b+c)(a-c)(b-c)$$

$$\text{Do đó } VT - VP = (3c - a - b)(a-b)^2 + (a+b-c)(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Bài 7. Chứng minh rằng: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2 \quad \forall a, b, c \geq 0$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \max\{a, b, c\}$ . Xét các biến đổi sau:

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 = \frac{1}{ab + bc + ca} (a-b)^2 + \frac{1}{ab + bc + ca} (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1 = \frac{-2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} (a-b)^2 - \frac{1}{(a+b)(b+c)} (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$VT - VP = \left( \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) (a-b)^2 +$$

$$+ \left( \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{1}{(b+c)(c+a)} \right) (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Bài 8. Chứng minh rằng: } \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad \forall a, b, c \geq 0$$

**Chứng minh**

$$\text{Ta có: } VT - 9 = \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 - 9 = \frac{(a-b)^2}{ab} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) + \frac{(a-b)(a-c)}{ac} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right)$$

$$VT - 9 = \frac{2(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-b)(a-c)(a+b)}{abc}$$

$$VT - VP = (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) - \frac{2}{ab} \right) + (c-a)(c-b) \left( \frac{1}{ac} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) - \frac{a+b}{abc} \right)$$



Giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ , ta có:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{ab} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) \geq \frac{3}{ab}$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{1}{ac} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \right) \geq \frac{a+b}{abc} \Leftrightarrow \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc}{ac \cdot abc} \geq \frac{a+b}{abc}$

$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc \geq ac(a+b)$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc \geq ca^2 + abc \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + 2abc \geq 0$$

**Bài 9.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \quad \forall a, b, c > 0$

**Chứng minh**

Giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ . Ta có:

$$VT - 3 = \frac{(a-b)^2}{ab+bc+ca} + \frac{(a-c)(b-c)}{ab+bc+ca} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+c)(b+c)} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{1}{(a+b)(b+c)} \right) \geq 0$$

Ta có ngay  $ab+bc+ca \leq (a+c)(b+c)$  và  $ab+bc+ca \leq (a+b)(b+c) \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Bài 10.** Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \frac{a+kc}{a+kb} \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \quad \forall k \leq 1$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$VT - 3 = (a-b)^2 \left( \frac{k^2}{(ka+c)(kb+c)} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{k^2a - ka + k^2c + k^3b + kb - k^2b}{(a+kb)(b+kc)(c+kb)} \right)$$

$$VT - 3 = (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab+bc+ca} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{ab+bc+ca} \right)$$

$$\text{Vậy BDT} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{k^2}{(ka+c)(kb+c)} \right) +$$

$$+ (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{ab+bc+ca} - \frac{k^2a - ka + k^2c + k^3b + kb - k^2b}{(a+kb)(b+kc)(c+kb)} \right) \geq 0$$

Cuối cùng chỉ cần chứng minh  $(ka+c)(kb+c) \geq k^2(ab+bc+ca)$

$$\text{Và } (a+kb)(b+kc)(c+kb) \geq (k^2a - ka + k^2c + k^3b + kb - k^2b)(ab+bc+ca)$$

Khai triển và sử dụng  $k \leq 1; a \geq c; b \geq c$  ta nhận được đpcm.

**Bài 11.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq 4 \quad \forall a, b, c > 0,$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$\text{Xét } \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} - 3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2 - 1} = -\frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2} - \frac{(a-c)(b-c)}{(a+b+c)^2}. \text{ Khi đó bất đẳng thức trở thành}$$

$$(a-b)^2 \left( \frac{1}{(a+c)(b+c)} - \frac{1}{(a+b+c)^2} \right) + (a-c)(b-c) \left( \frac{1}{(a+b)(b+c)} - \frac{1}{(a+b+c)^2} \right) \geq 0$$

Ta có  $(a+c)(b+c) \leq (a+b+c)^2$  và  $(a+b)(b+c) \leq (a+b+c)^2 \Rightarrow$  đpcm

Các bài tập dưới đây chủ yếu được dựa trên các đẳng thức trong hai dạng sau đây:

$$\begin{aligned} \text{Dạng 1: } f(a, b, c) &= \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - a - b - c = \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} + \frac{c^2 - a^2}{a} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} - \frac{a^2 - b^2}{a} + \frac{b^2 - c^2}{a} = \frac{a+b}{ab}(a-b)^2 + \frac{b+c}{ac}(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dạng 2: } f(a, b, c) &= \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} + \frac{c^3 - a^3}{a} \\ &= \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} - \frac{a^3 - b^3}{a} - \frac{b^3 - c^3}{a} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}(a-b)^2 + \frac{b^2 + c^2 + bc}{ac}(b-c)^2 \end{aligned}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2}$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - a - b - c &= \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} + \frac{c^2 - a^2}{a} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{c} - \frac{a^2 - b^2}{a} - \frac{b^2 - c^2}{a} = \frac{a+b}{ab}(a-b)^2 + \frac{b+c}{ac}(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} - (a + b + c) = \frac{2a + 2b}{a^2 + b^2 + c^2}(a-b)^2 + \frac{a + b + 2c}{a^2 + b^2 + c^2}(a-c)(b-c)$$

$$\text{Vậy: } M = \frac{a+b}{ab} - \frac{2(a+b)}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad N = \frac{b+c}{ac} - \frac{a+b+2c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Để thấy  $M \geq 0$ . Ta sẽ chứng minh  $N \geq 0$ . Thật vậy biến đổi bất đẳng thức:

$$N \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(b+c) \geq ac(a+b+2c). \text{ Sử dụng AM - GM, ta có:}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b+c) \geq 2c(a^2 + b^2 + c^2) = c \left[ a^2 + \left( \frac{1}{8}a^2 + 2b^2 \right) + \left( \frac{1}{2}a^2 + 2c^2 \right) + \frac{3}{8}a^2 \right] >$$

$$> c(a^2 + ab + 2ac) = ac(a+b+2c). \text{ Vậy } N \geq 0 \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

**Bài 13.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)}$

#### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - a^2 - b^2 - c^2 &= \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} + \frac{c^3 - a^3}{a} \\ &= \frac{a^3 - b^3}{b} + \frac{b^3 - c^3}{c} - \frac{a^3 - b^3}{a} + \frac{b^3 - c^3}{a} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}(a-b)^2 + \frac{b^2 + c^2 + bc}{ac}(b-c)^2 \end{aligned}$$

Biến đổi biểu thức sau đây dưới dạng

$$\begin{aligned} &\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} - (a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= \frac{2(a+b)^2}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2}(a-b)^2 + \frac{2(a+c)(b+c)}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2}(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab} - \frac{2(a+b)^2}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2};$$

$$N = \frac{b^2 + c^2 + bc}{ac} - \frac{2(a+c)(b+c)}{\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2}$$

Ta có:  $(\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + ab) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)3ab$

$$\geq 2ab(2(a^2 + b^2)) \geq 2ab(a+b)^2 \Rightarrow M \geq 0$$

$$(\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)} + a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + bc) \geq \frac{3}{2}c(b+c)(2(a^2 + b^2 + c^2))$$

$$\geq 2c(a^2b + abc + a^2c + ac^2) = 2ac(a+c)(b+c) \Rightarrow N \geq 0$$

**Bài 14.** Chứng minh rằng:  $(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2)^2 \geq 3abc(a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3)$

**Chứng minh**

$f(a, b, c) = (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2)^2 - 3abc(a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3)$ . Đặt kí hiệu các biểu thức

$$P = a^6b^4 + b^6c^4 + c^6a^4 - a^5b^4c - b^5c^4a - c^5a^4b = a^5b^4(a-c) + b^5c^4(b-a) + c^5a^4(c-b)$$

$$Q = a^5b^2c^3 + b^5c^2a^3 + c^5a^2b^3 - a^5b^4c - b^5c^4a - c^5a^4b$$

$$= ab^5c^2(a^2 - c^2) + bc^5a^2(b^2 - a^2) + ca^5b^2(c^2 - b^2).$$

Suy ra  $f(a, b, c) = P + 2Q$ . Biến đổi các biểu thức  $P, Q$  ta có

$$P = a^5b^4(a-c) - c^5a^4(b-c) + b^5c^4(b-a) - a^5c^4(b-a) - a^5c^4(a-c) + a^5c^4(b-c)$$

$$= c^4(a^5 - b^5)(a-b) + a^5(a-c)(b^4 - c^4) + a^4c^4(a-c)(b-c)$$

$$= a^4(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a-b)^2 + [a^5(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) + a^4c^4](a-c)(b-c)$$

$$Q = ab^5c^2(a^2 - c^2) + bc^5a^2(b^2 - a^2) + ca^5b^2(c^2 - b^2) = ab^5c^2(a^2 - c^2) - a^5b^2c(b^2 - c^2) + a^2bc^5(b^2 - a^2) - ab^2c^5(b^2 - a^2) - ab^2c^5(a^2 - c^2) + ab^2c^5(b^2 - c^2)$$

$$= -abc^5(a^2 - b^2)(a-b) + ab^2c^2(a^2 - c^2)(b^3 - c^3) - ab^2c(b^2 - c^2)(a^4 - c^4) = -abc^5(a+b)(a-b)^2 +$$

$$+ [ab^2c^2(a+c)(b^2 + bc + c^2) - ab^2c(b+c)(a^3 + a^2c + ac^2 + c^3)](a-c)(b-c)$$

$$= -abc^5(a+b)(a-b)^2 + ab^2c(ab^2c + b^2c^2 - a^3b - a^3c - ab^2c - a^2c^2)(a-c)(b-c)$$

Từ đó suy ra  $f(a, b, c) = P + 2Q \geq 0$

**3. Các bài tập áp dụng dành cho bạn đọc tự giải****Bài 1.** Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}, \forall a, b, c \geq 0$$

**Bài 2.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{abc}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ **Bài 3.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac} + 2$ **Bài 4.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \geq 12$ **Bài 5.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5$ **Bài 6.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}$ **Bài 7.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c \forall a, b, c > 0$ **Bài 8.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{81abc}{(a+b+c)^3} \geq \frac{9}{2} \forall a, b, c > 0$ **Bài 9.** Chứng minh rằng:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \forall a, b, c > 0$ **Bài 10.** Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \forall a, b, c > 0$$

**Bài 11.** Chứng minh rằng:  $\frac{a+2b}{c+2b} + \frac{b+2c}{a+2c} + \frac{c+2a}{b+2a} \geq 3 \forall a, b, c > 0$ **Bài 12.** Chứng minh:  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{4\sqrt{2}(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8+4\sqrt{2} \forall a, b, c > 0$ **Bài 13.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)} + \frac{b^2+ca}{b^2(c+a)} + \frac{c^2+ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \forall a, b, c > 0$ **Bài 14.** Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq (a+b+c) \left( \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab} \right) \forall a, b, c > 0$$

**Bài 15.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 12 \forall a, b, c > 0$ **Bài 16.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+5b}{b+c} + \frac{b^2+5c}{c+a} + \frac{c^2+5a}{a+b} \geq 8$ **Bài 17.** Chứng minh rằng:  $(ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4} \forall a, b, c \geq 0$

## II. PHƯƠNG PHÁP SOS VÀ BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG CÓ ĐẲNG THỨC TẠI TÂM.

### 1. Đặt vấn đề

Như chúng ta đã biết SOS và SS là hai phương pháp khá hiệu quả với các bất đẳng thức 3 biến không chứa căn, nhưng một yếu tố tiên quyết để đưa về dạng chuẩn của phương pháp là bất đẳng thức phải có dấu bằng đạt tại tâm. Vậy với những bài toán không có đẳng thức tại tâm thì sao? Trong mục này chúng tôi đưa ra một số ví dụ quy từ bất đẳng thức tại biên về chứng minh bất đẳng thức tại tâm, công việc tưởng chừng khó khăn hơn này lại giúp ta xác định được một đường lối quen thuộc và rõ ràng hơn để chứng minh. Các bài toán sau đây có thể giúp các bạn nhìn nhận rõ hơn về kỹ thuật này.

### 2. Các bài tập mẫu minh họa

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$ . Chứng minh:  $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{27}{4}$  (1)

#### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{1}{4}(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)) \leq (a+b+c)^3 \quad (2)$$

Để ý rằng đẳng thức xảy ra khi  $a=b=\frac{3}{2}; c=0$  và các hoán vị nên nếu ta giữ nguyên bất đẳng thức như trên thì khó có thể biến đổi về dạng chuẩn của phương pháp SOS và SS. Chúng ta sẽ xuất hiện ý tưởng là cộng thêm một biểu thức không âm vào vế trái của bất đẳng thức (2) để có thêm điều kiện đẳng thức xảy ra tại tâm  $a=b=c=1$  nhưng vẫn phải bảo toàn điều kiện đẳng thức vẫn xảy ra tại  $a=b=\frac{3}{2}; c=0$ . Trong bài toán này chúng ta cộng thêm biểu thức không âm là  $kabc$ . Để xác định  $k$  ta cho  $a=b=c=1$  ta được  $k=3$ , từ đó ta giả sử  $c = \min(a, b, c)$  và chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây:

$$(a+b+c)^3 \geq 4[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] + 3abc \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ đúng (đpcm)}$$

**Bình luận:** Bước tinh tế nhất trong lời giải trên chính là ý tưởng chuyển từ bất đẳng thức (2) về bất đẳng thức (3). Công việc tưởng chừng làm cho bất đẳng thức chặt hơn này lại giúp tạo nên một đẳng thức nữa cho bất đẳng thức ban đầu, đẳng thức tại tâm. Chính điều này đã giúp ta có những cách đánh giá quen thuộc thông qua hai phương pháp SOS và SS. Từ đó việc tìm ra lời giải cũng tự nhiên và dễ dàng hơn. Chú ý rằng để lượng cộng thêm vào thường có dạng  $kabc \cdot f(a, b, c)$  để đảm bảo cho đẳng thức ban đầu của đề bài vẫn xảy ra (đẳng thức tại biên), trong đó  $f(a, b, c)$  được lựa chọn tùy vào bài toán, thường là để tiện cho việc biến đổi, ta đến với các bài toán tiếp theo.

**Bài 2.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$  (1)

**Chứng minh**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)^2 \geq \frac{25}{4}$

Đẳng thức của ví dụ 2 xảy ra khi  $a=b=1, c=0$  và các hoán vị. Tương tự ví dụ 1 ta cộng thêm vào vế phải một lượng  $\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ . Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn:

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)^2 \geq \frac{25}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) + \frac{4(a+b+c)(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{25}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Chú ý rằng:  $\frac{(a+b+c)(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1 + \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:  $(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$

Đây là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc.

Ta sẽ chứng minh lại bằng phương pháp SS

Đặt  $x=a+b$ ;  $y=b+c$ ;  $z=c+a$ . Giả sử  $z = \max\{x, y, z\}$ , ta có  $x+y \geq z$

Bất đẳng thức trên  $\Leftrightarrow (2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9$

$$\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + \left[ (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - 9 \right] \geq 0$$

Ta có:  $2(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) =$

$$-2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) (x-y)^2 - 2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) (x-z)(y-z)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - 9 = \frac{2(x+y)^2}{x^2 y^2} (x-y)^2 + \frac{(x^2 + y^2)(x+z)(y+z)}{x^2 y^2 z^2} (x-z)(y-z)$$

$$\text{Đặt: } M = \frac{2(x+y)^2}{x^2y^2} - \frac{2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{x^2y^2z^2};$$

$$N = \frac{(x^2 + y^2)(x+z)(y+z)}{x^2y^2z^2} - \frac{2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{x^2y^2z^2}$$

Ta sẽ chứng minh  $M \geq 0, N \geq 0$ . Thật vậy ta có:

$$M \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 z^2 \geq (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \Leftrightarrow xyz^2 + xy(z^2 - xy) \geq 0$$

$$N \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x+z)(y+z) - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + z(x^2 + y^2)(x+y-z) \geq 0$$

Các bất đẳng thức trên đều đúng vì  $z = \max\{x, y, z\}$  và  $x + y \geq z$ .

**Bình luận:** Bản chất thực sự của bài toán trên chính là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc, tuy nhiên điều này đã được ẩn đi qua việc khuyết mất đại lượng

$\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$  trong bất đẳng thức (2). Câu hỏi đặt ra là việc tìm ra  $k = 4$  và

$f(a, b, c) = \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$  trong bài toán này liệu có phải là một điều may mắn, hay là một sự trùng hợp ngẫu nhiên. Câu trả lời là không, ta xét phép biến đổi sau:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)^2 \geq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{2}{(a+b)(b+c)} + \frac{2}{(b+c)(c+a)} + \frac{2}{(c+a)(a+b)} \right) \geq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) + \frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[ (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) - \frac{9}{4} \right] + 4 \left[ \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1 \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) - \frac{9}{4} \right] + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$$

Biến đổi đến đây lượng  $\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$  đã hiện ra. Tuy nhiên không phải bài toán nào

cũng có thể dễ dàng tìm ra  $f(a, b, c)$ . Nhiều bài toán yêu cầu chúng ta phải dự đoán và dự đoán không phải bao giờ cũng chính xác. Để làm rõ điều đó, ta xét tiếp ví dụ sau:



**Bài 3.** Chứng minh:  $\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 \quad \forall a, b, c \geq 0$

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn vẫn đúng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (1)$$

### Lời giải 1:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} [a(b+c)(a^2+b^2)(a^2+c^2)] \geq 2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^5(b+c) + 2 \sum_{\text{sym}} b^2c^2 + abc \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq 2 \sum_{\text{sym}} a^4(b^2+c^2) + 12a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta có:  $VT - VP = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$

Trong đó:  $M = 2(a^2 + b^2 + c^2)(a+b-c)c \geq 0$

$$N = (a^2 + b^2 + c^2)(a-b)^2 + (a^3 + b^3)c + (a+b)c^3 + 2c(a^2b + b^2c - a^2c - b^2c) \geq 0$$

### Lời giải 2:

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0. \text{ Với:}$$

$$S_a = \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} = \frac{bc(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

Tương tự ta có  $S_b, S_c \geq 0$ , bất đẳng thức được chứng minh

**Bình luận:** Sự lựa chọn  $f(a, b, c) = \frac{abc}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$  với chú ý dễ dàng hơn

cho việc biến đổi đã vô tình làm bất đẳng thức đúng. Tuy nhiên ta tự hỏi nếu thay  $f(a, b, c)$  bởi một lượng khác thì bất đẳng thức sau khi dự đoán liệu có còn chính xác.

Ta hãy thử với  $f(a, b, c) = \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ , ta cần chứng minh:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Đáng tiếc là bất đẳng thức trên không đúng. Phản ví dụ cho bất đẳng thức trên là

$a=b=1, c=\frac{6}{5}$ . Từ đây bạn có thể thấy rằng không phải sự lựa chọn nào cũng mang lại

hiệu quả mong muốn. Sự lựa chọn đôi khi đòi hỏi một chút may mắn, một chút tình tế và cả một chút nhạy cảm của người làm bất đẳng thức.

**Bài 4.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $(a+b+c) \left( \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \right) \geq 4$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b+c) \left( \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \right) \geq 4 + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (1)$$

**Lời giải 1:**

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{a^2}{b^2+c^2} + \sum_{\text{sym}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 4 + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Trong bài toán 3 ta đã chứng minh được bất đẳng thức:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Công việc còn lại là chứng minh:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)^2 + c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2) \geq 0$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$  bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

**Lời giải 2:** Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \text{ trong đó}$$

$$S_a = \frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_b = \frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)} + \frac{ca-b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)} + \frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_c = \frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)} + \frac{ab-c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)} + \frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , ta chứng minh được  $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$ , áp dụng tiêu chuẩn 2 của phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

**Bài 5.** Chứng minh rằng:  $\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}, \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

**Lời giải 1:** Bất đẳng thức tương đương với:

$$2 \sum_{sym} [(a^2+bc)(a^2+b^2)(a^2+c^2)] \geq (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{sym} a^6 + 2 \sum_{sym} b^3c^3 + 2abc \sum_{sym} a^3 + 2abc \sum_{sym} a^2(b+c) \geq 3 \sum_{sym} a^4(b^2+c^2) + 12a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ , ta có:  $VT - VP = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$ , trong đó

$$M = 2(a^4+b^4) + 4ab(a^2+b^2) + a^2b^2 + abc^2 + (a+b)c^3 + (2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) + 2c(a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c) \geq 0$$

$$N = c[(3ab + 2c^2)(a+b) + 4abc + 2c^3 + (a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c)] \geq 0. \text{ Suy ra đpcm}$$

**Lời giải 2:** Đưa bất đẳng thức về dạng SOS:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \text{ trong đó:}$$

$$S_a = \frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)} - \frac{1}{2(b^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_b = \frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)} - \frac{1}{2(c^2+a^2)} + \frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_c = \frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Giả sử  $a \geq b \geq c$  ta chứng minh được  $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$ , áp dụng tiêu chuẩn 2 trong phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

**Bài 6.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \frac{1}{32}$

### Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với:  $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \frac{1}{32}(a+b+c)^6$

Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:

$$(a+b+c)^6 \geq 32(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 473a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^6 \geq 32[a^4(b^2+c^2) + b^4(c^2+a^2) + c^4(a^2+b^2)] + 537a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$M = (a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0. \text{ Trong đó:}$$

$$M = (a+b)^4 + 10(a^3+b^3)c + 17(a+b)abc + 3(a+b)c^3 + 147abc^2 + 17c^4 + 21c(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c) \geq 0$$

$$N = 4(a-b)^4 + c[(a+b)(79ab+7c^2) + 57abc + c^3 + 17(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c)] \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

**Bài 7. Chứng minh:**  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}, \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) + 32a^2b^2c^2$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ , ta có

$$VT - VP = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + 8ab^2c(a-b)^2 + 4abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

**Bài 8. Chứng minh rằng:**  $\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2, \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} [a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)] \geq 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) + 8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^4(b^2+c^2) + 3abc \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq \sum_{\text{sym}} b^3c^3 + 2abc \sum_{\text{sym}} a^3 + 12a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow [(ac+bc-ab)^2 + c^2(4ab+c^2-2ac-2bc)](a-b)^2 + abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$  bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, ta có điều cần chứng minh.

**Bài 9. Chứng minh:**  $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{5} \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \forall a, b, c \geq 0$

**Chứng minh**

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{5} \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) + \frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \sum_{\text{sym}} \frac{a^2}{b^2+c^2} \geq \frac{12}{5} + \sum_{\text{sym}} \frac{a}{b+c} + \frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (*)$$

Ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức sau:

$$\frac{4}{5} \left( \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \right) \geq \frac{4}{5} \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \right) \geq \frac{1}{5} \cdot 2 \quad (2)$$

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (3)$$

Cộng vế (1), (2) và (3) suy ra (\*) đúng và bất đẳng thức được chứng minh.

**Bài 10.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $a^2b+b^2c+c^2a \leq 4$

### Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với  $a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$ , ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$4(a+b+c)^3 \geq 27(a^2b+b^2c+c^2a) + 27abc$$

$$\Leftrightarrow (4a+4b+c)(a-b)^2 + (16b+4c-11a)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Chú ý rằng ta có đẳng thức sau với mọi số thực  $a, b, c$ :

$$P(a-c)(b-c)(a-b)^2 - P(a-b)^2(a-c)(b-c) = 0. \text{ Cho } P = -\frac{4(a+b)}{ab} \text{ ta nhận được:}$$

$$-\frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}(a-b)^2 + \frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab}(a-c)(b-c) = 0$$

Do đó bất đẳng thức có thể viết lại:  $M = (a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$ , trong đó:

$$M = 4a+4b+c - \frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab} = \frac{c(4a^2+4b^2+9ab-4ac-4bc)}{ab} \geq 0$$

$$N = 16b+4c-11a + \frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab} = \frac{(4a+b)(a-2b)^2+4abc}{ab} \geq 0$$

**Bài 11.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ . Chứng minh:  $(a^2b+b^2c+c^2a) + 2(ab^2+bc^2+ca^2) \leq 6\sqrt{3} \quad (1)$

### Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leq 2\sqrt{3} \frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$9(a^2b + b^2c + c^2a) + 18(ab^2 + bc^2 + ca^2) + (54\sqrt{3} - 81)abc \leq 2\sqrt{3}(a+b+c)^3$$

Giả sử  $c = \min(a, b, c)$  ta có:  $VP - VT = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$ . Với:

$$\begin{aligned} M &= 2\sqrt{3}(a+b) + (14\sqrt{3} - 27)c - \frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-c)(b-c)}{ab} \\ &= \frac{\sqrt{3}c(2a^2 + 2b^2 - 2ac - 2bc + (18 - 9\sqrt{3})ab)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= (8\sqrt{3} - 9)a + (8\sqrt{3} - 19)b + 2\sqrt{3}c + \frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-b)^2}{ab} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2a + (2 + \sqrt{3})b)(a + (1 - \sqrt{3})b)^2 + 2\sqrt{3}abc}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

**Bài 12.** Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không

$$\text{âm } a, b, c: k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + abc(a+b+c)$$

**Chứng minh**

Cho  $a=3, b=1, c=0$  suy ra  $k \geq \frac{27}{256}$ . Ta chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{27}{256}(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$27(a+b+c)^4 \geq 256(a^3b + b^3c + c^3a) + 473abc(a+b+c) \Leftrightarrow M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Với: } M = 27(a+b)^2 - 40ac - 40bc + 180c^2 - \frac{[27(a+b)^2 + 68(a+b)c](a-c)(b-c)}{ab}$$

$$N = 216ab - 148a^2 + 108b^2 - 121ac + 135bc + 27c^2 + \frac{[27(a+b)^2 + 68(a+b)c](a-b)^2}{ab}$$

$$\text{Ta có: } M.ab = c[27(a+b)(a-b)^2 + 189abc + 41c(a+b)^2 - 68c^2(a+b)] \geq 0$$

$$N.ab = (27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + c(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2) + 27abc^2$$

Nếu  $68a^2 + 68b^2 - 189a^2b + 67ab^2 \geq 0$  bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu  $68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2 \leq 0$

$$N.ab \geq (27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + b(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2)$$

Dùng đạo hàm kiểm tra được

$$(27a^2 + 14ab + 3b^2)(a - 3b)^2 + b(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Vậy ta có  $K_{\min} = \frac{27}{256}$ .

**Bài 13.** Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :  $k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$

**Giải**

Cho  $a=2, b=1, c=0$  suy ra  $k \geq \frac{4}{27}$ . Ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min(a, b, c)$ . Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:  $4(a+b+c)^4 \geq 27(a^3b + b^3c + c^3a) + 27(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 54abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$ . Trong đó:

$$\begin{aligned} M &= 4(a^2 + b^2) + 13c^2 + 20ab - 7c(a+b) - \frac{(4a^2 + 4b^2 + 20ab + 7ac)(a-c)(b-c)}{ab} \\ &= \frac{c[(a+b)(4a^2 + 4b^2 + 13ab + 7ac) - 7a^2b - c(4a^2 + 4b^2 + 7ab + 7ac)]}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= 4b^2 + 4c^2 - 23a^2 - 7ac + 29ab + 20bc + \frac{(4a^2 + 4b^2 + 20ab + 7ac)(a-b)^2}{ab} \\ &= \frac{(a+b)(4a+b)(a-2b)^2 + ac[4bc + a^2 + 3b^2 + 3ab + 6(a-2b)^2]}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh, ta có  $k_{\min} = \frac{4}{27}$

### 3. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=2 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 1$

**Bài 2.** Chứng minh rằng:  $\frac{ab+ac+4bc}{b^2+c^2} + \frac{bc+ba+4ca}{c^2+a^2} + \frac{ca+cb+4ab}{a^2+b^2} \geq 4 \quad \forall a, b, c$

**Bài 3.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=2 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc \leq 1$

**Bài 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của  $F = \frac{a+kb}{c+kb} + \frac{b+kc}{a+kc} + \frac{c+ka}{b+ka}$  với  $a, b, c \geq 0, (k \geq 0)$



## § 23.10. CÁC TỔNG ĐỐI XỨNG VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

Trong chương II §7 khi tìm hiểu bất đẳng thức Schur chúng ta đã làm quen với việc sử dụng các phép biến đổi dựa trên các đa thức đối xứng Viète để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng ba biến. Trong chương IV, §18, phép dồn biến EMV và trong §22 phương pháp chia để trị DAC, phân phối hợp với phương pháp SOS, chúng ta đã nhận thấy một phép biến đổi rất có hiệu lực khi chứng minh các bất đẳng thức ba biến hoán vị, cụ thể đó là việc tách ra các đại lượng có dạng  $(a-b)(b-c)(a-c)$ . Trong bài viết này chúng kết hợp sức mạnh của hai phương pháp để tấn công triệt để các bất đẳng thức hoán vị.

### I. ĐỊNH LÝ

Với mọi bộ ba số thực  $a, b, c$  ta ký hiệu  $p = a + b + c$ ;  $q = ab + bc + ca$ ;  $r = abc$ .

Khi đó có các đẳng thức sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = p^4 + 2q^2 + 4pr - 4p^2q$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr;$$

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = pq - 3r$$

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) = p^2q - 2q^2 - pr$$

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r$$

Biểu thức  $f(X) = AX^2 + BX + C$ : 
$$\begin{cases} A \geq 0 \\ X_{\min} = -\frac{B}{2A} \end{cases}$$

$$(+)\ f(X) \geq 0 \ \forall X \Leftrightarrow \Delta = B^2 - 4AC \leq 0$$

$$(+)\ f(X) \geq 0 \ \forall X \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_{\min} \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ C \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{\min} \geq 0 \\ f(X_{\min}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq 0 \\ \Delta = B^2 - 4AC \geq 0 \end{cases}$$

## II. ÁP DỤNG

Chúng ta đã biết phương pháp sử dụng các đại lượng  $p, q, r$  trong việc chứng minh các bất đẳng thức đối xứng, còn ở đây là những ứng dụng cho bất đẳng thức hoán vị vòng quanh, chú ý rằng có nhiều bài toán được dẫn ra là rất khó.

**Ví dụ 1.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$ .

Chứng minh  $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$  (\*)

## Chứng minh

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^2b \leq 8 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2b - \sum_{cyc} ab^2 \leq 8 - \sum_{cyc} a^2b - \sum_{cyc} ab^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq 8 - \sum_{sym} a^2(b+c)$$

Do đó chỉ cần chứng minh khi  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$ , bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} \leq 8 - \sum_{sym} a^2(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4q^3r)} \leq 8 - (pq - 3r)$$

$$\Leftrightarrow (p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4q^3r) \leq (8 - pq + 3r)^2$$

$$\Leftrightarrow 36r^2 + (4p^3 - 24pq + 48)r + 4q^3 - 16pq + 64 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 9r^2 + (p^3 - 6pq + 12)r + q^3 - 4pq + 16 \geq 0$$

$$\text{Với } p=3: f(r) = 9r^2 + (39 - 18q)r + q^3 - 12q + 16 \geq 0$$

Nhận thấy  $r_{\min} = \frac{-39 + 18q}{18}$ . Xét hai trường hợp

$$\text{Nếu } 0 \leq q \leq \frac{39}{18} \Rightarrow r_{\min} \leq 0 \text{ thì: } f(0) = q^3 - 12q + 16 = (q+4)(q-2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nếu } \frac{39}{18} \leq q \leq 3 \Rightarrow r_{\min} \geq 0, \text{ ta có } f(r_{\min}) = 24q^3 - 216q^2 + 648q - 630 \geq 0 \forall q \in \left[\frac{39}{18}; 3\right]$$

Suy ra  $f(r) \geq 0 \forall r \geq 0$  (đpcm).

**Ví dụ 2.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2a + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leq 6\sqrt{3}$$

## Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sum_{cyc} a^2b + 4\sum_{cyc} ab^2 &\leq 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sum_{sym} a^2(b+c) + \sum_{cyc} ab^2 - \sum_{cyc} a^2b \leq 12\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 3\sum_{sym} a^2(b+c) + (a-b)(b-c)(c-a) \leq 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$ , nghĩa là

$$\begin{aligned} 3\sum_{sym} a^2(b+c) + \sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} &\leq 12\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 3(pq-3r) + \sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r} \leq 12\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r \leq (12\sqrt{3} - 3pq + 9r)^2 \\ &\Leftrightarrow f(r) = 108r^2 + (4p^3 - 72pq + 216\sqrt{3})r + 4q^3 + 8p^2q^2 - 72\sqrt{3}pq + 432 \geq 0 \end{aligned}$$

Tìm được  $r_{\min} = \frac{216q - 108 - 216\sqrt{3}}{108}$ , xét hai trường hợp:

$$\text{Nếu } 0 \leq q \leq \frac{216\sqrt{3} + 108}{216} \Rightarrow r_{\min} \leq 0 \text{ thì } f(0) = 4(q + 12 + 6\sqrt{3})(q + 3 - \sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$\text{Nếu } \frac{216\sqrt{3} + 108}{216} \leq q \leq 3 \Rightarrow r_{\min} \geq 0, \text{ ta có}$$

$$f(r_{\min}) = 4q^3 - 36q^2 + 108q + 81 - 108\sqrt{3} \geq 0 \forall q \in \left[ \sqrt{3 + \frac{1}{2}}, 3 \right]$$

Vì vậy  $f(r)$  không âm với mọi  $r \geq 0$  (đpcm).

**Ví dụ 3.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$$

### Chứng minh

Với  $a = 2, b = 1, c = 0$  ta suy ra  $k \geq \frac{4}{27}$ . Ta sẽ chứng minh rằng đây là giá trị cần tìm, nghĩa là bất đẳng thức đã cho đúng với  $k = \frac{4}{27}$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $p = 3$ , ta có

$$\begin{aligned} \frac{4}{27}(a+b+c)^4 &\geq \sum_{cyc} a^3b + \sum_{sym} b^2c^2 + abc \sum_{sym} a \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geq \left( \sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3 \right) + 2\sum_{sym} b^2c^2 + \left( \sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} ab^3 \right) + 2abc(a+b+c) \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geq \sum_{cyc} a^3(b+c) + 2\sum_{sym} b^2c^2 + (a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c) + 2abc(a+b+c) \end{aligned}$$

Ta chỉ cần xét một trường hợp, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{8}{27}(a+b+c)^4 \geq p^2q - 2q^2 - pr + 2q^2 - 4pr + 2pr + \\ + p\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}.$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \leq \left(\frac{8}{27}p^4 - p^2q + 3pr\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 36p^2r^2 + \left(\frac{52}{9}p^5 - 24p^3q\right)r + \frac{64}{729}p^3 + 4p^2q^3 - \frac{16}{27}p^6q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \leq \left(\frac{8}{27}p^4 - p^2q + 3pr\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 36p^2r^2 + \left(\frac{52}{9}p^5 - 24p^3q\right)r + \frac{64}{729}p^3 + 4p^2q^3 - \frac{16}{27}p^6q \geq 0$$

Với  $p = 3$ :  $f(r) = 324r^2 + (1404 - 648)r + 36q^3 - 432q + 576 \geq 0$

Xét hai trường hợp

Nếu  $0 \leq q \leq \frac{13}{6} \Rightarrow 39 - 18q \geq 0$ , thì  $f(0) = 36(q+4)(q-2)^2 \geq 0$

Nếu  $\frac{13}{6} \leq q \leq 3$  suy ra.

$$\Delta = (39 - 18q)^2 - 4.9.(q^3 - 12q + 16) = -36q^3 + 324q^2 - 972q + 945 \leq 0 \quad \forall \quad q \in \left[\frac{13}{6}; 3\right]$$

Do đó  $f(r) \geq 0 \forall r \geq 0$  (đpcm).

**Ví dụ 4.** Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực  $a, b, c$ :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x) \quad (*)$$

#### Chứng minh

Nếu  $p = 0$  bất đẳng thức có thể viết lại là  $7(y^2 + z^2 + yz)^2 \geq 0$ , hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp  $p \neq 0$ , không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 3$ , ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\left(\sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3\right) + 3\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} ab^3\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\sum_{cyc} a^3(b+c) + 3(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)$$

Chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$ , bất đẳng thức tương đương với:

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\sum_{sym} a^3(b+c) + 3(a+b+c)\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(p^2 - 2q)^2 \geq 3(p^2q - 2q^2 - pr) + 3p\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}$$

$$\Leftrightarrow 9p^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \leq \left[ 2(p^2 - 2q)^2 - 3(p^2q - 2q^2 - pr) \right]^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) 252p^2r^2 + (84pq^2 - 228p^3q + 48p^5)r + 4p^8 - 44p^4q + 168p^4q^2 - 272p^2q^3 + 196q^4 \geq 0$$

$$\text{Với } p = 3: f(r) = 4(567r^2 + (63q^2 - 1539q + 2916)r + 49q^4 - 612q^3 + 3402q^2 - 8019q + 6561) \geq 0$$

Ta có:

$$\Delta' = (63q^2 - 1539q + 2916)^2 - 2268(49q^4 - 612q^3 + 3402q^2 - 8019q + 6561) = -2187(7q - 18)^2(q - 3)^2 \leq 0$$

Vì vậy  $f(r) \geq 0$  với mọi số thực  $r$  (đpcm)

**Ví dụ 5.** Xác định hằng số thực lớn nhất  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đây đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 3+k$$

**Giải**

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \right) + 2k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 6 + 2k - \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{sym}} a^2(b+c)}{abc} + 2k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 6 + 2k + \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \end{aligned}$$

Chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{pq-3r}{r} + \frac{2kq}{p^2-2q} \geq 6 + 2k + \frac{\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}}{r}$$

$$\begin{aligned} & (p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3q)(p^2 - 2q)^2 \\ & \leq \left[ (pq - 3r)(p^2 - 2q) + 2kqr - (6 + 2k)r(p^2 - 2q) \right]^2 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử rằng  $p = 3$ . Sau khi khai triển, viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0. \text{ Trong đó}$$

$$A = 81k^2 + 9k^2q^2 + 54kq^2 + 729k - 972q + 108q^2 + 2187 - 54k^2q - 405kq$$

$$B = 2187 - 108q^3 + 1080q^2 - 3159q - 18kq^3 - 243kq + 135kq^2$$

$$C = 4q^5 - 36q^4 + 81q^3$$

Dễ dàng chứng minh rằng  $A$  và  $C$  không âm. Xét hai trường hợp:

Nếu  $0 \leq q \leq \frac{3(k+11-\sqrt{k^2+10k+49})}{2(k+6)} \Rightarrow B \geq 0 \Rightarrow f(r) \geq 0$

Nếu  $\frac{3(k+11-\sqrt{k^2+10k+49})}{2(k+6)} \leq q \leq 3$  thì  $\Delta = B^2 - 4AC = -9(q-3)^2(2q-9)^2$

$$(48q^3 + 24kq^3 + 4k^2q^3 - 144kq^2 - 468q^2 - 9k^2q^2 + 162kq + 1296q - 719)$$

Tìm được  $k_{\max} = 3\sqrt[3]{4} - 2$ , đây là giá trị cần tìm..

**Ví dụ 6.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + k(a+b+c) \geq 3(k+1) \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \quad (*)$$

**Chứng minh**

Ta có

$$2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} = \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2}{a} \right) + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2}{a} \right) = \frac{\sum_{\text{cyc}} a^3(b+c)}{abc} + \frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Do đó  $(*) \Leftrightarrow 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + 2k(a+b+c) \geq 6(k+1) \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{cyc}} a^3(b+c)}{abc} + 2k(a+b+c) - 6(k+1) \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\frac{p^2q - 2q^2 - pr}{r} + 2kp - 6(k+1) \frac{p^2 - 2q}{p} \geq \frac{p\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[ (p^2q - 2q^2 - pr)p + 2kp^2r - 6(k+1)r(p^2 - 2q) \right]^2$$

$$- p^4(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \geq 0$$

Tương tự, giả sử  $p = 3$ , sau khi khai triển ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 72kq^2 + 36k^2q^2 + 324k^2 - 378q + 1134k - 594kq - 216k^2q + 36q^2 + 1539$$

$$B = 2187 - 486kq + 270kq^2 - 36kq^3 - 1944q + 351q^2 - 36q^3$$

$$C = 9q^4$$

Nghiệm  $q_0$  của phương trình  $B = 0$  thỏa mãn  $q_0 \in [0, 3]$  là

$$q_0 = \frac{1}{4(1+k)} \left( \sqrt[3]{M} + \frac{28k^2 - 100k - 119}{\sqrt[3]{M}} + 10k + 13 \right)$$

$$\text{Với } \begin{cases} M = -1475 - 2382k - 960k^2 - 80k^3 + 36\sqrt{N} + 36k\sqrt{N} \\ N = -12k^4 + 324k^3 - 63k^2 + 2742k + 2979 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp:

Nếu  $0 \leq q \leq q_0$  thì  $B \geq 0$ , ta có thể chứng minh rằng  $A$  và  $C$  không âm, vì vậy  $f(f) \geq 0$

Nếu  $q_0 \leq q \leq 3$  thì

$$\Delta = B^2 - 4AC = -729(q-3)^2(16q^3 + 16k^2q^3 + 32kq^3 - 252kq^2 - 189q^2 - 36k^2q^2 + 324kq + 810q - 729)$$

Tìm được  $k_{\max} \approx 1,5855400068$ , đây là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 7.** Xác định hằng số thực lớn nhất  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq \frac{(9+3k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \right) + 2k &\geq \frac{6(3+k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{sym}} a^2(b+c)}{abc} + 2k - \frac{6(3+k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

Ta chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức trên ở dạng

$$\frac{pq-3r}{r} + 2k - \frac{6(3+k)(p^2-2q)}{p^2} \geq \frac{\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[ (pq-3r)p^2 + 2kp^2r - 6(3+k)(p^2-2q)r \right]^2 - (p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r)p^4 \geq 0$$

Giả sử rằng  $p = 3$ , sau khi khai triển ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 144k^2q^2 + 864kq^2 + 1296k^2 + 13608q + 13608k + 1296q^2 - 864k^2q - 7128kq + 37098$$

$$B = 162kq^2 - 486kq - 3645q + 486q^2 + 2187$$

$$C = 81q^3$$

Xét hai trường hợp:

Nếu  $0 \leq q \leq \frac{3(15+2k-\sqrt{153+36k+4k^2})}{4(3+k)}$  thì  $B$  không âm, tương tự ví dụ trước ta có thể chứng

minh rằng  $A \geq 0, C \geq 0$ , nhận được  $f(r) \geq 0$



Nếu  $\frac{3(15+2k-\sqrt{153+36k+4k^2})}{4(3+k)} \leq q \leq 3$  ta có  $\Delta = B^2 - 4AC = -729(q-3)^2$

$$(16k^2q^3 + 96kq^3 + 144q^3 - 36k^2q^2 - 972q^2 - 432kq^2 + 324kq + 1944q - 729)$$

Vì vậy tìm được  $k_{\max} = 3\sqrt[3]{2} - 3$ , đây là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 8.** Tìm giá trị lớn nhất của hằng số  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{k(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} - k + 3$$

**Giải**

Nhân cả hai vế bất đẳng thức với 2 ta có:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} \right) &\geq \frac{2k(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} - 2k + 6 + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{\text{sym}} a^2(b+c)}{abc} - \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + 2k - 6 &\geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

Chỉ cần xét trường hợp  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$\begin{aligned} \frac{pq-3r}{r} - \frac{2k(p^2-2q)}{q} + 2k - 6 &= \frac{\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3r}}{r} \\ \Leftrightarrow f(r) &= [(pq-3r)q - 2kr(p^2-2q) + (2k-6)rq]^2 \\ &\quad - q^2(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3r) \geq 0 \end{aligned}$$

Giả sử  $p = 3$ , khai triển ta thu được  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 9k^2q^2 - 54k^2q + 81k^2 - 27kq^2 + 81kq + 27q^2$$

$$B = kq^3 - 27q^3 + 27q^2 - 27kq^2$$

$$C = q^5$$

Vì vậy tìm được  $k_{\max} = 1$ , đây là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 9.** Tìm tất cả các số thực  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực  $a, b, c$ :

$$a(a+kb)^3 + b(b+kc)^3 + c(c+ka)^3 \geq \frac{(k+1)^3}{27}(a+b+c)^4 \quad (*)$$

Giải

Nếu  $p = 0$  thì  $(*) \Leftrightarrow -(b^2 + bc + c^2)^2 (k - 2)k^2 - k + 1 \geq 0$ .

Vì vậy điều kiện cần là  $k \leq 2$

Xét trường hợp  $p \neq 0$ , không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 3$ . Nhận thấy

$$\begin{aligned} 6k \sum_{cyc} a^3 b + 2k^3 \sum_{cyc} ab^3 &= 3k \left( \sum_{cyc} a^3 b + \sum_{cyc} ab^3 \right) + k^3 \left( \sum_{cyc} ab^3 + \sum_{cyc} a^3 b \right) + \\ &+ 3k \left( \sum_{cyc} a^3 b - \sum_{cyc} ab^3 \right) + k^3 \left( \sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^3 b \right) \end{aligned}$$

$$= (k^3 + 3k) \sum_{sym} a^3 (b + c) + k(k^2 - 3)(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\text{Vì vậy ta có } (*) \Leftrightarrow 2 \sum_{sym} a^4 + 6k \sum_{cyc} a^3 b + 2k^3 \sum_{cyc} ab^3 + 6k^2 \sum_{sym} b^2 c^2 \geq \frac{2(k+1)^3}{27} (a+b+c)^4$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2 \sum_{sym} a^4 + (k^3 + 3k) \sum_{sym} a^3 (b + c) + 6k^2 \sum_{sym} b^2 c^2 - \frac{2(k+1)^3}{27} (a+b+c)^4 \geq \\ \geq k(k^2 - 3)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

Chỉ cần xét trường hợp  $VP \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} &2(p^4 + 2q^2 + 4pr - 4p^2 q) + 3k(p^2 q - 2q^2 - pr) + k^3(p^2 q - 2q^2 - pr) + 6k^2(q^2 - 2pr) - \frac{2(k+1)^3 p^4}{27} \\ &\geq k(k^2 - 3)p\sqrt{p^2 q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3 r} \end{aligned}$$

Bình phương hai vế, thay  $p$  bởi 3, sau khi khai triển ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó:

$$A = 63k^6 + 54k^5 - 27k^4 + 126k^3 + 135k^2 - 108k + 144$$

$$B = 1872 - 918k + 99k^3 - 756k^2 + 27k^5 q^2 + 48q^2 -$$

$$-864q - 90kq^2 + 51k^3 q^2 + 27k^2 q^2 - 1080k^4 + 252k^6$$

$$+ 135k^5 + 648kq - 270k^3 q + 81kq^2 - 90k^4 q^2 + 648k^4 q + 3k^6 q^2 - 135k^6 q - 162k^5 q$$

$$C = 6084 - 1476kq^2 - 492k^3 q^2 + 486k^2 q^2 + 2754kq + 675k^3 q +$$

$$+ 405qk^2 + 225k^4 q^2 - 162k^4 q + 6k^6 q^2$$

$$- 27k^6 q - 81k^5 q - 1404k - 306k^3 - 1323k^2 + 135k^4 + 9k^6 + 54k^5 - 5616q + 1608q^2 + 27k^5 q^3$$

$$- 12q^4 k - 22q^4 k^3 + 21q^4 k^2 + 15k^4 q^4 + k^6 q^4 - 6k^5 q^4 - 216k^2 q^3 - 108k^4 q^3 + 270q^3 k + 171q^3 k^3 - 144q^3 + 4q^4$$

Để dàng chứng minh rằng  $A$  dương. Ta có:

$$\Delta = B^2 - 4AC = -81k^2(q-3)^2(k^2-3)^2 \left[ (3k^6 - 18k^5 + 45k^4 - 66k^3 + 63k^2 - 36k + 12)q^2 + \right. \\ \left. (28k^6 + 78k^5 - 17k^4 + 326k^3 - 372k^2 + 276k - 152)q - 84k^6 - 72k^5 + 274k^4 - 168k^3 + 792k^2 + 144k + 780 \right]$$

suy ra điều kiện đủ của  $k$  là

$$(16k^4 - 5k^3 + 30k^2 - 14k - 56) \leq 0 \Leftrightarrow -0.9377079399 \leq k \leq 1.233289162$$

**Ví dụ 10.** Xác định hằng số lớn nhất  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$ :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với:  $3kabc + \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) (ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 6kabc + \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) \left( \sum_{\text{cyc}} ab^2 + \sum_{\text{cyc}} a^2b \right) \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) \left( \sum_{\text{cyc}} a^2b - \sum_{\text{cyc}} ab^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) \sum_{\text{sym}} a^2(b+c) \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 - k \right) (a-b)(b-c)(c-a)$$

Xét trường hợp  $VP \geq 0$ , viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$6kr + \left( \frac{p^2 - 2q}{q} - 1 - k \right) (pq - 3r) \geq \left( \frac{p^2 - 2q}{q} - 1 - k \right) \sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = [6kqr + (p^2 - (k+3)q)(pq - 3r)]^2 -$$

$$(p^2 - (k+3)q)^2 (p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 1$ . Sau khi khai triển ta có  $f(x) = Ar^2 + Br + C$ . Trong đó

$$A = 108q^2k^2 + 324q^2k + 324q^2 - 108qk - 216q + 36$$

$$B = -36k^2q^3 - 180q^3k - 216q^3 + 4q^2k^2 + 84q^2k + 180q^2 - 8qk - 48q + 4$$

$$C = 4q^3(qk + 3q - 1)^2$$

$$\Delta = 16(3q - 1)^2(qk + 3q - 1)^2(12k^2q^3 + 36q^3k + 36q^3 - q^2k^2 - 24q^2k - 36q^2 + 2qk + 12q - 1)$$

Tìm được  $k_{\max} = k_o \approx 0.8493557485$ , đây là giá trị cần tìm.

+) Tương tự với bất đẳng thức: 
$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + k \frac{3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

**Ví dụ 11.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + k \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 1$ . Tương tự với ví dụ trước, sau khi biến đổi ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} 2 \frac{3(p^2 - 2q)}{p^2} + \frac{k(p^2q - 2q^2 - pr)}{q^2 - 2pr} - 2 - 2k &\geq \frac{kp\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}}{q^2 - 2pr} \\ \Leftrightarrow 2(3 - 6q) + \frac{k(q - 2q^2 - r)}{q^2 - 2pr} - 2 - 2k &\geq \frac{k\sqrt{q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r}}{q^2 - 2r} \\ \Leftrightarrow [2(3 - 6q)(q^2 - 2r) + k(q - 2q^2 - r) - 2(k + 1)(q^2 - 2r)]^2 &\geq k^2(q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r) \\ \Leftrightarrow f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) &\geq 0 \end{aligned}$$

Trong đó:

$$A = 144q^2 + 36qk - 96q + 9k^2 - 12k + 16$$

$$B = -144q^4 - 66q^3k + 96q^3 - 6q^2k^2 + 34q^2k - 16q^2 - 3qk^2 - 4qk + k^2$$

$$C = q^3(36q^3 + 24q^2k - 24q^2 + 4qk^2 + 2k - 14qk + 4q - k^2)$$

$$\text{Ta có: } \Delta = -k^2(3q - 1)^2(108q^4 + 72q^3k - 80q^3 + 16q^3 - 44q^2k + 12q^2k^2 + 8qk - k^2)$$

$$\text{Tìm được } k_{\max} = k_0 \approx 1.424183337$$

$$\text{+) Tương tự với bất đẳng thức: } \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} + k \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^3b + b^3c + c^3a} \geq 1 + k$$

**Ví dụ 12.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ . Sau khi biến đổi, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$(1 - 3q)^2(q - 3r)^2 \geq [1 - (2k + 3)q]^2(q^2 + 8qr - 27r^2 - 4q^3 - 3p^3r)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0. \text{ Trong đó:}$$

$$A = 27q^2k^2 + 81q^2k + 81q^2 - 27qk - 54q + 9$$

$$B = -18q^3k^2 - 54q^3k - 54q^3 + 4q^2k^2 + 30q^2k + 45q^2 - 4qk - 12q + 1$$

$$C = q^3(4q^2k^2 + 12q^2k + 9q^2 - qk^2 - 7qk - 6q + k + 1)$$

Nhận thấy::

$$\Delta = -(3q-1)^2(3q-1+2qk)^2(12q^3k^2 + 36q^3k + 36q^3 - 4q^2k^2 - 24q^2k - 36q^2 + 4qk + 12q - 1)$$

$$\text{Tìm được } k_{\max} = k_0 = \frac{9\sqrt[3]{3}}{8} + \frac{3\sqrt[3]{9}}{8} + \frac{3}{8} \approx 2.777562200$$

+) Dưới đây là một số bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{ab^3 + bc^3 + ca^3} \geq 1 + k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{ab^4 + bc^4 + ca^4} \geq 1 + k$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + k \frac{a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2}{a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3} \geq 1 + k$$

**Ví dụ 13.** Cho các số thực không âm  $a, b, c$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây

$$\text{đúng: } \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2} \geq 1 + k$$

**Giải**

Bất đẳng thức tương đương với:

$$k \sum_{\text{sym}} a^4(b+c) + \left[ \frac{3 \sum_{\text{sym}} a^2}{\left( \sum_{\text{sym}} \right)^2} - 1 - k \right] \sum_{\text{sym}} a^3(b^2 + c^2) \geq$$

$$\geq \left[ \left( \frac{3 \sum_{\text{sym}} a^2}{\left( \sum_{\text{sym}} \right)^2} - 1 - k \right) \sum_{\text{sym}} bc - k \left( \sum_{\text{sym}} a^2 + \sum_{\text{sym}} bc \right) \right] \prod_{a \neq b} (a-b)$$

Chỉ cần xét trường hợp  $VP \geq 0$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $p = 1$ , viết lại bất đẳng thức:

$$\left[ k(q - 3q^3 + 5qr - r) + (2 - 6q - k)(q^2 - qr - 2r) \right]^2 \geq$$

$$\geq (2 - 6q^2 - k)^2 (q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$$

Trong đó:

$$A = 252q^4 + 18kq^3 - 132q^3 + 9k^2q^2 + 114q^2k + 40q^2 + 3qk^2 - 34qk - 20q + 7k^2 - 2k + 4$$

$$B = -180q^5 - 30kq^4 + 120q^4 - 12k^2q^3 - 68kq^3 - 20q^3 + k^2q^2 + 44q^2k - 4qk^2 - 6qk + k^2$$

$$C = q^3(36q^4 - 24q^3 + 24q^2k + 4q^2 + 4qk^2 - 14qk - k^2 + 2k)$$

Ta có:

$$\Delta = -(3q-1)^2(k-2q+6q^2)^2(112q^5 + 8kq^4 - 84q^4 + 4k^2q^3 + 60kq^3 + 16q^3 + 3k^2q^2 - 44q^2k + 2qk^2 + 8qk - k^2)$$

Tìm được  $k_{\max} = k_0 \approx 0.89985123$

+) Sau đây là một số bất đẳng thức cùng dạng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k \frac{a^4b+b^4c+c^4a}{a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3} \geq 1+k$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k \frac{a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3}{a^4b+b^4c+c^4a} \geq 1+k$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k \frac{a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2}{a^4b+b^4c+c^4a} \geq 1+k$$

**Chú ý.** Trong bốn ví dụ trước có thể thay  $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$  bởi  $\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$  hoặc dạng như vậy để thu được những bất đẳng thức mới tương tự.

**Ví dụ 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$ , tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + k(ab+bc+ca) \geq k(k+1)(a^2+b^2+c^2)$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ , tương tự với ví dụ trước ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0$ . Trong đó

$$A = 9q^2k^2 + 27q^2k + 27q^2 - 6qk^2 - 27q - 18qk + k^2 + 3k + 9$$

$$B = -9q^3k - 18q^3 + 6q^2k + 19q^2 - qk - 8q + 1; C = q^5$$

$$\text{Nhận thấy } \Delta = -3(3q-1)^2(q-1)^2(4q^3k^2 + 12q^3k + 12q^3 - q^2k^2 - 12q^2k - 16q^2 + 2qk + 8q - 1)$$

$$\text{Tìm được } k_{\max} = k_0 = \frac{\sqrt[3]{1828+372\sqrt{93}}}{6} - \frac{106}{3\sqrt[3]{1828+372\sqrt{93}}} + \frac{5}{3} \approx 2.581412182$$

**Ví dụ 15.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$3k \frac{a^4b+b^4c+c^4a}{ab+bc+ca} + a^2+b^2+c^2 \geq (k+1)(ab+bc+ca)$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ , tương tự ví dụ trước ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$  trong đó

$$A = 108k^2q^2 + 81q^2 - 108k^2q + 108kq - 54q + 63k^2 - 36k + 9$$

$$B = -108k^2q^3 - 18kq^3 - 54q^3 + 100k^2q^2 - 69kq^2 + 45q^2 - 57k^2q - 43kq + 112q + 9k^2 - 6k$$

$$C = q^2(4k^2q^3 - 12kq^3 + 9q^3 + 12k^2q^2 + 40kq^2 - 6q^2 - 3k^2q - 21kq + q + 3k)$$

$$\text{Ta có } \Delta = -(3q-1)^2(-3q+1+2kq-3k)^2 x$$

$$x(48k^2q^3 + 36q^3 - 52k^2q^2 + 48kq^2 - 36q^2 + 48k^2q - 28kq + 12q - 9k^2 + 6k - 1)$$

$$\text{Vì vậy } k_{\max} = k_0 \approx 7.698078389$$

$$+) \text{ Bất đẳng thức tương tự } 3k \frac{a^4b + b^4c + c^4a}{a^2b + b^2c + c^2a} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Ví dụ 16.** Tìm giá trị lớn nhất của hằng số  $k$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$3k \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{ab + bc + ca} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Giải**

Giả sử  $p = 1$ , tương tự ví dụ trên ta có  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$ . Trong đó

$$A = 63k^2$$

$$B = 12k^2q^2 + 9kq^2 - 45kq^2 - 3kq + 9k^2$$

$$C = q^2(16k^2q^2 + 24kq^2 + 9q^2 - 3kq^2 - 17kq - 6q + 3k + 1)$$

$$\text{Nhận thấy: } \Delta = -27k^2(3q-1)^2(16k^2q^2 + 24kq^2 + 9q^2 + 12kq^2 + 2kq - 3k^2)$$

$$\text{Vì vậy } k_{\min} = k_0 \approx -0.3079785278$$

$$+) \text{ Bất đẳng thức tương tự: } 3k \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a + b + c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq (k+1)(ab + bc + ca)$$

**Ví dụ 17.** Chứng minh bất đẳng thức sau với  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq (3+k) \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^{\frac{2}{3}}$$

**Giải**

Giả sử  $q = 1$ , đặt  $t = \sqrt[3]{p^2 - 2}$ , tương tự ví dụ trước, viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$f(r) = 4(Ar^2 + Br + C) \geq 0. \text{ Trong đó}$$

$$A = (k+3)^2 t^4 - (2k^2 + 3k - 9)t^2 + (k^2 - 3k + 9)$$

$$B = \sqrt{t^3 + 2} [t^3 - (k+3)t^2 + k - 4]$$

$$C = 1$$



Ta có:  $\Delta = (t-1)^2(t^7 - 2t^6k - 4t^6 + t^5k^2 + 2t^5k + 2t^4k^2 + 8t^4k - 2t^4 + t^3k^2 + 12t^3k + 8t^3 - 2t^2k^2 + 4t^2k - 4tk^2 - 8tk - 8t - 2k^2 - 4k - 4)$

Vì vậy  $k_{\max} = k_0 \approx 0.3820494092$ . Bài toán được giải quyết xong

**Mở rộng 1:** Cho  $a, b, c > 0$ , xác định hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^k$$

**Giải**

Tương tự như trên, giả sử  $q = 1$ , đặt  $t = p^2 - 2$ , ta có:  $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$ . Trong đó

$$A = 9(t^{2k} + t^k + 1)$$

$$B = \sqrt{t+2}(t - 3t^k - 4)$$

$$C = 1$$

**Mở rộng 2:** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương, tìm điều kiện cần và đủ của  $k$  và  $t$  sao cho bất đẳng thức

$$\text{sau đúng: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq (3+k) \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^t$$

**Ví dụ 18.** Xác định hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + k(a+b+c) \geq (3+3k) \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

**Giải**

Tương tự các ví dụ trước, giả sử  $p = 1$ , đặt  $t = \sqrt{3-6q}$ , viết lại bất đẳng thức

$$f(r) = Ar^2 + Br + C \geq 0. \text{ Trong đó}$$

$$A = 1296(t^2k^2 + 2t^2k + t^2 - 2k^2t - tk + t + k^2 - k + 7)$$

$$B = 4(18t^5k + 18t^5 - 18t^4k + 9t^4 - 54t^3k - 54t^3 + 54t^2k + 216t^2 - 405)$$

$$C = t^8 - 12t^6 + 54t^4 - 108t^2 + 81$$

Nhận thấy

$$\Delta' = 972(t-1)^2(8t^6l^2 + 16t^6k - t^6 + 60t^5k + 42t^5 - 60t^4k^2 - 60t^4k + 153t^4 - 288t^3k + 36t^3 + 144t^2k^2 - 279t^2 + 324tk - 270t - 108k^2 + 108k - 81)$$

Vì vậy ta tìm được  $k_{\max} = k_0 \approx 4.356328100$

$$\text{+) Bất đẳng thức tổng quát: } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + k(a+b+c) \geq (3+3k) \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^t$$

## III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

**Bài 1.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 3 + k$$

**Bài 2.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq \frac{3}{2} + k$$

**Bài 3.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq k \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \right)$$

**Bài 4.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{(k+1)^3}{8} (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a(a+kb)^3 + b(b+kc)^3 + c(c+ka)^3$$

**Bài 5.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3} (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{3} (a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \geq a(a+b^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3) \\ & \geq \frac{8}{27} (a+b+c)^4 + \frac{1}{125} (a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \end{aligned}$$

**Bài 6.** Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}} + k \frac{3abc}{ab^2 + bc^2 + ca^2} \geq 1 + k$$

+) Chú ý rằng bài toán này khác với ví dụ 10, có thể nhận ra trong các ví dụ 10, 11, 12, 13 khi thay

$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$  bởi  $\left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^t$  hoặc  $\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2}$  ta thu được các bất đẳng thức mới, trong

đó có những bất đẳng thức rất khó

**Bài 7:** Cho các số thực dương  $a, b, c$ , xác định điều kiện cần và đủ của  $k$  và  $t$  sao cho bất đẳng thức

sau đúng  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geq (3+k) \left( \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} \right)^t$

## § 24. NHỮNG BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

### § 24.1. CÁC BÀI TOÁN CÓ NHIỀU LỜI GIẢI

Trong mục này chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức đẹp và có nhiều lời giải. Với lưu ý việc khai thác, mở rộng, tìm tòi một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau là thói quen rất nên được thường xuyên rèn luyện.

**Bài 1.** Cho  $\begin{cases} a > c > 0 \\ b > c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$  (1)

#### Chứng minh

• **Cách 1:** Bình phương hai vế ta có (1)  $\Leftrightarrow \left[ \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \right]^2 \leq (\sqrt{ab})^2$   
 $\Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c(a-c)} \cdot \sqrt{c(b-c)} \leq ab \Leftrightarrow ab + 2c^2 - c(a+b) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \geq 0$   
 $\Leftrightarrow c^2 + (a-c)(b-c) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[ c - \sqrt{(a-c)(b-c)} \right]^2 \geq 0$  (2)

Do (2) đúng nên (1) đúng. Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$

• **Cách 2:** Đặt  $a = c(x+1)$ ;  $b = c(y+1)$  ( $x, y > 0$ ), ta có

(1)  $\Leftrightarrow \sqrt{c^2x} + \sqrt{c^2y} \leq c\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(x+1)(y+1)}$   
 $\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \leq xy + x + y + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq xy + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{xy} - 1)^2$  đúng

• **Cách 3:** (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq 1$ . Sử dụng **AM - GM** ta có

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{c}{b} + \frac{a-c}{a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{a} + \frac{b-c}{b} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a} + \frac{b}{b} \right) = 1$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} = 1 - \frac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{c}{b} + \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$

• **Cách 4:** Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} &= \sqrt{a-c} \sqrt{c} + \sqrt{c} \sqrt{b-c} \leq \\ &\leq \sqrt{[(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2][(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2]} = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b-c}} \Leftrightarrow c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$

• **Cách 5:** Đặt 
$$\begin{cases} \vec{u} = (\sqrt{a-c}, \sqrt{c}) \\ \vec{v} = (\sqrt{c}, \sqrt{b-c}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{a-c+c} = \sqrt{a} \\ |\vec{v}| = \sqrt{c+b-c} = \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}| = \sqrt{ab}$$

• **Cách 6:** Đặt  $y = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \Rightarrow (y - \sqrt{c(a-c)})^2 = c(b-c)$

$$\Leftrightarrow [y^2 + c(a-b)]^2 = (2y\sqrt{c(a-c)})^2 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2c(a-b) + c^2(a-b)^2 = 4y^2ac - 4y^2c^2$$

$$\Leftrightarrow f(c) = [(a-b)^2 + 4y^2]c^2 - 2y^2(a+b)c + y^4 = 0$$

Ta có  $y$  thuộc tập giá trị của hàm số  $\Leftrightarrow f(c) = 0$  có nghiệm  $c$

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4y^4(ab - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq ab \Leftrightarrow y \leq \sqrt{ab} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Cách 7:** Phương pháp lượng giác

$$(1) \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq 1. \text{ Đặt } \begin{cases} c/a = \sin^2 x ; 0 < x < \pi/2 \\ c/b = \sin^2 y ; 0 < y < \pi/2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } T = \sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 y} + \sqrt{\sin^2 y \cdot \cos^2 x} = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x+y) \leq 1$$

• **Cách 8:** Phương pháp hình học

Xét tam giác ABC với độ dài các cạnh là

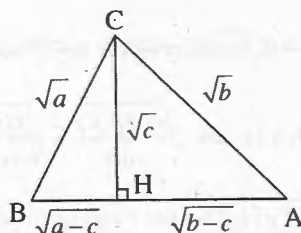
$$CB = \sqrt{a}, CA = \sqrt{b} \text{ và đường cao } CH = \sqrt{c}$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{a-c}; AH = \sqrt{b-c}$$

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = 2S_{CBH} + 2S_{CAH} = 2S_{CAB}$$

$$= \sqrt{a} \sqrt{b} \sin C \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \angle BCA = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$



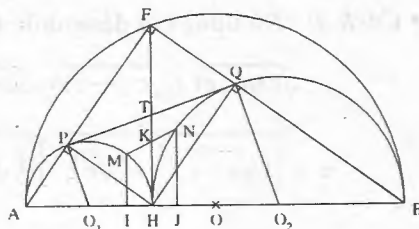
• **Cách 9:** Trên đoạn thẳng AB có độ dài  $a+b$

lấy điểm H sao cho  $HA = a, HB = b$ . Trên các

đoạn thẳng HA, HB, lấy các điểm I, J sao cho  $HI$

$= HJ = c$ . Vẽ các nửa đường tròn đường kính

AB, HA, HB với các tâm là O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>.



Dựng  $HF \perp AB$ ;  $IM \perp HA$ ;  $JN \perp HB$ . Khi đó dễ dàng ta có

$$IM = \sqrt{IA \cdot IH} = \sqrt{c(a-c)}; \quad JN = \sqrt{JH \cdot JB} = \sqrt{c(b-c)}; \quad HF = \sqrt{HA \cdot HB} = \sqrt{ab}$$

Nối  $MN$  cắt  $HF$  tại  $K$ . Nối  $FA$ ,  $FB$  cắt các nửa đường tròn đường kính  $HA$ ,  $HB$  lần lượt tại  $P$ ,  $Q$ . Ta có  $\angle AFH = \angle AFB = \angle HQB = 90^\circ$ . Từ đó suy ra  $FPHQ$  là hình chữ nhật.

Khi đó  $PQ$  và  $HF$  cắt nhau tại  $T$  là trung điểm của mỗi đường. Mặt khác, ta có  $\angle FPQ = \angle FHQ = \angle FBH = \angle BQO_2$ ,  $\angle FPQ = \angle PQH$

$\Rightarrow \angle PQH = \angle BQO_2 \Rightarrow \angle PQO_2 = 90^\circ \Rightarrow O_2Q \perp PQ$ . Tương tự,  $O_1P \perp PQ$ , suy ra  $PQ$  là tiếp tuyến chung ngoài của hai nửa đường tròn đường kính  $HA$ ,  $HB$ .

Từ đó suy ra trong hình thang  $MIJN$  với đường trung bình  $HK$ , ta có

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = IM + JN = 2HK \leq 2HT = HF = \sqrt{ab}$$

|                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Bài 2.</b> Cho <math>\begin{cases} a, b, c &gt; 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}</math>. Tìm giá trị nhỏ nhất <math>S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}</math></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Chứng minh

• **Cách 1:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}} \\ &\geq \sqrt{17 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}} = \sqrt{17} \left[ \sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}} \right] \\ &\geq \sqrt{17} \left[ 3 \cdot \sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}} \right] = 3\sqrt{17} \sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}} \\ &= \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \min S = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 2:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz**:

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a + \frac{4}{b}\right) \\ + &\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(b + \frac{4}{c}\right) \\ &\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(1^2 + 4^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(c + \frac{4}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left( a+b+c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left[ a+b+c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{15}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[ 6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{15}{4} \left( 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \right) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 3 + \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left( 3 + \frac{45}{4} \cdot 2 \right) = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \min S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

• **Cách 3: Bô đề: (Bất đẳng thức Minkowski)**

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2} \quad (1)$$

**Áp dụng:**

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\
&= \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 + \frac{15}{16} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\
&\geq \sqrt{2(a+b+c) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{15}{16} \left( 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right)^2} \\
&\geq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \frac{135}{16} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{abc})^2}} \geq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{135}{16} \cdot \frac{1}{\left( \frac{a+b+c}{3} \right)^2}} \\
&\geq \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{135}{16} \cdot 4} = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{135}{4}} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \min S = \frac{3\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}$$

• **Cách 4: Đặt**  $\overline{u} = \left( a, \frac{1}{b} \right); \overline{v} = \left( b, \frac{1}{c} \right); \overline{w} = \left( c, \frac{1}{a} \right)$

Từ  $|\overline{u}| + |\overline{v}| + |\overline{w}| \geq |\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}|$  dẫn tới:

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\
&\geq \sqrt{(3 \cdot \sqrt[3]{abc})^2 + \left( 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right)^2} = 3 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \\
 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{(abc)^2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{4} + \frac{15}{16} \cdot 4} = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Với  $a=b=c=\frac{1}{2}$  thì  $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

• **Cách 5:**  $S^2 = \left( \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \right)^2 = a^2 + \frac{1}{b^2} + b^2 + \frac{1}{c^2} + c^2 + \frac{1}{a^2}$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)} + 2\sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} + 2\sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)} \\
 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + 2\left[\left(ab + \frac{1}{bc}\right) + \left(bc + \frac{1}{ca}\right) + \left(ca + \frac{1}{ab}\right)\right] \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{15}{16}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \\
 &\quad + 2\left[(ab + bc + ca) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{15}{16}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)\right] \\
 &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{1}{16a^2} \cdot \frac{1}{16b^2} \cdot \frac{1}{16c^2} + \frac{15}{16} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} + \\
 &\quad + 2\left[6 \cdot \sqrt[6]{ab \cdot bc \cdot ca} \cdot \frac{1}{16ab} \cdot \frac{1}{16bc} \cdot \frac{1}{16ca} + \frac{15}{16} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ca}}\right] \\
 &= 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + 2\left[6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\right] = 3\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}\right) \\
 &\geq 3\left(\frac{3}{2} + \frac{45}{16} \cdot 4\right) = \frac{63}{4} \Rightarrow S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Với  $a=b=c=\frac{1}{2}$  thì  $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

• **Cách 6:** Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 3 \cdot \sqrt[6]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \\
 &= 3 \cdot \sqrt[6]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]}
 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** mở rộng ta có:



$$S \geq 3 \cdot \sqrt[6]{\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right] \left[\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right] \left[\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]} \geq 3 \cdot \sqrt{(abc)^{\frac{2}{3}} + (abc)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$\text{Đặt } t = (abc)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 0 \leq t \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Xét } f(t) = t + \frac{1}{t} \text{ với } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} < 0 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \text{ giảm trên } \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{4} \Rightarrow S \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

**Bài 3.** Cho  $\begin{cases} x, y, z \in [0, 1] \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases}$  Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $\cos(x^2 + y^2 + z^2)$

### Chứng minh

• **Cách 1:** Phương pháp hình học

Do  $x, y, z \in [0, 1]$  suy ra  $0 < x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$  và hàm số  $y = \cos \alpha$  giảm trên  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  nên thay vì tìm  $\text{Min} \cos(x^2 + y^2 + z^2)$  ta sẽ tìm  $\text{Max}(x^2 + y^2 + z^2)$ . Xác định hệ trục tọa độ Oxyz.

Tập hợp các điểm  $M(x, y, z)$  thỏa mãn điều kiện  $x, y, z \in [0, 1]$  chạy trên hình hộp cạnh 1 với các đỉnh:  $A(0, 1, 1)$ ;  $B(1, 1, 1)$ ;  $C(1, 0, 1)$ ;  $D(0, 0, 1)$ ;  $A'(0, 1, 0)$ ;  $B'(1, 1, 0)$ ;  $C'(1, 0, 0)$ ;  $D'(0, 0, 0)$ . Tập hợp các điểm

$$M(x, y, z) \text{ thỏa mãn } x + y + z = \frac{3}{2}$$

$$\text{chạy trên mặt phẳng } (P): x + y + z = \frac{3}{2}$$

Vì vậy tập hợp các điểm  $M(x, y, z)$  thỏa mãn

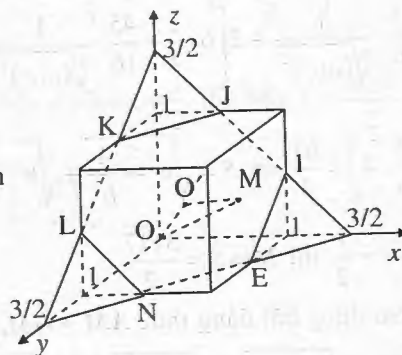
hai điều kiện đề bài là đa giác EIJKN

trong đó các điểm E, I, J, K, L, N

là trung điểm các cạnh hình lập phương.

Gọi  $O'$  là hình chiếu của O trên EIJKN. Ta có  $O'$  là vừa là tâm của hình lập phương vừa là tâm của lục giác đều EIJKN.

Mặt khác  $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$  vì vậy OM là cực đại khi và chỉ khi  $O'M$  là cực đại, hay khi và chỉ khi M trùng với I trong sáu đỉnh E, I, J, K, L, N.



Dẫn tới  $x^2 + y^2 + z^2 \leq OK^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos(x^2 + y^2 + z^2) \geq \cos \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \min \cos(x^2 + y^2 + z^2) = \cos \frac{5}{4}$ , đạt được khi  $(x, y, z)$  là hoán vị của  $(1, 0, \frac{1}{2})$ .

• **Cách 2:** Phương pháp tam thức bậc hai

Do  $x, y, z \in [0, 1]$  suy ra  $0 < x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$  và hàm số  $y = \cos \alpha$  giảm trên  $(0, \frac{\pi}{2})$  nên thay vì tìm  $\min \cos(x^2 + y^2 + z^2)$  ta sẽ tìm  $\max(x^2 + y^2 + z^2)$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $z = \max\{x, y, z\} \Rightarrow z \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Khi đó  $x + y = \frac{3}{2} - z$  và suy ra  $S = x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y)^2 + z^2 = (\frac{3}{2} - z)^2 + z^2 = \frac{9}{4} - 3z + 2z^2 = f(z)$

Đồ thị  $y = f(z)$  là parabol với hệ số tam thức  $a = 2 > 0$

Vì vậy  $\max_{z \in [\frac{1}{2}, 1]} f(z) = \max\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{5}{4}$ . Dẫn tới  $\max S = \frac{5}{4}$

Với  $(x, y, z)$  là hoán vị của  $(1, 0, \frac{1}{2})$  thì  $\min \cos(x^2 + y^2 + z^2) = \cos \frac{5}{4}$ .

**Bài 4.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $T = a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$  (1)

(IMO24 – France 1983)

### Chứng minh

• **Cách 1:** Cách giải đặc biệt biệt ngắn gọn

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a = \max(a, b, c)$  thì

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) = a(b + c - a)(b - c)^2 + b(a - b)(a - c)(a + b - c) \geq 0$$

• **Cách 2:** Cách giải của tác giả bài toán

$$T = \frac{1}{2}[(a - b)^2(b + c - a)(b - c + a) + (b - c)^2(c + a - b)(c - a + b) + (c - a)^2(a + b - c)(a - b + c)] \geq 0$$

• **Cách 3:** Sử dụng bất đẳng thức hoán vị

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c, \text{ dễ dàng chứng minh } \begin{cases} bc \leq ac \leq ab \\ a^2 + bc \geq b^2 + ac \geq c^2 + ab \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị với hai dãy trên ta có

$$bc(a^2 + bc) + ac(b^2 + ac) + ab(c^2 + ab) \leq bc(b^2 + ac) + ac(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

• **Cách 4:** (Cách của đội US)

Giả sử tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $\Delta ABC$

tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  at  $M, N, P$ .

Đặt  $AN = AP = x > 0, BP = BM = y > 0,$

$CM = CN = z > 0$ , thì

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y \text{ và}$$

bất đẳng thức trở thành  $xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x + y + z) \geq 0$

$$\Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z) \Leftrightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x + y + z$$

$$\text{Ta có: } (z + x + y) \left( \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \right) \geq (x + y + z)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x + y + z$$

• **Cách 5:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Ta có bất đẳng thức

$$a^2b(a - b) + a^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 \left(\frac{b}{c}\right) \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \left(\frac{b}{c} - 1\right) + \left(\frac{a}{c}\right) \left(1 - \frac{a}{c}\right) \geq 0$$

Đặt  $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c} \Rightarrow x \geq y \geq 1$ . Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$x^3y - x^2y^2 + y^3 - y^2 + x - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = yx^3 - (y^2 + 1)x^2 + x + y^3 - y^2 \geq 0. \text{ Ta có } f'(x) = 3yx^2 - 2(y^2 + 1)x + 1$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2[3yx - (y^2 + 1)] \geq 2[3y^2 - (y^2 + 1)] = 2(y^2 - 1) \geq 0 \quad \forall y \geq 1$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ giảm trên } [y, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq f'(y) = y^3 - 2y + 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) \geq 0$$

$$\text{Đến tới } f(x) \text{ giảm trên } [y, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(y) = y(y - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{q.e.d.})$$

• **Mở rộng 1:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  với độ dài ba cạnh là  $a, b, c$  và  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Khi đó: } a^n b(a - b) + b^n c(b - c) + c^n a(c - a) \geq 0$$

**Chứng minh**

Sử dụng quy nạp: với  $n = 2$  ta có:  $a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$

Giả sử bất đẳng thức đúng tới  $n$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ .

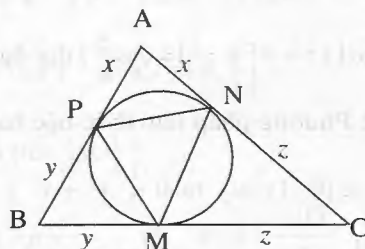
Theo giả thiết quy nạp:  $a^n b(a - b) + b^n c(b - c) + c^n a(c - a) \geq 0$

$$\Rightarrow b^n c(b - c) \geq -a^n b(a - b) - c^n a(c - a) \Rightarrow b^{n+1} c(b - c) \geq -a^n b^2(a - b) - c^n ab(c - a)$$

$$\Rightarrow a^{n+1} b(a - b) + b^{n+1} c(b - c) + c^{n+1} a(c - a) \geq a^{n+1} b(a - b) - a^n b^2(a - b) - c^n ab(c - a) + c^{n+1} a(c - a)$$

$$= a^n b(a - b)^2 + c^n a(c - a)(c - b) \geq 0$$

Áp dụng nguyên lý quy nạp suy ra điều phải chứng minh.



• **Mở rộng 2:** Cho  $a, b, c > 0$  và  $\text{Min}(a, b, c) \geq \frac{1}{4} \text{Max}(a, b, c)$ . Chứng minh rằng:

$$T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

**Chứng minh**

$$T = (a-b)^2(ab+bc-ca) + (b-c)^2(bc+ca-ab) + (c-a)^2(ca+ab-bc)$$

**Trường hợp 1:** Nếu  $a \geq b \geq c$  thì ta có:

$$T = (a-b)^2(ab+bc-ca) + ca[(b-c)^2 + (c-a)^2] + b(a-c)[(a-c)^2 - (b-c)^2] \geq 0$$

**Trường hợp 2:** Nếu  $a \geq c \geq b$  thì ta có  $b = \text{Min}(a, b, c) \geq \frac{1}{4}a \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c}} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 1 \Rightarrow$

$\sqrt{bc} + \sqrt{ab} \geq \sqrt{ac} \Rightarrow \sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Đặt

$\sqrt{ab} = x + y; \sqrt{bc} = y + z; \sqrt{ca} = z + x$  ( $x, y, z > 0$ ). Ta có:

$$\begin{aligned} T &= (a-b)^2(ab+bc-ca) + (b-c)^2(bc+ca-ab) + (c-a)^2(ca+ab-bc) \\ &= (a-b)^2(y^2 + yx + yz - xz) + (b-c)^2(z^2 + zx + zy - xy) + (c-a)^2(x^2 + xy + xz - yz) \end{aligned}$$

Do  $a \geq c \geq b \Rightarrow x \geq z \geq y$ . Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$(a-c)^2 x^2 + (b-c)^2 z^2 \geq 2|(a-c)(b-c)|xz = 2(a-c)(c-b)xz \quad (1)$$

$$[(a-c)^2 + (b-c)^2 - (a-b)^2]xz = -2(a-c)(c-b)xz \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &(a-b)^2(y^2 + yx + yz) + (b-c)^2(zy - xy) + (c-a)^2(xy - yz) \\ &= y(a-b)[(2x+y)(a-c) + (2z+y)(c-b)] \geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được:  $T \geq 0$  (đpcm.)

• **Mở rộng 3:** Cho  $a, b, c > 0$  và  $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$  (1)

**Chứng minh**

**Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

$$1. A_1 + A_2 > 0 \vee A_2 + A_3 > 0 \vee A_3 + A_1 > 0$$

$$2. A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 \geq 0$$

Ta có bất đẳng thức  $A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$

**Áp dụng:**

$$T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3$$

$$T = abc \left[ \left( \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \right) - \left( \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \right]$$

Sử dụng công thức  $\frac{x^2}{y} = \frac{x^2 - (x-y)^2}{y} + \frac{(x-y)^2}{y} = 2x - y + \frac{(x-y)^2}{y}$ , ta có:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} = a + b + c + \frac{(a-b)^2}{a} + \frac{(b-c)^2}{b} + \frac{(c-a)^2}{c}$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{a^2(b^2 + c^2) + b^2(c^2 + a^2) + c^2(a^2 + b^2)}{2abc}$$

$$= a + b + c + \frac{1}{2} \left[ \frac{c(a-b)^2}{ab} + \frac{b(c-a)^2}{ca} + \frac{a(b-c)^2}{bc} \right]$$

$$T = abc \left[ \frac{(a-b)^2}{a} + \frac{(b-c)^2}{b} + \frac{(c-a)^2}{c} - \frac{1}{2} \left( \frac{c(a-b)^2}{ab} + \frac{a(b-c)^2}{bc} + \frac{b(c-a)^2}{ca} \right) \right]$$

$$T = (a-b)^2 \left( bc - \frac{c^2}{2} \right) + (b-c)^2 \left( ca - \frac{a^2}{2} \right) + (c-a)^2 \left( ab - \frac{b^2}{2} \right)$$

$$2T = (a-b)^2 (2bc - c^2) + (b-c)^2 (2ca - a^2) + (c-a)^2 (2ab - b^2)$$

$$2T = (a-b)^2 (ab + bc - ca) + (b-c)^2 (bc + ca - ab) + (c-a)^2 (ca + ab - bc)$$

$$\text{Đặt } A_1 = bc + ac - ab; A_2 = ac + ab - bc; A_3 = ab + bc - ca$$

$\Rightarrow A_1 + A_2 = 2ac > 0; A_2 + A_3 = 2ab > 0; A_3 + A_1 = 2bc > 0$ . Mặt khác, đặt  $u = bc; v = ca; w = ab \Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{bc}; \sqrt{v} = \sqrt{ca}; \sqrt{w} = \sqrt{ab}$ , khi đó

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 = (u + v - w)(v + w - u) + (v + w - u)(w + u - v) + (w + u - v)(u + v - w)$$

$$= u^2 - (v - w)^2 + v^2 - (w - u)^2 + w^2 - (u - v)^2 = 2(uv + vw + wu) - (u^2 + v^2 + w^2)$$

$$= 4uv - (u + v - w)^2 = (2\sqrt{uv} + u + v - w)(2\sqrt{uv} - u - v + w)$$

$$= (\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})(\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w})(\sqrt{v} + \sqrt{w} - \sqrt{u})(\sqrt{w} + \sqrt{u} - \sqrt{v}) > 0 \quad (3)$$

Vì  $\sqrt{u}, \sqrt{v}, \sqrt{w}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác, (3) đúng.

Sử dụng **Bổ đề** ta có (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng. (đpcm)

**Bài toán 5.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$

Chứng minh rằng:  $T = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$

(IMO41 - Korea 2000)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:** Bô đề:  $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

**Áp dụng:**  $\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{b}+1-a\right) \leq a \cdot 1 \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$$\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)b\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+1-a\right)\frac{1}{a} \leq 1 \Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)(ab+b-1)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}-1\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow T = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

• **Chứng minh 2:** Giả sử giữa ba biểu thức  $\left(a-1+\frac{1}{b}\right); \left(b-1+\frac{1}{c}\right); \left(c-1+\frac{1}{a}\right)$  có một biểu thức không âm, chẳng hạn:  $a-1+\frac{1}{b} < 0 \Rightarrow a-1 < 0; \frac{1}{b} < 1$

$$\Rightarrow a < 1 \text{ và } b > 1 \Rightarrow b-1+\frac{1}{c} > 0 \text{ và } c-1+\frac{1}{a} = c+\frac{1-a}{a} > 0 \Rightarrow T < 0 < 1 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Giả sử  $\left(a-1+\frac{1}{b}\right) \geq 0; \left(b-1+\frac{1}{c}\right) \geq 0; \left(c-1+\frac{1}{a}\right) \geq 0$ . Thì,

$$\begin{aligned} & \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right) = b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{b}+a\right) = b\left[a^2 - \left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right] \leq ba^2 \\ & \times \left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{c}+b\right) = c\left[b^2 - \left(1-\frac{1}{c}\right)^2\right] \leq cb^2 \\ & \left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right) = a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}+c\right) = a\left[c^2 - \left(1-\frac{1}{a}\right)^2\right] \leq ac^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)^2 \left(b-1+\frac{1}{c}\right)^2 \left(c-1+\frac{1}{a}\right)^2 \leq a^3 b^3 c^3 \Leftrightarrow T = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

• **Chứng minh 4:** Vì  $abc = 1$  nên trong ba số  $a, b, c$  phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq 1 \geq b$ . Ta có

$$1 - \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}-2\right) + \frac{(a-1)(1-b)}{a} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 5:** Viết lại bất đẳng thức dưới dạng đồng bậc

$$\left(a - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}{b}\right) \left(b - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}{c}\right) \left(c - \sqrt[3]{abc} + \frac{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}}{a}\right) \leq abc$$

Đặt  $a = x^3; b = y^3; c = z^3$ , bất đẳng thức trở thành

$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3}\right) \left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3}\right) \left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \leq (xyz)^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 y - y^2 z + z^2 x)(y^2 z - z^2 x + x^2 y)(z^2 x - x^2 y + y^2 z) \leq (xyz)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x^2y)^3 + 3(x^2y)(y^2z)(z^2x) \geq \sum_{cyc} (x^2y)(y^2z)(x^2y + y^2z) \quad (1)$$

Lại đặt  $m = x^2y$ ;  $n = y^2z$ ;  $p = z^2x$  thì bất đẳng thức (1) có dạng

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ , đúng theo bất đẳng thức **Schur** (đpcm)

• **Chứng minh 6:** Sử dụng giả thiết  $abc = 1$  ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left( a - 1 + \frac{1}{b} \right) + c \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right) &= 2 & ; \frac{1}{b} \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right) + a \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right) &= 2 \\ ; \frac{1}{c} \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right) + b \left( a - 1 + \frac{1}{b} \right) &= 2 \end{aligned}$$

Đặt  $x = \left( a - 1 + \frac{1}{b} \right)$ ;  $y = \left( b - 1 + \frac{1}{c} \right)$ ;  $z = \left( c - 1 + \frac{1}{a} \right)$ , ta chỉ cần xét  $x, y, z \geq 0$ . Theo **AM**

- **GM** ta có  $2 = \frac{1}{a}x + cy \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}xy} \Rightarrow xy \leq \frac{a}{c}$ . Chứng minh tương tự  $yz \leq \frac{b}{a}$  và  $zx \leq \frac{c}{b}$ .

Vậy  $(xyz)^2 \leq \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = 1 \Rightarrow xyz \leq 1$  (đpcm)

• **Chứng minh 7:** Đặt  $a = \frac{x}{y}$ ,  $b = \frac{y}{z}$ ,  $c = \frac{z}{x}$  với  $x, y, z > 0$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\left( \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - 1 \right) \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 1 \right) \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - 1 \right) \leq 1 \Leftrightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau với trường hợp không tầm thường  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad (1)$$

• **Chứng minh 7a:** Ba nhân tử ở vế trái của (1) đều lớn hơn hay bằng 0,

sử dụng **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(a+c-b)(b+a-c)} \leq \frac{(a+c-b) + (b+a-c)}{2} = a \\ \times &\sqrt{(b+a-c)(c+b-a)} \leq \frac{(b+a-c) + (c+b-a)}{2} = b \\ &\sqrt{(a+c-b)(c+b-a)} \leq \frac{(a+c-b) + (c+b-a)}{2} = c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ .



• **Chứng minh 7b:** Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tồn tại các số  $m, n, p > 0$  thỏa mãn  $a = m + n, b = n + p, c = p + m$ . Khi đó bất đẳng thức trở thành  $(m + n)(n + p)(p + m) \geq 8mnp$ . Ta có

$$(m + n)(n + p)(p + m) - 8mnp = m(n - p)^2 + n(p - m)^2 + p(m - n)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 7c:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ , khi đó viết bất đẳng thức (1) dưới dạng sau  $a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0 \quad (2)$$

Do bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

• **Chứng minh 7d:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Nếu hai trong ba số  $a, b, c$  bằng nhau thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng. Xét trường hợp  $a > b > c$ , khi

đó bất đẳng thức (2) tương đương với  $\frac{a}{b - c} - \frac{b}{a - c} + \frac{c}{a - b} \geq 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì  $\frac{c}{a - b} > 0$  và  $\begin{cases} a > b > 0 \\ a - c > b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b - c} > \frac{b}{a - c}$ .

• **Chứng minh 7e:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \leq b \leq c$ . Đặt  $b = a + x; c = a + y$  thì  $x, y \geq 0$ . Bất đẳng thức (2) trở thành  $(x^2 - xy + y^2)a + (x - y)^2(x + y) \geq 0$  luôn đúng (đpcm).

• **Chứng minh 7f:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$  và đặt

$$f(a, b, c) = a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b)$$

$$\text{Ta có } f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = (a - b)^2 \left(a + b - \frac{5c}{4}\right) \geq 0$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = c \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 7g:** Biến đổi bất đẳng thức (1) về dạng

$$3abc \geq a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}. \text{ Giả sử } BC = a, CA = b, AB = c \text{ thì bất đẳng thức này trở thành } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}, \text{ luôn đúng với mọi tam giác } ABC.$$

• **Mở rộng 1:** Cho  $a, b, c, t > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$T = \left(a - t + \frac{1}{b}\right) \left(b - t + \frac{1}{c}\right) \left(c - t + \frac{1}{a}\right) \leq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) (1 - t^2) + 4 - 3t.$$

• **Mở rộng 2:** Cho  $a, b, c$  là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\geq 3$$

**Bài toán 6.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc} \quad (1)$$

(Hungarian Mathematical Olympiad 2003)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:**  $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} - \frac{1}{1+abc} + \frac{1}{b(1+c)} - \frac{1}{1+abc} + \frac{1}{c(1+a)} - \frac{1}{1+abc} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a(bc-1)-(ab-1)}{a(b+1)(abc+1)} + \frac{b(ca-1)-(bc-1)}{b(c+1)(abc+1)} + \frac{c(ab-1)-(ca-1)}{c(a+1)(abc+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab-1)\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a(b+1)}\right) + (bc-1)\left(\frac{1}{b+1} - \frac{1}{b(c+1)}\right) + (ca-1)\left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{c(a+1)}\right)}{abc+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab-1)^2}{a(a+1)(b+1)(abc+1)} + \frac{(bc-1)^2}{b(b+1)(c+1)(abc+1)} + \frac{(ca-1)^2}{c(c+1)(a+1)(abc+1)} \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c>0$ .

• **Chứng minh 2:** Ta có:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \cdot \frac{(1+abc)+a(1+b)}{a(1+b)} = \frac{1}{1+abc} \cdot \frac{ab(1+c)+(1+a)}{a(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} \frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+a}{a(1+b)} \right] \\ \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+b}{b(1+c)} \right] \\ \frac{1}{c(1+a)} + \frac{1}{1+abc} = \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{a(1+b)}{1+a} + \frac{1+c}{c(1+a)} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right] + \frac{3}{1+abc} =$$

$$= \frac{1}{1+abc} \left[ \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{a(1+b)}{1+a} + \frac{1+c}{c(1+a)} \right]$$

$$\geq \frac{1}{1+abc} \left[ 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{b(1+c)}{1+b} \cdot \frac{1+a}{a(1+b)} \cdot \frac{c(1+a)}{1+c} \cdot \frac{1+b}{b(1+c)} \cdot \frac{a(1+b)}{1+a} \cdot \frac{1+c}{c(1+a)}} \right] = \frac{6}{1+abc}$$

Dẫn tới (1) đúng. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c>0$ .

• **Chứng minh 3:**

**Bổ đề:** Nếu  $\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_2 \leq b_2 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1 \leq b_1 \\ a_2 \geq b_2 \end{cases}$  thì  $a_1b_2 + b_1a_2 \geq a_1a_2 + b_1b_2$ .

**Chứng minh:**  $0 \leq (a_1 - b_1)(b_2 - a_2) = (a_1b_2 + b_1a_2) - (a_1a_2 + b_1b_2) \Rightarrow a_1b_2 + b_1a_2 \geq a_1a_2 + b_1b_2$

**Áp dụng:** (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} + \frac{abc}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{abc}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{abc}{c(1+a)} \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)} + \frac{ab}{1+a} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{bc}{1+b} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{ca}{1+c} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} + b \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+c} + c \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+a} + a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geq 6$$

Sử dụng bổ đề ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} + b \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} \geq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + b \cdot \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+a} + \frac{b}{1+b} \\ + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+c} + c \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} \geq \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + c \cdot \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+b} + \frac{c}{1+c} \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+a} + a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geq \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} + a \cdot \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+c} + \frac{a}{1+a} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+b} + b \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+c} + c \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{b}} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1+a} + a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{c}} \geq 6 \Rightarrow (\text{dpcm.})$$

• **Chứng minh 4:**

• **Mở rộng:** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

**Bài toán 7.** Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$  Chứng minh rằng:  $0 \leq ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

(IMO25 – Czech 1984)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:** Giả thiết dẫn tới  $a, b, c \in [0, 1] \Rightarrow abc \in [0, 1]$ , suy ra

$$ab+bc+ca-2abc \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} - 2abc = 3(abc)^{\frac{2}{3}} - 2abc \geq 3abc - 2abc = abc \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c)$  là hoán vị của  $(0, 0, 1)$ .

**Bổ đề:**  $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad \forall a, b, c \geq 0$

**Áp dụng:** Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow (1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq abc$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - 8abc \leq abc$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc \leq \frac{1}{4}(1+abc) \leq \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3 \right] = \frac{7}{27}$$

• **Chứng minh 2:** Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức  $ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow 0 < c \leq \frac{1}{3}$

Biến đổi và thế:  $S = ab(1-2c) + c(a+b) = ab(1-2c) + c(1-c)$

$$\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (1-2c) + c(1-c) = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 (1-2c) + c(1-c) = -\frac{1}{2}c^3 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4} = f(c)$$

Ta có:  $f'(c) = -\frac{c}{2}(3c-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=\frac{1}{3} \end{cases}$

|         |   |                |
|---------|---|----------------|
| $c$     | 0 | $\frac{1}{3}$  |
| $f'(c)$ |   | +              |
| $f(c)$  | 1 | $\frac{7}{27}$ |

Bảng biến thiên chỉ ra  $S \leq \text{Max } f(c) = \frac{7}{27}$ . Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

• **Chứng minh 3:**  $a(b+c) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)u = f(u)$

với  $0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$ . Để ý rằng, đồ thị hàm số  $y = f(u)$  là một đoạn thẳng

với  $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$ . Ta có  $f(0) = a(1-a) \leq \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$

$$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) = \frac{1}{4}(-2a^3 + a^2 + 1) = \frac{7}{27} - \frac{1}{4}\left(2a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{7}{27}.$$

Vậy  $f(u) \leq \frac{7}{27}$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$ .

**Bài toán 8.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5} \quad (1)$$

(The Japanese's proposal – PSFJIMO38 – Argentina 1997)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:** Đặt  $m = a+b+c$ ;  $a_1 = \frac{a}{m}$ ;  $b_1 = \frac{b}{m}$ ;  $c_1 = \frac{c}{m} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b_1 + c_1 - a_1)^2}{(b_1 + c_1)^2 + a_1^2} + \frac{(c_1 + a_1 - b_1)^2}{(c_1 + a_1)^2 + b_1^2} + \frac{(a_1 + b_1 - c_1)^2}{(a_1 + b_1)^2 + c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{(1-2a_1)^2}{(1-a_1)^2 + a_1^2} + \frac{(1-2b_1)^2}{(1-b_1)^2 + b_1^2} + \frac{(1-2c_1)^2}{(1-c_1)^2 + c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

Ta sẽ chứng minh:  $f(x) = \frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2 + x^2} \geq \frac{23-54x}{25}, \forall x \in (0, 1)$

$$\Leftrightarrow 25(1-2x)^2 \geq (23-54x)[x^2 + (1-x)^2] \Leftrightarrow 2(3x-1)^2(6x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow T = f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) \geq \frac{23 \times 3 - 54(a_1 + b_1 + c_1)}{25} = \frac{3}{5}$$

• **Chứng minh 2:** (1)  $\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \frac{2ab+2ac}{a^2+b^2+c^2+2bc} \leq \frac{12}{5}$

Ký hiệu  $s = a^2 + b^2 + c^2$ , và biến đổi:

$$5s^2 \sum_{\text{sym}} ab + 10s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 20 \sum_{\text{sym}} a^3 b^2 c \leq 6s^3 + 6s^2 \sum_{\text{sym}} ab + 12s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 48a^2 b^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow 6s^3 + s^2 \sum_{\text{sym}} ab + 2s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 8 \sum_{\text{sym}} a^2 b^2 c^2 \geq 10s \sum_{\text{sym}} a^2 bc + 20 \sum_{\text{sym}} a^3 b^2 c$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} (3a^6 + 2a^5 b - 2a^4 b^2 + 3a^4 bc + 2a^3 b^3 - 12a^3 b^2 c + 4a^2 b^2 c^2) \geq 0 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Shur*, nhân cả hai vế với  $4abc$

$$\Rightarrow \sum_{\text{sym}} (4a^4 bc - 8a^3 b^2 c + 4a^2 b^2 c^2) \geq 0$$

$$\text{Suy ra (3)} \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} (3a^6 + 2a^5 b - 2a^4 b^2 - a^4 bc + 2a^3 b^3 - 4a^3 b^2 c) \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM*, ta có bất đẳng thức sau và (3) được chứng minh xong.

$$2 \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{2a^6 + b^6}{3} - a^4 b^2 \right] \geq 0 ; \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{4a^6 + b^6 + c^6}{6} - a^4 bc \right] \geq 0$$

$$2 \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{2a^3 b^3 + c^3 a^3}{3} - a^3 b^2 c \right] \geq 0 ; 2 \sum_{\text{sym}} \left[ \frac{2a^5 b + a^5 c + ab^5 + ac^5}{6} - a^3 b^2 c \right] \geq 0$$

• **Chứng minh 3:**

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , đặt  $f(a, b, c) = \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2}$ .

**Bước 1:** Ta sẽ chứng minh  $f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

$$T_1 = \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} \geq \frac{2c^2}{\left(c + \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = T_2$$

Đặt  $A = b + c - a$ ;  $B = c + a - b$ ;  $x = (b + c)^2 + a^2$ ;  $y = (c + a)^2 + b^2$

$$x + y = (b + c)^2 + a^2 + (c + a)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ca + cb)$$

$$Ay - Bx = (b + c - a)[(c + a)^2 + b^2] - (c + a - b)[(b + c)^2 + a^2]$$

$$= [(a+b+c) - 2a][a^2 + b^2 + c^2 + 2ac] - [(a+b+c) - 2b][a^2 + b^2 + c^2 + 2bc]$$

$$= 2(b-a)(a^2 + b^2 + c^2) + 4c(b^2 - a^2) = 2(b-a)(a^2 + b^2 + c^2 + 4ca + 4cb)$$

$$= 2(b-a)[(a^2 + b^2 + c^2 + ca + cb) + 3ca + 3cb] = (b-a)(x+y+6ca+6cb)$$

$$\Rightarrow T_1 - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y} - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{(Ay-Bx)^2}{xy(x+y)} = \frac{(b-a)^2 [x+y+6c(a+b)]^2}{xy(x+y)}$$

$$\text{Đặt } z = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x+y-2[(c+z)^2 + z^2] = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ac + bc) - 2(c^2 + 2z^2 + 2cz)$$

$$= 2(a^2 + b^2 + ac + bc) - (a+b)^2 - 2c(a+b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$\Rightarrow T_2 - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{2c^2}{(c+z)^2 + z^2} - \frac{4c^2}{x+y} = \frac{2c^2 [(x+y) - 2(c+z)^2 - 2z^2]}{[(c+z)^2 + z^2](x+y)} = \frac{2c^2 (a-b)^2}{[(c+z)^2 + z^2](x+y)}$$

$$T_1 \geq T_2 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2 [x+y+6c(a+b)]^2}{xy(x+y)} \geq \frac{2c^2 (a-b)^2}{[(c+z)^2 + z^2](x+y)} \quad (2)$$

$$\text{Nếu } a = b \text{ thì (2) đúng. Nếu } a \neq b \text{ thì (2) } \Leftrightarrow \frac{[x+y+6c(a+b)]^2}{xy} \geq \frac{2c^2}{(c+z)^2 + z^2}$$

$$\text{Ta có } \frac{[x+y+6c(a+b)]^2}{xy} > \frac{(x+y)^2}{xy} \geq \frac{(2\sqrt{xy})^2}{xy} = 4 > 2 = \frac{2c^2}{c^2} > \frac{2c^2}{(c+z)^2 + z^2}$$

**Bước 2:** Ta sẽ chứng minh  $f(a, a, c) \geq \frac{3}{5}$ . Đặt  $u = \frac{a}{c} \geq 1$ , thì

$$f(a, a, c) \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow f(u, u, 1) \geq \frac{3}{5} \quad \forall u \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(2u-1)^2}{4u^2+1} + \frac{2}{(u+1)^2+u^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2u^2+2u+1} - \frac{4u}{4u^2+1} \geq \frac{-2}{5} \Leftrightarrow \frac{2u}{4u^2+1} - \frac{1}{2u^2+2u+1} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(4u^3 + 4u^2 + 2u - 4u^2 - 1) \leq 8u^4 + 8u^3 + 6u^2 + 2u + 1 \Leftrightarrow (u-1)^2 [2(u+1)^2 + 2u^2 + 1] \geq 0$$

• **Chứng minh 4:**

**Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

$$1. A_1 + A_2 \geq 0; A_2 + A_3 \geq 0; A_3 + A_1 \geq 0.$$

$$2. \text{ Nếu } a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \text{ hay } a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq a_{i_3} \text{ thì } A_{i_2} \geq 0 \text{ với } (i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$$

$$\text{Ta có bất đẳng thức } A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

Áp dụng: (1)  $\Leftrightarrow \frac{2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{2b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{12}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{27}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(b+c)^2+a^2} + \frac{1}{(c+a)^2+b^2} + \frac{1}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2} \quad (2)$$

Đặt  $x = (b+c)^2 + a^2$ ,  $y = (c+a)^2 + b^2$ ,  $z = (a+b)^2 + c^2$  và  $s = a+b+c$

Thì (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{s^2}$

Chú ý rằng:  $x+y+z = a^2+b^2+c^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2$

$$= \frac{5}{3}(a+b+c)^2 + \frac{2}{3}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2] = \frac{5}{3}s^2 + \frac{2}{3}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2] \geq \frac{5}{3}s^2 \quad (3)$$

Dẫn tới  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$  ;  $\frac{27}{5} \cdot \frac{1}{s^2} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Vì vậy, (2)  $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{9}{x+y+z} \leq 9 \left( \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{x+y+z} \right)$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 9 \leq 9 \left( \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y+z}{s^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) \leq \frac{18}{5} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} \leq \frac{18}{5} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{s^2} \quad (4)$$

Ta có:  $x-y = (b+c)^2 + a^2 - (c+a)^2 - b^2 = 2c(b-a)$  và

$$xy = [(b+c)^2 + a^2][(c+a)^2 + b^2] \geq c^2(c^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2ca + 2cb + 4ab) = c^2[(a+b+c)^2 + (a+b)^2]$$

Do đó,  $\frac{(x-y)^2}{xy} \leq \frac{4c^2(a-b)^2}{c^2[(a+b+c)^2 + (a+b)^2]} = \frac{4(a-b)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b)^2}$

Tương tự, ta có thể chứng minh:

$$\frac{(y-z)^2}{yz} \leq \frac{4(b-c)^2}{(a+b+c)^2 + (b+c)^2} \quad \text{và} \quad \frac{(z-x)^2}{zx} \leq \frac{4(c-a)^2}{(a+b+c)^2 + (c+a)^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức tương tự ta có:



$$\frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} \leq 4 \left[ \frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(a+b+c)^2 + (b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(a+b+c)^2 + (c+a)^2} \right]$$

Vì vậy (4) đúng nếu ta chứng minh được

$$(a-b)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a+b)^2} \right] + (b-c)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (b+c)^2} \right] + (c-a)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (c+a)^2} \right] \geq 0 \quad (5)$$

Đặt  $X = \frac{b+c}{a+b+c}$ ;  $Y = \frac{c+a}{a+b+c}$ ;  $Z = \frac{a+b}{a+b+c}$  thì

$$(5) \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Z^2} \right] + (b-c)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{1}{1+X^2} \right] + (c-a)^2 \left[ \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Y^2} \right] \geq 0$$

Ký hiệu  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ ,  $a_3 = c$  và

$$A_1 = \frac{9}{10} - \frac{1}{1+X^2}; A_2 = \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Y^2}; A_3 = \frac{9}{10} - \frac{1}{1+Z^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Thì ta có  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$  and  $X \leq Y \leq Z$ . Vì vậy

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3. \text{ Cần chứng minh } A_1 + A_2 \geq 0, \frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{9}{5} \quad (6)$$

Thật vậy, từ  $Y = \frac{c+a}{a+b+c} \geq \frac{c+a}{2a+c} \geq \frac{1}{2}$  thì  $\frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{4}{5}$

Mặt khác,  $\frac{1}{1+X^2} \leq 1$  đúng, bởi vậy (6) đúng. Dẫn tới  $A_1 + A_2 \geq 0$ ;  $A_2 + A_3 \geq 0$ ;

$A_3 + A_1 \geq 0$ , cùng với  $A_2 > 0$ , áp dụng bổ đề, (1) đúng.

**Ghi chú:** (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{1}{(a+b)^2 + c^2} \leq \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2}$

Từ đánh giá tốt hơn  $\frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{8}{5}$ , ta cũng có một bất đẳng thức chặt hơn

• **Chứng minh 5:**

**Bổ đề:**  $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$

**Áp dụng:** Đặt  $x = \frac{b+c}{a}$ ;  $y = \frac{c+a}{b}$ ;  $z = \frac{a+b}{c} \Rightarrow x+y+z \geq 6\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} = 6$ ;

Ta sẽ chứng minh:  $xy + yz + zx \geq 2(x+y+z) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c)(c+a)}{ab} \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+3abc}{abc} \geq 2 \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \text{ (đúng theo bổ đề)}$$

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{(y-1)^2}{y^2+1} + \frac{(z-1)^2}{z^2+1} \\ &\geq \frac{[(x-1)+(y-1)+(z-1)]^2}{(x^2+1)+(y^2+1)+(z^2+1)} = \frac{(x+y+z-3)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3} \end{aligned}$$

Ta chứng minh:  $\frac{(x+y+z-3)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(x+y+z-3)^2 \geq 3(x^2+y^2+z^2)+9$

$$\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2 - 30(x+y+z) + 45 \geq 3(x^2+y^2+z^2) + 9$$

$$\Leftrightarrow T = (x+y+z)^2 - 15(x+y+z) + 3(xy+yz+zx) + 18 \geq 0$$

Ta có:  $T \geq (x+y+z)^2 - 15(x+y+z) + 6(x+y+z) + 18$

$$= (x+y+z)^2 - 9(x+y+z) + 18 = [(x+y+z) - 3][(x+y+z) - 6] \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

• **Chứng minh 6:**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b+c)a}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a)b}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b)c}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Chuẩn hóa  $a+b+c=1$ , khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{6}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$2a(1-a) \leq \frac{(1+a)^2}{4} \Leftrightarrow 2a^2-2a+1 \geq 1 - \frac{(1+a)^2}{4} = \frac{(1-a)(a+3)}{4}$$

Suy ra:  $\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} \leq \frac{4(1-a)a}{(1-a)(a+3)} = \frac{4a}{a+3}$

Tương tự:  $\frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} \leq \frac{4b}{b+3}; \frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{4c}{c+3}$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên suy ra ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4a}{a+3} + \frac{4b}{b+3} + \frac{4c}{c+3} \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{10}$$

Theo  $AM - GM$   $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{(a+b+c)+9} = \frac{9}{10}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b=c>0$ .

• **Chứng minh 7:** Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} + \frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2} + \frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{2a^2-6a+9} \leq \frac{3}{5}$$

Nhận xét rằng  $\frac{1}{2x^2-6x+9} \leq \frac{1}{5} - \frac{2}{25}(x-1) \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)^2 \geq 0$ , luôn đúng  $\forall x \geq 0$ .

Suy ra  $\frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2b^2-6b+9} + \frac{1}{2c^2-6c+9} \leq \frac{3}{5} - \frac{2}{25}(a+b+c-3) = \frac{3}{5}$ . (đpcm)

**Mở rộng:** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{[\alpha(b+c)-a]^2}{\alpha(b+c)^2+a^2} + \frac{[\alpha(c+a)-b]^2}{\alpha(c+a)^2+b^2} + \frac{[\alpha(a+b)-c]^2}{\alpha(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3(2\alpha-1)^2}{4\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha \in \left[ \frac{3\sqrt{37}-23}{28}, \frac{3\sqrt{37}+23}{28} \right]$$

**Bài toán 9.** Chứng minh:  $(xy+yz+zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}, \forall x, y, z \geq 0$  (1)

(Iranian Mathematical Olympiad 1996)

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1: Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

1.  $A_1 + A_2 \geq 0; A_2 + A_3 \geq 0; A_3 + A_1 \geq 0$ .

2. Nếu  $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3}$  hay  $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq a_{i_3}$  thì  $A_{i_2} \geq 0$  với  $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$

Ta có bất đẳng thức  $A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$

**Áp dụng:** (1)  $\Leftrightarrow \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + \left[ \frac{xy}{(x+y)^2} + \frac{yz}{(y+z)^2} + \frac{zx}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} \right) \geq \left[ \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{yz}{(y+z)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{zx}{(z+x)^2} \right]$$

Ta có:  $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} = \frac{(y-z)^2}{2(x+y)(x+z)} + \frac{(z-x)^2}{2(y+z)(y+x)} + \frac{(x-y)^2}{2(z+x)(z+y)}$

$$\text{và } \left[ \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{yz}{(y+z)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{zx}{(z+x)^2} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} + \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(z+x)^2} \right]$$

Vì vậy, (1) sẽ đúng nếu ta chứng minh được:

$$2 \left[ \frac{(y-z)^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{(z-x)^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{(x-y)^2}{(z+x)(z+y)} \right] \leq \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} + \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(z+x)^2}$$

$$\text{hay } (y-z)^2 \left[ \frac{2}{(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(y+z)^2} \right] + (z-x)^2 \left[ \frac{2}{(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(z+x)^2} \right] + \\ + (x-y)^2 \left[ \frac{2}{(z+x)(z+y)} - \frac{1}{(x+y)^2} \right] \geq 0. \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (xy - xz)^2 \left[ \frac{2}{x^2(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(xy+xz)^2} \right] + (yz - yx)^2 \left[ \frac{2}{y^2(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(yz+yx)^2} \right] + \\ + (zx - zy)^2 \left[ \frac{2}{z^2(z+x)(z+y)} - \frac{1}{(zx+zy)^2} \right] \geq 0$$

$$\text{Đặt } a_1 = yz, a_2 = zx, a_3 = xy \text{ và } A_1 = \frac{2}{x^2(x+y)(x+z)} - \frac{1}{(xy+xz)^2};$$

$$A_2 = \frac{2}{y^2(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(yz+yx)^2}; A_3 = \frac{2}{z^2(z+x)(z+y)} - \frac{1}{(zx+zy)^2}$$

$$\text{Xác định } A_1 + A_2 = \frac{2}{x+y} \left[ \frac{1}{x^2(x+z)} + \frac{1}{y^2(y+z)} \right] - \left[ \frac{1}{(xy+xz)^2} + \frac{1}{(yz+yx)^2} \right] \quad (3)$$

$$\text{Với } \frac{2}{x^2(x+z)} + \frac{2}{y^2(y+z)} = \frac{2x^2(x+z) + 2y^2(y+z)}{x^2y^2(x+z)(y+z)} = \frac{2(x^3 + y^3) + 2(x^2 + y^2)z}{x^2y^2(x+z)(y+z)}$$

Sử dụng bất đẳng thức  $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$  và  $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$  ta có:

$$\frac{2}{x^2(x+z)} + \frac{2}{y^2(y+z)} \geq \frac{2xy(x+y) + (x+y)^2 z}{x^2y^2(x+z)(y+z)} = \frac{(x+y)[2xy + (x+y)z]}{x^2y^2(x+z)(y+z)}$$

$$\text{Kết hợp với (3) dẫn tới } A_1 + A_2 \geq \frac{2xy + (x+y)z}{x^2y^2(x+z)(y+z)} - \left[ \frac{1}{(xy+xz)^2} + \frac{1}{(yz+yx)^2} \right]$$

$$= \frac{(xy+xz) + (xy+yz)}{x^2y^2(x+z)(y+z)} - \left[ \frac{1}{(xy+xz)^2} + \frac{1}{(yz+yx)^2} \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{xy^2(x+z)} + \frac{1}{yx^2(y+z)} \right] - \left[ \frac{1}{x^2(y+z)^2} + \frac{1}{y^2(z+x)^2} \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{xy^2(x+z)} - \frac{1}{y^2(z+x)^2} \right] + \left[ \frac{1}{yx^2(y+z)} - \frac{1}{x^2(y+z)^2} \right] = \frac{z}{xy^2(x+z)^2} + \frac{z}{yx^2(y+z)^2} > 0$$

Tương tự ta có thể chứng minh  $A_2 + A_3 > 0$  và  $A_3 + A_1 > 0$ .

Bây giờ giả sử  $x \geq y \geq z \geq 0$  thì  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ .

$$\text{Đặt } A_2 = \frac{1}{y^2} \left[ \frac{2}{(y+z)(y+x)} - \frac{1}{(z+x)^2} \right] = \frac{2(z+x)^2 - (y+z)(y+x)}{y^2(y+z)(y+x)(z+x)^2}$$

Từ  $x \geq y \geq 0$  suy ra  $2(z+x)^2 - (y+z)(y+x) \geq 2(z+x)^2 - (x+z)(x+x) = 2(x+z)z > 0$

Dẫn tới  $A_2 > 0$ . Sử dụng **Bổ đề** ta có đpcm.

### • Chứng minh 2:

**Bổ đề:** Cho các số thực  $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$  thỏa mãn điều kiện:

Nếu  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$  thì  $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0$  và  $a_2^2 A_3 + a_3^2 A_2 \geq 0$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$A_1(a_2 - a_3)^2 + A_2(a_3 - a_1)^2 + A_3(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

**Áp dụng:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} y+z=2a \\ z+x=2b \\ x+y=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+b+c \\ y=a-b+c \\ z=a+b-c \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}$$

Do  $z \geq y \geq x > 0$  nên  $a \geq b \geq c > 0$ . Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2) \left( \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } A_1 = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2}, A_2 = \frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2}, A_3 = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow A_1(b-c)^2 + A_2(c-a)^2 + A_3(a-b)^2 \geq 0$$

Do  $a \geq b \geq c > 0$  và  $b+c > a$  nên  $A_1 \geq 0$  và  $A_2 \geq 0$

Ta chứng minh  $b^2 A_3 + c^2 A_2 \geq 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 \geq abc$ .

Mà  $b+c > a$  nên ta chỉ cần chứng minh  $b^3 + c^3 \geq (b+c)bc \Leftrightarrow (b-c)^2(b+c) \geq 0$  (đúng)

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x=y=z$  hoặc  $x=y, z=0$  hoặc các hoán vị tương ứng.

• **Chứng minh 3:** **Bổ đề** (bất đẳng thức *Schur*)

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0, \quad \forall x, y, z, r > 0$$

**Áp dụng:** Biến đổi bất đẳng thức thành:

$$\sum_{\text{sym}} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức *Schur* với  $r = 1$  ta có:

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức với  $2xyz$  và khai triển chúng theo các tổng đối xứng ta có:

$$\sum_{\text{sym}} (x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0 \quad (2)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* dẫn tới:

$$\begin{cases} x^5y + y^5z + z^5x \geq x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \\ x^5y + y^5z + z^5x \geq x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{\text{sym}} [(x^5y - x^4y^2) + 3(x^5y - x^3y^3)] \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Cộng (2) với (3) dẫn tới: } \sum_{\text{sym}} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$$

**Chú ý:** đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc  $x = y = z > 0$  hoặc  $x = y > 0, z = 0$ ,

hoặc  $y = z > 0, x = 0$ ; hoặc  $z = x > 0, y = 0$

• **Chứng minh 4:** (Chứng minh của Marcin E. Kuczma, Warszawa, Poland)

Không mất tính tổng quát, giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ .

$$\text{Đặt } S = (xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right]$$

$$A = (2x + 2y - z)(x - z)(y - z) + z(x + y)^2$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot z(x + y - 2z)(11x + 11y + 2z)$$

$$C = (x + y)(x + z)(y + z)$$

$$D = (x + y + z)(x + y - 2z) + x(y - z) + y(x - z) + (x - y)^2$$

$$E = \frac{1}{4} \cdot z(x + y)(x + y + 2z)^2(x + y - 2z)^2$$

$$\text{Ta có: } C^2(4S - 9) = (x - y)^2 \left[ (x + y)(A + B + C) + \frac{1}{2}(x + z)(y + z)D \right] + E$$

$$\Rightarrow C^2(4S-9) \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{9}{4}$$

• **Chứng minh 5:** (Vedula N.Murty, Andhra University, Visakhapatnam, India)

Đặt  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Không mất tính tổng quát giả sử  $0 < a \leq b \leq c$ ; với điều kiện  $a + b > c$  suy ra:

$2a^2 - bc < 0 < 2b^2 - ca \leq 2c^2 - ab$ . Biến đổi bất đẳng thức

$$(1) \Leftrightarrow bc(b-c)^2(2a^2-bc) + ca(c-a)^2(2b^2-ca) \geq 0 \quad (2)$$

+ Nếu  $b = c$  thì  $(1) \Leftrightarrow ca(c-a)^2(2b^2-ca) \geq 0$  luôn đúng

+ Nếu  $b < c$  thì  $c - b > 0$ . Ta có:  $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 > c(a+b)$

$$\Rightarrow 2b^2 - ca > bc - 2a^2 > 0 \Rightarrow \frac{bc - 2a^2}{2b^2 - ca} < 1 \Rightarrow \frac{bc}{ac} \cdot \frac{bc - 2a^2}{2b^2 - ca} < \frac{bc}{ac}$$

$$\text{Vì } \frac{c-a}{c-b} \geq 1 \text{ suy ra } \frac{(c-a)^2}{(c-b)^2} \geq \frac{c-a}{c-b} \geq \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{(c-a)^2}{(c-b)^2} \geq \frac{bc}{ac} > \frac{bc}{ac} \left( \frac{bc - 2a^2}{2b^2 - ca} \right)$$

$$\Rightarrow bc(b-c)^2(2a^2-bc) + ca(c-a)^2(2b^2-ca) > 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$  hoặc  $x = y, z = 0$  hoặc các hoán vị.

• **Chứng minh 6: Bước 1:** Chứng minh các công thức:

$$1. (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) = 4Rr + r^2; \quad p^2 = \sum bc - 4Rr - r^2$$

$$2. \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(\sum bc)^2 - 16Rr p^2}{16p^2 R^2 r^2}$$

**Thật vậy:** Sử dụng định lý Viète cho phương trình:

$$1. p-a, p-b, p-c \text{ là ba nghiệm của: } x^3 - px^2 + (4R+r)x - pr^2 = 0$$

$$\Rightarrow (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) = 4Rr + r^2 \Rightarrow p^2 = \sum bc - 4Rr - r^2$$

$$2. \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ là ba nghiệm của: } 4pRrx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 2px - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) =$$

$$= \left( \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr} \right)^2 - 2 \cdot \frac{2p}{4pRr} = \frac{(\sum bc)^2 - 16Rr p^2}{16p^2 R^2 r^2}$$



Bước 2: Chứng minh:  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$  (\*)

• **Bổ đề:**  $x'(x-y)(x-z) + y'(y-z)(y-x) + z'(z-x)(z-y) \geq 0 \quad \forall x, y, z > 0 \quad r > 0$

**Chứng minh (\*):** Đặt  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$

$$(*) \Leftrightarrow \left( \frac{x+y+z}{2} \right)^2 \geq 16 \cdot \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{xyz(x+y+z)}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} - 5 \cdot \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{4} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} - \frac{5xyz}{4(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 + 5xyz \geq 4(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$  đều.

• **Áp dụng:** Đặt  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{z+x}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow a, b, c$  là độ dài ba cạnh tam giác.

$$(1) \Leftrightarrow [(p-a)(p-b) + (p-a)(p-b) + (p-a)(p-b)] \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (4Rr+r^2) \frac{(\sum bc)^2 - 16Rrp^2}{16p^2R^2r^2} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow (4Rr+r^2) \cdot [(\sum bc)^2 - 16Rrp^2] \geq 36p^2R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow (4Rr+r^2) \cdot [(\sum bc)^2 - 16Rr(\sum bc - 4Rr - r^2)] \geq 36(\sum bc - 4Rr - r^2)R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow (4R+r) \cdot \left[ \left( \frac{\sum bc}{r} \right)^2 - 4R(25R+r) \frac{\sum bc}{r} + 4R(4R+r)(25R+4r) \right] \geq 0 \quad (2)$$

Đặt  $t = \frac{ab+bc+ca}{r} = \frac{\sum bc}{r}$ . Từ Bổ đề 1, 2 dẫn tới:  $t \geq 20R - 4r$ . Ta có::

$$(2) \Leftrightarrow f(t) = (4R+r)t^2 - 4R(25R+r)t + 4R(4R+r)(25R+4r) \geq 0$$

$$f'(t) = 2(4R+r)t - 4R(25R+r) > 0 \quad \forall t \geq 20R - 4r$$

$\Rightarrow$  hàm  $f(x)$  giảm trên  $[20R - 4r, +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(20R - 4r) = 4r(R - 2r)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

• **Mở rộng 1:** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\text{Min}(x, y, z) \geq \frac{1}{4} \text{Max}(a, b, c)$ . Chứng minh:

$$(xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z} + \sum_{\text{cyc}} \left[ \frac{xy}{(x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z} - \frac{3}{2} \geq \frac{5}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - \frac{3}{2} = \frac{(x+y)(x-y)^2 + (y+z)(y-z)^2 + (z+x)(z-x)^2}{2(y+z)(z+x)(x+y)} \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{2(y+z)(z+x)} \geq \frac{5}{16} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 \left( \frac{8}{(y+z)(z+x)} - \frac{5}{(x+y)^2} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 \left( 8(x+y) - 10z - \frac{5(z-y)(z-x)}{x+y} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 (8x+8y-10z) \right] - \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 \frac{5(z-y)(z-x)}{x+y} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T = \sum_{\text{cyc}} \left[ (x-y)^2 (8x+8y-10z) \right] - \frac{5(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z \Rightarrow z \geq \frac{1}{4}x$ .

$$\text{Đặt } \frac{T}{2} = (3z+4u+8v)u^2 + (3z-5u-v)v^2 + (3z+4u-v)(u+v)^2 - \frac{5u^2v^2(u+v)^2}{2(2z+u+2v)(2z+v)(2z+u+v)}$$

Từ  $x = z + u + v \leq 4z \Rightarrow u + v \leq 3z$ . Dẫn tới:

$$\frac{T}{2} \geq (5u+9v)u^2 + (-4u)v^2 + 5u(u+v)^2 - \frac{5u^2v^2(u+v)^2}{(0+u+2v)(0+v)(0+u+v)}$$

$$= 10u^3 + 19u^2v + uv^2 - \frac{5u^2v(u+v)}{u+2v} = \frac{10u^4 + 34u^3v + 34u^2v^2 + 2uv^3}{u+2v} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

• **Mở rộng 2:** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\text{Min}(x, y, z) \geq \alpha \text{Max}(a, b, c)$ ;  $\alpha \in [0, 1]$ .

$$\text{Chứng minh: } (xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4} + \frac{\alpha}{4} \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

• **Mở rộng 3:** Cho  $x, y, z > 0$  và  $xy + yz + zx \geq \text{Max}\{x^2, y^2, z^2\}$ . Chứng minh:

$$(xy + yz + zx) \left[ \frac{1}{(x+y)(y+z)} + \frac{1}{(y+z)(z+x)} + \frac{1}{(z+x)(x+y)} \right] \leq \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$$

## §24.2. VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC THI TOÁN QUỐC TẾ

Chúng ta tiếp tục phân tích một bài toán thi Olympic có nhiều cách giải, đây là một bài toán rất đặc biệt, nó có thể phát biểu theo cả hai cách hình học và đại số. Hơn nữa chính nhờ những cách phát biểu khác nhau đó mà nó có những mở rộng và lời giải hết sức đẹp đẽ.

**Bài toán.** Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là  $a, b, c$  và có diện tích là  $S$ .

Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  (1)

(IMO 3 – Hungary 1961, Weitzenbock's inequality)

**Chứng minh**

• **Lời giải 1:**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$(1) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3 \times 16S^2 = 3[2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]$$

$$\Leftrightarrow 4[(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] = 2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] \geq 0$$

• **Lời giải 2:** 
$$\begin{cases} \sin C = \frac{2S}{ab} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \Rightarrow \frac{4S^2}{a^2b^2} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4a^2b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

Từ  $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$  suy ra  $16S^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 48S^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 3:**  $\sqrt{3} \sin C + \cos C = 2 \sin(C + 30^\circ) \leq 2$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \left( \frac{2S}{ab} \right) + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq 2 \Rightarrow c^2 - a^2 - b^2 + 4ab \geq 4\sqrt{3}S$$

Tương tự ta có:  $b^2 - c^2 - a^2 + 4ca \geq 4\sqrt{3}S$ ;  $a^2 - b^2 - c^2 + 4bc \geq 4\sqrt{3}S$

$$\Rightarrow 4(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 12\sqrt{3}S$$

Mặt khác  $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 12\sqrt{3}S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

• **Lời giải 4:** (1) tương đương với  $a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \geq 2\sqrt{3}ab \sin C$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab(\cos C + \sqrt{3} \sin C) + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - (\cos C + \sqrt{3} \sin C)\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \geq 0$$

Ta có  $\Delta = (\cos C + \sqrt{3} \sin C)^2 - 4 \leq (1+3)(\cos^2 C + \sin^2 C) - 4 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$

• **Lời giải 5:**  $a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) - 2\sqrt{3}ab \sin C$   
 $= 2(a-b)^2 + 4ab \left[ 1 - \cos \left( C + \frac{\pi}{3} \right) \right] \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

• **Lời giải 6:**  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$   
 $\leq p \cdot \frac{(p-a)+(p-b)}{2} \cdot \frac{(p-b)+(p-c)}{2} \cdot \frac{(p-c)+(p-a)}{2} = \frac{p}{8} abc \leq \frac{p}{8} \left( \frac{a+b+c}{3} \right)^3$   
 $= \frac{(a+b+c)^4}{16 \times 27} \leq \frac{[(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)]^2}{16 \times 27} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{16 \times 3} \Rightarrow (\text{đpcm})$

• **Lời giải 7:**  $4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq 4\sqrt{3}p\sqrt{\left[ \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \right]^3}$   
 $= \frac{4p^2}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq \frac{(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{3} = a^2 + b^2 + c^2$

• **Lời giải 8:** Đặt  $a = y + z; b = z + x; c = x + y$  với  $x, y, z > 0$  khi đó

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \left[ (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 \right]^2 \geq 16(yz + zx + xy)^2 \geq$$

$$16.3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + xy \cdot yz) = 48xyz(x+y+z) = 48S^2 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

• **Lời giải 9: Bổ đề:**  $mn + np + pm \geq \sqrt{3mnp(m+n+p)} \quad \forall m, n, p > 0$

**Áp dụng:** đặt  $p-a = x, p-b = y, p-c = z \Rightarrow p = x+y+z$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z) \geq$$

$$\sqrt{3(x+y)(y+z)(z+x)} \left[ (x+y) + (y+z) + (z+x) \right] \geq$$

$$\sqrt{3 \times 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{yz} \times 2\sqrt{zx} \times 2(x+y+z)} = 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 10: Bổ đề:**  $8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc$ . Thật vậy:

$$8(p-a)(p-b)(p-c) = 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \times 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \times 2\sqrt{(p-c)(p-a)}$$

$$\leq [(p-a) + (p-b)] \times [(p-b) + (p-c)] \times [(p-c) + (p-a)] = abc$$

**Áp dụng:**  $\times \begin{cases} 3(a^2 + b^2 + c^2) = (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a+b+c)^2 \\ (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq (3\sqrt{a^2 b^2 c^2})^3 = 27a^2 b^2 c^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c) \geq 48p(p-a)(p-b)(p-c) = 48S^2$$

• **Lời giải 11: Bổ đề:**  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**Áp dụng:**  $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq 2\sqrt{3}$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2S \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq \frac{2S \times 9}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 12: Bổ đề:**  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**Áp dụng:**  $a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3\sqrt{3}R$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 9abc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{9abc}{a + b + c} \geq \frac{9abc}{3\sqrt{3}R} = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 13:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow ab \geq ac \geq bc$

$$\Leftrightarrow \frac{2S}{\sin C} \geq \frac{2S}{\sin B} \geq \frac{2S}{\sin A} \Leftrightarrow \sin A \geq \sin B \geq \sin C$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy đơn điệu  $\begin{cases} ab \geq ac \geq bc \\ \sin A \geq \sin B \geq \sin C \end{cases}$  ta có

$$ab\sin A + ac\sin C + bc\sin B \geq ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A$$

$$ab\sin B + ac\sin A + bc\sin C \geq ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A$$

$$\Rightarrow (ab + ac + bc)(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 3(ab\sin C + ac\sin B + bc\sin A) = 18S$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \frac{3\sqrt{3}}{2} \geq 18S \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 14: Bổ đề:**  $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

**Áp dụng:** theo định lý *Cosine* trong tam giác ta có

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 4S \cot A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B = c^2 + a^2 - 4S \cot B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 4S \cot C \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 15:**  $r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow r^3 = (p - a)(p - b)(p - c) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{rS^2}{p^2} = \frac{S^2}{p} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \Leftrightarrow r = p \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\text{Ta có } 1 = \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \geq 3\sqrt{\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2}} \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{4}{3}p^2 = 4\sqrt{3}p^2 \times \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{3}p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 4\sqrt{3}pr = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 16:** Đặt  $x = \frac{b+c-a}{2}$ ;  $y = \frac{c+a-b}{2}$ ;  $z = \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow S = \sqrt{xyz(x+y+z)}$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \geq 4(xy+yz+zx) \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } 4(xy+yz+zx) \geq 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 - 3xyz(x+y+z) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(xy-yz)^2 + (yz-zx)^2 + (zx-xy)^2] \geq 0 \quad (3)$$

Do (3) đúng nên (2) cũng đúng. Vì vậy  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

• **Lời giải 17:** Xét tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC.

Kẻ đường cao AH  $\perp$  BC. Ta có:  $a^2 + b^2 + c^2 = BC^2 + AB^2 + AC^2$

$$= BC^2 + 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \geq \frac{3BC^2}{2} + 2AH^2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3BC^2}{2} \cdot 2AH^2} = 2\sqrt{3}BC \cdot AH = 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 18:** Dựng tam giác đều  $AB_1C$  sao cho B,  $B_1$  ở cùng một phía đối với AC. Sử dụng định lý *Cosine* cho tam giác  $AB_1C$  ta có

$$BB_1^2 = BA^2 + B_1A^2 - 2BA \cdot B_1A \cos \angle BAB_1$$

$$= b^2 + c^2 - 2bccos |A - 60^\circ|$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc(\cos A \cos 60^\circ + \sin A \sin 60^\circ)$$

$$= b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) - \sqrt{3}bc \sin A = \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S]$$

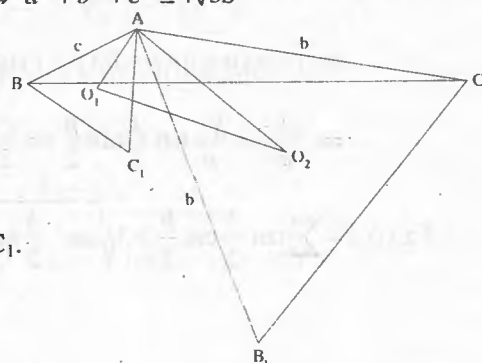
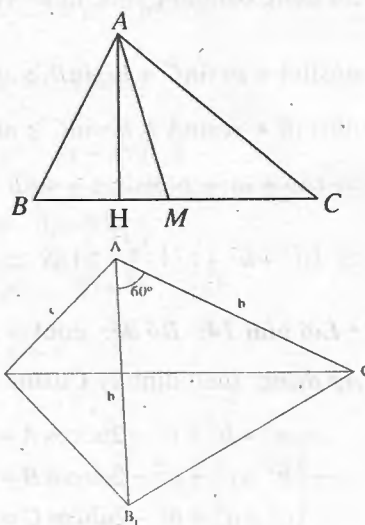
$$\text{Do } BB_1^2 \geq 0 \text{ suy ra } \frac{1}{4}[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S] \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

• **Lời giải 19:** Dựng các tam giác đều  $ACB_1$ ,

$ABC_1$  sao cho B,  $B_1$  ở cùng một phía đối với

AC và C,  $C_1$  ở cùng một bờ đối với AB.

Gọi  $O_1, O_2$  là tâm của các tam giác đều  $ACB_1$  và  $BC_1A$ .



Xét tam giác  $O_2AO_1$  ta có

$$O_1A = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sqrt{3}}; \quad O_2A = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{và} \quad \angle O_1AO_2 = |A - 60^\circ|$$

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - 2O_1A \cdot O_2A \cdot \cos|A - 60^\circ| = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - \frac{2bc}{3}(\cos A \cos 60^\circ + \sin A \sin 60^\circ)$$

$$O_1O_2^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) - \frac{2bc}{3} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right) = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S)$$

$$\text{Do } O_1O_2^2 \geq 0 \text{ suy ra } \frac{1}{6}[a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S] \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

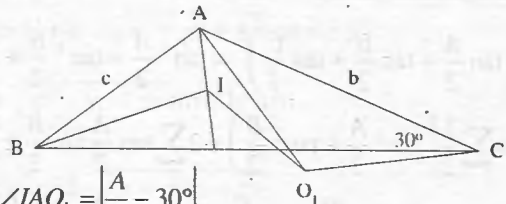
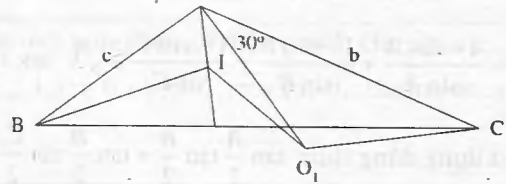
• **Lời giải 20:**

Dựng tam giác cân  $O_1AC$  sao cho  $B$ ,

$O_1$  ở cùng một phía đối với  $AC$  và

$\angle O_1AC = \angle O_1CA = 30^\circ$ . Gọi  $I$  là tâm

đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$ .



$$\text{Xét tam giác } IAO_1: IA = \frac{p-a}{\cos \frac{A}{2}}; \quad O_1A = \frac{b}{\sqrt{3}}; \quad \angle IAO_1 = \left| \frac{A}{2} - 30^\circ \right|$$

$$IO_1^2 = IA^2 + O_1A^2 - 2IA \cdot O_1A \cdot \cos \angle IAO_1 = \frac{(p-a)^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{b^2}{3} - \frac{2(p-a)b}{\sqrt{3} \cos \frac{A}{2}} \cos \left| \frac{A}{2} - 30^\circ \right|$$

$$= \frac{(p-a)^2}{\frac{p(p-a)}{bc}} + \frac{b^2}{3} - \frac{2(p-a)b}{\sqrt{3} \cos \frac{A}{2}} \left( \cos \frac{A}{2} \cos 30^\circ + \sin \frac{A}{2} \sin 30^\circ \right)$$

$$= \frac{(p-a)bc}{p} + \frac{b^2}{3} - (p-a)b - \frac{(p-a)b}{\sqrt{3}} \times \tan \frac{A}{2}$$

$$= \frac{b}{3p} \left[ 3c(p-a) + pb - 3p(p-a) - \sqrt{3}p(p-a) \tan \frac{A}{2} \right]$$

$$= \frac{b}{12p} [6c(b+c-a) + 2b(a+b+c) - 3(b+c+a)(b+c-a) - 4\sqrt{3}pr]$$

$$= \frac{b}{12p} [3a^2 + 3c^2 - b^2 + 2ab + 2bc - 6ac - 4\sqrt{3}S] \geq 0. \text{ Suy ra:}$$

$$\begin{cases} 3a^2 + 3c^2 - b^2 + 2ab + 2bc - 6ac \geq 4\sqrt{3}S \\ 3a^2 + 3b^2 - c^2 + 2ac + 2bc - 6ab \geq 4\sqrt{3}S \\ 3b^2 + 3c^2 - a^2 + 2ab + 2ac - 6bc \geq 4\sqrt{3}S \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 12\sqrt{3}S$$

$$\text{Mặt khác } 2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$



$$\Rightarrow 5(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 12\sqrt{3}S \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Sau đây là một số mở rộng của bài toán thú vị này

$$\bullet \text{ Mở rộng 1: } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (2)$$

(Bất đẳng thức Hadwinger – Finsler)

$$\text{Lời giải 1: } (2) \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow 4S \left( \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \right) - 4S(\cot A + \cot B + \cot C) \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos C}{\sin C} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Sử dụng đẳng thức  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$  ta có:

$$\begin{aligned} \left( \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 &= \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\ &= \sum \frac{1}{2} \left( \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} \right) + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \geq \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 2 \sum \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\text{Lời giải 2: } (2) \Leftrightarrow [a^2 - (b-c)^2] + [b^2 - (c-a)^2] + [c^2 - (a-b)^2] \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b) \geq \sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (3)$$

$$\text{Let } x = p-a, y = p-b, z = p-c, \text{ suy ra } (3) \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z) \Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0$$

**Lời giải 3:** Áp dụng bài toán gốc cho tam giác MNP, trong đó M, N, P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ban đầu.

$$\bullet \text{ Mở rộng 2: } ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 3: } ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S + \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 4: } a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3 \left( \frac{4S}{\sqrt{3}} \right)^n + [(a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 5: } a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) + \frac{18abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\bullet \text{ Mở rộng 6: } a^\alpha b^\alpha + b^\alpha c^\alpha + c^\alpha a^\alpha \geq 4^\alpha \sqrt{3^{2-\alpha}} S^\alpha, \quad \forall \alpha \geq 1; \alpha \in \mathbb{R} \quad (4)$$

**Lời giải:** (4)  $\Leftrightarrow \left(\frac{2S}{\sin C}\right)^\alpha + \left(\frac{2S}{\sin A}\right)^\alpha + \left(\frac{2S}{\sin B}\right)^\alpha \geq 4^\alpha \sqrt{3^{2-\alpha}} S^\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^\alpha A} + \frac{1}{\sin^\alpha B} + \frac{1}{\sin^\alpha C} \geq \sqrt{3^{2-\alpha}}$ . Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy** ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^\alpha A} + \frac{1}{\sin^\alpha B} + \frac{1}{\sin^\alpha C} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sin^\alpha A} \cdot \frac{1}{\sin^\alpha B} \cdot \frac{1}{\sin^\alpha C}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^\alpha}} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^{3\alpha}}} \geq \frac{3}{\sqrt{3^\alpha}} = \sqrt{3^{2-\alpha}} \end{aligned}$$

• **Mở rộng 7:** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ . Giả sử  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $x + y > 0, y + z > 0, z + x > 0$  và  $xy + yz + zx > 0$ . Chứng minh rằng:  $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4 \cdot \sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$  (5)

**Lời giải:** (5)  $\Leftrightarrow xa^2 + yb^2 + z(a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \geq 2\sqrt{xy + yz + zx} (ab \sin C)$

$$\Leftrightarrow (x+z) \frac{a}{b} + (y+z) \frac{b}{a} \geq 2 \left( z \cos C + \sqrt{xy + yz + zx} \sin C \right) \quad (6)$$

Ta có  $(x+z) \frac{a}{b} + (y+z) \frac{b}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{(x+z) \frac{a^2}{b^2} (y+z) \frac{b^2}{a^2}} = 2 \cdot \sqrt{(x+z)(y+z)}$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$z \cos C + \sqrt{xy + yz + zx} \sin C \leq \sqrt{(z^2 + xy + yz + zx)(\cos^2 C + \sin^2 C)} = \sqrt{(x+z)(y+z)}$$

$$\Rightarrow 2 \left( z \cos C + \sqrt{xy + yz + zx} \sin C \right) \leq (x+z) \frac{a}{b} + (y+z) \frac{b}{a} \Rightarrow (6) \text{ đúng}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) \frac{a}{b} = (y+z) \frac{b}{a} \\ \frac{\cos C}{z} = \frac{\sin C}{\sqrt{xy + yz + zx}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{b}{\sqrt{x+z}} \Rightarrow b^2 = \frac{a^2(x+z)}{y+z} \\ \frac{\cos^2 C}{z^2} = \frac{\sin^2 C}{xy + yz + zx} = \frac{1}{(x+z)(y+z)} \end{cases}$

Thế  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  vào ta có

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + a^2 \cdot \frac{x+z}{y+z} - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{x+z}}{\sqrt{y+z}} \cdot \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 &= 1 + \frac{x+z}{y+z} - \frac{2z}{y+z} = \frac{x+y}{y+z} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y+z}} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{c}{\sqrt{x+y}} \end{aligned}$$

Vì vậy đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{y+z}} = \frac{b}{\sqrt{z+x}} = \frac{c}{\sqrt{x+y}}$

**Ứng dụng của mở rộng 7 trong tam giác với độ dài 3 cạnh là  $a, b, c$**

$$7.1. a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (1)$$

**Chứng minh.** Bất đẳng thức  $\Leftrightarrow a^2 \frac{b+c-a}{a} + b^2 \frac{c+a-b}{b} + c^2 \frac{a+b-c}{c} \geq 4\sqrt{3}S$

Sử dụng **mở rộng 7** suy ra chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab} \geq 3 \Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Đây chính là bất đẳng thức **Schur** bậc 3.

$$7.2. a^2b + b^2c + c^2a \geq 8\sqrt[4]{27} \cdot S\sqrt{S}$$

**Chứng minh.** Từ bất đẳng thức Hadwiger – Finsler suy ra  $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$

Sử dụng **mở rộng 7** ta có:  $a^2b + b^2c + c^2a \geq 4\sqrt{ab+bc+ca} \cdot S \geq 8\sqrt[4]{27} \cdot S\sqrt{S}$

$$7.3. 3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S$$

**Chứng minh.** Sử dụng **mở rộng 7** ta có

$$a^2 \frac{bc}{a} + b^2 \frac{ca}{b} + c^2 \frac{ab}{c} \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S \Leftrightarrow 3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S$$

$$7.4. (b+c-a)a^2 + (c+a-b)b^2 + (a+b-c)c^2 \geq 8\sqrt[4]{3} \cdot S\sqrt{S}$$

**Chứng minh.** Sử dụng **mở rộng 7** ta có

$$(b+c-a)a^2 + (c+a-b)b^2 + (a+b-c)c^2 \geq 4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \cdot S$$

Từ bất đẳng thức Hadwiger – Finsler ta có

$$4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \cdot S \geq 4\sqrt{4\sqrt{3}S} \cdot S = 8\sqrt[4]{3} \cdot S\sqrt{S}$$

• **Mở rộng 8:** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{x}{y+z} \cdot a^2 + \frac{y}{z+x} \cdot b^2 + \frac{z}{x+y} \cdot c^2 \geq 2\sqrt{3}S \quad (7) \quad \forall x, y, z > 0$

**Lời giải:** Sử dụng kết quả của **mở rộng 7** ta có

$$\frac{x}{y+z} \cdot a^2 + \frac{y}{z+x} \cdot b^2 + \frac{z}{x+y} \cdot c^2 \geq 4 \times \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x} + \frac{y}{z+x} \cdot \frac{z}{x+y} + \frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} \cdot S$$

Ta sẽ chứng minh  $4 \times \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x} + \frac{y}{z+x} \cdot \frac{z}{x+y} + \frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} \cdot S \geq 2\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(y+z)(z+x)} + \frac{yz}{(z+x)(x+y)} + \frac{zx}{(x+y)(y+z)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)] \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geq 6xyz$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy* ta có

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2 + x^2z \geq 6\sqrt{x^2y \cdot xy^2 \cdot y^2z \cdot yz^2 \cdot z^2x \cdot zx^2} = 6xyz$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng kéo theo bất đẳng thức (7) cũng đúng.

• **Mở rộng 9:** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } 4\sqrt{3}S + 3\sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (8)$$

**Lời giải:** Đặt  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$ .

$$\text{Bất đẳng thức (8)} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}S \geq 6(ab + bc + ca) - 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 6[(y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)] - 5\sum (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (9). \text{ Đặt } x = p^2; y = q^2; z = r^2.$$

Do đó (9)  $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{3p^2q^2r^2(p^2 + q^2 + r^2)} \geq (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

$$\Leftrightarrow pqr\sqrt{3(p^2 + q^2 + r^2)} \geq (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$$

$$\text{Dễ dàng có } \begin{cases} \sqrt{3(p^2 + q^2 + r^2)} \geq p+q+r \\ pqr \geq (p+q-r)(r+p-q)(q+r-p) \end{cases} \Rightarrow \text{(điều phải chứng minh)}$$

**Chú ý:** Từ các bất đẳng thức (2) và (8) ta thu được bất đẳng thức

$$4\sqrt{3}S + 3\sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 \cdot \sum (a-b)^2 + 4\sqrt{3}S \quad (10)$$

Ta sẽ chứng minh trong kết quả (10) thì các hệ số 3 và 1 của  $\sum (a-b)^2$  là các giá trị tốt nhất, hay là ta chứng minh mở rộng sau:

• **Mở rộng 10:** Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S$ .

Nếu ta có  $4\sqrt{3}S + \alpha \sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq \beta \sum (a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$  thì  $\alpha \geq 3$  và  $\beta \leq 1$ .

**Lời giải:** Đặt

$$\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases} \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

$$\text{Xét hiệu } T_\alpha = 4\sqrt{3}S + \alpha \sum (a-b)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha - 1)(a^2 + b^2 + c^2) - 2\alpha(ab + bc + ca)$$

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha - 1)[(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2] - 2\alpha[(y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)]$$

$$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + 2(\alpha - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\alpha + 1)(xy + yz + zx). \text{ Let } a' = yz; b' = zx; c' = xy$$

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3xyz(x + y + z)} + (\alpha - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha + 1)(xy + yz + zx)$$

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3(a'b' + b'c' + c'a')} + (\alpha - 1)\left(\frac{b'c'}{a'} + \frac{c'a'}{b'} + \frac{a'b'}{c'}\right) - (\alpha + 1)(a' + b' + c')$$

Đặt  $\bar{a} = b' + c'; \bar{b} = c' + a'; \bar{c} = a' + b' \Rightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  là độ dài ba cạnh của một tam giác

$$T'_\alpha = \frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3\sum(\bar{p} - \bar{a})(\bar{p} - \bar{b})} + (\alpha - 1)(\bar{p} - \bar{a})(\bar{p} - \bar{b})(\bar{p} - \bar{c}) \sum \frac{1}{(\bar{p} - \bar{a})^2} - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= 2\sqrt{3(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a} - \bar{p}^2)} + (\alpha - 1)\frac{\bar{r}_a^2 + \bar{r}_b^2 + \bar{r}_c^2}{\bar{p}} - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= \sqrt{3[2(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a}) - (\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2)]} + (\alpha - 1)\bar{p}\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= \sqrt{12S\left(\tan \frac{\bar{A}}{2} + \tan \frac{\bar{B}}{2} + \tan \frac{\bar{C}}{2}\right)} + (\alpha - 1)\bar{p}\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$= 2\sqrt{3\bar{p}\bar{r}}\left(\tan \frac{\bar{A}}{2} + \tan \frac{\bar{B}}{2} + \tan \frac{\bar{C}}{2}\right) + (\alpha - 1)\bar{p}\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)\bar{p}$$

$$\frac{\bar{T}'_\alpha}{\bar{p}} = 2\sqrt{3 \tan \frac{\bar{A}}{2} \tan \frac{\bar{B}}{2} \tan \frac{\bar{C}}{2} \left(\tan \frac{\bar{A}}{2} + \tan \frac{\bar{B}}{2} + \tan \frac{\bar{C}}{2}\right)}$$

$$+ (\alpha - 1)\left(\tan^2 \frac{\bar{A}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{B}}{2} + \tan^2 \frac{\bar{C}}{2}\right) - (\alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } u = \tan \frac{\bar{A}}{2}; v = \tan \frac{\bar{B}}{2}; w = \tan \frac{\bar{C}}{2} \Rightarrow uv + vw + wu = 1$$

$$\text{Ta có: } T_\alpha \geq 0 \Rightarrow \frac{\bar{T}'_\alpha}{\bar{p}} = 2\sqrt{3uvw(u + v + w)} + (\alpha - 1)(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha + 1) \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Cho } \begin{cases} u \rightarrow 0 \\ v, w \rightarrow 1 \end{cases} \text{ thì } \frac{\bar{T}'_\alpha}{\bar{p}} \rightarrow 2(\alpha - 1) - (\alpha + 1) = \alpha - 3. \text{ Nếu } \alpha < 3 \text{ thì } \exists u_0, v_0, w_0 \text{ thỏa mãn}$$

$$u_0v_0 + v_0w_0 + w_0u_0 = 1, \text{ tuy nhiên, } \frac{\bar{T}'_{\alpha 0}}{\bar{p}_0} < 0 \text{ mâu thuẫn với } (*) \Rightarrow \text{Min } \alpha = 3$$

$$\text{Tương tự, } \frac{\bar{T}'_\beta}{\bar{p}} = 2\sqrt{3uvw(u + v + w)} + (\beta - 1)(u^2 + v^2 + w^2) - (\beta + 1) \leq 0 \quad (**)$$

$$\text{Nếu } \beta > 1 \text{ thì cho } \begin{cases} u \rightarrow +\infty \\ v, w \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{T}'_\beta}{\bar{p}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists u_1, v_1, w_1 \text{ thỏa mãn}$$

$$u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 1, \text{ tuy nhiên, } \frac{\bar{T}'_{\beta 1}}{\bar{p}_1} > 0 \text{ mâu thuẫn với } (**) \Rightarrow \text{Max } \beta = 1.$$

Vì vậy bất đẳng thức  $4\sqrt{3}S + 3 \cdot \sum (a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 1 \cdot \sum (a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$  là tốt nhất.

## § 24.3. CÂU CHUYỆN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT-SHAPIRO

### I. 45 CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

Trong kho tàng các bất đẳng thức nổi tiếng, có một bất đẳng thức đã thu hút được sự chú ý của rất nhiều nhà toán học lừng danh trên thế giới trong suốt thế kỷ XX. Đó chính là bất đẳng thức *Nesbitt – Shapiro. Năm 1903*, nhà Toán học Anh *Nesbitt* đã đưa ra bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0 \quad (1)$$

Chúng minh kết quả này không khó, sau đây là **45 cách** chứng minh khác nhau trong đó có nhiều cách do bạn **Dương Đức Lâm** sáng tác và sưu tầm. Các bạn đọc ham thích tìm tòi cũng có thể tự mình tìm thêm một số cách chứng minh khác nữa.

#### 1. Nhóm 1: Sử dụng định nghĩa, biến đổi tương đương, đánh giá đại diện

• **Cách 1:**

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} &= \left( \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{a-b+a-c}{2(b+c)} + \frac{b-c+b-a}{2(c+a)} + \frac{c-a+c-b}{2(a+b)} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a-b) \left( \frac{1}{c+b} - \frac{1}{c+a} \right) \\ &= \frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)} + \frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)} \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 2:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ , gọi về trái bất đẳng thức là  $S$  ta có

$$S - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{a+b-2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} (a-c)(b-c) \geq 0, \text{ suy ra } S \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 3:** Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8a-b-c}{a+b+c} \Leftrightarrow 4a(a+b+c) \geq (8a-b-c)(b+c) \Leftrightarrow (2a-b-c)^2 \geq 0$$

Khi đó 
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(8a-b-c) + (8b-c-a) + (8c-a-b)}{a+b+c} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 4:** Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(a-1) \Leftrightarrow 2a \geq 3-a+3(3-a)(a-1) \Leftrightarrow 3(a-1)^2 \geq 0$$

Khi đó 
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(a+b+c-3) = \frac{3}{2}$$

• **Cách 5:** Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow 4a \geq (3-a)(3a-1) \Leftrightarrow 2(a-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow VT(1) = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3(a+b+c)-3}{4} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 6:**  $(1) \Leftrightarrow S = \frac{(a-b)+(a-c)}{b+c} + \frac{(b-c)+(b-a)}{c+a} + \frac{(c-a)+(c-b)}{a+b} \geq 0$

Giả sử  $a \geq b \geq c$  thì  $S \geq \frac{a-b+a-c}{c+a} + \frac{b-c+b-a}{c+a} + \frac{c-a+c-b}{c+a} = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$

## 2. Nhóm 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM

• **Cách 7:**  $(1) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2(a+b+c) \left[ \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right] \geq 9$

$\Leftrightarrow T = [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$T \geq 3 \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}} = 9 \Rightarrow \text{đpcm}$

• **Cách 8:** Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} &= \frac{a}{2} \left( \frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{2a} \right) \geq \frac{a}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{2a}} = a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} &= \frac{b}{2} \left( \frac{2b}{c+a} + \frac{c+a}{2b} \right) \geq \frac{b}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{2b}} = b \\ \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} &= \frac{c}{2} \left( \frac{2c}{a+b} + \frac{a+b}{2c} \right) \geq \frac{c}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{2c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2c}} = c \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$

$\Rightarrow \left( \frac{a^2}{b+c} + a \right) + \left( \frac{b^2}{c+a} + b \right) + \left( \frac{c^2}{a+b} + c \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (a+b+c) \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c) \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

• **Cách 9:** Đặt  $\begin{cases} b+c=x>0 \\ c+a=y>0 \\ a+b=z>0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{y+z-x}{2}; b = \frac{z+x-y}{2}; c = \frac{x+y-z}{2}$

Khi đó bất đẳng thức trở thành  $\frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow T = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 3+3=6$ . Ta có:  $T \geq 6 \sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}} = 6$

• **Cách 10:** Gọi về trái bất đẳng thức cần chứng minh là  $T$ .



Đặt  $P = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$ ;  $Q = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow P + Q = 3$  và

$$\begin{cases} T + P = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3 \\ T + Q = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c} \cdot \frac{b+a}{c+a} \cdot \frac{c+b}{a+b}} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2T + (P + Q) = 2T + 3 \geq 3 + 3 \Rightarrow T \geq \frac{3}{2}$$

• **Cách 11:** (1)  $\Leftrightarrow S = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 3$

Theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:  $S \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right)}$

Ta chỉ cần chứng minh:  $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \geq 8(a+b)(b+c)(c+a)$$

Theo **AM - GM**:  $2a+b+c = (a+b) + (a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$

Làm tương tự với 2 bất đẳng thức còn lại rồi nhân theo vế ta có đpcm.

• **Cách 12:** (1)  $\Leftrightarrow S = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có  $S \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) \left(\frac{c}{a+b} + 1\right)}$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$$

Theo **AM - GM**:  $8(a+b+c)^3 = [(a+b) + (b+c) + (c+a)]^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$ .

• **Cách 13:** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}$ ,  $y = \frac{b}{c+a}$ ,  $z = \frac{c}{a+b}$  và  $S = \frac{x+y+z}{3}$

Ta có  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$  hay  $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ . Ta cần chứng minh  $S \geq \frac{1}{2}$ .

Theo **AM - GM**, ta có:  $1 = xy + yz + zx + 2xyz \leq 3S^2 + 2S^3 \Leftrightarrow (2S-1)(S+1)^2 \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}$ .

• **Cách 14:** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}$ ,  $y = \frac{b}{c+a}$ ,  $z = \frac{c}{a+b}$  ta có  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$  (\*)

Ta cần chứng minh  $x + y + z \geq \frac{3}{2}$ . Thật vậy, giả sử  $x + y + z < \frac{3}{2}$ , khi đó theo bất đẳng

thức **AM - GM** thì  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}} \geq \frac{9}{3+x+y+z} > \frac{9}{3+\frac{3}{2}} = 2$ .

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với (\*) nên điều giả sử  $x + y + z < \frac{3}{2}$  là sai.

$$\text{Vậy } x + y + z \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 15:** Đặt  $x = \frac{b}{c}$ ;  $y = \frac{c}{a}$ ;  $z = \frac{a}{b} \Rightarrow xyz = 1$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{1+zx} + \frac{y}{1+xy} + \frac{z}{1+yz} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2y + y^2z + z^2x) \geq x + y + z + xy + yz + zx.$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$x^2y + y^2z + z^2x = \frac{x^2y + x^2y + z^2x}{3} + \frac{y^2z + y^2z + x^2y}{3} + \frac{z^2x + z^2x + y^2z}{3}$$

$$\geq \sqrt[3]{x^5y^2z^2} + \sqrt[3]{x^2y^5z^2} + \sqrt[3]{x^2y^2z^5} = x + y + z.$$

Tương tự ta có:  $x^2y + y^2z + z^2x \geq xy + yz + zx$ . Cộng hai bất đẳng thức trên ta được đpcm.

• **Cách 16:**  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a(a+b)(a+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ . Sử dụng **AM - GM** ta có:

$$\sum_{cyc} (a^3 + b^3) = \sum_{cyc} (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq \sum_{cyc} (a+b)(2ab - ab) = \sum_{cyc} ab(a+b) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Cách 17:** Ta sẽ chứng minh đại diện

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} \Leftrightarrow 2(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3\sqrt{a}(b+c). \text{ Theo AM - GM ta có}$$

$$2(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) = (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{b^3}) + (\sqrt{a^3} + \sqrt{c^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3b\sqrt{a} + 3c\sqrt{a}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} = \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

• **Cách 18:** Đặt  $x = \frac{a}{c}$ ,  $y = \frac{b}{c}$ . Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow x \geq y \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \text{ Theo AM - GM ta có}$$

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh: } 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{y-1}{2(y+1)} \geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì  $x \geq y \geq 1 \Rightarrow y-1 \geq 0$  và  $2(y+1) \leq (x+1)(x+y)$ .

- **Cách 19:** Làm như cách 18, ta cần chứng minh  $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$  với  $x \geq y \geq 1$ .

Đặt  $A = x + y$  và  $B = xy$ , bất đẳng thức tương đương với  $\frac{x^2 + y^2 + x + y}{(x+1)(y+1)} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

$$\text{hay } \frac{A^2 - 2B + A}{A+B+1} + \frac{1}{A} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2A^3 - A^2 - A + 2 \geq B(7A - 2)$$

Đề ý rằng  $7A - 2 > 0$  và  $A^2 \geq 4B$ , suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$4(2A^3 - A^2 - A + 2) \geq A^2(7A - 2) \Leftrightarrow (A - 2)^2(A + 2) \geq 0 \text{ luôn đúng } \Rightarrow (\text{dpcm})$$

- **Cách 20:** Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**  $a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a \cdot \frac{(b+c)^2}{4}}$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 \geq \frac{27}{4}a(b+c)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{(a+b+c)^3} \geq \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}a\sqrt[3]{\frac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{(a+b+c)^3}}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{(a+b+c)^3}}$$

Chuẩn hóa  $a+b+c=3$ . Ta cần chứng minh  $a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c} \geq 3$

$$\text{Theo AM - GM, ta có: } \begin{cases} a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} + 1 \geq 3a \\ b\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{b} + 1 \geq 3b \\ c\sqrt[3]{c} + c\sqrt[3]{c} + 1 \geq 3c \end{cases} \Rightarrow a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c} \geq 3 \text{ (dpcm)}$$

- **Cách 21:** Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$2a + (b+c) \geq 2\sqrt{2a(b+c)} \Leftrightarrow (2a+b+c)^2 \geq 8a^2 \cdot \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{8a^2}{(2a+b+c)^2}$$

$$\text{Từ đó ta chứng minh được } VT(1) \geq \frac{8a^2}{(2a+b+c)^2} + \frac{8b^2}{(2b+c+a)^2} + \frac{8c^2}{(2c+a+b)^2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=3$ , khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{(a+3)^2} + \frac{b^2}{(b+3)^2} + \frac{c^2}{(c+3)^2} \geq \frac{3}{16}. \text{ Đề ý rằng } \frac{a^2}{(a+3)^2} \geq \frac{1}{16} + \frac{3}{32}(a-1) \quad (*)$$

$$\text{Thật vậy, } (*) \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a-1)^2(a-3) \leq 0 \text{ luôn đúng vì } 0 < a < 3.$$

Trong (\*) thay  $a$  lần lượt bởi  $b, c$  rồi cộng theo về các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^2}{(a+3)^2} + \frac{b^2}{(b+3)^2} + \frac{c^2}{(c+3)^2} \geq \frac{3}{16} + \frac{3}{32}(a+b+c-3) = \frac{3}{16}. \text{ (dpcm)}$$

- **Cách 22:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \quad (*)$$

Thật vậy (\*)  $\Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0$

Vì  $a \geq b \geq c$  nên  $\frac{a-b}{b+c} \geq \frac{a-b}{a+c}$  và  $\frac{c-a}{a+b} \geq \frac{c-a}{a+c}$  suy ra

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq \frac{a-b}{a+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+c} = \frac{a-b+b-c+c-a}{a+c} = 0. \text{ tức là (*) đúng.}$$

Từ đó  $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \times \frac{b+c}{c+a} \times \frac{c+a}{a+b}} = 3$  (đpcm)

• **Cách 23: Bổ đề:**  $\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n, \forall a, b, c > 0; n \in \mathbb{N}$

**Chứng minh:** Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\begin{cases} a^n + (n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{a^n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} a \\ + \begin{cases} b^n + (n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{b^n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} b \\ c^n + (n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{c^n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} c \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^n + b^n + c^n) \geq n \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} (a+b+c) - 3(n-1) \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

**Áp dụng:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=1$ . Sử dụng AM – GM, ta có

$$(2-2a)(1+a)(1+a) \leq \left[ \frac{(2-2a) + (1+a) + (1+a)}{3} \right]^3 = \frac{64}{27}$$

Do đó  $\frac{a}{1-a} \geq \frac{27}{32} a(1+a)^2$ . Tương tự  $\frac{b}{1-b} \geq \frac{27}{32} b(1+b)^2, \frac{c}{1-c} \geq \frac{27}{32} c(1+c)^2$ . Từ đó

$$VT(1) = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{27}{32} [(a^3 + b^3 + c^3) + 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)] \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 24:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=1$ . Khi đó  $0 < a, b, c < 1$ . Theo công thức cấp số nhân lùi vô hạn ta có

$$VT(1) = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a^n + b^n + c^n)$$

Sử dụng bổ đề ở **cách 23** ta được

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a^n + b^n + c^n) \geq 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}. \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Cách 25:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=1$ . Trước hết ta sẽ chứng minh

$$T = \frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2. \text{ Sử dụng kỹ thuật đồng bậc trong AM – GM, ta có}$$

$$T = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2$$

Từ đó, kết hợp với bất đẳng thức quen biết  $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$  với mọi  $x, y \geq 0$ , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{bc}{b+c} - \frac{ca}{c+a} - \frac{ab}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{4}[(b+c) + (c+a) + (a+b)] = \frac{3}{2}$$

• **Cách 26:** Sử dụng bất đẳng thức quen biết  $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$  ta có

$$\left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq 3 \left[ \frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \right]$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c=1$ , bất đẳng thức trở thành

$$4[ab(1-c) + bc(1-a) + ca(1-b)] \geq 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 9abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo **AM - GM** và ta có điều phải chứng minh.

• **Cách 27:** Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{2(b+c)^2}} = \frac{9a}{3\sqrt[3]{2a(b+c)(b+c)}} \geq \frac{9a}{2(a+b+c)}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{b}{c+a} + \frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} \geq \frac{9b}{2(a+b+c)} \quad \text{và} \quad \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq \frac{9c}{2(a+b+c)}$$

$$\text{Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên cho ta } 2VT(1) + \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow VT(1) \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 28:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a+b+c=3$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$\frac{a^2}{(3-a)^2} = \frac{2a^3}{2a(3-a)(3-a)} \geq \frac{2a^3}{\left[ \frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3} \right]^3} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3-a} \geq \frac{a\sqrt{a}}{2}$$

$$\text{Tương tự và suy ra } VT(1) = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

• **Cách 29:** Bất đẳng thức đã cho tương đương với  $\sum_{cyc} \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \sum_{cyc} \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{9}{4}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$\left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{a}{b+c}; \quad \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{b}{c+a}; \quad \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{c}{a+b}$$

Ta chỉ cần chứng minh  $\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} + \sum_{cyc} \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} \geq 3$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(a+b)(a+c) + \sum_{cyc} 2bc(b+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo **AM – GM** và ta có đpcm.

### 3. Nhóm 3: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển khác

• **Cách 30:** Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\begin{aligned} & [a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)] \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq (a+b+c)^2 \\ \Rightarrow & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 31:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a, b, c \in (0, 3)$  và  $a+b+c=3$ .

$$\text{Khi đó ta có } (a-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+1 \geq a(3-a) \Leftrightarrow \frac{a}{3-a} \geq \frac{a^2}{a+1}$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{3-b} \geq \frac{b^2}{b+1}; \quad \frac{c}{3-c} \geq \frac{c^2}{c+1}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta được

$$VT(1) = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} + \frac{c^2}{c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 32:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \leq b \leq c \Rightarrow a+b \leq a+c \leq b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c \geq c+a \geq a+b \\ \frac{a}{b+c} \leq \frac{b}{c+a} \leq \frac{c}{a+b} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \geq 3 \left[ \frac{a}{b+c} (b+c) + \frac{b}{c+a} (c+a) + \frac{c}{a+b} (a+b) \right] \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) [2(a+b+c)] \geq 3(a+b+c) \Leftrightarrow \\ & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

• **Cách 33:** (1)  $\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a-b-c}{b+c} \geq 0$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c \text{ thì } \begin{cases} 2a-b-c \geq 2b-c-a \geq 2c-a-b \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Chebyshev: } \sum_{cyc} \frac{2a-b-c}{b+c} \geq \frac{1}{3} \left[ \sum_{cyc} (2a-b-c) \right] \left[ \sum_{cyc} \frac{1}{b+c} \right] = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

4. Nhóm 4: Sử dụng bất đẳng thức cận đại

- **Cách 34:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \leq b \leq c \Rightarrow a+b \leq a+c \leq b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b} \end{cases} \text{ Theo bất đẳng thức hoán vị ta có}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \text{ và } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức này ta nhận được đpcm.

• **Cách 35:**  $(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(a+b+c)}{b+c} \geq \frac{3(a+b+c)}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Giả sử  $a \geq b \geq c$ , theo bất đẳng thức hoán vị thì

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} \text{ và } \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c}$$

$$\text{Suy ra } \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{1}{2} \left[ \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} + \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c} \right] = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{1}{4} \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{a+b} = \frac{a+b+c}{2}$$

- **Cách 36:** Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau với mọi  $a, b, c \geq 0$ :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+a)} \quad (1)$$

Thật vậy  $(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 2ab(a+b) + 2bc(b+c) + 2ca(c+a)$ , đúng theo **Schur**.

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc, \text{ đúng theo AM - GM.}$$

- **Cách 37:** Gọi về trái của (1) là  $P$ , ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{2[a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b)] + (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Theo bất đẳng thức **Schur** thì  $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$

kết hợp với  $(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$  suy ra điều phải chứng minh.

- **Cách 38:** Gọi về trái của (1) là  $P$ , ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{(2a+b+c)(a-b)(a-c) + (2b+c+a)(b-a)(b-c) + (2c+a+b)(c-a)(c-b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ , suy ra  $2a+b+c \geq 2b+c+a \geq 2c+a+b$

Sử dụng bất đẳng thức **Vornicu - Schur** (hay bất đẳng thức **Schur** suy rộng) ta có

$$(2a+b+c)(a-b)(a-c) + (2b+c+a)(b-a)(b-c) + (2c+a+b)(c-a)(c-b) \geq 0$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



**5. Nhóm 5: Phương pháp giải tích**

• **Cách 39:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Đặt  $x = a \geq b \geq c$ .

Ta có (1)  $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{b+c} + \frac{b}{c+x} + \frac{c}{x+b}$  với  $x \geq b \geq c > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(x+c)^2} - \frac{c}{(x+b)^2} > \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(b+c)^2} - \frac{c}{(b+c)^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ tăng } [b, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(b) = \frac{2b+c}{b+c} \quad (2)$$

Đặt  $x = b \Rightarrow x \geq c > 0$ , xét hàm số  $g(x) = \frac{2x+c}{x+c}$  với  $x \geq c > 0$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{c}{(x+c)^2} > 0 \quad \forall c > 0 \Rightarrow g(x) \text{ tăng trên } [c, +\infty) \Rightarrow g(x) \geq g(c) = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

• **Cách 40:** Đặt  $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$

Xét hàm  $f(t) = \frac{t}{t+1} (t > 0)$  ta có  $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0$  suy ra  $f$  tăng trên  $(0; +\infty)$

Mặt khác  $f''(t) = -\frac{2}{(t+1)^3} < 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$  nên  $f(t)$  lõm trên khoảng  $(0; +\infty)$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} = \frac{1}{3} \left( \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{suy ra } \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y+z = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm})$$

• **Cách 41:** Đặt  $S = a+b+c$  ta có: (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} \geq \frac{3}{2}$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x}{S-x}$  với  $x \in (0, S)$

Ta có  $f'(x) = \frac{S}{(S-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2S}{(S-x)^3} > 0$  với mọi  $x \in (0, S)$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm lồi trên  $(0, S)$ . Sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$\frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{S}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\frac{S}{3}}{\frac{2S}{3}} = \frac{3}{2}$$

• **Cách 42:** Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$  và  $a+b+c=1$ .

Khi đó  $a \geq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{3}$  suy ra  $a+b=1-c \geq \frac{2}{3}$ , nên  $(a, b, c) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

Áp dụng bất đẳng thức *Karamata* cho hàm  $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$ , lồi trên  $(0,1)$ , đối với bộ

trội  $(a,b,c) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , ta có VT(1)  $= f(a) + f(b) + f(c) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh.

## 6. Nhóm 6: Phương pháp hiện đại

• **Cách 43:** Đặt  $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  và  $t = \frac{a+b}{2}$  ta có

$$f(a,b,c) - f(t,t,c) = \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b+2c)} \geq 0$$

Mặt khác ta lại có  $f(t,t,c) - \frac{3}{2} = \frac{2t}{c+t} + \frac{c}{2t} - \frac{3}{2} = \frac{(c-t)^2}{2t(c+t)} \geq 0$ .

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra  $f(a,b,c) \geq f(t,t,c) \geq \frac{3}{2}$ .

• **Cách 44:** Đặt  $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$  và  $t = \sqrt{ab}$ .

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min\{a,b,c\}$ , ta có  $t \geq c$  và

$$\begin{aligned} f(a,b,c) - f(a,b,t) &= \frac{a(t-c)}{(b+c)(b+t)} + \frac{b(t-c)}{(c+a)(t+a)} + \frac{c-t}{a+b} \\ &\geq \frac{t-c}{a+b} \left( \frac{a}{b+t} + \frac{b}{t+a} - 1 \right) = \frac{t-c}{a+b} \cdot \frac{(a-b)^2}{(b+t)(t+a)} \geq 0 \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có  $f(a,b,t) - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(b+t)(t+a)} + \frac{(a-t)^2}{2(b+t)(a+b)} + \frac{(t-b)^2}{2(a+b)(t+a)} \geq 0$

Suy ra  $f(a,b,c) \geq f(a,b,t) \geq \frac{3}{2}$ .

• **Cách 45:** Nhận xét rằng về trái của bất đẳng thức là một hàm đối xứng đối với ba biến  $a,b,c$ , nếu viết nó dưới dạng đa thức thì được một đa thức có bậc không quá 3. Theo định lí **ABC** ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Một trong ba biến  $a,b,c$  bằng 0, giả sử  $c = 0$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{3}{2} \text{ luôn đúng theo bất đẳng thức } AM - GM.$$

- **Trường hợp 2:** Hai trong ba biến  $a,b,c$  bằng nhau, giả sử  $b = c$ . Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2b(a+b)} \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

## II. MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

Chúng ta vừa được làm quen với 45 cách chứng minh bất đẳng thức *Nesbitt*. Điều này nói lên đây thực sự là một bất đẳng thức không khó để chứng minh. Tuy nhiên việc mở rộng bất đẳng thức *Nesbitt* cho  $n$  số thực dương ( $n \geq 4$ ) lại không đơn giản chút nào. Suốt 53 năm nhiều nhà toán học đã tìm cách mở rộng và chứng minh bất đẳng thức trên cho các trường hợp đặc biệt và tổng quát nhưng mãi đến năm 1958 một học trò của *Nesbitt* là *Mordell* mới tìm ra được cách chứng minh cho  $n = 4, 5, 6$  chấm dứt một thời gian dài bài toán chưa có lời giải. Năm 1954, nhà Toán học Mỹ *Shapiro* đã đưa ra mệnh đề tổng quát và nó được gắn với tên gọi **bất đẳng thức Shapiro**

**Mệnh đề 1:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét tính đúng sai của bất đẳng thức sau:

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (2)$$

Ngay từ khi ra đời, bất đẳng thức (2) đã cuốn hút được sự chú ý của rất nhiều người đam mê toán học. Thậm chí nó nổi tiếng đến mức mà năm 1990, tại hội nghị toán học Oberwolfach về các bất đẳng thức, các nhà toán học đã phải nhắc lại toàn bộ lịch sử chứng minh lâu dài của nó mà đôi khi được xem là vô vọng. Bất đẳng thức Shapiro tuy với vẻ bề ngoài cực kì đơn giản nhưng để chứng minh nó là điều vô cùng khó, do chúng ta phải xét một số lượng rất lớn các trường hợp riêng biệt. Điều này không làm cho chúng ta ngạc nhiên, bởi vì *bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi số tự nhiên n*. Trong phần tiếp theo của chuyên đề này, chúng tôi chỉ cố gắng trình bày tóm tắt lại các kết quả quan trọng của các nhà toán học liên quan đến bất đẳng thức (1) mà không đề cập chi tiết đến các chứng minh bởi vì trong một số trường hợp việc chứng minh đòi hỏi phải sử dụng đến các kiến thức của toán cao cấp vượt ra ngoài chương trình toán phổ thông. Trước hết xét trường hợp đơn giản nhất khi  $n = 4$ .

2. Với  $n = 4$ , bất đẳng thức (2) trở thành:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2 \quad \forall a, b, c, d > 0. \quad (3)$

*Chứng minh:* Ta có  $[a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)] \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \right) \geq$

$$\left( \sqrt{a(b+c)} \cdot \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{b(c+d)} \cdot \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{c(d+a)} \cdot \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{d(a+b)} \cdot \sqrt{\frac{d}{a+b}} \right)^2 = (a+b+c+d)^2$$

Suy ra:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)}$

Ta có: 
$$\begin{cases} (a+b+c+d)^2 = [(a+d) + (b+c)]^2 \geq 4(a+d)(b+c) \\ (a+b+c+d)^2 = [(a+b) + (c+d)]^2 \geq 4(a+b)(c+d) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c+d)^2 \geq 4[(a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b))]$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geq \frac{4}{2} = 2. \text{ Suy ra (đpcm)}$$

$$\text{3. Với } n=5 \text{ thì (2) trở thành: } \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_5} + \frac{a_4}{a_5+a_1} + \frac{a_5}{a_1+a_2} \geq \frac{5}{2} \quad \forall a_i > 0, \quad (4)$$

Chứng minh: Đặt  $a_1 = a_6$ ;  $a_2 = a_7$ . Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^5 a_k (a_{k+1} + a_{k+2}) \cdot \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2+a_3) + a_2(a_3+a_4) + a_3(a_4+a_5) + a_4(a_5+a_1) + a_5(a_1+a_2)} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2+a_3) + a_2(a_3+a_4) + a_3(a_4+a_5) + a_4(a_5+a_1) + a_5(a_1+a_2)} \geq \frac{5}{2} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq \frac{5}{2} [a_1(a_2+a_3) + a_2(a_3+a_4) + a_3(a_4+a_5) + a_4(a_5+a_1) + a_5(a_1+a_2)]$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq \frac{5}{4} [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)]$$

$$\Leftrightarrow 5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

$$\Leftrightarrow (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo CBS. Từ đó suy ra (đpcm)

4. Với  $n=6$  thì (2) trở thành:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_4+a_5} + \frac{a_4}{a_5+a_6} + \frac{a_5}{a_6+a_1} + \frac{a_6}{a_1+a_2} \geq 3, \quad \forall a_i > 0 \quad (5)$$

Chứng minh: Đặt  $a_7 = a_1$ ;  $a_8 = a_2$ . Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^6 a_k (a_{k+1} + a_{k+2}) \cdot \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2 \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{a_1(a_2+a_3) + a_2(a_3+a_4) + a_3(a_4+a_5) + a_4(a_5+a_6) + a_5(a_6+a_1) + a_6(a_1+a_2)} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_1) + a_6(a_1 + a_2)} \geq 3 \\ \Leftrightarrow & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2 \geq 3 \sum_{k=1}^6 a_k(a_{k+1} + a_{k+2}) \\ \Leftrightarrow & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 \geq a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + \\ & + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_1) + a_6(a_1 + a_2) - 2a_1a_4 - 2a_2a_5 - 2a_3a_6 \\ \Leftrightarrow & \left[ a_1 + a_4 - \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + a_5 + a_6) \right]^2 + \frac{3}{4}(a_2 - a_3 + a_5 - a_6)^2 \geq 0, \text{ đúng suy ra (đpcm)} \end{aligned}$$

Phương pháp chứng minh (2) bằng bất đẳng thức CBS cho  $n=3,4,5,6$  là một chứng minh rất đẹp. Cách chứng minh này dựa trên một bất đẳng thức gián tiếp là bất đẳng thức:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)} \geq \frac{n}{2} \quad (*) \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Tuy nhiên không thể dùng phương pháp trên nhằm tạo ra (\*) để chứng minh (2) đúng với  $n \geq 7$ , vì khi đó bất đẳng thức (\*) sẽ không còn đúng nữa. Thật vậy, ta sẽ chứng minh (\*) không đúng  $\forall n \geq 7$  bằng phản ví dụ sau đây

• **Phản ví dụ:**

Lấy  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  và  $a_4 = a_5 = a_6 = \dots = a_{n-1} = a_n = \varepsilon$  thì

$$(*) \Leftrightarrow \frac{[3 + (n-3)\varepsilon]^2}{3 + 6\varepsilon + (2n-9)\varepsilon^2} \geq \frac{n}{2} \quad (**)$$

Với  $n \geq 7$ , ta chọn  $\varepsilon = \frac{1}{10n}$  và thế vào biểu thức vế trái của (\*\*) ta có

$$\frac{\left[3 + (n-3) \cdot \frac{1}{10n}\right]^2}{3 + 6 \cdot \frac{1}{10n} + (2n-9) \cdot \frac{1}{100n^2}} < \frac{\left(3 + \frac{1}{10}\right)^2}{3} = \frac{9,61}{3} < \frac{7}{2} \leq \frac{n}{2}$$

• **Kết luận:** Với  $n \geq 7$  thì bất đẳng thức (\*\*) không đúng suy ra (\*) không đúng

Sau khi chứng minh thành công (2) đúng với  $n=3,4,5,6$ , Mordell đã giả định rằng bất đẳng thức Shapiro sẽ không đúng với mọi  $n \geq 7$ . Năm 1956, Lighthill lần đầu tiên đã tìm ra một phản ví dụ cho bất đẳng thức này với  $n=20$ . Hai năm sau, ngoài Mordell, Zulauf và Rankine cũng tìm ra một phản-ví dụ cho  $n=14$ . Zulauf cũng đã có một nhận xét tinh tế là đẳng thức:

$$S_{n+2}(a_1, \dots, a_n, a_{n-1}, a_n) = S_n(a_1, \dots, a_n) + 1 \quad (6)$$

Từ đây ông nhận xét rằng nếu tìm được một phản ví dụ cho (1) với  $n$  nào đó thì cũng sẽ có các phản ví dụ cho  $n+2, n+4, \dots$

Năm 1959, Zulauf lại cho thêm một phản ví dụ khác với  $n=53$ .

Năm 1963, Diananda đã thiết lập được một đẳng thức khác rất ấn tượng, đó chính là:

$$S_{n+2}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = S_n(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{2} - \frac{(a_n - a_{n+1})(a_n - a_1)}{2x_r(a_n + a_1)}$$

Từ đây suy ra, nếu với một bộ giá trị  $(a_1, \dots, a_n)$  nào đó ta có  $S_n(a_1, \dots, a_n) \leq \frac{n}{2}$  và có một giá trị  $r$  nào đó,  $1 \leq r \leq n$ , để mà  $a_{r-1}, a_r, a_{r+1}$  (chỉ số tuần hoàn) đơn điệu (chúng ta có thể giả sử rằng  $r=n$ ), thì sẽ dẫn đến sự đúng đắn của bất đẳng thức  $S_{n+1}(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \leq \frac{n+1}{2}$ .

Với  $n$  lẻ thì rõ ràng rằng luôn luôn có một giá trị  $r$  như thế do chuỗi tuần hoàn có độ dài lẻ không thể chuyển giữa sự tăng và sự giảm ở mọi vị trí. Diananda rút ra được định lí sau

**Định lí Diananda.** Nếu (2) sai với  $n=n_0$  lẻ nào đó thì nó sẽ sai với mọi  $n \geq n_0$ . Nếu (2) đúng cho  $n=n_0$  chẵn nào đó thì nó cũng sẽ đúng với mọi  $n \leq n_0$ .

Cùng với định lí này ông đã đưa ra một phản ví dụ cho (1) với  $n=27$ . Điều này có nghĩa là (2) sai với mọi  $n \geq 27$ . Cùng một lập luận như đã được sử dụng trong định lí Diananda cũng cho thấy với  $n$  chẵn, dấu bằng của (2) xảy ra ở mọi điểm.  $a^\alpha = \frac{1}{2}(1+\alpha, 1-\alpha, \dots, 1+\alpha, 1-\alpha)$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) trong khi với  $n$  lẻ nó chỉ xảy ra với  $a^0 = (1, \dots, 1)$ .

Cùng lúc này Djokovic đã chứng minh rằng (2) đúng cho  $n=8$  và Bajanski chứng minh (2) cũng đúng cho  $n=7$ . Năm 1968, Nowosad đã chứng minh (2) đúng cho  $n=10$  và vì vậy theo lí thuyết trên bất đẳng thức Shapiro cũng đúng cho  $n=9$ . Do đó cho đến lúc này, chỉ còn lại có 10 trường hợp chưa được xác định là khi  $n=12$  đối với  $n$  chẵn và  $n=9, 11, \dots, 25$  khi  $n$  lẻ. Năm 1971, Daykin và Malcolm đã chứng minh (2) sai với  $n=25$  và Kristinasen cũng đã chứng minh (2) đúng cho  $n=12$ , và vì vậy đúng cho  $n=11$ . Vào năm này Drinfel'd đã đưa ra một chứng minh rất ngắn gọn, sơ cấp mà lại sáng tạo. Đồng thời ông đã đánh giá xấp xỉ một bất đẳng thức gần với Shapiro đúng với mọi  $n$ :

$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \cdot 0,989133\dots$  Việc chứng minh bất đẳng thức trên dựa theo một định lí nổi tiếng và một bất đẳng thức hoán vị sau đây.

**Định lí Drinfel'd.** Nếu đặt  $g(x)$  là một bao lồi dưới của hai hàm lồi giảm

$$f(x) = 2(e^x + e^{\frac{x}{2}})^{-1} \quad \text{và} \quad h(x) = e^{-x} \quad \text{thì} \quad \inf_n \frac{2}{n} S_n(x_1, \dots, x_n) \geq g(0) \quad \text{đúng với mọi } n.$$

Giá trị thực của  $g(0)$  rất gần với 1:  $g(0) = 0,989133\dots$  và nó không phải là một số đại số.

**Bất đẳng thức hoán vị.** Nếu  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  và  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  thì đối với bất kỳ hoán vị

$$(k_1, \dots, k_n) \text{ nào của các chỉ số } (1, 2, \dots, n), \text{ ta có bất đẳng thức: } \sum_{i=1}^n a_i b_{k_i} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Việc tìm miền đúng của (2) đã kéo dài gần 20 năm sau đó. Bắt đầu vào năm 1976, **Godunova** và **Leni** đã chứng minh (2) đúng cho  $n=12$ . Cùng lúc này **Bushell** cũng đã đưa ra một phản ví dụ khác cho  $n=25$  và ông cũng đưa ra một chứng minh sơ cấp mới với  $n=7$ . **Bushell** cùng với **Craven** đã chứng minh rằng (2) đúng với mọi  $n \leq 23$ . Năm 1979, **Troesch** và **Searcy** đã xét bài toán đại số các giá trị riêng tương ứng và chứng minh một kết quả ấn tượng: Bất đẳng thức (2) không đúng với mọi  $n \geq 14$ . Bằng cách dùng máy tính số, ông đã chỉ ra rằng (2) đúng với mọi  $n$  chẵn  $\geq 12$  và  $n$  lẻ  $\leq 23$ . Năm 1985, trong tạp chí **Math Computing**, **Troesch** đã thành công trong việc đưa ra một chứng minh (2) đúng cho  $n=13$  và đến năm 1989 ông mới chứng minh được  $n=23$ . Như vậy (2) đã được chứng minh cho tất cả các giá trị  $n$  còn lại là 15, 17, 19 và 21.

Gần 40 năm sau khi **Shapiro** đề xuất bài toán, **Troesch** đã là người kết thúc một giai đoạn lịch sử kéo dài cho việc chứng minh bất đẳng thức rất nổi tiếng này khi mà ông thông qua việc giải bài toán với  $n=23$  và đã hoàn thành việc chứng minh (2) với kết quả ấn tượng như sau:

Bất đẳng thức (2) đúng với mọi  $n$  chẵn  $\leq 12$  và  $n$  lẻ  $\leq 23$ , mọi giá trị còn lại của  $n$  thì (2) sai.

Sau ông một số nhà toán khác như **Diananda**, **Mordell** và **Daykin** cũng đã đề xuất một số bài toán mở rộng. Năm 1992, **Achim Clausen** đã đề nghị bài toán sau:

$$\text{Mệnh đề 2: Chứng minh: } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+2} + a_{i+3}} \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \forall a_i > 0, \text{ ở đây } \lceil x \rceil \text{ là phần nguyên của } x. (7)$$

Có lẽ đây lại là một thách thức lớn nữa cho các nhà toán học trẻ trong thế kỉ XXI này.

Bây giờ chúng ta quay trở lại vấn đề là tìm  $f(n) = \inf_{a_i > 0} f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , tức là tìm cận dưới của bất

$$\text{đẳng thức Shapiro. Năm 1958, Ranikin đã chứng minh } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n} < \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Năm 1971, Drinfel'd đã chứng minh } \lambda = \frac{1}{2} \varphi(0) = 0.4945668... \text{ tức là chứng minh được:}$$

$$\text{Mệnh đề 3: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.989133 \times \frac{n}{2}, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0 (8)$$

Tạp chí **Kvant** của Nga số 4 năm 1991 đã chứng minh bằng toán sơ cấp 2 kết quả sau đây:

$$\text{Mệnh đề 4: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > (\sqrt{2} - 1)n = 0.41421356n, \forall a_i > 0 (9)$$

$$\text{Mệnh đề 5: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{5}{12}n = 0.41666666n, \forall a_i > 0 (10)$$



Bây giờ tôi xin giới thiệu một cách đánh giá tốt nhất bằng toán sơ cấp về bất đẳng thức này:

$$\text{Mệnh đề 6: } S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.4577996n, \forall a_i > 0 \quad (11)$$

**Chứng minh**

Xét  $0 < \alpha < 1; k \in \mathbb{N}^*$ . Đặt  $a_{n+1} = a_1; a_{n+2} = a_2; \beta = \frac{\alpha^k}{k(1-\alpha)}$ . Ta có:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i + \alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} + k \cdot \frac{\beta(\alpha a_{i+1} + a_{i+2})}{a_{i+1} + a_{i+2}} - k\beta \right] =$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i + \alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} + k \cdot \frac{\beta(\alpha a_i + a_{i+1})}{a_i + a_{i+1}} \right] - k\beta n \geq \sum_{i=1}^n \left[ (k+1) \cdot \sqrt[k+1]{\frac{a_i + \alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} \cdot \frac{\beta^k (\alpha a_i + a_{i+1})^k}{(a_i + a_{i+1})^k}} \right] - k\beta n \quad (12)$$

Ta sẽ chứng minh:  $(a_i + \alpha^k a_{i+1})(\alpha a_i + a_{i+1})^k \geq \alpha^k (a_i + a_{i+1})^{k+1} \quad (13)$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha^k t_i)(\alpha + t_i)^k \geq \alpha^k (1 + t_i)^{k+1} \quad \text{với } t_i = \frac{a_i + 1}{a_i} \geq 0$$

Xét hàm số  $f(t) = (1 + \alpha^k t)(\alpha + t)^k - \alpha^k (1 + t)^{k+1}$  với  $t \geq 0$ .

Ta có:  $f^{(m)}(t) = (1 + \alpha^k t)(\alpha + t)^{k-m} k(k-1) \dots [k-(m-1)] +$   
 $+ m \cdot \alpha^k (\alpha + t)^{k-(m-1)} k(k-1) \dots [k-(m-2)] - \alpha^k (1+t)^{k+1-m} (k+1) k \dots [k-(m-2)]$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = k(k-1) \dots [k-(m-2)] [(k-m+1)\alpha^{k-m} + m\alpha^{2k-m+1} - (k+1)\alpha^k]$$

$$\geq k(k-1) \dots (k-m+2) [(k+1)^{k+1} \sqrt[k+1]{\alpha^{(k-m)(k-m+1)+m(2k-m+1)}} - (k+1)\alpha^k] = 0$$

Do  $f(t)$  là một đa thức bậc  $k$  nên  $f^{(k)}(t) = \text{const} = f^{(k)}(0) \geq 0$

$$\Rightarrow f^{(k-1)}(t) \geq f^{(k-1)}(0) \geq 0 \Rightarrow f^{(k-2)}(t) \geq f^{(k-2)}(0) \geq 0, \dots, f(t) \geq f(0) = 0$$

Ta có:  $f(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow f(t_i) \geq 0 \quad \forall t_i \geq 0 \Rightarrow (13) \text{ đúng}$

Từ (12) và (13) suy ra:

$$S \geq \sum_{i=1}^n \left[ (k+1) \cdot \sqrt[k+1]{\beta^k \alpha^k \cdot \frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}}} \right] - k\beta n = (k+1)(\alpha\beta)^{\frac{k}{k+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[k+1]{\frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}}} - k\beta n$$

$$\geq [(k+1)(\alpha\beta)^{\frac{k}{k+1}} - k\beta] n = \left[ (k+1) \frac{\alpha^k}{[k(1-\alpha)]^{\frac{k}{k+1}}} - \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \right] n$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt[k+1]{\frac{1}{1-\alpha}} > 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{x^{k+1}}, \text{ khi đó: } g(x) = (k+1) \cdot \frac{\alpha^k}{[k(1-\alpha)]^{\frac{k}{k+1}}} - \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right)^k x^k \left[\frac{k+1}{k^{k+1}} - x\right] = \frac{(x^{k+1} - 1)^k}{x^{k^2}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right]$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{k(x^{k+1} - 1)^{k-1} (k+1)x^k \cdot x^{k^2} - k^2 x^{k^2-1} (x^{k+1} - 1)^k}{x^{2k^2}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - \frac{(x^{k+1} - 1)^k}{x^{k^2}}$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(k+1)k x^{k+1} - k^2 (x^{k+1} - 1)}{x^{k^2+1}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - \frac{x^{k+1} - 1}{x^{k^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(k+1)k x^{k+1} - k^2 x^{k+1} + k^2] \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - x(x^{k+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow k(x^{k+1} + k) \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right] - x^{k+2} + x = 0 \Leftrightarrow (x^{k+1} + k) \left[(k+1)k^{\frac{1}{k+1}} - kx\right] = x^{k+2} - x$$

$$\Leftrightarrow (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k+1)k^{\frac{k+2}{k+1}} - kx^{k+2} - k^2 x = x^{k+2} - x$$

$$\Leftrightarrow (k+1)x^{k+2} - (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k^2 - 1)x - (k+1)k^{\frac{k+2}{k+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = x^{k+2} - k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k-1)x - k^{\frac{k+2}{k+1}} = 0$$

$$\text{Ta có: } h'(x) = (k+2)x^{k+1} - (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^k + (k-1)$$

$$\geq (k+1) \cdot k^{\frac{1}{k+1}} \sqrt{\left(\frac{k+2}{k} \cdot x^{k+1}\right)^k (k-1) - (k+1)k^{\frac{1}{k+1}} x^k} = (k+1) \left[\left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} (k-1)^{\frac{1}{k+1}} - k^{\frac{1}{k+1}}\right] x^k$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} (k-1)^{\frac{1}{k+1}} - k^{\frac{1}{k+1}} \geq 0 \Leftrightarrow (k+2)^{\frac{k}{k+1}} (k-1)^{\frac{1}{k+1}} \geq k$$

$$\Leftrightarrow (k+2)^k (k-1) \geq k^{k+1} \Leftrightarrow \left(\frac{k+2}{k}\right)^k \geq \frac{k}{k-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k \geq 1 + \frac{1}{k-1}$$

$$\text{Ta có: } \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k > 1 + \frac{2}{k} \cdot k = 3 > 1 + \frac{1}{k-1}, \forall k \geq 2 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h(x) \text{ tăng trên } (1; +\infty)$$

Mặt khác,  $h(x)$  là hàm liên tục và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ ;  $h(1) = k - k^{\frac{1}{k+1}} - k^{\frac{k+2}{k+1}} < -k^{\frac{1}{k+1}} < 0$

nên phương trình  $h(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x_0 > 1$

$\Rightarrow g'(x) = 0$  có nghiệm duy nhất  $x_0 > 1$ .

$\Rightarrow$  Bảng biến thiên của hàm  $g(x)$ . Từ đó suy ra

Max  $g(x) = g(x_0)$  với  $x_0$  là nghiệm của phương trình

$$h(x) = x^{k+2} - k^{\frac{1}{k+1}} x^{k+1} + (k-1)x - k^{\frac{k+2}{k+1}} = 0 \text{ và } g(x) = \frac{(x^{k+1} - 1)^k}{x^{k^2}} \left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}} - x\right].$$

Sử dụng Maple ta tính được các giá trị  $g(x_0)$  tương ứng với cách chọn các giá trị của  $k$ , ví dụ  $k = 500$  thì  $x_0 = 1.013294063$  và  $g(x_0) = 0.4577996$ .

| $x$     | 1 | $x_0$ | $+\infty$ |
|---------|---|-------|-----------|
| $g'(x)$ | + | 0     | -         |
| $g(x)$  |   | Max   |           |

### III. MỘT SỐ DẠNG PHÁT TRIỂN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SHAPIRO

Bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi bộ số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Tuy nhiên ta có thể chứng minh bất đẳng thức Shapiro đúng với bộ số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  đơn điệu

**Mệnh đề 7.** Cho bộ dãy số đơn điệu bất kỳ  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  tức là:

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0 \end{array} \right. \text{ Khi đó ta có } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}$$

#### Chứng minh

$$\text{Đặt } S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; T = \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1} + \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$S + T = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n + a_1} + \frac{a_n + a_1}{a_1 + a_2} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} \cdot \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n + a_1} \cdot \frac{a_n + a_1}{a_1 + a_2}} = n$$

Mặt khác, xét hiệu:

$$S - T = \frac{a_1 - a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 - a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n + a_1} + \frac{a_n - a_1}{a_1 + a_2}$$

Biến đổi biểu thức:  $a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$ .

Từ đó suy ra:

$$S - T = (a_1 - a_2) \left( \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right) + (a_2 - a_3) \left( \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right) + \dots + (a_{n-1} - a_n) \left( \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \right)$$

• Nếu  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$  thì  $a_1 - a_2 \leq 0; a_2 - a_3 \leq 0, \dots, a_{n-1} - a_n \leq 0$

Do  $a_1 + a_2$  là tổng nhỏ nhất trong các tổng  $a_i + a_j$  nên  $\frac{1}{a_1 + a_2}$  là số lớn nhất trong các số

$$\frac{1}{a_i + a_j} \Rightarrow \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} \leq 0, \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} \leq 0, \dots, \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \leq 0. \text{ Suy ra } S - T \geq 0.$$

• Nếu  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$  thì  $a_1 - a_2 \geq 0; a_2 - a_3 \geq 0, \dots, a_{n-1} - a_n \geq 0$

Do  $a_1 + a_2$  là tổng lớn nhất trong các tổng  $a_i + a_j$  nên  $\frac{1}{a_1 + a_2}$  là số nhỏ nhất trong các số

$$\frac{1}{a_i + a_j} \Rightarrow \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} \geq 0, \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} \geq 0, \dots, \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} \geq 0. \text{ Suy ra } S - T \geq 0.$$

Như vậy trong cả hai trường hợp, ta đều có  $S - T \geq 0$  hay  $S \geq T$ , suy ra

$$2S \geq S + T \geq n \Rightarrow S \geq \frac{n}{2}$$

**Chú ý:** Ta cũng có thể chứng minh mệnh đề bằng phương pháp quy nạp

Bây giờ chúng ta sẽ xét một hoán vị khác của  $a_1, a_2, \dots, a_n$  để dẫn đến mệnh đề sau

**Mệnh đề 8:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét bất đẳng thức sau:

$$\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_2}{a_1 + a_3} + \frac{a_3}{a_2 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_1} + \frac{a_1}{a_n + a_2} \geq \frac{cn}{2} \quad (12)$$

**a.** Khi  $c=1$  thì bất đẳng thức có đúng với mọi dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  hay không? Nếu không thì có tồn tại những giá trị xác định của  $n$  để nó đúng hay không?

**b.** Tồn tại hay không một hằng số  $c > 0$  để bất đẳng thức đúng với mọi dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

**c.** Tìm một cận dưới thích hợp cho hàm số  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Xét bất đẳng thức với  $n=3$  ta có:  $\varphi_3 = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_1} + \frac{a_3}{a_1 + a_2} \geq \frac{3}{2}$

Xét bất đẳng thức với  $n=4$  ta có:  $\varphi_4 = \frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} + \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3} \geq 2 \sqrt{\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} \cdot \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3}} = 2$

Ta sẽ chứng minh ba câu **a.** (bất đẳng thức không đúng khi  $n \geq 5$ ), **b.** và **c.** với kết quả: cận dưới đúng của hàm số  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là  $\lambda = 2$ .

Thật vậy chọn  $a_1 = a_2 = 1; a_k = a^k, \forall k \geq 3$  thì  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_k}{a_{k-1} + a_{k+1}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^k}{a^{k-1} + a^{k+1}} = 0, \forall k \geq 4$

Với  $k \leq 3$ :  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_2}{a_1 + a_3} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a^3} = 1, \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_3}{a_2 + a_4} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^3}{1 + a^4} = 0; \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_1}{a_n + a_2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1 + a^n} = 1$ .

Khi đó  $\lim_{a \rightarrow 0} \varphi_n(1, 1, a^3, \dots, a^n) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + a^3} + \frac{a^3}{1 + a^4} + \dots + \frac{a^n}{a^{n-1} + 1} + \frac{1}{a^n + 1} \right) = 2$

Giả sử tồn tại  $c > 0$  sao cho  $\varphi_n \geq \frac{cn}{2}$  thì  $2 \geq \frac{cn}{2}, \forall n \geq 4$ , nhưng điều này vô lí.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mọi  $n \geq 4$  thì  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 2$ .

Thật vậy, sử dụng CBS ta có  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)}$ .

Ta sẽ chứng minh  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$

Nếu  $n$  chẵn thì  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = [(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_n)]^2 \geq$

$$\geq 4(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1})(a_2 + a_4 + \dots + a_n) \geq 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$$

Nếu  $n$  lẻ thì giả sử  $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , khi đó ta có

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_n)(a_2 + a_4 + \dots + a_{n-1}) \geq 4(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$$

Năm 1973, nhà Toán học **Elbert** đã nghiên cứu bất đẳng thức trong mệnh đề sau đây:

**Mệnh đề 9:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét hằng số  $c$  tốt nhất của bất đẳng thức sau:

$$g_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1} \geq cn$$

Nếu đặt  $\psi(x)$  là một bao lồi dưới của hai hàm lồi  $f(x) = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ ;  $h(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x/2}}$

Đặt  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(n)}{n}$  với  $g(n) = \inf_{a_i \geq 0} g_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$  thì  $c = \psi(0) = 0.978012\dots$

Một hướng tiếp cận khác là so sánh các biểu thức hoán vị dạng **Shapiro** chúng ta xét mệnh đề:

**Mệnh đề 10:** Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét các biểu thức hoán vị sau:

$$E_n = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; \quad F_n = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1}$$

Chứng minh hoặc bác bỏ bất đẳng thức  $E_n \geq F_n$ .

Với  $n=3$  thì có thể viết  $E_3 = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ ;  $F_3 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Trong trường hợp này ta có bất đẳng thức đúng  $E_3 \geq F_3$ . Thật vậy, xét biểu thức

$G = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$ , theo **AM - GM** ta có  $E_3 + G \geq 3 = F_3 + G \Rightarrow E_3 \geq F_3$

Bây giờ chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát với lời giải của nhà toán học Mỹ

**Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, Illinois.**

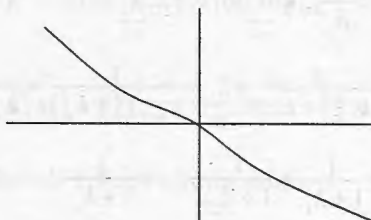
Sử dụng phương pháp bao lồi được phát triển bởi **Drinfeld** ta sẽ bác bỏ bất đẳng thức ở trong **Mệnh đề 10**. Trước khi làm điều này ta cần một kết quả mở đầu sau đây

Gọi  $f(x)$  là hàm được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^x)^{-1}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}(e^{-x} - 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

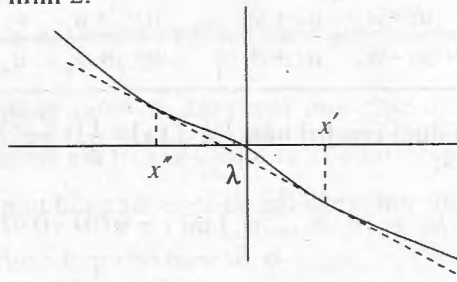
Dễ dàng kiểm tra được rằng  $f(x)$  là hàm lồi trên  $(-\infty, 0)$  và  $(0, +\infty)$ . Từ  $f'(0^-) = -\frac{1}{4}$

và  $f'(0^+) = -\frac{1}{2}$  ta suy ra đồ thị của  $f(x)$  có dạng như hình 1:



Hình 1

Gọi  $g(x)$  là một bao lồi của  $f(x)$  và luôn bé hơn hoặc bằng  $f(x)$ . Đồ thị của  $g(x)$  gồm ba phần như trên hình 2:



Hình 2

$(C_1)$   $y = (1 - e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}} + e^x)^{-1}$  khi  $x < x''$ ;  $(C_2)$   $y = \frac{1}{2}(e^{-x} - 1)$  khi  $x > x'$  và  $(C_3)$  là đường tiếp tuyến chung của  $(C_1)$  và  $(C_2)$  khi  $x'' \leq x \leq x'$ .

Kí hiệu  $\lambda$  là tung độ giao điểm của  $(C_3)$  với trục tung. Sử dụng Maple, các bạn đồng nghiệp, **Peter Andrews** và **William Slough**, đã chỉ ra rằng

$$\lambda = -0.0219875218...$$

**Định lí 1.** Với mọi số nguyên dương  $n$  và mọi số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có

$$E_n - F_n \geq \lambda n$$

**Định lí 2.** Trong định lí 1,  $\lambda$  là hằng số tốt nhất. Hay nói cách khác, với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại ít nhất một số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn

$$E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n$$

**Nhận xét.** Chọn  $\varepsilon = \frac{|\lambda|}{2}$ . Khi đó sử dụng định lí 2, tồn tại một số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n = \frac{\lambda}{2}n < 0$ . Đây chính là nhận xét bác bỏ bất đẳng thức nêu ra trong Mệnh đề 10.

**Chứng minh định lí 1.** Trong chứng minh dưới đây chúng ta sử dụng một bất đẳng thức quen biết đó là Bất đẳng thức **hoán vị**: Nếu  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  và  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$  thì

$$\sum_{i=1}^n x_k y_{k_i} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ trong đó } (k_1, \dots, k_n) \text{ là một hoán vị của bộ chỉ số } (1, 2, \dots, n).$$

Đặt  $k_1 = \frac{a_2}{a_1}; k_2 = \frac{a_3}{a_2}; \dots; k_n = \frac{a_1}{a_n}$ , khi đó  $k_1 k_2 \dots k_n = 1$ .

$$E_n = \frac{1}{k_1(1+k_2)} + \dots + \frac{1}{k_{n-1}(1+k_n)} + \frac{1}{k_n(1+k_1)}$$

$$F_n = \frac{1}{1+k_1} + \frac{1}{1+k_2} + \dots + \frac{1}{1+k_n}$$

Vậy

$$E_n - F_n = \frac{1}{k_1(1+k_2)} - \frac{1}{1+k_2} + \dots + \frac{1}{k_n(1+k_1)} - \frac{1}{1+k_1} = \left(\frac{1}{k_1} - 1\right) \frac{1}{1+k_2} + \dots + \left(\frac{1}{k_n} - 1\right) \frac{1}{1+k_1}$$

Gọi  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  là một hoán vị của  $(k_1, \dots, k_n)$  sao cho  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ . Khi đó dãy  $\frac{1}{m_1} - 1; \frac{1}{m_2} - 1; \dots; \frac{1}{m_n} - 1$  là dãy giảm và dãy  $\frac{1}{1+m_n}; \frac{1}{1+m_{n-1}}; \dots; \frac{1}{1+m_1}$  là dãy tăng.

Sử dụng bất đẳng thức **Hoán vị** ta có

$$\begin{aligned} E_n - F_n &\geq \left(\frac{1}{m_1} - 1\right) \frac{1}{1+m_n} + \dots + \left(\frac{1}{m_n} - 1\right) \frac{1}{1+m_1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1-m_i}{m_i(1+m_{n+1-i})} + \frac{1+m_{n+1-i}}{m_{n+1-i}(1+m_i)} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i + m_{n+1-i})(1-m_i m_{n+1-i})}{2m_i m_{n+1-i} (1+m_i)(1+m_{n+1-i})} \end{aligned}$$

Đặt  $c_i = m_i m_{n+1-i}$  ta nhận được  $E_n - F_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ , trong đó  $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \frac{m_i + m_{n+1-i}}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}$

Chú ý rằng  $c_1 c_2 \dots c_n = (m_1 m_2 \dots m_n)^2 = (k_1 k_2 \dots k_n)^2 = 1$ .

Nếu  $c_i \geq 1$  thì  $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \frac{m_i + m_{n+1-i}}{m_i + m_{n+1-i} + 1 + m_i m_{n+1-i}} \geq \frac{1-c_i}{2c_i}$ .

Nếu  $c_i < 1$  thì  $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \left(1 - \frac{1+m_i m_{n+1-i}}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}\right) \geq \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \left(1 - \frac{1+m_i m_{n+1-i}}{(1+2\sqrt{m_i m_{n+1-i}})^2}\right)$

$$= \frac{1-c_i}{2c_i} \cdot \left(1 - \frac{1+c_i}{(1+\sqrt{c_i})^2}\right) = \frac{1-\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i} + c_i}$$

ở đây chúng ta sử dụng bất đẳng thức quen biết  $(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})^2, \forall x, y \geq 0$ .

Vậy ta được:  $E_n - F_n \geq \sum_{c_i < 1} \frac{1-\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i} + c_i} + \sum_{c_i \geq 1} \frac{1-c_i}{2c_i}$

Đặt  $c_i = e^{x_i}$ , thì:  $E_n - F_n \geq \sum_{x_i < 0} \left(1 - e^{\frac{x_i}{2}}\right) \left(e^{\frac{x_i}{2}} + e^{x_i}\right) + \sum_{x_i \geq 0} \frac{1}{2} (e^{-x_i} - 1)$

Chú ý rằng từ  $c_1 c_2 \dots c_n = 1$  ta có  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ , bất đẳng thức trở thành

$$E_n - F_n \geq \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

Do  $f(x)$  là hàm lồi nên  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \geq g\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = g(0) = \lambda$

Tóm lại ta có  $E_n - F_n \geq \lambda n$ . Định lí 1 được chứng minh.



**Chứng minh định lý 2.** Với  $\varepsilon > 0$ , gọi  $x'$  và  $x''$  như ở hình 2.

Đặt  $u_0 = e^{x'}$ ,  $v_0 = e^{x''}$ ,  $\alpha_0 = \frac{x''}{x'' - x'}$ , dễ dàng kiểm tra  $\lambda = \alpha_0 \frac{1-u_0}{2u_0} + (1-\alpha_0) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0}$

Chú ý rằng  $u_0^{\alpha_0} \cdot v_0^{1-\alpha_0} = 1$  và  $0 < \alpha_0 < 1$ . Với  $n$  đủ lớn có thể tìm được  $\alpha_1$  và  $u_1$  sao cho  $\alpha_1$  là một phân số với mẫu số là  $n$  và tử số là số chẵn,  $u_1^{\alpha_1} \cdot v_0^{1-\alpha_1} = 1$ ,

$$\left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{v_0}} \right) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ và } \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0} - \lambda < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Do  $\alpha_1 n$  là chẵn nên ta có thể đặt

$$k_1 = \delta, k_2 = \frac{u_1}{\delta}, k_3 = \delta, k_4 = \frac{u_1}{\delta}, \dots, k_{\alpha_1 n - 1} = \delta, k_{\alpha_1 n} = \frac{u_1}{\delta}, k_{\alpha_1 n + 1} = \dots = k_n = \sqrt{v_0}.$$

Chú ý rằng  $k_1 k_2 \dots k_n = u_1^{\frac{1}{2}\alpha_1 n} \cdot v_0^{\frac{1}{2}(1-\alpha_1)n} = 1$ . Từ đó ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1-k_1}{k_2(1+k_2)} + \dots + \frac{1-k_n}{k_n(1+k_1)} = \frac{1-\delta}{\delta \left(1 + \frac{u_1}{\delta}\right)} \cdot \frac{\alpha_1 n}{2} + \frac{1 - \frac{u_1}{\delta}}{\frac{u_1}{\delta}(1+\delta)} \left( \frac{\alpha_1 n}{2} - 1 \right) \\ & + \frac{1 - \frac{u_1}{\delta}}{\frac{u_1}{\delta}(1 + \sqrt{v_0})} + \frac{1 - \sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}(1 + \sqrt{v_0})} (n - \alpha_1 n - 1) + \frac{1 - \sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}(1 + \delta)} \\ & = n \left[ \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{1-\delta}{\delta + u_1} + \frac{\delta - u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1 \right) + \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(u_1 - \delta\sqrt{v_0})}{u_1 \sqrt{v_0} (1+\delta)(1+\sqrt{v_0})} \right] \\ & \leq n \left[ \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{1-\delta}{\delta + u_1} + \frac{\delta - u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1 \right) + \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1) \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0} + v_0} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{v_0}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } \delta \text{ đủ nhỏ, } \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{1-\delta}{\delta + u_1} + \frac{\delta - u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1 \right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sử dụng (\*), ta suy ra

$$\frac{1-k_1}{k_2(1+k_2)} + \dots + \frac{1-k_n}{k_n(1+k_1)} = n \left( \frac{\varepsilon}{3} + \lambda + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \right) = n(\lambda + \varepsilon)$$

Cuối cùng, ta chọn  $a_1 = 1; \frac{a_{i+1}}{a_i} = k_i, 1 \leq i \leq n-1, \frac{a_1}{a_n} = k_n$ . Điều đó là có thể vì  $k_1 k_2 \dots k_n = 1$ .

Vậy ta có  $E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n$ . Định lý 2 được chứng minh xong.

IV. MỘT SỐ DẠNG PHÁT TRIỂN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC NESBIT

Bài 1. Cho  $a, b, c, d, p, q > 0$  và  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^k}{pb+qc} + \frac{b^k}{pc+qa} + \frac{c^k}{pa+qb} \geq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{p+q}$$

Bài 2. Cho  $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$

Bài 3. Cho  $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left( \frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right)$

Bài 4. Cho  $a, b, c, p > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{a(b^p + c^p)}{b^{p+1} + c^{p+1}} + \frac{b(c^p + a^p)}{c^{p+1} + a^{p+1}} + \frac{c(a^p + b^p)}{a^{p+1} + b^{p+1}} \right]$$

Bài 5. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \left[ \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)} \right]$$

Bài 6. Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2} \right], \forall a, b, c > 0$

Bài 7. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{ab+bc+ca}$$

Bài 8. Cho  $a \geq b \geq c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}$

Bài 9. Cho  $r, s$  là các số thực dương,  $r < s$  và  $a, b, c \in (r, s)$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} + \frac{(r-s)^2}{2r(r+s)}$$

Bài 10. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 11. a) Cho  $a, b, c > 0$  và số thực  $k$  thỏa mãn  $0 \leq k \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{2}$$

b) Tìm số thực  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức đúng với mọi  $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{2}$$

**Bài 12.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2}{3} \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{13}{6}$

**Bài 13.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq 2$

**Bài 14.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}$

**Bài 15.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2abc}{3(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{31}{18}$

**Bài 16.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{27abc}{2(a+b+c)^3} \geq 2$

**Bài 17.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

**Bài 18.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 9 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 6$

**Bài 19.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 16 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8$

**Bài 20.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$

**Bài 21.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2 \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^{\frac{2}{3}} \geq 2$

**Bài 22.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(b+c)^2} \right) \geq \frac{3}{2} \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq (ab+bc+ca) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(b+c)^2} \right)$$

**Bài 23.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

**Bài 24.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$

**Bài 25.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{bc}{a^2+bc} + \frac{ca}{b^2+ca} + \frac{ab}{c^2+ab}$

**Bài 26.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab}$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{7(a^3+b^3+c^3)}{4(a^3+b^3+c^3)+2abc}$

Bài 28. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3+abc}$$

Bài 29. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{6}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 30. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Bài 31. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

Bài 32. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{16(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Bài 33. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Bài 34. Cho  $a, b, c > 0$  và  $r, s$  là các số thực dương sao cho  $r \geq s$ .

$$\text{Chứng minh: } \frac{a^r}{b^r+c^r} + \frac{b^r}{c^r+a^r} + \frac{c^r}{a^r+b^r} \geq \frac{a^s}{b^s+c^s} + \frac{b^s}{c^s+a^s} + \frac{c^s}{a^s+b^s}$$

Bài 35. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 36. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^3 + \frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 37. Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $n \geq \log_2 3 - 1$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n + \frac{(2^{n+1}-3)abc}{2^{n-3}(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 38. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + 2(\sqrt{8}-3)\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2$$

Bài 39. Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{2c}{a+b}} + (2^n\sqrt{2}-3)\sqrt[n]{\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2^n\sqrt{2}$$

**Bài 40.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $k \geq \log_2 3 - 1$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k + \frac{3(2^{k+1}-3)}{2^k} \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 2$$

**Bài 41.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^n} + \frac{b}{(c+a)^n} + \frac{c}{(a+b)^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(a+b+c)^{n-1}}$$

**Bài 42.** Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$  và số thực  $\alpha \geq 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

**Bài 43.** Cho  $a, b, c > 0$  và số thực  $k$  thỏa mãn  $k \geq \frac{2}{3}$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$$

**Bài 44.** Cho  $a, b, c > 0$  và số thực  $r$  thỏa mãn  $r \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\frac{a}{b+c}\right)^r + \left(\frac{b}{c+a}\right)^r + \left(\frac{c}{a+b}\right)^r \geq \frac{3}{2^r}$$

**Bài 45.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{3n}{4} - \frac{1}{4} \left( \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \right)$$

**Bài 46.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là dãy số thực dương đơn điệu tăng tức là

$$\begin{cases} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0 \end{cases} \text{ Chứng minh: } \frac{a_1}{a_2+a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}$$

**Bài 47.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{4} \left( \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \right)$$

**Bài 48.** Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm số thực  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{k \cdot \max\{(a-b)^2; (b-c)^2; (c-a)^2\}}{ab+bc+ca}$$

**Bài 49.** Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 1 + \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$

**Bài 50.** Tìm hằng số tốt nhất của  $k$  để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + k \left( \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} - 1 \right)$$

## § 24.4. BẤT ĐẲNG THỨC JACK GARFUNKEL VÀ MỘT SỐ MỞ RỘNG

Một trong các dạng rất khó của bất đẳng thức là bài toán tìm hằng số tốt nhất trong đánh giá. Nói chung với dạng toán này của bất đẳng thức nhiều biến số chỉ có thể tìm được lời giải nếu ta quy được từ bất đẳng thức nhiều biến số về một biến số. Khi đó dấu đẳng thức không nhất thiết đạt tại tâm mà có thể xảy ra tại các điểm lệch nhau. Hằng số tốt nhất trong đánh giá thường là giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của một hàm số nào đó. Chúng ta cùng làm quen về dạng toán này qua bất đẳng thức nổi tiếng của nhà toán học Mỹ *Jack Garfunkel* đưa ra năm 1989.

**Bài toán. [Bài 1490\* tạp chí CRUX]** Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq k\sqrt{a+b+c} \text{ đúng với mọi } a, b, c \text{ là các số thực dương.}$$

Đây là bất đẳng thức khó và đã không có lời giải hoàn chỉnh nào được đưa ra trong một thời gian dài. Khó khăn đầu tiên là ở việc dự đoán giá trị nhỏ nhất của  $k$ , hay nói khác đi là xác định được trường hợp đẳng thức xảy ra. Rất khó đoán trước, là đẳng thức xảy ra không phải trong trường hợp  $a=b=c$  như vẫn thường gặp. Vậy làm thế nào để tìm được giá trị đó. Những tìm tòi sâu sắc về bất đẳng thức trong những năm gần đây cho chúng ta một số kinh nghiệm để giải quyết vấn đề này. Đó là đối với các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị ba biến thì đẳng thức thường xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc biến còn lại đạt giá trị biên.

Sử dụng nhận xét này ta xét  $b=c$ , khi đó bất đẳng thức trở thành:  $\sqrt{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{2} \leq k\sqrt{a+2b}$ .

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz*:  $\sqrt{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)(a+b+b)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{a+2b}$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$ . Từ 2 đánh giá trên suy ra  $k \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Xét các giá trị tại biên:

Nếu  $c=0$ , bất đẳng thức trở thành  $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a+b}$  hay là  $\sqrt{b(a+b)} \leq (k-1)(a+b) + b$ .

Cho  $b=0$  ta thu được  $k \geq 1$ , do đó  $k-1 \geq 0$ . Áp dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có  $(k-1)(a+b) + b \geq 2\sqrt{k-1}\sqrt{b(a+b)}$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(k-1)a = (2-k)b$ , điều này chỉ có thể nếu  $1 \leq k \leq 2$ . Từ đây thu được  $2\sqrt{k-1} \geq 1$  hay là  $k \geq \frac{5}{4}$ .

Do  $\frac{5}{4} > \sqrt{\frac{3}{2}}$  nên  $\frac{5}{4}$  có khả năng là giá trị cần tìm. Ta sẽ đi chứng minh điều đó.

**Bất đẳng thức Jack Garfunkel.** Với các số thực không âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ  $(a, b, c)$  là các hoán vị của  $(3, 1, 0)$ .

Đây là một bất đẳng thức đại số rất nổi tiếng: đẹp, khó và đầy thách thức. Những lời giải của nó đồng thời cũng cho ta những phương pháp mới để chứng minh một số lớp bất đẳng thức khác. Sau đây là một số lời giải chúng tôi tập hợp được từ năm 2003.

**Lời giải 1. [2003, Gabriel Dospinescu]**

$$\text{Đặt } x = \sqrt{\frac{a+b}{2}}, y = \sqrt{\frac{a+c}{2}}, z = \sqrt{\frac{b+c}{2}} \Rightarrow a = x^2 + y^2 - z^2, b = x^2 + z^2 - y^2, c = y^2 + z^2 - x^2$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{y} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{z} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\text{hay } x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ .

Do  $\frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{5}{4} (x + \sqrt{y^2 + z^2})$  nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5}{4} (x + \sqrt{y^2 + z^2})$$

Điều này tương đương với  $f(x) \leq 0$  với mọi  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y$  trong đó:

$$f(x) = 4(y-z)x^3 - yzx^2 + (4z^3 - 4y^3 + 4y^2z + 4yz^2 - 5yz\sqrt{y^2 + z^2})z + 4yz(y^2 - z^2)$$

Nếu  $y = z$  thì  $f(x) = -xy^2(x-y) - xy^3(5\sqrt{2} - 7) \leq 0$ . Giả sử  $y > z$  ta có

$$f(0) = 4yz(y^2 - z^2 \geq 0); \quad f(y) = y^2z(3y + 4z - 5\sqrt{y^2 + z^2}) \leq 0$$

$$f(\sqrt{y^2 + z^2}) = 2yz(4z\sqrt{y^2 + z^2} - y^2 - 5z^2) = -2yz(\sqrt{y^2 + z^2} - 2z)^2 \leq 0$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Vì vậy  $f(x)$  có 1 nghiệm  $x_1 \leq 0$ , 1 nghiệm  $x_2 \in (0, y]$  và 1 nghiệm  $x_3 \geq \sqrt{y^2 + z^2}$ , tức là  $f(x)$

không có nghiệm nằm giữa  $y$  và  $\sqrt{y^2 + z^2}$ , nghĩa là  $f(x)$  không đổi dấu trên  $[y, \sqrt{y^2 + z^2}]$ ,

nhưng  $f(y) \leq 0$  và  $f(\sqrt{y^2 + z^2}) \leq 0$ , vì thế  $f(x) \leq 0$  với mọi  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y$ .

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y^2 + z^2} \\ 2y = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \Leftrightarrow x:y:z = (2:1:\sqrt{3}) \Leftrightarrow a:b:c = 0:3:1.$$

**Bình luận.** Ý tưởng đổi biến  $(a, b, c)$  thành  $(x, y, z)$  là rất tự nhiên. Bước quan trọng nhất trong chứng minh là sử dụng bất đẳng thức  $\frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{5}{4} (x + \sqrt{y^2 + z^2})$ . Đây là một suy nghĩ mạo hiểm, bởi vì nó phá vỡ tính chất hoán vị của bất đẳng thức ban đầu. Từ đánh giá này chúng ta nhận được các biểu thức  $f(y)$  và  $f(\sqrt{y^2 + z^2})$  đơn giản đến không ngờ. Đây quả thực là một lời giải rất đẹp và can đảm.



**Lời giải 2.** [2006, Phạm Kim Hùng] Theo ý tưởng đổi biến trong lời giải 1 ta sẽ chứng minh

$$x + y + z + \frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{hay}$$

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)^2}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} (x+y+z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x+y+z)^2$$

với mọi  $\sqrt{y^2 + z^2} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ . Bây giờ ta sẽ chứng minh nhận xét sau:

**Nhận xét.** Nếu ta giảm  $x, y, z$  đi cùng một đại lượng  $t$  ( $0 \leq t \leq z$ ) thì vế trái tăng trong khi vế phải giảm. Thật vậy, ta sẽ chứng minh  $f(t) = \frac{(x+y+z-3t)^2}{(x-t)(y-t)(z-t)}$  là hàm tăng trên  $[0, z]$  và

$$g(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} (x+y+z-3t) \sqrt{(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} - (x+y+z-3t)^2 \quad \text{giảm trên } [0, z]$$

Thật vậy, đặt  $m = x-t, n = y-t, p = z-t$  và  $A = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, B = m+n+p$ , khi đó ta có  $m^2 n^2 p^2 f'(t) = (m+n+p)((m+n+p)(mn+np+pm) - 6mnp) \geq 0$  và theo **AM-GM** thì

$$g'(t) = -\left(\frac{15\sqrt{2}}{4} A + \frac{5\sqrt{2}}{4} \frac{B^2}{A} - 6B\right) \leq 0, \text{ tức là } g(t) \text{ giảm trên } [0, z]. \text{ Nhận xét được chứng minh.}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau khi đã cùng giảm  $x, y, z$  đi một lượng  $t$  nằm giữa 0 và  $z$ . Ta chọn  $t$  sao cho  $(x-t)^2 = (y-t)^2 + (z-t)^2$  (dễ thấy tồn tại  $t$  như vậy), vì thế ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $x^2 = y^2 + z^2$ , nghĩa là  $c = 0$ .

$$\text{Khi } c = 0 \text{ bất đẳng thức trở thành } \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{b} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a+b} - 2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a+b}} \geq 0, \text{ đúng (đpcm)}$$

**Bình luận.** Lời giải trên đã sử dụng phương pháp dồn biến toàn miền. Đây là một phương pháp rất mạnh để giải các bất đẳng thức ba biến đối xứng hay hoán vị mà đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau hoặc một biến đạt giá trị biên.

Một điểm thú vị nữa trong lời giải trên là việc nhân hai vế của bất đẳng thức với  $(x+y+z)$  trước khi sử dụng nhận xét. Tại sao phải làm việc này? Hãy xét bất đẳng thức:

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x+y+z)$$

Nếu ta cùng giảm  $x, y, z$  đi một đại lượng  $t$  ( $0 \leq t \leq z$ ) thì vế trái tăng. Xét vế phải:

$$f(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sqrt{(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} - (x+y+z-3t)$$

Dễ dàng chứng minh hàm số này không tăng cũng không giảm. Vì thế ta không thu được kết luận gì.

**Lời giải 3.** [2007, Võ Quốc Bá Cẩn] Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz** ta có:

$$VT^2 \leq \sum_{cyc} a(5a+b+9c) \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} = 5(a+b+c)^2 \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}$$

Ta cần chứng minh  $(a+b+c) \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \leq \frac{5}{16}$ . Bất đẳng thức này đúng bởi vì:

$$16(VP - VT)(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b) = \\ \sum_{cyc} ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 + 243 \sum_{cyc} a^3 b^2 c + 835 \sum_{cyc} a^3 b c^2 + 232 \sum_{cyc} a^4 b c + 1230 a^2 b^2 c^2 \geq 0$$

**Bình luận.** Bước sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* rất thú vị. Ta có thể giải thích các hệ số 5, 1, 9 được tìm ra như thế nào. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \leq (ax+by+cz) \left( \frac{a}{x(a+b)} + \frac{b}{y(b+c)} + \frac{c}{z(c+a)} \right) \text{ với } x, y, z > 0$$

Một cách tự nhiên ta có thể chọn  $x = a + mb + nc, y = b + mc + na, z = c + ma + nb$  với  $m, n \geq 0$

$$\text{Khi đó ta có } \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \leq \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(a+b)(a+mb+nc)} \right) \left( \sum_{\text{cyc}} a(a+mb+nc) \right)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a(a+b)(a+mb+nc)^2}{a} = \frac{b(b+c)(b+mc+na)^2}{b} = \frac{c(c+a)(c+ma+nb)^2}{c}$$

Ta đã biết bất đẳng thức ban đầu đẳng thức xảy ra khi  $a = 3, b = 1, c = 0$  (và các hoán vị), thay các giá trị đó vào điều kiện trên ta nhận được  $4(3+m)^2 = (1+3n)^2$  hay  $2m - 3n = -5$ . Ngoài ra, để đơn giản, ta sẽ chọn  $m, n$  thỏa mãn  $\sum_{\text{cyc}} a(a+mb+nc) = (a+b+c)^2$ , nghĩa là  $m+n=2$ .

Vì vậy  $m = \frac{9}{5}, n = \frac{1}{5}$ . Cuối cùng ta cần chứng minh bất đẳng thức hoán vị với bậc 6.

Lời giải tiếp theo thuần túy sử dụng bất đẳng thức *AM – GM*, phần bình luận dành cho bạn đọc.

**Lời giải 4. [2008, Lê Hữu Điền Khuê]**

Giả sử  $a+b+c=1$  và đặt  $A = (a+b)(b+c)(c+a), B = \sum_{\text{cyc}} a^2(b+c)(c+a)$ .

$$\text{Khi đó: } \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c} \Leftrightarrow \left( \sum_{\text{cyc}} a \sqrt{(b+c)(c+a)} \right)^2 \leq \frac{25}{16} A$$

$$\Leftrightarrow B + 2 \sum_{\text{cyc}} ab(a+c) \sqrt{(a+b)(b+c)} \leq \frac{25}{16} A \Leftrightarrow 32 \sum_{\text{cyc}} ab(a+c) \sqrt{(a+b)(b+c)} \leq 25A - 16B$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* cho hai số ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &= 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} ab \sqrt{a+c} \right)^2 = 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (c+a) + 2 \sum_{\text{cyc}} ab^2 c \sqrt{(a+c)(a+b)} \right) \\ &\leq 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (c+a) + 2 \sum_{\text{cyc}} ab^2 c (2a+b+c) \right) = 2^{10} A (ab+bc+ca) (a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc) \\ &= 4 \left[ 32A \sum_{\text{cyc}} bc \right] (8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc) \leq \left[ 32A \sum_{\text{cyc}} bc + (8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc) \right]^2 \end{aligned}$$

Vì thế, chỉ cần chứng minh  $32A(ab+bc+ca) + 8a^2 b + 8b^2 c + 8c^2 a + 24abc \leq 25A - 16B$

$$\Leftrightarrow 32A(ab+bc+ca) + 8(a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc)(a+b+c)^2 \leq 25A(a+b+c)^2 - 16B(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} ab(a+b)(a-3b+2c)^2 + 2abc \left( 3 \sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} ab \right) \geq 0, \text{ đúng (đpcm).}$$

**Nhận xét.** Bước đầu tiên sử dụng *AM – GM* có thể thay thế bởi sử dụng *Cauchy – Schwarz*

$$VT^2 = 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} ab \sqrt{a+c} \right)^2 \leq 2^{10} A \left( \sum_{\text{cyc}} ab \right) \left( \sum_{\text{cyc}} ab(a+c) \right) = 2^{10} A (ab+bc+ca) (a^2 b + b^2 c + c^2 a + 3abc)$$

Bây giờ chúng tôi chuyển sang một số dạng tổng quát của bất đẳng thức này.

Cách tổng quát đơn giản nhất là tăng số biến. Ta có bài toán như sau:

**Bài toán 1.** Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho với các số thực không âm  $a, b, c, d$  ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

Lời giải sau đây được phát triển dựa trên bất đẳng thức *Jack Garfunkel*.

**Lời giải.** Cho  $(a, b, c, d) = (3, 1, 0, 0)$  ta nhận được  $k \geq \frac{5}{4}$ . Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đối

với  $k = \frac{5}{4}$  và do đó  $\frac{5}{4}$  là giá trị cần tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử  $c = \min(a, b, c, d)$ .

Theo bất đẳng thức *Jack Garfunkel* ta có:  $\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy } \sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b+c}} &\leq \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}} - \frac{d}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{b+d+a}} \\ &\leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d} - \frac{d}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{b+d+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Do  $d+a+b \geq c+d+a$  nên ta có điều phải chứng minh.

**Nhận xét.** Cũng theo ý tưởng này các bạn có thể giải bài toán sau đây:

**Bài toán 2.** Chứng minh với mọi số thực không âm  $a, b, c, k$  thỏa mãn  $k \leq \max\{a, b, c\}$  ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+k}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+k}} + \frac{c}{\sqrt{c+a+k}} + \frac{k}{\sqrt{a+b+c}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+k}$$

Với  $k = 0$  ta có bất đẳng thức *Jack Garfunkel*.

Lời giải của bài toán 1 còn giúp chúng ta giải được bài toán tổng quát hơn sau đây:

**Bài toán 3.** Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2 và các số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Tìm hằng số thực  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3+\dots+a_n}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1+\dots+a_{n-2}}} \leq k\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_n}$$

**Lời giải.** Cho  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (3, 1, 0, \dots, 0)$  ta nhận được  $k \geq \frac{5}{4}$ . Nếu ta có thể chứng minh bất đẳng

thức với  $k = \frac{5}{4}$  thì  $\frac{5}{4}$  sẽ là giá trị cần tìm. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp.

Với  $n = 3$  ta có bất đẳng thức *Jack Garfunkel*.

Giả sử bất đẳng thức đúng tới  $n$ , ta chứng minh nó cũng đúng với  $n+1$ .

Đặt  $VT = f(a_1, a_2, \dots, a_n) = A_n$ , thì  $A_n \leq \frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_n}$  với mọi  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$

Ta sẽ chứng minh  $A_{n+1} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_2+\dots+a_{n+1}}$ . Giả sử  $a_{n-1} = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ .

Đặt  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + a_{n+1}$  và  $B_n = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Thế thì } A_{n+1} &= \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} + \frac{b_2}{\sqrt{b_2 + b_3 + \dots + b_n}} + \dots + \\ &\frac{b_{n-1}}{\sqrt{b_{n-1} + b_n + b_1 + \dots + b_{n-3}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \left( \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \right) + \left( \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \right) \end{aligned}$$

Do đó, từ  $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$  và

$a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}$  suy ra  $A_{n+1} \leq B_n$ .

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp  $B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$ .

Vì vậy  $A_{n+1} \leq B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$ . (đpcm)

**Bình luận:** Có thể thấy mở rộng bài toán theo cách này, các kết quả đạt được là khá trọn vẹn.

Một câu hỏi khác là tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c, d \geq 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k \sqrt{a+b+c+d}$$

Đây là một bài toán rất khó và vẫn chưa có lời giải hoàn chỉnh

Tuy nhiên, sử dụng máy tính, **Ji Chen** đã tìm ra kết quả xấp xỉ như sau:

Giá trị cần tìm  $k = 1,4352668092582209310763 \dots$  là nghiệm của đa thức

$$16k^{16} + 215k^{14} - 6520k^{12} - 119315k^{10} + 2624314k^8 - 13071319k^6 + 4783212k^4 - 63453437k^2 + 2805634$$

Đẳng thức đạt được khi  $d = 0$  và  $a, b, c$  lần lượt là nghiệm của các đa thức bất khả quy sau đây

$$3016x^8 - 30106x^7 + 130587x^6 - 320588x^5 + 285356x^4 - 461664x^3 + 267664x^2 - 85824x + 11584$$

$$1508y^8 + 14679y^7 + 58928y^6 + 124964y^5 + 147560y^4 + 90672y^3 + 19264y^2 - 4752y - 1600$$

$$754z^8 - 5845z^7 + 19716z^6 - 37935z^5 + 45610z^4 - 35003z^3 + 16560z^2 - 4241z + 400$$

Rõ ràng đây không phải một kết quả đẹp. Vì thế vẫn có thể coi đây là một bài toán mở.

Có một kết quả khá đẹp cùng dạng, mặc dù yếu hơn.

**Bài toán 4.** Với các số thực không âm  $a, b, c, d$  chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} < \frac{3}{2} \sqrt{a+b+c+d}$$

**Lời giải.** [Võ Quốc Bá Cẩn]

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c+d=1$  và  $a=c \geq b+d$ . Đặt  $x=a+c$  thì  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Sử dụng bất đẳng thức *Jack Garfunkel* ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c} = \frac{5}{4} \sqrt{1-d} \text{ và}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{c+d+a} = \frac{5}{4} \sqrt{1-b}. \text{ Vì vậy}$$

$$\sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{1-d} - \frac{c}{\sqrt{c+a}} + \frac{5}{4} \sqrt{1-b} - \frac{a}{\sqrt{a+c}}.$$

$$= \frac{5}{4} (\sqrt{1-b} + \sqrt{1-d}) - \sqrt{c+a} \leq \frac{5}{4} \sqrt{2(2-b-d)} - \sqrt{c+a} = \frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x}$$

Dễ dàng kiểm tra  $\frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$  với mọi  $1 \geq x \geq \frac{1}{2}$ . Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý rằng đẳng thức không xảy ra.

Chúng ta có thể thay đổi hệ số của các biến để nhận được các bất đẳng thức thú vị sau đây:

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

Đối với bất đẳng thức này không có dấu đẳng thức, và  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  không phải là hằng số tốt nhất.

Một kết quả mạnh hơn phát biểu trong bài toán dưới đây:

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq k \sqrt{a+b+c}$$

Trong đó  $k = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \sqrt{-1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1.17995968$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = 2+2\sqrt{3}, b=1, c=0$  và các hoán vị.

**Lời giải.** Đặt  $x = \sqrt{a+2b}, y = \sqrt{b+2c}, z = \sqrt{b+2c}$  thì

$$a = \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9}, b = \frac{z^2 + 4x^2 - 2y^2}{9}, c = \frac{y^2 + 4z^2 - 2x^2}{9}$$

Và bất đẳng thức trở thành  $\sum_{cyc} \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$  hay là

Đặt  $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + a_{n+1}$  và  $B_n = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Thế thì } A_{n+1} &= \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} + \frac{b_2}{\sqrt{b_2 + b_3 + \dots + b_n}} + \dots + \\ &\quad \frac{b_{n-1}}{\sqrt{b_{n-1} + b_n + b_1 + \dots + b_{n-3}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \\ &= B_n + \left( \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} \right) + \left( \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}}} \right) \end{aligned}$$

Do đó, từ  $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$  và

$a_{n+1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq b_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2}$  suy ra  $A_{n+1} \leq B_n$ .

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp  $B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$ .

Vì vậy  $A_{n+1} \leq B_n \leq \frac{5}{4} \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}$  (đpcm)

**Bình luận:** Có thể thấy mở rộng bài toán theo cách này, các kết quả đạt được là khá trọn vẹn.

Một câu hỏi khác là tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c, d \geq 0$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k \sqrt{a+b+c+d}$$

Đây là một bài toán rất khó và vẫn chưa có lời giải hoàn chỉnh

Tuy nhiên, sử dụng máy tính, **Ji Chen** đã tìm ra kết quả xấp xỉ như sau:

Giá trị cần tìm  $k = 1,4352668092582209310763 \dots$  là nghiệm của đa thức

$$16k^{16} + 215k^{14} - 6520k^{12} - 119315k^{10} + 2624314k^8 - 13071319k^6 + 4783212k^4 - 63453437k^2 + 2805634$$

Đẳng thức đạt được khi  $d = 0$  và  $a, b, c$  lần lượt là nghiệm của các đa thức bất khả quy sau đây

$$3016x^8 - 30106x^7 + 130587x^6 - 320588x^5 + 285356x^4 - 461664x^3 + 267664x^2 - 85824x + 11584$$

$$1508y^8 + 14679y^7 + 58928y^6 + 124964y^5 + 147560y^4 + 90672y^3 + 19264y^2 - 4752y - 1600$$

$$754z^8 - 5845z^7 + 19716z^6 - 37935z^5 + 45610z^4 - 35003z^3 + 16560z^2 - 4241z + 400$$

Rõ ràng đây không phải một kết quả đẹp. Vì thế vẫn có thể coi đây là một bài toán mở.

Có một kết quả khá đẹp cùng dạng, mặc dù yếu hơn.

**Bài toán 4.** Với các số thực không âm  $a, b, c, d$  chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} < \frac{3}{2} \sqrt{a+b+c+d}$$

**Lời giải.** [Võ Quốc Bá Cẩn]

Không mất tính tổng quát giả sử  $a+b+c+d=1$  và  $a=c \geq b+d$ . Đặt  $x=a+c$  thì  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Sử dụng bất đẳng thức **Jack Garfunkel** ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c} = \frac{5}{4} \sqrt{1-d} \text{ và}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{c+d+a} = \frac{5}{4} \sqrt{1-b}. \text{ Vì vậy}$$

$$\begin{aligned} \sum_{a,b,c,d} \frac{a}{\sqrt{a+b}} &\leq \frac{5}{4} \sqrt{1-d} - \frac{c}{\sqrt{c+a}} + \frac{5}{4} \sqrt{1-b} - \frac{a}{\sqrt{a+c}} \\ &= \frac{5}{4} (\sqrt{1-b} + \sqrt{1-d}) - \sqrt{c+a} \leq \frac{5}{4} \sqrt{2(2-b-d)} - \sqrt{c+a} = \frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

Để dàng kiểm tra  $\frac{5}{4} \sqrt{2(1+x)} - \sqrt{x} \leq \frac{3}{2}$  với mọi  $1 \geq x \geq \frac{1}{2}$ . Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý rằng đẳng thức không xảy ra.

Chúng ta có thể thay đổi hệ số của các biến để nhận được các bất đẳng thức thú vị sau đây:

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

Đối với bất đẳng thức này không có dấu đẳng thức, và  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  không phải là hằng số tốt nhất.

Một kết quả mạnh hơn phát biểu trong bài toán dưới đây:

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng với các số thực âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq k \sqrt{a+b+c}$$

Trong đó  $k = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1.17995968$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=2+2\sqrt{3}, b=1, c=0$  và các hoán vị.

**Lời giải.** Đặt  $x=\sqrt{a+2b}, y=\sqrt{c+2a}, z=\sqrt{b+2c}$  thì

$$a = \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9}, b = \frac{z^2 + 4x^2 - 2y^2}{9}, c = \frac{y^2 + 4z^2 - 2x^2}{9}$$

Và bất đẳng thức trở thành  $\sum_{cyc} \frac{x^2 + 4y^2 - 2z^2}{9x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$  hay là



$$2 \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2 - z^2}{x} + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2}{x} - 2(x + y + z) \leq 3k \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 3(x + y + z) \text{ hoặc một cách khác}$$

$$2(x - y)(y - z)(x - z) \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \leq 3k \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 3(x + y + z) - 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(x - y)^2}{x}$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $\sqrt{\frac{y^2 + 4z^2}{2}} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ .

Từ điều kiện  $2x^2 \leq y^2 + 4z^2$ , dễ dàng kiểm tra phương trình  $2(x - t)^2 = (y - t)^2 + 4(z - t)^2$  có hai nghiệm  $0 \leq t_1 \leq \min(t_2, z)$  và với mọi  $0 \leq t \leq t_1$  ta có  $2(x - t)^2 \leq (y - t)^2 + 4(z - t)^2$ .

Ta có thể giảm  $x, y, z$  đi một đại lượng  $t$  nằm trong  $[0, t_1]$ , khi đó về trái tăng.

Ta có thể chứng minh về phải giảm, có nghĩa là hàm số

$$f(t) = 3k \sqrt{3((x - t)^2 + (y - t)^2 + (z - t)^2)} - 3(x + y + z - 3t) - 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(x - y)^2}{x - t} \text{ giảm trên } [0, t_1].$$

Thật vậy, đặt  $m = x - t, n = y - t, p = z - t$  thì  $f'(t) = -9k \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} + 9 - 2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2}$

Ta sẽ chứng minh  $2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq 9 - 9k \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}}$

Do  $k > 1$  ta chỉ cần chứng minh  $2 \sum_{m, n, p} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq 9 - 9 \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}}$ . Ta có

$$VP = 9 \left( 1 - \frac{m + n + p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} \right) = \frac{27(m^2 + n^2 + p^2) - 9(m + n + p)^2}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} (\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} + m + n + p)} \geq \frac{9 \sum_{\text{cyc}} (m - n)^2}{2(m + n + p)^2}$$

Vì vậy chỉ cần chứng minh  $2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(m - n)^2}{m^2} \geq \frac{9 \sum_{\text{cyc}} (m - n)^2}{2(m + n + p)^2}$  hay  $\sum_{\text{cyc}} (m - n)^2 \left( \frac{4}{m^2} - \frac{9}{(m + n + p)^2} \right) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì

$$2(m + n + p) \geq 2m + \sqrt{4n^2 + 4p^2} \geq 2m + \sqrt{n^2 + 4p^2} \geq 3m \geq 3n \geq 3p.$$

Bây giờ ta cần chứng minh bất đẳng thức sau khi đã giảm các biến đi một đại lượng  $t \in [0, t_1]$ .

Nếu chọn  $t = t_1$  ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp  $2x^2 = y^2 + 4z^2$ ,

nghĩa là  $c = 0$ . Bất đẳng thức ban đầu trở thành  $\frac{a}{\sqrt{a + 2b}} + \sqrt{b} \leq k \sqrt{a + b}$ .

Giả sử  $a + b = 1$  ta phải chứng minh  $g(b) = \frac{1 - b}{\sqrt{1 + b}} + \sqrt{b} \leq k$  với mọi  $b \in [0, 1]$ .

Ta có  $g'(b) = -\frac{(b+3)}{2(1+b)\sqrt{1+b}} + \frac{1}{2\sqrt{b}}$ . Do đó  $g'(b)$  cùng dấu với  $\sqrt{(1+b)^3} - (b+3)\sqrt{b}$ ,

nghĩa là cùng dấu với  $(1+b)^3 - (b+3)^2 b = -3b^2 - 6b + 1$ .

Dễ dàng chứng minh rằng  $\max_{[0,1]} g(b) = g\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = k$ .

Bất đẳng thức được chứng minh. Tổng quát hơn ta có

**Bài toán 7.** Cho  $q$  là số thực thỏa mãn  $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$  hoặc  $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26} \approx 1.193375245$ . Tìm hằng số thực  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực  $a, b, c$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

*Lời giải.*

**Trường hợp 1.** Xét  $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ , cho  $a=b=c=1$  ta nhận được  $k \geq \sqrt{\frac{3}{q+1}}$ .

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức:  $\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq \sqrt{\frac{3}{q+1}}\sqrt{a+b+c}$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}}\right)^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa}\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh  $\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa} \leq \frac{3}{1+q}$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{a+qb}\right) + \left(1 - \frac{b}{b+qc}\right) + \left(1 - \frac{c}{c+qa}\right) \geq 3 - \frac{3}{1+q} \Leftrightarrow \frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \geq \frac{3}{1+q}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$\frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(c+qa) + b(a+qb) + c(b+qc)}.$$

Ta chỉ cần chứng minh  $(1+q)(a+b+c)^2 \geq 3(a(c+qa) + b(a+qb) + c(b+qc))$

$$\Leftrightarrow (1-2q)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \Leftrightarrow (1-2q)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy giá trị cần tìm là  $\sqrt{\frac{3}{q+1}}$ .

**Trường hợp 2.**  $q \geq \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$ . Cho  $x = \sqrt{a+qb}$ ,  $y = \sqrt{b+qc}$ ,  $z = \sqrt{c+qa}$  thì

$$a = \frac{x^2 + q^2 y^2 - qz^2}{9}, b = \frac{z^2 + q^2 x^2 - qy^2}{9}, c = \frac{y^2 + q^2 z^2 - qx^2}{9}.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 + q^2 y^2 - qz^2}{(q^3 + 1)x} \leq k \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{q+1}} \\
& \Leftrightarrow q \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2 - z^2}{x} + (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{q^2}{x} - (q^2 - q)(x + y + z) \leq \\
& \leq \frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (q^2 - q + 1)(x + y + z) \\
& \Leftrightarrow q(x - y)(y - z)(z - x) \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \leq \\
& \leq \frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (q^2 - q + 1)(x + y + z) - (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{(x - y)^2}{x}
\end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp  $\sqrt{\frac{y^2 + qz^2}{q}} \geq x \geq y \geq z \geq 0$ .

Từ điều kiện  $qx^2 \leq y^2 + q^2 z^2$ , suy ra tồn tại  $0 \leq t_1 \leq z, q(x - t_1)^2 = (y - t_1)^2 + q^2(z - t_1)^2$  và với mọi  $0 \leq t \leq t_1$  ta có  $q(x - t)^2 \leq (y - t)^2 + q^2(z - t)^2$ .

Nếu ta giảm  $x, y, z$  đi một lượng  $t \in [0, t_1]$  thì vế trái tăng, ta chứng minh vế phải giảm, và như thế chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp  $c = 0$ . Xét hàm số

$$f(t) = \frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \sqrt{(x+t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2} - (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)^2}{x-t} - (q^2 - q + 1)(x + y + z - 3t)$$

Đặt  $m = x - t, n = y - t, p = z - t$  ta có

$$f'(t) = -\frac{k(q^3 + 1)}{\sqrt{q+1}} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} + 3(q^2 - q + 1) - (q^2 - q) \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2}$$

$$\text{Ta phải chứng minh } 3(q^2 - q + 1) \left( 1 - \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right) \leq (q^2 - q) \sum_{m,n,p} \frac{(m-n)^2}{m^2}$$

Từ bất đẳng thức ban đầu, cho  $a = b = c = 1$  thì ta nhận được  $k \geq \sqrt{\frac{3}{1+q}} \Leftrightarrow \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$  vì thế

$$3(q^2 - q + 1) \left( 1 - \frac{k\sqrt{q+1}}{3} \frac{m+n+p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right) \leq 3(q^2 - q + 1) \left( 1 - \frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)}} \right)$$

Do đó cần chứng minh

$$3(q^2 - q + 1) \frac{3(m^2 + n^2 + p^2) - (m+n+p)^2}{\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} (\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2)} + m+n+p)} \leq (q^2 - q) \sum_{\text{cyc}} \frac{(m-n)^2}{m^2}$$

hay có thể viết lại là  $S_p(m-n)^2 + S_m(n-p)^2 + S_n(m-p)^2 \geq 0$  trong đó

$$S_p = n^2 p^2 \left[ 2(q^2 - q)(m + n + p)^2 - 3(q^2 - q + 1)m^2 \right],$$

$$S_m = p^2 m^2 \left[ 2(q^2 - q)(m + n + p)^2 - 3(q^2 - q + 1)n^2 \right],$$

$$S_n = m^2 n^2 \left[ 2(q^2 - q)(m + n + p)^2 - 3(q^2 - q + 1)p^2 \right].$$

Vì  $m \geq n \geq p \geq 0$ , ta có  $2(q^2 - q)(m + n + p)^3 \geq 18(q^2 - q)p^2 \geq 3(q^2 - q + 1)p^2$ , do đó  $S_n \geq 0$

Vì vậy từ  $S_n(m - p)^2 \geq S_n(m - n)^2 + S_n(n - p)^2$  ta phải chứng minh

$$S_m + S_n \geq 0 \text{ và } S_n + S_p \geq 0$$

Điều này đúng bởi vì  $\frac{1}{2m^2}(S_m + S_n) = (q^2 - q)(m + n + p)^2(p^2 + n^2) - 3(q^2 - q + 1)n^2 p^2$

$$\geq (q^2 - q) \frac{9}{4}(n + p)^2(p^2 + n^2) - 3(q^2 - q + 1)n^2 p^2 \geq 18(q^2 - q)n^2 p^2 - 3(q^2 - q + 1)n^2 p^2 \geq 0 \text{ và}$$

$$\frac{1}{2n^2}(S_p + S_n) = (q^2 - q)(m + n + p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2 p^2$$

$$\geq (q^2 - q)(m + 2p)^2(m^2 + p^2) - 3(q^2 - q + 1)m^2 p^2$$

$$\geq (q^2 - q) \cdot 8mp \cdot 2mp - 3(q^2 - q + 1)m^2 p^2 \geq 0$$

Như vậy ta đã chứng minh  $f(t)$  nghịch biến. Theo lập luận ở trên, ta chỉ cần xét bất đẳng thức

ban đầu trong trường hợp  $c = 0$ , nghĩa là  $\frac{a}{\sqrt{a + qb}} + \sqrt{b} \leq k\sqrt{a + b}$ .

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a + b = 1$ , khi đó giá trị nhỏ nhất của  $k$  chính là giá trị lớn nhất

của hàm số  $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+(q-1)x}} + \sqrt{x}$  trên  $[0, 1]$

Ta có  $f'(x) = -\frac{(q-1)x + q + 1}{2\sqrt{(1+(q-1)x)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$  cùng dấu với  $(1+(q-1)x)^3 - x((q-1)x + q + 1)^2$  hay

cùng dấu với  $P(x) = (q-1)^2(q-2)x^3 + (q-1)(q-5)x^2 - (q^2 - q + 4)x + 1$

Các bạn có thể tự chứng minh kết quả sau:

Nếu  $\frac{13+5\sqrt{13}}{26} \leq q < 2$  thì  $P(x)$  có hai nghiệm âm và một nghiệm trong  $(0, 1)$ .

Nếu  $q > 2$  thì  $P(x)$  có một nghiệm âm và hai nghiệm dương  $x_1 \leq \min(1, x_2)$  và  $f(x_1) > f(1)$ .

Nếu  $q = 2$  thì  $P(x)$  chỉ có đúng hai nghiệm phân biệt, 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương  $\in [0, 1]$ .

Trong cả ba trường hợp, ta có kết luận chung:

Giá trị nhỏ nhất của  $k$  là  $\frac{1-x_0}{\sqrt{1+(q-1)x_0}} + \sqrt{x_0}$  trong đó  $x_0$  là nghiệm dương nhỏ nhất của

phương trình  $(q-1)^2(q-2)x^3 + (q-1)(q-5)x^2 - (q^2 - q + 4)x + 1 = 0$

**Nhận xét.** Ta còn có hai trường hợp riêng đặc biệt của bài toán này, đó là:

$$1. \frac{q}{\sqrt{a+4b}} + \frac{b}{\sqrt{b+4c}} + \frac{c}{\sqrt{c+4a}} \leq \left( \frac{17-\sqrt{33}}{6\sqrt{-1+\sqrt{33}}} + \sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{12}} \right) \sqrt{a+b+c}$$

$$2. \frac{a}{\sqrt{2a+3b}} + \frac{b}{\sqrt{2b+3c}} + \frac{c}{\sqrt{2c+3a}} \leq \left( \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{-1+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{-5+3\sqrt{3}}{2}} \right) \sqrt{a+b+c}$$

Trường hợp cuối cùng vẫn là hai bài toán mở sau đây:

**Bài toán 8.** Giả sử  $\frac{1}{2} < q < \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $k$  sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

Đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ .

**Bình luận:** Bất đẳng thức **Jack Garfunkel** là trường hợp đặc biệt của bài toán ứng với  $q = 1$ . Do đó bài toán 8 mới thực sự là bài toán tổng quát của của bất đẳng thức **Jack Garfunkel** chứ không phải là bài toán 7. Đối với bài toán này chúng ta không thể (hoặc rất khó để có thể) dự đoán được trường hợp cụ thể xảy ra đẳng thức khi  $q$  nhận một giá trị bất kì trong khoảng

$\frac{1}{2} < q < \frac{13+5\sqrt{13}}{26}$ , do đó tác giả nghĩ rằng, trong bốn cách chứng minh bất đẳng thức **Jack**

**Garfunkel** ở trên, nếu có một cách có thể giải được bài toán 8 thì đó phải là cách thứ 2 (do các cách còn lại đều dựa trên sự biết trước dấu đẳng thức cụ thể). Nếu không, chúng ta phải tìm ra một hướng giải quyết khác cho bất đẳng thức **Jack Garfunkel**. Rõ ràng bất đẳng thức vẫn còn nhiều điều thú vị đang chờ các bạn đọc khám phá!

**Bài toán 9.** Cho  $k$  là số thực dương nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $M$  sao cho bất đẳng thức  $\frac{a}{(a+b)^k} + \frac{b}{(b+c)^k} + \frac{c}{(c+a)^k} \leq M(a+b+c)^{1-k}$  đúng với mọi số thực không âm  $a, b, c$ .

**Bình luận:** Chú ý rằng nếu  $k > 1$  thì không tồn tại giá trị của  $M$ . Thật vậy, cho  $c = 0$  bất đẳng thức trở thành  $\frac{a}{(a+b)^k} + b^{1-k} \leq M(a+b)^{1-k}$ . Cố định  $a$  và cho  $b \rightarrow 0$ , khi đó  $VT \rightarrow +\infty$  trong khi  $VP \rightarrow Ma^{1-k}$ , mâu thuẫn.

Theo dự đoán của chúng tôi,  $M = \max \left( \frac{3^k}{2^k}, 1+k(1-k)^{\frac{1-k}{k}} \right)$ .

Bài viết tạm dừng ở đây, hi vọng được trao đổi với các bạn về bài toán này trong một dịp khác.

## § 24.5. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CÓ LỜI GIẢI HAY

Trong mục này chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức cùng những chứng minh rất đẹp. Có một số bài toán dưới đây đã được đề cập tới ở các chương trước, trong các chương đó, chúng đã được giải với những phương pháp khá chuẩn tắc. Ngược lại, đa số các chứng minh dưới đây rất linh hoạt và không cứng nhắc tuân theo các nguyên tắc trước nữa.

**Bài 1.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3}{2}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{2} + 2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Đặt  $S = a + b + c$ ;  $T = ab + bc + ca$ ;  $P = abc$ . Thì  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2[(1+b)(1+c) + (1+c)(1+a) + (1+a)(1+b)] = 3(1+a)(1+b)(1+c)$$

$\Leftrightarrow 3P + T = S + 3$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geq \frac{9}{(1+a) + (1+b) + (1+c)} = \frac{9}{S+3}$$

$\Rightarrow 3(S+3) \geq 18 \Leftrightarrow 3S \geq 9 \Leftrightarrow S \geq 3 \Rightarrow S+3 \geq 6$ . Ta sẽ chứng minh  $T \geq 3$ . Nếu  $T < 3$  thì  $3 > T = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{P^2} \Rightarrow P < 1 \Rightarrow 3P + T < 6 \Rightarrow$  mâu thuẫn  $\Rightarrow T \geq 3$ .

$$\text{Ta có: } \frac{a+b+c}{2} + 2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{S}{2} + 2\left(\frac{SP+T^2}{ST-P}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow S(ST-P) + 4(SP+T^2) \geq 9(ST-P) \Leftrightarrow S^2T + S(S+3-T) + 4T^2 \geq 9ST - 3(S+3-T)$$

$$\Leftrightarrow S^2T + S^2 + 6S + 9 + 4T^2 \geq 10ST + 3T \Leftrightarrow (T-3)(S-3)(S+1) + 4(S-T)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Do  $S \geq 3$  và  $T \geq 3$ , nên (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

**Bài 2.** Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{1+a^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+d^2}{2}} \leq a+b+c+d \quad (1)$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+d} + \frac{1+d^2}{d+a} = a+b+c+d$

• **Chứng minh:** VT - VP =  $\frac{1+a^2}{a+b} - a + \frac{1+b^2}{b+c} - b + \frac{1+c^2}{c+d} - c + \frac{1+d^2}{d+a} - d$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-cd}{c+d} + \frac{1-da}{d+a} = \left( \frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-cd}{c+d} \right) + \left( \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-da}{d+a} \right) \\
 &= (a+b+c+d-abc-bcd-cda-dab) \left[ \frac{1}{(a+b)(c+d)} + \frac{1}{(b+c)(d+a)} \right] = 0
 \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\begin{aligned}
 2(a+b+c+d)^2 &= 2(a+b+c+d) \left( \frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+d} + \frac{1+d^2}{d+a} \right) \\
 &= [(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)] \left( \frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+d} + \frac{1+d^2}{d+a} \right) \\
 &\geq \left( \sqrt{a+b} \sqrt{\frac{1+a^2}{a+b}} + \sqrt{b+c} \sqrt{\frac{1+b^2}{b+c}} + \sqrt{c+d} \sqrt{\frac{1+c^2}{c+d}} + \sqrt{d+a} \sqrt{\frac{1+d^2}{d+a}} \right)^2 = \left( \sum_{\text{cyc}} \sqrt{1+a^2} \right)^2 \\
 &\Rightarrow \sqrt{\frac{1+a^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{1+d^2}{2}} \leq a+b+c+d
 \end{aligned}$$

**Bài 3.** Cho  $x, y, z$  là các số thực. Chứng minh rằng:

$$2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq [(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz]^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned}
 \text{VT}(1) &= 2(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 2(x^6 + y^6 + z^6) + 6(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \\
 \text{VP}(1) &= (x+y+z)^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4xyz(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) \\
 \Rightarrow \text{VT}(1) - \text{VP}(1) &= x^4(y+z-x)^2 + y^4(z+x-y)^2 + z^4(x+y-z)^2 + \\
 &\quad + 2x^2y^2(x-y)^2 + 2y^2z^2(y-z)^2 + 2z^2x^2(z-x)^2 + 2x^2y^2z^2 \geq 0 \\
 \Rightarrow \text{VT}(1) \geq \text{VP}(1) &\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq [(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz]^2
 \end{aligned}$$

**Bài 4.** Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz = x + y + z + 2$ . Chứng minh rằng:

$$1. xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) \quad (1) \quad 2. \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} \sqrt{xyz} \quad (2)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x+1}; b = \frac{1}{y+1}; c = \frac{1}{z+1} \Rightarrow xyz = x + y + z + 2 \Leftrightarrow a + b + c = 1$$

$$\text{Ta có: } x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}; y = \frac{1-b}{b} = \frac{c+a}{b}; z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$1. xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)(c+a)}{ab} + \frac{(c+a)(a+b)}{bc} + \frac{(a+b)(b+c)}{ca} \geq 2 \left( \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) \geq 2 \sum_{cyc} ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo Schur. Vì vậy,  $xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$

$$2. \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} \sqrt{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} \right) = \frac{3}{2}$$

**Bài 5.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 + \left( 4 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right)^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} - 6 \geq 4 - \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

Ta có: 
$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{2(a-b)^2}{2ab} \geq \frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2} \geq \frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 = \frac{(b-c)^2}{bc} = \frac{2(b-c)^2}{2bc} \geq \frac{2(b-c)^2}{b^2+c^2} \geq \frac{2(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2 = \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2(c-a)^2}{2ca} \geq \frac{2(c-a)^2}{c^2+a^2} \geq \frac{2(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} - 6 \geq \frac{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{a^2+b^2+c^2} = 4 - \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

**Bài 6.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{1-x^2y^2} + \frac{yz}{1-y^2z^2} + \frac{zx}{1-z^2x^2} < \frac{7}{20} \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 1$ , thì  $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n \leq \frac{1}{4^n}$ ,  $\forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$

• **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\frac{1}{4^n} = \left[ \left( \frac{a+(b+c)}{2} \right)^2 \right]^n \geq [a(b+c)]^n \geq a^n b^n + a^n c^n + a^n b^{n-1} c \geq a^n b^n + b^n c^n + c^n a^n$$

• **Áp dụng:** Sử dụng công thức tổng cấp số nhân vô hạn ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{xy}{1-x^2y^2} &= \frac{xy}{1-(xy)^2} = xy[1+(xy)^2+(xy)^4+\dots] \\ \frac{yz}{1-y^2z^2} &= \frac{yz}{1-(yz)^2} = yz[1+(yz)^2+(yz)^4+\dots] \\ \frac{zx}{1-z^2x^2} &= \frac{zx}{1-(zx)^2} = zx[1+(zx)^2+(zx)^4+\dots] \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{xy}{1-x^2y^2} + \frac{yz}{1-y^2z^2} + \frac{zx}{1-z^2x^2} &\leq (xy+yz+zx) + \sum_{k=1}^{\infty} [(xy)^{2k+1} + (yz)^{2k+1} + (zx)^{2k+1}] \\ &< \frac{1}{3}(x+y+z)^2 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{4^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{60} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

**Bài 7.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{1}{2} - \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{1}{2} - \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2-2a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{(c+a)^2-2b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{(a+b)^2-2c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6(b+c)^2-12a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{6(c+a)^2-12b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{6(a+b)^2-12c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6(b+c)^2-12a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + 1 + \frac{6(c+a)^2-12b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + 1 + \frac{6(a+b)^2-12c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} + 1 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{(3b+3c-2a)^2}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{(3c+3a-2b)^2}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{(3a+3b-2c)^2}{4c^2+3(a+b)^2} \geq 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\left[3\left(\frac{b+c}{a}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 4} + \frac{\left[3\left(\frac{c+a}{b}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + 4} + \frac{\left[3\left(\frac{a+b}{c}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 4} \geq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$T \geq \frac{\left[3\left(\frac{b+c}{a}\right) - 2 + 3\left(\frac{c+a}{b}\right) - 2 + 3\left(\frac{a+b}{c}\right) - 2\right]^2}{3\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 4 + 3\left(\frac{c+a}{b}\right)^2 + 4 + 3\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 4} = \frac{\left[3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right) - 6\right]^2}{3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 12} = S.$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh rằng } S \geq 3 \Leftrightarrow \left[3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right) - 6\right]^2 \geq 9\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 36$$

$$\Leftrightarrow 9\left[\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)\right]^2 - 36\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right) \geq 9\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 2\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) \geq 2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)]$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì nó là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức **Schur**.

$$\text{Vì vậy } T \geq S \geq 3 \Rightarrow \frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Bài 8. Cho } a, b, c > 0. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = abc\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) + a^2 + b^2 + c^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Nhưng } abc\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) &\leq abc\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] \\ &= \frac{abc}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2) và (3) } \Rightarrow (1) \text{ đúng, nghĩa là } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

**Bài 9.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \quad (1)$$

## Chứng minh

**Chứng minh 1:** • **Bổ đề:**  $(ab + bc + ca) \left[ \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$

• **Áp dụng:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 &\geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \left[ \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right] \\ &\geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \frac{9}{4(ab+bc+ca)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

**Chứng minh 2:** Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 &= \frac{a^4}{a^2(b+c)^2} + \frac{b^4}{b^2(c+a)^2} + \frac{c^4}{c^2(a+b)^2} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a+b+c)} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh  $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca}$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2[ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)] \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c) \quad (2)$$

Ta có:  $2[ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)] \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (3)$

Nhưng  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c) = \frac{1}{2}[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2] \geq 0$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c) \quad (4)$$

Từ (3), (4)  $\Rightarrow$  (2) đúng. Vì vậy  $\left( \frac{a}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c+a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca}$

**Bài 10.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3} < (ab + bc + ca) \left( \frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+a} \right) \leq \frac{5}{3} \quad (1)$$

## Chứng minh

Đặt  $T = ab + bc + ca$ ;  $P = abc$ . Ta có:

$$\frac{1+a^2}{a+b} + \frac{1+b^2}{b+c} + \frac{1+c^2}{c+a} = 2 + \frac{1+a^2}{a+b} - (a+c) + \frac{1+b^2}{b+c} - (b+a) + \frac{1+c^2}{c+a} - (c+b)$$

$$= 2 + \frac{1-ab-bc-ca}{a+b} + \frac{1-ab-bc-ca}{b+c} + \frac{1-ab-bc-ca}{c+a}$$

$$= 2 + (1-T) \left( \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \right) = 2 + \frac{(1-T)(1+T)}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 2 + \frac{1-T^2}{T-abc}$$

Ta sẽ chứng minh:  $1 \leq 2T + \frac{T(1-T^2)}{T-abc}$  (2) and  $2T + \frac{T(1-T^2)}{T-abc} \leq \frac{5}{3}$  (3)

Ta có:  $0 < T = ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$

(2)  $\Leftrightarrow T^2(2-T) + abc(1-2T) \geq 0$  đúng bởi vì  $0 < T \leq \frac{1}{3}$

(3)  $\Leftrightarrow abc(5-6T) \leq T(2-6T+3T^2)$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$T = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{a+b+c} = 9abc$$

$\Rightarrow T(2-6T+3T^2) \geq 9abc(2-6T+3T^2)$ . Ta sẽ chứng minh  $9abc(2-6T+3T^2) \geq abc(5-6T)$

$\Leftrightarrow 9(2-6T+3T^2) \geq 5-6T \Leftrightarrow (1-3T)(13-9T) \geq 0$  đúng bởi vì  $0 < T \leq \frac{1}{3}$

Vì vậy (2) và (3) được chứng minh. Kéo theo (1) đúng.

**Bài 11.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx + xyz = 4$ .

Chứng minh rằng:  $3 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2)$  (1)

### Chứng minh

Đặt  $\sqrt{yz} = 2 \cos A$ ;  $\sqrt{zx} = 2 \cos B$ ;  $\sqrt{xy} = 2 \cos C$  trong đó  $A, B, C$  là các góc nhọn. Ta có:  $xy + yz + zx + xyz = 4 \Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$ . Suy ra  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác, nghĩa là  $A + B + C = \pi$ . Vì thế

$$\bullet \quad 3 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 = 3 \left( \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}}{\sqrt{xyz}} \right)^2 = \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$\bullet \quad (x+2)(y+2)(z+2) = \left( \frac{\sqrt{xy}\sqrt{xz}}{\sqrt{yz}} + 2 \right) \left( \frac{\sqrt{yz}\sqrt{yx}}{\sqrt{zx}} + 2 \right) \left( \frac{\sqrt{zx}\sqrt{zy}}{\sqrt{xy}} + 2 \right)$$

$$= \left( \frac{2 \cos B \cos C}{\cos A} + 2 \right) \left( \frac{2 \cos C \cos A}{\cos B} + 2 \right) \left( \frac{2 \cos A \cos B}{\cos C} + 2 \right)$$

$$= \left[ \frac{\cos(B-C) + \cos(B+C)}{\cos A} + 2 \right] \left[ \frac{\cos(C-A) + \cos(C+A)}{\cos B} + 2 \right] \left[ \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{\cos C} + 2 \right]$$

$$= \left[ \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{\cos A} \right] \left[ \frac{\cos(C-A) - \cos(C+A)}{\cos B} \right] \left[ \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos C} \right]$$

$$= \frac{2 \sin B \sin C}{\cos A} \cdot \frac{2 \sin C \sin A}{\cos B} \cdot \frac{2 \sin A \sin B}{\cos C} = \frac{8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2 \cos A \cos B \cos C} \geq \frac{8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \left( 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \geq 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:  $\frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$

$$\geq \frac{1}{\left( \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3} + \frac{1}{2 \left( \frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{3} \right)^3} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

**Bài 12.** Cho  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1 a_n} \left[ n(a_1 + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \right] \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $\frac{xz}{y} + y \leq x + z$  với  $0 < x \leq y \leq z$  (2)

• **Chứng minh:**  $\frac{xz}{y} + y \leq x + z \Leftrightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} + 1 \leq \frac{x}{y} + \frac{z}{y}$ . Đặt  $a = \frac{x}{y}; b = \frac{z}{y} \Rightarrow 0 < a \leq 1 \leq b$ .

Ta có: (2)  $\Leftrightarrow ab + 1 \leq a + b \Leftrightarrow 0 \leq (a-1)(1-b)$  (đúng)

• **Áp dụng:** với  $n = 3$ :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{a_1 a_3} \left[ 3(a_1 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3) \right] \Leftrightarrow \frac{a_1 a_3}{a_2} + a_2 \leq a_1 + a_3$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với  $n = m-1 \geq 3$ , ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức cũng đúng với  $n = m$ . Sử dụng bất đẳng thức với  $m-1$  số  $0 < a_1 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_m$ ,

ta có:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1 a_m} \left[ (m-1)(a_1 + a_m) - \left( \sum_{k=1}^m a_k - a_2 \right) \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{a_1 a_m} \left[ (m-1)(a_1 + a_m) - \sum_{k=1}^m a_k + \frac{a_1 a_m}{a_2} + a_2 \right] \leq \frac{1}{a_1 a_m} \left[ m(a_1 + a_m) - \sum_{k=1}^m a_k \right]$$

**Bài 13.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx = \sqrt{xyz}$ . Chứng minh rằng:

$$x + y + z + (\text{Max}\{x, y, z\} - \text{Min}\{x, y, z\})^2 \leq \frac{1}{3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Chứng minh 1:** Giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ . Đặt  $a = \sqrt{\frac{yz}{x}}; b = \sqrt{\frac{zx}{y}}; c = \sqrt{\frac{xy}{z}} \Rightarrow a + b + c = 1$

$$(1) \Leftrightarrow ab + bc + ca + (bc - ab)^2 \leq \frac{1}{3} \quad (2). \text{ Đặt } p = a + c \leq 1; q = ac \Rightarrow 0 < q \leq \frac{1}{4} p^2.$$

$$\text{Thì } (2) \Leftrightarrow 3p(1-p) + 3q + 3(1-p)^2(p^2 - 4q) - 1 \leq 0, \forall p \in [0, 1], \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right] \Leftrightarrow$$

$$3p^4 - 6p^3 + 3p - 12p^2q + 24pq - 9q - 1 \leq 0, \forall p \in [0, 1], \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right]$$

$$\Leftrightarrow f(q) = q(-12p^2 + 24p - 9) + 3p^4 - 6p^3 + 3p - 1 \leq 0, \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right]$$

Từ việc  $f(q)$  là hàm tuyến tính, suy ra  $\text{Max}_{0 \leq q \leq \frac{1}{4} p^2} f(q) \leq \text{Max}\left\{f(0); f\left(\frac{1}{4} p^2\right)\right\}$

$$f(0) = 3p^4 - 6p^3 + 3p - 1 = g(p) \Rightarrow g'(p) = 3(2p-1)(2p^2 - 2p - 1), \forall p \in [0, 1]$$

$$\text{Đến tới } g'(p) = 0 \text{ tại } p = \frac{1}{2} \in (0, 1). \text{ Lập bảng biến thiên } \Rightarrow g(p) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{4} p^2\right) = -\frac{9}{4} p^2 + 3p - 1 = -\left(\frac{3}{2} p - 1\right)^2 \leq 0. \text{ Thật vậy, } f(q) \leq 0 \forall q \in \left[0, \frac{1}{4} p^2\right] \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• **Chứng minh 2:** Đặt  $a = \sqrt{\frac{yz}{x}}; b = \sqrt{\frac{zx}{y}}; c = \sqrt{\frac{xy}{z}} \Rightarrow a + b + c = 1$

$$\frac{1}{3} - ab - bc - ca = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

$$= \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 6abc) \geq \frac{1}{3}[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2] \quad (\text{Schur})$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = (a+b+c) \sum_{\text{cyc}} a(b-c)^2 \geq (|ab-bc| + |bc-ca| + |ca-ab|)^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $ab \geq bc \geq ca$ . Thì, dễ dàng có đẳng thức:

$$|ab-bc| + |bc-ca| + |ca-ab| = 2(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\})$$

$$\Rightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 4(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - ab - bc - ca \geq \frac{4}{3}(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \geq x + y + z + \frac{4}{3}(\text{Max}\{x, y, z\} - \text{Min}\{x, y, z\})^2$$



**Bài 14.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a - l_a l_b - l_b l_c - l_c l_a \geq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

### Chứng minh

Gọi  $S$  là diện tích của tam giác có độ dài ba cạnh là  $a, b, c$ . Dễ dàng chứng minh rằng  $m_a, m_b, m_c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích  $S' = \frac{3}{4}S$ . Sử dụng bất đẳng thức **Finsler – Khadivinger** ta có:

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a \geq \frac{1}{2}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 2\sqrt{3}S' = \frac{3}{8}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}S$$

Ta sẽ chứng minh:  $\frac{1}{2}p^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}S \geq l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a$ . Ta có:  $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$

$$\Rightarrow l_a l_b = \frac{4abc^2}{(a+c)(b+c)} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \text{ Hơn nữa, luôn tồn tại tam giác } XYZ \text{ thỏa mãn}$$

$$\sin X = \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}}; \sin Y = \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}}; \sin Z = \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức  $4(xy \sin^2 Z + yz \sin^2 X + zx \sin^2 Y) \leq (x+y+z)^2$ , ta có:

$$l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \leq \frac{abc}{a+b+c} \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right) \text{ khi } x = \cos \frac{A}{2}; y = \cos \frac{B}{2}; z = \cos \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 3\sqrt{3} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \left( \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} \right)^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Từ } S = p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \Rightarrow abc = 4SR = \frac{p^3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

Đặt  $A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}; B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}; C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow A'B'C'$  là tam giác nhọn. Ta có thể chứng minh

$$3\sqrt{3} + \tan A' + \tan B' + \tan C' \geq 2 \left( \cot \frac{A'}{2} + \cot \frac{B'}{2} + \cot \frac{C'}{2} \right).$$

Sử dụng bất đẳng thức **Tiberiu Popoviciu**: Nếu  $f$  là hàm lồi trên  $(a, b)$ , nghĩa là

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right), \forall x, y \in (a, b), \text{ thì,}$$

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2 \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right], \forall x, y, z \in (a, b)$$

**Bài 15.** Cho  $a, b, c, d > 0$  và  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3) + 20 \geq (ab+bc+cd+da+ac+bd)^2 \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2$  (2)

• **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$ , thì

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (ab - cd)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 + d^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 \geq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (ab - cd)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 + \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)]^2 \geq (ab - cd)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ  $a \geq b \geq c \geq d$  thì  $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \geq 2ab - c^2 - d^2 \geq 0$ . Kéo theo

$$\begin{aligned} VT(3) &\geq \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \geq \frac{1}{2}(c^2 - d^2)^2 + \frac{1}{2}(2ab - c^2 - d^2)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(c - d)^4 + \frac{1}{2}(2ab - c^2 - d^2)^2 = \frac{1}{4}(1+1)[(c-d)^4 + (2ab - c^2 - d^2)^2] \\ &\geq \frac{1}{4}[(c-d)^2 + (2ab - c^2 - d^2)]^2 = \frac{1}{4}(2ab - 2cd)^2 = (ab - cd)^2 = VP(3) \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** sử dụng bất đẳng thức *Schur* ta có:

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) \geq 0$$

$$VT(1) - VP(1) = aT(b, c, d) + a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2d^2 - d^2a^2 - a^2c^2 - b^2d^2 \geq 0$$

**Bài 16.** Cho  $x \geq y \geq z > 0$  và  $y^2 \geq xz$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} + \frac{x^2y}{z} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(z-x)(y-x)^2}{x} + \frac{(x-y)(y-z)^2}{y} + \frac{(y-z)(x-z)^2}{z} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{(y-z)(x-z)}{z} - \frac{(x-y)^2}{x}; B = \frac{(y-z)^2}{y} - \frac{(x-y)(x-z)}{x}, \text{ thì}$$

$$xzA + xyB = x(y-z)(x-z) - z(x-y)^2 + x(y-z)^2 - y(x-y)(x-z) = 2(x-z)(y^2 - xz) \geq 0$$

$$\Rightarrow A \geq 0 \text{ hoặc } B \geq 0, \text{ nếu } A \geq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow (x-z)A + \frac{(x-y)(y-z)^2}{y} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Nếu}$$

$$B \geq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow (x-y)B + \frac{(y-z)(x-z)^2}{z} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 17.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + ca + a^2} \right| < \frac{1}{3} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow 3|(a+b+c)(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)| < (a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$

Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng cách chứng minh lần lượt các bất đẳng thức dưới đây:

- $|(a+b+c)(ab+bc+ca)| \leq \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$
- $8|(a-b)(b-c)(c-a)| < 8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$
- $\frac{27}{64}(a+b)(b+c)(c+a) \leq (a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$

**Bài 18.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 6$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} \geq \sqrt{15+ab+bc+ca} \quad (1)$$

**Chứng minh**

• **Bổ đề:**  $(uv + vw + wu) \left[ \frac{1}{(u+v)^2} + \frac{1}{(v+w)^2} + \frac{1}{(w+u)^2} \right] \geq \frac{9}{4}, \forall u, v, w > 0$

• **Áp dụng:** Đặt  $1+a = 9x; 1+b = 9y; 1+c = 9z; x, y, z > \frac{1}{9}$  và  $x + y + z = 1$

$$(1) \Leftrightarrow 3(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 9\sqrt{xy + yz + zx} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx} \quad (2)$$

Đặt  $x = \frac{1}{m^2}; y = \frac{1}{n^2}; z = \frac{1}{p^2}$ , trong đó  $m, n, p > 0 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1$ .

Thì ta có  $m = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{1+a}}; n = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{\sqrt{1+b}}; p = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{3}{\sqrt{1+c}}$ .

Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác,  $m, n, p$  cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{(1+1)(x+y)}} = \frac{4}{\sqrt{2(1-z)}} \geq \frac{1}{\sqrt{z}}, \forall z > \frac{1}{9}$$

Sử dụng bổ đề ta có:  $(uv + vw + wu) \left[ \frac{1}{(u+v)^2} + \frac{1}{(v+w)^2} + \frac{1}{(w+u)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \quad (*)$

Đặt  $m = u + v; n = v + w; p = w + u \Rightarrow u = \frac{p+m-n}{2}; v = \frac{m+n-p}{2}; w = \frac{n+p-m}{2}$

$$\text{Thì } (*) \Leftrightarrow (2mn + 2np + 2pm - m^2 - n^2 - p^2) \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) \geq 9$$

$$\text{Từ } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = 1 \Rightarrow 2mn + 2np + 2pm \geq 9 + m^2 + n^2 + p^2 \geq 6\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (3)$$

$$\text{Thay } m = \frac{1}{\sqrt{x}}; n = \frac{1}{\sqrt{y}}; p = \frac{1}{\sqrt{z}} \text{ vào (3), ta có } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx}$$

$$\text{Vì vậy (2) đúng, suy ra } \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} \geq \sqrt{15+ab+bc+ca}$$

**Bài 19. [Polish MO – 1992]** Cho các số thực  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2 \geq (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \quad (1)$$

### Chứng minh

• Nếu  $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \leq 0$  thì (1) là đúng.

• Chứng minh  $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) > 0$

Nếu có hai nhân tử âm, ví dụ  $(b^2+c^2-a^2) < 0; (c^2+a^2-b^2) < 0$  thì

$$2c^2 = (b^2+c^2-a^2) + (c^2+a^2-b^2) < 0 \Rightarrow \text{mâu thuẫn} \Rightarrow$$

$$(b^2+c^2-a^2) > 0; (c^2+a^2-b^2) > 0; (a^2+b^2-c^2) > 0 \text{ thì}$$

$$\begin{cases} (b+c-a)^2(c+a-b)^2 - (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) = 2(a-b)^2(a^2+b^2-c^2) \geq 0 \\ (c+a-b)^2(a+b-c)^2 - (c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) = 2(b-c)^2(b^2+c^2-a^2) \geq 0 \\ (a+b-c)^2(b+c-a)^2 - (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) = 2(c-a)^2(c^2+a^2-b^2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b+c-a)^4(c+a-b)^4(a+b-c)^4 \geq (b^2+c^2-a^2)^2(c^2+a^2-b^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2$$

$$\Rightarrow (b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2 \geq (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$

$$\text{Bài 20. [CRUX 854]} \text{ Cho } x, y, z > 0. \text{ Đặt } A = \frac{yz}{(y+z)^2} + \frac{zx}{(z+x)^2} + \frac{xy}{(x+y)^2}$$

$$B = \frac{yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{zx}{(z+y)(x+y)} + \frac{xy}{(x+z)(y+z)}$$

$$\text{Chứng minh rằng: } 1. 4A + 8B \leq 9 \quad 2. A + 3B \geq 3$$

### Chứng minh

$$1. \bullet \text{Bổ đề: } \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\bullet \text{Chứng minh: } \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \left( \frac{x-y}{x+y} - \frac{x-y}{z+x} \right) + \left( \frac{y-z}{y+z} - \frac{y-z}{z+x} \right)$$

$$= \frac{(x-y)(z-y)}{(x+y)(z+x)} + \frac{(y-z)(x-y)}{(y+z)(z+x)} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

• **Áp dụng:** (1)  $\Leftrightarrow 8\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq 4\left(\frac{3}{4} - A\right) \Leftrightarrow 2\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq \frac{3}{4} - A$ . Ta có:

$$\frac{3}{4} - A = \left[ \frac{1}{4} - \frac{yz}{(y+z)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{zx}{(z+x)^2} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right] = \frac{(y-z)^2}{4(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{4(z+x)^2} + \frac{(x-y)^2}{4(x+y)^2}$$

$$B - \frac{3}{4} = \frac{yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{zx}{(z+y)(x+y)} + \frac{xy}{(x+z)(y+z)} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4[yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y)] - 3(x+y)(y+x)(z+x)}{4(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{4[yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y) - 6xyz] - 3[(x+y)(y+x)(z+x) - 8xyz]}{4(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2}{4(x+y)(y+x)(z+x)}$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \frac{2[x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2]}{(x+y)(y+x)(z+x)} \leq \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{(z-x)^2}{(z+x)^2} + \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (y-z)^2 \left[ \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} - 2x \right] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (y-z)^2 \frac{(x-y)(x-z)}{y+z} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-y)(y-z)(z-x) \left( \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right) = \frac{[(x-y)(y-z)(z-x)]^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 0$$

$$2. (2) \Leftrightarrow 3\left(B - \frac{3}{4}\right) \geq \frac{3}{4} - A \Leftrightarrow \frac{\sum 3x(y-z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \sum \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum (y-z)^2 \left[ 3x - \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \geq \sum (y-z)^2 \left[ \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} - 2x \right] \quad (3)$$

Sử dụng  $\sum (y-z)^2 \left[ \frac{(x+y)(z+x)}{y+z} - 2x \right] = \frac{(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ , thì

$$(3) \Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \geq \frac{(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (4)$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ . Từ  $(y-z)^2 \leq y^2 \leq (y+z)y$  và

$0 \leq (x-y)(x-z) \leq (x+y)(x+z)$ , (4) đúng nếu ta có thể chứng minh

$$y(x-z)^2 \geq (x-y)(x-z)y \Leftrightarrow y(x-z)(y-z) \geq 0 \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Ghi chú:** (1) và (2) có thể viết lại thành  $0 \leq 2\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq \frac{3}{4} - A \leq 3\left(B - \frac{3}{4}\right)$  (5)

Dễ thấy 2 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức trên. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng 3 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức vừa nêu.

Thật vậy, giả sử tồn tại  $\alpha < 1$  thỏa mãn  $\frac{3}{4} - A \leq (2+\alpha)\left(B - \frac{3}{4}\right)$  đúng  $\forall x, y, z > 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} - A\right) - 2\left(B - \frac{3}{4}\right) \leq \alpha\left(B - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \alpha \sum x(y-z)^2 \geq \frac{(x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (6)$$

$$\text{Cho } z \rightarrow 0^+ \text{ trong (6) ta có: } \alpha xy(x+y) \geq \frac{(x-y)^2 x^2 y^2}{(x+y)xy} = \frac{(x-y)^2 xy}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x+y)^2 \geq (x-y)^2 \quad (7) \quad \forall x, y > 0.$$

Cho  $x=1$  và  $y \rightarrow 0^+$  trong (7) ta có  $\alpha \geq 1$ , điều này mâu thuẫn với giả sử  $\alpha < 1$ . Vì vậy 3 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức  $\frac{3}{4} - A \leq 3\left(B - \frac{3}{4}\right)$ .

**Bài 21.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $xy > 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{xy} \geq \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+y^2}{2} - xy}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y)}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x-y)^2}{x+y} \quad (2)$$

Nếu  $x+y < 0$  thì bất đẳng thức hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp  $x+y > 0$ .

Do đó (2)  $\Leftrightarrow x+y \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)^2$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}\right)^2 \leq (1^2+1^2)\left(\frac{x^2+y^2}{2} + xy\right) = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$$

**Bài 22.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_{11} \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{11} \leq 1000$ . Chứng minh rằng tồn tại  $i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  thỏa mãn  $a_{i+1} - a_i < 1 + 3\sqrt[3]{a_i a_{i+1}}$

**Chứng minh**

Sử dụng đẳng thức:  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

Ta có:  $a^3 + b^3 + c^3 < 3abc \Leftrightarrow a, b, c$  là ba số đôi một phân biệt và  $a+b+c < 0$

Suy ra  $a_{i+1} - a_i - 1 < 3\sqrt[3]{a_i a_{i+1}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_{i+1}} - \sqrt[3]{a_i} - \sqrt[3]{1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_{i+1}} - \sqrt[3]{a_i} < 1$

Từ  $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{11} \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[3]{a_1} < \sqrt[3]{a_2} < \sqrt[3]{a_3} < \dots < \sqrt[3]{a_{11}} \leq 10$

$\Rightarrow (\sqrt[3]{a_2} - \sqrt[3]{a_1}) + (\sqrt[3]{a_3} - \sqrt[3]{a_2}) + \dots + (\sqrt[3]{a_{11}} - \sqrt[3]{a_{10}}) = \sqrt[3]{a_{11}} - \sqrt[3]{a_1} \leq 10 - 1 = 9$

$\Rightarrow \min\{(\sqrt[3]{a_2} - \sqrt[3]{a_1}), (\sqrt[3]{a_3} - \sqrt[3]{a_2}), \dots, (\sqrt[3]{a_{11}} - \sqrt[3]{a_{10}})\} \leq \frac{9}{10} < 1 \Rightarrow (\text{đpcm}).$

**Bài 23.** Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ;  $abcd \neq 0$  thỏa mãn  $a+b+c+d=0$ .

Đặt  $S_1 = ab + bc + cd$ ;  $S_2 = ac + ad + bd$ .

Tìm điều kiện để cặp số thực dương  $(\alpha, \beta)$  thỏa mãn  $S = \alpha S_1 + \beta S_2 \leq 0$ .

**Chứng minh**

Đặt  $\begin{cases} a+d=A \\ b+c=B \end{cases} \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A$ ;  $\begin{cases} d=A-a \\ c=B-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=A-a \\ c=-A-b \end{cases}$

$S = \alpha S_1 + \beta S_2 = \alpha(ab + bc + cd) + \beta(ac + ad + bd)$

$S = \alpha[ab + b(-A-b) + (-A-b)(A-a)] + \beta[a(-A-b) + a(A-a) + b(A-a)]$



$$S = \alpha(ab - bA - b^2 - A^2 - bA + aA + ab) + \beta(-aA - ab + aA - a^2 + bA - ab)$$

$$S = 2\alpha ab - 2\alpha bA - \alpha b^2 - \alpha A^2 + \alpha aA + -2\beta ab - \beta a^2 + \beta bA$$

$$S = f(A) = -\alpha A^2 + (\alpha a + \beta b - 2\alpha b)A + 2\alpha ab - \alpha b^2 - 2\beta ab - \beta a^2$$

Do  $(-\alpha) < 0$  suy ra  $S = f(A) \leq 0 \Leftrightarrow \Delta_A \leq 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha a + \beta b - 2\alpha b)^2 + 4\alpha(2\alpha ab - \alpha b^2 - 2\beta ab - \beta a^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - 4\alpha\beta)a^2 + (4\alpha^2 - 6\alpha\beta)ab + (\beta^2 - 4\alpha\beta)b^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha - 4\beta)a^2 + 2\alpha(2\alpha - 3\beta)ab + \beta(\beta - 4\alpha)b^2 \leq 0 \quad (1). \text{ Xét hai trường hợp:}$$

• **Trường hợp 1:**  $0 < \alpha \leq \beta$ , chia hai vế của (1) cho  $b^2 \neq 0$  và đặt  $t = \frac{a}{b}$ , ta có:

$$g(t) = \alpha(\alpha - 4\beta)t^2 + 2\alpha(2\alpha - 3\beta)t + \beta(\beta - 4\alpha) \leq 0 \quad \forall t$$

Từ  $\alpha(\alpha - 4\beta) < 0$  suy ra  $g(t) \leq 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \Delta'_t \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2(2\alpha - 3\beta)^2 - \alpha\beta(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 \leq 0. \text{ Let } x = \frac{\alpha}{\beta} \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1] \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3x + 1) \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$$

Vì vậy, với  $0 < \alpha \leq \beta$  thì  $S = \alpha S_1 + \beta S_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \quad (2)$

• **Trường hợp 2:**  $0 < \beta \leq \alpha$ , chia hai vế của (1) cho  $a^2 \neq 0$  và đặt  $u = \frac{\beta}{\alpha}$ , ta có:

$$h(u) = \beta(\beta - 4\alpha)u^2 + 2\alpha(2\alpha - 3\beta)u + \alpha(\alpha - 4\beta) \leq 0 \quad \forall u$$

Do  $\beta(\beta - 4\alpha) < 0$  suy ra  $h(u) \leq 0 \quad \forall u \Leftrightarrow \Delta'_u \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2(2\alpha - 3\beta)^2 - \alpha\beta(\alpha - 4\beta)(\beta - 4\alpha) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + 1 \leq 0. \text{ Đặt } y = \frac{\beta}{\alpha} \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 2y^2 - 2y + 1 \leq 0 \quad \forall y \in (0, 1] \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - 3y + 1) \leq 0 \quad \forall y \in (0, 1]$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 \leq 0 \quad \forall y \in (0, 1] \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq 1$$

Vì vậy, với  $0 < \beta \leq \alpha$  thì  $S = \alpha S_1 + \beta S_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \quad (3)$

• **Kết luận:** từ (2) và (3) kéo theo:  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \vee \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$

**Bài 24.** Chứng minh:  $a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \geq 2(ab + bc + ca)$ ,  $\forall a, b, c > 0 \quad (1)$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow T = (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (a-2)(b-2)(c-2) \geq 0$$

Trong ba biểu thức  $(a-2)$ ;  $(b-2)$ ;  $(c-2)$ , luôn tồn tại hai biểu thức cùng dấu, chẳng hạn  $(a-2)(b-2) \geq 0$ .

$$\text{Ta có: } T \geq 2(a-2)(b-2) + (a-2)(b-2)(c-2) + (c-2)^2 = (a-2)(b-2)c + (c-2)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 2$ .

**Bài 25.** Cho  $f(a, b, c)$  là hàm số liên tục và đối xứng với  $a, b, c$  dương.

Chứng minh: Nếu  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$  thì  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc})$

### Chứng minh

Định nghĩa các dãy số  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$ ,  $\{w_n\}$  như sau:  $u_1 = \sqrt{ab}$ ;  $v_1 = \sqrt{ab}$ ;  $w_1 = c$ ;

$u_{n+1} = v_{n+1} = \sqrt{v_n w_n}$ ;  $w_{n+1} = u_n$ . Thì  $f(a, b, c) \geq f(u_n, v_n, w_n) \geq f(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1})$  và  $u_n v_n w_n$

$= abc$ . Đặt  $x_0 = \ln c$ ;  $x_1 = \frac{\ln a + \ln b}{2}$ ;  $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ . Thì  $u_n = v_n = e^{x_n}$ ;  $w_n = e^{x_{n-1}}$ . Do

$$(x_{n+1} - x_n) = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}), \quad \{x_n\} \text{ hội tụ.}$$

Hơn nữa  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \sqrt[3]{abc}$ . Vì vậy  $f(a, b, c) \geq f(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc})$

**Bài 26.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

### Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right)}$$

Đặt  $x = \frac{a}{c}$ ,  $y = \frac{b}{a}$ ;  $z = \frac{c}{b}$  thì  $x, y, z > 0$  và  $xyz = 1$ , ta có bất đẳng thức  $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = t^3 + 1$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: } t = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \geq \sqrt[3]{2\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot 2\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot 2\sqrt{\frac{z}{x}}} = 2$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^3 + 1} \geq 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \geq (1+t)^2 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) \geq 0 \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 27.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

**Chứng minh**

$$\begin{aligned} VT &= (a^2 + b^2 + c^2) \left[ \frac{1}{a(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b(c^2 + a^2)} + \frac{1}{c(a^2 + b^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} [(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)] \left[ \frac{1}{a(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b(c^2 + a^2)} + \frac{1}{c(a^2 + b^2)} \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &\geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \\ &\geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} = 3 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

**Bài 28.** Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $0 < x < y \leq 1$ ;  $0 < x < z \leq 1$ ;  $3x + 2y + z \leq 4$ .

Tìm giá trị lớn nhất của  $T = 3x^2 + 2y^2 + z^2$

**Chứng minh 1**

$$\begin{aligned} \text{Do } 3x + 2y + z &\leq 4 \Rightarrow 3x \leq 4 - 2y - z \Rightarrow 3x^2 \leq x(4 - 2y - z) = 4x - 2xy - zx \\ \Rightarrow T &= 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4x - 2xy - zx + 2y^2 + z^2 = 4x + 2y(y - x) + z(z - x) \\ &\leq 4x + 2(y - x) + (z - x) = x + 2y + z \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3} + 2 + 1\right)(3x^2 + 2y^2 + z^2)} = \sqrt{\frac{10}{3} \cdot T} \\ \Rightarrow \sqrt{T} &\leq \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow T \leq \frac{10}{3}. \text{ Với } x = \frac{1}{3}; y = z = 1 \text{ thì } \text{Max } T = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

**Chứng minh 2**

**Trường hợp 1.**

$$\text{Nếu } x < \frac{1}{3} \text{ thì } T = 3x^2 + 2y^2 + z^2 < 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 + 1^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow \text{Max } T < \frac{10}{3}.$$

**Trường hợp 2.** Xác định  $x \geq \frac{1}{3}$  thì từ các điều kiện  $0 < x < y \leq 1$ ;  $0 < x < z \leq 1$ ,

$$\text{dẫn tới: } \begin{cases} (y-x)(1-y) \geq 0 \\ (z-x)(1-z) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + y - x - y^2 \geq 0 \\ xz + z - x - z^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq xy + y - x \\ z^2 \leq xz + z - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &= 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 3x^2 + 2(xy + y - x) + xz + z - x = x(3x + 2y + z) + 2y + z - 3x \\ &\leq 4x + (2y + z - 3x) = (3x + 2y + z) - 2x \leq 4 - 2x \leq 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

**Kết luận:** với  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = z = 1$  thì  $\text{Max } T = \frac{10}{3}$

**Bài 29.** Cho  $a, b, c, x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y} + \frac{1}{2}(a+b+c) \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

## Chứng minh

$$\begin{aligned}
& \frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y} + (a+b+c) - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&= \left( \frac{ax}{y+z} + a \right) + \left( \frac{by}{z+x} + b \right) + \left( \frac{cz}{x+y} + c \right) - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&= a \cdot \frac{x+y+z}{y+z} + b \cdot \frac{x+y+z}{z+x} + c \cdot \frac{x+y+z}{x+y} - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&= \frac{1}{2}[(y+z) + (z+x) + (x+y)] \left( \frac{a}{y+z} + \frac{b}{z+x} + \frac{c}{x+y} \right) - \frac{1}{2}(a+b+c) \\
&\geq \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \frac{1}{2}(a+b+c) = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}
\end{aligned}$$

**Bài 30.** Cho  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ ;  $a+b+c=2$ ;  $ab+bc+ca \leq abc+1$ . Chứng minh rằng:

$$(ax+by+cz)^2 \geq 4[(1-a)yz + (1-b)zx + (1-c)xy]$$

## Chứng minh

Từ  $a+b+c=2$  và  $ab+bc+ca \leq abc+1$ , suy ra  $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0$ .

Không mất tính tổng quát giả sử  $a = \max\{a, b, c\}$ . Do đó  $a \geq 1$ ;  $b < 1$ ;  $c < 1$ ;  $b+c \leq 1$ .

Đặt  $u = \frac{ac+2b-2}{a}$ ;  $v = \frac{ab+2c-2}{a}$ . Ta sẽ chứng minh  $b^2 - u^2 = c^2 - v^2$

$$b^2 - u^2 = (b+u)(b-u) = \left(b + \frac{ac+2b-2}{a}\right) \left(b - \frac{ac+2b-2}{a}\right)$$

$$b^2 - u^2 = \frac{ab+ac+2b-a-b-c}{a} \cdot \frac{ab-ac-2b+a+b+c}{a} = \frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2} \geq 0$$

$$c^2 - v^2 = (c+v)(c-v) = \left(c + \frac{ab+2c-2}{a}\right) \left(c - \frac{ab+2c-2}{a}\right)$$

$$c^2 - v^2 = \frac{ca+ab+2c-a-b-c}{a} \cdot \frac{ca-ab-2c+a+b+c}{a} = \frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
bc+2a-2-uv &= bc+2a-2 - \frac{(ac+2b-2)(ab+2c-2)}{a^2} \\
&= \frac{a^2bc+2a^3-2a^2-a^2bc-2ab^2+2ab-2ac^2-4bc+4c+2ac+4b-4}{a^2} \\
&= \frac{2(a^3-a^2-ab^2+ab-ac^2-2bc+2c+ac+2b-2)}{a^2} = \frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2}
\end{aligned}$$

Suy ra  $b^2 - u^2 = c^2 - v^2 = bc+2a-2-uv \geq 0$ . Mặt khác ta có:

$$0 \leq (ax+uy+vz)^2 + (b^2-u^2)y^2 + (c^2-v^2)z^2 + 2(b^2-u^2)yz$$

$$\begin{aligned}
&= a^2x^2 + u^2y^2 + v^2z^2 + 2(ac+2b-2)xy + 2(ab+2c-2)xz + 2uvyz + (b^2-u^2)y^2 + \\
&\quad + (c^2-v^2)z^2 + 2(bc+2a-2-uv)yz
\end{aligned}$$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(ac + 2b - 2)xy + 2(ab + 2c - 2)xz + 2(bc + 2a - 2)yz$$

$$\text{Vậy } (ax + by + cz)^2 \geq 4[(1-a)yz + (1-b)zx + (1-c)xy]$$

**Bài 31.** Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 2(xy + yz + zx)$$

**Chứng minh**

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$\sqrt{3xyz(x+y+z)} = \sqrt{(xyz + xyz + xyz)(x+y+z)} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có

$$x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + z(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y}) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} &\geq \sqrt{xy}(x+y) + \sqrt{yz}(y+z) + \sqrt{zx}(z+x) \\ &\geq \sqrt{xy}(2\sqrt{xy}) + \sqrt{yz}(2\sqrt{yz}) + \sqrt{zx}(2\sqrt{zx}) = 2(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

**Bài 32.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i + b_i}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } A_i = \frac{1}{a_i}; B_i = \frac{1}{b_i} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{B_i}} = \frac{1}{\frac{A_i + B_i}{A_i B_i}} = \frac{A_i B_i}{A_i + B_i}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{B_i}}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n B_i} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i}} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n A_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n B_i}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n A_i \cdot \sum_{i=1}^n B_i \geq \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} \cdot \left( \sum_{i=1}^n A_i + \sum_{i=1}^n B_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} \cdot \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) \quad (2)$$

$$\text{VT(2)} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \sum_{i=1}^n B_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_i B_j) = \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i)$$

$$\begin{aligned} \text{VP(2)} &= \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} \cdot \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \frac{A_i B_i}{A_i + B_i} (A_j + B_j) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( A_i B_i \frac{A_i + B_i}{A_i + B_i} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \\
(2) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i) \geq \sum_{i=1}^n (A_i B_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_i B_j + A_j B_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[ (A_i B_j + A_j B_i) - \left( A_i B_i \frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_j B_j \frac{A_i + B_i}{A_j + B_j} \right) \right] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(A_i B_j - A_j B_i)^2}{(A_i + B_i)(A_j + B_j)} \geq 0
\end{aligned}$$

**Bài 33.** Cho  $a, b, c > 0$  và  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
(y+z) \frac{yc+zb}{a} + (z+x) \frac{za+xc}{b} + (x+y) \frac{xb+ya}{c} &\geq \\
&\geq (x+y)(x+z) + (y+z)(y+x) + (z+x)(z+y) \quad (1)
\end{aligned}$$

### Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$VT(1) = \sum_{cyc} \left[ \frac{b}{a} z(z+y) + \frac{a}{b} z(z+x) \right] \geq \sum_{cyc} 2 \sqrt{\left[ \frac{b}{a} z(z+y) \right] \left[ \frac{a}{b} z(z+x) \right]} = \sum_{cyc} 2z \sqrt{(z+y)(z+x)}$$

$$Ta \text{ sẽ chứng minh } 2 \sum_{cyc} x \sqrt{(x+y)(x+z)} \geq \sum_{cyc} (x+y)(x+z) \quad (2)$$

Đặt  $u^2 = y+z$ ,  $v^2 = x+z$ ,  $w^2 = x+y$ , thì (2)

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} (v^2 + w^2 - u^2)vw \geq \sum_{sym} v^2 w^2 \Leftrightarrow 2 \sum_{sym} u^3 v \geq \sum_{sym} (u^2 v^2 + u^2 vw) = 2 \sum_{cyc} (u^2 v^2 + u^2 vw)$$

đúng theo bất đẳng thức **Muirhead**. Vì vậy (2) đúng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

**Bài 34.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực phân biệt. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \geq 2 \quad (1)$$

### Chứng minh

Đầu tiên chú ý rằng:  $A = \frac{a}{b-c} \cdot \frac{b}{c-a} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{c}{a-b} + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{a}{b-c} = -1$

$$Do \text{ đó: } \left( \frac{a}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{b}{c-a} \right)^2 + \left( \frac{c}{a-b} \right)^2 \geq -2A = 2 \quad (2)$$

$$\text{và } \left| \frac{a}{b-c} \cdot \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \cdot \frac{c}{a-b} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \cdot \frac{a}{b-c} \right| \geq |A| = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \left( \left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \right)^2 \geq 4 \Rightarrow \left| \frac{a}{b-c} \right| + \left| \frac{b}{c-a} \right| + \left| \frac{c}{a-b} \right| \geq 2$$

**Bài 35.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a} \right| > \sqrt{6} - 1 \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đầu tiên đặt } A = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}; B = \frac{b}{b-a} + \frac{c}{c-b} + \frac{a}{a-c}$$

Ta có  $A + B = 3$ . Giả sử  $A \geq 0$ .

$$(A-B)^2 = (2B-3)^2 = \left( \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right)^2 = \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \left( \frac{b+c}{b-c} \right)^2 + \left( \frac{c+a}{c-a} \right)^2 - 2 = C - 2$$

$$\text{Từ } (a-b)^2 \leq c^2, \text{ suy ra } C \geq 12, \text{ nên } A \geq \frac{3 + \sqrt{C-2}}{2} \geq \sqrt{6} - 1$$

Xét trường hợp  $A \leq 0$ . Ta có  $B \geq 0$ , nên  $B = \frac{3 + \sqrt{C-2}}{2}$ , bởi vậy để chứng minh

$$A \leq 1 - \sqrt{6}, \text{ ta phải chứng tỏ rằng } C > 27 + 4\sqrt{6}$$

Đặt  $a = y + z$ ;  $b = z + x$ ;  $c = x + y$  và giả sử rằng  $x \geq y \geq z$  thì:

$$\begin{aligned} C(x, y, z) &= \left( \frac{x+y+2z}{x-y} \right)^2 + \left( \frac{2x+y+z}{y-z} \right)^2 + \left( \frac{x+2y+z}{z-x} \right)^2 \\ &\geq C(x, y, 0) = \left( \frac{x+y}{x-y} \right)^2 + \left( \frac{2x+y}{y} \right)^2 + \left( \frac{x+2y}{x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} \frac{\partial C(x, y, 0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial C(x, y, 0)}{\partial y} = 0 \end{cases}, \text{ ta thu được } \text{Min } C(x, y, 0) > 27 + 4\sqrt{6}$$

**Bài 36.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,  $x, y, z \geq 0, xy + yz + zx = 1$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } ax + by + cz \geq \sqrt{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$\text{Đặt } T = ax + by + cz \text{ và } S = (ax + by + cz)^2. \text{ Thì } S = T^2 \text{ và } S = \frac{(ax + by + cz)^2}{xy + yz + zx}.$$

Với  $z = 0$  ta có  $xy = 1$ , suy ra  $S = (ax + by)^2 \geq 4ab$ . Ta sẽ tìm  $\text{Min} S < 4ab$ .

$$\text{Với } z \neq 0, \text{ đặt } \frac{x}{z} = u \text{ và } \frac{y}{z} = v. \text{ Thì } S = \frac{(au + bv + c)^2}{u + v + uv}, u, v > 0$$



$$\Leftrightarrow S = \frac{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2 + 2abuv + 2acu + 2bcv}{u + v + uv}$$

$$\Leftrightarrow S(u + v + uv) = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2 + 2abuv + 2acu + 2bcv$$

$$\Leftrightarrow F(u) = a^2u^2 + [(2ab - S)v + 2ac - S]u + b^2v^2 + (2bc - S)v + c^2 = 0$$

Ta có:  $F(u) = 0$  có ít nhất một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = [(2ab - S)v + 2ac - S]^2 - 4a^2[b^2v^2 + 2(bc - S)v + c^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow G(v) = S(S - 4ab)v^2 + 2[(2ab - S)(2ac - S) - 2a^2(2bc - S)]v + (2ac - S)^2 - 4a^2c^2 \geq 0$$

Từ  $0 < S < 4ab$  suy ra  $G(v) \geq 0$  có ít nhất một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = [(2ab - S)(2ac - S) - 2a^2(2bc - S)]^2 - S(S - 4ab)[(2ac - S)^2 - 4a^2c^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow S^2[S + 2a(a - b - c)]^2 - S^2(S - 4ab)(S - 4ac) \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow v = \frac{a - b + c}{a + b - c}; u = -\frac{(2ab - S_0)v + 2ac - S_0}{2a^2}$$

Đặt  $x = uz$ ,  $y = vz$  vào đẳng thức  $xy + yz + zx = 1$ , ta có:

$$(uv + v + u)z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{uv + u + v}}, v = \frac{a - b + c}{a + b - c}; u = -\frac{(2ab - S_0)v + 2ac - S_0}{2a^2}$$

$$\text{Vì vậy } \min T = \min(ax + by + cz) = \sqrt{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

**Bài 37.** Cho  $n, k$  là các số nguyên với  $n \geq k \geq 3$ . Cho  $t_1, t_2, \dots, t_n$  là các số thực dương thỏa mãn  $(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) < (n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k)^2$  (1)

Chứng minh rằng mỗi số trong  $k$  số  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  bé hơn tổng của  $k-1$  số còn lại với mọi  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .

### Chứng minh

Giả sử tồn tại  $t_1, t_2, \dots, t_k$  và  $t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} \leq t_k$ , ta chứng minh

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_k) \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_k} \right) \geq 2(k-1)^2 + 2 \quad (2)$$

Thật vậy, đặt  $(k-1)^2 + 1 = p$ . Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\begin{aligned} (t_1 + \dots + t_k) \left( \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_k} \right) &= (t_1 + \dots + t_{k-1}) \left( \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}} \right) + \frac{t_1 + \dots + t_{k-1}}{t_k} + t_k \left( \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}} \right) + 1 \\ &\geq (k-1)^{k-1} \sqrt[k-1]{t_1 \dots t_{k-1}} \cdot (k-1)^{k-1} \sqrt[k-1]{\frac{1}{t_1} \dots \frac{1}{t_{k-1}}} + \frac{t_1 + \dots + t_{k-1}}{t_k} + \frac{(k-1)^2 t_k}{t_1 + \dots + t_{k-1}} + 1 \end{aligned}$$

$$\geq (k-1)^2 + [(k-1)^2 + 1]^{(k-1)^2} \sqrt{\left(\frac{t_k}{t_1 + \dots + t_{k-1}}\right)^{(k-1)^2 - 1}} + 1$$

$$\geq (k-1)^2 + [(k-1)^2 + 1]^{(k-1)^2} \sqrt{\left(\frac{t_k}{t_k}\right)^{(k-1)^2 - 1}} + 1 = 2(k-1)^2 + 2 \Rightarrow (2) \text{ đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1} = a > 0 \\ t_k = (k-1)a \end{cases}$ . Xét hai khả năng:

• Nếu  $n = k$  thì (2) mâu thuẫn với (1)

• Nếu  $n \geq k + 1$  thì

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^k t_i\right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i}\right) + \left(\sum_{i=k+1}^n t_i\right) \left(\sum_{i=k+1}^n \frac{1}{t_i}\right) + \sum_{i=k+1}^n \left[ \left(\sum_{j=1}^k t_j\right) \frac{1}{t_i} + \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{t_j}\right) t_i \right]$$

$$\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + (n-k) \cdot 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k t_i\right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i}\right)}$$

$$\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + 2(n-k) \sqrt{2(k-1)^2 + 2}$$

$= (n-k + \sqrt{2(k-1)^2 + 2})^2 = (n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k)^2$ . Điều này mâu thuẫn với (2). Vì vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 38.** Cho  $a_1, \dots, a_n$  là các số thực dương ( $3 \leq n \in \mathbb{N}$ ) thỏa mãn

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \frac{3}{3n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \quad (1). \text{ Chứng minh rằng}$$

$a_i, a_j, a_k$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi  $1 \leq i < j < k \leq n$

### Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử tồn tại  $i, j, k$  thỏa mãn  $a_i, a_j, a_k$  không là độ dài ba cạnh một tam giác, giả sử là  $a_1, a_2, a_3$  với  $a_3 > a_1 + a_2$ .

**Bước 1.** Ta sẽ chứng minh  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq \frac{3}{8} (a_1 + a_2 + a_3)^2 \quad (2)$

$$(2) \Leftrightarrow 8(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 3(a_1 + a_2 + a_3)^2 \Leftrightarrow 5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 6(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)$$

$$\Leftrightarrow T = 5\left[a_3 - \frac{3}{5}(a_1 + a_2)\right]^2 + 5(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{5}(a_1 + a_2)^2 - 6a_1 a_2 \geq 0$$

$$\text{Ta có } T \geq 5\left[(a_1 + a_2) - \frac{3}{5}(a_1 + a_2)\right]^2 + 5(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{5}(a_1 + a_2)^2 - 6a_1 a_2$$

$$= \frac{4}{5}(a_1 + a_2)^2 + 5(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{5}(a_1 + a_2)^2 - 6a_1 a_2 = 4(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow (2) \text{ đúng.}$$

**Bước 2.** Ta sẽ chứng minh  $I = 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 8a_k^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)a_k \geq 0, \forall 4 \leq k \leq n$  (3). Ta có:

$$I \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + a_3)^2 + 8a_k^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)a_k = 8\left[a_k - \frac{3}{8}(a_1 + a_2 + a_3)\right]^2 \geq 0$$

**Bước 3.** Ta sẽ chứng minh  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{3}{3n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$  (4)

Ta có:  $(3n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 3(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = 8\left[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 3(a_1 + a_2 + a_3)^2\right] +$

$$+ \sum_{k=4}^n [3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 8a_k^2 - 6(a_1 + a_2 + a_3)a_k] + [(n-3)(a_4^2 + \dots + a_n^2) - (a_4 + \dots + a_n)^2] \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng bởi vì (2), (3) cũng đúng theo bất đẳng thức **Cauchy** –

**Schwarz**, ta có  $(n-3)(a_4^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_4 + \dots + a_n)^2 \Rightarrow$  (4) đúng.

Do (4) mâu thuẫn với (1), suy ra giả sử ban đầu là sai  $\Rightarrow$  (đpcm)

**Bài 39. [Austrian – Polish MO – 1999]** Cho  $5 \leq n \in \mathbb{N}$ . Tìm các số thực tốt nhất  $k_1, k_2$

thỏa mãn  $k_1 < T = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < k_2, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  (1)

### Chứng minh

Ta sẽ chứng minh  $k_1 = 1, k_2 = n - 1$ . Thật vậy, đặt  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , thì

$T > \frac{a_1}{S} + \frac{a_2}{S} + \dots + \frac{a_n}{S} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{S} = \frac{S}{S} = 1$ . Giả sử  $T > 1 + x$  với  $x > 0$ .

Đặt  $a_1 = 1, a_2 = t, \dots, a_n = t^{n-1} (t > 0)$  thì  $T = \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-1}} + \frac{n-1}{1+t}$

Đặt  $t > \frac{n-1-x}{x} \Rightarrow \frac{n-1}{1+t} < \frac{n-1}{1+\frac{n-1-x}{x}} = x \Rightarrow T < 1+x \Rightarrow$  mâu thuẫn.

Vì vậy,  $k_1 = 1$  là cận dưới lớn nhất.

Sử dụng tính chất: nếu  $0 < x < y$  và  $m > 0$  thì  $\frac{x}{y} < \frac{x+m}{y+m}$ , suy ra

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} < \frac{S - a_2}{S}, \frac{a_2}{a_2 + a_3} < \frac{S - a_3}{S}, \dots, \frac{a_n}{a_n + a_1} < \frac{S - a_1}{S} \Rightarrow T < \frac{nS - S}{S} = n - 1$$

Giả sử  $T < n - 1 - x$  với  $x > 0$ .

Đặt  $a_1 = 1, a_2 = t, \dots, a_n = t^{n-1} (t > 0)$  thì  $T = \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-1}} + \frac{n-1}{1+t} > \frac{n-1}{1+t}$ .

Đặt  $t < \frac{x}{n-1-x} \Rightarrow \frac{1}{1+t} < \frac{n-1-x}{n-1} \Rightarrow \frac{n-1}{1+t} > n-1-x \Rightarrow T > n-1-x \Rightarrow$  mâu thuẫn.

Vì vậy,  $k_2 = n - 1$  là cận trên nhỏ nhất.

**Bài 40.** Đặt  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ .

Chứng minh rằng:  $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (3a+c)(3b+a)(3c+b)$

**Chứng minh**

$$(1+a)(1+b)(1+c) - (3a+c)(3b+a)(3c+b) = 2 \sum_{cyc} (b+c)(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

**Bài 41.** Đặt  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

$$(1) \Leftrightarrow a(b+ac)(c+ab) + b(c+ab)(a+bc) + c(a+bc)(b+ca) \geq \frac{3}{2}(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

$$\Leftrightarrow 3abc + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3a^2b^2c^2 + abc(a^2 + b^2 + c^2) \text{ với } a + b + c = 3$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 + 2abc(ab+bc+ca) \geq 3a^2b^2c^2 + 12abc$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) \geq abc[3+3abc-2(ab+bc+ca)]$$

$$\Leftrightarrow 3c^2(a-b)^2 + 3b^2(c-a)^2 + 3a^2(a-b)^2 \geq$$

$$\geq abc[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) + 9abc - (a+b+c)(ab+bc+ca)]$$

$$\Leftrightarrow \left(3a^2 + bca^2 - \frac{1}{2}abc\right)(b-c)^2 + \left(3b^2 + cab^2 - \frac{1}{2}abc\right)(c-a)^2 + \left(3c^2 + abc^2 - \frac{1}{2}abc\right)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{Đặt } A_1 = 3a^2 + bca^2 - \frac{1}{2}abc; A_2 = 3b^2 + cab^2 - \frac{1}{2}abc; A_3 = 3c^2 + abc^2 - \frac{1}{2}abc$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \Rightarrow A_1 \geq A_2 \geq A_3$ . Ta có  $A_2 + A_3 = 3(b^2 + c^2) + abc(b+c) - abc \geq 6bc - abc = (6-a)bc \geq 0$ .

Suy ra  $A_1(b-c)^2 + A_2(c-a)^2 + A_3(a-b)^2 \geq (A_2 + A_3)(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$

**Bài 42.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $ab + bc + ca = 3$ .

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

**Chứng minh**

Không mất tính tổng quát, giả sử  $c \geq b \geq a \Rightarrow bc \geq \frac{ab+bc+ca}{3} = 1$ . Do đó

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} - \frac{2}{1+bc} = \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+bc}\right) + \left(\frac{1}{1+c^2} - \frac{1}{1+bc}\right) = \frac{(b-c)^2(bc-1)}{(1+b^2)(1+c^2)(1+bc)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+bc}. \text{ Ta sẽ chứng minh } \frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{1+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(3+bc+2a^2) \geq 3(1+a^2)(1+bc) \Leftrightarrow a^2+ab+ac \geq 3a^2bc \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq abc$$

Ta có:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = \frac{ab+bc+ca}{3} \cdot \sqrt[3]{abc} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} \cdot \sqrt[3]{abc} = abc$  (đpcm)

**Bài 43.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $a+b+c+abc=1$ .

Chứng minh rằng:  $ab+bc+ca \leq \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc}$  (1)

### Chứng minh

Đặt  $m = \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow 3m = a+b+c = 1-abc \Rightarrow$

$$A = \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc} = \frac{(3-3m)(3-6m)}{6+3m} = \frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m}$$

$$\Rightarrow A - 3m^2 = \frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m} - 3m^2 = \frac{3(1-3m-m^3)}{2+m} = 3 \cdot \frac{abc-m^3}{2+m}$$

Ta có (1)  $\Leftrightarrow ab+bc+ca \leq A \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{m^3-abc}{2+m} \leq 3m^2 - (ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{2+m} \leq 3(a+b+c)^2 - 9(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 27abc \leq 3(2+m)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad (2)$$

$$3m = 1-abc \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 2+m \geq 7m = \frac{7}{3}(a+b+c) \Rightarrow 3(2+m) \geq 4(a+b+c)$$

Nhưng  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ . Suy ra (2) sẽ đúng nếu ta có thể chứng minh  $(a+b+c)^3 - 27abc \leq 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \text{ đúng theo Schur.}$$

**Bài 45.** Cho  $a, b, c, d \geq 0$  và  $abc+bcd+cda+dab=4$ .

Chứng minh rằng:  $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4$

### Chứng minh

Luôn tồn tại  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $abc+bcd+cda+dab=4xyz$ ;  $xyz=1$ ;

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=2(xy+yz+zx); 3(a+b+c+d)=4(x+y+z).$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{4}{3}(x+y+z) \right]^2 - 4(xy+yz+zx) \geq 4 \Leftrightarrow 4(x+y+z)^2 - 9(xy+yz+zx) \geq 9$$

$$VT = 3(x^2+y^2+z^2) + (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 9\sqrt{x^2y^2z^2} + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (x-y)^2 \geq 9$$

## CHƯƠNG VI. TỔNG KẾT

### § 25.1 TÓM TẮT NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

#### 1.1 Bất đẳng thức AM – GM:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

#### 1.2 Bất đẳng thức AM – GM suy rộng:

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  Khi đó 
$$\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \geq \left( a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}$$

#### 2.1 Bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

#### 2.2 Bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz suy rộng:

Cho  $m$  bộ số thực không âm  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n); (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n); \dots; (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$

$$\text{Khi đó: } (a_1 b_1 \dots p_1 + a_2 b_2 \dots p_2 + \dots + a_n b_n \dots p_n)^m \leq (a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m) \dots (p_1^m + p_2^m + \dots + p_n^m)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 : b_1 : \dots : p_1 = a_2 : b_2 : \dots : p_2 = \dots = a_n : b_n : \dots : p_n$$

#### 3.1 Bất đẳng thức Holder:

Cho 2 bộ số  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $p, q \in \mathbb{Q}^+$  sao cho  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\text{Khi đó ta có: } (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

#### 3.2 Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $p, q \in \mathbb{R}$  sao cho  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Khi đó ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^{pq} \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^q (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^p \quad (3) \quad \forall pq \neq 0$$

(Bất đẳng thức Francis – Lithewood)

### 3.3 Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder

Cho  $m$  bộ số  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $\begin{cases} p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+ \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \dots l_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_2}} \dots \left( \sum_{i=1}^n l_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

### 3.4 Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder

Cho  $m$  bộ số  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $m$  số thỏa mãn  $\begin{cases} \alpha, \beta, \dots, \lambda > 0 \\ \alpha + \beta + \dots + \lambda = 1 \end{cases}$

Khi đó ta có 
$$\sum_{i=1}^n (a_i^\alpha b_i^\beta \dots l_i^\lambda) \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^\beta \dots \left( \sum_{i=1}^n l_i \right)^\lambda$$

### 4.1 Bất đẳng thức Minkowski

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $1 < p \in \mathbb{Q}^+$ , khi đó  $\left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}}$

### 4.2 Mở rộng của bất đẳng thức Minkowski

Cho  $m$  bộ số thực dương  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots\dots\dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$  và  $\begin{cases} q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^+ \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \end{cases}$

a.  $\left( \sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( \sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[ \sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p > 1$

b.  $\left( \sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left( \sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p < 1$



### 5.1 Bất đẳng thức Chebyshev

Cho hai dãy hữu hạn các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , khi đó

- Nếu có 2 dãy đơn điệu cùng chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  thì

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

- Nếu có 2 dãy đơn điệu ngược chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  thì

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

### 5.2 Bất đẳng thức Chebyshev suy rộng:

Cho  $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$  thỏa mãn  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$ .

- Nếu có 2 dãy đơn điệu cùng chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  thì

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + \dots + m_n a_n b_n \geq (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n)(m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n)$$

- Nếu có 2 dãy đơn điệu ngược chiều  $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$  thì

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + \dots + m_n a_n b_n \leq (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n)(m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

### 6.1 Bất đẳng thức Hoán vị cho hai dãy đơn điệu cùng chiều

- Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự cùng chiều nhau chẳng hạn là hai dãy đơn điệu

tăng  $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ . Gọi  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  là 1 hoán vị tùy ý của  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , khi đó ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$$

## 6.2 Bất đẳng thức Hoán vị cho hai dãy đơn điệu ngược chiều

Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự ngược chiều nhau chẳng hạn là

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}. \text{ Gọi } (t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ là 1 hoán vị tùy ý của } (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ khi đó ta có}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$$

## 6.3 Bất đẳng thức Hoán vị tổng quát

Vì với mọi dãy hữu hạn ta có thể đánh số và sắp lại thứ tự nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử có hai dãy số thực hữu hạn được sắp xếp thứ tự cùng chiều tức là

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

Gọi  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  là 1 hoán vị tùy ý của  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Đặt  $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ ;  $T = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$ ;  $s = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$ , khi đó  $s = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq T = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n \leq S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

**Nhận xét:**

- Số các bất đẳng thức hoán vị chính là số hoán vị của bộ  $n$  số  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  nên có  $(n!)$  bất đẳng thức hoán vị và  $\text{Max}_{(t_1, \dots, t_n)} T = S$ ;  $\text{Min}_{(t_1, \dots, t_n)} T = s$

- Bất đẳng thức hoán vị xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi một trong hai dãy  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  hoặc

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ là dãy dừng, tức là } \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

- Ta cũng có các bất đẳng thức hoán vị tương tự như trên nếu cố định bộ  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  và gọi  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  là một hoán vị tùy ý của  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

## 6.4 Các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức hoán vị

Giả sử  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  là một hoán vị của  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

- Nếu  $f(x)$  là hàm số không giảm trên  $(a, b)$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) \geq x'_1 f(x_1) + x'_2 f(x_2) + \dots + x'_n f(x_n)$$

- Nếu  $f(x)$  là hàm số không tăng trên  $(a, b)$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) \leq x'_1 f(x_1) + x'_2 f(x_2) + \dots + x'_n f(x_n)$$

- Nếu  $f(x), g(x)$  là hàm số không giảm trên  $(a, b)$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \geq f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + \dots + f(x_n)g(x'_n)$$

- Nếu  $f(x)$  là hàm số không giảm trên  $(a, b)$  và  $g(x)$  là hàm số không tăng trên  $(a, b)$  thì  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$  ta có bất đẳng thức sau

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \leq f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + \dots + f(x_n)g(x'_n)$$

### 7.1 Bất đẳng thức Schur

Với  $a, b, c \geq 0$  và  $k$  là số thực bất kì ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

### 7.2 Bất đẳng thức Schur suy rộng 1 (Vornicu Schur)

Xét bất đẳng thức:  $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$  (1)

Khi đó (1) đúng với mọi  $a \geq b \geq c \geq 0$  và  $x, y, z \geq 0$  nếu thỏa mãn 1 trong các khả năng:

i.  $x \geq y$  (hoặc  $z \geq y$ )

ii.  $ax \geq by$

iii.  $bz \geq cy$  (nếu  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác)

iv.  $\sqrt{x} + \sqrt{z} \geq \sqrt{y}$

v.  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$

### 7.3 Bất đẳng thức Schur suy rộng 2

Cho  $p, q, x, y, z, a, b, c$  là các số dương sao cho  $(a, b, c)$  và  $(x, y, z)$  là các bộ đơn điệu cùng chiều. Khi đó ta luôn có:

$$x[(a^p - b^p)(a^q - c^q) + (a^q - b^q)(a^p - c^p)] + y[(b^p - c^p)(b^q - a^q) + (b^q - c^q)(b^p - a^p)] + z[(c^p - a^p)(c^q - b^q) + (c^q - a^q)(c^p - b^p)] \geq 0 \quad (1)$$

### 7.4 Bất đẳng thức Schur suy rộng 3

**Định lý 4:** Xét bất đẳng thức sau, trong mỗi hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\sum f(a-b)f(a-c)f(a-d)f(a-e) \geq 0$$

Khi đó để bất đẳng thức đúng thì hàm số  $f$  phải thỏa mãn 2 điều kiện sau đây:

i.  $f$  là hàm đơn điệu tăng.

ii.  $xf(x) \geq 0$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$

### 7.5 Bất đẳng thức Schur mở rộng cho tam giác

Cho hai tam giác với độ dài các cạnh tương ứng  $ABC(a, b, c); A_1B_1C_1(a_1, b_1, c_1)$ . Khi đó:

$$a_1bc(a^\alpha - b^\alpha)(a^\alpha - c^\alpha) + b_1ca(b^\alpha - c^\alpha)(b^\alpha - a^\alpha) + c_1ab(c^\alpha - a^\alpha)(c^\alpha - b^\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \geq 1$$

### 7.6 Hệ quả bất đẳng thức Schur với cấu trúc đối xứng 3 biến

Cho  $a, b, c \geq 0$ , đặt  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + bc + ca$ ,  $r = abc$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} p^2 &\geq 3q & p^2q + 3pr &\geq 4q^2 & p^2q &\geq 3pr + 2q^2 & q^3 + 9r^2 &\geq 4pqr \\ q^2 &\geq 3pr & pq^2 + 3qr &\geq 4p^2r & pq^2 &\geq 2p^2r + 3qr & 2q^3 + 9r^2 &\geq 7pqr \\ p^3 &\geq 27r & p^4 + 3q^2 &\geq 4p^2q & 2p^3 + 9r &\geq 7pq & p^3r + q^3 &\geq 6pqr \\ p^3 + 9r &\geq 4pq; & p^4 + 4q^2 + 6pr &\geq 5p^2q \end{aligned}$$

### 8.1 Bất đẳng thức Muirhead

• **Định nghĩa:** Giả sử các biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$  và bộ số mũ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

**Ký hiệu:** Tập biến số  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ; Tập số mũ  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

Đa thức đối xứng  $S$  với các biến số của tập  $X$  và số mũ của tập  $\alpha$  là

$$S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} \cdot S_{X \setminus \{a_1\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_1\}} + \dots + a_n^{\alpha_n} \cdot S_{X \setminus \{a_n\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_n\}}$$

Hai bộ số  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  gọi là hai bộ số đồng bậc khi và chỉ khi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

Cho hai bộ số  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  đồng bậc, ta nói bộ  $\alpha$  trội hơn bộ  $\beta$  và

$$\text{viết ký hiệu } \alpha \succ \beta \text{ khi và chỉ khi ta có } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k \quad \forall k = \overline{1, n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{cases}$$

• **Định lý Muirhead với số mũ thực:**

Xét các biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó nếu  $\alpha \succ \beta$  tức là

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k \quad \forall k = \overline{1, n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{cases} \text{ thì } S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \geq S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = S_X^\beta$$

**Đảo lại:** Nếu mọi bộ  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  gồm  $n$  số thực dương ta có  $S_X^\alpha \geq S_X^\beta$  thì  $\alpha \succ \beta$

### 8.2 Hệ quả: Bất đẳng thức ASYM

Cho  $m$  bộ số  $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$  với  $m, n \in \mathbb{Z}^+$

, đặt  $t_i = \frac{\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \dots + \alpha_{mi}}{m} \quad \forall i = \overline{1, n}$ . Khi đó với các biến số  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  ta có:

$$S_{\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n}} + S_{\alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n}} + \dots + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}\dots\alpha_{mn}} \geq m S_{t_1 t_2 \dots t_n}$$

## 9. Các định lý Fermat cho hàm một biến số

### 9.1 Định lý về hàm đơn điệu

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $[a, b]$ .

- Nếu  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$  thì  $f(x)$  tăng trên  $[a, b]$  và  $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$ ,  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$
- Nếu  $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$  thì  $f(x)$  giảm trên  $[a, b]$  và  $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$ ,  $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$

### 9.2 Định lý về điều kiện cần để hàm số có cực trị

Giả sử  $y = f(x)$  xác định trên một lân cận đủ bé của điểm  $x_0 \in (a, b)$  và có đạo hàm tại điểm  $x_0$ . Khi đó nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$

### 9.3 Định lý 1 về điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử  $y = f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và  $x_0 \in (a, b)$ . Trong một lân cận đủ bé  $\varepsilon > 0$  của điểm  $x_0$ , nếu  $f'(x)$  thay đổi dấu khi  $x$  đi qua  $x_0$  (có thể không tồn tại  $f'(x_0)$ ), thì  $f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$ .

- Nếu  $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  và  $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.
- Nếu  $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$  và  $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$  thì  $x_0$  là điểm cực đại

### 9.4 Định lý 2 về điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử  $y = f(x)$  xác định trên  $[a, b]$  và  $x_0 \in (a, b)$ . Trong một lân cận đủ bé  $\varepsilon > 0$  của điểm  $x_0$ , hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 liên tục, đồng thời  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) \neq 0$  thì  $x_0$  là một điểm cực trị của hàm số với sự phân loại chi tiết:

- Nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm  $f(x)$ .
- Nếu  $f'(x_0) = 0$  và  $f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của hàm  $f(x)$ .

## 10. Định lý Lagrange hàm một biến số

Nếu hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và có đạo hàm trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại ít nhất một giá trị  $c$  (với  $a < c < b$ ) sao cho  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## 11. Định lý Lagrange hàm nhiều biến số

### 11.1 Điều kiện cần của cực trị hàm nhiều biến

Giả sử hàm số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$  xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền  $D = \{X(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in (a_i, b_i), i = \overline{1, n}\}$  khi đó ta có định lý:

**Định lý:** Điều kiện cần để hàm số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt được cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$  là tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$\begin{cases} w'_{x_i} = f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

### 11.2 Điều kiện đủ của cực trị hàm nhiều biến

Giả sử  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$  là một điểm dừng của hàm số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$  và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Như đã biết, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số  $n$  biến số  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tại điểm  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$  là một dạng toàn

phương của  $n$  biến số  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ :  $d^2 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j$

Trong đó  $a_{ij}$  là các đạo hàm riêng cấp hai:  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{X})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

**Định lý:**

1. Nếu  $d^2 f$  là một dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là điểm cực tiểu của hàm số  $f(X)$ ;
2. Nếu  $d^2 f$  là một dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là điểm cực đại của hàm số  $f(X)$ .
3. Nếu  $d^2 f$  là một dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  không phải là điểm cực trị của hàm số  $f(X)$ .

Ma trận của dạng toàn phương  $d^2 f$  là ma trận vuông với các phần tử là các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng  $\bar{X}$  (gọi là ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó: } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{X})}{\partial x_i \partial x_j}. \text{ Đặt } H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Một trong các phương pháp xem xét tính xác định của một dạng toàn phương là dựa vào các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương đó. Chú ý rằng, định thức con  $H_k$  tạo thành từ  $k$  dòng đầu và  $k$  cột đầu của nó. Như vậy  $H$  có  $n$  định thức con chính từ cấp 1 đến  $n$ .

Áp dụng định lý về dấu hiệu dạng toàn phương xác định ta có quy tắc sau đây:

### Quy tắc xác định cực trị bằng xét dấu các định thức con chính

1. Nếu tất cả các định thức con chính của ma trận  $H$  đều dương ( $H_k > 0$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, n$ ) thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là *điểm cực tiểu* của hàm số  $f(X)$ .
2. Nếu  $(-1)^k H_k > 0$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, n$ , tức là ma trận  $H$  có tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, thì điểm dừng  $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  là *điểm cực đại* của hàm số  $f(X)$ .

## 12. Bất đẳng thức Bernoulli

### 12.1 Dạng nguyên thủy của bất đẳng thức

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực cùng dấu và lớn hơn  $(-1)$ . Khi đó ta có:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

### 12.2 Dạng cơ bản của bất đẳng thức

• Số mũ tự nhiên:  $\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$  ta có  $(1 + a)^n \geq 1 + na$

• Số mũ thực:

$\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$  và  $0 \leq r \leq 1$  ta có  $(1 + a)^r \leq 1 + ra$

$\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$  và  $(r \leq 0) \cup (r \geq 1)$  ta có:  $(1 + a)^r \geq 1 + ra$

### 12.3 Dạng tổng quát của bất đẳng thức

• Trường hợp 1:  $\forall x > -1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$  ta có:  $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

Hệ quả 1:  $\forall t > 0, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$  ta có:  $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$

Hệ quả 2:  $u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \leq \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta, \forall u > 0, \forall 0 < \alpha < \beta$ . Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = 1}$

Hệ quả 3:  $u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^{\alpha-1} \leq \alpha u_0^{\alpha-1} u, \forall u, u_0 > 0, \forall 0 < \alpha < 1$  Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = u_0}$

• Trường hợp 2:  $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$  ta có:  $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

Hệ quả 1:  $\forall t > 0, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$  ta có:  $t^\alpha \geq \alpha t + (1 - \alpha)$

Hệ quả 2:  $u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) > \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta, \forall u > 0, \forall \alpha > \beta > 0$ . Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = 1}$

Hệ quả 3:  $u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^{\alpha-1} \geq \alpha u_0^{\alpha-1} u, \forall u, u_0 > 0, \forall \alpha > 1$  Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \boxed{u = u_0}$

## 13. Bất đẳng thức Jensen

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0; 1]$  với  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ ,

• Nếu  $f(x)$  là hàm lồi trên  $\mathbb{I}$  thì ta có bất đẳng thức

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

• Nếu  $f(x)$  là hàm lõm trên  $\mathbb{I}$  thì ta có bất đẳng thức

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$



**14. Bất đẳng thức Karamata**

Cho 2 bộ  $n$  số thực được sắp thứ tự  $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  với  $(a) \succ (b)$  tức là thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \dots \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

- Nếu  $f$  là hàm lồi trên  $I$  thì  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$
- Nếu  $f$  là hàm lõm trên  $I$  thì  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$

**15. Bất đẳng thức với các hàm lồi bên phải và lõm bên trái****15.1 Định lý hàm số lồi bên phải (Định lý RCF)**

Cho  $f(u)$  là một hàm số xác định trên khoảng  $I \subset \mathbb{R}$  và lồi với  $u \geq s, s \in I$ .

Nếu  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$  (1)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = ns \\ x_2 = x_3 = \dots = x_n \geq s \end{cases} \text{ thì (1) cũng đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I \text{ thỏa mãn } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq s$$

**15.2 Định lý hàm số lõm bên trái (Định lý LCF)**

Cho  $f(u)$  là hàm xác định trên khoảng  $I \subset \mathbb{R}$  và lõm với  $u \leq s, s \in I$ .

Nếu  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$  (2)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = ns \\ x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq s \end{cases} \text{ thì (2) cũng đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I \text{ thỏa mãn } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq s$$

**15.3 Định lý hàm lõm bên trái – lồi bên phải (Định lý LCRCF).**

Cho  $a < c$  là các số thực,  $f$  là hàm liên tục trên khoảng  $I = [a, +\infty)$ , lõm trên  $[a, c]$  và lồi trên  $[c, +\infty)$ . Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S = \text{const}$ , thế thì biểu thức

$E = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  đạt giá trị lớn nhất với  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$

**15.4 Định lý điểm uốn đơn (Định lý SIP).**

Cho  $f$  là hàm khả vi cấp 2 trên  $\mathbb{R}$  với điểm uốn đơn, cho  $S$  là số thực cố định và cho

$g(x) = f(x) + (n-1)f\left(\frac{S-x}{n-1}\right)$ . Nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$ , thì  $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$

## 16. Bất đẳng thức Popoviciu và các dạng mở rộng

### 16.1 Bất đẳng thức Popoviciu (1965)

Cho hàm  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $x, y, z \in \mathbb{I}$ , khi đó ta có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

### 16.2 Mở rộng 1 Bất đẳng thức Popoviciu (A. Lupas, 1982)

Cho hàm  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $x, y, z \in \mathbb{I}$ , khi đó với mọi  $p, q, r > 0$  ta có:

$$pf(x) + qf(y) + rf\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \geq$$

$$\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right)$$

### 16.3 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Popoviciu (Vasile Cirtoaje, 2002)

Nếu  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$  thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + n(n-2)f(a) \geq (n-1)[f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)],$$

### 16.4 Mở rộng 3 Bất đẳng thức Popoviciu (Vasile Cirtoaje, 2004)

Nếu  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$  thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + \frac{n}{n-2}f(a) \geq \frac{2}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)$$

trong đó  $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , và  $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$  với mọi  $i$ .

### 16.5 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Popoviciu (Bill Zhao, 2005)

Nếu  $f$  là hàm lồi trên khoảng  $\mathbb{I}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$ , thì

$$\binom{m-1}{n-2} \sum_{k=1}^n f(a_k) + n \binom{m-2}{n-2} f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} f\left(\frac{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}}{m}\right)$$

### 17.1 Bất đẳng thức Petrovica

Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[0, a]$ . Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, a]$  sao cho  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \in [0, a]$ .

Khi đó ta có:  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-1)f(0)$

### 17.2 Mở rộng 1 Bất đẳng thức Petrovica

Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[0, a]$  và  $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$ . Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\right]$  và

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i < a. \text{ Khi đó ta có bất đẳng thức } \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1\right)f(0)$$

### 17.3 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Petrovica (Vasic)

Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên  $[0, a]$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$1. x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, a] \quad 2. p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1 \quad 3. \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i \in [0, a]$$

$$4. \sum_{i=1}^{n_1-1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2-1} p_i x_i = \dots = \sum_{i=n_{k-1}}^n p_i x_i \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1})$$

Khi đó ta có bất đẳng thức: 
$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq k f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^n p_i\right) f(0)$$

## 18. Bất đẳng thức trong tích phân Riman

### 18.1 Bất đẳng thức cơ bản trong tích phân Riman

• **Mệnh đề 1:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  và  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

• **Mệnh đề 2:** Nếu  $f, g$  liên tục trên  $[a, b]$  và  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

• **Mệnh đề 3:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thỏa mãn  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  và hàm số  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx > 0$

• **Mệnh đề 4:** Nếu  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thỏa mãn  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$

và  $f(x), g(x)$  không đồng nhất với nhau trên  $[a, b]$  thì  $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$

• **Mệnh đề 5:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thỏa mãn  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$  và

hàm  $f(x)$  không đồng nhất với  $m$  hoặc  $M$  thì  $m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$

• **Mệnh đề 6:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

• **Mệnh đề 7:** Nếu  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thì  $\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) g(x)| dx$

• **Định lý về giá trị trung bình:** Nếu  $f$  là một hàm số liên tục trên  $[a, b]$  thì tồn tại ít nhất 1

điểm  $c \in [a, b]$  sao cho  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

• **Định lý mở rộng về giá trị trung bình:** Giả sử  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$ .

Nếu  $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$  hoặc  $g(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$  thì tồn tại ít nhất một điểm  $c \in [a, b]$  sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

### 18.2 Bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz

Cho hai hàm số  $f, g$  liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có:  $\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

### 18.3 Bất đẳng thức Young

Cho  $p, q > 1$  thỏa mãn  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Khi đó ta có:  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b > 0$

### 18.4 Bất đẳng thức Hilbert

Nếu  $a_i, b_j \geq 0; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; p > 1$ , thì khi đó:  $\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_n b_m}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} \left( \sum_{n=1}^k a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{m=1}^k b_m^q \right)^{\frac{1}{q}}$

### 18.5 Bất đẳng thức tích phân Holder

Cho  $p, q > 1$  với  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  và  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $[a, b]$ .

Khi đó ta có:  $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 > 0: A|f(x)|^p = B|g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b]$

### 18.6 Bất đẳng thức tích phân Minkowski

Cho  $p > 1$  và  $f, g$  là hàm số liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có:

$$\left( \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

### 18.7 Bất đẳng thức tích phân Diaz

Cho  $f(x), g(x)$  là các hàm liên tục trên  $[a, b], f(x) \neq 0$  và  $m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ .

Khi đó ta có:  $\int_a^b g^2(x)dx + Mm \int_a^b f^2(x)dx \leq (M+m) \int_a^b f(x)g(x)dx$

### 18.8 Bất đẳng thức tích phân G.Polya

Cho  $f, g$  là các hàm liên tục trên  $[a, b]$  và  $\begin{cases} 0 < a \leq f(x) \leq A \\ 0 < b \leq g(x) \leq B \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{Khi đó ta có: } \frac{(ab + AB)^2}{4aAbB} \geq \frac{\int_a^b g^2(x) dx \cdot \int_a^b f^2(x) dx}{\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2} \geq \frac{4aAbB}{(ab + AB)^2}$$

### 18.9 Bất đẳng thức tích phân Chebyshev

Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục và đơn điệu trên  $[a, b]$ . Khi đó ta có:

a. Nếu  $f(x), g(x)$  là hai hàm cùng đồng biến hoặc là hai hàm cùng nghịch biến thì ta có

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \geq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right)$$

b. Nếu  $f(x), g(x)$  có tính đơn điệu ngược chiều nhau tức là một hàm đồng biến và một hàm nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right)$$

### 19. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)

Xét bất đẳng thức  $A \geq B$  trong đó  $A, B$  là các biểu thức chứa các biến số  $a, b, c$ .

Giả sử ta biến đổi được bất đẳng thức  $A - B \geq 0$  có dạng:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1). \text{ Xét các mệnh đề sau:}$$

**19.1 Mệnh đề 1:** Nếu  $S_a \geq 0; S_b \geq 0; S_c \geq 0$  thì

$$S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Đây là một trường hợp tầm thường. Dưới đây ta sẽ xét các dấu hiệu khác để (1) đúng.

**19.2 Mệnh đề 2:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thỏa mãn 2 điều kiện:

$$\text{i) } S_a + S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0.$$

$$\text{ii) Nếu } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \text{ thì } S_b \geq 0$$

$$\text{Khi đó ta có } S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$

**19.3 Mệnh đề 3:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn điều kiện:

Nếu  $a \leq b \leq c$  hoặc  $a \geq b \geq c$  thì  $S_a \geq 0, S_c \geq 0$  và  $S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$

Khi đó ta có  $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**19.4. Mệnh đề 4:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn điều kiện:

Nếu  $a \leq b \leq c$  thì  $S_a \geq 0, S_b \geq 0$  và  $b^2 S_c + c^2 S_b \geq 0$

Khi đó ta có  $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**19.5. Mệnh đề 5:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn 2 điều kiện:

$$\text{i) } S_a + S_b > 0 \vee S_b + S_c > 0 \vee S_c + S_a > 0$$

$$\text{ii) } S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \geq 0$$

Khi đó ta có  $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**19.6. Mệnh đề 6:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn điều kiện:

$$\text{i) } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c$$

$$\text{ii) Tồn tại } \alpha > 0 \text{ sao cho } S_a + \alpha^2 S_c + (\alpha + 1)^2 S_b \geq 0$$

$$\text{iii) } \begin{cases} |a-b| \geq \alpha |c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + \frac{\alpha+1}{\alpha} S_b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \geq \alpha |a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + \frac{\alpha+1}{\alpha} S_b \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có:  $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$  (1)

**Hệ quả:** Cho các số thực  $a, b, c, S_a, S_b, S_c$  thoả mãn các điều kiện

$$\text{i) } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \quad \text{ii) } S_a + S_c + 4S_b \geq 0$$

$$\text{iii) } \begin{cases} |a-b| \geq |c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + 2S_b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \geq |a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + 2S_b \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có:  $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$

## 20. PHƯƠNG PHÁP DÒN BIẾN (MV)

### 20.1 BẤT ĐẲNG THỨC 3 BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT TẠI GIÁ TRỊ BIẾN ĐỐI XỨNG

• Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức  $f(x, y, z) \geq 0$  với  $x, y, z$  là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Khi đó ta sẽ thực hiện 2 bước chính sau:

**Bước 1:** (Kỹ thuật dồn về 2 biến bằng nhau) Đánh giá  $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$  với  $t$  là biến sao cho bộ số  $(t, t, z)$  thỏa mãn mọi tính chất của bộ  $(x, y, z)$ .

**Bước 2:** Đánh giá  $f(t, t, z) \geq 0$ .

**Chú ý:** Đối với các bất đẳng thức đồng bậc ta có thể làm cho chúng minh đơn giản hơn bằng cách chuẩn hóa các biến trong bất đẳng thức trước khi thực hiện 2 bước

#### 20.1.1 Bất đẳng thức không điều kiện:

Đối với những bất đẳng thức không có điều kiện thì dồn biến theo các đại lượng trung bình

chẳng hạn  $t = \frac{x+y}{2}; t = \sqrt{xy}; t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ ... là kỹ thuật chính dùng để dồn 2 biến bằng nhau.

#### 20.1.2 Dồn biến với bất đẳng thức có điều kiện

Để chứng minh bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  với các biến  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $g(a, b, c) = 0$  thì thực hiện bước 1 ta cần chứng minh  $f(a, b, c) \geq f(a, t, t)$  với  $t$  là biến thỏa mãn  $g(a, t, t) = 0$

### 20.2 DÒN BIẾN BẰNG KỸ THUẬT HÀM SỐ

Giả sử cần chứng minh  $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$  với  $t = \frac{y+z}{2}$ , ta xét hàm:  $g(s) = f(x, t+s, t-s)$

với  $s \geq 0$ . Sau đó chứng minh  $g$  tăng  $\forall s \geq 0$  (thường sử dụng đạo hàm), suy ra  $g(s) \geq g(0)$ .

### 20.3 BẤT ĐẲNG THỨC 3 BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT ĐƯỢC TẠI BIÊN

Xét bất đẳng thức  $f(x, y, z) \geq 0$  với  $x, y, z \geq 0$ , ta sẽ chứng minh  $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$ , trong đó  $s, t$  là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến  $a, b, c$ . Thích hợp ở đây chính là việc bộ số  $(0, s, t)$  phải thỏa mãn tất cả các điều kiện của  $(a, b, c)$ , đồng thời hiệu  $d = f(x, y, z) - f(0, s, t) \geq 0$  cần đơn giản nhất có thể.

Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng  $f(0, s, t) \geq 0$ .

#### Định lý dồn biến mạnh [SMV-Strongly Mixing Variables]

Cho: •  $D \in \mathbb{R}^n, D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq \alpha, \sum x_i \geq \alpha, \sum x_i = ns = \text{const}\}$  và  $s_0 = (s, s, \dots, s) \in D$

• Phép biến đổi  $T: D \rightarrow D$  như sau: với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D, a \neq s_0$ ,



ta chọn ra 2 chỉ số  $i \neq j$  nào đó (tùy theo hàm  $f$  bên dưới) sao cho  $a_i \neq a_j$ , rồi thay  $a_i, a_j$  bởi trung bình cộng của chúng.

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số liên tục thỏa mãn:  $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$ .

Khi đó:  $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$

## 20.4 ĐỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH [UMV – UNDERFINE MIXING VARIABLES]

**Định lý UMV:**

Cho  $D \subset \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $D$  đóng và bị chặn. Gọi  $\Lambda$  là tập hợp các phần tử trong  $D$  có  $t$  thành phần bằng 0 và  $n - t$  thành phần bằng nhau ( $t \geq 0$ ).

- Xét 2 phép biến đổi  $T_1, T_2: D \rightarrow D$  như sau: Với mỗi phần tử  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \setminus \Lambda$ , chọn ra 2 chỉ số  $i \neq j$  sao cho  $a_i = \min\{a_i > 0, i = 1, \dots, n\}$  và  $a_j = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , sau đó thay  $a_i, a_j$  bởi  $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$  (ứng với  $T_1$ ) và  $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$  (ứng với  $T_2$ ).

- Giả sử  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục thỏa mãn:  $f(a) \geq \min\{f(T_1(a)), f(T_2(a))\}, \forall a \in D$

Khi đó ta có  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$

## 20.5 ĐỒN BIẾN VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Là phương pháp dồn biến nữa dành cho hàm lồi được dựa trên cơ sở hai định lý sau:

**Định lý 1:** Cho  $f$  là hàm lồi  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ta có:  $f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a+b-x), \forall x \in [a, b]$

**Định lý 2:** (bất đẳng thức *Jensen*) Cho  $f$  là hàm số lồi  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Khi đó:

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b] \text{ ta có: } f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = n f(T)$$

## 20.6 ĐỒN BIẾN BẰNG QUY NẠP THỪA

Giả sử ta cần chứng minh một bất đẳng thức của  $n$  biến  $a_1, a_2, \dots, a_n$  có điều kiện ràng buộc là  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , trong đó đẳng thức xảy ra khi  $n$  biến bằng nhau. Chính đẳng thức ràng buộc này không cho phép chúng ta giải bài toán bằng quy nạp. Tuy nhiên, nếu chúng ta sửa điều kiện ràng buộc lại thành  $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$  thì khi đó ta có thể giả sử, chẳng hạn  $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  để có  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} \geq 1$  và ta có thể dùng giả thiết cho  $n-1$  biến này để quy về trường hợp  $n-1$  biến bằng nhau. Sau đây là một ví dụ đặc sắc cho kỹ thuật này.

## 20.7 DÒN BIẾN TOÀN MIỀN [EMV – ENTIRELY MIXING VARIABLES]

Tất cả những kỹ thuật dồn biến mà chúng ta đã được đề cập ở các mục trên đều có một đặc điểm chung là khi thực hiện phép dồn biến:  $f(a,b,c) \geq f(a',b',c')$  thì bộ ba số  $(a,b,c)$  và  $(a',b',c')$  đều có một đại lượng đặc trưng giống nhau, chẳng hạn như tổng, tích...

Phương pháp *EMV* cũng có đại lượng đặc trưng không đổi sau khi dồn biến. Tuy nhiên, sự khác biệt hoàn toàn so với các phương pháp dồn biến trước là: “Đại lượng đặc trưng không đổi khi sử dụng *EMV* là hiệu các biến, tức là các đại lượng  $a-b, b-c, c-a$ ”.

Tư tưởng chủ đạo của *EMV* là chứng minh khi tăng hoặc giảm các biến đi cùng một đại lượng, bất đẳng thức yếu đi hoặc không đổi. Từ đó chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp một biến ở biên.

Chú ý rằng nếu sử dụng *EMV* trong bất đẳng thức  $n$  biến, khi dồn một biến về biên, thì bất đẳng thức còn  $n-1$  biến, tuy nhiên, nếu số biến còn lại vẫn  $\geq 3$  thì việc chứng minh là khá phức tạp. Vì vậy *EMV* thường sử dụng trong bất đẳng thức ba biến với phương pháp dồn biến có biên tại 0 hoặc dồn biến với các đại lượng trong tam giác.

## 20.8. DÒN BIẾN TỔNG QUÁT [GMV – GENERAL MIXING VARIABLES]

Đây là một định lý rất tổng quát, bao gồm gần như toàn bộ các khả năng dồn biến.

**20.8.1** Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian  $\mathbb{R}^n$ .

**Định nghĩa 1:**

- Không gian  $\mathbb{R}^n$  là tập hợp các bộ thứ tự  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i$ .
- Một dãy  $\{x_m = (x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n,m})\}$  trong  $\mathbb{R}^n$  gọi là hội tụ về  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  nếu từng dãy  $x_{i,m}$  hội tụ về  $z_i$  khi  $m \rightarrow \infty, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .
- Cho  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Một hàm số  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gọi là liên tục trên  $D$  nếu: với mọi dãy  $\{x_m\} \subset D$  và với mọi  $z \in D$  sao cho  $\{x_m\}$  hội tụ về  $z$ , thì ta đều có:  $f(x_m)$  hội tụ về  $f(z)$ .

**Định nghĩa 2:** Cho  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Ta nói:

- $D$  đóng nếu với mọi dãy  $\{x_m\} \subset D$  và với mọi  $z \in \mathbb{R}^n$  sao cho  $\{x_m\}$  hội tụ về  $z$ , thì ta có  $z \in D$ .
- $D$  bị chặn nếu tồn tại số thực  $M$  sao cho:  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ , thì  $|x_i| \leq M, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Chúng ta có kết quả căn bản sau đây (sẽ chứng minh ở cuối mục này)

**Định lý Weierstrass:** Cho  $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ , và  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục. Thì  $f$  đạt giá trị nhỏ nhất trên  $D$ , nghĩa là tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho:  $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Chúng ta cũng có kết quả tương tự với giá trị lớn nhất.

• **Bình luận:** Định lý này là một mở rộng của một kết quả quen thuộc: "Cho  $[a, b]$  là 1 khoảng đóng trong  $\mathbb{R}$  và  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục, thì  $f$  có giá trị nhỏ nhất trên  $[a, b]$ ". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng.

**20.8.2 Định lý GMV:** Ta sẽ luôn giả thiết rằng:

- $D$  là 1 tập con trong  $\mathbb{R}^n$ , và  $\Lambda$  là 1 tập con đóng của  $D$ .
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số liên tục liên tục sao cho  $f$  có giá trị nhỏ nhất trên  $\Lambda$ .
- $T_1, \dots, T_k : D \rightarrow D$  là các phép biến đổi sao cho  $T_1(x) = \dots = T_k(x) = x, \forall x \in \Lambda$ .

Ta sẽ đặt ra các tiêu chuẩn để giá trị nhỏ nhất của  $f$  trên  $\Lambda$  cũng chính là giá trị nhỏ nhất của  $f$  trên  $D$ . Ta có

**Định lý GMV1:** Nếu

- $f(x) \geq \min_{j=1,k} \{f(T_j(x))\}, \forall x \in D \setminus \Lambda$
  - $\forall j = \overline{1, k}, \forall x \in D$  ta có  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_j^m(x) \in \Lambda$ , trong đó  $T_j^0(x) = x, T_j^m(x) = T_j(T_j^{m-1}(x))$
- thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ .

Hơn nữa, đẳng thức không xảy ra trên  $D \setminus \Lambda$  nếu  $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

**Định lý GMV2:** Nếu

- $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ .
- $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ , hơn nữa đẳng thức không xảy ra trên  $D \setminus \Lambda$ .

**Định lý GMV3:** Nếu

- $D$  đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^n$ .
- $f(x) \geq \min_{j=1,k} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$
- Tồn tại các hàm số  $h_j$  liên tục  $D \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn:  $h_j(x) > h_j(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ .

thì  $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$ .

## 21. PHƯƠNG PHÁP ABC

Xét lớp các bất đẳng thức đối xứng ba biến  $a, b, c$  có thể đưa về bất đẳng thức hàm  $f(a, b, c)$  chỉ chứa các đại lượng  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ ,  $abc$  so sánh với hằng số. Khi đó chúng ta sẽ khảo sát hàm  $f(a, b, c)$  theo biến  $abc$  với hai đại lượng cố định là  $a + b + c$ ,  $ab + bc + ca$ .

**21.1 Định lý 1:** Nếu  $f(abc, ab + bc + ca, a + b + c)$  là hàm đơn điệu trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**21.2 Định lý 2:** Nếu  $f(abc, ab + bc + ca, a + b + c)$  là hàm lồi trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị lớn nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

**21.3 Định lý 3:** Nếu  $f(abc, ab + bc + ca, a + b + c)$  là hàm lõm trên  $\mathbb{R}$  theo  $abc$  thì giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau, còn trong tập  $\mathbb{R}^+$  thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

### 21.4 Định lý ABC mở rộng

i) Cho  $a, b, c$  đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng  $abc, a + b + c$  đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì  $ab + bc + ca$  sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau.

ii) Cho  $a, b, c$  đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng  $abc$ ,  $ab + bc + ca$  đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì  $a + b + c$  sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến  $a, b, c$  bằng nhau.

### 21.5. ĐỊNH LÝ ABC TỔNG QUÁT

**21.5.1 Khả ABC:** Ta gọi  $f(a, b, c)$  là một biểu thức khả ABC nếu như bất đẳng thức  $f(a, b, c) \geq 0$  có thể được chứng minh dựa vào định lý ABC để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (Điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với  $abc$ )

**21.5.2 Định lý :** Xét một biểu thức đối xứng  $n$  biến  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , trong đó  $f$  có giá trị nhỏ nhất và  $n \geq 3$ . Ta sẽ coi  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  như là một biểu thức ba biến  $g(a_1, a_2, a_3)$  với các số  $a_4, a_5, \dots, a_n$  được coi như là các hằng số. Khi đó nếu  $g$  khả ABC thì bất đẳng thức  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$  có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i)  $m$  biến bằng nhau,  $n - m$  biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với  $abc$ )

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên

## 22. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC HÓA BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ (GLA)

### 22.1 PHƯƠNG PHÁP GLA VỚI 3 BIẾN SỐ VÀ PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TAM GIÁC

• Với  $a, b, c > 0$ , đặt  $x = b + c, y = c + a, z = a + b$  thì  $x, y, z$  trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ với  $p, R, r, S$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác XYZ. Khi đó ta có các đẳng thức và các định lý quan trọng sau đây:

#### 22.1.1 Các đẳng thức cơ bản

$$1. a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2; ab + bc + ca = 4Rr + r^2$$

$$\text{Hệ quả: } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \frac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$$

$$2. (a+b)(b+c)(c+a) = xyz = 4Rrp; abc = (p-x)(p-y)(p-z) = \frac{S^2}{p} = pr^2$$

$$\text{Hệ quả: } \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{r}{4R}; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4R+r}{pr}; \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{r^2}$$

$$3. \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2(2R-r)}{r}$$

$$4. a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)] + 3abc \\ = p(p^2 - 8Rr - 2r^2 - 4Rr - r^2) + 3pr^2 = p(p^2 - 12Rr)$$

$$5. a^4 + b^4 + c^4 = (p^2 - 8Rr - 2r^2)^2 - 2(4Rr + r^2)^2 + 4p^2r^2 = p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2$$

$$6. \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$$

$$7. 16S^2 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4)$$

$$8. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - 3 = \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr}$$

$$9. \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2r^2}$$

$$10. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp}$$

$$11. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2} = \frac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2r^2p^2} - \frac{1}{Rr}$$

$$12. \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{abc} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}$$

$$13. a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = (ab+bc+ca)^3 - 3abc(a+b)(b+c)(c+a) = r^3(4R+r)^3 - 12p^2r^3R$$

$$14. \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} = \frac{p^4 - 8(2R+r)p^2 + 5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2 - 2p^4r^2 - 2r^3(4R+r)^3}$$

$$15. (a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b) = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3a^2b^2c^2 + abc(a^3+b^3+c^3) \\ = r^3(4R+r)^3 - 12R^2r^3p + 3p^2r^4 + p^2r^2(p^2 - 12Rr) = r^2[r(4R+r)^3 + 3p^2r^2 + p^4 - 24Rrp^2]$$

### 22.1.2 Các định lý

1. Định lý 1: Tam giác có hai góc  $\geq 60^\circ \Leftrightarrow p \geq \sqrt{3}(R+r)$

Tam giác có hai góc  $\leq 60^\circ \Leftrightarrow p \leq \sqrt{3}(R+r)$

Tam giác có một góc bằng  $60^\circ \Leftrightarrow p = \sqrt{3}(R+r)$

2. Định lý 2: Với mọi tam giác ta có các bất đẳng thức

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

3. Định lý 3: Với mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức:

$$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2; a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R+r)^2 \quad (1); ab+bc+ca \geq 2R^2 + 12Rr + 4r^2$$

4. Định lý 4: Với mọi tam giác ta có  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$

5. Định lý 5: Với mọi tam giác ta có  $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R} \quad (*)$

### 22.1.3 Phương pháp chung

Để chứng minh một bất đẳng thức đối xứng  $F(a,b,c) \geq G(a,b,c)$  với  $a, b, c$  không âm, ta đặt  $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ , khi đó  $x, y, z$  trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến  $p, R, r$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ. Sau đó ta phải chứng minh  $f(p) = VT_p - VP \geq 0$ . Xét dấu  $f'(p)$  rồi tìm cách đánh giá  $p$  theo  $R, r$ .

Ta chú ý đến đánh giá rất quan trọng sau đây:

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\text{Khi đó nếu đặt } \begin{cases} p_1 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \\ p_2 = \sqrt{2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \end{cases} \text{ thì } p \in [p_1, p_2]$$

**Nhận xét:**

1. Nếu  $\Delta XYZ$  cân thì  $p = p_1$  hoặc  $p = p_2$ .

• Nếu giá trị lớn nhất  $f(p)$  hoặc giá trị nhỏ nhất  $f(p)$  đạt tại  $p = p_1$  thì  $\Delta XYZ$  cân có 2 góc đáy bằng nhau và  $\leq 60^\circ$ , khi đó trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn biến còn lại  $\Leftrightarrow$  Trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

• Nếu giá trị lớn nhất  $f(p)$  hoặc giá trị nhỏ nhất  $f(p)$  đạt tại  $p = p_2$  thì  $\Delta XYZ$  cân có 2 góc đáy bằng nhau và  $\geq 60^\circ$ , khi đó trong 3 biến  $x, y, z$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn biến còn lại  $\Leftrightarrow$  Trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

2. Khi đưa bất đẳng thức về dạng chứa  $p, R, r$  nếu có biểu thức chứa  $r$  làm nhân tử chung thì khi  $r = 0$  hay trong 3 biến  $a, b, c$  có 1 biến bằng 0 thì đẳng thức xảy ra.

3. Từ các nhận xét 1 và 2 suy ra nếu  $f(p)$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại  $p_1$  hoặc  $p_2$  hoặc  $r = 0$  thì công việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức với 2 biến số.

Với câu hỏi đặt ra là khi nào  $f(p)$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại  $p_1$  hoặc  $p_2$  ta có kết luận sau:

3.1. Nếu  $f'(p) \geq 0, \forall p \in [p_1, p_2]$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_1); \text{Max } f(p) = f(p_2)$

Nếu  $f'(p) \leq 0, \forall p \in [p_1, p_2]$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_2); \text{Max } f(p) = f(p_1)$

Đẳng thức xảy ra khi  $p = p_1$  hoặc  $p = p_2$  ứng với trong 3 biến số  $a, b, c$  có 2 biến số bằng nhau hoặc có một biến số bằng 0.

| $p$     | $p_1$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|
| $f'(p)$ | +        |          |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_2)$ |

| $p$     | $p_1$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|
| $f'(p)$ | -        |          |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_2)$ |

3.2. Nếu  $f'(p_0) = 0; f''(p) \geq 0$  thì  $\text{Min } f(p) = f(p_0); \text{Max } f(p) = \text{Max}\{f(p_1), f(p_2)\}$

Nếu  $f'(p_0) = 0; f''(p) \leq 0$  thì  $\text{Max } f(p) = f(p_0); \text{Min } f(p) = \text{Min}\{f(p_1), f(p_2)\}$

| $p$     | $p_1$    | $p_0$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|----------|
| $f'(p)$ | -        | 0        | +        |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_0)$ | $f(p_2)$ |

| $p$     | $p_1$    | $p_0$    | $p_2$    |
|---------|----------|----------|----------|
| $f'(p)$ | +        | 0        | -        |
| $f(p)$  | $f(p_1)$ | $f(p_0)$ | $f(p_2)$ |

4. Trong một số ít các bài toán ta tìm Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất bằng cách tính đạo hàm theo biến  $t = p^2$  hoặc theo  $R$  hoặc theo  $r$ .

**Chú ý.** Hãy nhớ lại cách chứng minh hình học ở trên, chính từ chứng minh đó suy ra ngay với mọi  $R, r$  cố định thì có thể tìm được ba số thực không âm  $a', b', c'$  mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác  $X'Y'Z'$  với độ dài 3 cạnh là  $b'+c', c'+a', a'+b'$



cũng có  $R = R'$  và  $r = r'$ . Như thế, kết hợp nhận xét này với các kết quả ở trên ta suy ra trong các trường hợp hàm  $f(p)$  đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần xét hai trường hợp đối với ba biến  $a, b, c$  ban đầu là hoặc trong 3 biến có 1 biến bằng 0, hoặc trong 3 biến có 2 biến bằng nhau.

## 22.2 PHƯƠNG PHÁP GLA CHO $n$ BIẾN SỐ:

Giả sử  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $n$  biến số  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  ( $n \geq 4$ )

Xét 3 biến số bất kì  $a_m, a_n, a_p$  ( $m, n, p \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ) và cố định các biến số còn lại như hằng số. Đặt  $x = a_m + a_n, y = a_n + a_p, z = a_p + a_m$ , khi đó  $x, y, z$  là 3 cạnh của tam giác XYZ và 3 biến số  $a_m, a_n, a_p$  có thể đưa về thành 3 biến  $p, R, r$  (trong đó  $p, R, r$  là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ). Ta có các kết quả mở rộng sau đây:

**22.2.1** Một đa thức đối xứng  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 1 đơn điệu theo  $p, R$  hoặc  $r$  đều đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến số bằng nhau.

$$\text{Tức là: } f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq f(\underbrace{a_1, \dots, a_{n-1}}_{n-1 \text{ số } a}, x) \text{ hoặc } f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(\underbrace{a_1, \dots, a_{n-1}}_{n-1 \text{ số } a}, x)$$

(ở đây ta chọn 3 biến  $a_1, a_2, a_3$  để chuyển về  $p, R, r$ )

- Nếu  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$  thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

- Nếu  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq 0$  thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có  $n-1$  biến bằng nhau và  $n-1$  biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$

Do  $f'_p(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \geq 0$  nên  $f(p, R, r, a_4, \dots, a_n)$  đồng biến theo  $p$ .

$$\text{Tức là: } f(p_1, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(p, R, r, a_4, \dots, a_n) \leq f(p_2, R, r, a_4, \dots, a_n)$$

Theo như nhận xét 3 trong 21.1.3 ta có:

- $p = p_1$  khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy tức là trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Do  $a_1, a_2, a_3$  được chọn một cách tùy ý để chuyển về  $p, R, r$  và  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được:  $f(\underbrace{x, y, \dots, y}_{n-1}) \leq f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ( $x \geq y$ )

•  $p = p_2$  khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy tức là trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Do  $a_1, a_2, a_3$  được chọn một cách tùy ý để chuyển về  $p, R, r$  và  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được:  $f(\underbrace{x, \dots, x}_{n-1}, y) \geq f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (x \leq y)$

**22.2.2** Mọi đa thức  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 2  $f''(p) \geq 0$  đều đạt giá trị lớn nhất khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

**22.2.3** Mọi đa thức  $n$  biến dương có đạo hàm cấp 2  $f''(p) \leq 0$  đều đạt giá trị nhỏ nhất khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

**22.2.4** Nếu  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là đa thức đối xứng với  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thì từ các nhận xét **3.1, 3.2**

trong **22.1.3** ta mới chỉ có một kết quả tạm thời là giá trị nhỏ nhất của và giá trị lớn nhất của  $f$  đạt được khi có 1 số biến số bằng nhau và 1 số biến số thì chưa so sánh được (vì có thể có một số biến số bằng 0). Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn là khi  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thì vẫn có kết luận: giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất  $f$  đạt được khi trong  $n$  biến có  $n-1$  biến bằng nhau.

Thật vậy, giả sử giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  đạt tại

$(0, \dots, 0, a, \dots, a, b)$ . Xét bộ 3 số  $(0, a, b)$  thì theo các nhận xét **3.1, 3.2** trong **22.1.3** ta có  $a = 0$  hoặc  $b = 0$ . Nếu  $a = 0$  thì giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất sẽ đạt tại  $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, b)$  suy ra kết

luận đúng. Nếu  $b = 0$  thì lại xét tiếp 2 bộ  $(a, a, 0); (0, 0, a)$ . Áp dụng tiếp các kết luận 21.1.3, ta suy ra  $a = 0$ . Giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất đạt tại  $(0, 0, \dots, 0)$ . Vậy các kết luận trên đã được mở rộng ra đối với các biến không âm.

## 22.3. PHƯƠNG PHÁP GLA TÔNG QUÁT:

**Định lý:** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\begin{cases} abc = const \\ ab + ac + bc = const \end{cases}$  khi đó ta có:

- Nếu  $f(a, b, c)$  là một hàm đồng biến theo  $a + b + c$  thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại;  $f(a, b, c)$  đạt *max* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.
- Nếu  $f(a, b, c)$  là một hàm nghịch biến theo  $a + b + c$  thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại;  $f(a, b, c)$  đạt *max* khi trong 3 biến  $a, b, c$  có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

**23. PHƯƠNG PHÁP EV (EQUAL VARIABLE THEOREM)**

**23.1 Bổ đề.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử các số thực không âm  $x \leq y \leq z$  thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \quad (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \quad (2)$$

Trong đó  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Với  $p = 0$ , phương trình thứ 2 trở thành  $xyz = abc > 0$ . Như thế tồn tại hai số thực  $x_1, x_2$  với  $0 \leq x_1 < x_2$ , thỏa mãn  $x \in [x_1, x_2]$ , hơn nữa

- 1) Nếu  $x = x_1$  và  $p \leq 0$  thì  $0 < x < y = z$
- 2) Nếu  $x = x_1$  và  $p > 1$  thì hoặc  $0 = x < y \leq z$  hoặc  $0 < x < y = z$
- 3) Nếu  $x \in (x_1, x_2)$  thì  $x < y < z$
- 4) Nếu  $x = x_2$  thì  $x = y < z$

**23.2 Mệnh đề.** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử  $0 \leq x \leq y \leq z$  thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \quad (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \quad (2)$$

Trong đó  $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ . Với  $p = 0$ , phương trình (2) trở thành  $xyz = abc > 0$ . Giả sử

$f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là hàm lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ , và đặt  $F_3(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$

- 1) Nếu  $p \leq 0$  thì  $F_3$  nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  $0 < x = y < z$ , và  $F_3$  nhận giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $0 < x < y = z$
- 2) Nếu  $p > 1$  và hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u = 0$  hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$ , thì  $F_3$  lớn nhất chỉ khi  $0 < x = y < z$ , và nhỏ nhất chỉ khi hoặc  $x = 0$  hoặc  $0 < x < y = z$ .

**23.3 Định lý EV (Định lý về các biến số bằng nhau)**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số thực không âm, và  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Trong đó  $p$  là số thực,  $p \neq 1$ .

Với  $p = 0$ , phương trình thứ hai được quy ước thay thế bởi điều kiện  $x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n > 0$ .

Giả sử  $f(u)$  là hàm khả vi trên  $(0, \infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x^{\frac{1}{p-1}})$  là lồi nghiêm ngặt trên  $(0, \infty)$ , và đặt  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

- Nếu  $p \leq 0$  thì  $F_n$  lớn nhất khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$$0 \leq x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$$

- Nếu  $p > 0$  và hoặc  $f(u)$  liên tục tại  $u=0$  hoặc  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = -\infty$  thì  $F_n$  lớn nhất khi

$$0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n, \text{ và nhỏ nhất khi } x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n$$

Trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

#### 23.4 Các hệ quả của định lý EV

**Hệ quả 1.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ; ( $n \geq 3$ ) và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$ , thỏa mãn  $g(x) = f'(x)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Hơn nữa, hoặc  $f(x)$  liên tục tại  $x=0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ . Như thế

$F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Hệ quả 2.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ; ( $n \geq 3$ ) và giả sử  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, \infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ . Như

thế  $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 3.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ; ( $n \geq 3$ ) và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n$$

Giả sử  $f$  là hàm khả vi trên  $(0, +\infty)$  thỏa mãn  $g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$  lồi nghiêm ngặt trên  $(0, +\infty)$ .

Như thế  $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  lớn nhất khi  $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 4.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Trong đó  $p$  là một số thực,  $p \neq 0, p \neq 1$

a) Với  $p < 0$ ,  $P = x_1 x_2 \dots x_n$  nhận giá trị nhỏ nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhận giá trị lớn nhất khi  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $p > 0$ ,  $P = x_1 x_2 \dots x_n$  nhận giá trị nhỏ nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$  và nhận giá trị lớn nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc  $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

**Hệ quả 5.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

1. Nếu  $p \leq 0$  ( $p = 0$  dẫn tới  $x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n > 0$ )

a) Với  $q \in (p, 0) \cup (1, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc

$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $q \in (-\infty, 0) \cup (p, 1)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , với chỉ số  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nào đó

2. Nếu  $0 < p < 1$

a) Với  $q \in (0, 1) \cup (p, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc  $x_1 = 0$  hoặc

$0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

b) Với  $q \in (-\infty, p) \cup (1, +\infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , với chỉ số  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nào đó

3. Nếu  $p > 1$ :

a) Với  $q \in (0, 1) \cup (p, \infty)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_{k+2} = \dots = x_n$  trong đó

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

b) Với  $q \in (-\infty, 0) \cup (1, p)$ ,  $E = x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$  nhận giá trị lớn nhất khi

$0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhận giá trị nhỏ nhất khi  $x_1 = \dots = x_k = 0$  và  $x_{k+2} = \dots = x_n$ , trong

đó  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

**Hệ quả 6.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm,  $p \in \{1, 2\}$  và giả sử

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \text{ thỏa mãn}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$$

Biểu thức  $E = \sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$$x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n, \text{ trong đó } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

**Hệ quả 7.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3$ ) là các số không âm và giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  thỏa

$$\text{mãn } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2; \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$$

Biểu thức  $E = \sum x_1 x_2 x_3$  lớn nhất khi  $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ , và nhỏ nhất khi

$$x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ và } x_{k+2} = \dots = x_n \text{ trong đó } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

## 24. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ (DIVIDE AND CONQUER)

### 24.1 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI HÀM 1 BIẾN

**Định lý:** Cho  $f(x, y)$  là hàm liên tục từ  $[a, b] \times [a, b]$  vào  $\mathbb{R}$ , tăng theo biến  $x$  và giảm theo biến  $y$ . Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i)  $f(x, x) > 0$ , với mọi  $x$  thuộc  $[a, b]$

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m+1} = b$  sao cho:

$$f(x_n, x_{n+1}) > 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots, m$$

### 24.2 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI HÀM 2 BIẾN

**Định lý:** Cho  $f(x, y, z)$  là hàm liên tục trên  $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$  vào  $\mathbb{R}$ , tăng theo biến  $y$  và giảm theo biến  $z$ . Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i)  $f(x, y, y) > 0, \forall x \in [a, b], y \in [c, d]$ .

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng  $c = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{m+1} = d$  sao cho:

Với mọi  $n = 0, 1, \dots, m$  thì  $f(x, y_n, y_{n+1}) > 0, \forall x \in [a, b]$

### 24.3 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN

• **Bước 1:** Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta gọi là các điểm "nhảy cảm"), khoanh vùng chúng lại xét riêng ra. Phần còn lại ta chỉ làm việc với các bất đẳng thức thực sự.

• **Bước 2:** Biến đổi, chuẩn hóa các bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp rồi dứt điểm bằng cách bấm nhỏ theo từng biến để xử lý.

## 25. BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT-SHAPIRO

### 25.1 Bất đẳng thức Nesbitt

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0 \quad (1)$$

### 25.2 Bất đẳng thức Shapiro

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ . Xét tính đúng sai của bất đẳng thức sau:

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng với mọi  $n$  chẵn  $\leq 12$  và  $n$  lẻ  $\leq 23$ , mọi giá trị còn lại của  $n$  thì (2) sai

### 25.3 Bất đẳng thức Shapiro với dãy đơn điệu

Cho bộ dãy số đơn điệu bất kỳ  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  tức là:

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0 \end{array} \right. \quad \text{Khi đó ta có} \quad \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}$$

### 25.4 Đánh giá xấp xỉ bất đẳng thức Shapiro

$$\text{Kvant 4/1991: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > (\sqrt{2} - 1)n = 0.41421356n, \forall a_i > 0$$

$$\text{Kvant 4/1991: } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{5}{12}n = 0.41666666n, \forall a_i > 0$$

$$\text{Trần Phương 2004: } S = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.4577996n, \forall a_i > 0$$

$$\text{Drinfel'd 1971 } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > 0.989133 \times \frac{n}{2}, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

$$\text{Elbert 1973: } \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1} \geq 0.978012n, \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, Illinois (2002).

$$\text{Đặt } E_n = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; \quad F_n = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1}, \forall a_i > 0$$

Và  $\lambda = -0.0219875218\dots$  Khi đó ta có các định lý sau:

**Định lý 1.** Với mọi số nguyên dương  $n$  và mọi số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có  $E_n - F_n \geq \lambda n$

**Định lý 2.** Trong Định lý 1,  $\lambda$  là hằng số tốt nhất. Hay nói cách khác, với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại ít nhất một số nguyên dương  $n$  và các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn  $E_n - F_n < (\lambda + \varepsilon)n$



### 26.1 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa với số mũ tự nhiên

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  và  $m, k \in \mathbb{N}^*$  thỏa mãn  $m < k$ , khi đó ta có bất đẳng thức:

$$T_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}} \geq \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n}} = T_m$$

### 26.2 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  và  $p, q \in \mathbb{Q}^+$  thỏa mãn  $p < q$ , khi đó ta có bất đẳng thức

$$T_q = \left( \frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \left( \frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = T_p$$

### 26.3 Bất đẳng thức trung bình đối xứng

Giả sử  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Ký hiệu các tổng và các giá trị trung bình tương ứng:

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{và} \quad T_1 = \frac{S_1}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad \text{và} \quad T_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}} = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{\binom{n}{2}}}$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} \dots a_{i_k} \quad \text{và} \quad T_k = \sqrt[k]{\frac{S_k}{\binom{n}{k}}} = \sqrt[k]{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{a_{i_1} \dots a_{i_k}}{\binom{n}{k}}}$$

$$S_n = a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{và} \quad T_n = \sqrt[n]{\frac{S_n}{\binom{n}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\binom{n}{n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\text{Đặt } P_1 = \frac{S_1}{n}; P_2 = \frac{S_2}{\binom{n}{2}}; \dots; P_k = \frac{S_k}{\binom{n}{k}}; \dots; P_n = \frac{S_n}{\binom{n}{n}}$$

$$\text{Ở đây } \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \binom{n}{0} = C_n^0 = C_n^n = \binom{n}{n} = 1$$

#### 26.3.1 Bất đẳng thức Newton:

$$P_{k-1} P_{k+1} < P_k^2 \quad \text{và} \quad S_{k-1} S_{k+1} \leq S_k^2$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

#### 2563.2 Bất đẳng thức Maclaurin

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_k \geq T_{k+1} \geq \dots \geq T_n$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra trong } (n-1) \text{ bất đẳng thức} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

**27. Các bất đẳng thức sử dụng tam thức bậc hai****27.1 Bất đẳng thức Aczela**

Cho  $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$$

**27.2 Bất đẳng thức G.Polya**

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$  Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

**27.3 Bất đẳng thức Abel**

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong đó  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ .

Đặt  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Gọi  $m = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ;  $M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

khi đó ta có:  $mb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq Mb_1$

**27.4 Bất đẳng thức Diaz**

Cho 2 dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  trong đó  $a_1a_2\dots a_n \neq 0$

Giả sử  $m, M$  là 2 số thỏa mãn  $m \leq \frac{b_k}{a_k} \leq M \quad \forall k = \overline{1, n}$

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n b_k^2 + mM \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^n a_k b_k$

**27.5 Bất đẳng thức Kantorovis 1**

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  và 2 số  $m, M$  thỏa mãn điều kiện

$$0 < m \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq M. \text{ Khi đó ta có: } \left[ \sum_{k=1}^n b_k a_k^2 \right] \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} a_k^2 \right] \leq \frac{1}{4} \left[ \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2 \left[ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^2$$

**27.6 Bất đẳng thức Kantorovis 2**

Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) thỏa mãn điều kiện  $0 < m \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq M$ .

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \left( \sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2$

### 27.7 Bất đẳng thức Grussa

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$ . Khi đó  $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{4} (A-a)(B-b)$

### 28. Bất đẳng thức Sleyfer

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i^2} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$

### 29. Bất đẳng thức Vâyetrat

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Đặt  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Khi đó ta có các bất đẳng thức

a)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+S_n$

b)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq 1-S_n, \forall 0 \leq a_i \leq 1$

c)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall S_n < 1$

d)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall 0 \leq a_i \leq 1; S_n < 1$

### 30. Bất đẳng thức Ky Fan

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương trong  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ . Khi đó  $\frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^n} \leq \frac{\prod_{k=1}^n (1-x_k)}{\left[\sum_{k=1}^n (1-x_k)\right]^n}$

### 31. Bất đẳng thức A.M.Ostrowski

Cho hai dãy không tỷ lệ  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  và dãy số thực  $x = (x_1, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$

### 32. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd

Với mọi dãy số thực  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  thỏa mãn điều kiện  $a_i, b_j \neq a_j b_i$  ứng

với  $i \neq j$ , ta đều có 
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2} \leq \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$$

## 27. Các bất đẳng thức sử dụng tam thức bậc hai

### 27.1 Bất đẳng thức Aczela

Cho  $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2$$

### 27.2 Bất đẳng thức G.Polya

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$  Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

### 27.3 Bất đẳng thức Abel

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  trong đó  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ .

Đặt  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Gọi  $m = \min\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ;  $M = \max\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

khi đó ta có:  $mb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq Mb_1$

### 27.4 Bất đẳng thức Diaz

Cho 2 dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  trong đó  $a_1a_2\dots a_n \neq 0$

Giả sử  $m, M$  là 2 số thỏa mãn  $m \leq \frac{b_k}{a_k} \leq M \quad \forall k = \overline{1, n}$

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n b_k^2 + mM \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^n a_k b_k$

### 27.5 Bất đẳng thức Kantorovis 1

Cho 2 dãy số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  và 2 số  $m, M$  thỏa mãn điều kiện

$$0 < m \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq M. \text{ Khi đó ta có: } \left[ \sum_{k=1}^n b_k a_k^2 \right] \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} a_k^2 \right] \leq \frac{1}{4} \left[ \sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2 \left[ \sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^2$$

### 27.6 Bất đẳng thức Kantorovis 2

Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) thỏa mãn điều kiện  $0 < m \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq M$ .

Khi đó ta có  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \left( \sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2$

### 27.7 Bất đẳng thức Grussa

Cho  $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \dots, b_n \leq B \end{cases}$ . Khi đó  $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{4} (A-a)(B-b)$

### 28. Bất đẳng thức Sleyfer

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + n \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^n a_i^2} \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$

### 29. Bất đẳng thức Vâyetstrat

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Đặt  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Khi đó ta có các bất đẳng thức

a)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1 + S_n$

b)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \geq 1 - S_n, \forall 0 \leq a_i \leq 1$

c)  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall S_n < 1$

d)  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) \leq \frac{1}{1-S_n}, \forall 0 \leq a_i \leq 1; S_n < 1$

### 30. Bất đẳng thức Ky Fan

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số dương trong  $(0, \frac{1}{2}]$ . Khi đó  $\frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^n} \leq \frac{\prod_{k=1}^n (1-x_k)}{\left[ \sum_{k=1}^n (1-x_k) \right]^n}$

### 31. Bất đẳng thức A.M.Ostrowski

Cho hai dãy không tỷ lệ  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  và dãy số thực  $x = (x_1, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$

### 32. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd

Với mọi dãy số thực  $a = (a_1, \dots, a_n)$  và  $b = (b_1, \dots, b_n)$  thỏa mãn điều kiện  $a_i, b_j \neq a_j b_i$  ứng

với  $i \neq j$ , ta đều có 
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2} \leq \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$$

**33. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd**

Giả sử  $p_{ij} (i, j = 1, \dots, n; i \neq j)$  thỏa mãn điều kiện  $p_{ij} = p_{ji}$ ,  $p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij} \neq 0$

khi đó với mọi cặp dãy số thực  $a_1, \dots, a_n$  và  $b_1, \dots, b_n$  sao cho  $a_i b_j \neq a_j b_i (i \neq j)$ , ta đều có

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2} \leq \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{p_{ij} a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$$

**34. Bất đẳng thức Beckenbach**

Cho  $x_i, y_i > 0 \forall i \in \overline{1, n}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $p \in [1; 2]$ . Khi đó

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p}{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^{p-1}} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i^p}{\sum_{i=1}^n y_i^{p-1}}$$
**35. Bất đẳng thức SuranYi**

Cho các số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1 a_2 \dots a_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})$$

**36. Bất đẳng thức Vasile**

Cho các số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Khi đó ta có bất đẳng thức

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n + n(n-1)a_1 a_2 \dots a_n \geq a_1 a_2 \dots a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

**37. Bất đẳng thức Jack Garfunkel**

Với các số thực không âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ  $(a, b, c)$  là các hoán vị của  $(3, 1, 0)$ .

## § 25.2. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Bài 1. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2} \sqrt{27 + (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}$

Bài 2. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sqrt{\frac{3}{2} \left( \sum_{cyc} \frac{a+b}{c} \right)} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{a(b+c)} \leq 1 + \frac{1}{3} \left( \sum_{cyc} \frac{a+b}{c} \right)$

Bài 3. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $(a+b+c)^2 (a^2b+b^2c+c^2a) \geq 9abc(a^2+b^2+c^2)$

Bài 4. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \leq \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)}$

Bài 5. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $(a^2+b^2+c^2)^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 2(a+b+c)^3 - 27abc$

Bài 6. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} \leq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt{2}(ab+bc+ca)}$

Bài 7. Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+bc} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$

Bài 8. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+b}{a+c}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Bài 9. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \frac{2}{3} \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$

Bài 10. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+c} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$

Bài 11. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Bài 12. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Bài 13. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}} \geq \sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}}$

Bài 14. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}} \geq \sqrt{10 - \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}}$

Bài 15. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{2(a+b)+c} \geq \frac{2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{5}$



Bài 16. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \frac{ab(a^2+bc)}{b+c} \geq \sqrt{3abc(a^2b+b^2c+c^2a)}$

Bài 17. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $0 \leq k \in \mathbb{R}$  và  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{b+a}} + k \sqrt[n]{\frac{a^3b^4 + b^3c + c^3a}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \geq 2\sqrt[k+1]$$

Bài 18. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $4 \leq k \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} + k \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq 2\sqrt{k}$$

Bài 19. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} + \frac{15}{8} \sqrt{\frac{50(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq \frac{25}{4}$$

Bài 20. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{b+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b+a}} + \frac{65}{84} \sqrt[3]{\frac{65(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}}$$

Bài 21. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$ ,  $k > 0$ , chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{(2k-3\sqrt{k}+2)a+kb+c} + \frac{b}{(2k-3\sqrt{k}+2)b+kc+a} + \frac{c}{(2k-3\sqrt{k}+2)c+ka+b} \leq \frac{1}{k-\sqrt{k}+1}$$

Bài 22. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $k \geq 2$  và  $p \geq 0$ , chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a^2+4(k+p)^3bc}{b^2+pbc+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+4(k+p)^3ca}{c^2+pac+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2+4(k+p)^3ab}{a^2+pab+b^2}} \geq 3k+2p$$

Bài 23. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Bài 24. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + 9 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 6$

Bài 25. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + 16 \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8$

Bài 26. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Bài 27. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 9 \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 5$

Bài 28. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:

$$\frac{a^4}{b^2+c^2} + \frac{b^4}{c^2+a^2} + \frac{c^4}{a^2+b^2} + 12\sqrt{6}(ab+bc+ca) \geq 15(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 29. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{a(a+b)}{a^2+2b^2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2abc}{a+b+c}}$

Bài 30. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2+3bc}{2(b^2+c^2)}} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 31. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b-c}{k(a^2+b^2)+ab} \leq \frac{9}{2k+1} \cdot \frac{1}{a+b+c}$$

Bài 32. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a+5b}{c\sqrt{a^2+5b^2}} \geq \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Bài 33. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{10(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{15}{2}$

Bài 34. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 128 \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}} \geq 46$

Bài 35. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $k > 0$ . Chứng minh:

$$(ab+bc+ca)^k \left[ \frac{1}{(a+b)^{2k}} + \frac{1}{(b+c)^{2k}} + \frac{1}{(c+a)^{2k}} \right] \geq \text{Max} \left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{k}}; \frac{(k-1)^k + (k-1)k^k}{k^k(k-1)} \right\}$$

Bài 36. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{\alpha a^n}{(b+c)^n}\right) \left(1 + \frac{\alpha b^n}{(c+a)^n}\right) \left(1 + \frac{\alpha c^n}{(a+b)^n}\right) \geq \text{Min}\left\{(\alpha+1)^2; \left(\frac{\alpha+2^n}{2^n}\right)^3\right\}$$

Bài 37. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{12(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq \frac{41}{9}$$

Bài 38. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} a^2 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 + 2(b^2 + c^2)} \right) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2 + bc + c^2}{a^2 + (b+c)^2}$

Bài 39. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0, 3 \leq n \in \mathbb{N} \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b^n + c^n)}{a^2 + bc} \geq a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$

Bài 40. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{a^3(b+c)}{a^2 + bc} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Bài 41. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a^2}{b} + b \right) \geq 2 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)}$

Bài 42. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + b^2}{c(a+b)} \geq (a^2 + b^2 + c^2) \sqrt{\frac{3}{abc(a+b+c)}}$

Bài 43. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2 + 2bc} \geq 1 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

Bài 44. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{c(c+a)} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a+b+c)}$

Bài 45. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{9(a^2 + b^2)}{2(a+b+c)^2 + 9(a^2 + b^2)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 46. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{b+c}{a}} \geq 2 \sqrt{3 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}$

Bài 47. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a+b}{c^2}} \geq 3\sqrt{2} \sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}$

Bài 48. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{\text{cyc}} \frac{a+b-c}{a^2 + ab + b^2} \leq \frac{3}{a+b+c}$

Bài 49. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{c(a+b)} \geq 3 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$

Bài 50. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{2a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}} \geq 2$

Bài 51. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 2\sqrt{2} \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq (1+\sqrt{2})^2$

Bài 52. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 53. Cho  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq 2 \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} + 1$$

Bài 54. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b+c) \geq \frac{9+3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Bài 55. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq 2 \left( \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \right)$

Bài 56. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $23 + 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(1+a)(1+b)(1+c)$

Bài 57. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  $18 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(1+a)(1+b)(1+c)$

Bài 58. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab+bc+ca > 0 \text{ và } C_k = \max \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{k}}, \frac{(k-1)^k + k^k(k-1)}{k^k(k-1)} \right) \end{cases}$ . Chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{k}}} \leq C_k (a+b+c)^{\frac{k-1}{k}} \quad (\text{với } k=2, \text{ chúng ta có bất đẳng thức Jackgarfukel})$$

Bài 59. Cho  $0 < a < b < c < 1$ . Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c) \geq (a+b+c+3abc) \left( \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right)$$

Bài 60. Cho  $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\frac{a+b+c+d}{2} \leq \sqrt[3]{(1+abcd) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)}$

Bài 61. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sqrt[3]{a + \frac{b^2}{c}} + \sqrt[3]{b + \frac{c^2}{a}} + \sqrt[3]{c + \frac{a^2}{b}} \geq \sqrt[3]{12abc + 42}$

**Bài 62.** Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$ . Chứng minh:  $\sum \frac{1}{a_i (a_{i+1} + 1)} \geq \frac{n}{2}$ . Trong đó quy ước:  $a_{n+1} = a_1$

**Bài 63.** Chứng minh:  $2(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq ((x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz)^2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

**Bài 64.**  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$$(a_1^n + n - 1)(a_2^n + n - 1) \dots (a_n^n + n - 1) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$$

**Bài 65.** Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 a_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}$$

**Bài 66.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \geq \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}}}}$$

**Bài 67.** Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n^2 + a_n}} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

**Bài 68.** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $n > 0$ . Chứng minh:  $\frac{abc}{n(a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3n-1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$

**Bài 69.** Cho  $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$abc + bcd + cda + dab + \frac{\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq \frac{2}{2 - \sqrt[3]{2}}(a + b + c + d)$$

**Bài 70.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{3}(a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \geq a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq \\ & \geq \frac{8}{27}(a+b+c)^4 - \frac{1}{125}(a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c)) \end{aligned}$$

**Bài 71. [Iran National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương phân biệt. Chứng minh:  $\left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| > 1$

**Bài 72. [Iran National Mathematical Olympiad 2007]**

Tìm số  $T$  lớn nhất sao cho  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq T(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})^2$  đúng với mọi  $a, b, c, d, e \geq 0$  và thỏa mãn điều kiện  $a + b = c + d + e$ .

**Bài 73. [Middle European Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a + b + c + d = 4$ .

Chứng minh rằng:  $a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$

**Bài 74. [Middle European Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{2} \leq a, b, c, d \leq 2$  và  $abcd = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $S = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right)$

**Bài 75. [China Northern Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác sao cho  $a + b + c = 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $T = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{3}abc$

**Bài 76. [China Northern Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$  và  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a^k}{a+b} + \frac{b^k}{b+c} + \frac{c^k}{c+a} \geq \frac{3}{2}$

**Bài 77. [Croatia Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

**Bài 78. [Romania Junior Balkan Team Selection Tests 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c \geq ab + bc + ca$

**Bài 79. [Romania Juior Balkan Team Selection Tests 2007]**

Cho  $x, y, z \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4} |(x-y)(y-z)(z-x)|$

**Bài 80. [Yugoslavia National Olympiad 2007]**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng với số tự nhiên  $k$  bất kỳ ta có:

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1} + y^k + z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1} + z^k + x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1} + x^k + y^k} \geq \frac{1}{7}$$

**Bài 81. [Cezar Lupu & Tudorel Lupu, Romania TST 2007]**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}, (n \geq 2)$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ .

Chứng minh rằng:  $\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \leq n$ .

**Bài 82. [Macedonia Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $1 + \frac{3}{ab + bc + ca} \geq \frac{6}{a + b + c}$

**Bài 83. [Italian National Olympiad 2007]**

a) Với  $n \geq 2$ , tìm giá trị lớn nhất hằng số  $c_n$  sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + 1} \geq c_n \text{ đúng với mọi } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ thỏa mãn } a_1 a_2 \dots a_n = 1$$

b) Với  $n \geq 2$ , tìm giá trị lớn nhất hằng số  $d_n$  sao cho bất đẳng thức

$$\frac{1}{2a_1 + 1} + \frac{1}{2a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{2a_n + 1} \geq d_n \text{ đúng với mọi } a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ thỏa mãn } a_1 a_2 \dots a_n = 1$$

**Bài 84. [France Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$$



**Bài 85. [Greece National Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \geq ab+bc+ca$$

**Bài 86. [Bulgaria Team Selection Test 2007]**

Cho  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ . Tìm giá trị tốt nhất của hằng số  $C(n)$  sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq j < i \leq n} (2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}) \text{ đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1) \text{ thỏa mãn } (1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$$

**Bài 87. [Poland Second Round 2007]**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d) - 4$$

**Bài 88. [Turkey Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c} + \frac{1}{bc+2a^2+2a} + \frac{1}{ac+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ac}$$

**Bài 89. [Moldova National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a_k \geq \frac{1}{k}, \forall k = \overline{1, n}$ . Chứng minh rằng:

$$(a_1+1)\left(a_2+\frac{1}{2}\right) \dots \left(a_n+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2^n}{(n+1)!} (1+a_1+2a_2+\dots+na_n)$$

**Bài 90. [Moldova National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ . Đặt  $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}$$

**Bài 91. [Peru Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Chứng minh:  $a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$

**Bài 92. [Peru Team Selection Test 2007]**

Cho  $a, b, c$  là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$$

**Bài 93. [Romania Team Selection Tests 2007]**

Cho  $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1 \end{cases}$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $S = (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)$

**Bài 94. [Ukraine Mathematical Festival 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$  và  $abc \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$a) \left(a + \frac{1}{a+1}\right) \left(b + \frac{1}{b+1}\right) \left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}$$

$$b) 27(a^3 + a^2 + a + 1)(b^3 + b^2 + b + 1)(c^3 + c^2 + c + 1) \geq 64(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$$

**Bài 95. [Asian Pacific Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1$$

**Bài 96. [Brazilian Olympiad Revenge 2007]**

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  với  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

**Bài 97. [India National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(x + y + z)^2 (yz + zx + xy)^2 \leq 3(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2)(x^2 + xy + y^2)$$

**Bài 98. [British National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $(a^2 + b^2)^2 \geq (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

**Bài 99. [Korean National Mathematical Olympiad 2007]**

Tìm tất cả các giá trị  $k$  dương để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{c+kb} + \frac{b}{a+kc} + \frac{c}{b+ka} \geq \frac{1}{2007}$$

**Bài 100. [Hungary-Israel National Mathematical Olympiad 2007]**

Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $a^2 \leq 1, a^2 + b^2 \leq 5, a^2 + b^2 + c^2 \leq 14, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 30$ .

Chứng minh rằng:  $a + b + c + d \leq 10$

### § 25.3 NHÌN LẠI VÀ MỞ RA

Các bạn thân mến! Vậy là các bạn đã cùng chúng tôi đi tới mục cuối cùng của cuốn sách lớn này. Quả thực các bạn đã bước những bước đi thật dài, bắt đầu với những bất đẳng thức đại số cổ điển (*AM – GM, Cauchy – Schwarz, Holder, Minkowski, Chebyshev*) tới những bất đẳng thức cận đại (bất đẳng thức *hoán vị, Shur, Muirhead*). Từ những hòn đá tảng của phương pháp giải tích (ứng dụng của đạo hàm, các định lý *Lagrange, Bernoulli, Jensen, Karamata, RCF, LCF, Popoviciu*, ứng dụng của tích phân *Riman*) chuyển sang làm quen với những phương pháp đầy mới mẻ, những viên kim cương sáng lấp lánh trong thế giới bất đẳng thức đại số sơ cấp hiện đại (*S.O.S, MV, A.B.C, G.L.A, E.V, D.A.C*). Các bạn đã được thưởng thức những bài viết rất đặc sắc về bất đẳng thức theo nhiều cách tiếp cận khác nhau (*U.C.T*, ứng dụng của phép đổi biến, đổi biến thuận nghịch, ứng dụng của định lý *Viet – Rolle*, các bất đẳng thức không thuần nhất, hoán vị). Các bạn cũng đã cùng chúng tôi khảo sát nhiều bài toán riêng rất đặc biệt, những bài toán có nhiều lời giải, và mỗi lời giải lại có một ý nghĩa khác nhau, đôi khi cũng có cả những bài toán chỉ có một cách giải, nhưng cách giải của nó lại thực sự ấn tượng. Hàng chục chuyên đề, hàng trăm ví dụ và hàng nghìn bài toán. Đó chính xác là tất cả những gì chúng tôi đã trình bày với các bạn. Nhưng qua tất cả những trang sách đó, các bạn đã thu lượm được cho mình những gì, đây mới thực sự là điều chúng tôi cảm thấy trân trọng nhất khi thực hiện công việc biên soạn nội dung cuốn sách. Vì lẽ đó, các bạn hãy tiếp tục cùng chúng tôi “đi” nốt những dòng dưới đây sau khi đã trải qua một quá trình tự rèn luyện không dễ dàng ở những chương trước. Chúng tôi hi vọng những phân tích này sẽ giúp chúng tôi (những người làm sách) và các bạn (những độc giả đầy đam mê) có thể trở nên gần gũi với nhau hơn, và như vậy, hẳn nội dung cuốn sách cũng sẽ tới với các bạn đọc một cách dễ dàng hơn trước.

Đối với hầu hết mọi người, bắt đầu bao giờ cũng là một việc khó. Chương thứ nhất của cuốn sách được dành riêng để trình bày về năm bất đẳng thức đại số kinh điển. Lần lượt là *AM – GM, Cauchy – Schwarz, Holder, Minkowski, Chebyshev*, trong đó bốn bất đẳng thức đầu tiên có thể dùng để chứng minh lẫn nhau. Không dễ để có thể diễn tả hết sức mạnh của các bất đẳng thức này đối với những bất đẳng thức cổ điển thông qua một vài ví dụ cụ thể. Hơn nữa nếu có thể nắm vững và ứng dụng được chúng trong các bài toán cụ thể một cách linh hoạt thì có thể coi như bạn đã “biết” khá nhiều về các bất đẳng thức đại số. Vì lẽ đó, chúng tôi lựa chọn cách trình bày quy phạm, đi từ dễ đến khó, chi tiết ở từng định lý, cận kề trong từng ví dụ và lựa chọn một số lượng bài tự giải khá lớn để bạn đọc luyện tập. Bên cạnh đó chúng tôi cũng đã gửi gắm khá nhiều những kỹ thuật áp dụng các bất đẳng thức cổ điển mới vào từng trang sách. Tiêu biểu phải nhắc lại, đó là kỹ thuật chọn điểm rơi, cân bằng hệ số, kỹ thuật tách phân thức âm và

đánh giá mẫu số trong ứng dụng của bất đẳng thức  $AM - GM$ . Kỹ thuật sắp xếp biến để áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cũng là một kỹ thuật tinh tế và đáng chú ý, các bạn cần thực hành nhiều nếu muốn sử dụng thành thạo trong các bài toán đối xứng, và kể cả một số bài toán hoán vị nữa.

Trong chương II, chúng tôi tiếp tục cách trình bày quy phạm khi tiến hành giới thiệu các bất đẳng thức cận đại. Các bất đẳng thức đó lần lượt là bất đẳng thức hoán vị, bất đẳng thức *Schur* và bất đẳng thức *Muirhead*. Có thể hiểu bất đẳng thức hoán vị là cái nhân của bất đẳng thức *Chebyshev*, và do đó những bài toán đối xứng có thể giải bằng *Chebyshev* cũng giải được nhờ bất đẳng thức hoán vị, hơn nữa có khá nhiều bài toán hoán vị chỉ có thể sử dụng bất đẳng thức hoán vị để giải quyết vì nếu sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* thì các đánh giá sẽ trở nên rất phức tạp. Cũng trong chương này chúng ta đã bắt đầu công phá các bất đẳng thức đối xứng một cách có hệ thống hơn. Bắt đầu với việc sử dụng bất đẳng thức *Schur* nhờ việc quy các bất đẳng thức ban đầu về các bài toán đơn giản hơn trên các đa thức *Viet* ba biến cơ bản  $p = a + b + c$ ,  $q = ab + bc + ca$ ,  $r = abc$ . Tiếp theo đó lược đồ *Young* cùng những phép biến đổi đối xứng, bất đẳng thức *Muirhead*, và đặc biệt là bất đẳng thức *ASYM* đã đưa ra một con đường “chuẩn mực” khi giải các bài toán đối xứng. Đó là quy bất đẳng thức đối xứng về các đa thức đối xứng cơ bản của các biến, sau đó sử dụng những đánh giá trên các đa thức đối xứng cơ bản đó để đưa ra kết luận bài toán. Phương pháp này đặc biệt tỏ ra có hiệu lực khi ta đã có trước trong tay những đánh giá đủ chặt, đặc biệt là khi có sự trộn lẫn của các tổng đối xứng đồng bậc khác nhau.

Bước vào chương III, lần đầu tiên trong cuốn sách này các bạn được làm quen với những ứng dụng của phép đạo hàm; và có thể ngay lập tức nhận thấy sức mạnh tiềm tàng của phương pháp khảo sát hàm số trong chứng minh bất đẳng thức. Thật vậy, nếu là bất đẳng thức một biến, ta có thể áp dụng trực tiếp định lý *Fermat* về các điểm tới hạn, nếu là bất đẳng thức nhiều biến, ta có thể khảo sát lần lượt theo từng biến. Dù là bài toán đơn giản hay có hình thức phức tạp, kết quả vẫn đạt được khi chúng ta kiểm soát được dấu của đạo hàm của các hàm số thông qua các không điểm của chúng. Phát triển sâu sắc hơn ý tưởng này, bài toán cực trị có ràng buộc trên lý thuyết đã được giải quyết triệt để nhờ các định lý *Lagrange*. Một mặt khác công cụ đạo hàm và các định lý của giải tích cho phép ta khảo sát hình dáng của các hàm số chính xác tới từng “địa phương” (sự tăng giảm của hàm số tại một điểm). Tuy nhiên với những bất đẳng thức nhiều biến thì số “địa phương” sẽ bị tăng lên quá nhanh và quá “lớn”. Do đó cần có những hướng tiếp cận đặc biệt khác. Các bất đẳng thức *Jensen*, *Karamata*, *RCF*, *LCF*, *Popoviciu* được phát triển theo cùng một tư tưởng. Đó là với những hàm đủ tốt (đạo hàm cấp 2 thỏa mãn các tính chất nào đấy) thì ta có thể tiến hành dồn các bộ nhiều biến về một số bộ nhiều biến khác đặc biệt hơn. Như vậy bài toán sẽ trở nên khá dễ dàng. Cuối cùng, vẫn giữ nguyên tinh thần của phương pháp giải tích, chúng ta lại tìm cách tiếp cận các bất đẳng thức một cách “toàn cục”, đó chính là những ứng dụng đặc sắc của tích phân *Riman*. Trong chương này, mặc dù vẫn cố gắng đáp ứng những chuẩn mực

trong cách trình bày lý thuyết và bài tập, chúng tôi đã chủ động tạo cho các bạn một nhịp suy nghĩ tìm tòi để cải tiến các phương pháp, khắc phục nhược điểm, phát huy ưu điểm của chúng. Đây cũng là một cách khởi động tốt để các bạn có thể bước vào chương thứ tư, chương bao gồm các bài toán rất đẹp, các ý tưởng rất mới, cũng là chương hay và khó nhất cuốn sách.

Chương IV, những viên kim cương của bất đẳng thức sơ cấp hiện đại. Đây thực sự là tập hợp của những hướng đi mới, những ý tưởng mới nhằm công phá thế giới bất đẳng thức đa dạng và phong phú. Đây cũng là lần đầu tiên những ý tưởng này được đặt cạnh nhau trong một mối quan hệ thống nhất. Bắt đầu với phương pháp *S.O.S*, phương pháp này được phát triển nhờ việc đánh giá các hệ số của tổng bình phương có dạng  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq 0$ , hoặc dạng cải tiến của nó là  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(a-c)$  dùng để xử lý tốt hơn đối với các bất đẳng thức hoán vị. Tiếp theo đó là ý tưởng về phép dồn biến. Như đã nói, ý tưởng của phương pháp dồn biến là không chứng minh “ngay” như *S.O.S* mà tìm cách thu hẹp bài toán  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  trên tập  $D$  về tập  $\Lambda$  nhỏ hơn, ở đây tập  $\Lambda$  có những tính chất đặc biệt nào đó, rồi sau đó mới xử lý cụ thể trên tập  $\Lambda$ . Ý tưởng rất đơn giản này đã được triển khai với hàng loạt định lý rất mạnh như *S.M.V*, *U.M.V*, *G.M.V*, mỗi định lý thích hợp với những bất đẳng thức có số biến khác nhau. Sau phương pháp dồn biến, chúng ta đến với chùm ba phương pháp *A.B.C*, *G.L.A*, *E.V*. Và mặc dù bắt đầu với mục đích đổi biến để tiến hành khảo sát nhằm giảm biến, hầu như ngay lập tức có thể nhận thấy ba phương pháp này đã thực hiện cùng một ý tưởng, đó là dồn biến gián tiếp. Khác với dồn biến trực tiếp, để dồn biến gián tiếp ta tiến hành đổi biến trước, rồi mới thực hiện phép dồn biến trên các biến mới, sau đó có thể lại quay lại làm việc trên các biến cũ, các biến đó lúc này đã được dồn về những trường hợp đặc biệt. Ý tưởng tình tế này cũng đồng thời đặt ra một câu hỏi khó là có những phép đổi biến nào thực sự có ý nghĩa và hiệu quả, đây vẫn còn là câu hỏi mở. Cuối cùng, phương pháp chia để trị đưa ra và triển khai một ý tưởng không mới, nhưng không hề đơn giản. Đó là thay vì tìm cách chứng minh trên toàn miền xác định ta tìm cách chia nhỏ thành các miền đơn giản hơn, để sau khi có những đánh giá trên từng miền ta có thể kết hợp những kết quả đó lại nhờ những định lý nổi dài. Đây là tất cả những ý tưởng lớn nhất đã được triển khai trong suốt chương bốn. Trong chương này các bất đẳng thức đối xứng đã được giải quyết một cách khá triệt để, một bài toán cũng có thể được giải quyết bằng tất cả các phương pháp, tùy tình huống cụ thể mà lời giải sẽ có độ phức tạp khác nhau. Trong một chương mà cảm hứng sáng tạo có thể bắt gặp ở tất cả các bài toán, chúng tôi lựa chọn sử dụng một cách trình bày mang đậm tính tìm tòi khám phá, cách trình bày quy phạm truyền thống đã được nới lỏng với niềm tin rằng các bạn, những độc giả rất năng động, sẽ tiếp thu được những ý tưởng và những phương pháp này một cách đúng đắn và đầy đủ nhất khi được chứng kiến lại chính xác con đường mà các tác giả đã đi qua để tìm ra

chúng. Chúng tôi kì vọng rằng sau khi đã quen thuộc với các đặt và giải quyết vấn đề trong từng chuyên đề, các bạn cũng sẽ có những sáng tạo của riêng mình trong tương lai.

Sau bốn chương đầu với cách trình bày khá quen thuộc, ở chương cuối cùng, chương năm, chúng tôi đã tổng hợp và chọn lọc một số bài viết, cũng như bài toán đặc sắc nhất để gửi tới các bạn. Đó là phương pháp *U.C.T*, đó là bất đẳng thức *Nesbitt – Sharpiro*, đó là kỹ thuật *p, q, r* hoán vị, và đó là rất nhiều bài toán với lời giải độc đáo cùng một danh sách dài các bài tập không có lời giải. Và còn nhiều chuyên đề hơn nữa chúng tôi muốn gửi tới các bạn. Có tất cả những điều đó vì chúng tôi muốn nói với các bạn rằng thế giới bất đẳng thức còn rất rộng và còn rất nhiều điều thú vị. Tất cả những phương pháp đã có, theo một khía cạnh nào đó, chỉ là tương đối, và dĩ nhiên không thể là toàn năng, chính vì thế luôn có những điều mới mẻ đón chờ các bạn ở phía trước sự sáng tạo và tinh thần làm việc nghiêm túc. Để minh họa cho điều đó bây giờ thay vì đánh giá sức mạnh của những phương pháp đã có, chúng ta hãy thử cùng nhau nhìn lại xem, còn những bài toán nào vẫn đang ở ngoài tầm với, hiển nhiên rằng việc tiếp tục tìm tòi về những bài toán còn sót lại và hướng tới những điều mới lạ sẽ là chương kết không thể thích hợp hơn với một bản nghiên cứu rộng khắp như cuốn sách mà chính các bạn đang cầm trên tay.

Các bất đẳng thức thường được phân loại theo nhiều cách. Phân chia theo số biến ta có bất đẳng thức ba biến, bốn biến, và bất đẳng thức nhiều biến. Phân chia theo hình thức ta có bất đẳng thức đối xứng, bất đẳng thức hoán vị. Phân chia theo đặc tính ta có bất đẳng thức thuần nhất, bất đẳng thức không thuần nhất. Mỗi phương pháp tỏ ra có ưu thế với dạng này không có gì đảm bảo vẫn giữ được ưu thế đó khi áp dụng để giải quyết những bài toán thuộc dạng khác. Trước hết chúng ta hãy xem các bất đẳng thức đối xứng, thuần nhất, bởi vì đây là dạng bất đẳng thức đơn giản, quen thuộc, và phổ biến nhất. Đối với những bất đẳng thức dạng này việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển thường đem lại hiệu quả cao. Một hướng đi rất mang hơi hướng cận đại khi tấn công các bất đẳng thức trong nhóm này là sử dụng các bất đẳng thức *Muirhead*, *Shur* và *ASYM*. Ý tưởng chủ chốt là do mọi bất đẳng thức đối xứng đều có thể quy về bất đẳng thức trộn lẫn giữa các tổng đối xứng cơ bản của các biến ban đầu, cho nên nếu có những bất đẳng thức cơ sở đủ mạnh, thì ta cũng sẽ dễ dàng có được những kết quả cần chứng minh. Hạn chế ở đây là với những bất đẳng thức có sẵn như *Muirhead*, *Shur* và *ASYM* thì việc giải quyết những khó khăn phát sinh khi có nhiều tổng đối xứng bậc khác nhau xuất hiện cùng trong bài toán trở nên rất khó khăn. Cụ thể hơn, có thể liệt kê lại ở đây 13 bài toán rất khó và hơn nữa trong số chúng chưa có lời giải trọn vẹn. Các bạn có thể xem lại các ký hiệu trong chuyên đề về bất đẳng thức *Muirhead*.

**Bài 1:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng  $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$$



**Bài 2:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  
 $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1c_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2; M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$$

**Bài 3:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $S_{a_1b_1} + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_3b_3c_3}$  trong đó  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2; a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

**Bài 4:** Cho các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $S_{a_1a_2\dots a_n} + kS_{c_1c_2\dots c_n} \geq (k+1)S_{b_1b_2\dots b_n}$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$  là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán sau:

**Bài 5:** Cho các biến không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $S_{a_1a_2\dots a_n} - S_{b_1b_2\dots b_n} \geq k(S_{c_1c_2\dots c_n} - S_{d_1d_2\dots d_n})$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n), (d_1, d_2, \dots, d_n)$  là các dãy số nguyên dương không giảm:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

**Bài 6:** Cho dãy số không tăng  $\{a_n\}$  và 1 hoán vị của nó  $\{b_n\}$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ). Chứng minh rằng nếu  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$  thì  $\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{a_n} x_2^{a_{n-1}} \dots x_n^{a_1}$ .

**Chú ý:** Bài toán trên có ý nghĩa đối với bất đẳng thức hoán vị tương tự như bất đẳng thức **Muirhead** đối với bất đẳng thức đối xứng. Làm mạnh hơn bài toán trên ta có:

**Bài 7:** Cho 2 dãy không tăng  $\{a_n\}, \{b_n\}$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

Dãy biến  $\{x_n\}$  không tăng và không âm có  $\{y_n\}$  là 1 hoán vị của nó.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}$$

Và tương tự quá trình ta sẽ có những bài bất đẳng thức hoán vị sau:



**Kí hiệu:**  $C_X^\alpha = \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Đặc biệt nếu  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  là các số tự

nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là:  $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Ngoài ra nếu  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$  thì  $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$

**Bài 8:** Cho  $M, a_1, b_1, a_2, b_2$  là các số nguyên dương sao cho:  $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ ;  $a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$ . Cho 2 biến  $x, y \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $x, y \geq 0$ :

$$C_M + kC_{a_2 b_2} \geq (k+1)C_{a_1 b_1}$$

**Bài 9:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_m + kC_{a_2 b_2 c_2} \geq (k+1)C_{a_1 b_1 c_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$$

**Bài 10:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_m + kC_{a_2 b_2 c_2} \geq (k+1)C_{a_1 b_1 c_1}$  trong đó  $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2; M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2;$$

**Bài 11:** Cho các biến  $x, y, z \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_{a_1 b_1} + kC_{a_3 b_3 c_3} \geq (k+1)C_{a_2 b_2 c_2}$  trong đó  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2; a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3;$$

**Bài 12:** Cho các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_{a_1 a_2 \dots a_n} + kC_{c_1 c_2 \dots c_n} \geq (k+1)C_{b_1 b_2 \dots b_n}$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$  là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán sau:

**Bài 13:** Cho các biến không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:  $C_{a_1 a_2 \dots a_n} - C_{b_1 b_2 \dots b_n} \geq k(C_{c_1 c_2 \dots c_n} - C_{d_1 d_2 \dots d_n})$  trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n), (d_1, d_2, \dots, d_n)$  là các dãy số nguyên dương không giảm

sao

cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

Đây thực sự là những bài toán rất khó có lời giải trọn vẹn. Tuy nhiên nếu có thể có lời giải trọn vẹn cho bài toán nào đó trong số những bài toán này thì ta sẽ lại có thể có thêm những bất đẳng thức đối xứng thuần nhất rất chặt, và những chứng minh sáng sủa hơn cho nhiều bài toán đối xứng cũ. Từ bài 6 trở đi, các kết quả tìm được sẽ hỗ trợ trực tiếp việc giải các bài toán hoán vị. Bây giờ, chúng ta hãy nói một chút về các bài toán hoán vị. Rõ ràng trong cả cuốn sách này đã có rất nhiều lần chúng ta công phá các bài toán hoán vị bằng nhiều cách với những công cụ khác nhau. Tuy nhiên mọi việc vẫn rất khó khăn. Vậy đâu là khó khăn chính. Có thể nói đơn giản khó khăn chính nằm ở chỗ đẳng thức trong các bất đẳng thức hoán vị là rất khó kiểm soát. Thông thường trong các bất đẳng thức đối xứng thì đẳng thức xảy ra tại những vị trí khá đẹp, như các biến bằng nhau, hoặc 1 biến đạt giá trị biên và các biến còn lại bằng nhau. Ngoại lệ có một số bất đẳng thức đối xứng mà dấu bằng đạt được khi các biến rất lệch nhau, số này rất ít. Tuy nhiên đối với các bất đẳng thức hoán vị thì việc đẳng thức xảy ra khi các biến rất lệch nhau, lệch cả tâm và ở rất xa biên là rất thường gặp. Thường thì khi đó đẳng thức sẽ xảy ra khi các biến thỏa mãn một hoặc một vài hệ thức đặc biệt nào đó, và do đó có thể có trường hợp đẳng thức xảy ra tại vô hạn bộ số (các bộ này thậm chí không tỷ lệ với nhau). Đâu sẽ là hướng đi sáng sủa nhất với những bài toán loại này. Cho đến giờ chúng ta có hai hướng đi sau đây. Hướng đi thứ nhất là sử dụng các phương pháp vốn dành cho bất đẳng thức đối xứng kèm theo một số sự cải tiến nào đó. Chẳng hạn có thể cải tiến phương pháp *S.O.S*, *D.A.C* và thậm chí cả phương pháp sử dụng *Shur* dựa vào phép biến đổi bài toán về dạng tổng các bình phương như sau  $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(c-a)$ . Hướng đi này tỏ ra có hiệu quả trong rất nhiều bài toán khó, đặc biệt khi nó được hỗ trợ bởi một số bất đẳng thức phụ đủ mạnh. Hướng đi thứ hai là tìm cách đổi biến nhằm quy tất cả các trường hợp đẳng thức xảy ra khi các biến ban đầu lệch nhau về trường hợp đẳng thức xảy ra khi các biến mới khá "đẹp". Để thực hiện được điều đó chúng ta cần sử dụng đến những định lý đã nêu ra trong mục phương pháp *G.L.A* tổng quát. Theo đó đối với bất đẳng thức cần chứng minh có dạng  $F(a,b,c) \geq 0$ , ta sẽ chọn cách đổi biến thích hợp có thể dẫn tới bất đẳng thức  $A' + B' + C' \geq \text{const}$ . Sau đó chứng minh rằng với mọi giá trị có thể của  $A, B, C$  luôn tồn tại  $a', b', c'$  sao cho khi đổi biến ta nhận được  $A', B', C'$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} A'B' = B'C' + C'A' = AB + BC + CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A' - B')(B' - C')(C' - A') = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Lúc này ta đã có thể áp dụng định lý 1 và định lý 2 trong mục 20.VIII để quy bài toán về trường hợp trong 3 biến  $A, B, C$  có 2 biến bằng nhau. Thực ra ta cần chứng minh hệ (\*) có nghiệm vì định lý 1 chỉ được phát biểu cho  $R_+^3$ , trong khi đó  $(A, B, C)$  chỉ chạy trong 1 tập con nào đó của  $R_+^3$ , vì chúng còn bị ràng buộc bởi một quan hệ qua chính

phép đổi biến. Tuy nhiên đây cũng chính là “gót chân Asin” của phương pháp này. Tại sao vậy. Bởi vì trước khi đổi biến chúng ta không thể biết được hệ (\*) có nghiệm hay không. Trong một số trường hợp đơn giản thì ta có thể khẳng định ngay điều đó. Nhưng trong trường hợp tổng quát thì mọi việc không có gì chắc chắn. Hơn nữa ngay cả khi đã quy về trường hợp đẳng thức đơn giản của biến mới, nếu cách đổi biến quá phức tạp thì khi quay lại biến cũ chúng ta cũng sẽ gặp rất nhiều khó khăn về mặt tính toán. Để hình dung được những khó khăn đó các bạn có thể thử tìm phép đổi biến thích hợp với bài toán sau đây:

#### Bài 14. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Tìm hằng số  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương  $a, b, c$ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{k(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}} + 9 - k$$

Như vậy vấn đề này có thể nói là mới đang ở vạch xuất phát và vẫn đang đợi những tìm tòi của chính các bạn trong tương lai. Chúng ta hãy chuyển sang các bất đẳng thức không thuần nhất. Có thể coi các bất đẳng thức này là 1 phần của các bất đẳng thức đối xứng. Bởi vì nó vẫn là sự trộn lẫn giữa các tổng đối xứng cơ bản trên các biến gốc, số bất đẳng thức như thế này tuy không thực sự nhiều, cách phát biểu có thể hơi cồng kềnh, nhưng đặc biệt ấn tượng.

Đặt  $S_{k,n} = \sum_{i_1 < \dots < i_k \subset \{1, 2, \dots, n\}} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  ( $k < n$ ) và  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Khi đó ta có các bất đẳng

thức sau

$$\text{Bài 15. } (S_{4,4} - S_{2,4} + 1)^2 + (S_{3,4} - S_{1,4})^2 \geq \frac{125}{216} (\sqrt{2}S_{3,4} + \sqrt{3}S_{2,4})^2$$

$$\text{Bài 16. } (49S_{4,4} - 371S_{2,4} + 2809)^2 + 371(7S_{3,4} - 53S_{1,4})^2 \geq 360^3 (S_{4,4} + S_{2,4} + 3S_{1,4} + 1)^2$$

$$\text{Bài 17. } (9S_{4,4} - 21S_{2,4} + 49)^2 + 21(3S_{3,4} - 7S_{1,4})^2 \geq \frac{2000}{7} (S_{4,4} + 2S_{2,4} + 5S_{1,4} + 2)^2$$

$$\text{Bài 18. } (S_{5,5} - 2S_{3,5} + 4S_{1,5})^2 + 2(S_{4,5} - 2S_{2,5} + 4)^2 \geq (S_{3,5} - S_{4,5} + 1)^2$$

$$\text{Bài 19. } (S_{6,6} - S_{4,6} + S_{2,6} - 1)^2 + (S_{5,6} - S_{3,6} + S_{1,6})^2 \geq \frac{16}{121} (6S_{6,6} - S_{4,6} + 5S_{1,6} + 1)^2$$

$$\text{Bài 20. } (8S_{6,6} - 20S_{4,6} + 50S_{2,6} - 125)^2 + 10(4S_{5,6} - 10S_{3,6} + 25S_{1,6})^2 \geq 96,04(S_{4,6} + S_{3,6})^2$$

Như vậy, có thể nói các bài toán hoán vị và các bài toán không thuần nhất (không mẫu mực) sẽ là những hướng đi chủ yếu của chúng ta trong tương lai, tất nhiên, những bài toán đối xứng thuần nhất vẫn là một mảnh đất màu mỡ để các bạn tiếp tục triển khai những ý tưởng mới của mình. Chúng tôi sẽ liệt kê lại một số bài toán hoán vị có dạng khá đơn giản, nhưng việc giải quyết được nó vẫn là những câu hỏi mở, thách thức bạn đọc.

**Bài 21. [Phan Thành Việt]** Cho  $x, y, z > 0, xyz = 1$ . Tìm  $k$  tốt nhất để

$$\frac{x+y^2}{y+z^k} + \frac{y+z^2}{z+x^k} + \frac{z+x^2}{x+y^k} \geq 3.$$

**Ghi chú:** bất đẳng thức đúng với  $k = 1, 2, 3, 4$  nhưng sai với  $k = 5$ .

**Bài 22. [Mở rộng bất đẳng thức Jackgarfukel]**

1. Cho  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ k > 1 \end{cases}$  và  $C_k = \max \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{k}}, \frac{(k-1)^k + k^k (k-1)}{k^k (k-1)} \right)$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{k}}} \leq C_k (a+b+c)^{\frac{k-1}{k}} \quad (\text{với } k=2, \text{ chúng ta có bất đẳng thức Jackgarfukel})$$

2. Cho  $a, b, c > 0$  và  $q$  là hằng số thực dương. Tìm  $k$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}} \leq k\sqrt{a+b+c}$$

3. Cho  $a, b, c, d > 0$ . Tìm số thực  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

**Bài 23. [Cậu bé quàng khăn đỏ - MnF]** Cho  $a, b, c > 0, abc = 1$ . Tìm  $k$  tốt nhất để

$$\frac{a}{b^k+2} + \frac{b}{c^k+2} + \frac{c}{a^k+2} \geq 1$$

**Ghi chú:** Bất đẳng thức đúng với  $k = 4$  nhưng sai với  $k = 5$ . Lưu ý rằng khi  $k$  gần với giá trị tốt nhất thì  $a, b, c$  chạy tới ba giá trị lệch nhau và lệch biên.

**Bài 24. [Dương Đức Lâm]** Cho  $a, b, c \geq 0; a+b+c=3$ . Tìm số dương  $k$  tốt nhất để

$$\frac{ab}{k+a^2} + \frac{bc}{k+b^2} + \frac{ca}{k+c^2} \leq \frac{3}{k+1}$$

**Ghi chú:** Về hình thức, bài toán này gần giống với bài toán 3.5 của §18 (Phương pháp dồn biến), và ở đó ta đã phải sử dụng kỹ thuật dồn biến bằng hàm số rất vất vả. Tuy nhiên bài toán ở trên lại là bài toán hoán vị và đã khó hơn gấp nhiều lần. Cũng như bài 23, đẳng thức xảy ra ở bài này cũng lệch tâm và lệch biên.

**Bài 25. [Dương Đức Lâm]** Cho  $a, b, c \geq 0; a+b+c=3$  và  $k > 0$ .

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{1}{a^2+b+k} + \frac{1}{b^2+c+k} + \frac{1}{c^2+a+k}$

**Ghi chú:** Xét trường hợp riêng  $k=1$ , bằng phương pháp dồn biến bạn Võ Quốc Bá Cẩn đã tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức xấp xỉ 0.9168... là nghiệm của một phương trình bậc cao với những tính toán rất phức tạp; còn giá trị lớn nhất thì có thể dự đoán xấp xỉ 1.3532... bằng máy tính và rất khó có thể tìm được một đánh giá thích hợp vì đẳng thức xảy ra khi ba biến lệch nhau và lệch biên (không có biến nào bằng 0).

**Bài 26. [Phan Thành Việt]** Xét tập hợp  $D$  gồm  $n$  số thực dương thỏa mãn  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} = n+1$ .

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$  trên  $D$ .

**Ghi chú:** Lớp bài toán không thuần nhất thuộc dạng này còn rất nhiều và ngay cả với những bài toán đối xứng nó cũng ẩn chứa những khó khăn nhất định.

**Bài 27. [Phạm Kim Hùng]** Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a + b + c = 1$  và các số thực  $r, s$ .

Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của  $a^r b^s + b^r c^s + c^r a^s$ .

**Ghi chú:** Bài toán này đã xuất hiện hơn 3 năm trên các diễn đàn thảo luận, tuy nhiên, cho đến nay vẫn chỉ có những lời giải cho một số trường hợp đặc biệt.

**Bài 28. [Phạm Kim Hùng]** Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\frac{a+kb}{b+kc} + \frac{b+kc}{c+ka} + \frac{c+ka}{a+kb}$  với  $a, b, c, k > 0$

**Ghi chú:** Với  $k = 1$  thì ta có bất đẳng thức  $AM - GM$ , với  $k = 2$  bài toán có một lời giải khá đẹp. Trong trường hợp tổng quát, chúng ta chưa có lời giải trọn vẹn.

Thông thường, sau khi một bất đẳng thức được chứng minh, ta thường tìm cách tham số hóa nó và đặt ra các bài toán tìm hằng số tốt nhất để bài toán vẫn đúng, bài 21, 23, 24 là những điển hình. Việc đặt ra các câu đố như thế thực sự là những thách thức lớn với những phương pháp hiện có. Tất nhiên, những câu đố có hình dạng quá phức tạp sẽ bị bỏ qua, và người ta sẽ chỉ tập trung vào những bài toán có dạng đơn giản và đẹp dễ nhất. Các bài toán 27 và 28 là những ví dụ rất tốt. Trên thực tế kể từ lúc chúng được đặt ra, đã có rất nhiều phương pháp mới ra đời, nhưng vẫn chưa đủ để giải quyết triệt để, và vì thế vẫn đang cần những cố gắng tìm tòi tiếp theo.

Các bạn thân mến! Vậy là chúng tôi đã trình bày tất cả những gì mình muốn gửi gắm tới các bạn. Đó là những kiến thức rất cơ bản về bất đẳng thức, những nền tảng vững chắc để các bạn vừa có thể tiếp tục tìm tòi sâu hơn về thế giới của các dấu lớn hơn nhỏ hơn, vừa có thể tìm được những ứng dụng trong các bài toán thực tế. Đó là những tư tưởng và những tìm tòi rất nghiêm túc cả về lý thuyết lẫn thực hành của nhiều tác giả. Các tư tưởng ấy đã được phát triển một cách triệt để. Và cũng nhờ đó nó trở thành những phương pháp đẹp dễ nhất hiện nay. Chúng tôi hi vọng rằng tinh thần sáng tạo ấy sẽ được các bạn tiếp tục và phát triển lên những tầng cao hơn. Trong Toán học, không chỉ có riêng bất đẳng thức, nhưng để có thể học và làm toán tốt, thì tinh thần sáng tạo là yếu tố không thể thiếu. Một mong mỏi lớn của chúng tôi khi bắt tay thực hiện cuốn sách này là phải làm sao xây dựng được một cuốn từ điển bất đẳng thức sơ cấp dành cho tất cả các đối tượng bạn đọc. Quả thực chúng tôi đã cố gắng hết sức để thể hiện được tâm nguyện đó trên từng trang sách. Nhưng qua thời gian chúng tôi nhận thấy việc truyền được cảm hứng sáng tạo và tinh thần học tập toán học tới các bạn đọc giả đã là một cái gì đó lớn lao hơn như thế rất nhiều. Vì vậy chúng tôi hi vọng các bạn đọc giả sẽ đón nhận những kiến thức được trình bày một cách chủ động và tích cực nhất có thể. Có như thế cuốn sách này mới thực sự có ích. Chúc các bạn thành công!

## Lời kết

*"Non sông Việt Nam có trở nên vẻ vang hay không, dân tộc Việt Nam có được vẻ vang sánh vai các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần rất lớn ở công học tập của các cháu."*

(Hồ Chí Minh nhân dịp khai trường đầu tiên của nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa năm 1946)

*Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics.*

Simeon Poisson

*"Nhà giáo không phải là người nhồi nhét kiến thức mà đó là công việc của người khơi dậy ngọn lửa cho tâm hồn."* (Uyliam Batơ Dit)

### 1. Sự ra đời của cuốn sách:

Chúng ta đã đi đến trang cuối cùng của một cuốn sách đã được tác giả hoài thai **20 năm** và được chấp bút trong gần **10 năm**. Trong suốt cuộc hành bút này, cảm xúc của tác giả cũng được thay đổi theo thời gian. Bắt đầu là khát vọng tuổi trẻ với ước muốn được viết về mảng kiến thức đam mê nhất từ khi còn là học sinh phổ thông. Tiếp đó là sự bỏ trợ quảng bá hình ảnh cá nhân để dạy luyện thi đại học với một cuốn sách đầu tay: ***Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh Bất đẳng thức*** do Nhà xuất bản TP.HCM phát hành năm 1993. Sau này cảm xúc được bổ sung đầy đủ hơn khi được biết về sự đầu tư công phu của các gia đình có con em đam mê học toán với mong muốn trở thành học sinh giỏi thi quốc gia, quốc tế. Nhiều gia đình tốn rất nhiều tiền của lo cho con ăn học nhiều thầy khác nhau, thậm chí có gia đình phải thế chấp nhà để lấy tiền cho con học luyện thi Toán quốc tế. Như vậy đằng sau của tám huy chương là: "Học sinh Việt Nam đã mất rất nhiều thời gian chỉ để học được một kiến thức hay một kỹ năng phục vụ cho một cuộc thi nào đó", khác với học sinh nước ngoài ***với cùng một đơn vị thời gian*** ngoài việc tự học chuyên sâu môn học yêu thích họ còn được nắm bắt nhiều kiến thức kỹ năng bổ ích thiết thực và gần gũi với cuộc sống. Phải chăng với ***các học sinh giỏi*** chúng ta không nên dạy học theo kiểu ***"nhồi giết kiến thức"***, cho vài ba bài toán để học sinh nghĩ gần hết buổi học rồi chữa mà nên dạy học theo ***"nhu cầu ăn kiến thức của học sinh"*** với phương thức đối thoại cởi mở: "Trao toàn bộ thông tin, tài liệu cho học sinh và hướng dẫn học sinh cách tiếp cận, xử lý thông tin rồi cách mở rộng vấn đề, cách tạo ra các vấn đề mới". Nhận thức là như vậy nhưng việc biến thành hành động lại liên quan trực tiếp đến một sự kiện, đó là chuyến viếng thăm của ***Tổng thống Mỹ Bill Clinton*** sang thăm Việt Nam từ **16/11/2000** đến **20/11/2000**. Tác giả đã dõi theo sự hiện diện của Tổng thống Mỹ khi đến thăm Văn Miếu Quốc Tử Giám, gặp gỡ thân thiện với người dân Hà Nội tại khu phố cổ buôn bán Hàng Đào và đặc biệt vào lúc **16h ngày 17/11/2000** khi gặp gỡ với các giảng viên và sinh viên **ĐH QGHN** Tổng thống đã phát biểu: ***"We cannot change the past. What we can change is the future"*** tạm dịch là: ***"Chúng ta không thể thay đổi được quá khứ, cái mà chúng ta thay đổi là tương lai"***.

Chính câu nói này đã làm tác giả rời bỏ ***"mảnh đất màu mỡ luyện thi đại học"*** từ năm 2001 cho đến nay để quyết tâm viết một cuốn sách giới thiệu nền Toán học phổ thông của Việt Nam ra thế giới và cũng là thông điệp mong muốn được đáp lại thiện chí của Tổng thống Bill Clinton: ***"Khép lại quá khứ đau thương để hướng đến tương lai"***.

Với ý định giới thiệu cuốn sách không chỉ mang ý nghĩa thuần túy về Toán học mà còn mang ý nghĩa về sự liên tưởng với tư duy cuộc sống, từ năm 2003 tác giả đã sưu tầm và mua các đoạn phim tư liệu để tạo ra một video clip dài 60 phút giới thiệu về cuốn sách.



## 2. Vai trò của Toán học trong cuộc sống

Có hai quan điểm cực đoan đối lập nhau về quan niệm vai trò của Toán học trong đời sống xã hội. Một quan điểm suy tôn Toán học là ông vua của các ngành khoa học đến mức đồng nhất hai khái niệm thông minh có nghĩa là phải giỏi toán. Một quan điểm cổ súy cho các ngành kinh tế, tài chính, quản trị kinh doanh mà xem nhẹ vai trò của Toán học. Về quan điểm đầu tiên chúng ta có thể thấy sự lạc hậu khi không cập nhật thông tin nắm bắt kiến thức mới. Các nhà khoa học **Howard Gardner, Thomas Armstrong** đã chỉ ra có bảy loại hình thông minh mà khả năng thông minh về tính toán chỉ là một trong bảy loại hình này. Tất nhiên thông minh về Toán học là loại hình thông minh chủ đạo nên dễ có thể nắm bắt nhanh chóng khi chuyển sang các lĩnh vực khác. Người giỏi Toán là người có khả năng suy luận logic tốt, tính toán cẩn thận và kiên trì suy nghĩ khi gặp tình huống khó, nắm vững những khái niệm, nguyên tắc trừu tượng cơ bản để có thể áp dụng chúng vào những bài toán cụ thể. Những đức tính đó là yếu tố cho việc thành công trong mọi lĩnh vực cần đến đầu óc (trừ các lĩnh vực nghệ thuật?). Về quan điểm xem nhẹ vai trò của Toán học cũng bộc lộ sự tiếp cận trí thức một cách hời hợt mang nặng văn hóa tiêu dùng kiểu mĩ ăn liền. Toán học không chỉ hiện diện phổ biến với các phép toán số học trong các giao dịch, buôn bán thông thường mà nó luôn ẩn hiện với vai trò công cụ không chỉ trong các ngành khoa học như Vật lý, Thiên văn, Công nghệ thông tin, Hóa học, Sinh học mà còn được ứng dụng rộng rãi trong các ngành Y học, Kinh tế, Tài chính, Ngân hàng và cả ngành Luật pháp... Để có thể phóng được các tàu vũ trụ **Apollo** và lắp ghép chúng trong không gian thì phải có sự đóng góp của phương trình vi phân, đạo hàm riêng, hình học vi phân, lý thuyết biểu diễn, đại số toán tử,... trong Vật lý học hiện đại. Để có thể trao đổi mua bán qua Internet mà không sợ bị trộm cắp tài khoản thì phải cần đến ứng dụng của lý thuyết mã hóa thông tin với những ứng dụng của toán rời rạc, lý thuyết số và hình học đại số. Các nhà kinh tế học được giải Nobel gần đây đều có liên quan đến môn kinh tế lượng với sự đóng góp quan trọng của các mô hình toán học. Những điều trên mọi người có thể nghe đâu đó đã đề cập đến nhưng chúng ta chưa thấy hết vai trò ẩn của Toán học trong tư duy logic áp dụng cho các vấn đề xã hội. Nhân đây tôi xin kể hai câu chuyện vui về tư duy logic. Chuyện thứ nhất là lần tôi được mời làm giám khảo cho cuộc thi nữ sinh thanh lịch của một trường đại học tại Hà Nội. Ở phần thi ứng xử tôi có đặt một câu hỏi cho một nữ sinh với nội dung: *"Theo em điều kiện cần để một người đàn ông lấy được một người vợ trẻ là gì?"*. Rất nhanh chóng nữ sinh đã trả lời với nhiều điều kiện: *"người đàn ông đó phải tài giỏi, có học vị, địa vị, có nhà, tài sản, có sức khỏe..."* Khi đó tôi nói đây là câu hỏi logic chứ không phải là màn thi hiểu biết xã hội. Điều kiện cần là điều kiện chung nhất để cấu thành nên một sự vật hiện tượng nào đó mà nếu tước bỏ đi thì không thể tạo ra được sự vật hiện tượng này nữa. Em đưa ra 1 loạt các điều kiện nhưng đó không phải là điều kiện bao quát chung nhất vì vẫn có thể 1 người lái xe ôm không có tài sản, địa vị, học vị mà vẫn có vợ là các tiếp viên trẻ, đẹp. Ở đây điều kiện cần để 1 người đàn ông lấy được cô *vợ trẻ* rất đơn giản *"Ông ấy phải già đã!"* bởi vì nếu *mất thuộc tính già* thì không thể có khái niệm *lấy được vợ trẻ* được! Tất nhiên đây chỉ là điều kiện cần mà không phải là điều kiện đủ vì thực tế cho thấy nếu chỉ có mỗi thuộc tính *"già"* thôi thì rất khó lấy được vợ chứ chưa nói đến lấy được vợ trẻ (đầy triển vọng trăm năm cô đơn)



Câu chuyện thứ hai là một cô bạn gái lâu ngày gặp lại mời tôi đến nhà ăn trưa cùng gia đình. Khi đó tôi nói: *"Được rồi nhưng nếu trời mưa thì anh không đến đâu nhé!"*. Lần gặp lại cô ấy đã trách tôi là: *"Mất lịch sự"* vì hôm đó trời trong xanh, nắng dịu dàng mà anh đã sai hẹn không đến và cũng không gọi điện làm cả nhà chờ cơm mãi. Tôi cười và đáp lại: Anh đâu có sai hẹn, khi đã nói: *"Nếu trời mưa thì anh không đến"* không có nghĩa là *"Trời nắng chắc chắn anh sẽ đến"* mà chỉ tương đương với câu: *"Khi anh đến thì trời chắc chắn không mưa"*.

Hai câu chuyện trên là một minh chứng thú vị về sử dụng tư duy logic trong ngôn ngữ. Mở rộng ra nếu chúng ta phải tư vấn soạn thảo các văn bản pháp luật, hợp đồng kinh tế cho các đối tác thì vai trò của tư duy logic là rất quan trọng. Chẳng hạn ta biến thể câu chuyện thứ hai thành một điều kiện trong hợp đồng giao nhận hàng nhập khẩu giữa hai bên: *"Nếu trời mưa thì bên A không giao hàng tại chân công trình cho bên B"*, như vậy khi trời nắng bên A vẫn có thể giao nhận tại một chỗ khác cách xa hàng trăm kilômét (tại Cảng chẳng hạn) mà vẫn không bị sai hợp đồng!...

Hiện nay tại Mỹ và các nước phương Tây nghề luật sư là nghề có thu nhập cao nhất và mặc dù chúng ta có nhiều người làm Giáo sư tại các trường Đại học, Viện nghiên cứu nhưng không có một ai trở thành một luật sư nổi tiếng tại các nước này. Bởi có lẽ điều kiện cần để trở thành luật sư giỏi là phải có năng khiếu Toán học và ngôn ngữ nhưng những người Việt Nam có khả năng này đều đi vào các ngành khoa học tự nhiên mà quên đi mất ngành Luật đầy hấp dẫn. Trong nước cũng vậy chúng ta cũng cần rất nhiều người có tư duy logic hoạt động trong các lĩnh vực xã hội để kiện toàn các văn bản pháp luật hoặc tư vấn cho các đối tác trong nước kí kết hợp đồng kinh tế với các đối tác nước ngoài mà không cần phải thuê luật sư nước ngoài tư vấn...

Chúng tôi vừa nêu ra vai trò của Toán học dưới nhiều khía cạnh khác nhau với kết luận

- Toán học đóng vai trò nền tảng then chốt để phát triển khoa học tự nhiên cũng như là sợi dây logic để kết nối các vấn đề xã hội.
- Không nên và không thể đồng nhất chỉ có một loại hình trí thông minh là Toán học
- Có rất nhiều con đường rộng mở cho những người có tư duy Toán học. Những người xuất sắc nhất có thể tiên phong đi đầu trong các lĩnh vực sáng tạo của các chuyên ngành tự nhiên. Những người tiếp sau có thể sử dụng tư duy Toán học vào các ngành nghề xã hội như: Y tế, Kinh tế, Tài chính, Ngân hàng, Xây dựng, Môi trường... và ngành Luật.

### 3. Vai trò của bất đẳng thức ở bậc học phổ thông

Bất đẳng thức được giới thiệu cho học sinh ngay từ lớp 4, 5 bậc Tiểu học với khái niệm so sánh phân số. Ở lớp 6 là sự so sánh các lũy thừa với số mũ tự nhiên. Ở lớp 7, 8 là so sánh các biểu thức đại số dạng đa thức, phân thức. Ở lớp 9, 10 học sinh được giới thiệu bất đẳng thức *Côsi* (AM – GM), *Buniakowski* (CBS) (2 số rồi đến  $n$  số) để có thêm công cụ chứng minh bất đẳng thức cho các biểu thức chứa căn. Ở lớp 11, 12 các em được trang bị thêm phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng đạo hàm, tích phân và các phương pháp tham khảo: Tam thức bậc hai; Hình học, Vectơ và Lượng giác...

Nhìn tổng quát trong chương trình Toán phổ thông ta có thể nói bất đẳng thức đóng vai trò rất quan trọng trong việc phát triển tư duy Toán học nói riêng và phát triển tư duy logic nói chung. Bạn đọc có thể đồng cảm với nhận định này khi đã đọc qua hơn 1000 trang trong cuốn sách này. Mặc dù có thể nói đây là một cuốn sách viết rất công phu và chi tiết giới thiệu các phương pháp đặc sắc nhất chứng minh bất đẳng thức đại số, nhưng nói chung trừ các học sinh giỏi quốc gia, quốc tế thì những bạn đọc còn lại vẫn gặp khó khăn khi giải các bất đẳng thức không tầm thường có trong sách hoặc nằm ngoài sách. Sự hấp dẫn của bất đẳng thức chính là tính đa dạng không lặp lại nằm trong tư tưởng của những người đặt ra các đề toán mới. Tất nhiên nếu chúng ta dùng các công cụ mạnh được giới thiệu trong sách như: *Muirhead, Đạo hàm, SOS, ABC, MV, EV, RCF, LCF, GLA, DAC...* thì hầu như mọi bài đều có thể giải được. Ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh đến tính hấp dẫn của bất đẳng thức còn được hiểu không chỉ về độ khó mà còn được nhìn nhận theo khía cạnh sử dụng công cụ hạn chế để chứng minh. Do có rất nhiều công cụ khác nhau để chứng minh bất đẳng thức nên đòi hỏi người giải phải nhận diện chính xác đặc điểm rồi từ đó lựa chọn công cụ cho phù hợp. Bất đẳng thức là một lĩnh vực khó nhưng cái khó không nằm ở gánh nặng về lượng kiến thức mà ở yêu cầu về óc quan sát, linh cảm tinh tế và sức sáng tạo dồi dào của người giải.

#### 4. Ý nghĩa của việc ứng dụng tư duy bất đẳng thức vào cuộc sống

Trong cuốn sách này ngoài việc giới thiệu một cách đầy đủ những viên kim cương trong bất đẳng thức thì điều tác giả tâm đắc nhất là: *"Kỹ thuật chọn điểm rơi"* với tính triết học được thể hiện trong câu chuyện về bộ phim *"Têhêran 43"* đã được giới thiệu ở phần mở đầu cuốn sách. Tuy nhiên dù bạn đọc có thể lĩnh hội đầy đủ các phương pháp để có thể giải quyết mọi bài bất đẳng thức thì vẫn chỉ là một kết quả khiêm tốn (không khác gì một người chơi giỏi cờ vua) nếu các bạn không vận dụng được ảnh hưởng của *"Kỹ thuật chọn điểm rơi"* sang các lĩnh vực dự báo, đánh giá hay so sánh những sự vật hiện tượng diễn ra trong đời sống. Bởi vì Bất đẳng thức toán học là so sánh tĩnh còn đánh giá sự biến đổi trong cuộc sống là so sánh động và: *"Trong một thế giới vận động và biến đổi, con người vẫn nhận thức được những gì đã xảy ra hoặc đang xảy ra nhưng luôn gặp khó khăn khi đánh giá về những gì sẽ đến. Người ta trần trụi với những bất đẳng thức tương lai khi phải đưa ra những quyết định cho cuộc đời mình và có khi cho vận mệnh của cả một dân tộc. Những ngã đường mở ra trước mắt, ngã đường nào dẫn đến thành công, ngã đường nào sẽ gặp thất bại. Chỉ khi thời gian qua đi con người mới hiểu được tính đúng, sai của quyết định trong quá khứ."* Chúng ta có thể lấy thêm những ví dụ điển hình minh họa cho vấn đề dự báo để chọn điểm rơi trong cuộc sống.

– Ngày xưa các gia đình và các thiếu nữ thôn quê luôn khát khao được Vua tuyển làm cung phi, nhưng họ đâu ngờ rằng do vua có hàng trăm cung tần mỹ nữ nên mới có câu nói: *"cuộc đời của người cung phi chỉ là cái may mắn dẫn đến niềm cô đơn tẻ tái!"*

– Không ai có thể ngờ rằng, sự mở đầu hôn lễ huy hoàng của Công nương *Diana* với Thái tử Vương quốc Anh *Charles* lại dẫn đến một kết cục đầy bi thảm.

– Ngày 7/11/1917 Chủ nghĩa Mác–Lênin đã đột phá thành công với cách mạng Nga, mở toang cánh cửa con đường tiến thẳng lên Chủ nghĩa xã hội cho nước Nga và nhiều dân tộc khác trên thế giới. Năm 1991, Mikhail Gorbachov với chính sách cải tổ đã nhấn chìm con đường tiến lên Chủ nghĩa xã hội của nước Nga và mở đầu cho sự sụp đổ hệ thống các nước xã hội chủ nghĩa ở Đông Âu. Nước Nga đã mất 74 năm đi theo con đường của chủ nghĩa xã hội và giờ đây họ đã quay về con đường phát triển của chủ nghĩa tư bản...

– Sau thất bại nặng nề trong Đại chiến thế giới lần thứ II, giới lãnh đạo Nhật chia làm 2 phe theo 2 đường lối xây dựng đất nước. Một đường lối dẫn ví dụ thảm họa chiến tranh và bom nguyên tử để xây dựng các nhà máy ở trong núi cho an toàn (thời gian xây dựng 5 – 7 năm). Một đường lối khác tính đến chu kỳ xảy ra chiến tranh để thuyết phục xây dựng nhanh các nhà máy tại các thành phố ven biển nhằm giảm chi phí xuất nhập khẩu tạo gia tốc tăng trưởng đột phá (thời gian xây dựng 1 – 2 năm). Nhật Hoàng đã sáng suốt chọn phương án hai và thực tiễn đã chứng minh quyết định này đúng khi chỉ sau 15 năm nước Nhật đã vươn lên trở thành cường quốc thứ hai trên thế giới về kinh tế.

### 5. So sánh giá trị sản phẩm để suy ngẫm trong nền kinh tế tri thức

Việt Nam đứng thứ hai thế giới về xuất khẩu gạo và cà phê, đứng thứ nhất về xuất khẩu hạt tiêu và hạt điều nhưng GDP của Việt Nam xếp hạng 123 trên thế giới. Nhưng thông điệp mà nhà báo *Thomas Friedman* của tờ báo *New York Times* muốn đưa ra là khái niệm dùng trọng lượng và giá trị của sản phẩm để so sánh trình độ Quốc gia. Hãy xem một ví dụ: để thu được 500 USD, người ta có thể làm gì?

- Tập đoàn Than và Khoáng sản Việt Nam bán 5 tấn than đá.
- Nông dân ở Đồng bằng sông Cửu Long bán 2 tấn gạo.
- Trung Quốc bán chiếc xe gắn máy trọng lượng 100kg.
- Hãng Sony bán chiếc tivi trọng lượng 10kg.
- Hãng Nokia bán chiếc điện thoại trọng lượng 0,1kg.
- Hãng Intel bán con chip máy tính trọng lượng 0,01kg.
- Hãng Microsoft bán một phần mềm trọng lượng 0kg.

Còn rất nhiều những sản phẩm có giá trị cao nhưng trọng lượng chỉ là 0kg như các phát minh sáng chế hay giá trị thương hiệu... Hàm lượng tri thức càng cao, trọng lượng sản phẩm càng nhẹ. Đo lường xuất khẩu bằng tấn hàng đã trở nên vô nghĩa. Giá trị sản phẩm được đo bằng hàm lượng chất xám và giá trị kinh tế chứ không phải bằng trọng lượng. Quan trọng hơn nữa, đó là bao nhiêu giá trị gia tăng và bao nhiêu lợi nhuận.

**Kết luận:** Xã hội là một giá trị tổng hòa, sự phát triển của các cá nhân hay của các ngành nghề đều phải hướng đến mục đích phục vụ sự phát triển của xã hội. Trong sự biến đổi vận động muôn màu của xã hội, Toán học luôn đóng vai trò nền tảng then chốt để phát triển khoa học tự nhiên cũng như là sợi dây logic để kết nối các vấn đề xã hội. Rèn luyện tư duy bất đẳng thức cũng là rèn luyện tư duy toán học và là những bước đi đầu tiên nhưng rất quan trọng đối với mỗi học sinh trong việc chuẩn bị hành trang tư duy để bước vào nền kinh tế tri thức.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2009

Trần Phương

## PHỤ LỤC

### I. THỐNG KÊ TÁC GIẢ CÁC CHUYÊN ĐỀ VÀ BÀI VIẾT

| CHƯƠNG I: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀN                    |                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| §1. Bất đẳng thức AM – GM và các kỹ thuật chọn điểm rơi                     | Trần Phương                     |
| §2. Bất đẳng thức Cauchy – BunhiaCôpski – Schwarz và kỹ thuật chọn điểm rơi | Trần Phương và Võ Quốc Bá Cẩn   |
| §3. Bất đẳng thức Holder và kỹ thuật chọn điểm rơi                          | Trần Phương và Võ Quốc Bá Cẩn   |
| §4. Bất đẳng thức Minkowski và kỹ thuật sử dụng                             | Trần Phương                     |
| §5. Bất đẳng thức Chebyshev và kỹ thuật sử dụng                             | Trần Phương                     |
| CHƯƠNG II. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CẠN ĐẠI                   |                                 |
| §6. Bất đẳng thức hoán vị và kỹ thuật sử dụng                               | Trần Phương                     |
| §7. Bất đẳng thức Schur và kỹ thuật sử dụng                                 | Trần Phương và Lê Trung Kiên    |
| §8. Định lý Muirhead và bất đẳng thức đối xứng                              | Trần Phương và Hoàng Trọng Hiền |
| CHƯƠNG III. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH                  |                                 |
| §9. Định lý Fermat và ứng dụng trong bất đẳng thức                          | Trần Phương                     |
| §10. Định lý Lagrange và các ứng dụng trong bất đẳng thức                   | Trần Phương                     |
| §11. Bất đẳng thức Bernoulli và các ứng dụng                                | Trần Phương                     |
| §12. Bất đẳng thức Jensen và kỹ thuật sử dụng                               | Trần Phương                     |
| §13. Bất đẳng thức Karamata và kỹ thuật sử dụng                             | Trần Phương                     |
| §14. Bất đẳng thức với các hàm số lồi bên phải và lõm bên trái              | Vasile Cirtoaje                 |
| §15. Bất đẳng thức Popoviciu                                                | Vasile Cirtoaje                 |
| §16. Bất đẳng thức trong tích phân Riman                                    | Trần Phương                     |

| CHƯƠNG IV. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI |                                     |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| §17. Phương pháp phân tích tổng bình phương (SOS)          | Trần Tuấn Anh<br>và Trần Phương     |
| §18. Phương pháp đơn biến (MV)                             | Phan Thành Việt và<br>Lê Trung Kiên |
| §19. Phương pháp ABC                                       | Nguyễn Anh Cường                    |
| §20. Phương pháp hình học hóa đại số (GLA)                 | Bùi Việt Anh                        |
| §21. Phương pháp EV                                        | Vasile Cirtoaje                     |
| §22. Phương pháp chia để trị (DAC)                         | Phan Thành Việt                     |
| CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC                 |                                     |
| §23.1. Về một dãy bất đẳng thức bậc ba và ứng dụng         | Cao Minh Quang                      |
| §23.2. Đối biến số để sáng tạo và chứng minh bất đẳng thức | Phan Thành Việt                     |
| §23.3. Phương pháp đánh giá hàm số tại biên                | Trần Phương<br>Phạm Văn Thuận       |
| §23.4. Phương pháp tiếp tuyến chứng minh bất đẳng thức     | Lê Phi Hùng                         |
| §23.5. Phương pháp hệ số bất định                          | Võ Quốc Bá Cẩn                      |
| §23.6. Các phép biến đổi theo các độ dài trong tam giác    | Trần Phương                         |
| §23.7. Đánh giá các hệ số của đa thức bằng định lý Viète   | Trần Phương                         |
| §23.8. Bất đẳng thức không thuần nhất                      | Nguyễn Quốc Hưng Nguyên             |
| §23.9. Phương pháp SS                                      | Bạch Ngọc Thành Công                |
| §23.10. Các tổng đối xứng và bất đẳng thức hoán vị         | Bạch Ngọc Thành Công                |
| §24.1. Các bài toán có nhiều lời giải                      | Trần Phương                         |
| §24.2. Về một bất đẳng thức thi toán quốc tế               | Trần Phương                         |
| §24.3. Câu chuyện về bất đẳng thức Nesbitt - Shapiro       | Trần Phương                         |
| §24.4. Bất đẳng thức Jack Garfunkel và một số mở rộng      | Lê Hữu Điền Khuê                    |
| §24.5. Các bất đẳng thức có lời giải hay                   | Trần Phương                         |
| CHƯƠNG VI. TỔNG KẾT                                        | Trần Phương                         |

## II. THỐNG KÊ TÊN TÁC GIẢ CÁC BÀI TOÁN THAM KHẢO

(không thống kê các bài toán của tác giả Trần Phương)

*Chú thích kí hiệu các bài toán:* 21.9: Bài toán 9 của §21; 7.2.17: Bài toán 17 của §7.2;  
1.II.3: Bài toán 3 của mục II §1; 1.2.III.4: Bài toán 4 của mục III §1.2

### CHƯƠNG I. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CỎ ĐIỀN

**Dương Đức Lâm:** 1.V.8, 1.V.9, 1.VI.7, 1.VI.8, 1.VII.12, 1.VIII.7, 1.XI.10, 1.XII.9, 1.XV.4, 1.XVI.22, 1.XVI.24, 1.XVI.27, 1.XVI.32, 1.XVI.34, 1.XVI.36, 1.XVI.38, 1.XVI.42, 1.XVI.46, 1.XVI.52, 1.XVI.53, 1.XVI.54, 1.XVI.56, 1.XVI.59, 1.XVI.61, 1.XVI.65, 2.2.4, 2.3.I.6, 2.3.I.9, 2.3.III.15, 2.3.III.16, 2.3.III.23, 2.3.III.25, 2.IV.36, 2.IV.38, 2.IV.40, 2.IV.41, 2.IV.44, 2.IV.45, 2.IV.50; 3.2.I.13, 3.2.IV.9, 3.2.IV.11, 3.2.IV.14, 3.2.IV.15, 3.2.IV.17, 3.2.IV.19, 3.2.IV.23, 3.2.IV.30; 5.I.16.

**Trần Quốc Luật:** 1.VI.7, 1.VI.9, 1.VI.11, 1.X.3, 1.X.14, 1.XVI.40, 1.XVI.41, 3.2.IV.16.

**Võ Quốc Bá Cẩn:** 1.XVI.25, 2.2.16, 2.3.III.2, 2.3.III.5, 2.3.III.6, 2.3.III.20, 2.IV.32, 2.IV.39, 3.2.II.9, 3.2.IV.18,

**Phạm Kim Hùng:** 1.VII.14, 1.XI.7; 2.2.7, 2.3.III.8, 2.IV.47; 3.2.I.11; 3.2.II.6, 5.I.17,

**Vasile Cirtoaje:** 1.VIII.9, 1.IX.10, 1.XVI.30, 1.XVI.48; 2.2.8, 2.2.19, 2.IV.48; 3.2.II.2, 3.2.IV.25; 5.I.9, 5.I.19, 5.I.22.

**Darij Grinberg:** 1.IV.6, 1.IX.5; 2.2.13, 2.3.III.24, 2.3.III.26, 5.I.20.

**Michael Rozenberg:** 2.IV.46; 3.2.IV.20, 3.2.IV.21.

**Phan Thành Nam:** 1.XV.7, 1.XVI.23; 2.2.15, 2.3.III.9.

**Phan Thành Việt:** 1.XII.13; 3.2.II.1, 3.2.II.4, **Trần Tuấn Anh:** 1.I.11, 1.V.2, 1.XII.12.

**Trần Nam Dũng:** 1.IX.4, 1.XVI.26.; **Phạm Hữu Đức:** 1.XV.3; 2.2.17, 2.3.III.18

**Phạm Văn Thuận:** 1.XV.8, 1.XVI.33.; **Mircea Lascu:** 1.VI.4; **Lê Trung Kiên:** 1.IX.9

**Phạm Thành Tín:** 1.X.9; **Gabriel Dospinescu:** 1.XVI.43.; **Nayel:** 1.XVI.60.

**Bạch Ngọc Thành Công:** 1.XVI.57 ; **Samin Riasa:** 2.2.18 ; **Jack Garfunkel:** 2.3.III.1

**Nguyễn Việt Anh:** 2.3.III.4; **Nguyễn Anh Tuấn:** 2.3.III.17; **Vũ Đình Quý:** 2.3.III.21,

**Nguyễn Văn Thạch:** 2.IV.37; 3.2.IV.29 ; **Harazi:** 2.IV.42 ; **Fedor Petrov:** 2.IV.43.

**Sung Yoon Kim:** 2.IV.49 ; **Hojoo Lee:** 3.2.I.12 ; **Alexey Gladkich:** 3.2.I.15.

**Tripleth:** 3.2.II.3 ; **Parkdoosung:** 3.2.II.5 ; **Lê Hữu Điền Khuê:** 3.2.II.8



**CHƯƠNG II. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CẶN ĐẠI**

**Vasile Cirtoaje:** 7.2.2, 7.2.10, 7.2.11, 7.2.12, 7.2.20, 7.2.21, 7.3.III.4, 7.3.III.18, 7.3.IV.35, 7.3.IV.37, 7.3.IV.39.

**Dương Đức Lâm:** 7.2.17, 7.3.III.3, 7.3.III.6, 7.3.IV.23, 7.3.IV.26, 7.3.IV.28, 7.3.IV.30.

**Phạm Kim Hùng:** 7.2.13, 7.3.III.5, 7.3.III.6, 7.3.III.9, 7.3.IV.24, 7.3.IV.25.

**Phạm Hữu Đức:** 7.2.5, 7.2.15, 7.3.III.17, 7.3.IV.23.

**Võ Quốc Bá Cẩn:** 7.2.6, 7.2.14, 7.2.19, 7.3.III.8.

**Nguyễn Thúc Vũ Hoàng:** 7.3.III.2, 7.3.III.7, 7.3.III.11.

**Phạm Sinh Tân:** 7.3.III.10, 7.3.III.15, 7.3.III.19.

**Ji Chen:** 7.2.4 ; **Walther Janous:** 7.2.7 ; **Hojoo Lee:** 7.2.8, 7.2.9.

**Nguyễn Anh Tuấn:** 7.3.III.16 ; **Darij Grinberg:** 7.3.IV.27.

**CHƯƠNG III. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH**

**Vasile Cirtoaje:** 14.2.1, 14.2.2, 14.2.3, 14.2.4, 14.2.5, 14.2.10, 14.2.12, 14.2.14, 14.2.16, 14.2.19, 14.2.21, 14.2.26, 14.2.28, 14.2.31, 15.5, 15.9.

**Jack Garfunkel:** 9.2.VI.5 ; **Trần Nam Dũng:** 10.2.VI.2;

**Phạm Kim Hùng:** 10.2.VII.9, 14.2.29.

**Marian Tetiva:** 14.2.27 ; **Bín Zhao:** 15.2; **Gabriel Dospinescu:** 15.7.

**CHƯƠNG IV. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI**

**Hojoo Lee:** 17.III.3, 17.III.23, 18.4.2, 19.III.4, 20.V.26,

**Phạm Kim Hùng:** 17.III.5, 17.III.6, 17.IV.5, 17.IV.25; 18.3.3, 18.4.6, 18.5.7, 18.7.4, 18.11.2, 18.XIII.6, 18.XIII.20, 18.XIII.29, 18.XIII.30, 18.XIII.42, 19.V.9, 20.V.13, 20.VII.4.5, 20.VII.4.10, 20.VII.4.19, 20.VIII.4, 20.VIII.6, 20.VIII.11, 21.11, 21.12, 21.34, 22.IV.1, 22.V.4, 22.VI.1, 22.VIII.8,

**Vasile Cirtoaje:** 17.III.9, 17.III.15, 17.III.16, 17.III.20, 17.III.24, 17.IV.14; 18.2.4, 18.XIII.12, 18.XIII.15, 19.II.15, 19.III.1, 19.III.19, 19.IV.6, 19.IV.7, 19.IV.9, 19.IV.10, 19.IV.6, 19.IV.8, 19.IV.9, 19.IV.13, 19.V.6, 19.V.12, 19.V.13, 19.V.14, 19.VI.9, 20.VII.4, 20.VII.4.3, 20.VII.4.7, 20.VII.4.13, 20.VIII.9, 20.VIII.10; 21.1, 21.3, 21.6, 21.9, 21.10, 21.11, 21.14, 21.15, 21.17, 21.18, 21.20, 21.21, 21.23, 21.24, 21.25, 21.26, 21.27, 21.28, 21.29, 21.31, 21.33, 21.34,

**Võ Quốc Bá Cẩn:**

17.III.12, 18.2.9, 18.XIII.34, 18.XIII.35, 19.III.7, 19.III.8, 19.VI.18, 19.VI.29,



- Nguyễn Văn Thạch:** 17.III.13, 17.III.14, 19.VI.18; **Trần Quốc Luật:** 17.IV.12,
- Dương Đức Lâm:** 17.III.17, 17.IV.3, 17.IV.4, 17.IV.5, 17.IV.8, 17.IV.9, 17.IV.13, 17.IV.15, 17.IV.17, 17.IV.18, 17.IV.22, 17.IV.23, 17.IV.24; 18.XIII.25, 18.XIII.26, 18.XIII.31, 18.XIII.32, 18.XIII.37, 18.XIII.48, 18.XIII.49, 19.II.10, 19.IV.11, 19.IV.12, 19.IV.13, 19.VI.19, 19.VI.25, 19.VI.27, 19.VI.28, 19.VI.30, 20.V.31, 20.VIII.5,
- Lê Trung Kiên:** 17.III.22, 18.2.9, 18.4.3, 18.7.1, 18.7.2, 18.10.5, 18.10.8, 18.10.12, 18.10.13, 18.10.14, 18.XIII.16, 18.XIII.18, 18.XIII.22, 18.XIII.33.
- Phạm Hữu Đức:** 17.III.21, 17.IV.20, 17.IV.21; **DarijGrinberg:** 17.IV.2, 19.II.9, 20.VII.4.9
- Michael Rozenberg:** 17.IV.16, 21.16; **Trần Nam Dũng:** 18.2.7, 19.IV.5, 21.32, 22.V.3,
- Nguyễn Anh Cường:** 17.IV.19; 19.II.1, 19.II.4, 19.II.6, 19.II.13, 19.II.16, 19.II.17, 19.III.17, 19.IV.2, 19.V.1, 19.V.2, 19.V.3, 19.V.8, 19.VI.5, 19.VI.7, 19.VI.8, 19.VI.13, 19.VI.16, 19.VI.17, 19.VI.20, 19.VI.21, 19.VI.23, 19.VI.24, 20.VI.9, 22.V.2,
- Phan Thành Nam:** 18.2.5, 18.2.6, 18.4.5, 18.5.3, 18.6.5, 18.11.1, 18.12.4, 18.13.1, 18.XIII.13, 18.XIII.41, 18.XIII.44, 18.XIII.45; 21.5, 22.V.3, 22.VIII.2,
- Phan Thành Việt:** 18.3.4, 18.12.3, 18.XIII.17, 18.XIII.38, 18.XIII.52, 18.XIII.55, 18.XIII.56, 18.XIII.58, 22.IV.2, 22.IV.3, 22.VI.2, 22.VI.4, 22.VIII.1, 22.VIII.3, 22.VIII.4, 22.VIII.6, 22.VIII.7, 22.VIII.9, 22.VIII.10,
- Bùi Việt Anh:** 19.III.5; 20.V.10, 20.V.11, 20.V.12, 20.V.13, 20.V.14, 20.V.15, 20.V.16, 20.V.17, 20.V.18, 20.V.19, 20.V.20, 20.V.21, 20.V.22, 20.V.23, 20.V.24, 20.V.27, 20.V.28, 20.V.29, 20.V.30, 20.V.31, 20.V.32, 20.V.33, 20.VI.6, 20.VI.7, 20.VI.8, 20.VII.3, 20.VIII.7,
- Jackgarfukel:** 18.4.4, 18.XIII.39, 18.XIII.40; **Nguyễn Minh Đức:** 18.5.1.
- Đào Hải Long:** 18.10.1; **Đinh Ngọc An:** 18.12.2; **Murray Klamkin:** 18.XIII.7.
- Trần Hồ Thanh Phú:** 18.XIII.57; **Mircea Lascu:** 19.2.11, 20.VII.4.2.
- Nguyễn Việt Anh:** 19.III.19; **Phạm Sinh Tân:** 19.III.20; **Nguyễn Anh Tuấn:** 19.III.22.
- Gabriel Dospinescu:** 19.V.7, 21.19; **Bodan:** 19.VI.1; **Vũ Đình Quý:** 19.VI.10, 20.V.4,
- Nguyễn Duy Khánh:** 20.V.8, 20.V.9; **W.I.Gridasov:** 20.VI.1; **Marian Tetiva:** 20.VII.4.2.
- Faruk Zejnulahi:** 20.VII.4.8; **Walther Janous:** 20.VII.4.18, 20.VIII.9, 21.14,
- Janos Suranyi:** 21.22; **Nguyễn Trường Thọ:** 22.V.1,
- "Cậu bé quà khăn đỏ": 22.VI.3, 22.VIII.5.
- CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC.**
- Nguyễn Thúc Vũ Hoàng:** 23.5.I.1, 23.5.I.4, 23.5.IV.2,

## DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [www.mathlinks.ro](http://www.mathlinks.ro)                      [www.kalva.demon.co.uk](http://www.kalva.demon.co.uk)
- [www.diendantoanhoc.net](http://www.diendantoanhoc.net)              [www.mathnfriend.org](http://www.mathnfriend.org)
- C.H. Hardy, J.E. Littlewood, G.Polya – Inequalities, Cambridge University press (1952)
- D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink – Classic and New Inequalities in Analysis, Kluwer academic publishers.
- Titu Andresscu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinesu, Micea Lascu  
Old and New Inequality, Gil publishing house
- Vasile Cirtoaje – Algebraic inequalities, Gil publishing house 2006
- Titu Andresscu, ZumingFeng – Mathematical Olympiads 1998 – 2002  
Problem and Giải from Around the world.
- Titu Andresscu and Rawzvan Gelca – Putnam and Beyond, Springer (2007)
- J. Michael Steele – The Cauchy-Schwarz Master Class, Mathematical association of America, Cambridge University press (2004)
- Thomas J. Mildorf – Olympiad Inequalities (2006)
- IMO Shortlist, 1990 – 2007
- Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil – The William Lowell Putnam  
Mathematical Competition 1985 – 2000: Problems, Giảis and Commentary.
- Crux Mathematicorum & Mathematical Mayhem (Canada, 1995–2005)
- Kvant Magazine (Russia, 1990 – 2002)
- Gazeta Matematica (Romania, 1996 – 2004)
- Komal Mathematical Magazine (Hungary, 1996 – 2000)
- Mathematical Refletions (4/2006)
- Hojoo Lee – Topics in Inequalities (2005)
- Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (Việt Nam, 1990 – 2008)
- Tuyển tập các bài toán Olympic 30 - 4 (1999 – 2005)
- Phan Huy Khải – 500 Bài toán bất đẳng thức – Nhà xuất bản Hà Nội 1994
- Nguyễn Văn Mậu – Bất đẳng thức, định lý và áp dụng, Nhà xuất bản Giáo dục 2006
- Phạm Kim Hùng – Sáng tạo bất đẳng thức, Nhà xuất bản Tri thức 2006
- Phạm Văn Thuận – Bất đẳng thức suy luận và khám phá, Nhà xuất bản ĐH QGHN 2007

Cuối cùng là một bài hát của Tác giả dành tặng cho bạn đọc. Đây là một trong sáu bài hát của tác giả được sáng tác theo nguyên lý tổ hợp trong âm nhạc và được VTV phát sóng trong một số sự kiện lớn. Bài hát được sáng tác ngày 29/7/2007 để chào mừng IMO 48 diễn ra thành công tốt đẹp. Bài hát được tổng duyệt lúc 11h00 ngày 30/7/2007 và được BTC chọn làm bài hát chính thức trong lễ bế mạc IMO 48. Ngay sau đó bài hát đã được vang lên vào khoảnh khắc cuối cùng lúc 18h20 trong lễ bế mạc IMO 48 được VTV1 truyền hình trực tiếp tại TT Hội nghị Quốc gia.

## FLAME OF IMO

Music : TRẦN PHƯƠNG

Word: Trương Diệu Linh

Ballad (♩ = 66)

Side - by - side we're com - ing      All for Vic - to - ry  
 Bạn bè năm châu tới đây.      Bao khát khao thi tài,

Let's light up with str - ong be - lief in win      O -  
 cùng thấp sáng lên rực cháy trong tim niềm tin.      Mở

pen up our hearts      In the love for Maths      And  
 rộng vòng tay bốn phương.      Trong tình yêu toán học      cùng

hand in hand b - right - ly shine      I M O  
 nắm tay nhau chờ đón vinh quang      I M O

I M O holds us to - gether to make us al - ways shine  
 I M O kết nối chúng ta, để chúng ta luôn tỏa sáng

I M O holds na - tions - together to make a bet - ter world  
 I M O kết nối năm châu, để khắp năm châu rạng ngời

I M O lights up      thous - ands of ta - lents  
 I M O in flames      of the human know - ledge  
 I M O thấp sáng      bao tài năng tri thức  
 I M O sáng mãi      nơi đỉnh cao tri thức.

1.  
 Though the way a - head we'll try the best to come  
 gi - vâng us a dream and will  
 con đường đi phía trước, Dù còn lắm chông gai vượt qua  
 Chấn trời xa mơ ước. Và còn

2.  
 be still      in our heart  
 mãi trong ta.      I M O



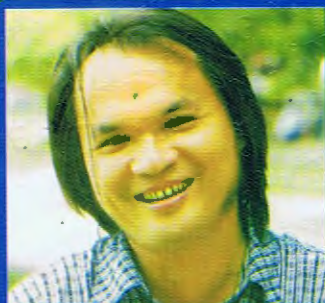


NS. **HỒNG ÂN**

[www.nhasachhongan.com.vn](http://www.nhasachhongan.com.vn)

Email: [baolongco\\_ha@vnn.vn](mailto:baolongco_ha@vnn.vn)

Diễm đến cửa tri thức



**Tran Phuong** - Dob October, 17<sup>th</sup> 1966 - Pob: Haiphong, Vietnam

Director of Center for Research and Support Development of Intellectual Product (Censip) by the Vietnam Union of Science and Technology Associations

Email: [tranphuong.math@yahoo.com](mailto:tranphuong.math@yahoo.com)

Vietnam Quintessence 2007 award for the proposal of the book **"Diamonds in Mathematical Inequalities"** as the product of excellence of the Vietnam - WTO Trade Fair 2007.

Vietnam Quintessence 2008 award for the gameshow **"Vietnamese Infant Prodigy"** as the service of excellence of the Vietnam - WTO Trade Fair 2008.

### CURRICULUM VITAE

**Tran Phuong** has experienced professional education and training of mathematics. Being one of the most talented students of Mathematics Gifted High School, the Hanoi University of Sciences, he continued his higher education of mathematics in Hanoi University of Education, the leading university for training mathematics professionals in Vietnam.

During the 10 years from 1990 to 2000, thousands of students attended his classes on mathematics. In order to further socialize mathematics knowledge, Tran Phuong has spent much time and efforts to write mathematics books for high school readership, especially on inequalities. His first book published in 1993 was a comprehensive work on mathematical inequalities. Thereafter, he has completed a total of 10 books, all of which were introduced by reputable publishers in Vietnam and became the bestsellers among mathematics references for secondary students.

With the passion for helping young Vietnamese talents to absorb advanced knowledge in the world as well as to be successful in their future career, he has opened a model of supporting and educating high potential youths. Recently, the initial phase has been succeeded by the five sixthgrade pupils to properly overcome university entrance math exam after only 150 hours training ([www.tienphongonline.com.vn](http://www.tienphongonline.com.vn))

Also, he is the author of an intellectual game show "Vietnamese Infant Prodigy" broadcasted on Vietnamese Television.

### AUTHORS PUBLICATIONS IN VIETNAM

- (1) Techniques in Proving Inequalities - Ho Chi Minh City Publish House - 1993.
- (2) New Methods in Solving Math Problems in Vietnamese University Entrance Examinations, Educational Publish House - 1995.
- (3) Classification in Topics of Math Problems in Vietnamese University Entrance Examinations - Ho Chi Minh City Publishing House - 1998.
- (4) Solutions for Math Problems in Vietnamese University Entrance Examinations 2000, Hanoi Publishing house - 2000.
- (5) Math problems in Vietnamese University Entrance Examinations in Three Decades (1970 - 2000), Publishing House of National University Ho Chi Minh City - 2000.
- (6) Collections of Problems of Functions, Hanoi Publish House - 2001.
- (7) Excellent Problems of Trigonometric Relations, Hanoi Publishing House - 2002.
- (8) Excellent Problems of Trigonometric equations, Hanoi Publishing House - 2003.
- (9) Common Mistakes and Creations when Solving Math Problems, Hanoi Publishing House - 2004.
- (10) Collections of topics, Methods, Problems of Integral, Knowledge Publishing House - 2006.

**Nhà sách HỒNG ÂN**

- 18D Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM

ĐT: 8246706 - 08083021 - 9107095 ♦ Fax: 08083017

**Nhà sách TIẾN THỌ**

- 828 Đường Láng - Hà Nội - ĐT: (04) 5575385

- 29 Phan Bội Châu - Hải Phòng - ĐT: 0313.839599

- 259 Lê Duẩn - TP. Vinh - ĐT: 0383.554777



**Giá: 300.000đ**