

TRẦN PHƯƠNG

Cộng tác viên: Trần Tuấn Anh
Nguyễn Anh Cường; Bùi Việt Anh

NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG
TRONG BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

MỤC LỤC

CHƯƠNG I: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN	11
§1. Bất đẳng thức AM – GM và các kỹ thuật chọn điểm rơi	12
§1.1. Bất đẳng thức AM – GM	17
§1.2. Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức AM – GM	20
§2. Bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz và kỹ thuật chọn điểm rơi	123
§2.1. Bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz	123
§2.2. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz	126
§3. Bất đẳng thức Holder và kỹ thuật chọn điểm rơi	173
§3.1. Bất đẳng thức Holder	173
§3.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Holder	176
§4. Bất đẳng thức Minkowski và kỹ thuật sử dụng	193
§4.1. Bất đẳng thức Minkowski	193
§4.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Minkowski	196
§5. Bất đẳng thức Chebyshev và kỹ thuật sử dụng	201
§5.1. Bất đẳng thức Chebyshev	201
§5.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Chebyshev	203
CHƯƠNG II: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CẠN ĐẠ	223
§6. Bất đẳng thức hoán vị và kỹ thuật sử dụng	225
§6.1. Giới thiệu về bất đẳng thức hoán vị	225
§6.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức hoán vị	229
§7. Bất đẳng thức Schur và kỹ thuật sử dụng	249
§7.1. Giới thiệu về bất đẳng thức Schur	249
§7.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Schur	254
§7.3. Ứng dụng bất đẳng thức Schur trong chứng minh bất đẳng thức đối xứng ba biến	265
§8. Định lý Muirhead và bất đẳng thức đối xứng	279
§8.1. Giới thiệu định lý Muirhead	279
§8.2. Kỹ thuật sử dụng định lý Muirhead	288
CHƯƠNG III: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG GIẢI TÍCH	307
§9. Định lý Fermat và ứng dụng trong bất đẳng thức	309
§9.1. Giới thiệu định lý Fermat	309
§9.2. Ứng dụng định lý Fermat	311
§10. Định lý Lagrange và các ứng dụng trong bất đẳng thức	339
§10.1. Định lý Lagrange cho hàm một biến và các ứng dụng	339
§10.2. Cực trị của hàm nhiều biến và phương pháp nhân tử Lagrange	347
§10.2.1. Cực trị không có điều kiện ràng buộc	347
§10.2.2. Cực trị có điều kiện ràng buộc	352
§11. Bất đẳng thức Bernoulli và các ứng dụng	373
§11.1. Giới thiệu về bất đẳng thức Bernoulli	373

§11.2. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Bernoulli	374
§12. Bất đẳng thức Jensen và kỹ thuật sử dụng	393
§12.1. Hàm lồi, hàm lõm và bất đẳng thức Jensen	393
§12.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Jensen	399
§13. Bất đẳng thức Karamata và kỹ thuật sử dụng	411
§13.1. Giới thiệu về bất đẳng thức Karamata	411
§13.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Karamata	418
§14. Bất đẳng thức với các hàm số lồi bên phải và lõm bên trái	425
§14.1. Các định lý về hàm số lồi bên phải và lõm bên trái	425
§14.2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức RCF, LCF, LCRCF	430
§15. Bất đẳng thức Popoviciu	457
§16. Bất đẳng thức trong tích phân Riman	465
CHƯƠNG IV: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI	513
§17. Phương pháp phân tích tổng bình phương (SOS)	515
§18. Phương pháp dồn biến (MV)	549
§19. Phương pháp ABC	627
§20. Phương pháp hình học hóa đại số (GLA)	681
§21. Phương pháp EV	735
§22. Phương pháp chia để trị (DAC)	771
CHƯƠNG V: MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC	805
§23. Những bài viết chọn lọc về bất đẳng thức	805
§23.1 Về một dãy bất đẳng thức bậc ba và ứng dụng	805
§23.2 Đối biến số để sáng tạo và chứng minh bất đẳng thức	809
§23.3 Phương pháp đánh giá hàm số tại biên	817
§23.4 Phương pháp tiếp tuyến chứng minh bất đẳng thức	829
§23.5 Phương pháp hệ số bất định	833
§23.6 Các phép đối biến thuận nghịch theo các độ dài trong tam giác	879
§23.7 Phương pháp đánh giá các hệ số của đa thức bằng định lý Viète	891
§23.8 Bất đẳng thức không thuần nhất	905
§23.9 Phương pháp SS	915
§23.10 Các tổng đối xứng và bất đẳng thức hoán vị	933
§24. Những bất đẳng thức chọn lọc	949
§24.1 Các bài toán có nhiều lời giải	949
§24.2 Về một bất đẳng thức thi toán quốc tế.	977
§24.3 Câu chuyện về bất đẳng thức Nesbitt - Shapiro	987
§24.4 Bất đẳng thức Jack Garfunkel và một số mở rộng	1015
§24.5 Các bất đẳng thức có lời giải hay	1027
CHƯƠNG VI: TỔNG KẾT	1055
§25.1 Tóm tắt những viên kim cương và các bất đẳng thức cơ bản	1055
§25.2 Các bất đẳng thức chọn lọc dành cho bạn đọc	1089
§25.3 Nhìn lại và mở ra	1099
PHỤ LỤC: Thống kê bài viết, bài toán sử dụng và tài liệu tham khảo	1114

LỜI NÓI ĐẦU

Tiền bạc ư?

rồi sẽ hết.

Sắc đẹp ư?

rồi sẽ pha ...

Chỉ có:

Tri thức đi vào khối óc.

Tình cảm đi vào con tim.

Sẽ còn

sống mãi với thời gian.

(Trần Phương – 1990)

Từ những phép so sánh trong cuộc sống

Thế giới vật chất và tinh thần trong vũ trụ luôn vận động và biến đổi không ngừng tạo nên các sự vật, hiện tượng khác nhau. Chúng ta có thể thấy rõ sự khác nhau đó bằng các hình ảnh đối lập: to – nhỏ; rộng – hẹp; dài – ngắn; cao – thấp; nhiều – ít; giàu – nghèo; đẹp – xấu; ... Rộng ra là sự khác biệt của Phật giáo, Hồi giáo và Thiên chúa giáo; sự khác nhau giữa các nền văn hoá Đông – Tây và các tư tưởng triết học chủ đạo trên thế giới.

Cuộc sống của mỗi người liên tục là sự tìm kiếm và khẳng định giá trị bản thân. Mỗi vật có chỗ đứng trong thế giới luôn thay đổi này là nhờ giá trị của nó nhưng người ta thường không nhận ra rằng mọi vật chỉ có thể nhận giá trị trong quan hệ so sánh. Chính quan hệ đó đã tạo ra các bất đẳng thức của cuộc sống.

Thực tế là dù câu nói “mọi so sánh đều khập khiễng” có đúng dẫn đến mức nào, con người vẫn không thể ngừng đánh giá – so sánh. Một kilogam nhân sâm Hàn Quốc về mặt khối lượng nhỏ hơn 1000 lần so với 1 tấn thóc nhưng nếu xét về mặt trị giá thì lại gấp hơn 10 lần. Một tổng thống và một vận động viên đua xe, ai hơn ai? Bạn sẽ cười mà nói với tôi rằng tổng thống đương nhiên hơn một vận động viên đua xe, nhưng đó chỉ là xét về tầm quan trọng đối với công việc quốc gia. Còn nếu xét về thu nhập hàng năm, 300.000 USD/năm của tổng thống Mỹ Bush chỉ bằng một phần hai trăm lần so với tay đua xe công thức 1 nổi tiếng thế giới Michael Schumacher với thu nhập khoảng 60.000.000 USD/năm. Vậy là khi so sánh, muốn hay không, người ta cần xác định những nhân tố tham gia vào so sánh, lượng hoá các phẩm chất và quy về một đơn vị.

Để phát triển tư duy so sánh đánh giá trong cuộc sống, ngay từ nhỏ chúng ta đã được giới thiệu về bất đẳng thức toán học. Học sinh mẫu giáo phải so sánh 1 với 2 để được một bất đẳng thức $1 < 2$. Học sinh cuối cấp tiểu học bắt đầu phải thực hiện những so sánh khó hơn như so sánh hai phân số $\frac{135}{143}$ và $\frac{189}{197}$. Có em quy đồng mẫu số để so sánh hai phân số rất cồng kềnh

Quy đồng : $\frac{135}{143} = \frac{135 \times 197}{143 \times 197} = \frac{26595}{28171}$, $\frac{189}{197} = \frac{189 \times 143}{197 \times 143} = \frac{27027}{28171}$ mà $\frac{26595}{28171} < \frac{27027}{28171}$ nên $\frac{135}{143} < \frac{189}{197}$
--

nhưng có em lại dùng phương pháp phân bù quy về so sánh phân số cùng tử số:

So sánh phân bù của phân số: Ta có $\frac{135}{143} + \frac{8}{143} = 1 = \frac{8}{197} + \frac{189}{197}$ mà $\frac{8}{143} > \frac{8}{197}$ nên $\frac{135}{143} < \frac{189}{197}$
--

Các bài toán so sánh đặt ra về sau ngày càng khó hơn với sự mở rộng của các phép toán. Tất cả các nhà toán học đều có chung một quan điểm là *"Các kết quả cơ bản của toán học thường được biểu thị bằng những bất đẳng thức chứ không phải bằng những đẳng thức"*. Điều đó cũng giống như trong cuộc sống người ta luôn gặp sự khác nhau giữa các sự vật hiện tượng và ngay trong bản thân mỗi sự vật hiện tượng cũng biến đổi theo từng giây phút. Thật thế, nếu sau mỗi giây mà chúng ta đều không thay đổi thì theo nguyên lý quy nạp sau 50 năm chúng ta cũng không thể bị già đi. Mặt khác trong đời sống xã hội chúng ta luôn sử dụng tư duy bất đẳng thức để đánh giá hoạt động của doanh nghiệp, hoạt động xuất nhập khẩu, thị trường chứng khoán, tài chính, ngân hàng,... Vì thế, để phát triển tư duy và đánh giá tốt các sự biến đổi trong cuộc sống thì cần phải có tư duy tốt về bất đẳng thức toán học. Nói những lời làm quên đầu tiên như vậy, tác giả muốn bạn đọc coi vấn đề bộ sách trình bày như một điều thật gần gũi và thân thiện.

Đến

1. Một bộ sách trọn vẹn và sâu sắc về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức được ví như là những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học

Bộ sách là một hệ thống phân loại các phương pháp chứng minh bất đẳng thức đầy đủ và tỉ mỉ nhất: Gồm 5 chương với 25 chuyên đề. Bốn chương đầu tiên giới thiệu các viên kim cương theo trình tự thời gian và đặc điểm: Những viên kim cương của bất đẳng thức cổ điển; Những viên kim cương của bất đẳng thức cận đại; Những viên kim cương trong bất đẳng thức giải tích; Những viên kim cương của bất đẳng thức hiện đại, chương cuối là một số sáng tạo về bất đẳng thức. Trong mỗi chuyên đề đều có phần dẫn, bài tập mẫu minh họa, bài tập tự giải với tổng lượng các bài toán lên đến **2000 bài**. Công phu nhất có thể kể đến phần trích giới thiệu **15 kỹ thuật** sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** (trên tổng số **30 kỹ thuật**), những sáng tạo và các kinh nghiệm của các tác giả chưa xuất hiện tại bất cứ một cuốn sách nào khác.

Theo dõi bộ sách ta có thể nhận thấy sự sắp xếp thứ tự giữa các chương và các chuyên đề trong chương rất biện chứng. Chương I, chương II, chương IV được sắp xếp theo trình tự thời gian. Riêng chương III tác giả không đặt tên theo thời gian mà đặt tên theo đặc điểm: "Những viên kim cương trong bất đẳng thức giải tích" bởi vì các viên kim cương có mặt trong chương ở cả 3 trạng thái thời gian: Cổ điển, cận đại và hiện đại. Chương V gồm 3 chuyên đề: Chuyên đề mở đầu là các bài viết nhỏ về bất đẳng thức, tiếp theo là các bất đẳng thức chọn lọc có lời giải tổng hợp của nhiều phương pháp, cuối cùng là các bài toán thách thức.

Khi trình bày các vấn đề, dù cũ hay mới, người viết luôn cố gửi vào các trang sách những nét tươi mới. Mặt khác, mặc dù có dung lượng rất lớn, nhưng sự khúc chiết vẫn được đảm bảo. Và vì thế, cả bộ sách giống như một chuyến viễn chinh thế giới bất đẳng thức rất dài và đầy thú vị.

2. Một công trình thực nghiệm về phương pháp học tập toán học

Khi trình bày một khối lượng lớn các kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức, người viết ý thức được rằng cần phải đảm bảo cho người đọc nắm bắt được tinh thần chung của từng chương, từng chuyên đề và từng kỹ thuật. Mở đầu mỗi chương là lời dẫn lý thú cho các chuyên đề và khép lại là phần nhìn nhận đánh giá, so sánh và làm rõ mối liên hệ giữa những vấn đề đã được trình bày.

Phần mở đầu mỗi chuyên đề là sự mô tả rất chi tiết về "*viên kim cương*" có trong chuyên đề, sau đó là các bài tập mẫu minh họa và cuối cùng là các bài tập dành cho bạn đọc tự giải. Khi trình bày chương I, tác giả muốn dành sự thiện cảm của bạn đọc trong một phạm vi rộng lớn nên cách viết luôn bám theo quy luật của nhận thức "*Từ đơn giản đến phức tạp*" và nhiều bài toán được trình bày theo cách tiếp cận tự nhiên "*Đi từ cái sai đến cái gần đúng, rồi mới đến cái đúng*". Cụ thể trong hai chuyên đề mở đầu về hai bất đẳng thức rất quen biết là AM – GM và bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz, tác giả đã đưa đến một phong cách viết mới về các bất đẳng thức này với kỹ thuật "chọn điểm rơi". Đi kèm với kỹ thuật "chọn điểm rơi" là các bài toán minh họa theo sơ đồ nhận thức: "*Sai lầm thường gặp – Nguyên nhân sai lầm – Phân tích và tìm tòi lời giải*". Từ khái niệm "chọn điểm rơi" trong bất đẳng thức, chúng ta có thể lấy ý tưởng để làm phương pháp luận cho cách chọn điểm rơi trong cuộc sống. Đó chính là hướng dẫn cách nhìn sự việc kết thúc tại đâu để điều chỉnh biến đổi cuộc sống lúc xuất phát.

Không chỉ dừng lại ở việc đưa các bài tập, giới thiệu các kỹ thuật, người viết ý thức được việc phải tạo ra những điểm nhấn, từ cách đặt vấn đề, đến cách phân tích, tìm tòi hướng đi, khai thác và triển khai các ý tưởng một cách có bài bản, triệt để. Đây đều là những kỹ năng quan trọng đối với những người yêu thích học tập toán học cũng như làm nhiều công việc khác trong xã hội.

3. Một bộ sách dành cho nhiều đối tượng độc giả

Đó cũng là hệ quả tất yếu từ những phẩm chất vừa kể trên của bộ sách. Ngoài ra, các bài toán nêu ra trong bộ sách này còn được sắp xếp một cách sư phạm theo trình độ nâng dần từ thấp đến cao. Các bài toán mẫu minh họa bao gồm từ những bài rất cơ bản đến những bài toán khó. Các bài tập dành cho độc giả tự giải cũng trải trên một miền từ đơn giản đến phức tạp với biên độ rất rộng.

Người viết thực sự muốn hướng đến một diện rộng độc giả. Bộ sách này là dành cho học sinh khá cấp THCS, cho học sinh cấp PTTH đi thi học sinh giỏi Toán Quốc gia và Quốc tế, cho giáo viên

dạy toán các cấp, cho những nhà nghiên cứu về toán học phổ thông... Tác giả hi vọng một bộ sách như thế sẽ mang đến cho độc giả sự tự tin khi đọc sách, sẽ có thể khơi gợi ở những em học sinh mới tiếp xúc với Toán học một cách nghiêm túc ước mơ trở thành học sinh giỏi toán Quốc tế, thành nhà toán học và niềm tin vào khả năng hiện thực hoá ước mơ ấy.

4. Một bộ sách khẳng định trí tuệ sáng tạo

Nếu như việc giải toán là đi tìm cái tĩnh trong cái động thì sự sáng tạo khi vận dụng các phương pháp giải chính là phát huy cái động trong cái tĩnh. Hai mặt đối lập đã hoà vào làm một trong bộ sách này.

Bất đẳng thức là một lĩnh vực khó nhưng cái khó không nằm ở gánh nặng về lượng kiến thức mà ở yêu cầu về óc quan sát, linh cảm tinh tế và sức sáng tạo dồi dào của người giải. Một bộ sách tốt về bất đẳng thức phải đặt ra mục tiêu trở thành một miền đất nuôi dưỡng và thử thách trí tuệ sáng tạo của con người. Để làm điều đó, trước hết bản thân bộ sách phải thể hiện một sức tìm tòi sáng tạo.

Có thể nói ở bộ sách này, người đọc dễ hiểu, cảm nhận phương pháp trình bày nội dung và các “sáng tạo toán học” của tác giả và các cộng tác viên. Phần sáng tạo nổi trội được thể hiện trong chương IV: “Những viên kim cương trong bất đẳng thức hiện đại”. Đó là các “viên kim cương”: **S.O.S; MV; ABC; GLA; DAC**. Đây là những “viên kim cương” được sáng tạo bởi người Việt Nam và là những công cụ mạnh nhất để chứng minh bất đẳng thức sơ cấp. Ngoài ra cuốn sách còn đưa ra những góc nhìn mới về nhiều bài toán quen thuộc. Với bộ sách này, độc giả sẽ có nhiều cơ hội để khẳng định chính mình.

5. Một bộ sách thể hiện tinh thần hội nhập

Cuốn sách này được tác giả ấp ủ từ năm 1990 và được bắt tay viết từ năm 2001. Đến đầu năm 2005, bản thảo với tên gọi “**Tuyển tập các phương pháp và kỹ thuật chứng minh Bất đẳng thức Đại số**” dày 2222 trang được hoàn thành. Tuy nhiên với sự phát triển của Internet cùng với sự ra đời của các website toán học nổi tiếng trên thế giới đã làm tác giả thấy có nhiều thông tin trong bản thảo lạc hậu so với sự biến đổi chóng mặt thông tin có trên các website. Chính vì thế tác giả đã dũng cảm loại bỏ những kiến thức không phù hợp với tính chất chọn lọc của cuốn sách đồng thời mua bản quyền của các viên kim cương **MV; ABC; GLA; DAC** hoặc một phần, bản quyền **SOS** của các cộng tác viên như Trần Tuấn Anh, Nguyễn Anh Cường, Bùi Việt Anh, Phan Thành Việt cũng như một số kỹ thuật của các sinh viên Võ Quốc Bá Cẩn, Hoàng Trọng Hiền, Lê Hữu Điền Khuê... Những đóng góp này đã được tác giả biên tập cô đọng, súc tích và được trân trọng ghi nhận với chỉ dẫn phần đóng góp bản thảo có mặt trong sách đồng thời được trả thù lao trong các hợp đồng về bản quyền cao gấp nhiều lần so với các bản thảo thông thường.

Cuốn sách là một công trình tâm huyết của tác giả trong nhiều năm. Hi vọng lớn của tác giả là cuốn sách sẽ còn sống mãi với thời gian như một người bạn thân thiết của những người yêu toán học. Tất nhiên, quyền đánh giá cuốn sách vẫn thuộc về độc giả.

Hà nội, từ 1/1/2005 đến 1/1/2009

Trần Phương

DANH SÁCH CỘNG TÁC VIÊN

1. Trần Tuấn Anh

Nghiên cứu sinh toán học bậc Tiến sĩ Trường Đại học Công nghệ Georgia, Atlanta, USA.

2. Phạm Gia Vĩnh Anh

Nghiên cứu sinh toán học bậc Tiến sĩ Trường Đại học Berkeley, California, USA.
Huy chương vàng Toán Quốc tế lần thứ 43 tại Vương quốc Anh năm 2002.

3. Nguyễn Anh Cường

Sinh viên khoa Toán – Tin khóa 2006 – 2010, Trường Đại học Quốc gia Singapore.

4. Bùi Việt Anh

Sinh viên khoa Điện tử – Viễn thông khóa 2005 – 2009, Trường Đại học Bách khoa, Hà Nội.

5. Lê Trung Kiên

Sinh viên khoa Điện tử – Viễn thông khóa 2007 – 2011, Trường Đại học Bách khoa, Hà Nội.

6. Phan Thành Việt

Sinh viên khoa Toán, khóa 2007 – 2011, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP. HCM.

7. Võ Quốc Bá Cẩn

Sinh viên khoa Dược, khóa 2006 – 2011, Trường Đại học Y – Dược Cần Thơ.

8. Dương Đức Lâm

Học sinh khóa 2003 – 2006, trường THPT Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà, Hà Tĩnh.

9. Lê Hữu Điền Khuê

Sinh viên hệ Kỹ sư tài năng, khóa 2007 – 2011, Trường Đại học Blois, Cộng hòa Pháp.

10. Hoàng Trọng Hiền

Sinh viên khoa Toán – Tin, khóa 2008 – 2012, Trường Đại học Bách khoa TP. HCM.

11. Nguyễn Quốc Hưng

Sinh viên khoa Toán, khóa 2005 – 2009, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP. HCM.

12. Bạch Ngọc Thành Công

Lớp 12 chuyên Toán, khóa 2006–2009, Trường Phổ thông năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng

Tác giả chân thành cảm ơn Giáo sư, Tiến sĩ Vasile Cirtoaje và ngài M.Lascu (Rumani) đã đồng ý cho phép dịch một số chuyên đề trong cuốn sách “*Algebraic Inequalities*” do nhà xuất bản Gil xuất bản năm 2006 sang tiếng Việt để cuốn sách được hoàn thiện hơn. Tác giả cũng chân thành cảm ơn các đồng nghiệp Mạc Đăng Nghị, Cao Minh Quang và một số học sinh gửi bài đóng góp cho cuốn sách. Các bài viết đã đóng góp cho cuốn sách hoặc sử dụng thông tin một số bài toán được trích dẫn ở phần cuối cuốn sách. Mặc dù đã cố gắng chú dẫn chi tiết nhưng vẫn không thể tránh khỏi thiếu sót. Tác giả mong bạn đọc đóng góp ý kiến để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn.

MỘT SỐ CHỮ VIẾT TẮT VÀ CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC TRONG SÁCH

I. MỘT SỐ CHỮ VIẾT TẮT

MO – Olympic Toán Quốc gia.

IMO – Olympic Toán Quốc tế.

IMO Shortlish – Danh sách ngắn các bài đề nghị của các quốc gia trong IMO.

APMO – Olympic châu Á Thái Bình Dương.

VMEQ – Kỳ thi giải toán trên mạng của trang www.diendantoanhoc.net.

TST – Đề dự tuyển thi Toán Quốc tế.

APMO – Olympic châu Á Thái Bình Dương.

Crux – Tạp chí toán học Canada.

II. CÁC KÝ HIỆU TỔNG VÀ TÍCH THÔNG DỤNG

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_2 a_n + \dots + a_{n-1} a_n$$

$$\sum_{sym} f(a_1, a_2, \dots, a_n) - \text{Tổng đối xứng theo } n \text{ biến số } a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$\sum_{cyc} f(a_1, a_2, \dots, a_n) - \text{Tổng hoán vị theo } n \text{ biến số } a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$\sum_{sym} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(a, c, b) + f(b, c, a) + f(b, a, c) + f(c, a, b) + f(c, b, a)$$

$$\sum_{cyc} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$$

$$\text{Ví dụ: } \sum_{sym} a^2 b = a^2 b + ab^2 + b^2 c + bc^2 + c^2 a + ca^2 ;$$

$$\sum_{cyc} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

CHƯƠNG 1: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

Trong chương này chúng tôi sẽ lần lượt giới thiệu với các bạn 5 bất đẳng thức đại số cổ điển, đó là các bất đẳng thức so sánh trung bình cộng, trung bình nhân hay còn gọi là bất đẳng thức $AM - GM$ (§1), bất đẳng thức *Cauchy - Bunyakowski - Schwarz* (CBS - §2) và tổng quát của nó là bất đẳng thức *Holder* (§3), bất đẳng thức *Mincowski* (§4), cuối cùng là bất đẳng thức *Chebyshev* (§5). Cả 5 bất đẳng thức này mặc dù có hình thức và chứng minh rất đơn giản nhưng đều có tầm ứng dụng rất lớn.

Điểm đáng chú ý là giữa các bất đẳng thức này có mối quan hệ qua lại rất thú vị, chẳng hạn ta có thể sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ để chứng minh bất đẳng thức CBS và ngược lại, cũng có thể sử dụng bất đẳng thức CBS để chứng minh bất đẳng thức $AM - GM$. Theo một nghĩa nào đó chúng *tương đương* với nhau. Tuy nhiên chúng tôi sẽ không dành nhiều thời gian để phân tích kỹ hơn về chi tiết này. Các bạn đọc có hứng thú hãy tự tìm tòi cho mình một câu trả lời đầy đủ.

Chúng tôi sẽ tập trung trình bày về cách kết hợp các bất đẳng thức cổ điển với nghệ thuật chọn điểm rơi để có được những chứng minh thật đẹp mắt, ngắn gọn cho một lớp rộng các bất đẳng thức từ cũ đến mới, từ đơn giản đến phức tạp. Quan điểm của tác giả trong chương này là viết sao cho mọi vấn đề đều đơn giản, dễ hiểu và rõ ràng để hướng đến nhiều đối tượng độc giả. Do đó các bạn có thể thấy ngay từ phần nội dung mở đầu cuốn sách, các kỹ thuật chọn điểm rơi của bất đẳng thức $AM - GM$ được phân tích rất chi tiết, tỉ mỉ với 16 nội dung dưới tựa đề "*Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức $AM - GM$* ". Các bạn đọc mới làm quen với bất đẳng thức nên đọc thật kỹ mục này.

Chú ý rằng ngoại trừ bất đẳng thức *Chebyshev* thì 4 bất đẳng thức còn lại đều được phát biểu một cách đối xứng. Do đó không nên ngạc nhiên khi phần lớn các ví dụ sẽ là các bất đẳng thức đối xứng, hơn nữa phải là đối xứng đồng bậc. Tuy nhiên chính nhờ sự kết hợp giữa hai bất đẳng thức CBS và bất đẳng thức *Holder* với nghệ thuật chọn điểm rơi mà rất nhiều bất đẳng thức hoán vị đã được giải quyết gọn gàng. Các bạn hãy đọc cẩn thận các mục 2.III và 3.II để hiểu rõ hơn.

Cũng cần lưu ý sự phân chia các ví dụ và bài tập trong chương này có nhiều chỗ chỉ mang tính tương đối. Nguyên nhân chính là vì một bài toán có thể giải quyết bằng bất đẳng thức $AM - GM$ cũng rất có thể giải quyết bằng bất đẳng thức CBS , một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng cách sắp thứ tự các biến sau đó áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cũng có khả năng chứng minh được một cách *đối xứng* bằng các bất đẳng thức khác. Do đó chúng tôi tin rằng nếu các bạn đọc lại chương này một lần nữa sau khi đã đọc hết cả 5 chương của cuốn sách, khi đó rất có thể các bạn sẽ có cách cảm nhận mới với nhiều bài toán cũ của chúng tôi.

Cuối cùng, chúng tôi cũng rất chú ý đến việc chọn lựa các bài tập hay, đặc sắc để giúp các bạn có thể rèn luyện. Các bài toán này có thể tìm thấy mọi nơi trong suốt chương này và cả các chương sau nữa. Chúc các bạn thành công!

§1. BẮT ĐẲNG THỨC AM – GM VÀ CÁC KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI

Chúng ta thường được nghe khái niệm "điểm rơi" trong thể thao, ví dụ:

+ Một vận động viên thể thao cần xác định ngày thi đấu để điều chỉnh khối lượng vận động cho phù hợp để khi dự thi đạt phong độ "điểm rơi" về sức khỏe, tâm lý ở trạng thái sung sức và hưng phấn nhất.

+ Một vận động viên tennis cần rất nhiều khả năng phán đoán điểm rơi của trái tennis, đặc biệt khi nó bật xuống mặt sân, để tiếp cận cú đánh trả hiệu quả.

+ Một cầu thủ bóng đá cần chọn đúng điểm rơi để đón nhận một quả tạt bóng và bật lên đánh đầu cho hiệu quả. Một thủ môn cũng cần phải chọn đúng điểm rơi để bắt những quả bóng bổng. Chúng ta hãy cùng nhớ lại một ví dụ tiêu biểu về điểm rơi trong Football World Cup 1998 lần thứ 16 tổ chức tại Pháp: " Trong trận đội tuyển Brazil gặp đội tuyển Anh, cầu thủ Ronaldinho của Brazil nhận thấy thủ môn của đội tuyển Anh là David Seaman đang lên cao cách xa khung thành nên đã sút bóng điệu nghệ từ khoảng cách 45m. Khi đó Seaman nhận thấy nguy cơ và lùi xuống để bắt bóng. Rất tiếc David Seaman đã chọn sai điểm rơi nên lỡ trốn và để bóng vượt khỏi tầm tay lẫn vào lưới "

Tuy nhiên một ví dụ đặc sắc và rất ấn tượng mà chúng tôi muốn dành cho bạn đọc suy ngẫm để khám phá tính triết học của "thế giới điểm rơi" lại là một câu chuyện trong một bộ phim nổi tiếng gắn liền với một sự kiện lịch sử trong chiến tranh thế giới thứ hai.

I. CÂU CHUYỆN CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BỘ PHIM TEHERAN 43

Bộ phim *Teheran 43* do điện ảnh ba nước Nga, Pháp, Italia hợp tác. Chủ đề của bộ phim nói về tàn dư của Đức quốc xã vẫn còn tồn tại trong thế giới ngày nay. Bộ phim này đã được giải vàng trong Liên hoan phim Matxcova 1980. Một trong những mạch chính của phim nói về âm mưu ám sát ba lãnh tụ đồng minh. Bối cảnh trong phim xảy ra vào mùa hè năm 1943. Một vụ Sinler đến nhà sát thủ chuyên nghiệp Max để giao nhiệm vụ ám sát ba lãnh tụ đồng minh: **Rudoven, Socsin, Stalin**. Chúng ta hãy chú ý đến mâu thuẫn thoạt cục kỳ ngắn gọn đến mức khô khan giữa Max và Sinler:

Bối cảnh: Sinler xuất hiện tại nhà Max vào tháng 7/1943

1. Max chỉ nhìn Sinler và nêu câu hỏi: "Thời gian". Sinler đáp: "Hãy tự tìm lấy".
2. Max nhìn Sinler và hỏi tiếp: "Địa điểm". Sinler đáp: "Ông hãy tự tìm lấy".
3. Max suy nghĩ và lấy quyển lịch niên giám rồi nói: "Tôi đã nghĩ ra rồi".

4. Sau đó Max đã lấy bút chì và viết trên mẫu giấy: “Thời gian họp là 30 – 11” rồi nói thêm địa điểm sẽ là Đại sứ quán Anh tại Teheran (thủ đô của Iran).

5. **Bình luận:** Căn cứ vào diễn biến quân sự trên mặt trận chính của thế giới thứ hai là Nga – Đức và sự kiện Nhật Bản đánh tan nát hạm đội Mỹ tại Trân Châu cảng vào cuối năm 1941 thì cả thế giới đều tin rằng Mỹ sẽ phải nhảy vào cuộc chiến thế giới thứ hai, nhưng người Mỹ cần phải chọn thời điểm thích hợp để giảm thiểu tổn thất mà thu được tối đa cho lợi ích quốc gia. Tiếp theo là một chuỗi các chiến thắng của Hồng quân Xô Viết tại mặt trận Xô - Đức như trận đấu tăng thế kỷ tại vòng cung Cuốc-xơ, chiến thắng Stalingrad (1943) đã buộc Mỹ phải sớm chọn thời điểm liên kết với hai nước Anh, Nga mở mặt trận đồng minh. Như vậy tất yếu sẽ có một cuộc họp thượng đỉnh giữa ba nước, nhưng thời gian cụ thể của cuộc họp lại là một ẩn số? Max đã phán đoán cả Mỹ, Nga và Anh sẽ phải chọn thời điểm cuộc họp vừa phải theo kịp diễn biến quân sự đang thay đổi từng ngày, vừa phải đảm bảo bối cảnh ngoại giao cho cuộc gặp mặt giữa ba nguyên thủ quốc gia. Căn cứ vào diễn biến quân sự, bối cảnh ngoại giao cần có, Max nhận định cuộc họp sẽ được tiến hành vào cuối năm 1943 và chính xác phải là ngày 30/11/1943. Vì đây chính là ngày sinh nhật của Thủ tướng Anh Socrin, một thời điểm vàng đánh dấu mốc son cho sự ra đời của mặt trận đồng minh. Từ đó Max đã luận ra địa điểm cuộc họp phải là một thuộc địa của Anh ở xa chiến trường. Như thế cuộc họp sẽ diễn ra vào ngày 30/11/1943 tại Sứ quán Anh ở Teheran – thủ đô Iran, một thuộc địa của Anh.

Vậy là khi mà cả ba nguyên thủ quốc gia mới chỉ có ý định gặp nhau nhưng vẫn chưa chọn được thời gian cũng như địa điểm để ký kết thì “nhà chiêm tinh” Max đã phán đoán trước bốn tháng cả về thời gian lẫn địa điểm cuộc họp. Nhờ phán đoán được “điểm rơi cuộc họp”, Max đã bay sang Teheran vào tháng 9/1943, thuê thổ dân đào đường hầm từ ngoại ô Thủ đô Teheran thông với hệ thống hầm của Sứ quán Anh để thực hiện nhiệm vụ mưu sát.

Mặc dù cuối cùng vụ mưu sát đã không thành (do Max bị lộ thông tin từ cô phiên dịch Mary), nhưng phương pháp suy luận chọn điểm rơi của Max là một điều đáng để chúng ta suy ngẫm.

6. **Kết luận:** Thế giới vật chất luôn vận động và phát triển. Chọn điểm rơi chính là dự đoán sự vật kết thúc ở đâu để điều chỉnh hành động lúc xuất phát.

II. ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ví dụ dẫn: Trước khi đi vào khái niệm "điểm rơi" có tính chất học thuật, mời bạn đọc làm quen với một ví dụ có trong bài kiểm tra khi tác giả đang là học sinh phổ thông. Bài kiểm tra làm trong **15 phút** gồm hai bài toán sau đây:

Bài 1. Có thể có hay không một tam giác có thể chia thành 5 tam giác bằng nhau?

Bài 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{a+b+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+a+d}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}$$

Hồi đó cả lớp nhận được ba loại điểm: 0, 5 và 10. Có 2 người đạt điểm 10 và 2 người bị điểm 0. Những người bị điểm 0 và một số bạn được điểm 5 (giải được bài 1) thường mắc sai lầm khi giải bài 2 như sau: Sử dụng bất đẳng thức *Côsi* cho 4 cặp 2 số ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b+c+d} \cdot \frac{b+c+d}{a}} = 2 \\ \frac{b}{c+d+a} + \frac{c+a+d}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c+d+a} \cdot \frac{c+a+d}{b}} = 2 \\ \frac{c}{a+b+b} + \frac{d+a+b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a+b+b} \cdot \frac{d+a+b}{c}} = 2 \\ \frac{d}{a+b+c} + \frac{a+b+c}{d} \geq 2\sqrt{\frac{d}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{d}} = 2 \end{cases}$$

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{a+b+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+a+d}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d} \geq 8$$

Suy ra Min $S = 8$.

Cũng có bạn mắc sai lầm nhanh hơn với lời giải sau đây:

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** trực tiếp cho 8 số, ta có:

$$S \geq 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d} \cdot \frac{b}{c+d+a} \cdot \frac{c}{d+a+b} \cdot \frac{d}{a+b+c} \cdot \frac{b+c+d}{a} \cdot \frac{c+d+a}{b} \cdot \frac{d+a+b}{c} \cdot \frac{a+b+c}{d}} = 8 \Rightarrow \text{Min } S = 8$$

Chúng ta có thể thấy ngay sai lầm này khi xét điều kiện $\text{Min } S = 8$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = \frac{d}{a+b+c} = \frac{b+c+d}{a} = \frac{c+d+a}{b} = \frac{d+a+b}{c} = \frac{a+b+c}{d} = 1. \text{ Hay}$$

$$\text{Min } S = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c+d \\ b = c+d+a \\ c = d+a+b \\ d = a+b+c \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d = 3(a+b+c+d) \Rightarrow 1 = 3 : \text{ vô lý}$$

Chúng ta có thể thấy sai lầm bắt nguồn từ sự cầu thả không kiểm tra kỹ điều kiện xảy ra dấu bằng, một cách hình tượng hơn chúng ta sẽ gọi là điểm rơi trong bất đẳng thức.

2. Đặt vấn đề: Trong các phương pháp chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ ta thường chứng minh theo một trong hai sơ đồ sau:

Sơ đồ 1: Tạo ra dãy các bất đẳng thức trung gian

$$A \geq A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_{n-1} \geq A_n \geq B$$

Sơ đồ 2: Tạo ra các bất đẳng thức bộ phận

$$\begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{l} A_1 \geq B_1 \\ A_2 \geq B_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_n \geq B_n \end{array} \right. \quad \text{hoặc} \quad \times \left\{ \begin{array}{l} A_1 \geq B_1 \geq 0 \\ A_2 \geq B_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ A_n \geq B_n \geq 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow A \geq B \quad \quad \quad \Rightarrow A \geq B \end{array}$$

Để tạo ra các bất đẳng thức trung gian hoặc các bất đẳng thức bộ phận ta cần chú ý rằng:

Nếu bất đẳng thức "**Trung ương:** $A \geq B$ " xảy ra trạng thái " $A = B$ " tại **tiêu chuẩn P** nào đó thì tại **tiêu chuẩn P** này tất cả các bất đẳng thức trung gian trong sơ đồ 1 hoặc các bất đẳng thức bộ phận (**bất đẳng thức địa phương**) trong sơ đồ 2 cũng đồng thời xảy ra dấu bằng.

Muốn tìm được **tiêu chuẩn P** ta cần chú ý tính đối xứng của biến số và điều kiện xảy ra dấu bằng trong các bất đẳng thức cổ điển **AM-GM**; **Cauchy - Buniakowski - Schwarz (CBS)**, **Bernouli** hoặc trong các phương pháp mới được đề cập trong cuốn sách như: **SOS**, **MV**, **ABC**, **EV**, **GLA**, **DAC**. Do việc dự đoán điều kiện trạng thái " $A = B$ " xảy ra theo một tiêu chuẩn nào đó để định hướng biến đổi đại số và đánh giá các bất đẳng thức trung gian hoặc bộ phận nên có thể gọi các ý tưởng này là: "**Kỹ thuật kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng**" hoặc có thể gọi một cách ẩn tượng hơn là "**Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức**".

Trong chương I, chúng tôi sẽ giới thiệu rất kỹ về "**Kỹ thuật chọn điểm rơi**" đặc biệt là trong phần giới thiệu về bất đẳng thức **AM - GM** với tựa đề "**Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM**". Ở phần này chúng ta sẽ làm quen với "**Kỹ thuật chọn điểm rơi**" từ những ví dụ đơn giản đến những phức tạp với phần bình luận chi tiết trong các bài tập mẫu minh họa.

Trong chương IV chúng ta sẽ được giới thiệu về "**Kỹ thuật chọn điểm rơi**" của các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị nhưng có điều kiện dấu bằng xảy ra tại hai trạng thái khác nhau.

III. TÓM TẮT NỘI DUNG**§ 1.1 Giới thiệu về bất đẳng thức AM - GM**

1. Dạng tổng quát
2. Các trường hợp đặc biệt
3. Chứng minh

§ 1.2 Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức AM – GM

- I. Điểm rơi trong đánh giá từ AM sang GM
- II. Điểm rơi trong đánh giá từ GM sang AM
- III. Nguyên lý đồng bậc trong bất đẳng thức Côsi
- IV. Đặc biệt hóa đưa về bất đẳng thức đồng bậc
- V. Phối hợp hai bất đẳng thức đồng bậc ngược chiều nhau
- VI. Phương pháp chuẩn hóa bất đẳng thức ba biến số
- VII. Bất đẳng thức đồng bậc dạng cộng mẫu số
- VIII. Bất đẳng thức đồng bậc chứa căn thức
- IX. Bất đẳng thức không đồng bậc
- X. Đặc biệt hóa bất đẳng thức không đồng bậc
- XI. Điểm rơi không đối xứng
- XII. Phương pháp cân bằng hệ số
- XIII. Kỹ thuật tách phân thức âm và đánh giá mẫu số
- XIV. Vẽ đẹp điểm rơi trong bất đẳng thức lượng giác
- XV. Một số bài toán chọn lọc ứng dụng điểm rơi
- XVI. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

§1.1. BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

CÁC DẠNG BIỂU DIỄN BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

1. **Dạng tổng quát:** Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số thực không âm, khi đó ta có:

Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3
$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$	$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$

2. Hệ quả:

- Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ const thì $\text{Max}(a_1 a_2 \dots a_n) = \left(\frac{S}{n} \right)^n$ xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{S}{n}$
- Nếu $a_1 a_2 \dots a_n = P$ const thì $\text{Min}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n \cdot \sqrt[n]{P}$ xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt[n]{P}$

2. Các trường hợp đặc biệt

n	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Điều kiện	$\forall a, b \geq 0$	$\forall a, b, c \geq 0$	$\forall a, b, c, d \geq 0$
Dạng 1	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$	$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$
Dạng 2	$a+b \geq 2\sqrt{ab}$	$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$	$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$
Dạng 3	$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab$	$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq abc$	$\left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4 \geq abcd$
Dấu bằng	$a = b$	$a = b = c$	$a = b = c = d$

Bình luận: Khi chứng minh bất đẳng thức, nói chung ta rất ít gặp các bất đẳng thức có dạng cân đối, đầy đủ như các dạng được phát biểu trong lý thuyết mà thường gặp các bất đẳng thức có một vế phức tạp, một vế rút gọn. Cũng giống như khi chứng minh đẳng thức ta phải đánh giá từ vế phức tạp sang vế rút gọn. Các dạng 1, 2, 3 đặt ở cạnh nhau có vẻ tầm thường nhưng việc phân loại chi tiết các dạng 1, 2, 3 giúp chúng ta nhận dạng nhanh và phản ứng linh hoạt hơn khi sử dụng AM – GM. Đặc biệt là dạng 3 không chứa căn thức nhắc chúng ta có thể sử dụng AM – GM ngay cả khi không có dấu hiệu căn thức. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cho nhận xét này:

Ví dụ: Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2 \leq (a+b)^4, \forall a, b \geq 0$ (1)

Phân tích: Ta thường khai triển (1)

$$\Leftrightarrow 16ab(a^2 - 2ab + b^2) \leq a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Khi đó việc phân tích hiệu giữa hai vế thành tổng các bình phương sẽ gặp nhiều khó khăn. Gặp bài toán này chúng ta ít nghĩ ngay đến sử dụng AM – GM vì thói quen tâm lý hình thức “*chỉ sử dụng AM – GM khi một vế có chứa căn thức*”. Tuy nhiên nhờ có dạng 3 mà gợi ý cho chúng ta “*có thể sử dụng AM – GM ngay cả khi cả hai vế đều không chứa căn thức*”

$$\text{Giải: } 16ab(a-b)^2 = 4(4ab)(a-b)^2 \leq 4 \left[\frac{4ab + (a-b)^2}{2} \right]^2 = 4 \left[\frac{(a+b)^2}{2} \right]^2 = (a+b)^4.$$

$$3. \text{ Chứng minh: } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \quad (1)$$

Có khoảng 40 cách chứng minh bất đẳng thức (1), sau đây là hai cách chứng minh tiêu biểu:

Cách 1: Phương pháp quy nạp thông thường:

• Với $n = 2$: Ta cần chứng minh: $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, $\forall a_1, a_2 \geq 0$. Thật vậy ta có:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{1}{2} (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a_1 = a_2.$$

• Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n \geq 2$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức (1) đúng với $(n+1)$ số: $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \geq 0$

Sử dụng giả thiết quy nạp cho n số: $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ta có:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + a_{n+1}}{n+1}. \text{ Đặt } \begin{cases} a_1 a_2 \dots a_n = p^{n(n+1)} \\ a_{n+1} = q^{n+1} \end{cases} \forall p, q \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} \geq \frac{np^{n+1} + q^{n+1}}{n+1}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{np^{n+1} + q^{n+1}}{n+1} \geq p^n q = \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}$ (2) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{np^{n+1} + q^{n+1}}{n+1} - p^n q &= \frac{1}{n+1} \left[np^n(p-q) - q(p^n - q^n) \right] \\ &= \frac{p-q}{n+1} \left[np^n - q(p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + q^{n-1}) \right] \\ &= \frac{p-q}{n+1} \left[(p^n - qp^{n-1}) + (p^n - q^2 p^{n-2}) + \dots + (p^n - q^{n-1} p) + (p^n - q^n) \right] \\ &= \frac{(p-q)^2}{n+1} \left[p^{n-1} + p^{n-2}(p+q) + \dots + p(p^{n-2} + p^{n-3}q + \dots + q^{n-2}) + (p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + q^{n-1}) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy (2) được chứng minh nên suy ra $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}$

$$\text{Đấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ p = q \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Chú dẫn: Tên gọi **AM – GM** là viết tắt của thuật ngữ tiếng Anh **Arithmetic mean –**

Geometric mean nêu lên bản chất của bất đẳng thức $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \forall a_i \geq 0$.

Các sách toán học đã xuất bản ở Việt Nam thường gọi bất đẳng thức trên là bất đẳng thức **Côsi**. Cách gọi này xuất phát từ việc nhà toán học Pháp **Côsi (Cauchy)** là người đầu tiên đã chứng minh bất đẳng thức này và ông đã chứng minh nó bằng một phương pháp quy nạp đặc biệt có thể gọi là phương pháp "**Quy nạp Côsi**" (**Quy nạp Tiễn Lùi**). Ý tưởng của phương pháp quy nạp này là:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 2$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, chứng minh mệnh đề đúng với $n = 2k$.

Bước 3: Giả sử mệnh đề đúng với $n = p$, chứng minh mệnh đề đúng với $n = p - 1$.

Sau đây chúng tôi giới thiệu cách chứng minh **AM – GM** của **Côsi**

Cách 2: Phương pháp "**Quy nạp Côsi**"

$$\text{Với } n = 2: \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \quad (\text{đúng})$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2k$.

Thật vậy xét $2k$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k} \geq 0$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}}{2k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \dots + a_{2k}}{k} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}} \right] \geq \sqrt[k]{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_{2k}} \end{aligned}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = p$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = p - 1$.

Thật vậy xét $(p - 1)$ số: $a_1, a_2, \dots, a_{p-1} \geq 0$. Sử dụng giả thiết quy nạp với $n = p$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}}{p} &\geq \sqrt[p]{a_1 \dots a_{p-1} \cdot \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}} = \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} &\geq p \cdot \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} &\geq (p - 1) \cdot \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}}{p - 1} \geq \sqrt[p]{a_1 a_2 \dots a_{p-1}} \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

§1.2. NHỮNG SẮC MÀU ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM

I. ĐIỂM RƠI TRONG ĐÁNH GIÁ TỪ TRUNG BÌNH CỘNG SANG TRUNG BÌNH NHÂN

Chúng ta cùng bước vào "thế giới điểm rơi" với bài toán đơn giản và quen biết sau đây:

Bài toán xuất phát: Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM: $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$. Với $a = b$ thì $\text{Min } S = 2$

Nhận xét: Từ bài toán này ta có thể thay đổi miền xác định để có các bài toán sau đây:

Bài 1. Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a}$

Bình luận và lời giải

- **Sai lầm thường gặp:** $S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$
- **Nguyên nhân sai lầm:** $\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$
- **Phân tích và tìm tòi lời giải:** Xét bảng biến thiên của $a, \frac{1}{a}$ và S để dự đoán $\text{Min } S$

a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		30
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{30}$
S	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{7}$	$8\frac{1}{8}$	$9\frac{1}{9}$	$10\frac{1}{10}$	$11\frac{1}{11}$	$12\frac{1}{12}$		$30\frac{1}{30}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a càng tăng thì $\frac{1}{a}$ càng nhỏ nhưng độ tăng của a rất lớn so với độ giảm của $\frac{1}{a}$ nên khi a càng tăng thì tổng S càng lớn và từ đó dẫn đến dự đoán khi $a = 3$ thì S nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo cảm xúc ta sẽ nói rằng

$\text{Min } S = \frac{10}{3}$ đạt tại "Điểm rơi: $a = 3$ ".

Do bất đẳng thức AM - GM xảy ra dấu bằng tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau, nên tại "Điểm rơi: $a = 3$ " ta không thể sử dụng bất đẳng thức AM - GM trực tiếp cho 2 số a và $\frac{1}{a}$ vì $3 \neq \frac{1}{3}$. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng thức AM - GM

cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ để tại "Điểm rơi: $a = 3$ " thì $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ tức là ta có sơ đồ "Điểm rơi":

Sơ đồ điểm rơi: $a=3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{3}{\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha=9$: Hệ số điểm rơi

Từ đó ta biến đổi S theo sơ đồ "Điểm rơi" được nêu ở trên.

• Lời giải đúng: $S = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) + \frac{8a}{9} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{9} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{10}{3}$. Với $a=3$ thì $\text{Min } S = \frac{10}{3}$

Bài 2. Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a^2}$

Bình luận và lời giải

• Sơ đồ điểm rơi:

$a=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha=8$: Hệ số điểm rơi

• Sai lầm thường gặp:

$$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{7a}{8} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \frac{2}{\sqrt{8a}} + \frac{7a}{8}$$

$$\geq \frac{2}{\sqrt{8 \cdot 2}} + \frac{7 \cdot 2}{8} = \frac{2}{4} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}. \text{ Với } a=2 \text{ thì Min } S = \frac{9}{4}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

Mặc dù ta đã biến đổi S theo điểm rơi $a=2$ và $\text{Min } S = \frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số:

"Nếu $a \geq 2$ thì $\frac{2}{\sqrt{8a}} \geq \frac{2}{\sqrt{8 \cdot 2}} = \frac{2}{4}$ là đánh giá sai"

Để điều chỉnh lời giải sai thành lời giải đúng ta cần phải biến đổi S sao cho khi sử dụng bất đẳng thức AM – GM sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

• Lời giải đúng: Biến đổi S và sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{6a}{8} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}. \text{ Với } a=2 \text{ thì Min } S = \frac{9}{4}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \frac{1}{ab}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:** $S = ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow ab = \frac{1}{ab} = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \text{ (Vô lý)}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Biểu thức của S chứa 2 biến số a, b nhưng nếu đặt $t = ab$ hoặc $t = \frac{1}{ab}$ thì $S = t + \frac{1}{t}$ là biểu thức chứa 1 biến số. Khi đổi biến số ta sẽ tìm miền xác định cho biến số mới, cụ thể là:

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{ab} \Rightarrow ab = \frac{1}{t} \text{ và } t = \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

• **Bài toán trở thành:** Cho $t \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = t + \frac{1}{t}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{t=4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \\ \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=16} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải tổng hợp:** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$S = t + \frac{1}{t} = \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{t}\right) + \frac{15t}{16} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{t}{16} \cdot \frac{1}{t}} + \frac{15 \cdot 2}{16} = \frac{17}{4}. \text{ Với } t = 4 \text{ hay } a = b = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{17}{4}$$

• **Lời giải thu gọn:**

Do $t = 4 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$ nên biến đổi trực tiếp S sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$S = ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{2}{4} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{Với } a = b = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \frac{17}{4}$$

Bài 4. Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:** $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = 1 \Rightarrow \sqrt{ab} = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 1 \geq 2 \Rightarrow \text{Vô lý}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b nên dự đoán Min S đạt tại $a = b > 0$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{2a}{\alpha a} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=4} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải đúng:**

$$S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right) + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Với } a = b > 0 \text{ thì Min } S = \frac{5}{2}$$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$S = a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 6 \Rightarrow \text{Min } S = 6$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 6 \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a+b+c = 3 > \frac{3}{2} \text{ trái với giả thiết.}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán Min S đạt tại $a = b = c = \frac{1}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a=b=c=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} = \frac{1}{\alpha c} = \frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=4} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

• **Lời giải đúng:** $S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[3]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{3}{4} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right) = 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \geq 3 + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2}$$

Với $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì Min $S = \frac{15}{2}$.

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm Min $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$

Bình luận và lời giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}}\right) \left(2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{c^2}}\right) \left(2\sqrt{c^2 \cdot \frac{1}{a^2}}\right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = 3\sqrt{2}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 > \frac{3}{2} \text{ trái với giả thiết.}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:** Dự đoán Min S đạt tại điểm rơi $a = b = c = \frac{1}{2}$

• **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a^2} = \frac{1}{\alpha b^2} = \frac{1}{\alpha c^2} = \frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=16} : \text{Hệ số điểm rơi}$$

- **Lời giải đúng:** Biến đổi S và sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}} \\
 &\geq \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{a^2 \cdot \left(\frac{1}{16b^2}\right)^{16}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{b^2 \cdot \left(\frac{1}{16c^2}\right)^{16}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{c^2 \cdot \left(\frac{1}{16a^2}\right)^{16}}} \\
 &= \sqrt{17} \left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}} \right] \geq \sqrt{17} \left[3 \cdot \sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}} \cdot \frac{b}{16^8 c^{16}} \cdot \frac{c}{16^8 a^{16}}} \right] \\
 &= 3\sqrt{17} \cdot \sqrt[17]{\frac{1}{16^8 a^5 b^5 c^5}} = \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^5}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 7. [Macedonia 1999] Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b + c + \frac{1}{abc}$

Bình luận và lời giải

- **Sai lầm thường gặp:** $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{abc}} = 4 \Rightarrow \text{Min } T = 4$
- **Nguyên nhân sai lầm:** $\text{Min } T = 4 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{abc} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3$
- **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Dự đoán điểm rơi của Min T là $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $\frac{1}{abc} = 3\sqrt{3}$

- **Sơ đồ điểm rơi:**

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \begin{cases} a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\alpha abc} = \frac{3\sqrt{3}}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\alpha=9}: \text{Hệ số điểm rơi}$$

- **Lời giải đúng:**

$$a + b + c + \frac{1}{9abc} + \frac{8}{9abc} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{9abc}} + \frac{8}{9 \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \right)^3} = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Bài 8. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}$$

Giải

- **Sai lầm thường gặp:** Sử dụng bất đẳng thức AM - GM trực tiếp cho 8 số

$$S \geq 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d} \cdot \frac{b}{c+d+a} \cdot \frac{c}{d+a+b} \cdot \frac{d}{a+b+c} \cdot \frac{b+c+d}{a} \cdot \frac{c+d+a}{b} \cdot \frac{d+a+b}{c} \cdot \frac{a+b+c}{d}} = 8 \Rightarrow \text{Min } S = 8$$

- **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c+d \\ b = c+d+a \\ c = d+a+b \\ d = a+b+c \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d = 3(a+b+c+d) \Rightarrow 1 = 3 : \text{ vô lý}$$

- **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Để tìm Min S ta cần chú ý S là một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó

Min S (hoặc Max S) nếu có thường đạt tại "**Điểm rơi tự do**": $a = b = c = d > 0$.

Vậy ta cho trước $a = b = c = d > 0$ và dự đoán $\text{Min } S = \frac{4}{3} + 12 = 13\frac{1}{3}$

Từ đó suy ra các đánh giá của các bất đẳng thức bộ phận phải có điều kiện dấu bằng xảy ra là tập con của điều kiện dự đoán: $a = b = c = d > 0$

- **Sơ đồ điểm rơi:** Cho $a = b = c = d > 0$ ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = \frac{d}{a+b+c} = \frac{1}{3} \\ \frac{b+c+d}{\alpha a} = \frac{c+d+a}{\alpha b} = \frac{d+a+b}{\alpha c} = \frac{a+b+c}{\alpha d} = \frac{3}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 9$$

- **Lời giải đúng:** $S = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{9a} \right) + \sum_{\text{cyc}} \frac{8}{9} \cdot \frac{b+c+d}{9a} \geq$

$$\geq 8 \cdot \sqrt[8]{\prod_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c+d} \cdot \prod_{\text{cyc}} \frac{b+c+d}{9a}} + \frac{8}{9} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \right)$$

$$\geq \frac{8}{3} + \frac{8}{9} \cdot 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{b \cdot c \cdot d \cdot c \cdot d \cdot a \cdot d \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot c}{a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot d \cdot d \cdot d}} = \frac{8}{3} + \frac{8}{9} \cdot 12 = \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì $\text{Min } S = 13\frac{1}{3}$.

Bài 9. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right)$$

Giải

• **Sai lầm thường gặp:**

$$S = \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{2a}{3b}} \cdot 2\sqrt{\frac{2b}{3c}} \cdot 2\sqrt{\frac{2c}{3d}} \cdot 2\sqrt{\frac{2d}{3a}} = \frac{64}{9} \Rightarrow \text{Min } S = \frac{64}{9}$$

• **Nguyên nhân sai lầm:**

$$\text{Min } S = \frac{64}{9} \Leftrightarrow 1 = \frac{2a}{3b} = \frac{2b}{3c} = \frac{2c}{3d} = \frac{2d}{3a} = \frac{2(a+b+c+d)}{3(a+b+c+d)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Vô lý}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải:**

Do S là biểu thức đối xứng với a, b, c, d nên dự đoán $\text{Min } S$ đạt tại điểm rơi tự do:

$$a = b = c = d > 0, \text{ khi đó } S = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$$

• **Lời giải đúng:**

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{2a}{3b} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{a}{3b} + \frac{a}{3b} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{3b}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \frac{2b}{3c} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{b}{3c} + \frac{b}{3c} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{3c}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \frac{2c}{3d} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{c}{3d} + \frac{c}{3d} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{c}{3d}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \frac{2d}{3a} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{d}{3a} + \frac{d}{3a} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{d}{3a}\right)^2} = \frac{5}{3} \left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}} \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow S &= \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right) \geq \frac{625}{81} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{625}{81} \end{aligned}$$

$$\text{Với } a = b = c = d > 0 \text{ thì } \text{Min } S = \frac{625}{81}$$

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{2a}{3b}\right) \left(1 + \frac{2b}{3c}\right) \left(1 + \frac{2c}{3d}\right) \left(1 + \frac{2d}{3a}\right) = \frac{1}{81} \prod_{\text{cyc}} \frac{2a+3b}{b} = \frac{1}{81} \prod_{\text{cyc}} \frac{a+a+b+b+b}{b} \geq \\ &\geq \frac{1}{81} \prod_{\text{cyc}} \frac{5\sqrt[5]{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b}}{b} = \frac{1}{81} \frac{625abcd}{abcd} = \frac{625}{81} \end{aligned}$$

Bài 10. Cho $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$

Giải.

Biến đổi biểu thức S và sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$S = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} \right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác viết lại } S = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} = \frac{1-y}{\sqrt{y}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2S \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{\frac{x+y}{2}}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S \geq \sqrt{2}. \text{ Với } x = y = \frac{1}{2} \text{ thì Min } S = \sqrt{2}.$$

Bài 11. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\begin{aligned} 2P &= \left(\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\frac{b+c}{a}} \right) + \left(\sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\frac{c+a}{b}} \right) + \\ &+ \left(\sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\frac{a+b}{c}} \right) + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right) \left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \right) \\ &\geq 3 \cdot 3 \sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\frac{b+c}{a}} + 3 \cdot 3 \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \\ &+ 3 \cdot 3 \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right) \left(3 \cdot \sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \right) \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right) \cdot 3 \cdot \sqrt[6]{\frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc}} = \\ &= \frac{9}{\sqrt[4]{2}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right) \cdot 3\sqrt{2} = \frac{6}{\sqrt[4]{2}} + 6\sqrt{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Với $a = b = c$ thì $\text{Min } P = \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + 3\sqrt{2}$.

II. ĐIỂM RƠI TRONG ĐÁNH GIÁ TỪ GM SANG AM

Nhận xét: Xét bất đẳng thức **AM – GM**: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$

Để ý rằng trong vế phải (vế yếu) của bất đẳng thức trên tức là biểu thức **GM** có số các thừa số trong căn thức đúng bằng chỉ số căn thức (cùng bằng n). Do đó, khi gặp bất đẳng thức mà vế yếu của bất đẳng thức có chứa căn thức và số các thừa số ở trong căn thức nhỏ hơn chỉ số căn thức thì ta cần nhân thêm các hằng số thích hợp để số các thừa số trong căn thức bằng chỉ số của căn thức. Để xác định được các hằng số thích hợp chúng ta phải dự đoán được dấu bằng của bất đẳng thức nên kỹ thuật này có tên gọi điểm rơi trong đánh giá từ **GM** sang **AM**.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}$

Phân tích và tìm tòi lời giải

• Sai lầm thường gặp:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{(a+b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a+b+1+1}{3} \\ & + \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{(b+c) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{b+c+1+1}{3} \\ & \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{(c+a) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{c+a+1+1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{2(a+b+c)+6}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{8}{3}$$

• Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Max } S = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1 \\ c+a=1 \end{cases} \Rightarrow 2(a+b+c)=3 \Leftrightarrow 2=3 \Rightarrow \text{vô lý}$$

• Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:

Vì S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$$

• Lời giải đúng: Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{a+b} &= \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{(a+b) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \\
 + \sqrt[3]{b+c} &= \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{(b+c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}} \\
 + \sqrt[3]{c+a} &= \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{(c+a) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2(a+b+c) + 4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{6}{3}} = \sqrt[3]{18}$$

$$\text{Với } a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}, \text{ Max } S = \sqrt[3]{18}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)}$$

Phân tích và tìm lời giải

• Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:

Vì S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Rightarrow \begin{cases} 3a=3b=3c=3 \\ b+2c=c+2a=a+2b=3 \end{cases}$$

• Lời giải đúng:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{a(b+2c)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3a(b+2c) \cdot 3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3a + (b+2c) + 3}{3} \\
 + \sqrt[3]{b(c+2a)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3b(c+2a) \cdot 3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3b + (c+2a) + 3}{3} \\
 + \sqrt[3]{c(a+2b)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3c(a+2b) \cdot 3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3c + (a+2b) + 3}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{6(a+b+c) + 9}{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Với } a=b=c=1, \text{ Max } S = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = a \cdot \sqrt[3]{b^2 + c^2} + b \cdot \sqrt[3]{c^2 + a^2} + c \cdot \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

Phân tích và tìm lời giải

• Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:

Vì S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases} a=b=c>0 \\ a^2+b^2+c^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2=2b^2=2c^2=8 \\ b^2+c^2=c^2+a^2=a^2+b^2=8 \end{cases}$$

• Lời giải đúng:

$$\begin{cases} a \cdot \sqrt[3]{b^2+c^2} = \sqrt[6]{a^6(b^2+c^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{(2a^2)^3(b^2+c^2)^2} \cdot 8 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{6a^2+2(b^2+c^2)+8}{6} \\ + b \cdot \sqrt[3]{c^2+a^2} = \sqrt[6]{b^6(c^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{(2b^2)^3(c^2+a^2)^2} \cdot 8 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{6b^2+2(c^2+a^2)+8}{6} \\ c \cdot \sqrt[3]{a^2+b^2} = \sqrt[6]{c^6(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{(2c^2)^3(a^2+b^2)^2} \cdot 8 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{6c^2+2(a^2+b^2)+8}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = a \cdot \sqrt[3]{b^2+c^2} + b \cdot \sqrt[3]{c^2+a^2} + c \cdot \sqrt[3]{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{10(a^2+b^2+c^2)+24}{6} = 12$$

Với $a=b=c=2$, Max $S=12$

Bài 4. Cho $a \geq 2$; $b \geq 6$; $c \geq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{bc\sqrt{a-2} + ca \cdot \sqrt[3]{b-6} + ab \cdot \sqrt[4]{c-12}}{abc}$$

Giải

$$\begin{cases} bc\sqrt{a-2} = \frac{bc}{\sqrt{2}} \sqrt{(a-2) \cdot 2} \leq \frac{bc}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(a-2)+2}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{2}} \\ + ca \cdot \sqrt[3]{b-6} = \frac{ca}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{(b-6) \cdot 3 \cdot 3} \leq \frac{ca}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{(b-6)+3+3}{2} = \frac{abc}{2 \cdot \sqrt[3]{9}} \\ ab \cdot \sqrt[4]{c-12} = \frac{ab}{\sqrt[4]{64}} \cdot \sqrt[4]{(c-12) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \leq \frac{ab}{\sqrt[4]{64}} \cdot \frac{(c-12)+4+4+4}{4} = \frac{abc}{8 \cdot \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{abc} \cdot \left(\frac{abc}{2\sqrt{2}} + \frac{abc}{8\sqrt{2}} + \frac{abc}{3 \cdot \sqrt[3]{9}} \right) = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a-2=2 \\ b-6=3 \\ c-12=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9 \\ c=16 \end{cases}, \text{ Max } S = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

Bài 5. Cho $0 < a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{3} \geq (1-a)(1-b)(1-c) \Leftrightarrow \frac{(1-a) + (1-b) + (1-c)}{3(a+b+c)} \geq (1-a)(1-b)(1-c) \quad (2)$$

Do $1-a \geq 1-b \geq 1-c \geq 0$ nên VT (2) $\geq \frac{3(1-c)}{3(a+b+c)} = \frac{1-c}{a+b+c}$.

Vậy (2) đúng nếu ta chứng minh được $\frac{1}{a+b+c} \geq (1-a)(1-b) \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(a+b+c) \leq 1$.

Theo AM - GM: $(1-a)(1-b)(a+b+c) \leq \left(\frac{1-a+1-b+a+b+c}{3} \right)^3 = \left(\frac{2+c}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{3}{3} \right)^3 = 1$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 6. Chứng minh rằng: $S = 1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < n+1$

Chứng minh

Xét đánh giá đại diện $\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k} \cdot \frac{1 \cdot \dots \cdot 1}{k-1}} < \frac{1}{k} \left[\frac{k+1}{k} + (k-1) \right] = 1 + \frac{1}{k^2}$.

Suy ra $S < 1 + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = n + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$< n + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} = n + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < n+1$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2$

Chứng minh

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) \cdot \frac{1 \cdot \dots \cdot 1}{n-1}} < \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) + (n-1) \right] = 1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \\ \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} &= \sqrt[n]{\left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) \cdot \frac{1 \cdot \dots \cdot 1}{n-1}} < \frac{1}{n} \left[\left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) + (n-1) \right] = 1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow \sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\right) = 2. \end{aligned}$$

III. ĐIỂM RƠI TỰ DO HAY NGUYÊN LÝ ĐỒNG BẬC TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Các bất đẳng thức đề cập trong kỹ thuật này được minh họa bởi các hàm đa thức với ba biến số $a, b, c > 0$, mà không làm giảm bản chất và tính khái quát của vấn đề. Chúng ta sẽ tiếp cận kỹ thuật này từ những vấn đề đơn giản nhất.

1. Bậc của đơn thức: Đơn thức $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ có bậc là $(\alpha + \beta + \gamma)$

Ví dụ: Các đơn thức bậc 3: $a^3, b^3, c^3, a^2b, b^2c, c^2a, \frac{a^4}{b}, \frac{b^4}{c}, \frac{c^4}{a}, \frac{a^5}{b^2}, \frac{b^5}{c^2}, \frac{c^5}{a^2},$

$\frac{a^5}{bc}, \frac{a^6}{b^3}, \frac{a^6}{b^2c}, \frac{a^7}{b^4}, \frac{a^7}{bc^3}, \frac{a^7}{b^2c^2}, a^2\sqrt{bc}, \sqrt{a^5b}, \sqrt{a^4bc}, \sqrt[3]{a^5b^3c}, \sqrt{\frac{a^9}{b^2c}}, \sqrt[3]{\frac{a^7b^4}{c^5}}, \frac{c^4}{\sqrt{ab}} \dots$

Như vậy có vô số các đơn thức bậc 3 biểu diễn qua 3 biến số a, b, c và tổng quát ta có vô số các đơn thức bậc k cho trước biểu diễn qua 3 biến số a, b, c .

2. Tại sao phải so sánh các biểu thức đồng bậc

Giả sử ta phải so sánh 2 đa thức không đồng bậc chẳng hạn xét bài toán sau đây:

Bài toán: Chứng minh rằng $\forall a, b, c > 0$ ta có: $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c$ (*)

Phân tích: Giả sử (*) đúng, khi đó cho $a = b = c = x > 0$

$$\text{ta có } (*) \Leftrightarrow 3x^{2000} \geq 3x \Leftrightarrow x^{2000} \geq x$$

Do bất đẳng thức $x^{2000} \geq x$ đúng nếu $x \geq 1$ và $x^{2000} \geq x$ sai nếu $x \in (0, 1)$ nên suy ra:

- Nếu $a, b, c > 0$ thì bất đẳng thức $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c$ không đúng
- Nếu co hẹp miền xác định: $a, b, c \geq 1$ thì $a^{2000} \geq a, b^{2000} \geq b, c^{2000} \geq c$ và ta có

$$\text{bất đẳng thức rất tầm thường: } a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c \quad \forall a, b, c \geq 1$$

- Nếu co hẹp miền xác định: $a, b, c \in (0, 1)$ thì $a^{2000} < a, b^{2000} < b, c^{2000} < c$ và ta cũng có bất đẳng thức rất tầm thường: $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} < a + b + c \quad \forall a, b, c \in (0, 1)$

• **Kết luận:** Không nên đặt vấn đề so sánh các đa thức không đồng bậc trên miền xác định là $\mathbb{R}^+$. Vì có vô số cách biểu diễn các đơn thức có cùng bậc k cho trước nên các bài toán dưới đây đặt vấn đề là so sánh các hàm đa thức đồng bậc với bậc của các đơn thức được biểu diễn bởi những trạng thái khác nhau.

3. Nguyên lý chung:

Các bất đẳng thức trong mục này đều được chứng minh theo đường lối tách thành các bất đẳng thức bộ phận. Do bất đẳng thức đã cho xảy ra đẳng thức tại các biến số bằng nhau và chạy khắp $\mathbb{R}^+$ nên các bất đẳng thức bộ phận cũng xảy ra đẳng thức tại các biến số bằng nhau và chạy khắp $\mathbb{R}^+$. Khi đó nếu sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** thì ta thường lấy đại diện một đơn thức ở vế lớn rồi cộng thêm với các đơn thức đồng bậc với đơn thức đại diện này. Các bài tập sau đây sẽ minh họa cho các bất đẳng thức ba biến số với các bậc cụ thể nhưng không làm mất đi tính tổng quát của vấn đề.

34 Kim Cương

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + (a + b + c) = \sum_{cyc} \left(\frac{a^2}{b} + b\right) \geq \sum_{cyc} 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} = 2(a + b + c) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) + 2(a + b + c) = \sum_{cyc} \left(\frac{a^3}{b^2} + b + b\right) \geq \sum_{cyc} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = 3(a + b + c)$$

$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

• **Lời giải 1:** • **Bổ đề:** $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0$

Áp dụng: $\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) + (a + b + c) = \sum_{cyc} \left(\frac{a^3}{b^2} + a\right) \geq \sum_{cyc} 2 \cdot \sqrt{\frac{a^3}{b^2} \cdot a} = 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)$

$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

• **Lời giải 2:** • **Bổ đề:** $x^3 + y^3 \geq xy(x + y) \quad \forall x, y > 0$

Áp dụng:

$$\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) + (a + b + c) = \sum_{cyc} \left(\frac{a^3}{b^2} + b\right) = \sum_{cyc} \frac{a^3 + b^3}{b^2} \geq \sum_{cyc} \frac{ab(a + b)}{b^2} = \sum_{cyc} \left(\frac{a^2}{b} + a\right)$$

$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 4. [Canada MO 2002] Chứng minh: $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1.

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a + b + c) &= \sum_{cyc} \left(\frac{a^3}{bc} + b + c \right) \geq \sum_{cyc} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3(a + b + c) \\ \Rightarrow \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} &\geq a + b + c. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c > 0 \end{aligned}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 2 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 2

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + (ab + bc + ca) &= \sum_{cyc} \left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + bc \right) \geq \sum_{cyc} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{b^3}{c} \cdot bc} = 3(ab + bc + ca) \\ \Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} &\geq ab + bc + ca. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c > 0 \end{aligned}$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq a^2 + b^2 + c^2, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 2 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 2

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3}\right) + 3(a^2 + b^2 + c^2) &= \sum_{cyc} \left(\frac{a^5}{b^3} + \frac{a^5}{b^3} + b^2 + b^2 + b^2 \right) \\ &\geq \sum_{cyc} 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{a^5}{b^3} \cdot \frac{a^5}{b^3} \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2} = 5(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Rightarrow \frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} &\geq a^2 + b^2 + c^2. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c > 0 \end{aligned}$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 2 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 2

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$4\left(\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3}\right) + (a^2 + b^2 + c^2) = \sum_{\text{cyc}} \left(4 \cdot \frac{a^5}{b^3} + b^2\right) \geq \sum_{\text{cyc}} 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{a^5}{b^3}\right)^4 \cdot b^2} = 5\left(\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}\right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}\right) + (a^2 + b^2 + c^2) = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^4}{b^2} + b^2\right) \geq \sum_{\text{cyc}} 2 \sqrt{\frac{a^4}{b^2} \cdot b^2} = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

$$4\left(\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3}\right) + (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\left(\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}\right) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} \quad (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c > 0$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 0 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 0

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$2\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}\right) + 3 = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{a^3}{b^3} + 1\right) \geq \sum_{\text{cyc}} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{a^3}{b^3} \cdot 1} = 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\geq 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} = 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \quad (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c > 0$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{a^5} \geq \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Hai vế là các biểu thức bậc (-3) nên biểu thức cộng thêm có bậc (-3).

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\sum_{cyc} \left(\frac{3a^2}{b^5} + \frac{2}{a^3} \right) \geq \sum_{cyc} 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{a^2}{b^5} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^3} \right)^2} = 5 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$$

$$3 \left(\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{a^5} \right) + 2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = \sum_{cyc} \left(3 \cdot \frac{a^2}{b^5} + 2 \cdot \frac{1}{a^3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c>0$$

Bài 10. [USAMO 1998] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Chứng minh

Nhận xét: Hai vế là các biểu thức đồng bậc bậc (-3) nhưng chúng ta sẽ đánh giá mẫu số mà không sử dụng kỹ thuật cộng thêm các biểu thức đồng bậc.

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$\text{Bổ đề: } x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq (x+y)(2xy - xy) = (x+y)xy, \forall x, y \geq 0$$

$$\text{Áp dụng: } \sum_{cyc} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)ab + abc} = \sum_{cyc} \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

Bài 11. [APMO 1998] Chứng minh: $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}, \forall a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}} \\ \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}} \\ \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}} = \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}} \\ \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c}} = \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}} \\ \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 12. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Hai vế là các biểu thức đồng bậc bậc 0

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) \\ = \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a}} = 3 \quad (1)$$

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) = \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 13. [Bất đẳng thức Nesbit] Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Đặt $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$; $A = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$; $B = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$

Ta có: $A+B = \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3$

$$A+S = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} = 3$$

$$B+S = \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{b+c}{a+b}} = 3$$

$$\Rightarrow 6 \leq (A+S) + (B+S) = (A+B) + 2S = 3 + 2S \Rightarrow 3 \leq 2S \Rightarrow S \geq \frac{3}{2}$$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} \quad (1)$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{b^2+c^2}{a^2} + 1 + \frac{c^2+a^2}{b^2} + 1 + \frac{a^2+b^2}{c^2} \geq 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \geq 2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có

$$VT(2) \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2}} + 2\sqrt{\frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}} + 2\sqrt{\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{c^2}{a^2}} = 2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 15. [Hi Lạp MO 2007] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} \geq ab+bc+ca$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có .

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + a(a+b-c) \geq 2(b+c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) + 4(bc-ca-ab) \\ & + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + b(b+c-a) \geq 2(c+a-b)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) + 4(ca-ab-bc) \\ & \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} + c(c+a-b) \geq 2(a+b-c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) + 4(ab-bc-ca) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} \geq 5(a^2+b^2+c^2) - 4(ab+bc+ca)$$

Ta chỉ cần chứng minh $5(a^2+b^2+c^2) - 4(ab+bc+ca) \geq ab+bc+ca$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 16. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $3 \leq n \in \mathbb{N}$. Đặt

$$A_1 = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2};$$

$$A_2 = \frac{a_1}{a_n+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}+a_1}$$

Chứng minh rằng: $\max\{A_1, A_2\} \geq \frac{n}{2}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:

$$\begin{aligned} A_1 + \frac{n}{2} &= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2} \left[\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_1+a_3}{a_2+a_3} \right] \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}{(a_2+a_3)^2}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)\dots(a_n+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_n+a_1)}} \\ A_2 + \frac{n}{2} &= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a_1}{a_n+a_2} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2} \left[\frac{a_1+a_2}{a_n+a_2} + \frac{a_1+a_n}{a_n+a_2} \right] \end{aligned}$$

Đề ý rằng: $\text{Max} \left\{ \frac{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_n + a_1)}{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_n + a_1)} \right\} \geq 1$.

Từ đó suy ra: $\text{Max} \left\{ A_1 + \frac{n}{2}, A_2 + \frac{n}{2} \right\} \geq n \Rightarrow \text{Max} \{A_1, A_2\} \geq \frac{n}{2}$.

Bài 17. Chứng minh rằng: $a^{n+k} + b^{n+k} + c^{n+k} \geq a^n b^k + b^n c^k + c^n a^k, \forall n, k \in \mathbb{N}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$(n+k)(a^{n+k} + b^{n+k} + c^{n+k}) = \sum_{\text{cyc}} (na^{n+k} + kb^{n+k}) \geq$$

$$\sum_{\text{cyc}} (n+k) \cdot \sqrt[n+k]{a^{n(n+k)} b^{k(n+k)}} = (n+k) \sum_{\text{cyc}} a^n b^k$$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n, \forall a, b, c > 0; n \in \mathbb{N}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{cases} a^n + (n-1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{a^n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1} a \\ + \quad b^n + (n-1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{b^n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1} b \\ c^n + (n-1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n \geq n \cdot \sqrt[n]{c^n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n(n-1)}} = n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1} c \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^n + b^n + c^n) \geq n \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1} (a+b+c) - 3(n-1) \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n = 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^n$$

Bài 19. Chứng minh: $a^n + b^n + c^n \geq \left(\frac{a+2b}{3} \right)^n + \left(\frac{b+2c}{3} \right)^n + \left(\frac{c+2a}{3} \right)^n, \forall a, b, c > 0; n \in \mathbb{N}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\frac{x^n + y^n + z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^n, \forall x, y, z > 0; n \in \mathbb{N}$

• **Áp dụng:**

$$a^n + b^n + c^n = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^n + b^n + b^n}{3} \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a+b+b}{3} \right)^n = \left(\frac{a+2b}{3} \right)^n + \left(\frac{b+2c}{3} \right)^n + \left(\frac{c+2a}{3} \right)^n$$

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a^2 + 2bc)(b^2 + 2ca)(c^2 + 2ab) \geq abc(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ thì ta có: $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Khi đó, (1) trở thành:

$$\left(1 + \frac{2x}{y}\right)\left(1 + \frac{2y}{z}\right)\left(1 + \frac{2z}{x}\right) \geq (2+x)(2+y)(2+z) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{x}{y} + 2 \sum_{cyc} \frac{y}{x} \geq 2 \sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh các bất đẳng thức: $\sum_{cyc} \frac{x}{y} \geq \sum_{cyc} x$ (1); $\sum_{cyc} \frac{y}{x} \geq \sum_{cyc} xy$ (2)

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$2 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = 3x; \quad 2 \cdot \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3y; \quad 2 \cdot \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \geq 3z \Rightarrow 3 \sum_{cyc} \frac{x}{y} \geq 3 \sum_{cyc} x \Rightarrow (1) \text{ đúng}$$

Trong (1) thay (x, y, z) bởi $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ ta được: $\sum_{cyc} \frac{y}{x} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{x} = \sum_{cyc} xy \Rightarrow (2) \text{ đúng}$.

Từ (1) và (2) suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 21. [IMO 2001] Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét:

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + (y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + zx + zx) \\ &\geq x^2 + 8 \cdot \sqrt[4]{y^2 z^2 (xy)^2 (yz)^2 (zx)^2} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}}} \geq \frac{x}{x + y + z} \quad (*)$$

Đặt $a = x^{\frac{3}{4}}, b = y^{\frac{3}{4}}, c = z^{\frac{3}{4}} \Rightarrow a^{\frac{4}{3}} = x, b^{\frac{4}{3}} = y, c^{\frac{4}{3}} = z$. Thế vào bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} = 1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 22. Chứng minh: $\frac{b(a+c)}{c(a+b)} + \frac{c(b+d)}{d(b+c)} + \frac{d(a+c)}{a(c+d)} + \frac{a(b+d)}{b(d+a)} \geq 4, \forall a, b, c, d > 0. (1)$

Chứng minh

$$\text{Ta có: } VT(1) = (a+c) \left[\frac{b}{c(a+b)} + \frac{d}{a(c+d)} \right] + (b+d) \left[\frac{c}{d(b+c)} + \frac{a}{b(d+a)} \right]$$

$$= (abc + abd + acd + bcd) \left[\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)} + \frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \left[\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right)} \right]$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)} \geq \frac{4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)^2}; \quad \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a} \right)} \geq \frac{4 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)^2}$$

$$\Rightarrow VT(1) \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \left[\frac{4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)^2} + \frac{4 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)^2} \right] = 4 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=c>0, b=d>0$.

Bài 23. Chứng minh rằng: $\forall a, b, c, d \geq 0$ ta có:

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^3+c^3} + \frac{1}{a^3+d^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{b^3+d^3} + \frac{1}{c^3+d^3} \geq \frac{243}{2(a+b+c+d)^3} \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Khi đó ta có:

$$a^3 + b^3 \leq \left(a + \frac{d}{3} \right)^3 + \left(b + \frac{d}{3} \right)^3 \Rightarrow \frac{1}{a^3 + b^3} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{d}{3} \right)^3 + \left(b + \frac{d}{3} \right)^3}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{a^3 + c^3} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{d}{3} \right)^3 + \left(c + \frac{d}{3} \right)^3}; \quad \frac{1}{b^3 + c^3} \geq \frac{1}{\left(b + \frac{d}{3} \right)^3 + \left(c + \frac{d}{3} \right)^3}$$

$$\text{Mặt khác dễ thấy } \left(a + \frac{d}{3} \right)^3 \geq a^3 + d^3 \Rightarrow \frac{1}{a^3 + d^3} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{d}{3} \right)^3}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^3+d^3} \geq \frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3}; \frac{1}{c^3+d^3} \geq \frac{1}{\left(c+\frac{d}{3}\right)^3}. \text{ Đặt } x=a+\frac{d}{3}; y=b+\frac{d}{3}; z=c+\frac{d}{3} \text{ suy ra:}$$

$$VT(1) \geq \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{x^3+z^3} + \frac{1}{y^3+z^3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}; VP(1) = \frac{243}{2(x+y+z)^3}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{x^3+z^3} + \frac{1}{y^3+z^3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \geq \frac{243}{2(x+y+z)^3} \quad (2)$$

$$\text{Thật vậy ta có: } (2) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{2}{x^3+y^3} \right) \geq \frac{243}{(x+y+z)^3}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{2}{x^3+y^3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^3y^3(x^3+y^3)}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{(xy)^3(x^2-xy+y^2)(x+y)}}$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\left[\frac{3xy+(x^2-xy+y^2)}{4}\right]^4 (x+y)}} = \frac{24}{(x+y)^3}. \text{ Tương tự và suy ra}$$

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{2}{x^3+y^3} \right) \geq 24 \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(x+y)^3} \geq \frac{84}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{243}{(x+y+z)^3} \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c, d)$ là một hoán vị của $(x, x, x, 0)$ với $x > 0$.

Bài 24. Chứng minh: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right), \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{3}{2} \left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 3(x + y + z) \quad (1). \text{ Theo AM - GM ta có}$$

$$VT(1) = \left(x^2 + x^2 + \frac{1}{x}\right) + \left(y^2 + y^2 + \frac{1}{y}\right) + \left(z^2 + z^2 + \frac{1}{z}\right) \geq 3(x + y + z).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

IV. ĐỒNG BẬC BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $a + b + c = 3$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 1 ở hai vế:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{a+b}{8} \cdot \frac{a+c}{8}} = \frac{3a}{4} \\ \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{b+a}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} \cdot \frac{b+c}{8} \cdot \frac{b+a}{8}} = \frac{3b}{4} \\ \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{c+b}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \cdot \frac{c+a}{8} \cdot \frac{c+b}{8}} = \frac{3c}{4} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a+b+c}{4} = \frac{3}{4} \text{ (đpcm)}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq 1$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $a + b + c = 3$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 1 ở hai vế:

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq \frac{a+b+c}{3}. \text{ Sử dụng AM - GM, ta có:}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{9a^3}{b(2c+a)} + 3b + (2c+a) &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9a^3}{b(2c+a)} \cdot 3b(2c+a)} = 9a \\ \frac{9b^3}{c(2a+b)} + 3c + (2a+b) &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9b^3}{c(2a+b)} \cdot 3c(2a+b)} = 9b \\ \frac{9c^3}{a(2b+c)} + 3a + (2b+c) &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9c^3}{a(2b+c)} \cdot 3a(2b+c)} = 9c \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9 \left[\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \right] + 6(a+b+c) \geq 9(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq \frac{a+b+c}{3} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{1}{3}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 2 ở hai vế:

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{9a^3}{b+2c} + a(b+2c) \geq 2\sqrt{\frac{9a^3}{b+2c} \cdot a(b+2c)} = 6a^2 \\ & + \frac{9b^3}{c+2a} + b(c+2a) \geq 2\sqrt{\frac{9b^3}{c+2a} \cdot b(c+2a)} = 6b^2 \\ & \frac{9c^3}{a+2b} + c(a+2b) \geq 2\sqrt{\frac{9c^3}{a+2b} \cdot c(a+2b)} = 6c^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}\right) + 3(ab+bc+ca) \geq 6(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}\right) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0 ở hai vế:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) \\ & \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}} = \sqrt{\frac{b}{b+c} \cdot \frac{b}{b+a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} \right) \\ & \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \sqrt{\frac{c}{c+a} \cdot \frac{c}{c+b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} \right) = \frac{3}{2}$$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{9}{2}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0 ở hai vế:

$$\frac{c(a+b)+ab}{a(a+b)} + \frac{a(b+c)+bc}{b(b+c)} + \frac{b(c+a)+ca}{c(c+a)} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{b} + \frac{b+c}{c} + \frac{c+a}{a}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) \geq \frac{15}{2} \quad (1)$$

Ta có: VT (1) = $\frac{a+b}{4b} + \frac{b+c}{4c} + \frac{c+a}{4a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{3}{4} \left(\frac{a+b}{b} + \frac{b+c}{c} + \frac{c+a}{a}\right)$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{a+b}{4b} \cdot \frac{b+c}{4c} \cdot \frac{c+a}{4a} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{b+c} \cdot \frac{a}{c+a}} + \frac{3}{4} \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 3\right) = \frac{15}{2}$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c > 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

• **Áp dụng:**

Sử dụng giả thiết $a+b+c=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0 ở hai vế:

$$\frac{a(a+b+c)}{(b+c)^2} + \frac{b(a+b+c)}{(c+a)^2} + \frac{c(a+b+c)}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Ta có: VT(1) $\geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 7. [France Pre-MO 2005] Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 9 \Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} &\geq 2\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2}} = 2b^2 \\ \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} &\geq 2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2a^2}{b^2}} = 2c^2 \\ \frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} &\geq 2\sqrt{\frac{c^2a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{c^2}} = 2a^2 \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} &\geq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} &= \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \\ \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} &= \frac{ca}{\sqrt{b(a+b+c)+ca}} = \frac{ca}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} \right) \\ \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} &= \frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}} = \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right) \\ S &\leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{bc+ab}{2(c+a)} + \frac{ca+ab}{2(c+b)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 9. [IMO Shortlist 1998] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{1+b}{8} \cdot \frac{1+c}{8}} = \frac{3a}{4} \\ \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} \cdot \frac{1+c}{8} \cdot \frac{1+a}{8}} = \frac{3b}{4} \\ \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \cdot \frac{1+a}{8} \cdot \frac{1+b}{8}} = \frac{3c}{4} \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} &\geq \frac{a+b+c}{2} - \frac{3}{4} \geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{abc}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Bài 10. [IMO 1995] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $abc = 1$ biến đổi và đổi biến số để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0:

$$\frac{abc}{a^3(b+c)} + \frac{abc}{b^3(c+a)} + \frac{abc}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (2) \text{ Đặt}$$

$$x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \text{ với } x, y, z > 0, xyz = 1 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = x \\ \frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{y^2}{z+x} \cdot \frac{z+x}{4}} = y \\ \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{z^2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{4}} = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 11. [IMO Shortlist 1996] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y^2(x+y), \forall x, y > 0$

• **Áp dụng:** Sử dụng **bổ đề** ta có:

$$\begin{cases} \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{1}{ab(a+b)+1} = \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c} \\ \frac{bc}{b^5+c^5+bc} \leq \frac{bc}{b^2c^2(b+c)+bc} = \frac{1}{bc(b+c)+1} = \frac{abc}{bc(b+c)+abc} = \frac{a}{a+b+c} \\ \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{ca}{c^2a^2(c+a)+ca} = \frac{1}{ca(c+a)+1} = \frac{abc}{ca(c+a)+abc} = \frac{b}{a+b+c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 8 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1+a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^3}} \geq 1$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+a^3}} &= \frac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a+a^2)}} \geq \frac{2}{(1+a)+(1-a+a^2)} = \frac{2}{2+a^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} &= \frac{1}{\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)}} \geq \frac{2}{(1+b)+(1-b+b^2)} = \frac{2}{2+b^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1+c^3}} &= \frac{1}{\sqrt{(1+c)(1-c+c^2)}} \geq \frac{2}{(1+c)+(1-c+c^2)} = \frac{2}{2+c^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^3}} &\geq 2 \left(\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \right) \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{\text{or}} (2+b^2)(2+c^2) \geq \frac{1}{2}(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)$

$$\Leftrightarrow 8 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{2}a^2b^2c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 12$.

Bài 13. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \geq 2$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} \frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} &\geq \frac{a^2 \cdot 2\sqrt{bc}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} = \frac{2a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} = \frac{2x}{y+2z} \\ \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} &\geq \frac{b^2 \cdot 2\sqrt{ca}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} = \frac{2b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} = \frac{2y}{z+2x} \\ \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} &\geq \frac{c^2 \cdot 2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} = \frac{2c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} = \frac{2z}{x+2y} \end{aligned} \right. \quad \text{trong đó} \quad \begin{cases} x = a\sqrt{a} > 0 \\ y = b\sqrt{b} > 0 \\ z = c\sqrt{c} > 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \geq \frac{2x}{y+2z} + \frac{2y}{z+2x} + \frac{2z}{x+2y} = T$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} y+2z=m \\ z+2x=n \\ x+2y=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4n+p-2m}{9} \\ y=\frac{4p+m-2n}{9} \\ z=\frac{4m+n-2p}{9} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2}{9} \left(\frac{4n+p-2m}{m} + \frac{4p+m-2n}{n} + \frac{4m+n-2p}{p} \right)$$

$$= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{p} + \frac{p}{n} \right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{n} + \frac{n}{p} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} \left(4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{p}{n}} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{m} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p}} - 6 \right) = 2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

V. PHỐI HỢP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẠC NGƯỢC CHIỀU

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{a^4 + b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \geq 40$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây:

$$\frac{1}{a^4 + b^4} \leq \frac{2}{(a^2 + b^2)^2} \leq \frac{8}{(a + b)^4} = 8; \quad \frac{2}{a^2 b^2} \geq \frac{2}{\left(\frac{a + b}{2}\right)^4} = 32$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^4 + b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} = \left(\frac{1}{a^4 + b^4} + \frac{1}{2a^2 b^2} \right) + \frac{3}{2a^2 b^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(a^4 + b^4)2a^2 b^2}} + \frac{3}{2a^2 b^2} \\ &\geq \left(\frac{2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{ab} \right)^2 + \frac{1}{2a^2 b^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} \right)^2 + \frac{1}{2a^2 b^2} = \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} \right) \right]^2 + \frac{1}{2a^2 b^2} = 2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right)^2 + \frac{1}{2a^2 b^2} \\ &\geq 2 \left(\frac{4}{(a^2 + b^2) + 2ab} \right)^2 + \frac{1}{2(ab)^2} \geq \frac{32}{(a + b)^4} + \frac{1}{2 \left(\frac{a + b}{2} \right)^4} = \frac{40}{(a + b)^4} \geq \frac{40}{1^4} = 40. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 2. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4\sqrt{2} \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 10, \forall a, b > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \quad 4\sqrt{2} \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$$

Bất đẳng thức tương đương $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 4\sqrt{2} \left(\sqrt{2} - \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{4\sqrt{2}ab} \geq \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{4\sqrt{2}ab} \geq \frac{(a - b)^2}{\sqrt{a^2 + b^2} [\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)]}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)] \geq 4\sqrt{2}ab$. Sử dụng **AM - GM** ta có:

$$\sqrt{a^2 + b^2} [\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)] \geq \sqrt{2ab} (\sqrt{4ab} + 2\sqrt{ab}) = 4\sqrt{2}ab$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$

Chứng minh

• **Nhận xét:** Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{3}{(a + b + c)^2} = 3; \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca} \geq \frac{27}{(a + b + c)^2} = 27$$

• **Bổ đề:** $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \quad \forall x, y, z$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ca}} = \frac{3}{\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca}} \geq \frac{3}{\frac{ab + bc + ca}{3}} = \frac{9}{ab + bc + ca}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) + \frac{7}{ab + bc + ca}$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{1}{ab + bc + ca} \cdot \frac{1}{ab + bc + ca}} + \frac{7}{ab + bc + ca}$$

$$= \frac{9}{(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)} + \frac{21}{3(ab + bc + ca)} \geq$$

$$\frac{9}{(a + b + c)^2} + \frac{21}{(a + b + c)^2} = \frac{30}{(a + b + c)^2} \geq \frac{30}{1^2} = 30. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{3(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2$ (1)

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{3(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq 1; \quad \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq 1$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2; \quad b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2; \quad c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2$$

$$ab(a^2 + b^2) \geq 2a^2b^2; \quad bc(b^2 + c^2) \geq 2b^2c^2; \quad ca(c^2 + a^2) \geq 2c^2a^2$$

Cộng theo vế sáu bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 5. Chứng minh rằng: $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq 3 + \sqrt{3} \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3; \quad \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq \sqrt{3}$$

Theo **AM - GM** ta có: $\left(\frac{ab^2}{c} + ac\right) + \left(\frac{bc^2}{a} + ba\right) + \left(\frac{ca^2}{b} + cb\right) \geq 2(ab + bc + ca)$ suy ra

$$\frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} \geq ab + bc + ca. \text{ Khi đó ta có:}$$

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) = (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + \left(\frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} \right) \geq (a + b + c)^2, \text{ suy ra}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}. \text{ Từ đó ta có đánh giá}$$

$$S \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + \frac{a + b + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + \frac{\sqrt{3}(a + b + c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} - \frac{(\sqrt{3} - 1)(a + b + c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\geq 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\frac{(a + b + c)^3}{(ab + bc + ca)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = P. \text{ Mặt khác:}$$

$$(ab + bc + ca)^2 (a^2 + b^2 + c^2) \leq \left[\frac{2(ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2)}{3} \right]^3 = \frac{(a + b + c)^6}{27}$$

$$\text{Từ đó suy ra } S \geq P \geq 2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 2 \cdot \sqrt[4]{81} - (3 - \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}.$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{(a+b+c)^2}{abc} + \frac{54}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \geq \frac{81}{a+b+c} \quad \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{54(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \geq 81$.

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây.

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27; \quad \frac{54(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \leq 54$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho ba số dương, ta có

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{27(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} + \frac{27(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{27^2(a+b+c)^5}{3abc(a^2+b^2+c^2)}}$$

Cuối cùng ta chỉ việc chứng minh $(a+b+c)^5 \geq 81abc(a^2+b^2+c^2)$

Theo **AM – GM**: $3abc(a+b+c) \leq (ab+bc+ca)^2$

$$\Rightarrow 81abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 27(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\leq (2(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2))^3 = (a+b+c)^6 \Rightarrow 81abc(a^2+b^2+c^2) \leq (a+b+c)^5$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 12$

Chứng minh

Nhận xét: Ta có hai bất đẳng thức ngược chiều: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq 3; \quad \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \leq 9$

Sử dụng $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ và **AM – GM** ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = 3 + \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}$$

$$= 3 + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geq 3 + \frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{ab+bc+ca}$$

$$= 3 + \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} - 9 = \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} - 6$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} - 6 + \frac{9(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 12$, hay

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2, \text{ đây chính là bất đẳng thức AM – GM cho hai số.}$$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 16$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} \geq 8; \quad \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq 8$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 2 \sqrt{\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} \cdot \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được

$$27(a^2 + b^2 + c^2)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(ab + bc + ca)(a+b+c)^3 \quad (1)$$

Sử dụng đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab + bc + ca) - abc$

và theo AM – GM: $abc \leq \frac{1}{9}(a+b+c)(ab + bc + ca)$

$$\text{ta được } (a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Chú ý. Ta cũng có một số kết quả tương tự sau với mọi $a, b, c \geq 0$.

$$1. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

$$2. \frac{4(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2} \geq 4(a+b+c)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

$$3. \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \geq 12$$

$$4. \frac{8(a^3+b^3+c^3)}{ab+bc+ca} + \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{2}{3}(a+b+c)$$

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}; \quad \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Bổ đề: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$, (I) $\forall x, y, z \geq 0$

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó

$$VT(I) - VP(I) = x(x-y)^2 + z(y-z)^2 + (x-y+z)(x-y)(y-z) \geq 0$$

Áp dụng: Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64(abc)^2 \Leftrightarrow \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \left[\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^3$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(c+a)(c+b) + 4abc \geq 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \text{ đúng theo bổ đề.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ và $k \geq \frac{2}{9}$. Chứng minh: $S = k \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 3k + 3$

Chứng minh

Nhận xét: Ta có hai bất đẳng thức ngược chiều: $k \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq 3k$; $\frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \leq 3$

Bất đẳng thức tương đương $\Leftrightarrow k \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{abc} \geq 3 - \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{k(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{2abc} \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} \geq \frac{2}{k}. \text{ Ta có VT} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt{a^2 b^2 c^2}}{abc} = 9 \geq \frac{2}{k}, \forall k \geq \frac{2}{9}$$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{13}{6} \quad \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Đề ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}; \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Bất đẳng thức tương đương $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)} + \frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (c+a)(c+b) &\leq \left[\frac{(c+a)+(c+b)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}[2c+(a+b)]^2 \leq \frac{1}{4}[(\sqrt{2})^2 + 1^2][(c\sqrt{2})^2 + (a+b)^2] \\ &= \frac{3}{4}[2c^2 + (a+b)^2] \leq \frac{3}{4}[2c^2 + 2(a^2 + b^2)] = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Chú ý: $k = \sqrt{3} - 1$ là hằng số tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng $\forall a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{3}{2} + k$$

VI. KỸ THUẬT CHUẨN HÓA BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN SỐ

1. Định nghĩa hàm thuần nhất ba biến số

Hàm số $f(a, b, c)$ là hàm thuần nhất bậc k trên $D \Leftrightarrow f(ta, tb, tc) = t^k f(a, b, c), \forall a, b, c, t \in D$

2. Chuẩn hóa bất đẳng thức

Xét bất đẳng thức thuần nhất 3 biến số a, b, c và đồng bậc: $f(a, b, c) \geq g(a, b, c)$

Phép đặc biệt hóa bởi một hàm đối xứng với a, b, c tức là tạo ra một đẳng thức $\varphi(a, b, c) = \lambda$ mà không làm thay đổi bản chất của bất đẳng thức $f(a, b, c) \geq g(a, b, c)$ gọi là phép chuẩn hóa bất đẳng thức. Các phép chuẩn hóa thường gặp là:

$$a + b + c = \lambda; ab + bc + ca = \lambda; abc = \lambda; a^2 + b^2 + c^2 = \lambda$$

3. Chú ý: Kỹ thuật chuẩn hóa được ứng dụng rộng rãi trong nhiều phương pháp khác nhau có mặt trong sách. Sau đây là 1 số bài toán chuẩn hóa chỉ sử dụng **AM - GM**.

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3} + \frac{(a+b)^2}{ab}$

Chứng minh.

Nhận xét: Đặt $P = f(a, b) = \frac{a^2b + ab^2}{a^3 + b^3} + \frac{(a+b)^2}{ab}$ suy ra $f(ta, tb) = t^0 f(a, b)$.

Như vậy $f(a, b)$ là hàm thuần nhất bậc 0 với các biến $a, b > 0$.

Ta chuẩn hóa bất đẳng thức bởi điều kiện $a + b = 2$.

Đặt $t = a^2b + ab^2 = ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = 8 - 3t$, khi đó $P = \frac{t}{8-3t} + \frac{1}{ab} = \frac{t^4}{t^3(8-3t)} + \frac{4}{ab}$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có: $t^3(8-3t) = t.t.t.(8-3t) \leq \left(\frac{8}{4}\right)^4 = 16$.

Từ đó suy ra $P = \frac{t^4}{t^3(8-3t)} + \frac{4}{ab} \geq \frac{t^4}{16} + \frac{4}{ab} = \frac{a^4b^4(a+b)^4}{16} + \frac{4}{ab}$

$$= a^4b^4 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab} \geq 5 \cdot \sqrt[4]{a^4b^4 \cdot \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ab}} = 5$$

Dấu bằng xảy ra với $a + b = 2$ là $a = b = 1$, nên dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b > 0$

Bình luận: Nếu đặt $x = \frac{2a}{a+b}, y = \frac{2b}{a+b}$ thì $P = \frac{x^2y + xy^2}{x^3 + y^3} + \frac{(x+y)^2}{xy}$ với $x, y > 0$ và

$x + y = 2$. Ta thấy biểu thức P không thay đổi về bản chất toán học nhưng các biến x, y thì bị ràng buộc bởi điều kiện $x + y = 2$. Đó là lí do tại sao ta có thể chuẩn hóa $a + b = 2$.

Ngoài ra ta hoàn toàn có thể chọn $ab = 1$ hay $a^3 + b^3 = 1 \dots$ nhưng như thế sẽ khó đi đến kết quả

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Nhận xét: Đặt $f(a, b, c) = \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}; g(a, b, c) = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$. Khi đó:

$f(ta, tb, tc) = t \cdot f(a, b, c); g(ta, tb, tc) = t \cdot g(a, b, c) \Rightarrow f, g$ là 2 hàm thuần nhất bậc 1.

Đặt $ab+bc+ca=3t^2$ và $x=\frac{a}{t}, y=\frac{b}{t}, z=\frac{c}{t} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$. Khi đó:

$$f(a, b, c) \geq g(a, b, c) \Leftrightarrow f(x, y, z) \geq g(x, y, z).$$

Như vậy ta có thể chuẩn hóa $ab+bc+ca=3$ và chứng minh:

$$f(a, b, c) = \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} = g(a, b, c) \quad (1)$$

Thật vậy, sử dụng $\begin{cases} (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \\ 3 = ab+bc+ca \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c \geq 3 \\ abc \leq 1 \end{cases}$

Ta có: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 3(a+b+c) - abc \geq 8$

$$\text{Khi đó: } f(a, b, c) = \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq 1 = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} = g(a, b, c)$$

Bình luận: Ta cũng có thể chuẩn hóa $(a+b)(b+c)(c+a)=8$ và giải tương tự.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b+c)^3} + \frac{b}{(c+a)^3} + \frac{c}{(a+b)^3} \geq \frac{27}{8(a+b+c)^2}$

Chứng minh

Bổ đề: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \forall x, y, z > 0$

$$\text{CM: } (x+y+z) \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right) = (a^2+b^2+c^2) + \left(\frac{a^2y}{x} + \frac{b^2z}{y} + \frac{c^2x}{z} \right) + \left(\frac{a^2z}{x} + \frac{b^2x}{y} + \frac{c^2y}{z} \right)$$

$$\geq (a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{\frac{a^2y}{x} \cdot \frac{b^2x}{y}} + 2\sqrt{\frac{b^2z}{y} \cdot \frac{c^2y}{z}} + 2\sqrt{\frac{c^2x}{z} \cdot \frac{a^2z}{x}} = (a+b+c)^2$$

Áp dụng: Chuẩn hoá $a+b+c=1$ và sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\frac{a}{(b+c)^3} = \frac{a}{(1-a)^3} = \frac{2a^2}{2a(1-a)(1-a)(1-a)} \geq \frac{2a^2}{\left[\frac{2a+(1-a)+(1-a)}{3} \right]^3 (1-a)} = \frac{27a^2}{4(1-a)}$$

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{(c+a)^3} \geq \frac{27b^2}{4(1-b)}$ và $\frac{c}{(a+b)^3} \geq \frac{27c^2}{4(1-c)}$.

Sử dụng bổ đề suy ra:

$$\frac{a}{(b+c)^3} + \frac{b}{(c+a)^3} + \frac{c}{(a+b)^3} \geq \frac{27}{4} \left[\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} \right] \geq \frac{27}{4} \left[\frac{(a+b+c)^2}{3-(a+b+c)} \right] = \frac{27}{8}$$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{4a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{4b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{4c}{a+b}\right) \geq 25$

Chứng minh

Chuẩn hoá $a+b+c=2$, bất đẳng thức có dạng $\left(1 + \frac{4a}{2-a}\right) \left(1 + \frac{4b}{2-b}\right) \left(1 + \frac{4c}{2-c}\right) \geq 25$

$$\Leftrightarrow (2+3a)(2+3b)(2+3c) \geq 25(2-a)(2-b)(2-c) \Leftrightarrow 52abc - 32(ab+bc+ca) + 32 \geq 0 (*)$$

• Trường hợp 1: $ab+bc+ca \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức (*) luôn đúng.

• Trường hợp 2: $ab+bc+ca > 1$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

$$\text{Ta được } abc \geq (2-2a)(2-2b)(2-2c) \Leftrightarrow 9abc \geq 8(ab+bc+ca) - 8$$

$$\text{Suy ra } 52abc = 16abc + 4.9abc \geq 16abc + 32(ab+bc+ca) - 32 \geq 32(ab+bc+ca) - 32$$

Vậy (*) đúng với mọi $a, b, c \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 4$ (1)

Chứng minh

Chuẩn hóa $a+b+c=1$ và đặt $u = ab+bc+ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 1-2u$.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{u}{1-2u} = \frac{u^3}{u \cdot u \cdot (1-2u)} \geq \frac{u^3}{\left[\frac{u+u+(1-2u)}{3} \right]^3} = \frac{27(ab+bc+ca)^3}{(27abc)^2}$$

Từ đó và bất đẳng thức AM - GM ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} &\geq 27abc + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 27abc + \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \geq \\ &\geq 4\sqrt[4]{27abc \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \right)^3} = 4. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c>0. \end{aligned}$$

Bài 6. Chứng minh: $\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{9} \geq \sqrt{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}{8}} \cdot \forall a, b, c > 0$

Chứng minh.

Chuẩn hoá $a+b+c=3$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$8(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab). \text{ Sử dụng bất đẳng thức AM - GM}$$

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{3} \right)^3$$

Đặt $u=ab+bc+ca \Rightarrow u \leq 3$ và $a^2+b^2+c^2=9-2u$. Ta cần chứng minh

$$8(9-2u)^2 \geq 9\left(\frac{9-u}{3}\right)^3 \Leftrightarrow (u-3)(u^2+72u-405) \geq 0 \text{ luôn đúng vì } u \leq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$1. \frac{\sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}}{3abc} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{ab+bc+ca} \quad 2. \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$$

Chứng minh.

1. Chuẩn hóa $a^3+b^3+c^3=3$. Ta cần chứng minh $ab+bc+ca \geq abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

Theo AM - GM: $3=a^3+b^3+c^3 \geq 3abc \Rightarrow abc \leq 1$.

Mặt khác:

$$ab+bc+ca-\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) = \frac{1}{2} \left[a(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + b(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 + c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \right] \geq 0$$

Suy ra $ab+bc+ca \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ (đpcm)

2. Chuẩn hóa $abc=1$. Ta cần chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq 8(a+b+c)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho đúng nếu ta chứng minh được

$$(ab+bc+ca)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq 9. \text{ Bất đẳng thức này luôn đúng theo AM - GM.}$$

Chú ý. Bạn đọc có thể chứng minh được bất đẳng thức tương tự sau đây

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \geq \left(\frac{a+b+c}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \right)^2$$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{(a+b+c)^3}{abc} + 27\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 54$ (1)

Chứng minh.

Cách 1. (Mehdi Cherif) Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc} \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+ac+bc)} + \frac{2}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+ac+bc)}$$

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{3(ab+ac+bc)}{(a+b+c)^2}$. Từ đó bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu

$$\text{ta chứng minh được bất đẳng thức } \frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{81(ab+ac+bc)}{(a+b+c)^2} \geq 54$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$, khi đó ta phải chứng minh $\frac{1}{abc} + 81(ab+ac+bc) \geq 54$ (2)

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $\frac{1}{abc} \geq \frac{9}{ab+ac+bc}$

Do đó (2) đúng nếu chứng minh được $\frac{9}{ab+ac+bc} + 81(ab+ac+bc) \geq 54$.

Thật vậy biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được $9[3(ab+bc+ca)-1]^2 \geq 0$ (đúng)

Cách 2. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $abc \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{3(a+b+c)^4}{(ab+bc+ca)^2} + 27 \cdot \sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 54$

Sử dụng $AM - GM$ ta có

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + \sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$\text{và } (ab+bc+ca) \cdot (ab+bc+ca) \cdot (a^2+b^2+c^2) \leq \frac{1}{27} (a+b+c)^6$$

$$\text{Từ hai đánh giá này suy ra } \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + \sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{\frac{1}{27} (a+b+c)^6}} = 2$$

$$\text{hay } \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + 27\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 54. \text{ Ta sẽ chứng minh}$$

$$\frac{3(a+b+c)^4}{(ab+bc+ca)^2} \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \text{ hay } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \text{ (đúng)}$$

Cách 3. (Dương Đức Lâm) Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$.

Đặt $t = ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ thì $a^2+b^2+c^2 = 9-2t$. Sử dụng AM - GM ta có

$$\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt[3]{\frac{t}{9-2t}} = \frac{3t}{\sqrt[3]{t \cdot t \cdot (9-2t)}} \geq \frac{3t}{t+t+(9-2t)} = \frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{27}{abc} + 27\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 54$. Sử dụng AM - GM ta có

$$\frac{27}{abc} + 27\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 2\frac{1}{abc}) + \frac{9}{abc} \geq 9.5\sqrt[3]{a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{abc} \cdot \frac{1}{abc}} + 9 = 54$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Nhận xét. Cách giải 3 giúp ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn sau đây:

$$\frac{2(a+b+c)^3}{abc} + 81\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 135, \forall a, b, c > 0$$

Bài 9. Cho x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $(x+y+z)xyz \geq (xy+yz+zx)\sqrt[3]{(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$

Chứng minh

Đặt $a=y+z-x, b=z+x-y, c=x+y-z$ thì $a, b, c \geq 0$ và $x=\frac{b+c}{2}, y=\frac{c+a}{2}, z=\frac{a+b}{2}$ Chuẩn hóa $abc=1$. Bất đẳng thức trở thành

$$(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2[(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)]$$

$$\Leftrightarrow a+b+c \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}. \text{ Theo AM - GM:}$$

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq \frac{2}{2\sqrt{ab}} + \frac{2}{2\sqrt{bc}} + \frac{2}{2\sqrt{ca}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{a+1+b+1+c+1}{2} \leq a+b+c$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a+b+c} + \sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{a+b+c} + \sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{a+b+c} + \sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + 2\sqrt{a+b+c} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{a+b}\right) \geq 9 + 3\sqrt{3}$$

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta nhận được bất đẳng thức

$$6\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{a+b}\right) \geq 9 + 3\sqrt{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có $6\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{6 \cdot 9}{2(a+b+c)} = 9$

Cuối cùng ta cần chứng minh $\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. Theo **AM - GM**:

$$\frac{a}{(b+c)^2} = \frac{a}{(3-a)^2} = \frac{2a^2}{2a(3-a)(3-a)} \geq \frac{2a^2}{\left(\frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3}\right)^3} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b+c} \geq \frac{a}{2}$$

Tương tự suy ra $\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$. (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)^2 \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + 3$ (1)

Chứng minh

Chuẩn hóa $abc=1$ thì bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + 3$.

Theo **AM - GM** ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} + \frac{b}{2\sqrt{ca}} + \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})$

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau

$(a+b+c)^2 \geq 2(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}) + 3$. Theo **AM - GM** ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$, suy ra

$$6(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}) + 9 \leq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}) + 3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$3(a+b+c)^2 \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}) + 3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6(ab + bc + ca) \geq 2(\sqrt{ab}(a+b) + \sqrt{bc}(b+c) + \sqrt{ca}(c+a)) + 3\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\Leftrightarrow a(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + b(\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 + c(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^4 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^4 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^4 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

VII. BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẠC DẠNG CỘNG MẪU SỐ

1. **Dạng tổng quát:** Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có:

- **Dạng cộng mẫu số:** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$
- **Dạng tích nghịch đảo:** $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n > 0$.

Chứng minh: Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \geq \frac{n}{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} = \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

$$\text{Hoặc } (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot n \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}} = n^2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Ý nghĩa: Khi gặp một biểu thức là tổng của n phân số, chúng ta thường tiếp cận theo cách biến đổi đẳng thức với phép quy đồng mẫu số rất phức tạp. Tuy nhiên nếu tiếp cận theo cách đánh giá bởi bất đẳng thức trên thì ta nhận được một phân số được thu gọn với mẫu là tổng các mẫu số của n phân số đã cho. Có rất nhiều bất đẳng thức ứng dụng cả hai dạng trên nhưng ở đây chúng tôi sẽ chỉ giới thiệu các bài tập minh họa cho dạng cộng mẫu số của bất đẳng thức. Chúng ta sẽ gặp lại kỹ thuật này được mở rộng trong phần giới thiệu về kỹ thuật mở đầu của bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz*.

2. Các trường hợp đặc biệt

$\begin{matrix} n \\ \text{Dạng} \end{matrix}$	$n=2: \forall x, y > 0$	$n=3: \forall x, y, z > 0$	$n=4: \forall x, y, z, t > 0$
Dạng 1	$(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$	$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$	$(x+y+z+t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$
Dạng 2	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \geq \frac{16}{x+y+z+t}$
Điều kiện	$x = y$	$x = y = z$	$x = y = z = t$

3. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 2$ ta có:

$$VT = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \right] \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} \right) = 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ca} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 3$ ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ca} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq \frac{9}{(a^2+2bc) + (b^2+2ca) + (c^2+2ab)} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 9$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a+b \leq 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} \geq 6$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 2$ ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{(a^2+b^2) + 2ab} + \frac{1}{2ab} \\ &\geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+b)^2} = \frac{6}{(a+b)^2} \geq \frac{6}{1^2} = 6. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a+b \leq 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab \geq 7$

Chứng minh

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \frac{1}{4ab} + \left(\frac{1}{4ab} + 4ab \right) \\ &\geq \frac{4}{(a^2+b^2) + 2ab} + \frac{1}{4ab} + \left(\frac{1}{4ab} + 4ab \right) \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4ab} \cdot 4ab} \\ &= \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} + 2 = \frac{5}{(a+b)^2} + 2 \geq 7. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 5. [Tập chí THPT] Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a-d}{b+d} + \frac{d-b}{c+b} + \frac{b-c}{a+c} + \frac{c-a}{d+a}$$

Giải

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 2$ ta có:

$$\begin{aligned} S + 4 &= \left(\frac{a-d}{b+d} + 1 \right) + \left(\frac{d-b}{c+b} + 1 \right) + \left(\frac{b-c}{a+c} + 1 \right) + \left(\frac{c-a}{d+a} + 1 \right) \\ &= \frac{a+b}{d+b} + \frac{d+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+d}{a+d} = (a+b) \left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a} \right) + (c+d) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d} \right) \\ &\geq (a+b) \frac{4}{(d+b)+(c+a)} + (c+d) \frac{4}{(b+c)+(a+d)} = \frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 4 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S \geq 0$. Với $a = b = c = d > 0$ thì Min $S = 0$

Bài 6. Cho $a, b, c \in (0, 1]$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{3}{3+abc}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 3$ ta có:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{9}{(a+3b)+(b+3c)+(c+3a)} = \frac{9}{4(a+b+c)} \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{9}{4(a+b+c)} \geq \frac{3}{3+abc} \quad (2) \Leftrightarrow 9 + 3abc \geq 4(a+b+c) \quad (3)$

Đặt $a = 1-x; b = 1-y; c = 1-z$ với $x, y, z \in [0, 1)$, khi đó (3)

$$\Leftrightarrow 9 + 3(1-x)(1-y)(1-z) \geq 4(3-x-y-z) \Leftrightarrow x+y+z+3(xy+yz+zx) \geq 3xyz$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** với $x, y, z \in [0, 1)$ ta có

$$x+y+z+3(xy+yz+zx) \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 12xyz \geq 3xyz \Rightarrow (3) \text{ đúng}$$

$\Rightarrow (2)$ đúng. Từ (1), (2) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 7. [British Mathematical Olympiad - 1992] Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq S = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số ta có:

$$S \geq \frac{6^2}{(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d)} = \frac{12}{a+b+c+d}$$

$$S \leq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d} \right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4 \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} \right) \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 4$ ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4^2}{a+a+a+b} = \frac{4^2}{3a+b} \\ & + \frac{3}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4^2}{b+b+b+c} = \frac{4^2}{3b+c} \\ & \frac{3}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4^2}{c+c+c+a} = \frac{4^2}{3c+a} \end{aligned}$$

Suy ra $4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4^2 \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} \right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4 \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} \right)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 9. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 3 \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \right)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{36}{2a+(a+b+c+d)} \geq \frac{36}{2a+2} = \frac{18}{1+a} \\ & + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} \geq \frac{36}{2b+(a+b+c+d)} \geq \frac{36}{2b+2} = \frac{18}{1+b} \\ & \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{36}{2c+(a+b+c+d)} \geq \frac{36}{2c+2} = \frac{18}{1+c} \\ & \frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{36}{2d+(a+b+c+d)} \geq \frac{36}{2d+2} = \frac{18}{1+d} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 6 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 18 \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \right)$ (đpcm)

Bài 10. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{27}{4}$

Chứng minh

Bổ đề: $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$

Áp dụng: Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 3$ ta có:

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{9}{(a+b+c) + (ab+bc+ca)} \geq \frac{9}{(a+b+c) + \frac{1}{3}(a+b+c)^2} = \frac{27}{4}$$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a^3c + b^3a + c^3b = abc$

Chứng minh rằng: $S = \frac{b}{a^2+ab} + \frac{c}{b^2+bc} + \frac{a}{c^2+ca} \geq \frac{9}{2}$

Chứng minh

Bổ đề: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c; \forall a, b, c > 0$

Áp dụng: $a^3c + b^3a + c^3b = abc \Rightarrow 1 = \frac{a^3c + b^3a + c^3b}{abc} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

$$S = \frac{1}{\frac{a^2}{b} + a} + \frac{1}{\frac{b^2}{c} + b} + \frac{1}{\frac{c^2}{a} + c} \geq \frac{9}{\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + (a+b+c)} \geq \frac{9}{2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)} = \frac{9}{2}$$

Bài 12. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^3 + 2abc + c^3}{a^2 + bc} + \frac{c^3 + 2abc + a^3}{b^2 + ca} + \frac{a^3 + 2abc + b^3}{c^2 + ab} \geq 2(a + b + c) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{b^3 + 2abc + c^3}{a^2 + bc} + a \right) \geq 3(a + b + c) \Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 + bc} \right) \geq 3(a + b + c)$$

Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 3$ ta có: $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 + bc} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$

Suy ra (1) đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó

$$VT(2) - VP(2) = a(a - b)^2 + c(b - c)^2 + (c + a - b)(a - b)(b - c) \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 13. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 2$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+b+2c} &= ab \cdot \frac{1}{(a+c)+(b+c)} \leq ab \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \\ + \frac{bc}{b+c+2a} &= bc \cdot \frac{1}{(b+a)+(c+a)} \leq bc \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a} \right) \\ + \frac{ca}{c+a+2b} &= ca \cdot \frac{1}{(c+b)+(a+b)} \leq ca \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+b} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ca+ab}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} \right) = \frac{a+b+c}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. [Tập chí TTT] Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 3$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+3b+2c} &= ab \cdot \frac{1}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq ab \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right) \\ + \frac{bc}{b+3c+2a} &= bc \cdot \frac{1}{(b+a)+(c+a)+2c} \leq bc \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2c} \right) \\ + \frac{ca}{c+3a+2b} &= ca \cdot \frac{1}{(c+b)+(a+b)+2a} \leq ca \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a+b+c}{2} + \frac{ab+bc}{a+c} + \frac{ab+ca}{b+c} + \frac{bc+ca}{a+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a+b+c}{2} + a+b+c \right) = \frac{a+b+c}{6}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c > 0$.

VIII. BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC CHỨA CĂN THỨC

Các bất đẳng thức trong mục này được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp theo xu hướng khái quát hóa các vấn đề đặt ra. Các bổ đề trong các bài toán mở đầu được chứng minh nhờ sử dụng khai triển nhị thức *Newton* và nguyên lý đồng bậc trong bất đẳng thức *AM - GM* nhằm phổ cập rộng rãi cho các bạn yêu thích bất đẳng thức mặc dù tiếp nối các bài toán này là bài toán tổng quát được chứng minh bằng một phương pháp ngắn gọn hơn trong *AM - GM*.

Bài 1. Chứng minh: $S = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c)$, $\forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Bổ đề: Sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá sau đây:

$$\bullet (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad \bullet x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Áp dụng:
$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2a^2 + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + 2a^2})$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2ca})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(b+c)^2} + \sqrt{(c+a)^2}] = \frac{1}{\sqrt{2}} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] = \sqrt{2}(a+b+c)$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $S = \sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \geq \sqrt[3]{2}(a + b + c)$

Chứng minh

Bổ đề: Sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá sau đây:

$$\bullet (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \quad \bullet x^3 + y^3 = xy(x + y), \forall x, y \geq 0$$

Áp dụng:
$$S = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} [\sqrt[3]{a^3 + b^3 + 3(a^3 + b^3)} + \sqrt[3]{b^3 + c^3 + 3(b^3 + c^3)} + \sqrt[3]{c^3 + a^3 + 3(c^3 + a^3)}]$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} [\sqrt[3]{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)} + \sqrt[3]{b^3 + c^3 + 3bc(b+c)} + \sqrt[3]{c^3 + a^3 + 3ca(c+a)}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} [\sqrt[3]{(a+b)^3} + \sqrt[3]{(b+c)^3} + \sqrt[3]{(c+a)^3}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4}} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] = \sqrt[3]{2}(a+b+c)$$

Bài 3. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$S = \sqrt[4]{a^4 + b^4} + \sqrt[4]{b^4 + c^4} + \sqrt[4]{c^4 + a^4} \geq \sqrt[4]{2}(a + b + c)$$

Chứng minh

Bổ đề: • $(x + y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2$
 • $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2), \forall x, y \geq 0$ • $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$

Áp dụng:
$$S = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \sum_{cyc} \sqrt[3]{a^4 + b^4 + 4(a^4 + b^4) + 3(a^4 + b^4)}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \sum_{cyc} \sqrt[3]{a^4 + b^4 + 4ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \left[\sqrt[3]{(a+b)^4} + \sqrt[3]{(b+c)^4} + \sqrt[3]{(c+a)^4} \right] = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} (a+b+c) = \sqrt[3]{2} (a+b+c)$$

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$S = \sqrt[5]{a^5 + b^5} + \sqrt[5]{b^5 + c^5} + \sqrt[5]{c^5 + a^5} \geq \sqrt[5]{2} (a+b+c)$$

Chứng minh

Bổ đề: • $(x + y)^5 = x^5 + y^5 + 5xy(x^3 + y^3) + 10x^2y^2(x + y)$
 • $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4 = xy(x^3 + y^3), \forall x, y \geq 0$
 • $x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y^2(x + y), \forall x, y \geq 0$

$$S = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} (\sqrt[5]{16a^5 + 16b^5} + \sqrt[5]{16b^5 + 16c^5} + \sqrt[5]{16c^5 + 16a^5})$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \sum_{cyc} \sqrt[5]{a^5 + b^5 + 5(a^5 + b^5) + 10(a^5 + b^5)}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \sum_{cyc} \sqrt[5]{a^5 + b^5 + 5ab(a^3 + b^3) + 10a^2b^2(a+b)} = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \sum_{cyc} \sqrt[5]{(a+b)^5} = \sqrt[5]{2} (a+b+c)$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} \geq \sqrt[n]{2} (a+b+c)$$

Chứng minh

• **Bình luận:** Ta có thể sử dụng khai triển nhị thức *Newton* $(x + y)^n$ rồi sử dụng các đánh giá của các cặp đôi đơn thức đối xứng đồng bậc n với các biến số x, y . Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát ở đây thì cách làm thủ công như các bài toán 1, 2, 3, 4 sẽ rất dài. Với bất đẳng thức tổng quát này chúng ta sẽ chứng minh nó bằng các sử dụng bổ đề sau đây:

• **Bổ đề:** $x + y \leq \sqrt[n]{2^{n-1}(x^n + y^n)}, \forall x, y > 0 \quad (1)$

Chứng minh. (1) $\Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n} + \sqrt[n]{y^n} \leq \sqrt[n]{2^{n-1}(x^n + y^n)} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \cdot x^n} + \sqrt[n]{\underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \cdot y^n} \leq \sqrt[n]{\underbrace{2 \dots 2}_{n-1} \cdot (x^n + y^n)}$

$$T = \sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}}_{n-1} \cdot \frac{x^n}{x^n + y^n}} + \sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}}_{n-1} \cdot \frac{y^n}{x^n + y^n}} \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$T \leq \frac{1}{n} \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n-1} + \frac{x^n}{x^n + y^n} \right) + \sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n-1} + \frac{y^n}{x^n + y^n}} = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{x^n + y^n}{x^n + y^n} \right) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

• Áp dụng bổ đề ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}} \left[\sqrt[n]{2^{n-1}(a^n + b^n)} + \sqrt[n]{2^{n-1}(b^n + c^n)} + \sqrt[n]{2^{n-1}(c^n + a^n)} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] = \frac{2}{\sqrt[n]{2^{n-1}}} (a+b+c) = \sqrt[n]{2} (a+b+c) \end{aligned}$$

Bài 6. Cho các số thực $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{2a^4 + 3b^4} + \sqrt[4]{2b^4 + 3c^4} + \sqrt[4]{2c^4 + 3a^4} \geq \frac{1}{\sqrt[12]{5}} \left(\sqrt[3]{2a^3 + 3b^3} + \sqrt[3]{2b^3 + 3c^3} + \sqrt[3]{2c^3 + 3a^3} \right)$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } m = \sqrt[4]{\frac{2a^4 + 3b^4}{5}} \Rightarrow \frac{2a^4}{m^4} + \frac{3b^4}{m^4} = 5$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{2a^3}{m^3} &= 2 \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m} \cdot 1 \leq \frac{2}{4} \left(\frac{a^4}{m^4} + \frac{a^4}{m^4} + \frac{a^4}{m^4} + 1 \right) \\ \frac{3b^3}{m^3} &= 3 \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot 1 \leq \frac{3}{4} \left(\frac{b^4}{m^4} + \frac{b^4}{m^4} + \frac{b^4}{m^4} + 1 \right) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^3}{m^3} + \frac{3b^3}{m^3} \leq \frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{2a^4 + 3b^4}{m^4} \right) + 5 \right] = 5 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2a^3 + 3b^3}{5}} \leq m = \sqrt[4]{\frac{2a^4 + 3b^4}{5}}$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt[3]{\frac{2a^3 + 3b^3}{5}} + \sqrt[3]{\frac{2b^3 + 3c^3}{5}} + \sqrt[3]{\frac{2c^3 + 3a^3}{5}} \leq \sqrt[4]{\frac{2a^4 + 3b^4}{5}} + \sqrt[4]{\frac{2b^4 + 3c^4}{5}} + \sqrt[4]{\frac{2c^4 + 3a^4}{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2a^4 + 3b^4} + \sqrt[4]{2b^4 + 3c^4} + \sqrt[4]{2c^4 + 3a^4} \geq \frac{1}{\sqrt[12]{5}} \left(\sqrt[3]{2a^3 + 3b^3} + \sqrt[3]{2b^3 + 3c^3} + \sqrt[3]{2c^3 + 3a^3} \right)$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 \left[1 + \sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}} \right] \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \quad (2)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq \sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq \frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3abc(a+b+c) \leq (ab+bc+ca)^2 \Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên (3) được chứng minh.

Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 8. Chứng minh: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Với $u \geq 0$, sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\sqrt{1+u^3} = \sqrt{(1+u)(1-u+u^2)} \leq \frac{(1+u)+(1-u+u^2)}{2} = 1 + \frac{u^2}{2}. \text{ Từ đó suy ra:}$$

$$VT = \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq 2, \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} = \frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)(ab+bc)}} \geq \frac{2a(b+c)}{(a^2+bc)+(ab+bc)} = \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)} \geq 2 \Leftrightarrow a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 \geq (a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow 4abc \geq 0$$

Bài 10. Cho các số thực $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \right)^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 2 \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}} \leq 3 + \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{\sqrt{bc}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 2 \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}} - \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{\sqrt{bc}} - 3 \leq 0 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có: $\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{2\sqrt{a^2bc}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}$

Mặt khác, $(a^2+bc)(b^2+ca) - ab(a+c)(b+c) = c(a-b)^2(a+b) \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}} \leq 3$$

$$\Rightarrow VT(2) \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{2\sqrt{bc}} + 6 - \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{\sqrt{bc}} - 3 = \sum_{\text{cyc}} \left(1 - \frac{b+c}{2\sqrt{bc}} \right) = - \sum_{\text{cyc}} \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}{2\sqrt{bc}} \leq 0$$

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 11. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b; b+c; c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+(b+c)} = \frac{2a}{a+b+c} \\ & + \sqrt{\frac{b}{c+a}} = \frac{2b}{2\sqrt{b(c+a)}} \geq \frac{2b}{b+(c+a)} = \frac{2b}{a+b+c} \\ & \sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{2c}{2\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{2c}{c+(a+b)} = \frac{2c}{a+b+c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c)$ là một hoán vị của $(x, x, 0)$ với $x > 0$

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+b; b+c; c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq 2$

Chứng minh

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{a} = \sqrt{m}; \sqrt[3]{b} = \sqrt{n}; \sqrt[3]{c} = \sqrt{p} \Leftrightarrow a^2 = m^3; b^2 = n^3; c^2 = p^3$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geq \sqrt{\frac{m}{n+p}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \geq \left(\frac{m}{n+p}\right)^3 \Leftrightarrow (n+p)^3 \geq (b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 3np(n+p) + p^3 \geq b^2 + 2bc + c^2 \Leftrightarrow 3np(n+p) \geq 2bc$$

$$\text{Ta có } 3np(n+p) \geq 3np(2\sqrt{np}) = 6(\sqrt{np})^3 = 6bc \geq 2bc, \text{ đúng} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geq \sqrt{\frac{m}{n+p}}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{m}{n+p}} + \sqrt{\frac{n}{p+m}} + \sqrt{\frac{p}{m+n}}$$

$$\text{Sử dụng Bài 10. Ta có: } \sqrt{\frac{m}{n+p}} + \sqrt{\frac{n}{p+m}} + \sqrt{\frac{p}{m+n}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c)$ là một hoán vị của $(x, x, 0)$ với $x > 0$

Bài 13. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \text{Min}\{a+2c; b+2c; a+b+c\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{a+2c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} \geq 2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b+2c}} &= \frac{2a}{2\sqrt{a(b+2c)}} \geq \frac{2a}{a+(b+2c)} = \frac{2a}{a+b+2c} \\ + \sqrt{\frac{b}{a+2c}} &= \frac{2b}{2\sqrt{b(a+2c)}} \geq \frac{2b}{b+(a+2c)} = \frac{2b}{a+b+2c} \\ 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} &= \frac{4c}{2\sqrt{c(a+b+c)}} \geq \frac{4c}{c+(a+b+c)} = \frac{4c}{a+b+2c} \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{a+2c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{2(a+b+2c)}{a+b+2c} = 2.
 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=x>0; c=0$

Bài 14. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ \min\{a, b\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a}{a+b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{4a+b}} \geq 1$ (1)

Chứng minh

Đặt $a_1 = a; b_1 = \frac{b}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+2b_1}} + \sqrt[3]{\frac{b_1}{2a_1+b_1}} \geq 1$.

Đặt $\sqrt{\alpha} = \sqrt[3]{a_1}; \sqrt{\beta} = \sqrt[3]{b_1} \Leftrightarrow a_1^2 = \alpha^3; b_1^2 = \beta^3$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+2b_1}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{a_1+2b_1}\right)^2 \geq \left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}\right)^3$

$\Leftrightarrow (\alpha+2\beta)^3 \geq (a_1+2b_1)^2 \Leftrightarrow \alpha^3 + 8\beta^3 + 6\alpha\beta(\alpha+2\beta) \geq a_1^2 + 4b_1^2 + 4a_1b_1$

$\Leftrightarrow 4\beta^3 + 6\alpha\beta(\alpha+2\beta) \geq 4a_1b_1 \Leftrightarrow 2\beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+2\beta) \geq 2a_1b_1$

Ta có $3\alpha\beta(\alpha+2\beta) \geq 6\sqrt{2}(\sqrt{\alpha\beta})^3 = 6\sqrt{2}a_1b_1 \Rightarrow 2\beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+2\beta) \geq 2a_1b_1$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+2b_1}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}}$. Tương tự ta có: $\sqrt[3]{\frac{b_1}{2a_1+b_1}} \geq \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha+\beta}}$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+2b_1}} &\geq \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}} = \frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha(\alpha+2\beta)}} \geq \frac{2\alpha}{\alpha+(\alpha+2\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ + \sqrt[3]{\frac{b_1}{2a_1+b_1}} &\geq \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha+\beta}} = \frac{2\beta}{2\sqrt{\beta(2\alpha+\beta)}} \geq \frac{2\beta}{\beta+(2\alpha+\beta)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+2b_1}} + \sqrt[3]{\frac{b_1}{2a_1+b_1}} \geq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1 \Rightarrow$ (đpcm.)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b)$ là một hoán vị của $(x, 0)$ với $x > 0$

Bài 15. Cho $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ \min\{a+b+c; b+c+d; c+d+a; d+a+b\} > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \frac{2a}{a+(b+c+d)} = \frac{2a}{a+b+c+d} \\ & \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} = \frac{2b}{2\sqrt{b(c+d+a)}} \geq \frac{2b}{b+(c+d+a)} = \frac{2b}{a+b+c+d} \\ & + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} = \frac{2c}{2\sqrt{c(d+a+b)}} \geq \frac{2c}{c+(d+a+b)} = \frac{2c}{a+b+c+d} \\ & \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} = \frac{2d}{2\sqrt{d(a+b+c)}} \geq \frac{2d}{d+(a+b+c)} = \frac{2d}{a+b+c+d} \\ \Rightarrow & \sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c, d)$ là một hoán vị của $(x, x, 0, 0)$ với $x > 0$

Bài 16. Cho $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ \min\{a+b+c; b+c+d; c+d+a; d+a+b\} > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt[3]{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2$

Chứng minh

Đặt $\sqrt[3]{a} = \sqrt{m}; \sqrt[3]{b} = \sqrt{n}; \sqrt[3]{c} = \sqrt{p}; \sqrt[3]{d} = \sqrt{q} \Leftrightarrow a^2 = m^3; b^2 = n^3; c^2 = p^3; d^2 = q^3$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}} \geq \sqrt{\frac{m}{n+p+q}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{(b+c+d)^2} \geq \frac{m^3}{(n+p+q)^3}$

$$\Leftrightarrow (n+p+q)^3 \geq (b+c+d)^2 \Leftrightarrow (n+p)^3 + q^3 + 3q(n+p)(n+p+q)$$

$$\geq b^2 + c^2 + d^2 + 2(bc+cd+db)$$

$$\Leftrightarrow S = 3np(n+p) + 3nq(n+q) + 3pq(p+q) + 6npq \geq 2(bc+cd+db).$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$+ \begin{cases} 3np(n+p) \geq 3np(2\sqrt{np}) = 6\sqrt{n^3 p^3} = 6\sqrt{b^2 c^2} = 6bc \geq 2bc \\ 3nq(n+q) \geq 3nq(2\sqrt{nq}) = 6\sqrt{n^3 q^3} = 6\sqrt{b^2 d^2} = 6bd \geq 2bd \\ 3pq(p+q) \geq 3pq(2\sqrt{pq}) = 6\sqrt{p^3 q^3} = 6\sqrt{c^2 d^2} = 6cd \geq 2cd \\ 6npq \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S = 3np(n+p) + 3nq(n+q) + 3pq(p+q) + 6npq \geq 2(bc + cd + db)$, đúng

Tương tự ta có 3 bất đẳng thức tương ứng, suy ra $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a}{b+c+d}} \geq \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{m}{n+p+q}} \geq 2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c, d)$ là một hoán vị của $(x, x, 0, 0)$ với $x > 0$.

Bài 17. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3$$

Chứng minh

Đặt $x = b+c-a; y = c+a-b; z = a+b-c$. Khi đó $x, y, z > 0$ và $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{z+x}{2}; c = \frac{x+y}{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt{\frac{z+x}{2y}} + \sqrt{\frac{x+y}{2z}} \geq 3$.

Sử dụng bất đẳng thức quen biết $p^2 + q^2 \geq \frac{(p+q)^2}{2}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt{\frac{z+x}{2y}} + \sqrt{\frac{x+y}{2z}} &\geq \sqrt{\frac{(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{4x}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{z} + \sqrt{x})^2}{4y}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4z}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}} = 3 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét: Nếu sử dụng bất đẳng thức quen biết $xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ thì theo AM - GM ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \geq 3$$

Cách làm này có thể áp dụng khi thay căn bậc 2 bởi căn bậc n .

IX. SỬ DỤNG AM – GM TRONG BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG ĐỒNG BẬC TRÊN $\mathbb{R}^+$

Trong mục III chúng ta đã đề cập đến việc so sánh hai đa thức đồng bậc trên $\mathbb{R}^+$. Các bất đẳng thức dưới đây là sự pha trộn giữa nhiều biểu thức không đồng bậc trên $\mathbb{R}^+$.

Bài 1. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^7}{b^2c^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2} \geq \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + abc$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{b^7}{a^2c^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2} \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{b^7}{a^2c^2} \cdot \frac{c^7}{a^2b^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2}} = \frac{bc}{a^2} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{c^7}{b^2a^2} + \frac{a^7}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2} \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{c^7}{b^2a^2} \cdot \frac{a^7}{b^2c^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2}} = \frac{ca}{b^2} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{a^7}{c^2b^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2} \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2} \cdot \frac{b^7}{c^2a^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2}} = \frac{ab}{c^2} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{a^7}{c^2b^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{a^7}{c^2b^2} \cdot \frac{b^7}{c^2a^2} \cdot \frac{c^7}{a^2b^2}} = abc \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow & \frac{a^7}{b^2c^2} + \frac{b^7}{c^2a^2} + \frac{c^7}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2c^2} \geq \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + abc. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 2. Chứng minh rằng $\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2$, $\forall a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có: $\frac{a^9}{bc} + abc \geq 2a^5$; $\frac{b^9}{ca} + abc \geq 2b^5$; $\frac{c^9}{ab} + abc \geq 2c^5$

$$\Rightarrow \frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} \geq 2(a^5 + b^5 + c^5) - 3abc \geq a^5 + b^5 + c^5 + 3 \cdot \sqrt[3]{a^5b^5c^5} - 3abc$$

Khi đó, bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$3 \cdot \sqrt[3]{a^5b^5c^5} - 3abc + \frac{2}{abc} \geq 2 \Leftrightarrow 3t^5 - 3t^3 + \frac{2}{t^3} \geq 2 \quad (\text{với } t = \sqrt[3]{abc} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(3t^6 + 6t^5 + 6t^4 + 6t^3 + 6t^2 + 4t + 2)}{t^3} \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng $\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} + \frac{3}{abc} \geq a^4 + b^4 + c^4 + 3, \forall a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^9}{bc} + abc + a^2 \geq 3a^4, \frac{b^9}{ca} + abc + b^2 \geq 3b^4, \frac{c^9}{ab} + abc + c^2 \geq 3c^4$$

$$\Rightarrow \frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} \geq 3(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2 + b^2 + c^2) - 3abc \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(1+a^4) \geq a^2; \frac{1}{2}(1+b^4) \geq b^2; \frac{1}{2}(1+c^4) \geq c^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4) + \frac{3}{2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ca} + \frac{c^9}{ab} \geq \frac{5}{2}(a^4 + b^4 + c^4) - 3abc - \frac{3}{2} \geq a^4 + b^4 + c^4 + \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^4 c^4} - 3abc - \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$\frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{a^4 b^4 c^4} - 3abc - \frac{3}{2} + \frac{3}{abc} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot t^4 - 3t^3 + \frac{3}{t^3} \geq \frac{9}{2} \quad (\text{với } t = \sqrt[3]{abc} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(t-1)^2(t+1)(3t^4+t^3+4t^2+2t+2) \geq 0, \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm.}).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c)$ (1)

Chứng minh

• **Bổ đề:** (Bất đẳng thức Schur)

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + xy(y+z) + zx(z+x), \forall x, y, z \geq 0 \quad (*)$$

• **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Khi đó ta có:

$$VT(*) - VP(*) = x(x-y)^2 + z(y-z)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức AM - GM và bất đẳng thức Schur ta có:

$$\begin{aligned} 6.[VT(1) - VP(1)] &= 12(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc + 48 - 30(a + b + c) \\ &= 12(a^2 + b^2 + c^2) + 3(2abc + 1) + 45 - 5 \cdot 2 \cdot 3(a + b + c) \\ &\geq 12(a^2 + b^2 + c^2) + 9 \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} + 45 - 5[(a + b + c)^2 + 9] \end{aligned}$$

$$= \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} + 3(a^2 + b^2 + c^2) - 6(ab + bc + ca) + 2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\geq \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} + 3(a^2 + b^2 + c^2) - 6(ab + bc + ca) \geq \frac{27abc}{a+b+c} + 3(a+b+c)^2 - 12(ab + bc + ca)$$

$$= \frac{3}{a+b+c} [9abc + (a+b+c)^3 - 4(ab+bc+ca)(a+b+c)]$$

$$= \frac{3}{a+b+c} [a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)] \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm.})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** và bất đẳng thức **Schur** ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca) &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} - 2(ab + bc + ca) \\ &\geq a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) + b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}\right) + c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right) - 2(ab + bc + ca) \\ &= a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2 + b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{1}{3}}\right)^2 + c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 6. [APMO 2004] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\begin{aligned} VT(1) - VP(1) &= (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) - 9(ab + bc + ca) \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2[(a^2b^2 + 1) + (b^2c^2 + 1) + (c^2a^2 + 1)] + (a^2b^2c^2 + 1) - 9(ab + bc + ca) \\ &\geq 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca) + 2abc + 1 - 9(ab + bc + ca) \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Sử dụng bài 5 ta có (đpcm). Dấu thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$

Chứng minh

Bổ đề: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, $\forall x, y, z$

Áp dụng: Gọi vế trái của bất đẳng thức là P , sử dụng bổ đề ta có

$$\begin{aligned} P^2 &\geq 3\left(\frac{1}{ab(1+b)(1+c)} + \frac{1}{bc(1+c)(1+a)} + \frac{1}{ca(1+a)(1+b)}\right) \\ &= \frac{3(a(1+b) + b(1+c) + c(1+a))}{abc(1+a)(1+b)(1+c)} = \frac{3}{abc} - \frac{3}{(1+a)(1+b)(1+c)} - \frac{3}{abc(1+a)(1+b)(1+c)} \end{aligned}$$

Đặt $k = \sqrt[3]{abc}$, sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 1 + 3k + 3k^2 + k^3 = (1+k)^3$$

$$\text{Suy ra } P^2 \geq \frac{3}{k^3} - \frac{3}{(1+k)^3} - \frac{3}{k^3(1+k)^3} = \frac{3(1+k)^3 - 3k^3 - 3}{k^3(1+k)^3} = \frac{9}{k^2(1+k)^2}$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{3}{k(1+k)} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})} \text{ (đpcm). Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Bài 8. Cho các số $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a}\right) \geq 16 \max\left\{\frac{1}{1+abcd}; \frac{1}{ac+bd}\right\} \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} VT(1) &= \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd}\right) + \left[\frac{a+b}{ab(c+d)} + \frac{c+d}{cd(a+b)}\right] + \frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{c+d}{cd(d+a)} \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{c+d}{cd(d+a)}. \text{ Tương tự ta có:} \end{aligned}$$

$$VT(1) \geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{b+c}{bc(a+b)} + \frac{b+c}{bc(c+d)} + \frac{a+d}{ad(a+b)} + \frac{a+d}{ad(c+d)}. \text{ Suy ra:}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot VT(1) &\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \left[\frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+d}{ad(a+b)}\right] + \left[\frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{b+c}{bc(a+b)}\right] + \\ &+ \left[\frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{b+c}{bc(c+d)}\right] + \left[\frac{c+d}{cd(d+a)} + \frac{a+d}{ad(c+d)}\right] \end{aligned}$$

$$\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{2}{a\sqrt{bd}} + \frac{2}{b\sqrt{ac}} + \frac{2}{c\sqrt{bd}} + \frac{2}{d\sqrt{ac}} = \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{2}{\sqrt{bd}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{2}{\sqrt{ac}} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$$

$$\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{4}{\sqrt{abcd}} = \frac{16}{\sqrt{abcd}} \Rightarrow VT(1) \geq \frac{8}{\sqrt{abcd}}$$

Mặt khác, Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{1+abcd}{2} \geq \sqrt{abcd}; \frac{ac+bd}{2} \geq \sqrt{abcd} \Rightarrow \sqrt{abcd} \leq \frac{\min\{1+abcd; ac+bd\}}{2}$$

$$\Rightarrow VT(1) \geq \frac{16}{\min\{1+abcd; ac+bd\}} = 16 \max\left\{\frac{1}{1+abcd}; \frac{1}{ac+bd}\right\} \text{ (đpcm.)}$$

Đẳng thức xảy ra $a=b=c=d > 0$

Bài 9. Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4(a+b+c) + 9abc \geq 8(ab+bc+ca), \quad (1)$$

Chứng minh

Bổ đề: $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)$ (1)

Chứng minh: Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (b^2 + c^2 - a^2)(b - c)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)(c - a)^2 + (a^2 + b^2 - c^2)(a - b)^2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow c^2(b - c)^2 + a^2(a - b)^2 + (c^2 + a^2 - b^2)(a - b)(b - c) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Áp dụng: Sử dụng **AM - GM** ta có: $4(a+b+c) + \frac{4(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \geq 8(ab+bc+ca)$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \geq \frac{4(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}$.

Thật vậy bất đẳng thức $\Leftrightarrow$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) + ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (*)$$

Sử dụng bổ đề ta có:

$$VT (*) \geq 2[ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2)] \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ hoặc (a, b, c) là các hoán vị của $(2; 2; 0)$.

Bài 10. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $2(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$

Chứng minh

Đặt $a = \frac{1-x}{1+x}; b = \frac{1-y}{1+y}; c = \frac{1-z}{1+z}$, với $x, y, z \in (-1; 1]$ khi đó

$$\frac{a^2+1}{a+1} = \frac{x^2+1}{x+1}, \frac{b^2+1}{b+1} = \frac{y^2+1}{y+1}, \frac{c^2+1}{c+1} = \frac{z^2+1}{z+1}, abc+1 = \frac{2(xy+yz+zx+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Bất đẳng thức trở thành $(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq xy + yz + zx + 1$

$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Theo **AM - GM** ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq |xy| + |yz| + |zx| \geq xy + yz + zx$$

và $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 0$. Cộng theo về hai bất đẳng thức trên $\Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

X. ĐẶC BIỆT HÓA BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG ĐỒNG BẬC

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $2(ab + bc + ca) + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$VT(1) = (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca) + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(ab + bc + ca)^2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)}$$

$$\text{Mặt khác, } (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 9abc$$

$$\Rightarrow VT(1) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{9abc \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{9(a + b + c)} = 9 \text{ (đpcm)}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3abc \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 3$ (1)

Chứng minh

Từ $a + b + c = 3abc \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 3$. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + 3 = \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + 1\right) + \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + 1\right) + \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + 1\right) \geq 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 9$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 \geq 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 \geq ab(a+b) = \frac{a+b}{c} \\ b^3 + c^3 \geq bc(b+c) = \frac{b+c}{a} \\ c^3 + a^3 \geq ca(c+a) = \frac{c+a}{b} \end{cases} \quad (1) \quad ; \quad \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{2a}{\sqrt{bc}} \geq \frac{4a}{b+c} \\ \frac{b}{c} + \frac{b}{a} = b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{2b}{\sqrt{ca}} \geq \frac{4b}{c+a} \\ \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{2c}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4c}{a+b} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right) \geq 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a^2+2bc} + \sqrt{1+b^2+2ca} + \sqrt{1+c^2+2ab} \leq 6$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+a^2+2bc} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(1+a^2+2bc)} \leq \frac{4+(1+a^2+2bc)}{4} = \frac{a^2+2bc+5}{4} \\ + & \sqrt{1+b^2+2ca} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(1+b^2+2ca)} \leq \frac{4+(1+b^2+2ca)}{4} = \frac{b^2+2ca+5}{4} \\ & \sqrt{1+c^2+2ab} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4(1+c^2+2ab)} \leq \frac{4+(1+c^2+2ab)}{4} = \frac{c^2+2ab+5}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^2+2bc} + \sqrt{1+b^2+2ca} + \sqrt{1+c^2+2ab} \leq \frac{(a+b+c)^2 + 15}{4} = 6 \text{ (đpcm.)}$$

Bài 5. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a+7} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(a+7) \times 8 \times 8} \leq \frac{a+7+8+8}{12} \leq \frac{\frac{a^4+1+1+1}{4} + 23}{12} = \frac{a^4+95}{48} \\ + & \sqrt[3]{b+7} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(b+7) \times 8 \times 8} \leq \frac{b+7+8+8}{12} \leq \frac{\frac{b^4+1+1+1}{4} + 23}{12} = \frac{b^4+95}{48} \\ & \sqrt[3]{c+7} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(c+7) \times 8 \times 8} \leq \frac{c+7+8+8}{12} \leq \frac{\frac{c^4+1+1+1}{4} + 23}{12} = \frac{c^4+95}{48} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 3 \times 95}{48}. \text{ Mặt khác ta có}$$

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + 3 = \sum_{cyc} (a^4 + a^4 + a^4 + 1) \geq 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) = 12 \Leftrightarrow 3 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 95(a^4 + b^4 + c^4)}{48} = 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

Đẳng thức xảy ra $a = b = c = 1$.

Bài 6. [IMO Shortlist 1990] Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{36a^3}{b+c+d} + 2(b+c+d) + 6a + 3 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{36a^3}{b+c+d} \cdot 2(b+c+d) \cdot 6a \cdot 3} = 24a \right. \\
 & + \left[\frac{36b^3}{c+d+a} + 2(c+d+a) + 6b + 3 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{36b^3}{c+d+a} \cdot 2(c+d+a) \cdot 6b \cdot 3} = 24b \right. \\
 & + \left[\frac{36c^3}{d+a+b} + 2(d+a+b) + 6c + 3 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{36c^3}{d+a+b} \cdot 2(d+a+b) \cdot 6c \cdot 3} = 24c \right. \\
 & \left. + \left[\frac{36d^3}{a+b+c} + 2(a+b+c) + 6d + 3 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{36d^3}{a+b+c} \cdot 2(a+b+c) \cdot 6d \cdot 3} = 24d \right] \right.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3}$$

Mặt khác, $(a+b+c+d)^2 \geq 4(ab+bc+cd+da) = 4 \Rightarrow a+b+c+d \geq 2$

$$\Rightarrow VT(1) \geq \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$. Chứng minh rằng $S = \frac{a}{bc} + \frac{2b}{ca} + \frac{5c}{ab} \geq 2\sqrt{6}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$S = 3 \cdot \frac{a}{3bc} + 4 \cdot \frac{b}{2ca} + 5 \cdot \frac{c}{ab} \geq 12 \cdot \sqrt[12]{\left(\frac{a}{3bc}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{2ca}\right)^4 \cdot \left(\frac{c}{ab}\right)^5} = \frac{12}{\sqrt[12]{3^3 2^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{a^6 b^4 c^2}}$$

$$6 = 3 \cdot \frac{a^2}{3} + 2 \cdot \frac{b^2}{2} + c^2 \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 \cdot c^2} = 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{a^6 b^4 c^2}{3^3 \cdot 2^2}} \Rightarrow a^6 b^4 c^2 \leq 3^3 \cdot 2^2$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{12}{\sqrt[12]{3^3 2^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{a^6 b^4 c^2}} \geq \frac{12}{\sqrt[12]{3^3 2^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{3^3 2^2}} = \frac{12}{\sqrt[12]{3^6 2^6}} = 2\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt{3}; b = \sqrt{2}; c = 1$

Bài 8. [Russia MO 2000] Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq (a+b+c)^2 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$VT(2) = \sum_{cyc} (a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a}) \geq \sum_{cyc} 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = 3(a+b+c) = (a+b+c)^2 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 9. Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ và số thực $k \geq 1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{x+k^2-1} + \sqrt{y+k^2-1} + \sqrt{z+k^2-1} \geq k(xy+yz+zx)$ (1)

Chứng minh

Đặt $a = \frac{x+k^2-1}{k^2}$, $b = \frac{y+k^2-1}{k^2}$, $c = \frac{z+k^2-1}{k^2}$, khi đó

$x = ak^2 + 1 - k^2$, $y = bk^2 + 1 - k^2$, $z = ck^2 + 1 - k^2$ và $a+b+c=3$. Khi đó (1) trở thành:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq (ak^2 + 1 - k^2)(bk^2 + 1 - k^2) + (bk^2 + 1 - k^2)(ck^2 + 1 - k^2) + (ck^2 + 1 - k^2)(ak^2 + 1 - k^2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq (ab+bc+ca)k^4 - 2(a+b+c)k^2(k^2-1) + 3(k^2-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - (ab+bc+ca) \geq (k^4-1)(ab+bc+ca-3) \quad (2)$$

Ta có $a+b+c=3 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab+bc+ca$ và $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$

Vậy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - (ab+bc+ca) \geq 0 \geq (k^4-1)(ab+bc+ca-3) \Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow (\text{đpcm})$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 10. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab+bc+ca=3 \end{cases}$. Chứng minh: $2(a+b+c) + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$VT(1) = (a+b+c) + (a+b+c) + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(a+b+c)^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}$$

Ta sẽ chứng minh $(a+b+c)^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 27$ (2)

Ta có: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow \sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{3}$. Suy ra bất đẳng thức (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\sqrt{a+b+c}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\sqrt{a+b+c}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 3\sqrt{3}(ab+bc+ca) \quad (3)$$

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Bất đẳng thức (3) trở thành $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab+bc+ca$

Đây chính là bất đẳng thức đã chứng minh ở Bài 8.

Bài 11. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(1+ab+bc+ca)$ (1)

Chứng minh

Ta có: $1+ab+bc+ca = (a+b+c)^2 + ab+bc+ca = \sum_{cyc} (a+b)(b+c)$

Bất đẳng thức (1) trở thành $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sum_{cyc} (a+b)(b+c)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sum_{cyc} \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b+c)^2} \quad (2)$$

Đặt $x = \frac{a+b}{a+b+c}; y = \frac{b+c}{a+b+c}; z = \frac{c+a}{a+b+c}$, khi đó $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Bất đẳng thức (2) trở thành $2\sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3\sqrt{3}(xy + yz + zx)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}(x^2 + y^2 + z^2) + 4\sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3\sqrt{3}(x+y+z)^2 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$VT(3) = \sum_{cyc} (3\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x) \geq \sum_{cyc} 3 \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}x^2(2\sqrt{2}x)^2} = 6\sqrt{3}(x+y+z) = 3\sqrt{3}(x+y+z)^2$$

Vậy (3) đúng suy ra (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$. Chứng minh: $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2}(a+b+c) \geq \frac{15}{2}$ (*)

Chứng minh

Bước 1: $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$ hay $\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq a+b+c$

Bước 2: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{9}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}} = 3$

Bước 3: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) =$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(3 + 2ab + 2bc + 2ca) = 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 4(a+b+c) + 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 4(a+b+c) + \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geq$$

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 4(a+b+c) + 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} + 2\sqrt{\frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c}} + 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} \\ &= 3\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (a+b+c) + (a+b+c)\right] \geq 9 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2} \\ &\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2\right)^3 \geq 9^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2 \geq 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bước 4: } S &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{3}{4}\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (a+b+c) + (a+b+c)\right] \\ &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} + \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 3\sqrt{27} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Bài 13. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Chứng minh

Bước 1: Chứng minh cả ba $(a+b-c)$, $(b+c-a)$ và $(c+a-b)$ đều dương.

Bước 2: Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$1 = \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \cdot \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \cdot \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq abc.$$

$$\text{Áp dụng: } \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3} = \frac{abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3(a+b+c)}$$

$$\leq \frac{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}{9(a+b+c)} \leq \frac{(2(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2))^3}{27 \cdot 9 \cdot (a+b+c)} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5.$$

Bài 14. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 1 \end{cases}$. Chứng minh

$$(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a} + (a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a} + (a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a} \geq 4(a+b+c)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\sum_{cyc} (a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a} = \sum_{cyc} \frac{(a+b)(a+c)}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}} \geq \sum_{cyc} \frac{2(a+b)(a+c)}{a}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{(a+b)(a+c)}{a} + \frac{(b+c)(b+a)}{b} + \frac{(c+a)(c+b)}{c} \geq 4(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow bc(a+b)(a+c) + ca(b+c)(b+a) + ab(c+a)(c+b) \geq 4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2bc + b^2ca + c^2ab + (ab+bc+ca)^2 \geq 4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

XI. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM

Các bài toán dưới đây thể hiện bản chất Toán học của ngôn ngữ cũng như kỹ thuật với tên gọi “điểm rơi” trong bất đẳng thức. Nó được thể hiện sự tự nhiên tùy ý khi ta tạo ra “điểm rơi” cho các biến số trước rồi mới dựng ra các bất đẳng thức sau. Để khác với các phần trước, chúng ta sẽ minh họa cho ý tưởng này với “điểm rơi” của các biến số là không bằng nhau. Như vậy bắt buộc ta phải dự đoán được “điểm rơi” trước khi chứng minh bất đẳng thức.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + 2b + 3c \geq 20 \end{cases}$. Chứng minh rằng $S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$

Chứng minh

Dự đoán $S = 13$ đạt tại điểm rơi: $a = 2, b = 3, c = 4$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{cases} a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4 & \frac{3}{4}\left(a + \frac{4}{a}\right) \geq \frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \\ b + \frac{9}{b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{9}{b}} = 6 & \Rightarrow \frac{1}{2}\left(b + \frac{9}{b}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \\ c + \frac{16}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{16}{c}} = 8 & \frac{1}{4}\left(c + \frac{16}{c}\right) \geq \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 8 \quad (1)$$

$$\text{Từ } a + 2b + 3c \geq 20 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{b}{2} + \frac{3}{4}c \geq 5 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2)} \Rightarrow S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $S = 30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 84$

Chứng minh

Dự đoán $S = 84$ đạt tại điểm: $a = 1, b = 2, c = 3$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{cases} 2a + 1 \cdot \frac{b^2}{4} + 2 \cdot \frac{2}{ab} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{a^2 \cdot \frac{b^2}{4} \cdot \left(\frac{2}{ab}\right)^2} = 5 & 9\left(2a + \frac{b^2}{4} + \frac{4}{ab}\right) \geq 45 \\ 3 \cdot \frac{b^2}{4} + 2 \cdot \frac{c^3}{27} + 6 \cdot \frac{6}{bc} \geq 11 \cdot \sqrt[11]{\left(\frac{b^2}{4}\right)^3 \left(\frac{c^3}{27}\right)^2 \left(\frac{6}{bc}\right)^6} = 11 & \Rightarrow \frac{3b^2}{4} + \frac{2c^3}{27} + \frac{36}{bc} \geq 11 \\ \frac{c^3}{27} + 3a + 3 \cdot \frac{3}{ca} \geq 7 \cdot \sqrt[7]{\frac{c^3}{27} \cdot a^3 \cdot \left(\frac{3}{ca}\right)^3} = 7 & 4\left(\frac{c^3}{27} + 3a + \frac{9}{ca}\right) \geq 28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 30a + 3b^2 + \frac{2c^3}{9} + 36\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \geq 45 + 11 + 28 \geq 84$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ac \geq 12; bc \geq 8 \end{cases}$. Chứng minh $S = (a+b+c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{2}$

Chứng minh

Dự đoán $S = \frac{121}{2}$ đạt tại điểm rơi: $a = 3, b = 2, c = 4$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{6}{ab} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{6}{ab}} = 3 \\ \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{8}{bc} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{2} \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{8}{bc}} = 3 \\ \frac{c}{4} + \frac{a}{3} + \frac{12}{ca} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c}{4} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{12}{ca}} = 3 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{24}{abc} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{4} \cdot \frac{24}{abc}} = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{6}{ab} \right) \geq 3 \\ 4 \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{8}{bc} \right) \geq 12 \\ 7 \cdot \left(\frac{c}{4} + \frac{a}{3} + \frac{12}{ca} \right) \geq 21 \\ 1 \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{24}{abc} \right) \geq 4 \end{array} \right.$$

$$3(a+b+c) + \frac{6}{ab} + \frac{32}{bc} + \frac{84}{ca} + \frac{24}{abc} \geq 40. \text{ Do } \begin{cases} ac \geq 12 \\ bc \geq 8 \end{cases} \text{ nên } \frac{1}{ac} \leq \frac{1}{12}; \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{8}$$

$$\text{Từ đó ta có } 40 \leq 3S + 26 \cdot \frac{1}{bc} + 78 \cdot \frac{1}{ca} \leq 3S + 26 \cdot \frac{1}{8} + 78 \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{363}{2} \leq 3S \Leftrightarrow \frac{121}{2} \leq S \text{ (đpcm)}$$

Bài 4. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$S = a^4b + b^4c + c^4a \leq \frac{256}{3125}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a = \max\{a, b, c\} \Rightarrow b^4c \leq a^3bc \text{ và } c^4a \leq c^2a^3 \leq ca^4.$$

Biến đổi biểu thức S và đánh giá với chú ý chi tiết $\frac{3c}{4} \geq \frac{c}{2}$ ta có

$$S = a^4b + b^4c + \frac{c^4a}{2} + \frac{c^4a}{2} \leq a^4b + a^3bc + \frac{ca^4}{2} + \frac{c^2a^3}{2}$$

$$= a^3b(a+c) + \frac{a^3c}{2}(a+c) = a^3(a+c)\left(b + \frac{c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S = a^4b + b^4c + c^4a \leq a^3(a+c)\left(b + \frac{c}{2}\right) \leq a^3(a+c)\left(b + \frac{3c}{2}\right)$$

$$S = 4^4 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a+c}{4} \left(b + \frac{3c}{2}\right) \leq 4^4 \left[\frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a+c}{4} + \left(b + \frac{3c}{2}\right)}{5} \right]^5$$

$$= 4^4 \cdot \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5 = \frac{4^4}{5^5} = \frac{256}{3125} \Rightarrow S = a^4 b + b^4 c + c^4 a \leq \frac{256}{3125}$$

Dấu bằng xảy ra (theo $a = \text{Max}(a, b, c)$) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1; c=0 \\ \frac{a}{4} = \frac{a+c}{4} = b + \frac{3c}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}; b = \frac{1}{5}; c=0$

Trong trường hợp tổng quát, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c)$ là một hoán vị của $\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$

Bài 5. Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $a^2(b-c) + b^2(c-b) + c^2(1-c) \leq \frac{108}{529}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(c-b) + c^2(1-c) &\leq 0 + \frac{1}{2} [b \cdot b(2c-2b)] + c^2(1-c) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b+b+2c-2b}{3} \right)^3 + c^2(1-c) = c^2 \left(\frac{4}{27} \cdot c + 1 - c \right) = c^2 \left(1 - \frac{23}{27} \cdot c \right) \\ &= \left(\frac{54}{23} \right)^2 \left(\frac{23}{54} \cdot c \right) \left(\frac{23}{54} \cdot c \right) \left(1 - \frac{23}{27} \cdot c \right) \leq \left(\frac{54}{23} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{108}{529} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 0, b = \frac{12}{23}, c = \frac{18}{23}$

Bài 6. Đặt $x, y, z, t \in [0, 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = x^2 y + y^2 z + z^2 t + t^2 x - xy^2 - yz^2 - zt^2 - tx^2$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \text{Max}\{x, y, z, t\}$. Ta có

$$S = y(x^2 - z^2 + yz - xy) + t(z^2 - x^2 + xt - zt) = y(x-z)(x+z-y) + t(z-x)(x+z-t)$$

$$\leq y(x-z)(x+z-y) + 0 \leq \left[\frac{y + (x-z) + (x+z-y)}{3} \right]^3 = \frac{8}{27} \cdot x^3 \leq \frac{8}{27} \cdot 1^3 = \frac{8}{27}$$

Với $x=1; y=\frac{2}{3}; z=\frac{1}{3}; t=0$, $\text{Max } S = \frac{8}{27}$

Bài 7. Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq 12 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq b^2 - bc + c^2 \leq b^2 \\ 0 \leq c^2 - ca + a^2 \leq a^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq a^2 b^2$$

$$\text{VT (1)} \leq a^2 b^2 (a^2 - ab + b^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3ab}{2} \cdot \frac{3ab}{2} (a^2 - ab + b^2) \leq \frac{4}{9} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{3ab}{2} + \frac{3ab}{2} + (a^2 - ab + b^2) \right) \right]^3$$

$$= \frac{4}{9} \left(\frac{(a+b)^2}{3} \right)^3 \leq \frac{4}{9} \left(\frac{(a+b+c)^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{(a+b+c)^6}{3^3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3^6}{3^3} = \frac{4}{9} \cdot 3^3 = 12$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3ab}{2} = a^2 - ab + b^2, c = 0 \Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = 0$$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a \geq 7; 5a + 7b \geq 70 \\ 10a + 14b + 35c \geq 210 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S = a^3 + b^3 + c^3$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 \quad \forall x, y, z > 0$

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề

• **Áp dụng:** $S = a^3 + b^3 + c^3 = 8 \left[\left(\frac{a}{7} \right)^3 + \left(\frac{b}{5} \right)^3 + \left(\frac{c}{2} \right)^3 \right] + 117 \left[\left(\frac{a}{7} \right)^3 + \left(\frac{b}{5} \right)^3 \right] + 218 \left(\frac{a}{7} \right)^3$

$$\geq 8 \left[3 \left(\frac{\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{2}}{3} \right)^3 \right] + 117 \left[2 \left(\frac{\frac{a}{7} + \frac{b}{5}}{2} \right)^3 \right] + 218 \left(\frac{a}{7} \right)^3 \geq 8 \times 3 + 117 \times 2 + 218 = 476$$

Với $a = 7, b = 5, c = 2$ ta có: Min $S = 476$

Bài 9. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 3 \geq a \geq b \geq c \geq d > 0 \end{cases}$$

$$4a^2 + 9b^2 \geq 2a^2 b^2$$

$$4a^2 b^2 + 9b^2 c^2 + 4c^2 a^2 \geq 3a^2 b^2 c^2$$

$$a^2 b^2 c^2 + 9b^2 c^2 d^2 + 4c^2 d^2 a^2 + 4d^2 a^2 b^2 \geq 4a^2 b^2 c^2 d^2$$

Chứng minh rằng :

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 44$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3 + t^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x, y, z, t > 0$

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề

• **Áp dụng:**

$$\begin{aligned}
 44 &= 1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 = d^3 \left[\left(\frac{3}{a}\right)^3 + \left(\frac{2}{b}\right)^3 + \left(\frac{2}{c}\right)^3 + \left(\frac{1}{d}\right)^3 \right] \\
 &+ (c^3 - d^3) \left[\left(\frac{3}{a}\right)^3 + \left(\frac{2}{b}\right)^3 + \left(\frac{2}{c}\right)^3 \right] + (b^3 - c^3) \left[\left(\frac{3}{a}\right)^3 + \left(\frac{2}{b}\right)^3 \right] + (a^3 - b^3) \left(\frac{3}{a}\right)^3 \geq \\
 &4d^3 \left[\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2}{4} \right]^{\frac{3}{2}} + 3(c^3 - d^3) \left[\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}{3} \right]^{\frac{3}{2}} + 2(b^3 - c^3) \left[\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}{2} \right]^{\frac{3}{2}} \\
 &+ (a^3 - b^3) \left(\frac{3}{a}\right)^3 \geq 4d^3 + 3(c^3 - d^3) + 2(b^3 - c^3) + (a^3 - b^3) = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \Rightarrow (\text{đpcm})
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3; b=c=2; d=1$

Bài 10. Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc$

Chứng minh

Nhận xét rằng trong ba số a, b, c luôn có một số nằm giữa hai số còn lại (*), không mất tính tổng quát, ta giả sử số đó là b , nghĩa là $(b-a)(b-c) \leq 0$.

Biến đổi biểu thức đã cho như sau :

$$P = ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc = (ab^2 + ca^2 - a^2b - abc) + (bc^2 + a^2b) = a(b-a)(b-c) + b(c^2 + a^2)$$

Theo nhận xét trên thì $a(b-a)(b-c) \leq 0$, suy ra $P \leq b(c^2 + a^2)$.

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có :

$$b(c^2 + a^2) = 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{c^2 + a^2}{2} \cdot \frac{c^2 + a^2}{2}} \leq 2\sqrt{\left(\frac{b^2 + \frac{c^2 + a^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2}}{3}\right)^3} = 2\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3} = 2$$

$$\text{Từ đó ta có } P \leq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a(b-a)(b-c) = 0 \\ c^2 + a^2 = 2b^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a = 0, b = 1, c = \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2, đạt được tại $a=b=c=1$ hoặc $a=0, b=1, c=\sqrt{2}$ và các hoán vị tương ứng.

XII. PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG HỆ SỐ

Trong các phần trước, các bất đẳng thức được đề cập đến có thể dự đoán được điểm rơi một cách trực giác (dù đối xứng hay không đối xứng). Tuy nhiên với các bất đẳng thức mà điểm rơi không là các số nguyên dương thậm chí là các số vô tỷ thì không thể dự đoán được bằng trực giác. Khi đó, chúng ta cần phải đưa thêm các tham số giả định rồi mới sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**. Việc xác lập điều kiện các đẳng thức xảy ra sẽ dẫn đến hệ điều kiện để tìm tham số. Vì thế phương pháp này có tên gọi: Phương pháp cân bằng hệ số.

Bài 1. Cho $x \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$

Giải

Với $\alpha, \beta > 0$, Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$+ \begin{cases} 13\sqrt{x^2 - x^4} = \frac{13}{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^2 x^2 (1 - x^2)} \leq \frac{13}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + (1 - x^2)}{2} = \frac{13(\alpha^2 - 1)x^2 + 13}{2\alpha} \\ 9\sqrt{x^2 + x^4} = \frac{9}{\beta} \cdot \sqrt{\beta^2 x^2 (1 + x^2)} \leq \frac{9}{\beta} \cdot \frac{\beta^2 x^2 + (1 + x^2)}{2} = \frac{9(\beta^2 + 1)x^2 + 9}{2\beta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} \leq \left[\frac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta} \right] x^2 + \frac{13}{2\alpha} + \frac{9}{2\beta}$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 x^2 = 1 - x^2 \\ \beta^2 x^2 = 1 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)x^2 = (\beta^2 - 1)x^2 = 1$$

$$\text{Chọn } \alpha, \beta > 0 \text{ sao cho } \begin{cases} \alpha^2 + 1 = \beta^2 - 1 \\ \frac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } S \leq \frac{13}{2\alpha} + \frac{9}{2\beta} = 16$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy Max } S = 16$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$.

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a^3 + 8b^3 + c^3$

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + \sqrt{bc}$

Giải

a. Biến đổi S với các tham số $\alpha, \beta > 0$ sau đó sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$S = (a^3 + \alpha^3 + \alpha^3) + (8b^3 + \beta^3 + \beta^3) + (c^3 + \alpha^3 + \alpha^3) - (4\alpha^3 + 2\beta^3)$$

$$\geq (3\alpha^2 a + 6\beta^2 b + 3\alpha^2 c) - (4\alpha^3 + 2\beta^3) = S_0$$

Ràng buộc điều kiện S_0 là hằng số và $\text{Min} S = S_0$, ta nhận được hệ điều kiện của α, β

$$\begin{cases} 3\alpha^2 = 6\beta^2; a = c = \alpha \\ 2b = \beta; a + b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \frac{\beta}{2} = 3 \\ \alpha^2 = 2\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = 6 - \beta \\ \alpha^2 = 2\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+1}; \beta = \frac{6}{4\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow S \geq 3\alpha^2(a+b+c) - 2(4\sqrt{2}+1)\beta^3 = \frac{9 \times 72}{(4\sqrt{2}+1)^2} - \frac{2(4\sqrt{2}+1) \times 216}{(4\sqrt{2}+1)^3} = \frac{1080}{(4\sqrt{2}+1)^2}$$

b. Biến đổi T với các tham số $\alpha, \beta > 0$ rồi sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$T = \sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{\alpha a} \sqrt{\frac{b}{\alpha}} + 2\sqrt{a} \sqrt{c} + \sqrt{\beta b} \sqrt{\frac{c}{\beta}}$$

$$T \leq \frac{1}{2} \left(\alpha a + \frac{b}{\alpha} \right) + (a+c) + \frac{1}{2} \left(\beta b + \frac{c}{\beta} \right) = \frac{1}{2} \left[(\alpha+2)a + \left(\frac{1}{\alpha} + \beta \right)b + \left(\frac{1}{\beta} + 2 \right)c \right] = T_0$$

Ràng buộc điều kiện T_0 là hằng số và $\text{Min} T = T_0$ ta nhận được hệ điều kiện của α, β

$$\begin{cases} \alpha a = \frac{b}{\alpha}; \beta b = \frac{c}{\beta} \\ a = c; a + b + c = 3 \\ \alpha + 2 = \frac{1}{\alpha} + \beta = \frac{1}{\beta} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c = \frac{3}{2 + \alpha^2}; b = \frac{3\alpha^2}{2 + \alpha^2} \\ \alpha + 2 = \frac{1}{\alpha} + \beta = \frac{1}{\beta} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} - 1 \\ \beta = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) \Rightarrow \text{Max } T = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$

Giải

Biến đổi T với các tham số $\alpha, \beta > 0$ rồi sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$x^3 + 5\alpha = x^3 + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\alpha^5 x^3} = 6\alpha^{\frac{5}{6}} \sqrt{x}$$

$$y^3 + 5\beta = y^3 + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta \geq 6 \cdot \sqrt[6]{\beta^5 y^3} = 6\beta^{\frac{5}{6}} \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 1 + 5\alpha + 5\beta \geq 3 \left(2\alpha^{\frac{5}{6}} \sqrt{x} + \beta^{\frac{5}{6}} 2\sqrt{y} \right). \text{ Chứng minh hệ điều kiện } \begin{cases} x^3 = \alpha; y^3 = \beta \\ 2\alpha^{\frac{5}{6}} = \beta^{\frac{5}{6}}; \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1+2 \cdot \sqrt[5]{2}}; \beta = 2 \cdot \sqrt[5]{2} \alpha \Rightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{y} \leq \alpha^{-\frac{5}{6}} = (1+2 \cdot \sqrt[5]{2})^{\frac{5}{6}} \Rightarrow \text{Max } T = (1+2 \cdot \sqrt[5]{2})^{\frac{5}{6}}$$

Bài 4. Cho các số $a > 0$ và các số x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{16}xy = a^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = xy + yz + zx$

Giải

Với $\alpha \in (0; 1)$, Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2) \geq 2\alpha xy \\ (1-\alpha)x^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{(1-\alpha)x^2 \cdot \frac{z^2}{2}} \geq \sqrt{2(1-\alpha)}xz \\ (1-\alpha)y^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{(1-\alpha)y^2 \cdot \frac{z^2}{2}} \geq \sqrt{2(1-\alpha)}yz \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2\alpha xy + \sqrt{2(1-\alpha)}(xz + yz) \Rightarrow a^2 \geq \left(2\alpha + \frac{9}{16}\right)xy + \sqrt{2(1-\alpha)}(xz + yz)$$

Chọn $\alpha \in (0; 1)$ sao cho $2\alpha + \frac{9}{16} = \sqrt{2(1-\alpha)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{12\sqrt{5}-17}{32}$. Khi đó ta có

$$a^2 \geq \frac{3\sqrt{5}-2}{4}(xy + yz + zx) \Rightarrow S = xy + yz + zx \leq \frac{4a^2}{3\sqrt{5}-2} = \frac{4(3\sqrt{5}+2)}{41}a^2 \Rightarrow \text{Max } S = \frac{4(3\sqrt{5}+2)}{41}a^2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{49-12\sqrt{5}}{32}}x = \sqrt{\frac{49-12\sqrt{5}}{32}}y = \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{16}xy = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{4a}{\sqrt{90-12\sqrt{5}}}; z = \sqrt{\frac{49-12\sqrt{5}}{90-12\sqrt{5}}}a \\ x = y = \frac{-4a}{\sqrt{90-12\sqrt{5}}}; z = -\sqrt{\frac{49-12\sqrt{5}}{90-12\sqrt{5}}}a \end{cases}$$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1 \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a^3 + 3b^3 + 4c^3$

Giải

Xét các tham số $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ và sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$a^3 + a^3 + \alpha^3 \geq 3\alpha a^2; \frac{3}{2}(b^3 + b^3 + \beta^3) \geq \frac{9}{2}\beta b^2; 2(c^3 + c^3 + \gamma^3) \geq 6\gamma c^2$$

$$\Rightarrow 2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + \alpha^3 + \frac{3}{2}\beta^3 + 2\gamma^3 \geq 3\alpha a^2 + \frac{9}{4}\beta \cdot 2b^2 + 2\gamma \cdot 3c^2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha, b = \beta, c = \gamma \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1 \end{cases}$. Chọn α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} 3\alpha = \frac{9}{4}\beta = 2\gamma = k \geq 0 \\ \alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = \frac{9}{4}\beta = 2\gamma = k > 0 \\ \left(\frac{1}{9} + \frac{32}{81} + \frac{3}{4}\right)k^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{9}{4}\beta = 2\gamma = k = \frac{18}{\sqrt{407}}$$

Ta có: $2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + \left(\frac{6}{\sqrt{407}}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{8}{\sqrt{407}}\right)^3 + 2\left(\frac{9}{\sqrt{407}}\right)^3 \geq \frac{18}{\sqrt{407}}(a^2 + 2b^2 + 3c^2)$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + \frac{6}{\sqrt{407}} \geq \frac{18}{\sqrt{407}} \Leftrightarrow 2a^3 + 3b^3 + 4c^3 \geq \frac{12}{\sqrt{407}}$$

Với $a = \frac{6}{\sqrt{407}}, b = \frac{8}{\sqrt{407}}, c = \frac{9}{\sqrt{407}}$, ta có $\text{Min } S = \frac{12}{\sqrt{407}}$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4ab + 8bc + 6ca$

Giải

Giả sử rằng $S = ma(b+c) + nb(c+a) + pc(a+b) = (m+n)ab + (n+p)bc + (p+m)ca$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ n+p=8 \\ p+m=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=3 \\ p=5 \end{cases} \Rightarrow S = 4ab + 8bc + 6ca = a(b+c) + 3b(c+a) + 5c(a+b) \\ = a(3-a) + 3b(3-b) + 5c(3-c)$$

$$\Rightarrow S = \frac{81}{4} - \left[\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + 5\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \right]$$

Đặt $x = \left|a - \frac{3}{2}\right|; y = \left|b - \frac{3}{2}\right|; z = \left|c - \frac{3}{2}\right| \Rightarrow x + y + z \geq \left|a + b + c - \frac{9}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Khi đó: $S = \frac{81}{4} - (x^2 + 3y^2 + 5z^2) \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 + 5z^2 = \frac{81}{4} - S$. Với các tham số $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ta có

$$\begin{cases} x^2 + \alpha^2 \geq 2\sqrt{x^2\alpha^2} = 2\alpha x \\ 3y^2 + 3\beta^2 \geq 6\sqrt{y^2\beta^2} = 6\beta y \Rightarrow \left(\frac{81}{4} - S\right) + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) \geq 2(\alpha x + 3\beta y + 5\gamma z) \\ 5z^2 + 5\gamma^2 \geq 10\sqrt{z^2\gamma^2} = 10\gamma z \end{cases}$$

Chọn $\alpha = 3\beta = 5\gamma \Rightarrow S \leq \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 2\alpha(x + y + z) \leq \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 3\alpha$

$\text{Max } S = \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 3\alpha \Leftrightarrow x = \alpha; y = \beta; z = \gamma \text{ và } x + y + z = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x + y + z = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{45}{46}; \beta = \frac{15}{46}; \gamma = \frac{9}{46}$. Khi đó:

$\text{Max } S = \frac{81}{4} + (\alpha^2 + 3\beta^2 + 5\gamma^2) - 3\alpha = \frac{81}{4} + \frac{23\alpha^2}{15} - 3\alpha = \frac{432}{23}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left|a - \frac{3}{2}\right| = \alpha = \frac{45}{46}; \left|b - \frac{3}{2}\right| = \beta = \frac{15}{46}; \left|c - \frac{3}{2}\right| = \gamma = \frac{9}{46}$

$$\Leftrightarrow a - \frac{3}{2} = -\frac{45}{46}; b - \frac{3}{2} = -\frac{15}{46}; c - \frac{3}{2} = -\frac{9}{46} \Leftrightarrow a = \frac{12}{23}; b = \frac{27}{23}; c = \frac{30}{23}$$

Bài 7. Cho $a, b, c, m > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = m(a^2 + b^2) + c^2$ theo tham số m

Giải

Với tham số $\alpha \in (0; m)$, sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$+ \begin{cases} \alpha a^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}} ac \\ \alpha b^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}} bc \\ (m - \alpha)(a^2 + b^2) \geq 2(m - \alpha)ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow m(a^2 + b^2) + c^2 \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(ac + bc) + 2(m - \alpha)ab$$

Chọn $\alpha \in (0; m)$ sao cho $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = m - \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{4}$. Khi đó ta có:

$$S = m(a^2 + b^2) + c^2 \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}(ab + bc + ca) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + 8m}}, c = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2 \cdot \sqrt[4]{1 + 8m}}$. Vậy $\text{Min } S = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$

Bài 8. Cho $a, b, c, m, n > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Tìm giá trị của biểu thức $S = ma^2 + nb^2 + c^2$ theo tham số m, n

Giải

Xét các tham số $x, y, z > 0$ sao cho $m - x, n - y, 1 - z > 0$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$+ \begin{cases} xa^2 + yb^2 \geq 2\sqrt{xy}ab \\ (m - x)a^2 + zc^2 \geq 2\sqrt{(m - x)z}ac \\ (n - y)b^2 + (1 - z)c^2 \geq 2\sqrt{(n - y)(1 - z)}bc \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = ma^2 + nb^2 + c^2 \geq 2\sqrt{xy}ab + 2\sqrt{(m - x)z}ac + 2\sqrt{(n - y)(1 - z)}bc$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} xa^2 = yb^2 \\ (m - x)a^2 = zc^2 \\ (n - y)b^2 = (1 - z)c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{x}{y}a^2 \\ c^2 = \frac{m - x}{z}a^2 \\ (n - y)xz = (1 - z)(m - x)y \end{cases}$$

Chọn x, y, z sao cho $\sqrt{xy} = \sqrt{(m-x)z} = \sqrt{(n-y)(1-z)} = k > 0 \Rightarrow (n-y)xz = (1-z)(m-x)y = k^3$

Ta có: $mn = [x + (m-x)][y + (n-y)][z + (1-z)] = k^2(m+n+1) + 2k^3$

Đặt $f(k) = 2k^3 + k^2(m+n+1) - mn \Rightarrow f'(k) = f'(k) = 6k^2 + 2(m+n+1)k > 0, \forall k > 0$

$\Rightarrow f(k)$ tăng trên $(0; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $f(k) = 0$ có nghiệm duy nhất $k_0 > 0$

$\Rightarrow S = ma^2 + nb^2 + c^2 \geq 2k(ab+bc+ca) = 2k_0 \Rightarrow \text{Min } S = 2k_0$.

Bài 9. [Tạp chí TTT] Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thuộc $[0; 2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử $2 \geq a > b > c \geq 0$. Sử dụng AM - GM ta có:

$$+ \begin{cases} \frac{1}{(a-b)^2} + (a-b) + (a-b) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a-b)^2} \cdot (a-b) \cdot (a-b)} = 3 \\ \frac{1}{(b-c)^2} + (b-c) + (b-c) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b-c)^2} \cdot (b-c) \cdot (b-c)} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + 2(a-c) \geq 6 \Rightarrow P \geq \frac{1}{(a-c)^2} - 2(a-c) + 6$$

$$\text{Vì } 2 \geq a > b > c \geq 0 \text{ nên } 0 < a-c \leq 2 \Rightarrow P \geq \frac{1}{2^2} - 2 \cdot 2 + 6 = \frac{9}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$, đạt được tại $a=2; b=1; c=0$ và các hoán vị.

Bài 10. [IMO 2006] Cho các số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$

Giải

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} [3(a^2 + b^2 + c^2)]^2 &= [2(a-b)^2 + 2(a-c)(b-c) + (a+b+c)^2]^2 \geq \\ &\geq 8|(a-c)(b-c)|[2(a-b)^2 + (a+b+c)^2] \geq \\ &\geq 16\sqrt{2} |(a-c)(b-c)(a-b)(a+b+c)| \geq 16\sqrt{2} P \Rightarrow P \leq \frac{9}{16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6\sqrt{2}}; b = \frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}; c = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}. \text{ Vậy } \text{Max } P = \frac{9}{16\sqrt{2}}.$$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $6a + \sqrt{3}b + \sqrt[3]{2}c = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3}$.

Giải

$$\begin{cases} 6\left(6a + \frac{1}{6a}\right) \geq 6 \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{6a} \cdot 6a} = 12 \\ 3\left(\frac{1}{3b^2} + \sqrt{3}b + \sqrt{3}b\right) \geq 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow S + 6(6a + \sqrt{3}b + \sqrt[3]{2}c) \geq 29 \Rightarrow S \geq 11 \\ 2\left(\frac{1}{2c^3} + \sqrt[3]{2}c + \sqrt[3]{2}c + \sqrt[3]{2}c\right) \geq 8 \end{cases}$$

Với $a = \frac{1}{6}$; $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ thì $\text{Min } S = 11$.

Bài 12. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của: $F(a, b, c) = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$

Giải

Cho $a = b \vee b = c \vee c = a$ thì $F(a, b, c) = 0$ mà $\deg F(a, b, c) = 4$ nên

$F(a, b, c) = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = k(a-b)(b-c)(c-a)$ (do $a+b+c=1$) với k

là hằng số mà ta cần xác định. Cho $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{1}{3}$; $c = 0$ thì $k = 1$ suy ra

$$F(a, b, c) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Ta có $F(a, c, b) = (a-c)(c-b)(b-a) = -F(a, b, c)$ nên giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $F(a, b, c)$ là hai số đối nhau. Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của $F(a, b, c)$ với giả định $a > c > b$ mà không làm mất đi tính tổng quát.

Đặt $a + b = d$ ta có $d + c = 1$, khi đó ta biến đổi và đưa tham số giả định α, β

$$\begin{aligned} F &= (a-b)(b-c)(c-a) = (a-b)(c-b)(a-c) \leq (a+b)c(a+b-c) = d \cdot c(d-c) = \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \alpha d \cdot \beta c(d-c) \leq \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha d + \beta c + (d-c)}{3} \right)^3 = \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{(\alpha+1)d + (\beta-1)c}{3} \right)^3 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta cần chọn $\alpha, \beta > 0$ để $\alpha + 1 = \beta - 1$ và tồn tại $d > c > 0$ sao cho $\alpha d = \beta c = d - c$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = 2; \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{d}{d-c} - \frac{c}{d-c} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 2 \\ \beta \cdot \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} - 1 \\ \beta = \sqrt{3} + 1 \end{cases} \text{Thay vào } (*)$$

$$F \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}(d+c)}{3} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{18}. \text{ Với } a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}; b = 0; c = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \text{ thì } \text{Max } F = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Theo nhận xét ban đầu ta suy ra $\text{Min } F = -\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Bài 13. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

Chứng minh rằng $S = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \geq 4^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n$

Chứng minh

Với $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ và $S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \forall k = \overline{1, n}$,

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = x_1 \cdot \frac{a_1}{x_1} + x_2 \cdot \frac{a_2}{x_2} + \dots + x_k \cdot \frac{a_k}{x_k} \geq (x_1 + \dots + x_k) \left(\frac{a_1}{x_1} \right)^{\frac{x_1}{S_k}} \left(\frac{a_2}{x_2} \right)^{\frac{x_2}{S_k}} \dots \left(\frac{a_k}{x_k} \right)^{\frac{x_k}{S_k}}$$

Suy ra : $S = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3) \dots (a_1 + \dots + a_{n-1}) \geq C \cdot a_1^{C_1} a_2^{C_2} \dots a_n^{C_n}$

$$C_1 = \frac{x_1}{S_2} + \dots + \frac{x_1}{S_{n-1}} + \frac{2x_1}{S_n}; C_k = \frac{x_k}{S_k} + \dots + \frac{x_k}{S_{n-1}} + \frac{2x_k}{S_n}, \forall k = \overline{2, n-1}; C_n = \frac{2x_n}{S_n},$$

$$C = \frac{S_2 S_3 \dots S_{n-1} S_n^2}{x_1^{C_1} x_2^{C_2} \dots x_n^{C_n}}$$

$$\text{Chọn } x_1 = \frac{1}{2^{n-1}}; x_k = \frac{1}{2^{n+1-k}}, \forall k = \overline{2, n} \text{ vì vậy } S_k = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1-k}} = \frac{1}{2^{n-k}}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2^{n-1}} (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1) = 1; C_k = \frac{1}{2^{n+1-k}} (2^{n-k} + 2^{n-k+1} + \dots + 2 + 1) = 1, \forall k = \overline{2, n-1}$$

$$C_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1; C = \frac{2^{1+2+\dots+(n-2)+2(n-1)}}{2^{1+2+\dots+(n-2)}} = 4^{n-1}. \text{ Vậy } S \geq 4^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^{n-1}}; a_k = \frac{1}{2^{n+1-k}}, \forall k = \overline{2, n}$$

Bài 14. Đặt $x_1, x_2, \dots, x_n$ là số thực n thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ và

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|$$

Giải

Trường hợp 1: Với $n = 2$, thì điều kiện giả thiết trở thành $x_1 + x_2 = 0; |x_1| + |x_2| = 1$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow P = |x_1 - x_2| = 1$$

Trường hợp 2: Với $n = 3$, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Ta có

$$\frac{P}{2} = (x_2 - x_1) \frac{x_3 - x_1}{2} (x_3 - x_2). \text{ Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:}$$

$$\frac{P}{2} \leq \left(\frac{1}{3} \left[(x_2 - x_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} + (x_3 - x_2) \right] \right)^3 = \left(\frac{x_3 - x_1}{2} \right)^3 \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \\ x_2 - x_1 = \frac{x_3 - x_1}{2} = x_3 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } \max P = \frac{1}{4}$$

Trường hợp 3: Với $n = 4$, Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, khi đó ta có thể dự đoán giá trị Max P đạt được khi $x_1 = -x_4; x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3$.

Đặt $x_3 - x_2 = a(x_4 - x_3)$, từ đó suy ra để P đạt Max thì các biến số phải thỏa mãn điều

$$\text{kiện: } x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_4 - x_2}{a+1} = \frac{x_4 - x_1}{a+2}.$$

Từ cách phân tích trên, ta đi đến lời giải cho trường hợp $n = 4$ như sau:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$

$$\Rightarrow P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

$$\text{Do đó } \frac{P}{a(a+2)(a+1)^2} = (x_2 - x_1) \frac{(x_3 - x_2)}{a+1} \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} \frac{(x_3 - x_2)}{a} \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} (x_4 - x_3)$$

$$\leq \left[\frac{1}{6} \left((x_2 - x_1) \frac{(x_3 - x_2)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} + (x_4 - x_3) \right) \right]^6$$

$$\text{Suy ra : } P \leq \frac{1}{2^8} \left[(x_2 - x_1) \left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + -1 \right) (x_3 - x_2) \right]^6$$

$$\text{Chọn } a \text{ sao cho } \left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + -1 \right) \Leftrightarrow a = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Khi đó ta có } \left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + -1 \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 P \leq \frac{1}{2^8} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \right]^6 \Rightarrow P \leq \frac{1}{2^6}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các biến số thỏa mãn hệ điều kiện sau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1 \\ (x_1 - x_2) = (x_4 - x_3) = \frac{x_4 - x_3}{\sqrt{2} - 1} = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} = \frac{x_4 - x_1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad (1)$$

Như vậy với trường hợp $n = 4$ thì: $\max P = \frac{1}{2^8}$ (khi các biến số thỏa mãn điều kiện (1))

Trường hợp 4: $n = 5$: Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, ta dự đoán bộ các biến số để P đạt Max là $x_5 = -x_1, x_4 = -x_2, x_3 = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_5 - x_4, x_3 - x_2 = x_4 - x_3$.

Đặt $x_3 - x_2 = a(x_2 - x_1)$, từ đó suy ra để P đạt Max thì các biến số phải thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{x_2 - x_1}{1} = \frac{x_4 - x_3}{a} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_5 - x_3}{a+1} = \frac{x_4 - x_2}{2a} = \frac{x_5 - x_2}{2a+1} = \frac{x_4 - x_1}{2a+1} = \frac{x_5 - x_1}{2a+2} = \frac{x_5 - x_4}{1}$$
 Từ cách phân tích trên, ta đi đến lời giải cho trường hợp $n = 5$ như sau:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$. Khi đó ta có:

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_5 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_5 - x_2)(x_5 - x_2)(x_5 - x_4)$$

Xét biểu thức: $Q = \frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}$. Biến đổi Q theo và sử dụng AM - GM ta có:

$$Q = \frac{x_2 - x_1}{1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{a+1} \cdot \frac{x_4 - x_1}{2a+1} \cdot \frac{x_5 - x_1}{2a+2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{a} \cdot \frac{x_4 - x_2}{2a} \cdot \frac{x_5 - x_2}{2a+1} \cdot \frac{x_4 - x_3}{a} \cdot \frac{x_5 - x_3}{a+1} \cdot \frac{x_5 - x_4}{1} \leq$$

$$\frac{1}{10^{10}} \left[\frac{x_2 - x_1}{1} + \frac{x_3 - x_1}{a+1} + \frac{x_4 - x_1}{2a+1} + \frac{x_5 - x_1}{2a+2} + \frac{x_3 - x_2}{a} + \frac{x_4 - x_2}{2a} + \frac{x_5 - x_2}{2a+1} + \frac{x_4 - x_3}{a} + \frac{x_5 - x_3}{a+1} + \frac{x_5 - x_4}{1} \right]^{10}$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{10^{10}} \left[\left(\frac{3}{2(a+1)} + \frac{1}{2a+1} + 1 \right) (-x_1 + x_5) + \left(-1 + \frac{3}{2a} + \frac{1}{2a+1} \right) (-x_2 + x_4) \right]^{10} \quad (2)$$

Chọn $a > 0$ sao cho $\left(\frac{3}{2(a+1)} + \frac{1}{2a+1} + 1 \right) = \left(-1 + \frac{3}{2a} + \frac{1}{2a+1} \right) = q \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, q = \frac{5}{2}$

Suy ra $Q = \frac{P}{27/4}$ hay: $Q \leq \frac{1}{10^{10}} \left[\frac{5}{2} (-x_1 - x_2 + x_4 + x_5) \right]^{10} = \frac{1}{2^{10}} \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2^{20}} \frac{27}{4} = \frac{27}{2^{22}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| = 1 \\ (x_2 - x_1) = \frac{x_3 - x_1}{3/2} = \frac{x_4 - x_1}{2} = \frac{x_5 - x_1}{3} = \frac{x_3 - x_2}{1/2} = \frac{x_4 - x_2}{1} = \frac{x_5 - x_2}{2} = \frac{x_4 - x_3}{1/2} = \frac{x_5 - x_3}{3/2} = \frac{x_5 - x_4}{1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1 = -x_5 = -\frac{3}{8}; x_2 = -x_4 = -\frac{1}{8}; x_3 = 0$. Vậy với trường hợp $n = 5$ thì $\text{Max } P = \frac{27}{2^{22}}$

Bình luận. Bằng phương pháp tương tự ta sẽ tìm được chứng minh ứng với $n \geq 6$.

XIII. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ PHỦ ĐỊNH CỦA PHỦ ĐỊNH

Kỹ thuật này lần đầu tiên được xuất hiện trong quá trình chứng minh của một bất đẳng thức có trong cuốn sách *Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức* của tác giả được NXB TP HCM xuất bản năm 1993. Kỹ thuật này cũng được giới thiệu trong tạp chí *Mathematical Reflections* 3, 2006 của các tác giả *Iurie Boreico, Marcel Teleuca* và trong cuốn sách *Algebraic inequalities* của *Vasile Cirtoaje* (NXB Gil, 2006). Xét theo khía cạnh triết học có thể gọi kỹ thuật này là kỹ thuật “*Phủ định của phủ định*”. Bản chất của kỹ thuật là tách một biểu thức dương thành hiệu hai biểu thức dương và đánh giá mẫu số của biểu thức ở sau dấu “-”. Chúng ta có thể mô hình hóa kỹ thuật này bằng mệnh đề sau đây:

Mệnh đề: $A \geq B > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B} \Rightarrow -\frac{1}{A} \geq -\frac{1}{B}$

Bài 1. [Bulgarian TST 2003] Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh: $S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Phân tích và tìm tòi lời giải

- **Sai lầm thường gặp 1:** $S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+b^2)(1+c^2)(1+a^2)}} \leq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{2b \cdot 2c \cdot 2a}} = \frac{3}{2} \Rightarrow S \geq \frac{3}{2}$
- **Sai lầm thường gặp 2:** $S \leq \frac{a}{2b} + \frac{b}{2c} + \frac{c}{2a} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \frac{3}{2} \Rightarrow S \geq \frac{3}{2}$
- **Lời giải đúng:**

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM – GM để đánh giá mẫu số, ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \\ + \frac{b}{1+c^2} = b - \frac{bc^2}{1+c^2} \geq b - \frac{bc^2}{2c} = b - \frac{bc}{2} \\ \frac{c}{1+a^2} = c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq c - \frac{ca^2}{2a} = c - \frac{ca}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \geq (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) = 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \quad (1)$$

Mặt khác, $9 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $S \geq 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 2. Cho các số $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S = \sum_{cyc} \frac{a^3}{a^2 + b^2} = \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \right) \geq \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab^2}{2ab} \right) = \sum_{cyc} \left(a - \frac{b}{2} \right) = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a+b+c+d=4 \end{cases}$. Chứng minh: $S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S = \sum_{cyc} \frac{a}{1+b^2} = \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab^2}{1+b^2} \right) \geq \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab^2}{2b} \right) = \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab}{2} \right) = 4 - \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da) \quad (1)$$

Mặt khác, $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \leq \left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2} \right]^2 = 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $S \geq 4 - \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da) \geq 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a+b+c+d=4 \end{cases}$. Chứng minh: $S = \frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S = \sum_{cyc} \frac{a}{1+b^2c} = \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \right) \geq \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab^2c}{2\sqrt{b^2c}} \right) = \sum_{cyc} \left(a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} \right) = \sum_{cyc} \left(a - \frac{b \cdot 2\sqrt{a(ac)}}{4} \right) \\ \geq \sum_{cyc} \left(a - \frac{b(a+ac)}{4} \right) = 4 - \frac{1}{4}[(ab+bc+cd+da) + (abc+bcd+dca+abd)] \quad (1)$$

Mặt khác, $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) \leq \left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2} \right]^2 = 4 \quad (2)$

và $abc+bcd+dca+abd = ab(c+d) + cd(a+b) \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 (c+d) + \left(\frac{c+d}{2} \right)^2 (a+b) \\ = \frac{1}{4}(a+b)(c+a)(a+b+c+d) = (a+b)(c+a) \leq \left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2} \right]^2 = 4 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $S \geq (a+b+c+d) - \frac{1}{4}(4+4) = 4 - \frac{1}{4}(4+4) = 2$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab+bc+ca=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a+2b^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \left(a - \frac{2ab^2}{3 \cdot \sqrt[3]{ab^2 b^2}} \right) = \sum_{\text{cyc}} \left[a - \frac{2}{3} (ab)^{\frac{2}{3}} \right] = (a+b+c) - \frac{2}{3} \left[(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \right]$$

Ta có: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$. Mặt khác,

$$\begin{cases} ab+ab+1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{ab \cdot ab \cdot 1} = 3(ab)^{\frac{2}{3}} \\ bc+bc+1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{bc \cdot bc \cdot 1} = 3(bc)^{\frac{2}{3}} \\ ca+ca+1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{ca \cdot ca \cdot 1} = 3(ca)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca) + 3 = 9 \geq 3 \left[(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \right] \Rightarrow (ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \leq 3$$

$$\text{Suy ra: } S \geq (a+b+c) - \frac{2}{3} \left[(ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}} \right] \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 6. Cho các số $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** để đánh giá mẫu số, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a+1}{b^2+1} = \sum_{\text{cyc}} \left[(a+1) - \frac{(a+1)b^2}{b^2+1} \right] \geq \sum_{\text{cyc}} \left[a+1 - \frac{(a+1)b^2}{2b} \right] = \sum_{\text{cyc}} \left[a+1 - \frac{(a+1)b}{2} \right] \\ &= \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Mặt khác, $9 = (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow 3 \geq ab+bc+ca$

$$\Rightarrow S \geq \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 = 3. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Bài 7. Cho các số $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a+b}{1+a} + \frac{b+c}{1+b} + \frac{c+a}{1+c} \geq ab+bc+ca$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** để đánh giá, ta có:

$$\text{VT} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a+b}{1+a} = \sum_{\text{cyc}} \left(a+b - \frac{a^2+ab}{1+a} \right) = 2(a+b+c) - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+ab}{1+a} = 6 - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+ab}{1+a}$$

$$\text{Ta có: } 4a \leq (1+a)^2 \Rightarrow \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1+a}{a} \Rightarrow \frac{a^2+ab}{1+a} \leq \frac{1}{4} (a^2+ab) \frac{1+a}{a} = \frac{1}{4} (a^2+ab+a+b)$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + ab}{1+a} \leq \frac{1}{4} [a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 2(a+b+c)] = \frac{1}{4} [(a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) + 6]$$

$$\Rightarrow VT = 6 - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + ab}{1+a} \geq 6 - \frac{1}{4} [(a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) + 6] = 6 - \frac{1}{4} [15 - (ab+bc+ca)]$$

$$= \frac{1}{4} [9 + (ab+bc+ca)] = \frac{1}{4} [(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca)] \geq$$

$$\frac{1}{4} [3(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)] = ab+bc+ca$$

Bài 8. Cho các số $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $S = \frac{a}{ab+b^3} + \frac{b}{bc+c^3} + \frac{c}{ca+a^3} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S = \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{ab+b^3} = \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \right) = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b} - \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{a+b^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b} - \sum_{\text{cyc}} \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3 = \left(\frac{1}{a} + 1 \right) + \left(\frac{1}{b} + 1 \right) + \left(\frac{1}{c} + 1 \right) \geq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

$$\Rightarrow S \geq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) - 3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) - 3 \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}} - 3 = \frac{3}{2}$$

Bài 9. Cho các số $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \frac{a^4b}{a^2+1} + \frac{b^4c}{b^2+1} + \frac{c^4a}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM - GM để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4b}{a^2+1} = \sum_{\text{cyc}} \left(a^2b - \frac{a^2b}{a^2+1} \right) \geq \sum_{\text{cyc}} a^2b - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2b}{2a} = (a^2b + b^2c + c^2a) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\text{Ta có: } + \begin{cases} a^2b + a^2b + b^2c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^4b^4c} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^3b^3(abc)} = 3ab \\ b^2c + b^2c + c^2a \geq 3 \cdot \sqrt[3]{b^4c^4a} = 3 \cdot \sqrt[3]{b^3c^3(abc)} = 3bc \\ c^2a + c^2a + a^2b \geq 3 \cdot \sqrt[3]{c^4a^4b} = 3 \cdot \sqrt[3]{c^3a^3(abc)} = 3ca \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow S \geq (a^2b + b^2c + c^2a) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq (ab+bc+ca) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}$$

XIV. VỀ ĐẸP ĐIỂM RƠI QUA BỐN BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KINH ĐIỂN

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh bốn bất đẳng thức sau trong tam giác ABC

$$T_1 = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \quad ; \quad T_2 = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$T_3 = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad T_4 = \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} T_1 &= \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right) \cdot 1 + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)^2 + 1^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) \cdot 1 + \sin A \sin B - \cos A \cos B \\ &\leq \frac{1}{2} \left[(\cos A + \cos B)^2 + 1^2 \right] + \frac{1}{2} (\sin^2 A + \sin^2 B) - \cos A \cos B \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \cdot \cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}} \cdot \cos A \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4} \right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B \right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{B}{2} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{A}{2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \frac{3}{4} \right) + \left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{3} + \sin^2 \frac{B}{2} \right) + \left(\frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{3} + \sin^2 \frac{A}{2} \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Bình luận: Theo nhận xét của bạn đọc thì phương pháp chung chứng minh bốn bài toán trên là ngắn gọn và độc đáo nhất. Lời giải này đã được giới thiệu trong các cuốn sách của tác giả xuất bản năm 2000, 2002. Về đẹp của lời giải là sự kết hợp giữa kỹ thuật chọn "điểm rơi" trong bất đẳng thức lượng giác với bất đẳng thức rất đơn giản $2xy \leq x^2 + y^2$ và đẳng thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Nhìn chung các sách đã xuất bản trên thế giới đều chứng minh bất đẳng thức này theo sơ đồ mô phỏng chứng minh bất đẳng thức Jensen được minh họa sau đây.

Phương pháp cổ điển:

$$\bullet \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \sin \frac{x+y}{2}, \quad \forall x, y \in (0, \pi)$$

$$\bullet \sin x + \sin y + \sin z + \sin t =$$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \sin \frac{z+t}{2} \cos \frac{z-t}{2} \leq 2 \sin \frac{x+y}{2} + 2 \sin \frac{z+t}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{x+y+z+t}{4} \cos \frac{x+y-z-t}{4} \leq 4 \sin \frac{x+y+z+t}{4}, \quad \forall x, y, z, t \in (0; \pi)$$

• Lấy $x = A, y = B, z = C, t = \frac{A+B+C}{3}$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sau đây là một bài toán tích hợp kỹ thuật đổi biến lượng giác và chọn điểm rơi

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$

Giải

$$S = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} = \frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{ab/c}}{1+\frac{ab}{c}}$$

Đặt $\frac{bc}{a} = \tan^2 \frac{A}{2}; \frac{ca}{b} = \tan^2 \frac{B}{2}$ với $0 < A, B < \pi$

Khi đó $1 = a + b + c = \sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}}$

Suy ra $\sqrt{\frac{ab}{c}} = \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} = \cot \left(\frac{A+B}{2} \right) = \tan \frac{C}{2}$ với $\begin{cases} A, B, C > 0 \\ A+B+C = \pi \end{cases}$

Thay thế $\frac{bc}{a} = \tan^2 \frac{A}{2}; \frac{ca}{b} = \tan^2 \frac{B}{2}; \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{C}{2}$ vào biểu thức S rồi biến đổi ta có :

$$S = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{\sin C}{2} = 1 + \frac{1}{2} (\cos A + \cos B + \sin C)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin A \cos B + \sqrt{3} \sin B \cos A)$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\left(\frac{3}{4} + \cos^2 A \right) + \left(\frac{3}{4} + \cos^2 B \right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}} [(3 \sin^2 A + \cos^2 B) + (3 \sin^2 B + \cos^2 A)]$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} (\cos^2 A + \sin^2 A) + \frac{\sqrt{3}}{4} (\cos^2 B + \sin^2 B) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = 2\sqrt{3} - 3, c = 7 - 4\sqrt{3}$$

XV. MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC MINH HỌA KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG AM – GM

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2} \geq \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{45}$ (1)

Chứng minh

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{3a}{3b+3c-a} = \frac{1}{x} \\ \frac{3b}{3c+3a-b} = \frac{1}{y} \\ \frac{3c}{3a+3b-c} = \frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3b+3c-a}{3a} \\ y = \frac{3c+3a-b}{3b} \\ x = \frac{3a+3b-c}{3c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{4}{3} = \frac{a+b+c}{a} \\ y + \frac{4}{3} = \frac{a+b+c}{b} \\ z + \frac{4}{3} = \frac{a+b+c}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x + \frac{4}{3}} + \frac{1}{y + \frac{4}{3}} + \frac{1}{z + \frac{4}{3}} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1; (1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} \geq \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{45}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho 9 số ta có:

$$\begin{cases} x^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 \leq \left[\frac{5\left(x + \frac{4}{3}\right)}{9}\right]^9 = \left(\frac{5}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{x + \frac{4}{3}}{3}\right)^9 \\ y^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 \leq \left[\frac{5\left(y + \frac{4}{3}\right)}{9}\right]^9 = \left(\frac{5}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{y + \frac{4}{3}}{3}\right)^9 \\ z^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 \leq \left[\frac{5\left(z + \frac{4}{3}\right)}{9}\right]^9 = \left(\frac{5}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{z + \frac{4}{3}}{3}\right)^9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 \leq \left(\frac{5}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{x + \frac{4}{3}}{3}\right)^9 \\ y^5 \leq \left(\frac{5}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{y + \frac{4}{3}}{3}\right)^9 \\ z^5 \leq \left(\frac{5}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{z + \frac{4}{3}}{3}\right)^9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{x + \frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{9}{5}} \\ y \leq \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{y + \frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{9}{5}} \\ z \leq \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{z + \frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{9}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \geq \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x + \frac{4}{3}}{3}\right)^{-\frac{9}{5}} \\ \frac{1}{y} \geq \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{y + \frac{4}{3}}{3}\right)^{-\frac{9}{5}} \\ \frac{1}{z} \geq \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{z + \frac{4}{3}}{3}\right)^{-\frac{9}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{9}{25} \left(\frac{x + \frac{4}{3}}{3}\right)^{-6}} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{9}{25} \left(\frac{y + \frac{4}{3}}{3}\right)^{-6}} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{9}{25} \left(\frac{z + \frac{4}{3}}{3}\right)^{-6}} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } m = \left(x + \frac{4}{3}\right)^{-1}; n = \left(y + \frac{4}{3}\right)^{-1}; p = \left(z + \frac{4}{3}\right)^{-1} \Rightarrow m + n + p = 1$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho 6 số ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} 5.(3m)^{\frac{6}{5}} + 1 &= (3m)^{\frac{6}{5}} + (3m)^{\frac{6}{5}} + (3m)^{\frac{6}{5}} + (3m)^{\frac{6}{5}} + (3m)^{\frac{6}{5}} + 1 \geq 18m \\ + \quad 5.(3n)^{\frac{6}{5}} + 1 &= (3n)^{\frac{6}{5}} + (3n)^{\frac{6}{5}} + (3n)^{\frac{6}{5}} + (3n)^{\frac{6}{5}} + (3n)^{\frac{6}{5}} + 1 \geq 18n \\ 5.(3p)^{\frac{6}{5}} + 1 &= (3p)^{\frac{6}{5}} + (3p)^{\frac{6}{5}} + (3p)^{\frac{6}{5}} + (3p)^{\frac{6}{5}} + (3p)^{\frac{6}{5}} + 1 \geq 18p \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{9}{25} \left[(3m)^{\frac{6}{5}} + (3n)^{\frac{6}{5}} + (3p)^{\frac{6}{5}} \right]} \geq \sqrt[3]{\frac{9}{25} \cdot \frac{18(m+n+p) - 3}{5}} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{45}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{c^3}} + \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{a^3}} + \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{b^3}} \geq \sqrt[12]{2} \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{b^2}} \right)$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (Bạn đọc tự chứng minh)

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức AM - GM và bổ đề ta có

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}} + \sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}} + \dots + \sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}} + 1 &\geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{c^2} \left(\frac{a^3+b^3}{2} \right)^{\frac{2}{3}}} \geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} \\ \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}} + \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}} + \dots + \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}} + 1 &\geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} \left(\frac{b^3+c^3}{2} \right)^{\frac{2}{3}}} \geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} \\ \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}} + \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}} + \dots + \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}} + 1 &\geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{b^2} \left(\frac{c^3+a^3}{2} \right)^{\frac{2}{3}}} \geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow 8 \left(\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}} + \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}} + \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}} \right) + 3 \geq 9 \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \right) \\
 & = 8 \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \right) + \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \right) \\
 & \geq 8 \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \right) + 3 \cdot 9 \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2} \cdot \frac{b^2+c^2}{2a^2} \cdot \frac{c^2+a^2}{2b^2}} \\
 & \geq 8 \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \right) + 3 \cdot 9 \sqrt[3]{\frac{2ab}{2c^2} \cdot \frac{2bc}{2a^2} \cdot \frac{2ca}{2b^2}}
 \end{aligned}$$

$$= 8 \left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \right) + 3. \text{ Suy ra}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}} + \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}} + \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \Rightarrow (\text{đpcm.})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 3. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq \frac{9 \cdot \sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{a^2+bc} = \frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc} + b+c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc(b^2+c^2)}{a^2+bc}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} \geq \frac{3(a^2+bc) \cdot \sqrt[3]{abc}}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow VT(1) = \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \cdot \sqrt[3]{abc}}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)} \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, ta có:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) - 3[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)]$$

$$= a(a-b)^2 + c(b-c)^2 + (a-b+c)(a-b)(b-c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $VT(1) \geq \frac{9 \cdot \sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \geq 0$.

Bài 4. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bổ đề: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \forall x, y, z > 0$$

Chứng minh:

$$(x+y+z) \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right) = (a^2+b^2+c^2) + \left(\frac{a^2y}{x} + \frac{b^2z}{y} + \frac{c^2x}{z} \right) + \left(\frac{a^2z}{x} + \frac{b^2x}{y} + \frac{c^2y}{z} \right)$$

$$\geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{\frac{a^2 y}{x} \cdot \frac{b^2 x}{y}} + 2\sqrt{\frac{b^2 z}{y} \cdot \frac{c^2 y}{z}} + 2\sqrt{\frac{c^2 x}{z} \cdot \frac{a^2 z}{x}} = (a + b + c)^2$$

Áp dụng: Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2 + 8b^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{9a(a^2 + 8b^2)}} \geq \frac{6a^2}{9a + a^2 + 8b^2}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b^3}{b^2 + 8c^2}} \geq \frac{6b^2}{9b + b^2 + 8c^2}, \sqrt{\frac{c^3}{c^2 + 8a^2}} \geq \frac{6c^2}{9c + c^2 + 8a^2}$

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{6a^2}{9a + a^2 + 8b^2} + \frac{6b^2}{9b + b^2 + 8c^2} + \frac{6c^2}{9c + c^2 + 8a^2} \geq 1 \quad (2)$$

Sử dụng bổ đề ta có $\sum_{\text{cyc}} \frac{6a^2}{9a + a^2 + 8b^2} = \sum_{\text{cyc}} \frac{6a^4}{9a^3 + a^4 + 8a^2b^2} \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}} a^4 + 9\sum_{\text{cyc}} a^3 + 8\sum_{\text{cyc}} a^2b^2}$

Ta chỉ cần chứng minh $6(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \sum_{\text{cyc}} a^4 + 9\sum_{\text{cyc}} a^3 + 8\sum_{\text{cyc}} a^2b^2$

$$\Leftrightarrow 6\sum_{\text{cyc}} a^4 + 12\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \geq \sum_{\text{cyc}} a^4 + 3\sum_{\text{cyc}} a \cdot \sum_{\text{cyc}} a^3 + 8\sum_{\text{cyc}} a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{\text{cyc}} a^4 + 4\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \geq 3\left(\sum_{\text{cyc}} a^3b + \sum_{\text{cyc}} ab^3\right) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} [a^4 + b^4 + 4a^2b^2 - 3ab(a^2 + b^2)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} [a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 + b^2 - 2ab)] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a^2 - ab + b^2)(a - b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét. Ta có bất đẳng thức mạnh hơn sau đây với mọi $a, b, c \geq 0$:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2 + 8b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2 + 8c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2 + 8a^2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}}$$

với đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ hoặc $a = b \rightarrow 0, c \geq 0$ và các hoán vị. Ngoài ra bất đẳng

thức cũng đúng nếu thay vế phải bởi đại lượng mạnh hơn $\sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \geq 28$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2) \leq \left(\frac{2(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2)}{3}\right)^3 = \frac{(a+b+c)^6}{27}$$

Suy ra $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(ab+bc+ca)^3}{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{27(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}$

Ta phải chứng minh $\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{27^2(ab+bc+ca)^6}{(a+b+c)^{12}} \geq 28$. Theo AM - GM :

$$4. \frac{(a+b+c)^3}{27abc} + \frac{27^2(ab+bc+ca)^6}{(a+b+c)^{12}} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{(ab+bc+ca)^6}{27^2(abc)^4}} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2})^6}{27^2(abc)^4}} = 5$$

Cũng theo *AM - GM* thì $23. \frac{(a+b+c)^3}{27abc} \geq 23.$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0.$

Bài 6. [Japan MO 1997] Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b+c)^2+a^2-2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a)^2+b^2-2b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b)^2+c^2-2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)a}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a)b}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b)c}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5} \quad (2)$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$, khi đó bất đẳng thức (2) trở thành

$$\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{6}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$2a(1-a) \leq \frac{(1+a)^2}{4} \Leftrightarrow 2a^2-2a+1 \geq 1 - \frac{(1+a)^2}{4} = \frac{(1-a)(a+3)}{4}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} \leq \frac{4(1-a)a}{(1-a)(a+3)} = \frac{4a}{a+3}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} \leq \frac{4b}{b+3} \text{ và } \frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{4c}{c+3}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên suy ra ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4a}{a+3} + \frac{4b}{b+3} + \frac{4c}{c+3} \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{10}$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* dạng cộng mẫu số ta có

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{(a+3)+(b+3)+(c+3)} = \frac{9}{(a+b+c)+9} = \frac{9}{10}$$

Bất đẳng thức (2) đúng nên (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0.$

Bài 7. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{a+b^2} + \sqrt{b+c^2} + \sqrt{c+a^2} \geq 2$$

Chứng minh

- **Bổ đề 1:** $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

• **Bổ đề 2:** $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$

Biến đổi rồi sử dụng bất đẳng thức AM - GM và đồng bậc bởi $a + b + c = 1$ ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \sqrt{a+b^2} &= \sum_{cyc} \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b^2}} = \sum_{cyc} \frac{(a+b)(a+b^2)}{(a+b)\sqrt{a+b^2}} \geq \sum_{cyc} \frac{2(a+b)(a+b^2)}{(a+b)^2 + a + b^2} \\ \sum_{cyc} \frac{2(a+b)[a(a+b+c) + b^2]}{(a+b)^2 + a(a+b+c) + b^2} &= \sum_{cyc} \frac{2(a+b)(a^2 + b^2 + ab + ac)}{2a^2 + 2b^2 + 3ab + ac}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh: $\sum_{cyc} \frac{2(a+b)(a^2 + b^2 + ab + ac)}{2a^2 + 2b^2 + 3ab + ac} \geq a + b + c$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^5b^2 + \sum_{cyc} a^4b^2c + 2\sum_{cyc} a^5bc \geq 2\sum_{cyc} a^3b^3c + 2\sum_{cyc} a^3b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{9}{19}a^5b^2 + \frac{6}{19}b^5c^2 + \frac{6}{19}c^5a^2 - a^3b^2c^2 \right) + 2abc \left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 \right) + abc \left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc \right) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM - GM và bổ đề 1, 2 (đpcm).

Bài 8. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2\sqrt{1 + \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \geq 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(a+b)(a+c) + 2\sum_{cyc} (b+c)\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \geq 4\sum_{cyc} bc(b+c) + 12abc$$

Theo AM - GM: $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc = (a + \sqrt{bc})^2$ suy ra

$$\sum_{cyc} (b+c)\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \geq \sum_{cyc} (b+c)\sqrt{bc}(a + \sqrt{bc}) = \sum_{cyc} bc(b+c) + \sqrt{abc} \sum_{cyc} (b+c)\sqrt{a}$$

Sử dụng AM - GM ta có: $\sqrt{abc} \sum_{cyc} (b+c)\sqrt{a} \geq 6abc$. Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} a(a+b)(a+c) + 2\sum_{cyc} bc(b+c) + 12abc \geq 4\sum_{cyc} bc(b+c) + 12abc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} bc(b+c). \text{ Không mất tính tổng quát giả sử } a \geq b \geq c, \text{ khi đó biến}$$

đổi bất đẳng thức $\Leftrightarrow a(a-b)^2 + c(c-b)^2 + (c+a-b)(a-b)(b-c) \geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

XVI. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a^6 - 10a^5 + 19a^4 + 62a^3 - 151a^2 - 96a + 257}{a^3 - 5a^2 - 3a + 16}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{a^4 + a + 1 + 32 \cdot \sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 7a - 12}}{a^4 + a^2 + 16a - 11} \leq 1 \quad \forall a \geq 3$

Bài 3. Cho số thực a thoả mãn: $a^5 - a^3 + a - 2 = 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a^{16} + a^{12} + 7a^8 + 12a^4 + 12}{a^{12} + 7a^8 + 7a^4 + 12} < \sqrt[3]{4}$$

Bài 4. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2} \geq \frac{5}{2}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a = \text{Max}\{a, b, c\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b} + 2\sqrt{1 + \frac{b}{c}} + 3\sqrt[3]{1 + \frac{c}{a}}$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d \leq 2 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right)$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd \geq 16 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(a + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(b + \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{2}{d} + \frac{1}{a}\right)\left(d + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S = \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^2 b} + \frac{1}{a b^2}$

Bài 9. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{bc(b+c)} + \frac{1}{ca(c+a)}$$

Bài 10. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt[3]{(2a+b)(a+c)a} + \sqrt[3]{(2b+c)(b+a)b} + \sqrt[3]{(2c+a)(c+b)c}$$

Bài 11. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$ và $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1}$$

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ và $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$ và $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right)$$

Bài 15. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall a, b, c \geq 0$:

$$\sqrt[3]{a^3+b^3} + \sqrt[3]{b^3+c^3} + \sqrt[3]{c^3+a^3} \geq \frac{1}{\sqrt[6]{2}} (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2})$$

Bài 16. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall a, b, c \geq 0$:

$$\sqrt[3]{a^3+2b^3} + \sqrt[3]{b^3+2c^3} + \sqrt[3]{c^3+2a^3} \geq \frac{1}{\sqrt[6]{3}} (\sqrt{a^2+2b^2} + \sqrt{b^2+2c^2} + \sqrt{c^2+2a^2})$$

Bài 17. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall a, b, c > 0$:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{b^2}} \geq \sqrt[6]{2} \left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \right)$$

Bài 18. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall a, b, c \geq 0$:

$$\sqrt[5]{\frac{a^4+b^4}{c^4}} + \sqrt[5]{\frac{b^4+c^4}{a^4}} + \sqrt[5]{\frac{c^4+a^4}{b^4}} \geq \sqrt[20]{2} \left(\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{c^3}} + \sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{a^3}} + \sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{b^3}} \right)$$

Bài 19. [Tập chí THPT] Chứng minh: $\frac{(a+b+c)^3}{abc} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 28, \forall a, b, c > 0$

Bài 20. [Việt Nam TST 2005] Chứng minh: $\left(\frac{a}{a+b} \right)^3 + \left(\frac{b}{b+c} \right)^3 + \left(\frac{c}{c+a} \right)^3 \geq \frac{3}{8}, \forall a, b, c > 0$

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{(a+b+c)^3}{abc} + 9 \left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right)^2 \geq 36$

Bài 22. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{(a+b+c)^3}{abc} + 27\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 54$

Bài 23. Chứng minh rằng $\forall a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$:

$$\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{3}$$

Bài 24. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{a}{4a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+a+b}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Bài 25. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$3(a^3+b^3+c^3)+2abc \geq 11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$$

Bài 26. [Việt Nam MO] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 27abc + 10\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}$$

Bài 27. Cho $a, b, c, k > 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c \geq \frac{k+a}{k+b} + \frac{k+b}{k+c} + \frac{k+c}{k+a}$$

Bài 28. Cho $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $(3+2a^2)(3+2b^2)(3+2c^2) \geq 125$

Bài 29. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)$$

Bài 30. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

Bài 31. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3} + \frac{10abc}{9(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{4}$$

Bài 32. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \leq \frac{3}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 8$

Bài 34. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+5b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2+5c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2+5a^2}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Bài 35. Cho $a, b, c \geq 0$ và $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^n} + \frac{b}{(c+a)^n} + \frac{c}{(a+b)^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(a+b+c)^{n-1}}$$

Bài 36. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $abc=1$ và $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{a^n + (n+1)bc} + \frac{1}{b^n + (n+1)ca} + \frac{1}{c^n + (n+1)ab} \leq \frac{3}{n+2}$$

Bài 37. Cho $a, b, c, d \in \left[\frac{1}{n}, n\right]$ với $2 \leq n \in \mathbb{N}$ và $a+b+c+d=4$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right).$$

Bài 38. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{15\sqrt[3]{abc}}{4(a+b+c)} \geq 2$$

Bài 39. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3abc + 2\sqrt{(ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

Bài 40. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+6abc \geq \sqrt[3]{abc}(a+b+c)^2$

Bài 41. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Bài 42. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^3+b^3}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^3+c^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^3+a^3}{c+a}}$$

Bài 43. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$27 + \left(2 + \frac{a^2}{bc}\right) \left(2 + \frac{b^2}{ca}\right) \left(2 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 6(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 44. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{abc}{(1+3a)(a+8b)(b+9c)(c+6)} \leq \frac{1}{7^4}$

Bài 45. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}$

Bài 46. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4} + \frac{b^3c}{b^4+b^2c^2+c^4} + \frac{c^3a}{c^4+c^2a^2+a^4} \leq 1$$

Bài 47. [Iran TST 2008] Cho $a, b, c \geq 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^3+a} + \sqrt{b^3+b} + \sqrt{c^3+c} \geq 2\sqrt{a+b+c}$$

Bài 48. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b^2} + \frac{1}{1+b+c^2} + \frac{1}{1+c+a^2} \leq 1$$

Bài 49. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc} + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 8$$

Bài 50. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh $(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq 1$

Bài 51. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq \sqrt[9]{\frac{a^9+b^9}{2c^9}} + \sqrt[9]{\frac{b^9+c^9}{2a^9}} + \sqrt[9]{\frac{c^9+a^9}{2b^9}}$$

Bài 52. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{1-b^2}{c^2+ca+a^2} + \frac{1-c^2}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 53. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$24(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (5a^2+bc)(5b^2+ca)(5c^2+ab)$$

Bài 54. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)} \geq 3\sqrt{2abc}$$

Bài 55. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a)(1+b)}} + \frac{1}{\sqrt{(1+b)(1+c)}} + \frac{1}{\sqrt{(1+c)(1+a)}} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 56. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a-a^2} + \frac{2}{b-b^2} + \frac{2}{c-c^2} \geq 5 \left(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}} \right)$$

Bài 57. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) + 32a^2b^2c^2$$

Bài 58. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \leq 5 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Bài 59. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq \frac{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{ab+bc+ca} + 2(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 60. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq \sqrt{3(a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a)} + 3abc$$

Bài 61. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{1+a} \right)^2 + \left(\frac{b}{1+b} \right)^2 + \left(\frac{c}{1+c} \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right)$$

Bài 62. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^3\sqrt{a} + b^3\sqrt{b} + c^3\sqrt{c}$$

Bài 63. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3 \geq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

Bài 64. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq \frac{9}{4} |(a-b)(b-c)(c-a)|$

Bài 65. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3+c^3} + \frac{b}{c^3+a^3} + \frac{c}{a^3+b^3} \geq \frac{4}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 66. [Peru MO 2007] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$

§2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY - BUNIAKOWSKI - SCHWARZ

§2.1. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY- BUNIAKOWSKI-SCHWARZ (CBS)

I. DẠNG TỔNG QUÁT: Cho $2n$ số thực tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó:

1. **Dạng 1:** $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$

2. **Dạng 2:** $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|$

3. **Dạng 3:** $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

4. **Điều kiện xảy ra dấu bằng:**

• Dấu bằng ở dạng 1 và dạng 2 xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

• Dấu bằng ở dạng 3 xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$

5. **Hệ quả:** • Nếu $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$ là hằng số thì

$\text{Min } (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \frac{c^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$

• Nếu $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = c^2$ là hằng số thì

$\text{Max } \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\} = |c| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \geq 0$

$\text{Min } \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\} = -|c| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \leq 0$

II. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT VÀ CHÚ DẪN LỊCH SỬ:

Dạng	$n = 2: \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$	$n = 3: \forall a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$
Dạng 1	$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$	$(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2) \geq (am + bn + cp)^2$
Dạng 2	$\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd $	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq am + bn + cp $
Dạng 3	$\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq am + bn + cp$
Dấu bằng	①② $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; ③ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \geq 0$	①② $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$; ③ $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \geq 0$

CHÚ DẪN LỊCH SỬ: Bất đẳng thức trên được nhà toán học người Pháp **Cauchy** đề cập vào năm 1821, nhà toán học người Nga **Buniakowski** (**BunhiaCôpski**) đề cập vào năm 1859, còn nhà toán học người Đức **Schwarz** đề cập năm 1884. Do ba nhà toán học đã độc lập nghiên cứu nên bất đẳng thức trên được mang tên cả ba nhà toán học: **Cauchy – Buniakowski – Schwarz**, trong cuốn sách này chúng ta sẽ viết tắt là **CBS**. Đôi khi nó còn được gọi là **Cauchy – Schwarz**, và ở Việt Nam, người ta thường nhắc đến bất đẳng thức này với cái tên **Buniakowski**.

III. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TIÊU BIỂU

Sau đây là năm phương pháp đại diện cho 10 phương pháp chứng minh bất đẳng thức này

1. Phương pháp: Sử dụng đồng nhất thức Lagrange

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{k=1}^n a_k b_k \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{k=1}^n a_k^2 b_k^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2) -$$

$$- \sum_{k=1}^n (a_k b_k)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_i)(a_k b_k) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_k b_k) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_k - a_k b_i)^2 \geq 0$$

2. Phương pháp: Sử dụng bất đẳng thức AM - GM

• Nếu $\text{Min} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2, \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0 \end{cases}$ thì bất đẳng thức đúng

• Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0; \sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$ thì $\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \Leftrightarrow \left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \right| \leq 1$

Ta có: $\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \cdot \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

3. Phương pháp: So sánh giá trị nhỏ nhất tổng thể và bộ phận

Ta có $\left(\frac{a}{\alpha} - \alpha b \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 + (\alpha b)^2 \geq 2ab \Rightarrow ab = \frac{1}{2} \text{Min}_{\alpha > 0} \left\{ \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 + (\alpha b)^2 \right\}$

Do đó với mọi $a, b > 0$ luôn tồn tại $\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$ sao cho $ab = \frac{1}{2} \text{Min}_{\alpha > 0} \left\{ \left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 + (\alpha b)^2 \right\}$

• Nếu $\text{Min} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2, \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ a_1 = a_2 = \dots = a_n \end{cases}$ thì bất đẳng thức đúng.

• Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0; \sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$ thì theo nhận xét trên ta có:

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \times \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} = \frac{1}{2} \text{Min}_{\alpha > 0} \left\{ \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{\alpha^2} + \alpha^2 (b_1^2 + \dots + b_n^2) \right\}$$

Mặt khác $\frac{1}{2} \left[\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{\alpha^2} + \alpha^2 (b_1^2 + \dots + b_n^2) \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^2}{\alpha^2} + \alpha^2 b_k^2 \right) \geq \sum_{k=1}^n a_k b_k$

Để ý nếu $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ thì $\text{Min } f \geq \text{Min } f_1 + \text{Min } f_2 + \dots + \text{Min } f_n$, suy ra

$$\Rightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

4. Phương pháp 4: Phương pháp tam thức bậc hai

• Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ thì bất đẳng thức đúng.

• Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$, xét: $F(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)X^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)X + \sum_{i=1}^n b_i^2$

Ta có $A = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$; $F(x) = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i X + b_i^2) = \sum_{i=1}^n (a_i X + b_i)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

5. Phương pháp 5: Phương pháp quy nạp

Bước 1: Với $n = 2$ thì bất đẳng thức trở thành $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$

$$\Leftrightarrow a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq 2a_1 b_1 a_2 b_2 \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Bước 2: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k)^2$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$

$$\text{Ta có } (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2 + b_{k+1}^2) =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) + b_{k+1}^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) + a_{k+1}^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k)^2 + b_{k+1}^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) + a_{k+1}^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k)^2 + (b_{k+1}^2 a_1^2 + a_{k+1}^2 b_1^2) + \dots + (b_{k+1}^2 a_k^2 + a_{k+1}^2 b_k^2) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k)^2 + 2a_1 b_1 a_{k+1} b_{k+1} + 2a_2 b_2 a_{k+1} b_{k+1} + \dots + 2a_k b_k a_{k+1} b_{k+1} + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1})^2$$

Như vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ nên theo nguyên lý quy nạp ta có (đpcm).

Kết luận: Chúng ta đã chứng minh bằng năm cách khác nhau cho bất đẳng thức CBS ở dạng $1(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$.

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu mẫu số nào bằng 0 thì tử số của phân số ấy cũng bằng 0.

§2.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG DẠNG CỘNG MẪU SỐ ENGEL

CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ

Sau đây là một dạng phát biểu của bất đẳng thức *Cauchy – Buniakowski – Schwarz*

- **Dạng cộng mẫu số:** $\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

Về mặt toán học có thể hiểu là dạng cộng mẫu số bởi vì: Vế trái là tổng của n phân số nhờ chuyển hóa qua dấu bất đẳng thức mà ta nhận được một phân số có mẫu số là tổng của n mẫu số ở vế trái. Về mặt lịch sử bất đẳng thức này còn có tên gọi *Engel*.

- **Chứng minh:** Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Buniakowski – Schwarz* ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{x_i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{x_i}} \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{a_i}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$$

Sau đây chúng ta xét các bài toán từ đơn giản đến phức tạp minh họa cho kỹ thuật này.

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \quad 2. \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *CBS* dạng *Engel* ta có

$$1. \text{Ta có } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$2. \text{Ta có: } \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{a^4}{ab+ac} + \frac{b^4}{bc+ba} + \frac{c^4}{ca+cb} \geq$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$$

$$2. \frac{a^3}{b+c-a} + \frac{b^3}{c+a-b} + \frac{c^3}{a+b-c} \geq a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh

$$1. \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)} = a+b+c$$

$$2. VT = \frac{a^4}{a(b+c-a)} + \frac{b^4}{b(c+a-b)} + \frac{c^4}{c(a+b-c)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)} \geq$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)-(a^2+b^2+c^2)} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2} = a^2+b^2+c^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$ Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad 2. \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

$$3. \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \geq \frac{3}{p+q}, \forall a, b, c, p, q > 0$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có

$$1. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

$$2. \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+ba+ca)}{3(ab+ba+ca)} = 1$$

$$3. \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} = \frac{a^2}{a(pb+qc)} + \frac{b^2}{b(pc+qa)} + \frac{c^2}{c(pa+qb)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(pb+qc)+b(pc+qa)+c(pa+qb)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{(p+q)(ab+bc+ca)} = \frac{3}{p+q}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$1. \frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ca} + \frac{c}{c+2ab} \geq 1 \quad (1) \quad 2. \frac{a}{2a+bc} + \frac{b}{2b+ca} + \frac{c}{2c+ab} \leq 1 \quad (2)$$

Chứng minh

$$1. \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)} = a+b+c$$

$$2. VT = \frac{a^4}{a(b+c-a)} + \frac{b^4}{b(c+a-b)} + \frac{c^4}{c(a+b-c)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)} \geq$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)-(a^2+b^2+c^2)} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2} = a^2+b^2+c^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$ Chứng minh rằng:

$$1. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad 2. \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

$$3. \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \geq \frac{3}{p+q}, \forall a, b, c, p, q > 0$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có

$$1. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

$$2. \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+ba+ca)}{3(ab+ba+ca)} = 1$$

$$3. \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} = \frac{a^2}{a(pb+qc)} + \frac{b^2}{b(pc+qa)} + \frac{c^2}{c(pa+qb)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(pb+qc)+b(pc+qa)+c(pa+qb)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{(p+q)(ab+bc+ca)} = \frac{3}{p+q}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$1. \frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ca} + \frac{c}{c+2ab} \geq 1 \quad (1) \quad 2. \frac{a}{2a+bc} + \frac{b}{2b+ca} + \frac{c}{2c+ab} \leq 1 \quad (2)$$

Chứng minh

1. Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có:

$$VT(1) = \frac{a^2}{a^2 + 2abc} + \frac{b^2}{b^2 + 2abc} + \frac{c^2}{c^2 + 2abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 6abc}$$

Ta cần chứng minh: $(a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 6abc \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 3abc$

Sử dụng $a+b+c=3$ và bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$3(ab+bc+ca) = (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3abc \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a \rightarrow 3, b=c \rightarrow 0$ và các hoán vị.

$$2. (2) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a}{2a+bc} \leq 2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(1 - \frac{bc}{2a+bc}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{bc}{2a+bc} \geq 1 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có:

$$VT(3) = \sum_{cyc} \frac{(bc)^2}{2abc + (bc)^2} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{6abc + (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} = \frac{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2abc(a+b+c)}{6abc + (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} = 1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $abc=0$.

Bài 5. [IMO 1995] Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ Chứng minh: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3abc(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 6. [JaPan MO 2004] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) &\geq \frac{2a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+2c}{c+a} + \frac{a+b+2c}{a+b} = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + 3 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &\geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} \geq \frac{3}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có:

$$VT(1) = \frac{(ac)^2}{abc(b+c)} + \frac{(ab)^2}{abc(c+a)} + \frac{(bc)^2}{abc(a+b)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)} = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:
$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leq 3$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** dạng **Engel** ta có

$$\begin{aligned} & \left[\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \geq \frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \right. \\ & + \left[\frac{b^2}{b^2+a^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \geq \frac{(b+c)^2}{(b^2+a^2)+(c^2+a^2)} = \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} \right. \\ & \left. \left[\frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \geq \frac{(c+a)^2}{(c^2+b^2)+(a^2+b^2)} = \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \right] \right. \end{aligned}$$

$$3 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2} \geq \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức (1) về dạng tương đương sau

$$\frac{1}{1-ab} - 1 + \frac{1}{1-bc} - 1 + \frac{1}{1-ca} - 1 = \frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** dạng **Engel** ta có

$$\begin{aligned} & \left[\frac{ab}{1-ab} = \frac{2ab}{(1+c^2)+(a-b)^2} \leq \frac{2ab}{1+c^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)^2}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} \right) \right. \\ & + \left[\frac{bc}{1-bc} = \frac{2bc}{(1+a^2)+(b-c)^2} \leq \frac{2bc}{1+a^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) \right. \\ & \left. \left[\frac{ca}{1-ca} = \frac{2ca}{(1+b^2)+(c-a)^2} \leq \frac{2ca}{1+b^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(c+a)^2}{(b^2+c^2)+(b^2+a^2)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{b^2+a^2} \right) \right] \right. \\ & \Rightarrow \frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 9. Cho $a, b, c, x, y, z, t > 0$ và $x \geq y \geq z \geq t$. Chứng minh:

$$T = \frac{x}{ay+bz+ct} + \frac{y}{az+bt+cx} + \frac{z}{at+bx+cy} + \frac{t}{ax+by+cz} \geq \frac{4}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh

Ta có: $T = \sum_{cyc} \frac{x^2}{axy+bxz+ctx} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)}$

• Nếu $xy+yz+zt+tx \geq 2xz+2yt$ thì

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+b+c)(xy+yz+zt+tx)} \quad (2)$$

Ta có $(x+y+z+t)^2 \geq 4(xy+yz+zt+tx) \Leftrightarrow (x-y+z-t)^2 \geq 0$ đúng, nên

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \geq \frac{4(xy+yz+zt+tx)}{(a+b+c)(xy+yz+zt+tx)} = \frac{4}{a+b+c}$$

• Nếu $xy+yz+zt+tx \leq 2xz+2yt$ thì

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+b+c)(2xz+2yt)} \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(x+y+z+t)^2 \geq 4(2xz+2yt) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2yz+2zt+2tx-6xz-6yt \geq 0$$

Đặt $u = \frac{x}{t}; v = \frac{y}{t}; w = \frac{z}{t}$ thì $u \geq v \geq w \geq 1$, khi đó (3) $\Leftrightarrow$

$$u^2+v^2+w^2+1+2uv+2vw+2w+2u-6uw-6v \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(v) = v^2 + v(2u+2w-6) + u^2 + w^2 + 1 + 2w + 2u - 6uw$$

$f'(v) = 2v + 2u + 2w - 6 \geq 0$ với $u \geq v \geq w \geq 1 \Rightarrow f(v)$ tăng trên $[1, +\infty)$.

$$\text{Suy ra, } f(v) \geq f(w) = 4w^2 + u^2 - 4uw - 4w + 2u + 1 = (2w - u - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \geq \frac{4(2xz+2yt)}{(a+b+c)(2xz+2yt)} = \frac{4}{a+b+c}$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (abc)^2$. Chứng minh:

$$\frac{(ab)^2}{(a^2+b^2)c^3} + \frac{(bc)^2}{(b^2+c^2)a^3} + \frac{(ca)^2}{(c^2+a^2)b^3} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{a^2}; y = \frac{1}{b^2}; z = \frac{1}{c^2}$, khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \geq 1 \end{cases}$, chứng minh $\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy } \frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} &= \frac{x^2}{(y+z)\sqrt{x}} + \frac{y^2}{(z+x)\sqrt{y}} + \frac{z^2}{(x+y)\sqrt{z}} \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{y+z}\sqrt{x(y+z)}} + \frac{y^2}{\sqrt{z+x}\sqrt{y(z+x)}} + \frac{z^2}{\sqrt{x+y}\sqrt{z(x+y)}} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{y+z}\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{z+x}\sqrt{y(z+x)} + \sqrt{x+y}\sqrt{z(x+y)}} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{[(y+z)+(z+x)+(x+y)][x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)]}} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{4(x+y+z)(xy+yz+zx)}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2\sqrt{\frac{1}{3}(x+y+z)^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x+y+z} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Bài 11. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$, thì

$$S = \frac{a}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2}} \geq 2$$

Chứng minh

$$S \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2} + b\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2} + c\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2}}. \text{ Ta sẽ chứng minh}$$

$$T = a\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2} + b\sqrt{c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2} + c\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2} \leq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

Theo bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có:

$$T = \sqrt{a}\sqrt{a\left(b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2\right)} + \sqrt{b}\sqrt{b\left(c^2 + \frac{1}{4}ca + a^2\right)} + \sqrt{c}\sqrt{c\left(a^2 + \frac{1}{4}ab + b^2\right)}$$

$$\leq \sqrt{(a+b+c)\left[\frac{3}{4}abc + a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right]} \leq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

Trong đánh giá trên ta đã sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{3}{4}abc + a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \text{ (đúng theo Schur)}$$

Bài 12. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c}$$

Giải

$$\begin{aligned}
 P &= 4\left(\frac{a}{b+c-a} + \frac{1}{2}\right) + 9\left(\frac{b}{c+a-b} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{a+b-c} - \frac{1}{2}\right) - \frac{29}{2} \\
 &= \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c}\right) - \frac{29}{2} \\
 &\geq \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{(2+3+4)^2}{(a+b-c)(c+a-b)(a+b-c)} - \frac{29}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{81}{a+b+c} - \frac{29}{2} = 26
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{2}{b+c-a} = \frac{3}{c+a-b} = \frac{4}{a+b-c} \Leftrightarrow \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$. Vậy Min $P = 26$.

Bài 13. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có:

$$VT(1) = \sum_{cyc} \frac{[a^2(b+c)]^2}{(b^2+c^2)[a^2(b+c)]} \geq \frac{\left[\sum_{cyc} a^2(b+c)\right]^2}{\sum_{cyc} a^2(b+c)(b^2+c^2)}$$

$$\text{Ta cần chứng minh: } \left[\sum_{cyc} a^2(b+c)\right]^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right) \left[\sum_{cyc} a^2(b+c)(b^2+c^2)\right] \quad (2)$$

Đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca$ thì $p^2 \geq 3q$ và $p^3 + 9abc \geq 4pq$ (theo Schur)

$$\text{Ta có: } \left[\sum_{cyc} a^2(b+c)\right]^2 = (pq - 3abc)^2 = p^2q^2 - 6pqabc + 9a^2b^2c^2$$

$$\sum_{cyc} a^2(b+c)(b^2+c^2) = p(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + qabc = p(q^2 - 2pabc) + qabc$$

Khi đó bất đẳng thức (2) trở thành:

$$abc(2p^3 + 9abc - 7pq) \geq 0 \Leftrightarrow abc(p^3 + 9abc - 4pq) + pabc(p^2 - 3q) \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b; c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2-bc}{a+b} + \frac{b^2-ca}{b+c} + \frac{c^2-ab}{c+a} \geq 0$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức } \Leftrightarrow \frac{a(a+c)}{a+b} + \frac{b(b+a)}{b+c} + \frac{c(c+b)}{c+a} \geq a+b+c \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel ta có:

$$\begin{aligned} VT(1) &\geq \frac{[a(a+c)+b(b+a)+c(c+b)]^2}{a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2}{a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+bc+ca)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2 &\geq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^2(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 + 2\left(\sum_{cyc} a^2\right) \cdot \left(\sum_{cyc} ab\right) + \left(\sum_{cyc} ab\right)^2 &\geq \left(\sum_{cyc} a\right) \left(\sum_{cyc} a^3\right) + \left(\sum_{cyc} a^2\right) \cdot \left(\sum_{cyc} ab\right) + 2\left(\sum_{cyc} ab\right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 + \left(\sum_{cyc} a^2\right) \left(\sum_{cyc} ab\right) &\geq \left(\sum_{cyc} a\right) \left(\sum_{cyc} a^3\right) + \left(\sum_{cyc} ab\right)^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 b^2 \geq abc \left(\sum_{cyc} a\right) &\Leftrightarrow a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 15. [VMEQ] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc}}$$

Chứng minh

Chuẩn hóa $abc=1$ và đặt $a=\frac{x}{y}; b=\frac{y}{x}; c=\frac{z}{x}$, khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x(x^2+yz)}} + \frac{z\sqrt{z}}{\sqrt{y(y^2+zx)}} + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x(z^2+xy)}} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS dạng Engel và CBS dạng cơ bản ta có:

$$\begin{aligned} VT(1) &= \sum_{cyc} \frac{y^2}{\sqrt{xy(x^2+yz)}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{xy(x^2+yz)} + \sqrt{yz(y^2+zx)} + \sqrt{zx(z^2+xy)}} \geq \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}} = \frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{2\sqrt{2}(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)} \\ &\geq \frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3(xy+yz+zx)} \geq \frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{\frac{4}{3}(x+y+z)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = VP(1) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 16. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chúng minh rằng:
$$\frac{1}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{c+a}{2}\right)^2} \leq \frac{9}{2} \quad (1)$$

Chúng minh

$$VT(1) = \sum_{cyc} \frac{1}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sum_{cyc} \left[1 + \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \right] = 3 + \sum_{cyc} \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** dạng cơ bản và dạng **Engel** ta có:

$$\begin{aligned} VT(2) &= \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{4 - (a+b)^2} \leq \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{4 - 2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{2 - (a^2 + b^2)} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{2c^2 + (a^2 + b^2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{(a^2 + c^2) + (b^2 + c^2)} \leq \frac{1}{2} \sum_{cyc} \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right) = \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 17. Cho $a, b, c > 0$. Chúng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (1)$$

Chúng minh

$$(1) \Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq a+b+c + \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (2). \text{ Sử dụng CBS dạng Engel:}$$

$$VT(2) = \frac{(ab)^2}{ab(a+b)} + \frac{(bc)^2}{bc(b+c)} + \frac{(ca)^2}{ca(c+a)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(b+c) + ac(c+a) + ab(a+b)}$$

Ta cần chứng minh:
$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(b+c) + ac(c+a) + ab(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sum_{cyc} a^2 \right) \left(\sum_{cyc} bc \right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a \right) \left(\sum_{cyc} bc(b+c) \right) \Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Theo **AM - GM** ta có
$$\sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq \sum_{cyc} ab(2ab) = 2 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 18. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chúng minh rằng:
$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Biến đổi rồi sử dụng bất đẳng thức **CBS** dạng **Engel** ta có

$$\begin{aligned} 4VT(1) &= \sum_{cyc} \frac{4a}{3a-b+c} = \sum_{cyc} \frac{(3a-b+c) + (a+b+c)}{3a-b+c} = 3 + \sum_{cyc} \frac{a+b-c}{3a-b+c} \\ &= 3 + \sum_{cyc} \frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(3a-b+c)} \geq 3 + \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} (a+b-c)(3a-b+c)} = 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 19. Cho $a, b, c \geq 0$. Chúng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \geq 1 + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} \geq 1 + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab+bc+ca-bc}{a^2+2bc} \geq 1 + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab+bc+ca}{a^2+2bc} \geq 1 + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+2bc} = 2 + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \left(\sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+2bc} - 1 \right) \\ &\Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+2bc} - \frac{2}{ab+bc+ca} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \right) + \left(1 - \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+2bc} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho sẽ đúng nếu ta chứng minh được:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+2bc} \geq \frac{2}{ab+bc+ca} + \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \quad (1) \text{ và } \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+2bc} \leq 1 \quad (2). \text{ Thật vậy}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2[2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca]}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)} \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+2bc} = \frac{3}{2} - \sum_{cyc} \left(\frac{1}{2} - \frac{bc}{a^2+2bc} \right) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** dạng **Engel** ta có:

$$VT(3) \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

§2.3. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG CAUCHY- BUNHIACÓPSKI-SCHARWZ

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CBS

Bài 1. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ Tìm Min của: $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$

Bình luận và lời giải

- Sai lầm thường gặp:

$$\begin{aligned} S &\geq 3 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = 3 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{c^2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{c^2 \cdot \frac{1}{a^2}}} = 3 \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min } S = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Nguyên nhân sai lầm:

$$\text{Min } S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a + b + c = 3 > \frac{3}{2} \Rightarrow \text{vô lý}$$

- Phân tích và tìm lời giải:

Xét $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \geq 0$

- Ý nghĩa: Chuyển đổi một biểu thức ở trong căn bậc hai thành một biểu thức linh động hơn ở ngoài căn thức. Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{b}\right) \quad (1)$$

$$+ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{c}\right) \quad (2)$$

$$\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right](\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{a}\right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a + b + c) + \beta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] = S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = \frac{1}{2}$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau đây:

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot S \geq \alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)$$

$$\Leftrightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right] = S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = 2$, khi đó (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có

• Sơ đồ điểm rơi:

$$\boxed{a=b=c=2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

• Lời giải đúng:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right] (4^2 + 1^2)} \geq 4a + \frac{1}{\sqrt{b+c}} \\ & + \sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c+a}} \right)^2 \right] (4^2 + 1^2)} \geq 4b + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \\ & + \sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right] (4^2 + 1^2)} \geq 4c + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \\ & \Rightarrow \sqrt{17} \cdot S \geq 4(a+b+c) + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \\ & \geq 4(a+b+c) + \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{c+a}}} \geq 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}} \\ & \geq 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(a+b)+(b+c)+(c+a)]}} = 4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{6(a+b+c)}} \\ & = \frac{31}{8}(a+b+c) + \frac{a+b+c}{8} + \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} + \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} \\ & \geq \frac{31}{8} \cdot 6 + 3 \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{8} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}} = \frac{93}{4} + \frac{9}{4} = \frac{51}{2} \\ & \Rightarrow S \geq \frac{51}{2\sqrt{17}} = \frac{3 \cdot 17}{2\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{2} \quad \text{Với } a = b = c = 2 \text{ thì Min } S = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt{2} \end{cases}$. CM: $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{17}{4}}$

Bình luận và lời giải

Sau đây là cách giải thủ công dài dòng với hình thức khủng bố nhưng vẫn dựa trên sự kết hợp ngoạn mục "**Kỹ thuật chọn điểm rơi**" của hai bất đẳng thức **CBS** và bất đẳng thức **AM – GM**. Cách giải ngắn hơn xin dành cho bạn đọc.

Ta sẽ chứng minh: $T = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \cdot S = \sum \sqrt[3]{\frac{17}{4} \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$

Xét đánh giá đại diện:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{17}{4} \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} &= \sqrt[3]{\left(\frac{2^2 + \frac{1}{2^2}}{2^2} \right) \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} \geq \sqrt[3]{\left(2a + \frac{1}{2b} \right)} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2^2 + \frac{1}{2^2}}{2^2} \right) \left(2a + \frac{1}{2b} \right) \right] \left(\frac{4}{17} \right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left[\left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^2 \right] \left(\frac{4}{17} \right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^4} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left[2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right]^4} + \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left[2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right]^4} + \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left[2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right]^4} + \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2} \geq \\ &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^4} \cdot \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^{12}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{17} \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{17}{4} \left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^4} \geq \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \cdot \sum \sqrt[3]{\left(a^2 + \frac{1}{b^2} \right)} = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} S \geq \sum \sqrt[3]{\left(\frac{4}{17} \right)^2 \left(2\sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2b}} \right)^4} \geq$$

$$\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17} \left[2\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right]} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17}} \left[2\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}}} \right] - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \\
&\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17}} \left[2\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{9}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \right] - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{17}} \left[\frac{15\sqrt{2}}{8}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{9}{2\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \right] - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \\
&\geq \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{17}} \left[\frac{15\sqrt{2}}{8} \cdot 3\sqrt{2} + 2 \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \cdot \frac{9}{2\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \right] - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \left(\frac{45}{4} + \frac{6}{4} \right) - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} = 17 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}} - \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \\
&\text{Do } T = \sqrt[3]{\frac{17}{4}} \cdot S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2} \text{ nên } S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{17}{4}}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 2.
\end{aligned}$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + \sqrt{2abc} \geq 10$. Chứng minh rằng

$$S = \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2 a^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2 c^2}{4}} \geq 6\sqrt{6}$$

Chứng minh

Bước 1. Dự đoán điểm rơi: $a = b = c = 2$

Bước 2. Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{aligned} &\sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2 a^2}{4}} \geq \frac{4}{a} + 9b + ca \\ &+ \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4}} \geq \frac{4}{b} + 9c + ab \\ &\sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2 c^2}{4}} \geq \frac{4}{c} + 9a + bc \end{aligned} \right. \\
&\Rightarrow \sqrt{24} \cdot S \geq 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 9(a+b+c) + ab + bc + ca \\
&= \left(\frac{4}{a} + a \right) + \left(\frac{4}{b} + b \right) + \left(\frac{4}{c} + c \right) + (2a+bc) + (2b+ca) + (2c+ab) + 6(a+b+c) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}} \cdot a + 2\sqrt{\frac{4}{b}} \cdot b + 2\sqrt{\frac{4}{c}} \cdot c + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 6(a+b+c) \\
&= 12 + 6(a+b+c + \sqrt{2abc}) \geq 12 + 6 \cdot 10 = 72 \Rightarrow S \geq \frac{72}{\sqrt{24}} = 6\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a\left(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)+b\left(1+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)+c\left(1+\sqrt{\frac{c}{2}}\right) \geq 12$. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{\frac{16}{a^2} + \frac{5b^2}{4} + \frac{c}{2} + \frac{19a^3}{8}} + \sqrt{\frac{16}{b^2} + \frac{5c^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{19b^3}{8}} + \sqrt{\frac{16}{c^2} + \frac{5a^2}{4} + \frac{b}{2} + \frac{19c^3}{8}} \geq 3\sqrt{29}$$

Chứng minh

Dự đoán dấu bằng xảy ra tại điểm rơi: $a = b = c = 2$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2+5+1+19} \cdot \sqrt{\frac{16}{a^2} + \frac{5b^2}{4} + \frac{c}{2} + \frac{19a^3}{8}} \geq \frac{8}{a} + \frac{5b}{2} + \sqrt{\frac{c}{2}} + \frac{19a}{2} \sqrt{\frac{a}{2}} \\ & + \sqrt{2+5+1+19} \cdot \sqrt{\frac{16}{b^2} + \frac{5c^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{19b^3}{8}} \geq \frac{8}{b} + \frac{5c}{2} + \sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{19b}{2} \sqrt{\frac{b}{2}} \\ & + \sqrt{2+5+1+19} \cdot \sqrt{\frac{16}{c^2} + \frac{5a^2}{4} + \frac{b}{2} + \frac{19c^3}{8}} \geq \frac{8}{c} + \frac{5a}{2} + \sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{19c}{2} \sqrt{\frac{c}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{29} \cdot S & \geq \left(\frac{8}{a} + 2a\right) + \left(\frac{8}{b} + 2b\right) + \left(\frac{8}{c} + 2c\right) + \frac{1}{2}(a+b+c) \\ & + \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{c}{2}} + \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}\right) + 9\left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}}\right) \\ & \geq 2\sqrt{\frac{8}{a} \cdot 2a} + 2\sqrt{\frac{8}{b} \cdot 2b} + 2\sqrt{\frac{8}{c} \cdot 2c} + \frac{1}{2}(a+b+c) + 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}} + \\ & + 2\sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}} + 2\sqrt{\frac{c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}} + 9\left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}}\right) \\ & = 15 + \frac{3}{2}(a+b+c) + 6\left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}}\right) + 3\left[\left(2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} + 1\right) + \left(2 \cdot \frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2}} + 1\right) + \left(2 \cdot \frac{c}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} + 1\right)\right] \\ & \geq 15 + \frac{3}{2}(a+b+c) + 6\left(a\sqrt{\frac{a}{2}} + b\sqrt{\frac{b}{2}} + c\sqrt{\frac{c}{2}}\right) + 3\left(\frac{3a}{2} + \frac{3b}{2} + \frac{3c}{2}\right) \\ & = 15 + 6\left[a\left(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\right) + b\left(1+\sqrt{\frac{b}{2}}\right) + c\left(1+\sqrt{\frac{c}{2}}\right)\right] = 15 + 6 \cdot 12 = 3 \cdot 29 \end{aligned}$$

Vậy $S \geq 3\sqrt{29}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c} + \frac{b}{b^3+c^2+a} + \frac{c}{c^3+a^2+b} \leq 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$(a^3 + b^2 + c) \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow \frac{a^3 + b^2 + c}{a} (1 + a + ca) \geq (a + b + c)^2$$

Hay $\frac{a}{a^3 + b^2 + c} \leq \frac{1 + a + ca}{(a + b + c)^2}$.

Tương tự $\frac{b}{b^3 + c^2 + a} \leq \frac{1 + b + ab}{(a + b + c)^2}$ và $\frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq \frac{1 + c + bc}{(a + b + c)^2}$

Suy ra VT (1) $\leq \frac{3 + a + b + c + ab + bc + ca}{(a + b + c)^2} \leq \frac{3 + a + b + c + \frac{1}{3}(a + b + c)^2}{(a + b + c)^2} = 1$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 7. [Poland Second Round 2007] Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq 2(a + b + c + d) - 4$

Chứng minh

Bổ đề: Với mọi $x, y > 0$ ta có bất đẳng thức sau $\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3}{2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

Chứng minh: Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{x^3 + y^3}{2} \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)^3 \Leftrightarrow (x - y)^4 (x^2 + xy + y^2) \geq 0$

Áp dụng: Sử dụng bổ đề trên ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq \frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + d^2}{c + d} + \frac{d^2 + a^2}{d + a}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + d^2}{c + d} + \frac{d^2 + a^2}{d + a} \leq 2(a + b + c + d) - 4$

Thật vậy, sử dụng $x + y - \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{2xy}{x + y} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ và bất đẳng thức CBS ta có:

$$\begin{aligned} & 2(a + b + c + d) - \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + d^2}{c + d} + \frac{d^2 + a^2}{d + a} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} + \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{1}{a}} \right) \geq 2 \frac{4^2}{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)} = \frac{32}{8} = 4 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $S = \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b+c}{2} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{c+a}{2} \right)^2} \geq \sqrt{6}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow S^2 \geq 6 \Leftrightarrow 3 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{7}{2}$$

Ta có: $1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{1}{2}(1+c^2)$

Biến đổi rồi sử dụng bất đẳng thức CBS ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + \frac{1}{2}(1+c^2)} \sqrt{\frac{(c-b)^2}{4} + \frac{1}{2}(1+a^2)} \\ &\geq \frac{(a-b)(c-b)}{4} + \frac{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}{2} \geq \frac{1}{4}(b^2+ca-ab-bc) + \frac{1}{2}(1+ca) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $2 \sum_{cyc} \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 3 = \frac{7}{2}$.

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{3-ab}} + \frac{1}{\sqrt{3-bc}} + \frac{1}{\sqrt{3-ca}} \geq \frac{6}{\sqrt{(3-ab)(3-bc)(3-ca)}} \quad (1)$

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức

$$\sqrt{(3-ab)(3-bc)} + \sqrt{(3-bc)(3-ca)} + \sqrt{(3-ca)(3-ab)} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$(3-ab)(3-bc) + (3-bc)(3-ca) + (3-ca)(3-ab) + 2 \sum_{cyc} (3-ca) \sqrt{(3-ab)(3-bc)} \geq 36$$

$$\Leftrightarrow 27 - 6(ab+bc+ca) + abc(a+b+c) + 2 \sum_{cyc} (3-ca) \sqrt{(3-ab)(3-bc)} \geq 36, \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM và CBS ta có

$$\sqrt{(3-ab)(3-bc)} \geq \sqrt{\left(3 - \frac{a^2+b^2}{2}\right)\left(3 - \frac{b^2+c^2}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{(3+c^2)(3+a^2)} \geq \frac{1}{2}(3+ca)$$

Ta cần chứng minh $27 - 6(ab+bc+ca) + abc(a+b+c) + \sum_{cyc} (3-ca)(3+ca) \geq 36$

$$\Leftrightarrow 18 - 6(ab+bc+ca) + abc(a+b+c) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2(a^2+b^2+c^2)^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) + abc(a+b+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^4 + 3 \sum_{cyc} b^2c^2 - 2 \sum_{cyc} bc(b^2+c^2) - abc(a+b+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a^2 + 2b^2 + 2c^2)(b-c)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng } \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

II. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CBS

Bài 1. Cho $p, q, x, y \geq 0$ và $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = px^2 + qy^2$.

Giải

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** với các tham số $a, b > 0$ ta có:

$$(px^2 + qy^2)(pa^2 + qb^2) \geq (pax + qby)^2 \quad (1). \text{ Chọn } \begin{cases} pa = qb \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{2q}{p+q}, b = \frac{2p}{p+q}$$

$$\text{Khi đó } S(pa^2 + qb^2) = S \cdot \frac{4pq}{p+q} \geq \frac{16p^2q^2}{(p+q)^2} \Rightarrow S \geq \frac{4pq}{p+q}. \text{ Vậy } \min S = \frac{4pq}{p+q}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{q} = \frac{y}{p} = \frac{x+y}{p+q} = \frac{2}{p+q} \Leftrightarrow x = \frac{2q}{p+q}, y = \frac{2p}{p+q}.$$

Bài 2. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** với các tham số $a, b, c > 0$ ta có:

$$(x^2 + 2y^2 + 3z^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) \geq (ax + 2by + 3cz)^2 \quad (1)$$

$$\text{Chọn } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a = 2b = 3c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{18}{11}, b = \frac{9}{11}, c = \frac{6}{11}. \text{ Khi đó:}$$

$$\text{Từ (1) suy ra } \left[\left(\frac{18}{11} \right)^2 + 2 \left(\frac{9}{11} \right)^2 + 3 \left(\frac{6}{11} \right)^2 \right] S \geq \frac{18}{11} (x + y + z)^2 = \frac{18}{11} \cdot 9 \Rightarrow S \geq 3$$

$$\text{Với } x = a = \frac{18}{11}, y = b = \frac{9}{11}, z = c = \frac{6}{11} \text{ thì } S = 3. \text{ Vậy } \min S = 3$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của: $S = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{y-2} + \sqrt[4]{z-3}$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$S = 1 \cdot \sqrt[4]{x-1} + 1 \cdot \sqrt[4]{y-2} + 1 \cdot \sqrt[4]{z-3} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{y-2} + \sqrt[4]{z-3})}$$

$$\leq \sqrt{3\sqrt{3}[(x-1) + (y-2) + (z-3)]} = \sqrt{3\sqrt{3} \times 12} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Với } x = 5, y = 6, z = 7 \text{ thì } \max S = 3\sqrt{2}$$

Bài 4. Cho x, y, z thỏa mãn $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của: } S = |x + 2y + 3z - 12|$$

Giải

$$S = |1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) + 2| \leq |1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3)| + 2$$

$$\leq \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2]} + 2 = 2\sqrt{14} + 2$$

$$\Rightarrow \text{Max } S = 2(1 + \sqrt{14}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = t > 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{\sqrt{14}} \\ y = 2 + \frac{4}{\sqrt{14}} \\ z = 3 + \frac{6}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

Bài 5. Cho a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$S = (a-1)^4 + \left(\frac{b}{a}-1\right)^4 + \left(\frac{c}{b}-1\right)^4 + \left(\frac{d}{c}-1\right)^4 + \left(\frac{32}{d}-1\right)^4$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$S = \frac{1}{5}(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \left[(a-1)^4 + \left(\frac{b}{a}-1\right)^4 + \left(\frac{c}{b}-1\right)^4 + \left(\frac{d}{c}-1\right)^4 + \left(\frac{32}{d}-1\right)^4 \right]$$

$$\geq \frac{1}{5} \left[(a-1)^2 + \left(\frac{b}{a}-1\right)^2 + \left(\frac{c}{b}-1\right)^2 + \left(\frac{d}{c}-1\right)^2 + \left(\frac{32}{d}-1\right)^2 \right]^2$$

$$= \frac{1}{5^3} \left\{ (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \left[(a-1)^2 + \left(\frac{b}{a}-1\right)^2 + \left(\frac{c}{b}-1\right)^2 + \left(\frac{d}{c}-1\right)^2 + \left(\frac{32}{d}-1\right)^2 \right] \right\}^2$$

$$\geq \frac{1}{5^3} \left[(a-1) + \left(\frac{b}{a}-1\right) + \left(\frac{c}{b}-1\right) + \left(\frac{d}{c}-1\right) + \left(\frac{9}{d}-1\right) \right]^4 = \frac{1}{5^3} \left(a + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{9}{d} - 5 \right)^4$$

$$\geq \frac{1}{5^3} \left(5 \cdot \sqrt[5]{a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{32}{d}} - 5 \right)^4 = \frac{5^4}{5^3} = 5. \text{ Với } a = 2, b = 4, c = 8, d = 16 \text{ thì Min } S = 5$$

Bài 6. Cho $xy + zt = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F(x, y, z, t) = 9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2) + 6xz(y^2 + t^2) - 6yt(x^2 + z^2) - 4xyzt$$

Giải

Cách 1: Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$F = 4 \left[(x+z)^2 + \frac{(x-z)^2}{2} \right] \left[\frac{(y+t)^2}{2} + (y-t)^2 \right] \geq 4 \left[(x+z) \frac{y+t}{\sqrt{2}} + \frac{x-z}{\sqrt{2}} (y-t) \right]^2$$

$$= 2(xy + xt + yz + zt + xy - xt - zy + zt)^2 = 2(2xy + 2zt)^2 = 8(xy + zt)^2 = 8.$$

Với $x = y = 1, z = 0$ và $t = \frac{1}{3}$ thì $\text{Min } F(x, y, z, t) = 8$

Cách 2: $F(x, y, z, t) = (3yz + xy - zt - 3xt)^2 + 8(xy + zt)^2 \geq 8$

Với $x = y = 1, z = 0$ và $t = \frac{1}{3}$ thì $\text{Min } F(x, y, z, t) = 8$

Bài 7. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Giải

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \sqrt{2^2 + 1} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \sqrt{x^2 + (3-y)^2} \sqrt{2^2 + 11^2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{5}} (2x + y + 1) + \frac{1}{5\sqrt{5}} (2x + 33 - 11y) = \frac{6(2x - y) + 38}{5\sqrt{5}} = \frac{50}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Do đó $\text{Min } f(x, y) = 2\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = -\frac{2}{3}$.

Bài 8. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z)$ nhận giá trị lớn nhất:

$$f(x, y, z) = (x - y + mz + 1)^2 + [x + (m+1)y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y + (m-4)z + 1]^2$$

Giải

Trường hợp 1: $\text{Min } f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x - y + mz + 1 = x + (m+1)y - 2z + 2 = 2x + 2y + (m-4)z + 1 = 0$

có nghiệm $\Leftrightarrow m(m+2) \neq 0$. Vậy nếu $m \notin \{-2, 0\}$ thì $\text{Min } f(x, y, z) = 0$

Trường hợp 2: Xét $m = -2$. Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} [1^2 + (-1)^2 + 0^2] [(x - y - 2z + 1)^2 + (x - y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 6z + 1)^2] \geq \frac{1}{2}$$

Vậy nếu $m = -2$ thì $\text{Min } f(x, y, z) = f(-1, 1/2, 0) = 1/2$

Trường hợp 3: Xét $m = 0$. Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$f(x, y, z) = \frac{4}{5} \left[0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right] [(x - y + 1)^2 + (x + y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 4z + 1)^2] \geq \frac{4}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

Vậy nếu $m = 0$ thì $\text{Min } f(x, y, z) = f\left(\frac{1}{10}, \frac{11}{10}, 1\right) = \frac{9}{5}$

Kết luận: Với $m = 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z)$ nhận giá trị lớn nhất.

Bài 9. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $\frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$.

Tìm Max, Min của $A = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3 + x_4)^2 + (x_3 - 2x_4)^2 + (x_4 - 2x_1)^2$

Giải

Tìm Max A: $(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 \leq (1 + 2\alpha + \alpha) \left(x_1^2 + \frac{2x_2^2}{\alpha} + \frac{x_3^2}{\alpha} \right)$

$$(x_2 - 2x_3 + x_4)^2 \leq (\alpha + 2\alpha + 1) \left(\frac{x_2^2}{\alpha} + \frac{2x_3^2}{\alpha} + x_4^2 \right)$$

$$(x_3 - 2x_4)^2 \leq (\alpha + 2) \left(\frac{x_3^2}{\alpha} + 2x_4^2 \right); (x_4 - 2x_1)^2 \leq (\alpha + 2) \left(\frac{x_4^2}{\alpha} + 2x_1^2 \right)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = -x_4 = -\frac{x_2}{\alpha} = \frac{x_3}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{4(\alpha^2 + 1)} \leq x_1^2 \leq \frac{1}{2(\alpha^2 + 1)}$

$\Rightarrow A \leq 5(\alpha + 1)(x_1^2 + x_4^2) + 5 \cdot \frac{2\alpha + 1}{\alpha} (x_2^2 + x_3^2)$. Chọn $\alpha = \alpha_0$ với $\alpha_0 + 1 = \frac{2\alpha_0 + 1}{\alpha_0}$

$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow A \leq \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} (x_1^2 + x_4^2) + \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2} (x_2^2 + x_3^2) \leq \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}$

Với $x_1 = -x_4 = -\frac{2x_2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2x_3}{1 + \sqrt{5}}$ thì $\text{Max } A = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}$.

Tìm Min A:

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 + x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 - 2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}(3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4) \\ x_2 = -\frac{1}{5}(6y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4) \\ x_3 = -\frac{1}{5}(4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 3y_4) \\ x_4 = -\frac{1}{5}(2y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4) \end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2 \leq \frac{1}{25} (3 + 2 + 4\alpha + \alpha) \left(3y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{4y_3^2}{\alpha} + \frac{y_4^2}{\alpha} \right)$

$x_2^2 \leq \frac{1}{25} (6 + 4 + 3\alpha + 2\alpha) \left(6y_1^2 + 4y_2^2 + \frac{3y_3^2}{\alpha} + \frac{2y_4^2}{\alpha} \right)$

$x_3^2 \leq \frac{1}{25} (4 + 6 + 3\alpha + 2\alpha) \left(4y_1^2 + 6y_2^2 + \frac{2y_3^2}{\alpha} + \frac{3y_4^2}{\alpha} \right)$

$x_4^2 \leq \frac{1}{25} (2 + 3 + \alpha + 4\alpha) \left(2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{y_3^2}{\alpha} + \frac{4y_4^2}{\alpha} \right)$. Dấu bằng $\Leftrightarrow y_1 = y_2 = \frac{y_3}{\alpha} = \frac{y_4}{\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq (3\alpha + 5)(y_1^2 + y_2^2) + \frac{2\alpha + 3}{\alpha} (y_3^2 + y_4^2)$. Chọn $\alpha = \alpha_0$ với $3\alpha_0 + 3 = \frac{2\alpha_0 + 3}{\alpha_0}$

$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} A$

Vậy với $y_1 = y_2 = \frac{2y_3}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2y_4}{\sqrt{5} - 1}$ thì $\text{Min } A = \frac{1}{7 + 3\sqrt{5}} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{4}$.

Bài 10. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số $A = A(n)$ nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \leq A(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \text{ đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Giải

Lấy $\alpha = \frac{\pi}{2n+1} \Rightarrow \sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha$. Đặt $c_i = \sin i\alpha - \sin(i-1)\alpha$ ($i = \overline{1, n}$)

$$S_k = \sum_{i=1}^k c_i = \sin k\alpha \quad (k = \overline{1, n}). \text{ Do } 0 \leq (i-1)\alpha < i\alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } c_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \leq (c_1 + c_2 + \dots + c_k) \left(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \sum_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left[(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \left(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[S_k \left(\frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_k + S_{k+1} + \dots + S_n}{c_k} \cdot x_k^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + S_3 + \dots + S_n}{c_2} = \dots = \frac{S_n}{c_n} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_k + S_{k+1} + \dots + S_n}{c_k} &= \frac{\sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha + \dots + \sin n\alpha}{\sin k\alpha - \sin(k-1)\alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} (\sin k\alpha + \dots + \sin n\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha} \\ &= \frac{\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha + \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \left(k + \frac{3}{2} \right) \alpha + \dots + \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha} \\ &= \frac{\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha} = \frac{\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha - \cos \frac{\pi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4n+2}} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 &\leq \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4n+2}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \end{aligned}$$

$$\text{Với } \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \dots = \frac{x_n}{c_n}, \text{ chẳng hạn } x_i = c_i \quad (i = \overline{1, n}) \text{ thì } \text{Min } A = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{4n+2}}$$

Bài 11. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right) \geq (1 + 2 + \dots + k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} \leq \frac{k}{(1 + 2 + \dots + k)^2} \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right)$$

$$\Rightarrow S \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{(1 + 2 + \dots + k)^2} \left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{k^2}{a_k} \right) \right] = c_1 \frac{1^2}{a_1} + c_2 \frac{2^2}{a_2} + \dots + c_n \frac{n^2}{a_n}$$

với $c_k = \frac{k}{(1 + 2 + \dots + k)^2} + \frac{k+1}{[1 + 2 + \dots + k + (k+1)]^2} + \dots + \frac{n}{(1 + 2 + \dots + n)^2}$ suy ra

$$\frac{c_k}{4} = \frac{k}{k^2 (k+1)^2} + \frac{k+1}{(k+1)^2 (k+2)^2} + \dots + \frac{n}{n^2 (n+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{k+2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \dots + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \dots - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow c_k \cdot k^2 < 4 \Rightarrow S \leq c_1 \frac{1^2}{a_1} + c_2 \frac{2^2}{a_2} + \dots + c_n \frac{n^2}{a_n} < 4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 12. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

a. $S = a_1^2 + \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 < 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ (1)

b. Hệ số 4 là đánh giá tốt nhất của bất đẳng thức (1)

Chứng minh

a. Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \right)^2 \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k^2} \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right)$$

$$\Rightarrow S \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k^2} \left(\frac{a_1^2}{\alpha_1} + \frac{a_2^2}{\alpha_2} + \dots + \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(c_k \frac{a_k^2}{\alpha_k} \right)$$

với $c_k = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{k^2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1}}{(k+1)^2} + \dots + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n^2}$

Chọn $\alpha_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \sqrt{k}; \frac{1}{\alpha_k} = \sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k - \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow c_k = \frac{\sqrt{k}}{k^2} + \frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)^2} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{k\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{k}} &< \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}} + \sqrt{k+\frac{1}{2}}} = \sqrt{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{k-\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} < k \\
\Rightarrow \frac{1}{k\sqrt{k}} &< \frac{2\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right) \\
\Rightarrow c_k &< 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{3}{2}}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right) < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{c_k}{\alpha_k} < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \cdot 2\sqrt{k-\frac{1}{2}} = 4 \\
\Rightarrow S &\leq \sum_{k=1}^n \left(c_k \frac{a_k^2}{\alpha_k}\right) < 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \quad (\text{đpcm})
\end{aligned}$$

b. Giả sử $S < (4 - \alpha)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, $0 < \alpha < 4$ (2). Chọn $a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ suy ra

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sqrt{k}. \text{ Khi đó (2) } \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < (4 - \alpha) \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left[\frac{4 - \alpha}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} - \frac{1}{k} \right] > 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2 + 2 - \alpha k}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2 k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^4} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} > \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} \quad (3)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^4} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k})^4} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$$

$$S_2 = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} < 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(\sqrt{k})^2} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 4$$

$$S_3 = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2} > \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2\sqrt{k})^2} = \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Từ các đánh giá của $S_1, S_2, S_3 \Rightarrow$ bất đẳng thức (3) không xảy ra $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 13. Chứng minh: $x_1 + \sqrt{x_1 x_2} + \dots + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < e(x_1 + \dots + x_n)$, $\forall x_1, \dots, x_n \geq 0$

Chứng minh

$$\text{Với } \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ thì có: } \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{x_1 \dots x_n} = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{a_1 \dots a_n} \sqrt[k]{\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_k}{a_k}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[k]{a_1 \dots a_n}}{k} \left(\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_k}{a_k} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} \sum_{i=k}^n \frac{\sqrt[i]{a_1 \dots a_n}}{i} = \sum_{k=1}^n c_k a_k$$

trong đó $C_k = \frac{1}{a_k} \left(\frac{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k}}{k} + \dots + \frac{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}{n} \right)$. Chọn $a_k = \frac{k^{k-1}}{(k+1)^k} \forall k = \overline{1, n}$. Khi đó:

$$C_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \left(\frac{1}{k(k+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \right) < \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k < e, \forall k = \overline{1, n}$$

Bài 14. Cho a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ và $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $y = a + b\sqrt{2} \sin x + c \sin 2x$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$y^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x) \Leftrightarrow y^2 \leq 4(1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x)$$

$$\text{Gọi } f(x) = 1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 + 2\sin^2 x + 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x)$$

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x \in (0, 1), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ thì } f(x) = g(t) = -4t^2 + 6t + 1 = \frac{13}{4} - 4\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{13}{4}$$

$$\text{Khi đó: } \text{Max} f(x) = \text{Max} g(t) = \frac{13}{4}. \text{ Từ đó suy ra } y^2 \leq 13.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = \frac{3}{4} \text{ và } \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{\sin x}}{b} = \frac{\sqrt{\sin 2x}}{c}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ và } \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2c} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{6}}{2}; c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } a^2 + b^2 + c^2 = 4 \text{ ta suy ra: } a = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\bullet \text{ Min } y = -\sqrt{13} \text{ xảy ra khi } a = -\frac{4}{\sqrt{13}}; b = \frac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}; c = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; x = \frac{\pi}{3}$$

$$\bullet \text{ Max } y = \sqrt{13} \text{ xảy ra khi } a = \frac{4}{\sqrt{13}}; b = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}; c = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; x = \frac{\pi}{3}$$

III. ĐIỂM RƠI TRONG CBS VỚI CÁC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Cho các số không âm a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải.

Phân tích: Đây là một bất đẳng thức chứa căn bậc 2 nên chúng ta nghĩ ngay đến việc khử căn thức bằng cách sử dụng bất đẳng thức **CBS**. Nhưng có một khó khăn là phải đảm bảo được dấu bằng của bất đẳng thức khi sử dụng **CBS** và đánh giá tiếp theo phải như nhau và phù hợp với điểm rơi dự đoán. Để ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) \sim (3, 1, 0)$. Vậy thì ta phải sử dụng bất đẳng thức **CBS** làm sao cho đẳng thức cũng xảy ra khi đó. Ta nảy ra ý tưởng, đó là thêm vào những tham số $p_1, p_2, p_3 > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \right)^2 &= \left(\sqrt{ap_1} \sqrt{\frac{a}{p_1(a+b)}} + \sqrt{bp_2} \sqrt{\frac{b}{p_2(b+c)}} + \sqrt{cp_3} \sqrt{\frac{c}{p_3(c+a)}} \right)^2 \\ &\leq (ap_1 + bp_2 + cp_3) \left(\frac{a}{p_1(a+b)} + \frac{b}{p_2(b+c)} + \frac{c}{p_3(c+a)} \right) \end{aligned}$$

Nếu chọn p_1, p_2, p_3 là những hằng số cố định thì sau khi sử dụng bất đẳng thức **CBS** thì đẳng thức không thể xảy ra khi $(a, b, c) \sim (3, 1, 0)$. Từ những điều này, chúng ta nghĩ đến việc chọn p_1, p_2, p_3 là những biến chạy theo a, b, c và ta thấy rằng chọn hàm tuyến tính là đơn giản hơn cả. Như vậy, ta sẽ đặt $p_1 = ma + nb + pc, p_2 = mb + nc + pa, p_3 = mc + na + pb$ với m, n, p là những số không âm ($m^2 + n^2 + p^2 > 0$) mà ta sẽ chọn sao cho đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) \sim (3, 1, 0)$. Theo bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \right)^2 &= \left[\sum_{cyc} \sqrt{a(ma + nb + pc)} \cdot \sqrt{\frac{a}{(ma + nb + pc)(a+b)}} \right]^2 \\ &\leq \sum_{cyc} a(ma + nb + pc) \times \sum_{cyc} \frac{a}{(ma + nb + pc)(a+b)} \\ &= [m(a^2 + b^2 + c^2) + (n+p)(ab + bc + ca)] \times \sum_{cyc} \frac{a}{(ma + nb + pc)(a+b)} \end{aligned}$$

Đến đây, các bạn nên chọn $n + p = 2m$ khi đó

$$m(a^2 + b^2 + c^2) + (n+p)(ab + bc + ca) = m(a+b+c)^2$$

Và như vậy ta có thể đơn giản đi một lượng $a+b+c$ với vế phải, như thế bậc của bất đẳng thức sẽ không cao. Và ta có thể dễ dàng chứng minh hơn!

Bây giờ, chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{a(ma+nb+pc)}}{\sqrt{(ma+nb+pc)(a+b)}} = \frac{\sqrt{b(mb+nc+pa)}}{\sqrt{(mb+nc+pa)(b+c)}} = \frac{\sqrt{c(mc+na+pb)}}{\sqrt{(mc+na+pb)(c+a)}}$$

Khi $c = 0, a = 3, b = 1$ đẳng thức trở thành

$$\frac{\sqrt{3(3m+n)}}{\sqrt{(3m+n)(3+1)}} = \frac{\sqrt{m+3p}}{\sqrt{m+3p}} \Leftrightarrow 5m+2n=3p=3(2m-n) \Leftrightarrow m=5n$$

Chọn $m = 5, n = 1 \Rightarrow p = 9$. Bây giờ chúng ta sẽ giải bài toán đã cho.

Giải: Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{a(5a+b+9c)} \cdot \sqrt{\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{cyc} a(5a+b+9c) \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \right) = 5(a+b+c)^2 \left(\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \right)$$

Ta chỉ cần chứng minh: $(a+b+c) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} \right) \leq \frac{5}{16}$

Mà điều này hiển nhiên đúng vì:

$$\frac{5}{16} - (a+b+c) \times \sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)} = \frac{A + \sum_{cyc} ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2}{16 \prod_{cyc} (a+b) \prod_{cyc} (5a+b+9c)} \geq 0$$

Trong đó $A = 243 \sum_{cyc} a^3 b^2 c + 835 \sum_{cyc} a^3 b c^2 + 232 \sum_{cyc} a^4 b c + 1230 a^2 b^2 c^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) \sim (3, 1, 0)$

Bài 2. Cho các số không âm a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{2a+b+3c}} + \frac{b}{\sqrt{2b+c+3a}} + \frac{c}{\sqrt{2c+a+3b}} < \sqrt{\frac{8}{15}}(a+b+c)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{2a+b+3c}} \right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{a(4a+5b+3c)} \cdot \sqrt{\frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)}} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{cyc} a(4a+5b+3c) \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)} \right) = 4(a+b+c)^2 \left(\sum_{cyc} \frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)} \right)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $(a+b+c) \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)} \right) \leq \frac{2}{15}$

Thật vậy, ta có: $\frac{2}{15} - (a+b+c) \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)} \right) = \frac{A}{B}$, trong đó

$$A = 45 \sum_{\text{cyc}} a^6 + 237 \sum_{\text{cyc}} a^5 b + 81 \sum_{\text{cyc}} ab^5 + 1768 \sum_{\text{cyc}} a^4 bc + 166 \sum_{\text{cyc}} a^3 b^3 + 361 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^2 \\ + 25 \sum_{\text{cyc}} a^2 b^4 + 4916 \sum_{\text{cyc}} a^3 b^2 c + 4736 \sum_{\text{cyc}} a^3 bc^2 + 9651 a^2 b^2 c^2 > 0$$

$B = 15(2a+b+3c)(2b+c+3a)(2c+a+3b)(4a+5b+3c)(4b+5c+3a)(4c+5a+3b) > 0$ Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh với chú ý đẳng thức không xảy ra.

Bài 3. Cho các số dương a, b, c , chứng minh $\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Chứng minh

- **Bổ đề:** $ab^3 + bc^3 + ca^3 \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2$

Thật vậy, ta có: $VT - VP = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - c^2 - ab - ac + 2bc)^2 \geq 0$

- **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^3+b^3} \right) \left(\sum_{\text{cyc}} a^2(a^3+b^3) \right) \geq (a^3+b^3+c^3)^2$$

Ta phải chứng minh: $2(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (a+b+c)(a^5+b^5+c^5+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3)$

Ta có $a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3 = (ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2) - abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$$= \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} [ab^3+bc^3+ca^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)] -$$

$$-abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

$$= \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} (ab^3+bc^3+ca^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - abc(a^2+b^2+c^2)$$

$$\leq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \left(\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 + a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \right) - abc(a^2+b^2+c^2)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$2(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (a+b+c)(a^5+b^5+c^5) +$$

$$+ (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 + a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \right) - abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$, $r=abc$ ($0 \leq q \leq 1$) thì ta có: $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} \geq r \geq \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}$

Khi đó, bất đẳng thức tương đương

$$(54r^2 + (28q^2 - 4)r) - 3(1 - q^2)r + \frac{1}{27}(7q^6 + 108q^4 - 39q^2 + 5) \geq 0$$

Rõ ràng $f(r) = 54r^2 + (28q^2 - 4)r$ là hàm đồng biến theo r nên ta có:

$$\begin{aligned} VT &\geq \left[54 \left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \right)^2 + (28q^2 - 4) \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \right] - 3(1 - q^2) \frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \\ &\quad + \frac{1}{27}(7q^6 + 108q^4 - 39q^2 + 5) = \frac{q^2 [q^2(15q^2 - 26q + 24) + (1 - 3q)^2]}{27} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Cho các số dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{2a^2 - ab + 2b^2} + \frac{b^3}{2b^2 - bc + 2c^2} + \frac{c^3}{2c^2 - ca + 2a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS,

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2 - ab + 2b^2} \right) \left(\sum_{cyc} a(2a^2 - ab + 2b^2)(c+a)^2 \right) \geq \left(\sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} ab^2 \right)^2$$

Cuối cùng ta chứng minh: $3 \left(\sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} ab^2 \right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a \right) \left(\sum_{cyc} a(2a^2 - ab + 2b^2)(c+a)^2 \right)$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = c + x, b = c + y$ ($x, y \geq 0$). Khi đó bất đẳng thức trở thành $Ac^4 + Bc^3 + Dc^2 + Ec + F \geq 0$ trong đó $A = 18(x^2 - xy + y^2) \geq 0$

$$B = 20x^3 + 33x^2y - 21xy^2 + 20y^3 = 20x^3 + 22x^2y + xy^2 + 9y^3 + 11y(x-y)^2 \geq 0$$

$$D = 11x^4 + 35x^3y + 21x^2y^2 - 19xy^3 + 11y^4 = 11x^4 + 35x^2y^2 + 11x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 10y^2(x-y)^2 \geq 0$$

$$E = 5x^5 + 4x^4y + 27x^3y^2 - 5x^2y^3 - 7xy^4 + 5y^5 = 5x^5 + 4x^4y + y^2(27x^3 - 5x^2y - 7xy^2 + 5y^3)$$

$$F = x^6 - x^5y + 5x^4y^2 + 2x^3y^3 - 3x^2y^4 + y^6$$

$$F = x^4(x^2 - xy + y^2) + y^2(2x^2 - y^2)^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b^2} + \sqrt{b+c^2} + \sqrt{c+a^2} < \frac{11}{5}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có $\left(\sum_{cyc} \sqrt{a+b^2} \right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{4a+4b+c} \cdot \sqrt{\frac{a+b^2}{4a+4b+c}} \right)^2$

$$\leq \left(\sum_{cyc} (4a+4b+c) \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a+b^2}{4a+4b+c} \right) = 9 \sum_{cyc} \frac{a+b^2}{4a+4b+c} = 9 \sum_{cyc} \frac{a(a+b+c)+b^2}{4a+4b+c}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $9 \sum_{cyc} \frac{a(a+b+c)+b^2}{4a+4b+c} \leq \frac{121}{25}(a+b+c)$

$$\text{Ta có: } VP - VT = \frac{163 \sum_{cyc} a^4 + 3003 \sum_{cyc} a^2 b^2 + 1975 \sum_{cyc} ab^3 - 725 \sum_{cyc} a^3 b + 10920 \sum_{cyc} a^2 bc}{25(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

$$= \frac{163 \left(\sum_{cyc} a^4 + 11 \sum_{cyc} a^2 b^2 - 6 \sum_{cyc} a^3 b - 6 \sum_{cyc} a^2 bc \right) + A}{25(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

Trong đó: $A = 1210 \sum_{cyc} a^2 b^2 + 1975 \sum_{cyc} ab^3 + 253 \sum_{cyc} a^3 b + 11898 \sum_{cyc} a^2 bc \geq 0$

Ta sẽ chứng minh: $\sum_{cyc} a^4 + 11 \sum_{cyc} a^2 b^2 - 6 \sum_{cyc} a^3 b - 6 \sum_{cyc} a^2 bc \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2 b^2 \right) + 12 \left(\sum_{cyc} a^2 b^2 - \sum_{cyc} a^2 bc \right) - 6 \left(\sum_{cyc} a^3 b - \sum_{cyc} a^2 bc \right) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } \sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2 b^2 = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2$$

$$\begin{aligned} 3 \left(\sum_{cyc} a^3 b - \sum_{cyc} a^2 bc \right) &= 3 \left(\sum_{cyc} b^3 c - \sum_{cyc} a^2 bc \right) = -3 \sum_{cyc} bc(a^2 - b^2) \\ &= -3 \sum_{cyc} bc(a^2 - b^2) + \sum_{cyc} (ab + bc + ca)(a^2 - b^2) = \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc) \end{aligned}$$

$$6 \left(\sum_{cyc} a^2 b^2 - \sum_{cyc} a^2 bc \right) = \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2. \text{ Do đó bất đẳng thức tương đương}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2 + 2 \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2 - 2 \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2 - 2ab - 2ac + 4bc)^2 \geq 0, \text{ đúng suy ra (đpcm)}$$

Bài 6. Cho các số không âm a, b, c , Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2 + 4c^2} + b\sqrt{c^2 + 4a^2} + c\sqrt{a^2 + 4b^2} \leq \frac{3}{4}(a+b+c)^2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b^2 + 4c^2} \right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} a(3a+b+5c) \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a(b^2 + 4c^2)}{3a+b+5c} \right) = 3(a+b+c)^2 \left(\sum_{cyc} \frac{a(b^2 + 4c^2)}{3a+b+5c} \right)$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng: $\sum_{cyc} \frac{a(b^2 + 4c^2)}{3a+b+5c} \leq \frac{3}{16}(a+b+c)^2 \Leftrightarrow$

$$45\sum_{cyc} a^5 + 165\sum_{cyc} a^4b + 69\sum_{cyc} ab^4 + 536\sum_{cyc} a^3bc - 306\sum_{cyc} a^3b^2 - 18\sum_{cyc} a^2b^3 - 410\sum_{cyc} a^2b^2c \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, bất đẳng thức tương đương với:

$$(45a^5 + 45b^5 + 165a^4b + 69ab^4 - 306a^3b^2 - 18a^2b^3) + Ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a+5b)(15a^2 + 10ab + 3b^2)(a-b)^2 + Ac \geq 0$$

Trọng đó: $A = 69a^4 + (536b - 18c)a^3 - (410b^2 + 410bc + 306c^2)a^2$

$$+ (536b^3 - 410b^2c + 436bc^2 + 165c^3)a + 165b^4 - 306b^3c - 18b^2c^2 + 69bc^3 + 45c^4$$

Sử dụng giả thiết $c = \min\{a, b, c\}$ ta dễ dàng chứng minh được $A \geq 0$ nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a:b:c = 1:1:0$

Bài 7. Cho các số dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{2a^2 + b^2} + \frac{b^3}{2b^2 + c^2} + \frac{c^3}{2c^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2 + b^2} \right) \left(\sum_{cyc} a(2a^2 + b^2)(2c+a)^2 \right) \geq \left(\sum_{cyc} a^3 + 2\sum_{cyc} ab^2 \right)^2$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$3 \left(\sum_{cyc} a^3 + 2\sum_{cyc} ab^2 \right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a \right) \left(\sum_{cyc} a(2a^2 + b^2)(2c+a)^2 \right)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = c+x, b = c+y$ ($x, y \geq 0$)

Khi đó bất đẳng thức tương đương với $Ac^4 + Bc^3 + Dc^2 + Ec + F \geq 0$

trong đó $A = 18(x^2 - xy + y^2)$; $B = 3(7x^3 + 18x^2y - 15xy^2 + 7y^3) \geq 0$

$$D = 14x^4 + 53x^3y + 24x^2y^2 - 46xy^3 + 14y^4 \geq 0$$

$$E = 6x^5 + 4x^4y + 50x^3y^2 - 29x^2y^3 - 6xy^4 + 6y^5 \geq 0$$

$$F = x^6 - 2x^5y + 11x^4y^2 - 3x^3y^3 - 4x^2y^4 + 2xy^5 + y^6 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 8. Cho các số không âm a, b, c , chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}} \leq 1$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} \right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{4a+4c+b} \cdot \sqrt{\frac{a}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)}} \right)^2 \leq$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)} \sum_{cyc} (4a+4c+b) = \frac{9(a+b+c)[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)]}{(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

Ta cần chứng minh:
$$\frac{9(a+b+c)[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)]}{(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 9(a+b+c)[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)] \leq (4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)$$

$$\Leftrightarrow 7 \sum_{cyc} a^3 + 3 \sum_{cyc} ab(a+b) \geq 39abc$$

Theo bất đẳng thức AM - GM thì $\sum_{cyc} a^3 \geq 3abc, \sum_{cyc} ab(a+b) \geq 6abc$

Do đó ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0; a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+k(b-c)^2} + \sqrt{b+k(c-a)^2} + \sqrt{c+k(a-b)^2} \leq \sqrt{3} \text{ trong đó } k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{a+k(b-c)^2} \right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{a+k(b-c)^2}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}}} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{cyc} \sqrt{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a + k(b-c)^2}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) = (\sqrt{3} + 1) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right).$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng: $(\sqrt{3} + 1) \left(\sum_{cyc} \frac{a}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{a + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) \leq 3$

Đặt $q = ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$, $r = abc$ thì ta có $0 \leq r \leq \frac{q^2}{3}$.

Bất đẳng thức tương đương với: $9(2 + \sqrt{3})r - q(6q + \sqrt{3}) \leq 0$

Ta có: $9(2 + \sqrt{3})r - q(6q + \sqrt{3}) \leq 3(2 + \sqrt{3})q^2 - q(6q + \sqrt{3}) = q(3q - 1)\sqrt{3} \leq 0$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 1, b = c = 0$ và các hoán vị.

Bài 10. Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ca} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{6}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** (Bất đẳng thức Schur)

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2), \quad \forall x, y, z \geq 0 \quad (*)$$

• **Chứng minh:** Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Khi đó:

$$VT(*) - VP(*) = (x - y)(x^2(x - z) - y^2(y - z)) + z^2(x - z)(y - z) \geq 0$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{2a^2 + bc} \right) \left(\sum_{cyc} (b + c)^2 (2a^2 + bc) \right) \geq 4(a + b + c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$2(a + b + c)^2 (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \geq 3 \sum_{cyc} (b + c)^2 (2a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^4 + 3 \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) + 2 \sum_{cyc} a^2 bc \geq 10 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** và bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2 bc \geq \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2), \quad \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum_{cyc} a^2 b^2. \quad \text{Từ đây, ta có đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho các $a, b, c \geq 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{22a^2 + 5bc} + \frac{1}{22b^2 + 5ca} + \frac{1}{22c^2 + 5ab} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** (Bất đẳng thức Schur)

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2), \quad \forall x, y, z \geq 0$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{22a^2 + 5bc} \right) \left(\sum_{cyc} (b+c)^2 (22a^2 + 5bc) \right) \geq 4(a+b+c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng: $4(a+b+c)^4 \geq \sum_{cyc} (b+c)^2 (2a^2 + bc)$

$$\Leftrightarrow 4 \sum_{cyc} a^4 + 11 \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) + 4 \sum_{cyc} a^2 bc \geq 30 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** và bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2 bc \geq \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2), \quad \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum_{cyc} a^2 b^2.$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 12. Cho các số $a, b, c \geq 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ca} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{8}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** (Bất đẳng thức Schur)

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2), \quad \forall x, y, z \geq 0$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{2a^2 + bc} \right) \left(\sum_{cyc} (b+c)^2 (2a^2 + bc) \right) \geq 4(a+b+c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng: $(a+b+c)^4 \geq 2 \sum_{cyc} (b+c)^2 (2a^2 + bc)$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + 2 \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) + 4 \sum_{cyc} a^2 bc \geq 6 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** và bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\sum_{cyc} a^4 + 4 \sum_{cyc} a^2 bc \geq \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2 bc \geq \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2), \quad \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 13. Cho các số $a, b, c \geq 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - bc}{2b^2 - 3bc + 2c^2} + \frac{b^2 - ca}{2c^2 - 3ca + 2a^2} + \frac{c^2 - ab}{2a^2 - 3ab + 2b^2} \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{a^2 - bc}{2b^2 - 3bc + 2c^2} + 1 \right) \geq 3 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2 + 2(b-c)^2}{2b^2 - 3bc + 2c^2} \geq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^2 + 2(b-c)^2}{2b^2 - 3bc + 2c^2} \right) \left(\sum_{cyc} (a^2 + 2(b-c)^2)(2b^2 - 3bc + 2c^2) \right) \geq \left(5 \sum_{cyc} a^2 - 4 \sum_{cyc} bc \right)^2$$

$$\text{Ta phải chứng minh: } \left(5 \sum_{cyc} a^2 - 4 \sum_{cyc} bc \right)^2 \geq 3 \sum_{cyc} [a^2 + 2(b-c)^2] (2b^2 - 3bc + 2c^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2 bc + 2 \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 6 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** và bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2 bc \geq \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2), \quad \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

$$\text{Bài 14. Chứng minh: } \frac{2a^2 - bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{2b^2 - ca}{c^2 - ca + a^2} + \frac{2c^2 - ab}{a^2 - ab + b^2} \geq 3, \forall a, b, c \geq 0$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức tương đương với } \sum_{cyc} \left(\frac{2a^2 - bc}{b^2 - bc + c^2} + 1 \right) \geq 6 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a^2 + (b-c)^2}{b^2 - bc + c^2} \geq 6$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{2a^2 + (b-c)^2}{b^2 - bc + c^2} \right) \left(\sum_{cyc} (2a^2 + (b-c)^2)(b^2 - bc + c^2) \right) \geq 4 \left(2 \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} bc \right)^2$$

$$\text{Ta phải chứng minh: } 2 \left(2 \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} bc \right)^2 \geq 3 \sum_{cyc} [2a^2 + (b-c)^2] (b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^4 + 2 \sum_{cyc} a^2 bc + \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 6 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** và bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2 bc \geq \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2), \quad \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum_{cyc} a^2 b^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} \right) \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c} \right) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geq 2 \left(\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c} + \frac{b^2(c^2+ca+a^2)}{c+a} + \frac{c^2(a^2+ab+b^2)}{a+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geq 2(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)) - 2abc \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} a(a-b)(a-c) + 2abc \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \right) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} a(a-b)(a-c) = (a-b)(a(a-c)-b(b-c)) + c(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\text{Mặt khác theo bất đẳng thức Nesbitt thì } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có

$$\frac{a(b+c)^2}{b^3+abc+c^3} + \frac{b(c+a)^2}{c^3+abc+a^3} + \frac{c(a+b)^2}{a^3+abc+b^3} \geq 2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)^2}{b^3+abc+c^3} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4(b+c)^2}{a^3(b^3+abc+c^3)} \geq \frac{(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b))^2}{\sum_{\text{cyc}} a^3(b^3+abc+c^3)}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh } (a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b))^2 \geq 2 \sum_{\text{cyc}} a^3(b^3+abc+c^3)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c , ta có

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq 0$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sum_{\text{cyc}} \frac{4(a^2 - bc)}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} &= \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{4(a^2 - bc)}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + 1 \right) - 3 \\ &= 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{(b-c)^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \sum_{\text{cyc}} \frac{5a^2 + c^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} - 3 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{5a^2 + c^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} - 3 \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức **CBS** thì

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{5a^2 + c^2}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} \right) \left(\sum_{\text{cyc}} (5a^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) \right) \geq 36(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\text{Mà: } 12(a^2 + b^2 + c^2)^2 - \sum_{\text{cyc}} (5a^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) = \sum_{\text{cyc}} 2(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 18. Cho các số $a, b, c \geq 0$ chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + bc}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{18(a^2 + b^2 + c^2)}{5(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức tương đương với } \sum_{\text{cyc}} \left(1 - \frac{a^2 + bc}{a^2 + (b+c)^2} \right) + \frac{18(a^2 + b^2 + c^2)}{5(a+b+c)^2} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c)^2 - bc}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{18(a^2 + b^2 + c^2)}{5(a+b+c)^2} \geq 3. \text{ Chú ý rằng } (b+c)^2 - bc \geq \frac{3}{4}(b+c)^2$$

$$\text{nên ta chỉ cần chứng minh rằng } \frac{1}{4} \sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{5(a+b+c)^2} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{\sum_{\text{cyc}} (a^2 + (b+c)^2)} = \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)^2}$$

$$\text{Ta phải chứng minh } \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)^2} + \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{5(a+b+c)^2} \geq 1$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{3} \text{ thì ta có bất đẳng thức tương đương}$$

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{6x}{5} \geq 1 \Leftrightarrow x(3x-1) \geq 0 \text{ luôn đúng với mọi } x \geq \frac{1}{3}, \text{ suy ra (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 19. Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{12}{(a+b+c)^2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+bc} \geq 12 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{1}{a^2+bc} - 1 \right) \geq 9 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1-a^2-bc}{a^2+bc} \geq 9$$

Sử dụng bất đẳng thức CBS:
$$\sum_{cyc} \frac{1-a^2-bc}{a^2+bc} \geq \frac{\left(3 - \sum_{cyc} (a^2+bc) \right)^2}{\sum_{cyc} (1-a^2-bc)(a^2+bc)}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng:
$$\left(3 - \sum_{cyc} (a^2+bc) \right)^2 \geq 9 \sum_{cyc} (1-a^2-bc)(a^2+bc)$$

Đặt $q = ab+bc+ca$, khi đó bất đẳng thức tương đương $(1-4q)(4-7q)+36abc \geq 0$

Nếu $q \leq \frac{1}{4}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $q \geq \frac{1}{4}$, khi đó theo bất đẳng thức Schur ta có: $9abc \geq 4q-1$.

Do đó $(1-4q)(4-7q)+36abc \geq (1-4q)(4-7q)+4(4q-1) = 7q(4q-1) \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 20. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng:
$$\frac{a(a-b)}{a^2+2bc} + \frac{b(b-c)}{b^2+2ca} + \frac{c(c-a)}{c^2+2ab} \geq 0$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương:
$$\sum_{cyc} \left(\frac{a(a-b)}{a^2+2bc} + 1 \right) \geq 3 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a^2-ab+2bc}{a^2+2bc} \geq 3$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $c \geq b-a$

$\Rightarrow 2a^2-ab+2bc \geq 2a^2-ab+2b(b-a) = 2(a-b)^2+ab \geq 0$. Sử dụng CBS, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{2a^2-ab+2bc}{a^2+2bc} \right) \left(\sum_{cyc} (2a^2-ab+2bc)(a^2+2bc) \right) \geq \left(2 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^2$$

Ta cần chứng minh
$$\left(2 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^2 \geq 3 \sum_{cyc} (2a^2-ab+2bc)(a^2+2bc)$$

$$\Leftrightarrow 7 \sum_{cyc} a^3 b + 4 \sum_{cyc} ab^3 \geq 2 \sum_{cyc} a^4 + 3 \sum_{cyc} a^2 b^2 + 6 \sum_{cyc} a^2 bc$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = y + z, b = z + x, c = x + y$. Khi đó bất đẳng thức tương đương

$$2 \sum_{cyc} x^4 + 2 \sum_{cyc} xy(x^2 + y^2) + 3 \sum_{cyc} xy^3 \geq 6 \sum_{cyc} x^2 y^2 + 3 \sum_{cyc} x^2 yz.$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$2 \sum_{cyc} x^4 \geq 2 \sum_{cyc} x^2 y^2, \quad 2 \sum_{cyc} xy(x^2 + y^2) \geq 4 \sum_{cyc} x^2 y^2, \quad 3 \sum_{cyc} xy^3 \geq 3 \sum_{cyc} x^2 yz$$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 21. Cho các $a, b, c > 0$; $abc = 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$

Chứng minh

Bổ đề: Với mọi $x, y, z > 0, xyz = 1$ thì $\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} \geq 1$ (1)

Chứng minh: Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại $m, n, p > 0$ sao cho $x = \frac{np}{m^2}, y = \frac{pm}{n^2}, z = \frac{mn}{p^2}$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có

$$VT(1) = \sum_{cyc} \frac{m^4}{m^4 + m^2 np + n^2 p^2} \geq \frac{(m^2 + n^2 + p^2)^2}{m^4 + n^4 + p^4 + m^2 n^2 + n^2 p^2 + p^2 m^2 + mnp(m + n + p)} \geq 1$$

Áp dụng: Bây giờ sử dụng bất đẳng thức này với $x = \frac{1}{a^4}, y = \frac{1}{b^4}, z = \frac{1}{c^4}$, ta có:

$$\frac{a^4}{a^4 + a^2 + 1} + \frac{b^4}{b^4 + b^2 + 1} + \frac{c^4}{c^4 + c^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2(a^2 + 1)}{a^4 + a^2 + 1} + \frac{2(b^2 + 1)}{b^4 + b^2 + 1} + \frac{2(c^2 + 1)}{c^4 + c^2 + 1} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2 + a + 1) + (a^2 - a + 1)}{(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)} + \frac{(b^2 + b + 1) + (b^2 - b + 1)}{(b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)} + \frac{(c^2 + c + 1) + (c^2 - c + 1)}{(c^2 + c + 1)(c^2 - c + 1)} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \right) + \left(\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \right) \leq 4$$

Do $\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1 \Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 22. Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right), \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có:

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} \right)^2 = \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc} \right) \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)(a+c)} \right) = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3 \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3 \right) \leq \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b+c} \right)^2$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3 \leq \frac{(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 3 \leq \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c) \left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)} \right) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có $a-c \geq \frac{a}{b}(b-c) \geq 0$

$$\text{Do đó: } \sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c) \left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)} \right)$$

$$\geq \frac{(a-b)(b-c)}{b} \left[a \left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)} \right) - b \left(\frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{(c+a)(a+b+c)} \right) \right]$$

$$= \frac{c(a-b)^2(a+b)(b-c)(a^2+b^2-ab+ac+bc)}{b(a^2+bc)(b^2+ca)(a+c)(b+c)(a+b+c)} \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c.$$

Bài 23. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}} \geq a+b+c$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có: $\left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} \right) \left(\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} \right) \geq (a+b+c)^2$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}} \leq a+b+c$$

Theo CBS ta có: $\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} \leq \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \right)}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \leq a+b+c$
 $\Leftrightarrow \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca} + \frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab} \geq 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ ta có: $\frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab} \geq 0$

Và $\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca} \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c) \geq 0$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 24. Chứng minh rằng: $\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq 2, \forall a, b, c \geq 0.$

Chứng minh

Sử dụng CBS, ta có: $\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} \right) \left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c} \right) \geq (a+b+c)^2$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $(a+b+c)^2 \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 2(ab+bc+ca)$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$. (đúng theo Schur)

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 25. Chứng minh rằng $\frac{x^3}{x^3+(x+y)^3} + \frac{y^3}{y^3+(y+z)^3} + \frac{z^3}{z^3+(z+x)^3} \geq \frac{1}{3} \quad (1), \forall x, y, z \geq 0$

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+(1+m)^3} + \frac{1}{1+(1+n)^3} + \frac{1}{1+(1+p)^3} \geq \frac{1}{3}$, trong đó $m = \frac{y}{x}; n = \frac{z}{y}; p = \frac{x}{z} \Rightarrow mnp = 1$.

Đặt $m = \frac{bc}{a^2}; n = \frac{ca}{b^2}; p = \frac{ab}{c^2}$, (1) $\Leftrightarrow \frac{a^6}{a^6+(a^2+bc)^3} + \frac{b^6}{b^6+(b^2+ca)^3} + \frac{c^6}{c^6+(c^2+ab)^3} \geq \frac{1}{3} \quad (2)$

Sử dụng CBS, ta có: $VT(2) = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^6}{a^6+(a^2+bc)^3} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{\sum_{\text{cyc}} (a^6+(a^2+bc)^3)}$

Suy ra (1) đúng nếu ta chứng minh được $3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq \sum_{cyc} (a^6 + (a^2 + bc)^3)$

$$\Leftrightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 5(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \geq 3abc(a^3 + b^3 + c^3) + 9a^2b^2c^2$$

Theo **AM - GM**: $a^6 + a^3b^3 + a^3b^3 \geq 3a^4bc$. Tương tự $b^6 + b^3c^3 + b^3c^3 \geq 3b^4ca$

và $c^6 + c^3a^3 + c^3a^3 \geq 3c^4ab$. Cũng theo **AM - GM**: $3(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \geq 9a^2b^2c^2$

Cộng tất cả các bất đẳng thức trên suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $a = b = c$.

Bài 26. Cho các số không âm a, b, c , chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)} + \frac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)} + \frac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)} \geq \frac{2}{3}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**, ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)} \cdot \sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c} \geq \left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2. \text{ Ta cần chứng minh:}$$

$$3 \left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c} \Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} a^4 + 2 \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 4 \sum_{cyc} \frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} \left(a^4 - \frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c} \right) + \sum_{cyc} \left(a^2(b^2+c^2) - \frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} \frac{a^3b(a-b) - ca^3(c-a)}{b+c} + \sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)} + \sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có:

$$3 \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)} + \sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c}$$

$$\geq \frac{2ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)} + \frac{a^2(b^2+c^2)(b-a)}{b+c} \pm \frac{b^2(c^2+a^2)(a-b)}{c+a}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \left[2ab(a^2+b^2+ab+bc+ca) - a^2b^2 - (b^2+ab+a^2)c^2 - (a+b)c^3 \right]$$

$$\geq \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \left[2ab(a^2+b^2+ab+bc+ca) - a^2b^2 - (b^2+ab+a^2)ab - (a+b)abc \right]$$

$$= \frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+bc+ca)}{(a+c)(b+c)} \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b, c = 0 \text{ và các hoán vị.}$$

Bài 14. Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+kab}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}, \forall a, b, c > 0; k \geq 8$

Bài 15. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$. Chứng minh $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}} + \sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}} + \sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}} \geq 3$

Bài 16. CM: $\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3 \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}, \forall a, b, c, x, y, z > 0$

Bài 17. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n > 0 \\ a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$. Đặt $S = \sum_{i=1}^n a_i$

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3}{S-a_1} + \frac{a_2^3}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n^3}{S-a_n} \geq \frac{1}{n-1}$

Bài 18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a_1+\dots+a_n}{2}\right)^2}{n}} \leq \frac{a_1 + \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} + \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{n}}}{n}$$

Bài 19. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+d} + \frac{c^2}{d+a} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 20. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+d} + \frac{c^2}{d+a} + \frac{d^2}{d+a} \geq 1$

Bài 21. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}$

Bài 22. Cho $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \geq 1$

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^2}{a_2+a_3} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4} + \frac{a_3^2}{a_4+a_5} + \frac{a_4^2}{a_5+a_1} + \frac{a_5^2}{a_1+a_2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 23. Cho $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$ thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \geq 1$

Chứng minh: $\frac{a_1^2}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+a_5} + \frac{a_3^2}{a_4+a_5+a_1} + \frac{a_4^2}{a_5+a_1+a_2} + \frac{a_5^2}{a_1+a_2+a_3} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 36. Cho $a, b, c, k \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+2b+k}{a+2c+k} + \frac{b+2c+k}{b+2a+k} + \frac{c+2a+k}{c+2b+k} \geq 3$

Bài 37. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh $\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+ca+a^2} \leq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$

Bài 38. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a}{1+\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b}{1+\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c}{1+\sqrt{2(a^2+b^2)}} \leq 1$

Bài 39. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{8a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{8b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{8c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq \frac{9}{\sqrt{2}}$

Bài 40. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $\frac{a^3+abc}{b^3+c^3+abc} + \frac{b^3+abc}{c^3+a^3+abc} + \frac{c^3+abc}{a^3+b^3+abc} \geq 2$

Bài 41. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c^2+a^2)}{b^2+ca} + \frac{c^2(a^2+b^2)}{c^2+ab} \leq a^2+b^2+c^2 \leq \frac{a(b^3+c^3)}{a^2+bc} + \frac{b(c^3+a^3)}{b^2+ca} + \frac{c(a^3+b^3)}{c^2+ab}$$

Bài 42. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \leq 3 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \leq 4\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

Bài 43. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{(a+c+b)(a+c+d)} \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd}$

Bài 44. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+\sqrt{ab}}} + \sqrt{\frac{b}{c+\sqrt{bc}}} + \sqrt{\frac{c}{a+\sqrt{ca}}} \geq \frac{3}{2}$

Bài 45. Cho $a, b, c, k \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{a^2b+kc^3} + \frac{b^3}{b^2c+ka^3} + \frac{c^3}{c^2a+kb^3} \geq \frac{3}{k+1}$

Bài 46. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

Bài 47. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(c+1)(c+2)} \geq \frac{1}{2}$$

Bài 48. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+3)(2a+1)} + \frac{1}{(b+3)(2b+1)} + \frac{1}{(c+3)(2c+1)} + \frac{1}{(d+3)(2d+1)} \geq \frac{1}{3}$$

Bài 49. Chứng minh: $\frac{\sqrt{ab+4bc+4ca}}{a+b} + \frac{\sqrt{bc+4ca+4ab}}{b+c} + \frac{\sqrt{ca+4ab+4bc}}{c+a} \geq \frac{9}{2} \quad \forall a, b, c \geq 0$.

Bài 50. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5a^2+bc} + \frac{1}{5b^2+ca} + \frac{1}{5c^2+ab} \geq \frac{3}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

§3. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

§3.1. BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

1. Dạng tổng quát:

Cho 2 bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p, q \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Khi đó ta có: $(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

2. Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có:

$$\text{a. } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \quad (1) \quad \forall pq > 0$$

$$\text{b. } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \quad (2) \quad \forall pq < 0$$

c. Tổng quát chung của 2 dạng a và b:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^{pq} \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^q (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^p \quad (3) \quad \forall pq \neq 0$$

(Bất đẳng thức Francis – Lithewood)

3. Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+ \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \dots l_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \quad (1)$$

4. Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và m số thỏa mãn $\begin{cases} \alpha, \beta, \dots, \lambda > 0 \\ \alpha + \beta + \dots + \lambda = 1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó ta có: } \sum_{i=1}^n (a_i^\alpha b_i^\beta \dots l_i^\lambda) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^\beta \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i \right)^\lambda$$

(Bất đẳng thức Jensen)

Chứng minh

1. • **Bổ đề:** Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$ và $p, q \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó $\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \geq ab$

• **Chứng minh:** Vì $p, q \in \mathbb{Q}^+$, $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \exists m, n, k \in \mathbb{N}^+$

sao cho $\frac{1}{p} = \frac{m}{k}, \frac{1}{q} = \frac{n}{k}$ với $m + n = k$. Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có :

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{m}{k} \cdot a^{\frac{k}{m}} + \frac{n}{k} \cdot b^{\frac{k}{n}} = \frac{ma^m + nb^n}{k} \geq \sqrt[k]{\left(a^m\right)^m \left(b^n\right)^n} = \sqrt[k]{a^k b^k} = ab$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^p = b^q$

• **Áp dụng:** Sử dụng bổ đề cho $a = \frac{a_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}; b = \frac{b_j}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ với $j = \overline{1, n}$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \cdot \frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_j^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} &\geq \frac{a_j b_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_j^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right) \geq \sum_{j=1}^n \frac{a_j b_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 &\geq \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{aligned}$$

2. a. Cho $p, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Khi đó $p > 0, q > 0$. Ta có bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** mở rộng ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \right) + \frac{1}{q} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right) = 1 \end{aligned}$$

b. Vì $p, q < 0$ nên không mất tính tổng quát, giả sử $p > 0, q < 0$

$$\text{Cho } \begin{cases} p' = \frac{1}{p}, q' = \frac{-q}{p} \\ u_i = (a_i b_i)^p; v_i = b_i^{-p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' > 0, q' > 0, u_i > 0; v_i > 0 \\ \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = p \left(1 - \frac{1}{q} \right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1 \end{cases}$$

Sử dụng kết quả của phần a. ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i v_i &\leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^p \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-\frac{p}{q}} \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-\frac{1}{q}} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{aligned}$$

c. Bất đẳng thức (3) là cách phát biểu khái quát của 2 bất đẳng thức (1) & (2)

• Dấu bằng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$

$$3. \sum_{i=1}^n a_i b_i \dots l_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i^{p_m} \right)^{\frac{1}{p_m}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{a_k^{p_1}}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{b_k^{p_2}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}} \dots \sum_{k=1}^n \frac{l_k^{p_m}}{\left(\sum_{i=1}^n l_i^{p_m} \right)^{\frac{1}{p_m}}} \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM mở rộng ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}} \dots \sum_{k=1}^n \frac{l_k}{\left(\sum_{i=1}^n l_i^{p_m} \right)^{\frac{1}{p_m}}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^{p_1}}{\sum_{i=1}^n a_i^{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_k^{p_2}}{\sum_{i=1}^n b_i^{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_2}} \dots \sum_{k=1}^n \left(\frac{l_k^{p_m}}{\sum_{i=1}^n l_i^{p_m}} \right)^{\frac{1}{p_m}} \\ &\leq \frac{1}{p_1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^{p_1}}{\sum_{i=1}^n a_i^{p_1}} \right) + \frac{1}{p_2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b_k^{p_2}}{\sum_{i=1}^n b_i^{p_2}} \right) + \dots + \frac{1}{p_m} \sum_{k=1}^n \left(\frac{l_k^{p_m}}{\sum_{i=1}^n l_i^{p_m}} \right) = 1 \\ 4. \sum_{i=1}^n (a_i^\alpha b_i^\beta \dots l_i^\lambda) &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^\beta \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i^\lambda \right)^\lambda \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n a_i^\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{b_i^\beta}{\sum_{i=1}^n b_i^\beta} \right)^\beta \dots \left(\frac{l_i^\lambda}{\sum_{i=1}^n l_i^\lambda} \right)^\lambda \leq 1 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM mở rộng ta có

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n a_i^\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{b_i^\beta}{\sum_{i=1}^n b_i^\beta} \right)^\beta \dots \left(\frac{l_i^\lambda}{\sum_{i=1}^n l_i^\lambda} \right)^\lambda \leq \alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n a_i^\alpha} \right) + \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i^\beta}{\sum_{i=1}^n b_i^\beta} \right) + \dots + \lambda \sum_{i=1}^n \left(\frac{l_i^\lambda}{\sum_{i=1}^n l_i^\lambda} \right) \\ &= \alpha + \beta + \dots + \lambda = 1. \text{ Vậy } \sum_{i=1}^n (a_i^\alpha b_i^\beta \dots l_i^\lambda) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^\beta \right)^\beta \dots \left(\sum_{i=1}^n l_i^\lambda \right)^\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha) = (b_1^\beta + b_2^\beta + \dots + b_n^\beta) = \dots = (l_1^\lambda + l_2^\lambda + \dots + l_n^\lambda)$$

§3.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Bài 1. Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a_1^3)(1 + a_2^3) \dots (1 + a_n^3) \geq (1 + a_1^2 a_2)(1 + a_2^2 a_3) \dots (1 + a_{n-1}^2 a_n)(1 + a_n^2 a_1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** với $p = \frac{2}{3}; q = \frac{1}{3}$, Ta có:

$$\times \begin{cases} (1 + a_1^3)^{2/3} (1 + a_2^3)^{1/3} \geq 1 + (a_1^3)^{2/3} (a_2^3)^{1/3} = 1 + a_1^2 a_2 \\ (1 + a_2^3)^{2/3} (1 + a_3^3)^{1/3} \geq 1 + (a_2^3)^{2/3} (a_3^3)^{1/3} = 1 + a_2^2 a_3 \\ \dots \geq \dots \\ (1 + a_{n-1}^3)^{2/3} (1 + a_n^3)^{1/3} \geq 1 + (a_{n-1}^3)^{2/3} (a_n^3)^{1/3} = 1 + a_{n-1}^2 a_n \\ (1 + a_n^3)^{2/3} (1 + a_1^3)^{1/3} \geq 1 + (a_n^3)^{2/3} (a_1^3)^{1/3} = 1 + a_n^2 a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + a_1^3)(1 + a_2^3) \dots (1 + a_n^3) \geq (1 + a_1^2 a_2)(1 + a_2^2 a_3) \dots (1 + a_{n-1}^2 a_n)(1 + a_n^2 a_1)$$

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1 + b^3 + c^3)(1 + c^3 + a^3)(1 + a^3 + b^3) \geq (1 + a^2 b + b^2 c)(1 + b^2 c + c^2 a)(1 + c^2 a + a^2 b) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** với $p = \frac{2}{3}; q = \frac{1}{3}$, Ta có:

$$\times \begin{cases} (1 + b^3 + c^3)^{2/3} (1 + c^3 + a^3)^{1/3} \geq 1 + b^2 c + c^2 a \\ (1 + c^3 + a^3)^{2/3} (1 + a^3 + b^3)^{1/3} \geq 1 + c^2 a + a^2 b \\ (1 + a^3 + b^3)^{2/3} (1 + b^3 + c^3)^{1/3} \geq 1 + a^2 b + b^2 c \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + b^3 + c^3)(1 + c^3 + a^3)(1 + a^3 + b^3) \geq (1 + a^2 b + b^2 c)(1 + b^2 c + c^2 a)(1 + c^2 a + a^2 b)$$

Bài 3. CMR: $\left(1 + \frac{a^3}{b^3}\right) \left(1 + \frac{b^3}{c^3}\right) \left(1 + \frac{c^3}{a^3}\right) \geq \left(1 + \frac{a^2}{bc}\right) \left(1 + \frac{b^2}{ca}\right) \left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \forall a, b, c > 0 \quad (1)$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) \geq abc(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab)$$

$$\times \begin{cases} (a^3 + b^3)^{2/3} (b^3 + c^3)^{1/3} \geq a^2 b + b^2 c = b(a^2 + bc) \\ (b^3 + c^3)^{2/3} (c^3 + a^3)^{1/3} \geq b^2 c + c^2 a = c(b^2 + ca) \\ (c^3 + a^3)^{2/3} (a^3 + b^3)^{1/3} \geq c^2 a + a^2 b = a(c^2 + ab) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) \geq abc(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab)$$

Bài 4. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{b^3 c^3}{a^3}\right) \left(1 + \frac{c^3 a^3}{b^3}\right) \left(1 + \frac{a^3 b^3}{c^3}\right) \geq \left(1 + \frac{bc^3}{a}\right) \left(1 + \frac{ca^3}{b}\right) \left(1 + \frac{ab^3}{c}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^3 + b^3 c^3)(b^3 + c^3 a^3)(c^3 + a^3 b^3) \geq a^2 b^2 c^2 (a + bc^3)(b + ca^3)(c + ab^3)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\times \begin{cases} (a^3 + b^3 c^3)^{2/3} (b^3 + c^3 a^3)^{1/3} \geq a^2 b + b^2 c^3 a = ab(a + bc^3) \\ (b^3 + c^3 a^3)^{2/3} (c^3 + a^3 b^3)^{1/3} \geq b^2 c + c^2 a^3 b = bc(b + ca^3) \\ (c^3 + a^3 b^3)^{2/3} (a^3 + b^3 c^3)^{1/3} \geq c^2 a + a^2 b^3 c = ca(c + ab^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^3 + b^3 c^3)(b^3 + c^3 a^3)(c^3 + a^3 b^3) \geq a^2 b^2 c^2 (a + bc^3)(b + ca^3)(c + ab^3)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{b^3 c^3}{a^3}\right) \left(1 + \frac{c^3 a^3}{b^3}\right) \left(1 + \frac{a^3 b^3}{c^3}\right) \geq \left(1 + \frac{bc^3}{a}\right) \left(1 + \frac{ca^3}{b}\right) \left(1 + \frac{ab^3}{c}\right) \quad (\text{dpcm})$$

Bài 5. Cho các số $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^7)(1 + b^7)(1 + c^7) \geq (1 + a^4 b^2 c)(1 + b^4 c^2 a)(1 + c^4 a^2 b) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng mở rộng 2 của bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\times \begin{cases} (1 + a^7)^{4/7} (1 + b^7)^{2/7} (1 + c^7)^{1/7} \geq 1 + a^4 b^2 c \\ (1 + b^7)^{4/7} (1 + c^7)^{2/7} (1 + a^7)^{1/7} \geq 1 + b^4 c^2 a \\ (1 + c^7)^{4/7} (1 + a^7)^{2/7} (1 + b^7)^{1/7} \geq 1 + c^4 a^2 b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + a^7)(1 + b^7)(1 + c^7) \geq (1 + a^4 b^2 c)(1 + b^4 c^2 a)(1 + c^4 a^2 b)$$

Bài 6. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + 2y^4 + 3z^4$

Giải

Xét $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$(x^4 + 2y^4 + 3z^4)(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3 \geq (a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z)^4$$

$$\text{Chọn } a, b, c \text{ sao cho } a^3 = 2b^3 = 3c^3 \Leftrightarrow a = k, b = \frac{k}{\sqrt[3]{2}}, c = \frac{k}{\sqrt[3]{3}} \quad (k > 0)$$

$$\text{Khi đó } x^4 + 2y^4 + 3z^4 \geq \frac{(a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3} \geq \frac{k^{12} (x + y + z)^4}{k^9 (a + b + c)^3} = 3k^3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = 1$$

Bài 4. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{b^3 c^3}{a^3}\right) \left(1 + \frac{c^3 a^3}{b^3}\right) \left(1 + \frac{a^3 b^3}{c^3}\right) \geq \left(1 + \frac{bc^3}{a}\right) \left(1 + \frac{ca^3}{b}\right) \left(1 + \frac{ab^3}{c}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^3 + b^3 c^3)(b^3 + c^3 a^3)(c^3 + a^3 b^3) \geq a^2 b^2 c^2 (a + bc^3)(b + ca^3)(c + ab^3)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\begin{cases} (a^3 + b^3 c^3)^{2/3} (b^3 + c^3 a^3)^{1/3} \geq a^2 b + b^2 c^3 a = ab(a + bc^3) \\ (b^3 + c^3 a^3)^{2/3} (c^3 + a^3 b^3)^{1/3} \geq b^2 c + c^2 a^3 b = bc(b + ca^3) \\ (c^3 + a^3 b^3)^{2/3} (a^3 + b^3 c^3)^{1/3} \geq c^2 a + a^2 b^3 c = ca(c + ab^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^3 + b^3 c^3)(b^3 + c^3 a^3)(c^3 + a^3 b^3) \geq a^2 b^2 c^2 (a + bc^3)(b + ca^3)(c + ab^3)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{b^3 c^3}{a^3}\right) \left(1 + \frac{c^3 a^3}{b^3}\right) \left(1 + \frac{a^3 b^3}{c^3}\right) \geq \left(1 + \frac{bc^3}{a}\right) \left(1 + \frac{ca^3}{b}\right) \left(1 + \frac{ab^3}{c}\right) \quad (\text{đpcm})$$

Bài 5. Cho các số $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^7)(1 + b^7)(1 + c^7) \geq (1 + a^4 b^2 c)(1 + b^4 c^2 a)(1 + c^4 a^2 b) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng mở rộng 2 của bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\begin{cases} (1 + a^7)^{4/7} (1 + b^7)^{2/7} (1 + c^7)^{1/7} \geq 1 + a^4 b^2 c \\ (1 + b^7)^{4/7} (1 + c^7)^{2/7} (1 + a^7)^{1/7} \geq 1 + b^4 c^2 a \\ (1 + c^7)^{4/7} (1 + a^7)^{2/7} (1 + b^7)^{1/7} \geq 1 + c^4 a^2 b \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + a^7)(1 + b^7)(1 + c^7) \geq (1 + a^4 b^2 c)(1 + b^4 c^2 a)(1 + c^4 a^2 b)$$

Bài 6. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + 2y^4 + 3z^4$

Giải

Xét $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$(x^4 + 2y^4 + 3z^4)(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3 \geq (a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z)^4$$

$$\text{Chọn } a, b, c \text{ sao cho } a^3 = 2b^3 = 3c^3 \Leftrightarrow a = k, b = \frac{k}{\sqrt[3]{2}}, c = \frac{k}{\sqrt[3]{3}} \quad (k > 0)$$

$$\text{Khi đó } x^4 + 2y^4 + 3z^4 \geq \frac{(a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3} \geq \frac{k^{12} (x + y + z)^4}{k^9 (a + b + c)^3} = 3k^3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = 1$$

Từ $a+b+c=3$ suy ra $k + \frac{k}{\sqrt[3]{2}} + \frac{k}{\sqrt[3]{3}} = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$

Vậy, $\text{Min}(x^4 + 2y^4 + 3z^4) = 3k^3$ với $k = \frac{3}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$ và $x=k, y=\frac{k}{\sqrt[3]{2}}, z=\frac{k}{\sqrt[3]{3}}$

Bài 7. Chứng minh rằng: $a\sqrt{\frac{a}{b+c}} + b\sqrt{\frac{b}{c+a}} + c\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(a\sqrt{\frac{a}{b+c}} + b\sqrt{\frac{b}{c+a}} + c\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)^2 (b+c+a+c+a+b) \geq (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{a}{b+c}} + b\sqrt{\frac{b}{c+a}} + c\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}} \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3}, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{(a+a+a)(a+\sqrt{ab}+b)(a+b+c)}{27} \geq \left(\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 9. [USAMO – 2004] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3$$

Chứng minh

Bước 1: Ta có $(x^5 - x^2 + 3) - (x^3 + 2) = (x^3 - 1)(x^2 - 1) \geq 0 \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow (a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$$

Bước 2: Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) = (a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3) \geq (a+b+c)^3$$

$$\Rightarrow (a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 10. Chứng minh: $3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq x^2y^2z^2 + xyz + 1, \forall x, y, z \geq 0$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $3(a^2 - a + 1)^3 \geq a^6 + a^3 + 1, \forall a \geq 0$

• **Chứng minh:** $3(a^2 - a + 1)^3 \geq a^6 + a^3 + 1 \Leftrightarrow (a-1)^4(2a^2 - a + 2) \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng, suy ra bổ đề được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 1$

• **Áp dụng:** Sử dụng bổ đề ta có:

$$(3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1))^3 = 3(x^2 - x + 1)^3 3(y^2 - y + 1)^3 3(z^2 - z + 1)^3$$

$$\geq (x^6 + x^3 + 1)(y^6 + y^3 + 1)(z^6 + z^3 + 1) \geq (x^2y^2z^2 + xyz + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq x^2y^2z^2 + xyz + 1 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \right)^2 [a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)] \geq (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^3}{a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)} = \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2} = a+b+c$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị của $(x, 0, 0)$ với $x > 0$.

Bài 12. [IMO 2001] Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \right)^2 [a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)]$$

Bài 10. Chứng minh: $3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq x^2 y^2 z^2 + xyz + 1, \forall x, y, z \geq 0$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $3(a^2 - a + 1)^3 \geq a^6 + a^3 + 1, \forall a \geq 0$

• **Chứng minh:** $3(a^2 - a + 1)^3 \geq a^6 + a^3 + 1 \Leftrightarrow (a-1)^4 (2a^2 - a + 2) \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng, suy ra bổ đề được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 1$

• **Áp dụng:** Sử dụng bổ đề ta có:

$$(3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1))^3 = 3(x^2 - x + 1)^3 3(y^2 - y + 1)^3 3(z^2 - z + 1)^3$$

$$\geq (x^6 + x^3 + 1)(y^6 + y^3 + 1)(z^6 + z^3 + 1) \geq (x^2 y^2 z^2 + xyz + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq x^2 y^2 z^2 + xyz + 1 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \right)^2 [a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)] \geq (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^3}{a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a)} = \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2} = a+b+c$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị của $(x, 0, 0)$ với $x > 0$.

Bài 12. [IMO 2001] Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \right)^2 [a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)]$$

$$\geq \left[\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \cdot a(a^2+8bc)} \right]^3 = (a+b+c)^3$$

$$\text{Do } (a+b+c)^3 - [a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)] = 3c(a-b)^2 + 3b(c-a)^2 + 3c(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{nên } (a+b+c)^3 \geq a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của $(x,0,0)$ với $x>0$.

Bài 13. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}} \geq a+b+c$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} \right) \left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} \right) (a+b+c) \geq (a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}} \leq a+b+c$$

Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz** ta có:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} \leq \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ac} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \right)}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^2(c+a)}{b^2+ac} + \frac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \leq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca} + \frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab} \geq 0$$

$$\text{Không mất tính tổng quát, giả sử } a \geq b \geq c \text{ ta có: } \frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab} \geq 0$$

$$\text{Và } \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca} \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c) \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

$$\text{Bài 14. Chứng minh rằng: } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}, \forall a, b, c > 0$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right) \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right) (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 3(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)}$$

Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2$. Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &\geq 3(xy+yz+zx)\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq \frac{3\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{x+y+z} \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \frac{3((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)}{(x+y+z)(x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)})} \\ &\Leftrightarrow 6(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)(x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}) \end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức này đúng vì ta có:

$$(x+y+z)(x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}) \geq 2(x+y+z)^2 \geq 6(xy+yz+zx)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$

Bài 15. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

Chứng minh

Chuẩn hóa $a^4+b^4+c^4=3$, ta cần chứng minh $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c}\right) \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c}\right) \left(\sum_{cyc} a^2(b+c)^2\right) \geq \left(\sum_{cyc} a^2\right)^3$$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geq \frac{9}{4}(a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2)$$

Mặt khác, theo một kết quả đã được chứng minh ở bài 14 thì

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geq 9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Cuối cùng ta chỉ cần chỉ ra

$$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq (a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

II. ĐIỂM RƠI HOLDER VỚI CÁC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}} + \sqrt{\frac{b}{1+c+ca}} + \sqrt{\frac{c}{1+a+ab}} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Phân tích: Chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức **Holder** với các tham số giả định p_1, p_2, p_3 để sau khi đánh giá sẽ loại bỏ được căn thức và mẫu thức:

$$[VT(1)]^2 \left[a^2(1+b+bc)p_1^3 + b^2(1+c+ca)p_2^3 + c^2(1+a+ab)p_3^3 \right] \geq (ap_1 + bp_2 + cp_3)^3$$

Ta thấy rằng p_1, p_2, p_3 không thể là những tham số cố định mà chúng phải là tham số chạy theo a, b, c và trong mọi trường hợp, tham số chạy đơn giản nhất luôn là những hàm tuyến tính theo a, b, c . Vì thế, ta đặt $p_1 = ma + nb + pc$, $p_2 = mb + nc + pa$ và

$p_3 = mc + na + pb$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$[VT(1)]^2 \left(\sum_{cyc} a^2(1+b+bc)(ma+nb+pc)^3 \right) \geq$$

$$\geq [a(ma+nb+pc) + b(mb+nc+pa) + c(mc+na+pb)]^3$$

$$= [m(a^2+b^2+c^2) + (n+p)(ab+bc+ca)]^3$$

$$\text{Chọn } n+p=2m \text{ khi đó ta có: } [VT(1)]^2 \geq \frac{m^3(a+b+c)^6}{\sum_{cyc} a^2(1+b+bc)(ma+nb+pc)^3}$$

Bây giờ chúng ta hãy chú ý đến đẳng thức của bất đẳng thức đã cho, có thể thấy nó đạt được khi $a=b=c=1$ và $a=3, b=c=0$ (đây chính là một điều thú vị và làm nên sự khó khăn của bài toán). Ở trên, đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}}{a^2(1+b+bc)(ma+nb+pc)^3} = \frac{\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}}{b^2(1+c+ca)(mb+nc+pa)^3} = \frac{\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}}}{c^2(1+a+ab)(mc+na+pb)^3}$$

Ta chọn được $m=2, n=1, p=3$. Khi đó, ta có lời giải như sau:

Giải: Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{1+b+bc}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} a^2(1+b+bc)(2a+b+3c)^3 \right) \geq \left(\sum_{cyc} a(2a+b+3c) \right)^3 = 8(a+b+c)^6$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } 8(a+b+c)^6 \geq 3 \sum_{cyc} a^2(1+b+bc)(2a+b+3c)^3$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^7 \geq \sum_{cyc} a^2 \left[(a+b+c)^2 + 3b(a+b+c) + 9bc \right] (2a+b+3c)^3 \quad (2)$$

Bằng khai triển trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned} \frac{VT(2) - VP(2)}{a+b+c} = & 4 \sum_{cyc} ab(a^4 + b^4) + 26 \sum_{cyc} a^2 b^4 + 39 \sum_{cyc} a^4 b^2 + 54 \sum_{cyc} a^3 b^3 + 261 a^2 b^2 c^2 \\ & - 24 \sum_{cyc} a^4 bc - 93 \sum_{cyc} a^3 b^2 c - 97 \sum_{cyc} a^2 b^3 c \end{aligned}$$

Mặt khác từ bất đẳng thức **AM – GM** và **Schur**, ta có thể dễ dàng chứng minh được

$$4 \sum_{cyc} ab(a^4 + b^4) + 26 \sum_{cyc} a^2 b^4 + 39 \sum_{cyc} a^4 b^2 + 54 \sum_{cyc} a^3 b^3 + 261 a^2 b^2 c^2 \geq$$

$$24 \sum_{cyc} a^4 bc + 93 \sum_{cyc} a^3 b^2 c + 97 \sum_{cyc} a^2 b^3 c$$

Như vậy (2) được chứng minh từ đó suy ra (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ hoặc $a = 3, b = c = 0$ và các hoán vị.

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{b^2 + 3c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + 3a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + 3b^2}} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Phân tích: Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\begin{aligned} [VT(1)]^2 \left(\sum_{cyc} a(b^2 + 3c^2)(ma + nb + pc)^3 \right) &\geq \\ &\geq [a(ma + nb + pc) + b(mb + nc + pa) + c(mc + na + pb)]^3 \\ &= [m(a^2 + b^2 + c^2) + (n+p)(ab + bc + ca)]^3 \end{aligned}$$

Chọn $m = 2(n+p)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{b^2 + 3c^2}}}{a(b^2 + 3c^2)(ma + nb + pc)^3} = \frac{\frac{b}{\sqrt{c^2 + 3a^2}}}{b(c^2 + 3a^2)(mb + nc + pa)^3} = \frac{\frac{c}{\sqrt{a^2 + 3b^2}}}{c(a^2 + 3b^2)(mc + na + pb)^3}$$

Đây là một bài toán khá chặt nên ta phải cố gắng chọn m, n, p cho thật sát. Như vậy ta mới có thể đi đến một lời giải đúng được. Đối với bất đẳng thức đã cho, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ nhưng có một trường hợp “khá nhạy cảm” là khi một trong ba biến, chẳng hạn $c = 0$ thì giá trị của biểu thức bên trái nhỏ nhất khi $a = 1, b = \sqrt[4]{3}$, vì vậy tốt nhất là ta nên chọn làm sao để cả 2 đẳng thức trên cùng xảy ra đối với bất đẳng thức trung gian.

Nhưng rõ ràng là điều kiện đẳng thức trên hiển nhiên xảy ra với $a = b = c$, còn với

$$a = 1, b = \sqrt[4]{3}, c = 0 \text{ thì ta có } m = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3}(1 + \sqrt{3})}{4 + \sqrt[4]{27}} n.$$

Chọn $n = 1$ thì $m = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3}(1 + \sqrt{3})}{4 + \sqrt[4]{27}} \approx 1.145179403$. Nhưng để đảm bảo cho các biểu thức

mà ta đã sử dụng bất đẳng thức **Holder** là không âm, ta phải chọn làm sao cho $p = \frac{m-2n}{2} \geq 0$ nên ta không thể lấy $m = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3}(1 + \sqrt{3})}{4 + \sqrt[4]{27}}$, nhưng từ đây ta có thể thấy giá

trị nhỏ nhất của m đảm bảo được điều này là $m = 2$. Khi đó $p = 0$. Từ đó, ta có lời giải:

Giải: Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2 + 3c^2}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} a(b^2 + 3c^2)(2a + b)^3 \right) \geq \left(2 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$4 \left(2 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3 \geq 9 \sum_{cyc} a(b^2 + 3c^2)(2a + b)^3 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = c + x, b = c + y$ ($x, y \geq 0$)

Khi đó, bất đẳng thức (2) tương đương $Ac^4 + Bc^3 + Dc^2 + Ec + F \geq 0$, trong đó

$$A = 810(x^2 - xy + y^2) \geq 0$$

$$B = 27(53x^3 + 17x^2y - 56xy^2 + 53y^3) = 27[53x^3 + x^2y + 4y^3 + y(4x - 7y)^2] \geq 0$$

$$D = 9(101x^4 + 146x^3y - 111x^2y^2 - 73xy^3 + 101y^4) = \frac{909(2x^2 + xy - 2y^2)^2 + 9xy(180x^2 + 263xy + 112y^2)}{4} \geq 0$$

$$E = 9(31x^5 + 48x^4y + 33x^3y^2 - 88x^2y^3 - xy^4 + 31y^5)$$

$$= 9[31x^5 + 3y(4x^2 + xy - 3y^2)^2 + xy^2(3x - 4y)^2 + y^3(5x^2 + xy + 4y^2)] \geq 0$$

$$F = 32x^6 + 48x^5y + 48x^4y^2 - 8x^3y^3 - 150x^2y^4 + 39xy^5 + 32y^6$$

$$= 2(4x^3 + 3x^2y - 4y^3)^2 + xy^2(30x^3 + 56x^2y - 102xy^2 + 39y^3)$$

$$= 2(4x^3 + 3x^2y - 4y^3)^2 + \frac{xy^2}{x+y}[(5x^2 + 6xy - 6y^2)^2 + 5x^4 + 26x^3y - 22x^2y^2 + 9xy^3 + 3y^4] \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$5x^4 + 26x^3y - 22x^2y^2 + 9xy^3 + 3y^4 \geq 26x^3y - 16x^2y^2 + 9xy^3 = xy(26x^2 - 16xy + 9y^2) \geq 0$$

Như vậy (2) đúng suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \geq 0$

Bài 3. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2 + ab + bc}} + \frac{1}{\sqrt{2b^2 + bc + ca}} + \frac{1}{\sqrt{2c^2 + ca + ab}} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \quad (1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Phân tích: Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{2a^2 + ab + bc}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} (2a^2 + ab + bc)(ma + nb + pc)^3 \right) \geq (m+n+p)^3 (a+b+c)^3$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(ma + nb + pc)\sqrt{2a^2 + ab + bc}} = \frac{1}{(mb + nc + pa)\sqrt{2b^2 + bc + ca}} = \frac{1}{(mc + na + pb)\sqrt{2c^2 + ca + ab}}$$

Ở bất đẳng thức đã cho, ngoài trường hợp đẳng thức là $a = b = c$ còn có một trường hợp đáng lưu tâm là $a = 1.84, b = 1, c = 0$. Do đó, ta nên chọn làm sao đẳng thức ở bất đẳng thức trung gian xảy ra tại cả 2 điểm này, từ đây với cách tính xấp xỉ, ta có thể chọn được $m = 1, n = 3, p = 4$. Như vậy ta có lời giải:

Giải: Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{2a^2 + ab + bc}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} (2a^2 + ab + bc)(a + 3b + 4c)^3 \right) \geq 512(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức

$$512(a+b+c)^5 \geq \frac{81}{4} \sum_{cyc} (2a^2 + ab + bc)(a + 3b + 4c)^3$$

$$\Leftrightarrow 1886 \sum_{cyc} a^5 + 6514 \sum_{cyc} a^4 b + 925 \sum_{cyc} ab^4 + 8236 \sum_{cyc} a^3 bc \geq 5521 \sum_{cyc} a^2 b^3 + 3739 \sum_{cyc} a^3 b^2 + 8301 \sum_{cyc} a^2 b^2 c$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Đặt $b = a + x, c = a + y$ ($x, y \geq 0$)

Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành $Aa^3 + Ba^2 + Ca + D \geq 0$, trong đó

$$A = 34560(x^2 - xy + y^2) \geq 0; \quad B = 47592x^3 - 108x^2y - 38988xy^2 + 45792y^3 \geq 0$$

$$C = 16869x^4 + 26814x^3y - 36081x^2y^2 + 894xy^3 + 16869y^4 \geq 0$$

$$D = 1886x^5 + 6514x^4y - 3739x^3y^2 - 5521x^2y^3 + 925xy^4 + 1886y^5 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2 + 3b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2 + 3c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2 + 3a^2}} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bổ đề: } a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq 4(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = 4 \sum_{cyc} a^2b^4 - 4 \sum_{cyc} a^4b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} (a^2+3b^2)(a+c)^3 \right) \geq \left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức

$$\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3 \geq \frac{9}{4} \sum_{cyc} (a^2+3b^2)(a+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3 \geq 3(a+b+c) \sum_{cyc} (a^2+3b^2)(a+c)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^6 + 9 \sum_{cyc} a^5b + 12 \sum_{cyc} a^4b^2 - 3 \sum_{cyc} a^2b^4 - 2 \sum_{cyc} a^3b^3 + 27 \sum_{cyc} a^4bc - 12 \sum_{cyc} a^2b^3c - 6 \sum_{cyc} a^3b^2c - 78a^2b^2c^2 \geq 0$$

Sử dụng bổ đề, ta chỉ cần chứng minh:

$$9 \sum_{cyc} a^5b + 8 \sum_{cyc} a^4b^2 + \sum_{cyc} a^2b^4 - 2 \sum_{cyc} a^3b^3 + 27 \sum_{cyc} a^4bc - 12 \sum_{cyc} a^2b^3c - 6 \sum_{cyc} a^3b^2c - 75a^2b^2c^2 \geq 0$$

$$9 \sum_{cyc} a^5b + 7 \sum_{cyc} a^4b^2 + 27 \sum_{cyc} a^4bc - 12 \sum_{cyc} a^2b^3c - 6 \sum_{cyc} a^3b^2c - 75a^2b^2c^2 \geq 0$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có $\sum_{cyc} a^4b^2 + \sum_{cyc} a^2b^4 - 2 \sum_{cyc} a^3b^3 \geq 0$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+15ca}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+15ab}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+15bc}} \geq \frac{3}{4} \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+15ca}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} a(a+2b)^3(b^2+15ca) \right) \geq (a+b+c)^6$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$16(a+b+c)^6 \geq 9 \sum_{cyc} a(a+2b)^3(b^2+15ca)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Đặt $b = a+x, c = a+y$ ($x, y \geq 0$)

Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E \geq 0$, trong đó

$$A = 567(x^2 - xy + y^2) \geq 0; \quad B = 54(x^3 + 41x^2y - 2x^2y + y^3) \geq 0$$

$$C = 18(11x^4 + 47x^3y + 204x^2y^2 - 82xy^3 + 11y^4) \geq 0$$

$$D = 9(9x^5 + 68x^4y + 118x^3y^2 + 134x^2y^3 - 69xy^4 + 9y^5) \geq 0$$

$$E = 16x^6 + 96x^5y + 231x^4y^2 + 266x^3y^3 + 132x^2y^4 - 111xy^5 + 16y^6 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \geq 0$.

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2 + bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 + ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2 + ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{4a^2 + bc}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} (b+c)^3 (4a^2 + bc) \right) \geq 8(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(a+b+c)^5 \geq 2 \sum_{cyc} (b+c)^3 (4a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3(a-b)(a-c) + 4 \sum_{cyc} ab(a-b)(a^2 - b^2) + abc \left(19 \sum_{cyc} a^2 - 18 \sum_{cyc} ab \right) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức được chứng minh

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} + \frac{b^2 - ca}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + 3a^2}} + \frac{c^2 - ab}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + 3b^2}} \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức } \textbf{Holder} \text{ ta có: } 8 \cdot \text{VT}(1) = \sum_{cyc} \left(\frac{8(a^2 - bc)}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} + b + c \right) - 2 \sum_{cyc} a$$

$$= \sum_{cyc} \frac{8(a^2 - bc) + (b+c)\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} - 2 \sum_{cyc} a \geq \sum_{cyc} \frac{8(a^2 - bc) + (b+c)(a+2b+3c)}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} - 2 \sum_{cyc} a$$

$$= \sum_{cyc} \frac{8a^2 + ab + bc + ca + c^2}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} + 2 \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} - 2 \sum_{cyc} a \geq \sum_{cyc} \frac{8a^2 + ab + bc + ca + c^2}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} - 2 \sum_{cyc} a$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$\sum_{cyc} \frac{8a^2 + ab + bc + ca + c^2}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} \geq 2\sqrt{6} \sum_{cyc} a \Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} \frac{8a^2 + ab + bc + ca + c^2}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} \right)^2 \geq 24(a+b+c)^2 \quad (2).$$

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{8a^2 + ab + bc + ca + c^2}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} (8a^2 + ab + bc + ca + c^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) \right) \geq 27 \left(3 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3$$

$$\Rightarrow VT(2) \geq \frac{27 \left(3 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3}{\sum_{cyc} (8a^2 + ab + bc + ca + c^2)(a^2 + 2b^2 + 3c^2)} = \frac{27 \left(3 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3}{11 \left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2 + 21 \sum_{cyc} a^2 b^2 + 6 \left(\sum_{cyc} a^2 \right) \left(\sum_{cyc} ab \right)}$$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$\frac{9 \left(3 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3}{11 \left(\sum_{cyc} a^2 \right)^2 + 21 \sum_{cyc} a^2 b^2 + 6 \left(\sum_{cyc} a^2 \right) \left(\sum_{cyc} ab \right)} \geq 8(a+b+c)^2 \quad (3)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Khi đó đặt $q = ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức Schur ta có $abc \geq \frac{4q-1}{9}$ và khi đó bất đẳng thức (3) trở thành:

$$9(3-5q)^3 \geq 8[11(1-2q)^2 + 21(q^2 - 2r) + 6q(1-2q)]$$

$$\Leftrightarrow 336r + 155 - 911q + 1601q^2 - 1125q^3 \geq 0$$

$$\text{Ta có: } 336r + 155 - 911q + 1601q^2 - 1125q^3 \geq 336 \cdot \frac{4q-1}{9} + 155 - 911q + 1601q^2 - 1125q^3$$

$$= \frac{1}{3}(1-3q)(1125q^2 - 1226q + 353) \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}). \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c.$$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 7ab + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 7bc + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + 7ca + a^2}} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$, khi đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 7x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 7y + 1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 7z + 1}} \geq 1$$

Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại $m, n, p > 0$ sao cho $x = \frac{n^2 p^2}{m^4}, y = \frac{p^2 m^2}{n^4}, z = \frac{m^2 n^2}{p^4}$.

Chúng ta cần chứng minh $\sum_{cyc} \frac{m^4}{\sqrt{m^8 + 7m^4 n^2 p^2 + n^4 p^4}} \geq 1$.

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{m^4}{\sqrt{m^8 + 7m^4 n^2 p^2 + n^4 p^4}} \right)^2 \left(\sum_{cyc} m(m^8 + 7m^4 n^2 p^2 + n^4 p^4) \right) \geq (m^3 + n^3 + p^3)^3$$

Bất đẳng thức trên được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(m^3 + n^3 + p^3)^3 \geq \sum_{\text{cyc}} m(m^8 + 7m^4 n^2 p^2 + n^4 p^4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} (5m^6 n^3 + 2m^3 n^3 p^3 - 7m^5 n^2 p^2) + \sum_{\text{sym}} (m^6 n^3 - m^4 n^4 p) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng suy ra bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b} \rightarrow +\infty, \frac{b}{c} \rightarrow +\infty$ và các hoán vị.

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 6ab + 2b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 6bc + 2c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + 6ca + 2a^2}} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$, khi đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 6y + 2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 6z + 2}} \geq 1$$

Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại $m, n, p > 0$ sao cho $x = \frac{np}{m^2}, y = \frac{pm}{n^2}, z = \frac{mn}{p^2}$.

Ta cần chứng minh $\sum_{\text{cyc}} \frac{m^2}{\sqrt{m^4 + 6m^2 np + 2n^2 p^2}} \geq 1$.

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** ta có:

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{m^2}{\sqrt{m^4 + 6m^2 np + 2n^2 p^2}} \right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} m^2 (m^4 + 6m^2 np + 2n^2 p^2) \right) \geq (m^2 + n^2 + p^2)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(m^2 + n^2 + p^2)^3 \geq \sum_{\text{cyc}} m^2 (m^4 + 6m^2 np + 2n^2 p^2) \Leftrightarrow 3 \sum_{\text{cyc}} m^4 (n - p)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng suy ra bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b} \rightarrow +\infty, \frac{b}{c} \rightarrow +\infty$ và các hoán vị.

III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a^3}{b^3c^3}\right)\left(1 + \frac{b^3}{c^3a^3}\right)\left(1 + \frac{c^3}{a^3b^3}\right) \geq \left(1 + \frac{a}{bc^3}\right)\left(1 + \frac{b}{ca^3}\right)\left(1 + \frac{c}{ab^3}\right)$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^6b^3)(1 + b^6c^3)(1 + c^6a^3) \geq (1 + a^4b^4c)(1 + b^4c^4a)(1 + c^4a^4b)$$

Bài 3. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(a^7 + b^7)(b^7 + c^7)(c^7 + a^7) \geq (ab^6 + bc^6)(bc^6 + ca^6)(ca^6 + ab^6)$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^6)(b^3 + c^6)(c^3 + a^6) \geq (a^2b + b^4c^2)(b^2c + c^4a^2)(c^2a + a^4b^2)$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a^{12}}{b^3c^6}\right)\left(1 + \frac{b^{12}}{c^3a^6}\right)\left(1 + \frac{c^{12}}{a^3b^6}\right) \geq \left(1 + \frac{a^7}{b^4}\right)\left(1 + \frac{b^7}{c^4}\right)\left(1 + \frac{c^7}{a^4}\right)$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a^{12}}{b^8c^4}\right)\left(1 + \frac{b^{12}}{c^8a^4}\right)\left(1 + \frac{c^{12}}{a^8b^4}\right) \geq \left(1 + \frac{a^7}{b^7}\right)\left(1 + \frac{b^7}{c^7}\right)\left(1 + \frac{c^7}{a^7}\right) \geq \left(1 + \frac{b^3c}{a^4}\right)\left(1 + \frac{c^3a}{b^4}\right)\left(1 + \frac{a^3b}{c^4}\right)$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^{11})(1 + b^{11})(1 + c^{11}) \geq (1 + a^7b^3c)(1 + b^7c^3a)(1 + c^7a^3b)$$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^{x+2})(1 + b^{x+2})(1 + c^{x+2}) \geq (1 + a^x)(1 + b^x)(1 + c^x) \geq (1 + a^x)(1 + b^x)(1 + c^x), \forall x > y$$

Bài 9. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-c}} \leq \frac{1}{3} \left(\sqrt[4]{\frac{a}{bc}} + \sqrt[4]{\frac{b}{ca}} + \sqrt[4]{\frac{c}{ab}} \right)^2$$

Bài 10. Chứng minh rằng:

$$3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \leq \left(8 + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right) \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}, \forall a, b, c > 0$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt[6]{\frac{a^6+b^6}{2}} + \sqrt[6]{\frac{b^6+c^6}{2}} + \sqrt[6]{\frac{c^6+a^6}{2}}$$

Bài 12. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Bài 13. [Romania 2005] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Chứng minh:
$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 14ab + b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + 14bc + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + 14ca + a^2}} \geq \frac{3}{4}$$

Bài 15. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$1. \sqrt{\frac{a}{1+3a^2}} + \sqrt{\frac{b}{1+3b^2}} + \sqrt{\frac{c}{1+3c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{1+3b^2}} + \sqrt{\frac{b}{1+3c^2}} + \sqrt{\frac{c}{1+3a^2}} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \geq 3$$

Bài 17. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a+ab)^2} + \frac{1}{(1+b+bc)^2} + \frac{1}{(1+c+cd)^2} + \frac{1}{(1+d+da)^2} \geq \frac{4}{9}$$

Bài 18. Cho $a, b, c, k \geq 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+k}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+k}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a+k}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{1+k}}$$

Bài 19. Cho $a, b, c, k \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+kbc}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+kca}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+kab}}$$

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2+bc+c^2} + \frac{\sqrt[3]{b}}{c^2+ca+a^2} + \frac{\sqrt[3]{c}}{a^2+ab+b^2} \geq 1$$

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\frac{\frac{7}{a^4}}{(a+b)(a+c)} + \frac{\frac{7}{b^4}}{(b+c)(b+a)} + \frac{\frac{7}{c^4}}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Bài 22. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$$

Bài 23. Tìm số dương k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c \geq 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{kb+c}} + \sqrt{\frac{b}{kc+a}} + \sqrt{\frac{c}{ka+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

Bài 24. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^2+b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

Bài 25. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{3a^2}{7a^2 + 5(b+c)^2}} \leq 1 \leq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 2(b+c)^2}}$$

Bài 26. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a}}{a+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+a} \geq \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Bài 27. [Ukraine 2007] Cho $a, b, c \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1+a^2}{\sqrt{2a^2+3ab-c^2}} + \frac{1+b^2}{\sqrt{2b^2+3bc-a^2}} + \frac{1+c^2}{\sqrt{2c^2+3ca-b^2}} \geq 2(a+b+c)$$

Bài 28. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}} + \sqrt{\frac{2b(c+a)}{(2c+a)(c+2a)}} + \sqrt{\frac{2c(a+b)}{(2a+b)(a+2b)}} \geq 2$$

Bài 29. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{ab+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{bc+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2+ca+a^2}{ca+b^2}} \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Bài 30. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số k dương lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt{\frac{ab}{k+c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{k+a^2}} + \sqrt{\frac{ca}{k+b^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

§4. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§4. 1. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

I. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI 1

1. Dạng tổng quát:

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $1 < p \in \mathbb{Q}^+$, khi đó $\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}}$

• **Đặc biệt:** $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \geq \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2 + (c+p)^2}$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$$

2. Dạng mở rộng:

Cho m bộ số thực dương $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^+ \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \end{cases}$,

$$a. \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p > 1$$

$$b. \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p < 1$$

Chứng minh :1. Lấy $q \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sử dụng **Holder** cho hai bộ dãy số sau:

$$\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ (a_1 + b_1)^{p-1}, (a_2 + b_2)^{p-1}, \dots, (a_n + b_n)^{p-1} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ (a_1 + b_1)^{p-1}, (a_2 + b_2)^{p-1}, \dots, (a_n + b_n)^{p-1} \end{cases}$$

$$\left(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

$$\left(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

Vì $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$, nên cộng hai bất đẳng thức trên ta có:

$$\left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{p-1} \right]^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

2. a. Đặt $t_i = a_i + b_i + \dots + l_i$. Sử dụng bất đẳng thức **Francis – Lithewood**

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^n (q_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} (q_i t_i^p)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n q_i a_i t_i^{p-1} \right. \\
 & + \left[\left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^n (q_i b_i^p)^{\frac{1}{p}} (q_i t_i^p)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n q_i b_i t_i^{p-1} \right. \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \left. \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^n (q_i l_i^p)^{\frac{1}{p}} (q_i t_i^p)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n q_i a_i t_i^{p-1} \right] \\
 & \Rightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \geq \sum_{i=1}^n q_i t_i^p \\
 & \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

b. Xét $\begin{cases} p < 1 \\ p \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 1 \\ p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right) < 0$. Sử dụng bất đẳng thức **Francis – Lithewood**

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n (q_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} (q_i t_i^p)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n q_i a_i t_i^{p-1} \right. \\
 & + \left[\left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n (q_i b_i^p)^{\frac{1}{p}} (q_i t_i^p)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n q_i b_i t_i^{p-1} \right. \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \left. \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n (q_i l_i^p)^{\frac{1}{p}} (q_i t_i^p)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n q_i a_i t_i^{p-1} \right] \\
 & \Rightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n q_i t_i^p \\
 & \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n q_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n q_i l_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n q_i t_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^n q_i (a_i + b_i + \dots + l_i)^p \right]^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

II. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI 2

1. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ khi đó ta có $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}$

2. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \dots \dots \dots \\ l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots + \sqrt[n]{l_1 l_2 \dots l_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1 + \dots + l_1)(a_2 + b_2 + \dots + l_2) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}$$

Chứng minh

$$1. \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} \leq 1. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n + b_n} \right) \\ & + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n + b_n} \right) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1 + b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n + b_n}{a_n + b_n} \right) = 1$$

$$2. \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} + \dots + \sqrt[n]{l_1 l_2 \dots l_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1 + \dots + l_1)(a_2 + b_2 + \dots + l_2) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1 + \dots + l_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n + b_n + \dots + l_n} \right) \\ & + \dots \dots \dots \\ & \sqrt[n]{\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{l_1}{a_1 + b_1 + \dots + l_1} + \dots + \frac{l_n}{a_n + b_n + \dots + l_n} \right) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{(a_1 + b_1 + \dots + l_1) \dots (a_n + b_n + \dots + l_n)}} \leq 1$$

§4. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng:

$$T = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^5 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^5} + \sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^5 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right)^5} + \dots + \sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}\right)^5 + \left(\frac{1}{\sqrt{99}+10}\right)^5} \geq \frac{35\sqrt[5]{2}}{4}$$

Chứng minh

Biến đổi biểu thức T rồi sử dụng bất đẳng thức *Minkowski* ta có:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[5]{(\sqrt{2}-1)^5 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^5} + \sqrt[5]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^5 + (\sqrt{4}-\sqrt{3})^5} + \dots + \sqrt[5]{(\sqrt{99}-\sqrt{98})^5 + (10-\sqrt{99})^5} \\ &\geq \sqrt[5]{[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{99}-\sqrt{98})]^5} + \sqrt[5]{[(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (10-\sqrt{99})]^5} \\ &= \sqrt[5]{(\sqrt{99}-1)^5 + (10-\sqrt{2})^5} > \sqrt[5]{2 \left(\frac{\sqrt{99}-1+10-\sqrt{2}}{2} \right)^5} = \frac{9+\sqrt{99}-\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt[5]{2} > \frac{35\sqrt[5]{2}}{4} \end{aligned}$$

Bài 2. Cho $0 \leq a, b \leq 1$ và $a \leq 2b; b \leq 2a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt[3]{8a^3 - 2b^3 - 6ab^2 + 12ab + 3b^2 - 3b + 2} + \sqrt[3]{8b^3 - 2a^3 - 6a^2b + 12ab + 3a^2 - 3a + 2}$$

Giải

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[3]{(1-b)^3 + (2a-b)^3 + 1} + \sqrt[3]{(1-a)^3 + (2b-a)^3 + 1} \geq \sqrt[3]{(2-a-b)^3 + (a+b)^3 + 2^3} \\ &\geq \sqrt[3]{3 \cdot \left[\frac{(2-a-b) + (a+b) + 2}{3} \right]^3} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3}}{3}. \text{ Với } a=b=\frac{1}{2} \text{ thì } \min T = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3}}{3} \end{aligned}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm Min của: $S = \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{b^3}} + \sqrt[3]{b^3 + \frac{1}{c^3}} + \sqrt[3]{c^3 + \frac{1}{a^3}}$

Phân tích và tìm lời giải

- Xét các đánh giá với các tham số $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{b^3}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \cdot \sqrt[3]{\left(a^3 + \frac{1}{b^3}\right)(\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3)} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \cdot \left(\alpha^2 a + \frac{\beta^2}{b}\right) \quad (1) \\ + \sqrt[3]{b^3 + \frac{1}{c^3}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \cdot \sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{1}{c^3}\right)(\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3)} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \cdot \left(\alpha^2 b + \frac{\beta^2}{c}\right) \quad (2) \\ \sqrt[3]{c^3 + \frac{1}{a^3}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \cdot \sqrt[3]{\left(c^3 + \frac{1}{a^3}\right)(\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3)} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \cdot \left(\alpha^2 c + \frac{\beta^2}{a}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)^2}} \geq \left[\alpha^2(a+b+c) + \beta^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] = S_0 \text{ (với } S_0 \text{ là hằng số)}$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ đạt tại "điểm rơi":

$a = b = c = \frac{1}{2}$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đều trở thành đẳng thức. Kết hợp với điều kiện xảy ra đẳng thức của bất đẳng thức *Minkowski 2* ta có sơ đồ điểm rơi sau đây:

$$\text{Sơ đồ: } \boxed{a = b = c = \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1/b}{\beta} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1/c}{\beta} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1/a}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{cases}}$$

Kết hợp với kỹ thuật "Chọn điểm rơi" trong *AM - GM* ta có lời giải sau đây:

• **Giải:**

Sử dụng bất đẳng thức *Minkowski 2* ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{b^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1^3 + 4^3)^2}} \cdot \sqrt[3]{\left(a^3 + \frac{1}{b^3}\right)(1^3 + 4^3)(1^3 + 4^3)} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \cdot \left(a + \frac{16}{b}\right) \\ & + \sqrt[3]{b^3 + \frac{1}{c^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1^3 + 4^3)^2}} \cdot \sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{1}{c^3}\right)(1^3 + 4^3)(1^3 + 4^3)} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \cdot \left(b + \frac{16}{c}\right) \\ & \sqrt[3]{c^3 + \frac{1}{a^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1^3 + 4^3)^2}} \cdot \sqrt[3]{\left(c^3 + \frac{1}{a^3}\right)(1^3 + 4^3)(1^3 + 4^3)} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \cdot \left(c + \frac{16}{a}\right) \\ \Rightarrow S &= \sqrt[3]{a^3 + \frac{1}{b^3}} + \sqrt[3]{b^3 + \frac{1}{c^3}} + \sqrt[3]{c^3 + \frac{1}{a^3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \left[(a+b+c) + 16 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \left[\left(a+b+c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \right) + \frac{63}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \left[6 \cdot \sqrt[6]{abc} \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c} + \frac{63}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \left[3 + \frac{189}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \right] \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \left[3 + \frac{189}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a+b+c}{3}} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \left[3 + \frac{189}{4} \cdot 2 \right] = \frac{1}{\sqrt[3]{4225}} \cdot \frac{195}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{65}}{2} \\ \text{Với } a=b=c=\frac{1}{2} \text{ thì } \text{Min } S &= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{65}}{2}. \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{1}{6c^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^3}{2} + \frac{c^3}{3} + \frac{1}{6a^3}} + \sqrt[3]{\frac{c^3}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{1}{6b^3}}$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức **Minkowski** mở rộng ta có:

$$T \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}(a+b+c)^3 + \frac{1}{3}(b+c+a)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}(a+b+c)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Holder** và bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\left[\frac{5}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{6} \cdot 9^3\right] \left[\frac{5}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{6} \cdot 9^3\right] \left[\frac{5}{6}(a+b+c)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3\right]} \geq \\ & \geq \frac{5}{6}(a+b+c) + \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 9 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{5}{6}\left(a+b+c + \frac{1}{9a} + \frac{1}{9b} + \frac{1}{9c}\right) + \frac{362}{27}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ & \geq \frac{5}{6} \cdot 6 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot \frac{1}{9a} \cdot \frac{1}{9b} \cdot \frac{1}{9c} + \frac{362}{27} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{5}{3} + \frac{362}{27} \cdot \frac{9}{a+b+c} \geq \frac{367}{3} \\ & \Rightarrow T \geq \frac{367}{3} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{6} \cdot 9^3\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{367}{3}}. \text{ Với } a=b=c=\frac{1}{3} \text{ thì } \min T = \sqrt[3]{\frac{367}{3}} \end{aligned}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $(1 + \sqrt[3]{abc})^3 \leq (1+a)(1+b)(1+c)$ (1), $\forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 1} + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\Leftrightarrow S = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1. \text{ Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:}$$

$$S \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+a}{1+a} + \frac{1+b}{1+b} + \frac{1+c}{1+c}\right) = 1.$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{(a+b)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)}$, $\forall a, b > 0$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 \cdot a \cdot \frac{1}{b}} + \sqrt[3]{1 \cdot b \cdot \frac{1}{a}} \leq \sqrt[3]{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1 \cdot a \cdot \frac{1}{b}}{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{1 \cdot b \cdot \frac{1}{a}}{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)}} \leq 1$$

$$\text{Ta có VT} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{a+b} + \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{a+b} + \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2 \cdot \sqrt[3]{3}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (3 + \sqrt[3]{3})} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (3 - \sqrt[3]{3})} < \sqrt[3]{(1+1)(1+1)[(3 + \sqrt[3]{3}) + (3 - \sqrt[3]{3})]}$$

Cho $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1; a_3 = 3 + \sqrt[3]{3} \\ b_1 = b_2 = 1; b_3 = 3 - \sqrt[3]{3} \end{cases}$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3} < \sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)}$

Do $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$, nên dấu đẳng thức không xảy ra và ta có (1) được chứng minh.

Bài 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác

và các số $x, y, z \in [-1, 1]$ sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$(xa + yb + zc)(ya + zb + xc)(za + xb + yc) \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \quad (1)$$

Chứng minh

Do trong một tam giác luôn có vòng tròn nội tiếp nên tồn tại các số $u, v, w > 0$ sao cho ta có $a = v + w; b = u + w; c = u + v$

Đặt $A = 1 - x; B = 1 - y; C = 1 - z \Rightarrow A, B, C \geq 0$ và $A + B + C = 2$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (Au + Bv + Cw)(Av + Bw + Cu)(Aw + Bu + Cv) \geq 8uvw$

Sử dụng bất đẳng thức **Minkowski 2** ta có:

$$\sqrt[3]{(Au + Bv + Cw)(Av + Bw + Cu)(Aw + Bu + Cv)} \geq (A + B + C) \sqrt[3]{uvw} = 2 \cdot \sqrt[3]{uvw}$$

$$\Rightarrow (Au + Bv + Cw)(Av + Bw + Cu)(Aw + Bu + Cv) \geq 8uvw \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + abc) \quad (1)$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $2(1 + u^2)^3 \geq (1 + u)^3(1 + u^3), \forall u > 0 \quad (2)$

Chứng minh: (2) $\Leftrightarrow 2(u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1) \geq (u^3 + 3u^2 + 3u + 1)(u^3 + 1)$

$$\Leftrightarrow u^6 - 3u^5 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 3u + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^4(u^2 + u + 1) \geq 0$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bổ đề và bất đẳng thức **Minkowski 2** ta có:

$$[2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)]^3 = 2(1 + a^2)^3 2(1 + b^2)^3 2(1 + c^2)^3$$

$$\geq (1 + a)^3(1 + a^3)(1 + b)^3(1 + b^3)(1 + c)^3(1 + c^3)$$

$$= (1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3)[(1 + a)(1 + b)(1 + c)]^3 \geq [(1 + abc)(1 + a)(1 + b)(1 + c)]^3$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + abc)$$

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+c^2} \geq \sqrt{1+\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2} + \sqrt{1+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^2} + \sqrt{1+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^2}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{a}{3b}\right)\left(1+\frac{b}{3c}\right)\left(1+\frac{c}{3d}\right)\left(1+\frac{d}{3a}\right) \geq \frac{625}{256} \quad \forall a, b, c, d > 0$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} > 1 \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Bài 4. Chứng minh: $\left(1+\frac{a_1}{na_2}\right)\left(1+\frac{a_2}{na_3}\right) \dots \left(1+\frac{a_n}{na_1}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{m+k\sqrt[p]{p}} + \sqrt[n]{m-k\sqrt[p]{p}} < 2\sqrt[n]{m}, \quad \forall \begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ m, p, m-k\sqrt[p]{p} > 0 \end{cases}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{n-\sqrt[n]{n!}} + \frac{1}{n-\sqrt[n]{n}} \leq 1, \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{\binom{m+n}{n}} \geq 1 + \frac{m}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \forall m, n \geq 1; m, n \in \mathbb{N}$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\left(1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right)^n \leq (1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n), \quad \forall a_i > 0$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\left(p+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right)^n \leq (p+a_1)(p+a_2) \dots (p+a_n), \quad \forall p, a_i > 0$

Bài 10. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall a_{ij} > 0$

Bài 11. Chứng minh rằng: $(a_1-1)(a_2-1) \dots (a_n-1) \leq \left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} - 1\right)^n, \quad \forall a_i \geq 1$

Bài 12. Chứng minh: $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3, \quad \forall \Delta ABC$

Bài 13. Chứng minh: $\left(1+\frac{1}{\sin \frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin \frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin \frac{C}{2}}\right) \geq 27, \quad \forall \Delta ABC$

Bài 14. Chứng minh: $\left(n+\frac{1}{\sin \frac{A}{2}}\right)\left(n+\frac{1}{\sin \frac{B}{2}}\right)\left(n+\frac{1}{\sin \frac{C}{2}}\right) \geq (n+2)^3 \quad \text{với} \quad \begin{cases} \forall \Delta ABC \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

§5. BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§5. 1. BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

1. Bất đẳng thức Chebyshev trên 2 dãy đơn điệu cùng chiều

Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó

Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ ta có:

$$1.1. \text{Dạng 1: } \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

$$1.1. \text{Dạng 2: } n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

2. Bất đẳng thức Chebyshev trên 2 dãy đơn điệu ngược chiều

Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó:

Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ ta có:

$$2.1. \text{Dạng 1: } \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

$$2.2. \text{Dạng 2: } n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_j b_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_i b_i + a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(a_i - a_j)(b_i - b_j)] = S \end{aligned}$$

• Nếu 2 dãy số: $\{a_k\}_1^n, \{b_k\}_1^n$ là 2 dãy đơn điệu cùng chiều thì $S \geq 0$

$$\text{Suy ra } n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

• Nếu 2 dãy số $\{a_k\}_1^n, \{b_k\}_1^n$ là 2 dãy đơn điệu ngược chiều thì $S \leq 0$

$$\text{Suy ra } n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$$

$$\Rightarrow (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_n \\ b_1 = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

3. Bất đẳng thức Chebyshev mở rộng

Cho $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$ thỏa mãn $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$

3.1. Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ thì

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + \dots + m_n a_n b_n \geq (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n)(m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

3.2. Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ thì

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + \dots + m_n a_n b_n \leq (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n)(m_1 b_1 + m_2 b_2 + \dots + m_n b_n)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh đại diện **3.1** còn **3.2** được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp đại diện $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$

$$\text{Ta có } (a_k - a_p)(b_k - b_p) \geq 0 \Leftrightarrow a_k b_k + a_p b_p \geq a_k b_p + a_p b_k$$

$$\Leftrightarrow m_k m_p a_k b_k + m_k m_p a_p b_p \geq m_k m_p a_k b_p + m_k m_p a_p b_k$$

Cho p chạy từ 1 đến n suy ra

$$m_k a_k b_k \sum_{p=1}^n m_p + m_k \sum_{p=1}^n m_p a_p b_p \geq m_k a_k \sum_{p=1}^n m_p b_p + m_k b_k \sum_{p=1}^n m_p a_p$$

$$\Leftrightarrow m_k a_k b_k + m_k \sum_{p=1}^n m_p a_p b_p \geq m_k a_k \sum_{p=1}^n m_p b_p + m_k b_k \sum_{p=1}^n m_p a_p$$

Bây giờ cho k chạy từ 1 đến n suy ra

$$\sum_{k=1}^n m_k a_k b_k + \sum_{k=1}^n m_k \sum_{p=1}^n m_p a_p b_p \geq \sum_{k=1}^n m_k a_k \sum_{p=1}^n m_p b_p + \sum_{k=1}^n m_k b_k \sum_{p=1}^n m_p a_p$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n m_i a_i b_i \geq 2 \sum_{i=1}^n m_i a_i \cdot \sum_{i=1}^n m_i b_i \quad (\text{đổi chỉ số})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n m_i a_i \cdot \sum_{i=1}^n m_i b_i \quad \text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

Chú ý: Cho $m_1 = m_2 = \dots = m_n = \frac{1}{n}$ suy ra **bất đẳng thức Chebyshev**

§5. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} b+c \geq c+a \geq a+b \\ \frac{a}{b+c} \leq \frac{b}{c+a} \leq \frac{c}{a+b} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \geq$$

$$\geq 3 \left[\frac{a}{b+c}(b+c) + \frac{b}{c+a}(c+a) + \frac{c}{a+b}(a+b) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) [2(a+b+c)] \geq 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 2. [PSFJIMO 28 – Cuba 1987] Cho $a, b, c > 0$ và $n \in \mathbb{Z}^+$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-2}}$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp Quy nạp toán học:

• Với $n = 1$ thì bất đẳng thức *Nesbit* quen biết $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

• Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$: $\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^{k-1}}{2 \cdot 3^{k-2}}$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{a^k}{b+c} \leq \frac{b^k}{c+a} \leq \frac{c^k}{a+b} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$3 \left(\frac{a^k}{b+c} \cdot a + \frac{b^k}{c+a} \cdot b + \frac{c^k}{a+b} \cdot c \right) \geq \left(\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b} \right) (a+b+c)$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^{k-1}}{2 \cdot 3^{k-2}} \cdot (a+b+c) = \frac{(a+b+c)^k}{2 \cdot 3^{k-2}} \Leftrightarrow \frac{a^{k+1}}{b+c} + \frac{b^{k+1}}{c+a} + \frac{c^{k+1}}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^k}{2 \cdot 3^{k-1}}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 3 Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha}{a+b+c}$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow \begin{cases} b+c \leq a+c \leq a+b \\ \frac{a^\alpha}{b+c} \geq \frac{b^\alpha}{c+a} \geq \frac{c^\alpha}{a+b} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\begin{aligned} VT(1) &= \frac{1}{2(a+b+c)} \cdot \left(\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b} \right) [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \geq \\ &\geq \frac{1}{2(a+b+c)} \cdot 3 \left[\frac{a^\alpha}{b+c} (b+c) + \frac{b^\alpha}{c+a} (c+a) + \frac{c^\alpha}{a+b} (a+b) \right] = \frac{3(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha)}{2(a+b+c)} \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}$

Chứng minh

Đặt $A = b+c+d$; $B = c+d+a$; $C = d+a+b$; $D = a+b+c$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2 > 0 \\ \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{D} > 0 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** rồi **AM - GM** và **CBS** ta có:

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) \geq \sqrt[4]{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{D}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ABCD}} \geq \frac{4}{A+B+C+D} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a+b+c+d} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}} = \frac{2}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 4. [PSFJIMO 36 – Canada 1995] Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 1$.

Chứng minh rằng: $S = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$

Chứng minh

Đặt $A = b+c+d$; $B = c+d+a$; $C = d+a+b$; $D = a+b+c$

$\Rightarrow A+B+C+D = (b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) + (a+b+c) = 3(a+b+c+d)$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + d^2}{2} + \frac{d^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + cd + da = 1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 \geq b^3 \geq c^3 \geq d^3 > 0 \\ \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{D} > 0 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^3}{A} + \frac{b^3}{B} + \frac{c^3}{C} + \frac{d^3}{D} \geq \frac{1}{4} (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) \\ &= \frac{1}{4} (a^2 a + b^2 b + c^2 c + d^2 d) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (a + b + c + d) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) \\ &\geq \frac{1}{16} \cdot (a + b + c + d) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) = \frac{1}{48} \cdot (A + B + C + D) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) \\ &\geq \frac{1}{48} \cdot 4 \cdot 4^4 \sqrt{A \cdot B \cdot C \cdot D} \cdot 4^4 \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{D}} = \frac{1}{3} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{2}$

Bài 5. Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Chứng minh

- **Bổ đề:** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad \forall x, y, z > 0$;
 $x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

• **Áp dụng:**

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$\begin{aligned} 3 \left(a^2 \frac{1}{b+c} + b^2 \frac{1}{c+a} + c^2 \frac{1}{a+b} \right) &\geq (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) \frac{9}{(b+c) + (c+a) + (a+b)} = \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a+b+c)} \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{2\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 6. [IMO36 – Canada 1995] Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Chứng minh

Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x \cdot y \cdot z = 1 \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (2)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \geq z > 0 \\ \frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y} > 0 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** và bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{1}{3}(x+y+z) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \\ &= \frac{1}{6}[(y+z) + (z+x) + (x+y)] \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{6} \cdot 3 \left[\frac{x}{y+z} \cdot (y+z) + \frac{y}{z+x} \cdot (z+x) + \frac{z}{x+y} \cdot (x+y) \right] = \frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{3 \cdot \sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức (2) đúng suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 7. Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$

• **Chứng minh:** Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{(b+c-a) + (c+a-b)}{2} = c \\ \times 0 < \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{(c+a-b) + (a+b-c)}{2} = a \\ 0 < \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{(a+b-c) + (b+c-a)}{2} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$$

• **Áp dụng:** Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a+b-c} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq \sqrt{c} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c-a}} \geq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a-b}} \geq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b-c}} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$VT \geq \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b-c}} \right) \geq$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 8. [CWMO 2005] Cho $a, b, c, d, e > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leq 1$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} \geq \frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-a}{(4+a)(4+a^2)} + \frac{1-b}{(4+b)(4+b^2)} + \frac{1-c}{(4+c)(4+c^2)} + \frac{1-d}{(4+d)(4+d^2)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq e \Rightarrow$

$$\frac{1-a}{4+a} \leq \frac{1-b}{4+b} \leq \frac{1-c}{4+c} \leq \frac{1-d}{4+d} \leq \frac{1-e}{4+e} \text{ và } \frac{1}{4+a^2} \leq \frac{1}{4+b^2} \leq \frac{1}{4+c^2} \leq \frac{1}{4+d^2} \leq \frac{1}{4+e^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{1-a}{(4+a)(4+a^2)} \geq \frac{1}{5} \sum_{cyc} \frac{1-a}{4+a} \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{4+a^2} = \frac{1}{5} \sum_{cyc} \frac{1}{4+a^2} \cdot \sum_{cyc} \left(\frac{5}{4+a} - 1 \right) = 0$$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=e=1$.

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c} + \frac{\sqrt{b^2+ca}}{c+a} + \frac{\sqrt{c^2+ab}}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}, \forall a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{cyc} \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{(b+c)[\sqrt{2(a^2+bc)} + b+c]} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ suy ra $(b+c)^2 \geq (c+a)^2 \geq (a+b)^2$

$$\text{và } 2a^2 - b^2 - c^2 \leq 2b^2 - c^2 - a^2 \leq 2c^2 - a^2 - b^2.$$

Ta có: $(b+c)\sqrt{a^2+bc} - (c+a)\sqrt{b^2+ca} = \frac{c(b-a)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)}{(b+c)\sqrt{a^2+bc} + (c+a)\sqrt{b^2+ca}} \geq 0$

và $(c+a)\sqrt{b^2+ca} - (a+b)\sqrt{c^2+ab} = \frac{a(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)}{(c+a)\sqrt{b^2+ca} + (a+b)\sqrt{c^2+ab}} \geq 0$

$$(b+c)\sqrt{2(a^2+bc)} + (b+c)^2 \geq (c+a)\sqrt{2(b^2+ca)} + (c+a)^2 \geq (a+b)\sqrt{2(c^2+ab)} + (a+b)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{(b+c)[\sqrt{2(a^2+bc)} + b+c]} \geq \frac{1}{3} \sum_{cyc} (2a^2 - b^2 - c^2) \sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)[\sqrt{2(a^2+bc)} + b+c]} = 0.$$

Bài 10. Chứng minh: $\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{a+c}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}\right), \forall a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

Biểu thức (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} - 2\sqrt{\frac{a}{b+c}}\right) + \left(\sqrt{\frac{a+c}{b}} - 2\sqrt{\frac{b}{c+a}}\right) + \left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} - 2\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c-2a}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{c+a-2b}{\sqrt{b(c+a)}} + \frac{a+b-2c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq 0 \quad (2)$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $b+c-2a \leq c+a-2b \leq a+b-2c$

Và $\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}} \leq \frac{1}{\sqrt{b(c+a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{c(a+b)}}$. Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$VT(2) \geq (b+c-2a+c+a-2b+a+b-2c) \left(\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{1}{\sqrt{b(c+a)}} + \frac{1}{\sqrt{c(a+b)}} \right) = 0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c > 0$

Bài 11. Cho a, b, c sao cho $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $\frac{ab+ac+2bc}{a^2+bc} + \frac{ab+bc+2ac}{b^2+ac} + \frac{ca+cb+2ab}{c^2+ab} \leq 6$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a(b+c-2a)}{a^2+bc} + \frac{b(a+c-2b)}{b^2+ac} + \frac{c(a+b-2c)}{c^2+ab} \leq 0 \quad (2)$$

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow b+c-2a \leq a+c-2b \leq b+c-2a$

Vì $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là độ dài của một tam giác, ta có $ab+ac-bc \geq ab+bc-ac \geq bc+ca-ab > 0$.

Dẫn đến $\frac{a}{a^2+bc} - \frac{b}{b^2+ac} = \frac{(a-b)(bc+ca-ab)}{(a^2+bc)(b^2+ac)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+bc} \geq \frac{b}{b^2+ac}$.

Tương tự, ta có $\frac{a}{a^2+bc} \geq \frac{b}{b^2+ac} \geq \frac{c}{c^2+ab}$. Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* ta có :

$$VT(2) \leq (b+c-2a+c+a-2b+a+b-2c) \left(\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \right) = 0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh $\frac{1}{c^2+a+b} + \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+a+c} \leq 1$ (1)

Chứng minh

Ta có : $\frac{1}{c^2+a+b} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{c^2-c+3} - \frac{1}{3} = \frac{c(1-c)}{3(c^2-c+3)}$. Tương tự và suy ra:

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{a(a-1)}{a^2-a+3} + \frac{b(b-1)}{b^2-b+3} + \frac{c(c-1)}{c^2-c+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} + \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} \geq 0$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, thì $a-1 \geq b-1 \geq c-1$

$$\text{Từ } a+b+c=3 \text{ suy ra } ab, bc, ca \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} \geq \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} \geq \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* ta có :

$$\frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} + \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} \geq (a-1+b-1+c-1) \left(\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} + \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} + \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}} \right) = 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{b^2-ca}{c^2+a^2+2b^2} + \frac{c^2-ab}{a^2+b^2+2c^2} \geq 0, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức tổng quát hơn với mọi $k \leq 2$

$$\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{b^2-ca}{c^2+a^2+kb^2} + \frac{c^2-ab}{a^2+b^2+kc^2} \geq 0 \quad (1)$$

Thật vậy, nhân thêm các hệ số tương ứng vào mỗi phân số ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a^2-bc)(b+c)}{(b^2+c^2+ka^2)(b+c)} + \frac{(b^2-ca)(c+a)}{(c^2+a^2+kb^2)(c+a)} + \frac{(c^2-ab)(a+b)}{(a^2+b^2+kc^2)(a+b)} \geq 0 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, thì

$$(a^2-bc)(b+c) - (b^2-ca)(c+a) = (ab+c^2)(a-b) + c(a^2-b^2) \geq 0$$

$$(b^2+c^2+ka^2)(b+c) - (c^2+a^2+kb^2)(c+a) = (b-a)(a^2+b^2+c^2 - (k-1)(ab+bc+ca)) \leq 0$$

Tương tự, ta có: $(a^2 - bc)(b + c) \geq (b^2 - ca)(c + a) \geq (c^2 - ab)(a + b)$

$$\text{và } \frac{1}{(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c)} \geq \frac{1}{(c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)} \geq \frac{1}{(a^2 + b^2 + kc^2)(a + b)} \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\text{VT (2)} \geq [(a^2 - bc)(b + c) + (b^2 - ca)(c + a) + (c^2 - ab)(a + b)]$$

$$\times \left[\frac{1}{(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c)} + \frac{1}{(c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)} + \frac{1}{(a^2 + b^2 + kc^2)(a + b)} \right] = 0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \geq 0$

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$2 \leq \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ca} \leq 3$$

Chứng minh

• **Bước 1: Chứng minh** $\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ca} \geq 2$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} = \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} = 2$$

• **Bước 2: Chứng minh** $\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ca} \leq 3$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} - 1 \right] \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(c^2 - ab)(a+b)}{(a^2 + b^2 + c^2 + ab)(a+b)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, đặt $u = a^2 + b^2 + c^2$.

Ta sẽ chứng minh:

$$(a^2 - bc)(b + c) \geq (b^2 - ca)(c + a) \geq (c^2 - ab)(a + b)$$

$$(u + bc)(b + c) \leq (u + ca)(c + a) \leq (u + ab)(a + b)$$

$$\text{Thật vậy, ta có: } (a^2 - bc)(b + c) - (b^2 - ca)(c + a) = (c^2 + ab)(a - b) + 2c(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$(b^2 - ca)(c + a) - (c^2 - ab)(a + b) = (a^2 + bc)(b - c) + 2a(b^2 - c^2) \geq 0$$

$$\text{và } (u + ca)(c + a) - (u + bc)(b + c) = (a - b)[u + c^2 + c(a + b)] \geq 0$$

$$(u + ab)(a + b) - (u + ca)(c + a) = (b - c)[u + a^2 + a(b + c)] \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** và chú ý $\sum_{\text{cyc}} (a^2 - bc)(b + c) = 0$ ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} \geq \frac{1}{3} \cdot \sum_{\text{cyc}} (c^2 - ab)(a+b) \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + ab)(a+b)} = 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét: Phép biến đổi: $\sum_{\text{cyc}} \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(c^2 - ab)(a+b)}{(a^2 + b^2 + c^2 + ab)(a+b)} \geq 0$

chính là điểm mấu chốt của chứng minh vì khi đó chúng ta mới tạo ra hai dãy có tính sắp thứ tự.

Bài 15. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - bc}{3a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{3b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{3c^2 + a^2 + b^2} \leq 0$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

• **Chứng minh:**

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) = a(b + c - a) + b(c + a - b) + c(a + b - c) > 0$$

• **Áp dụng:** Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Tương tự như bài 14, ta có: $(a^2 - bc)(b + c) \geq (b^2 - ca)(c + a) \geq (c^2 - ab)(a + b)$

Để ý rằng

$$(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c) - (3b^2 + c^2 + a^2)(c + a) = (a - b)[2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)] \geq 0$$

Tương tự ta có: $(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c) \geq (3b^2 + c^2 + a^2)(c + a) \geq (3c^2 + a^2 + b^2)(a + b)$

Sử dụng $\sum_{\text{cyc}} (a^2 - bc)(b + c) = 0$ và bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 - bc}{3a^2 + b^2 + c^2} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(a^2 - bc)(b + c)}{(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c)} \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - bc)(b + c) \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(3a^2 + b^2 + c^2)(b + c)} = 0 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 16. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2}{3}(ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{bc + a(b+c)}{(b+c)^2} = 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{(b+c)^2} + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq 2 \sum_{cyc} \frac{bc}{(b+c)^2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, thì

$$ab+ac-2bc \geq bc+ba-2ca \geq ca+cb-2ab \text{ và } \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{3} \left[\sum_{cyc} (ab+ac-2bc) \right] \left[\sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2} \right] = 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét. Ta đã biết bất đẳng thức **Nesbitt** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ và **Iran 1996**

$$(ab+bc+ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

Như vậy bất đẳng thức trên chính là một sự làm mạnh của bất đẳng thức **Nesbitt**.

Bài 17. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

Chứng minh rằng $2(a+b+c+d) \geq \sqrt{3a^2+4} + \sqrt{3b^2+4} + \sqrt{3c^2+4} + \sqrt{3d^2+4}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a - \sqrt{3a^2+4}) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2-4}{2a+\sqrt{3a^2+4}} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(a - \frac{4}{a}\right) \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d > 0 \Rightarrow a - \frac{4}{a} \geq b - \frac{4}{b} \geq c - \frac{4}{c} \geq d - \frac{4}{d}$

$$\text{và } \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}} \geq \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{b^2}}} \geq \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{c^2}}} \geq \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{d^2}}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\sum_{cyc} \left(a - \frac{4}{a}\right) \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}} \geq \frac{1}{4} \sum_{cyc} \left(a - \frac{4}{a}\right) \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}} = 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=2$.

Bài 18. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}$ (1)

Chứng minh

Đặt $x=bc, y=ca, z=ab$, khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \leq \frac{27}{8} \Leftrightarrow \frac{1-9x}{1-x} + \frac{1-9y}{1-y} + \frac{1-9z}{1-z} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-9x)(2+3x)}{(1-x)(2+3x)} + \frac{(1-9y)(2+3y)}{(1-y)(2+3y)} + \frac{(1-9z)(2+3z)}{(1-z)(2+3z)} \geq 0 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow x \leq y \leq z$. Khi đó

$$(1-9x)(2+3x) - (1-9y)(2+3y) = (y-x)(15+27x+27y) \geq 0$$

$$(1-9y)(2+3y) - (1-9z)(2+3z) = (z-y)(15+27y+27z) \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-9x)(2+3x) \geq (1-9y)(2+3y) \geq (1-9z)(2+3z)$$

Do $a+b+c=1$, nên ta có $z+y=a(b+c) \leq \frac{1}{4}, z+x \leq \frac{1}{4}, x+y \leq \frac{1}{4}$. Từ đó suy ra

$$(1-x)(2+3x) - (1-y)(2+3y) = (x-y)(1-3x-3y) \leq 0$$

$$(1-y)(2+3y) - (1-z)(2+3z) = (y-z)(1-3y-3z) \leq 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(2+3x) \leq (1-y)(2+3y) \leq (1-z)(2+3z).$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\frac{(1-9x)(2+3x)}{(1-x)(2+3x)} + \frac{(1-9y)(2+3y)}{(1-y)(2+3y)} + \frac{(1-9z)(2+3z)}{(1-z)(2+3z)} \geq \left(\sum_{cyc} (1-9x)(2+3x) \right) \sum_{cyc} \frac{1}{(1-x)(2+3x)}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh } \sum_{cyc} (1-9x)(2+3x) \geq 0 \Leftrightarrow 6-15(x+y+z)-27(x^2+y^2+z^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5(ab+bc+ca) + 9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 5(ab+bc+ca) + 9(ab+bc+ca)^2 \leq 18abc + 2$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$ và $a+b+c=1$ ta có:

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq abc \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) \leq 9abc + 1.$$

$$\text{Mặt khác, } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$5(ab+bc+ca) + 9(ab+bc+ca)^2 \leq 8(ab+bc+ca) \leq 18abc + 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 19. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1$

Chứng minh

Đặt $x = abc, y = bcd, z = cda, t = dab$, khi đó bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{1}{5-x} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5-x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1-x}{5-x} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(1-x)(2+x)}{(5-x)(2+x)} \geq 0$$

Đề ý $x + y = bc(a+d) \leq \left(\frac{b+c+a+d}{3} \right)^3 = \frac{64}{27} < 3$ từ đó suy ra nếu $x \geq y$ thì xét hiệu

$$(1-x)(2+x) - (1-y)(2+y) = (y-x)(x+y+1) \leq 0 \Rightarrow (1-x)(2+x) \leq (1-y)(2+y)$$

$$\frac{1}{(5-x)(2+x)} - \frac{1}{(5-y)(2+y)} = \frac{(x-y)(x+y-5)}{(5-x)(5-y)(2+x)(2+y)} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{(5-x)(2+x)} \leq \frac{1}{(5-y)(2+y)}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z \geq t$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Chebyshev

$$\text{cho } \begin{cases} (1-x)(2+x) \leq (1-y)(2+y) \leq (1-z)(2+z) \leq (1-t)(2+t) \\ \frac{1}{(5-x)(2+x)} \leq \frac{1}{(5-y)(2+y)} \leq \frac{1}{(5-z)(2+z)} \leq \frac{1}{(5-t)(2+t)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \sum_{cyc} \frac{(1-x)(2+x)}{(5-x)(2+x)} \geq \frac{1}{4} \cdot \left[\sum_{cyc} (1-x)(2+x) \right] \left[\sum_{cyc} \frac{1}{(5-x)(2+x)} \right]$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \sum_{cyc} (1-x)(2+x) = 8 - x - y - z - t - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + abc + bcd + cda + dab \leq 8$$

Bất đẳng thức cuối có thể chứng minh bằng phương pháp dồn biến hoặc EV.

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c} + \frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x = \sqrt{b+c}, y = \sqrt{c+a}, z = \sqrt{a+b}$, khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{x}{y^2+z^2-x^2} + \frac{y}{z^2+x^2-y^2} + \frac{z}{x^2+y^2-z^2} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow x \geq y \geq z$, khi đó

$$x(y^2+z^2-x^2) - y(z^2+x^2-y^2) = (y-x)(2xy+x^2+y^2-z^2) \leq 0$$

$$y(x^2+z^2-y^2) - z(x^2+y^2-z^2) = (z-y)(2yz+y^2+z^2-x^2) \leq 0$$

$$\Rightarrow x(y^2 + z^2 - x^2) \leq y(z^2 + x^2 - y^2) \leq z(x^2 + y^2 - z^2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có $VT(2) \geq \frac{1}{3} \left(\sum_{cyc} x^2 \right) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{x(y^2 + z^2 - x^2)} \right)$ (3)

Mặt khác, theo một kết quả quen biết thì

$$(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(x^2 + z^2 - y^2) \leq x^2 y^2 z^2$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x(y^2 + z^2 - x^2)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(x^2 + z^2 - y^2)}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(xyz)^2}} = \frac{3}{xyz} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có: $\sum_{cyc} \frac{x}{y^2 + z^2 - x^2} \geq \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{3}{xyz} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \Rightarrow (2)$ đúng

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 21. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác, thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{b+c-a}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c^2+ab}} \geq 2$ (1)

Chứng minh

Ta có $\left(\sqrt{\frac{b+c-a}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c^2+ab}} \right)^2 \geq \frac{b+c-a}{a^2+bc} + \frac{c+a-b}{b^2+ca} + \frac{a+b-c}{c^2+ab}$ (2)

Ta sẽ chứng minh $\frac{b+c-a}{a^2+bc} + \frac{c+a-b}{b^2+ca} + \frac{a+b-c}{c^2+ab} \geq 4 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{a^2+bc} \geq 4$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2+bc} + 1 \right] \geq 7 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+bc} \geq 7.$$

Ta sẽ chứng minh $\sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+bc} \geq 1$ (3) và $\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} \geq 6$ hay

$$\sum_{cyc} \left[\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} - 2 \right] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2+bc} \geq 0 \quad (4)$$

Ta chứng minh (3) bằng bất đẳng thức **CBS**. Thật vậy ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+bc} \geq \sum_{cyc} \frac{bc}{2a^2+bc} \geq \frac{(bc+ca+ab)^2}{bc(2a^2+bc)+ca(2b^2+ca)+ab(2c^2+ab)} = 1$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ suy ra $\begin{cases} b^2+c^2-2a^2 \leq c^2+a^2-2b^2 \leq a^2+b^2-2c^2 \\ \frac{1}{a^2+bc} \leq \frac{1}{b^2+ca} \leq \frac{1}{c^2+ab} \end{cases}$

Ta chứng minh (4) bằng bất đẳng thức **Chebyshev**. Thật vậy ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{a^2 + bc} \geq \frac{1}{3} \sum_{cyc} (b^2 + c^2 - 2a^2) \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + bc} = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + bc} = 0$$

Do (3) và (4) đúng nên (2) đúng suy ra (1) đúng.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow (a, b, c) \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Bài 22. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + 3abc}{(b+c)^3} + \frac{b^3 + 3abc}{(c+a)^3} + \frac{c^3 + 3abc}{(a+b)^3} \geq \frac{3}{2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2} \quad \text{và} \quad \frac{a^3 + 3abc}{b+c} \geq \frac{b^3 + 3abc}{c+a} \geq \frac{c^3 + 3abc}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a^3 + 3abc}{(b+c)^3} = \sum_{cyc} \left(\frac{1}{(b+c)^2} \cdot \frac{a^3 + 3abc}{b+c} \right) \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2} \right) \left(\sum_{cyc} \frac{a^3 + 3abc}{b+c} \right)$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho đúng nếu ta chứng minh được hai bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)} \quad (1)$$

$$\frac{a^3 + 3abc}{b+c} + \frac{b^3 + 3abc}{c+a} + \frac{c^3 + 3abc}{a+b} \geq 2(ab+bc+ca) \quad (2)$$

$$\text{Thật vậy, } (1) \Leftrightarrow \sum_{sym} (a^5b - a^4b^2) + 3 \sum_{sym} (a^5b - a^3b^3) + 2abc \left(\sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a+b) \right) \geq 0$$

luôn đúng theo **AM - GM** và **Schur**.

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} + \sum_{cyc} \frac{bc(b-c)^2}{(a+b)(a+c)} \geq 0$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh } \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{b(b-c)(b-a)}{c+a} + \frac{c(c-a)(c-b)}{a+b} \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Do } a \geq b \geq c \text{ nên } \frac{c(c-a)(c-b)}{a+b} \geq 0, \text{ suy ra (3) đúng nếu ta có}$$

$$\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{b(b-c)(b-a)}{c+a} \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 (a^2 + ab + b^2 - c^2) \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 23. Cho $x_i \in (0, 1), i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_n}} \geq \frac{(\sqrt{x_1^2 - x_1^3} + \sqrt{x_2^2 - x_2^3} + \dots + \sqrt{x_n^2 - x_n^3})^2}{\sqrt{(1-x_1)^3} + \sqrt{(1-x_2)^3} + \dots + \sqrt{(1-x_n)^3}}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, suy ra $\sqrt{1-x_1} \leq \sqrt{1-x_2} \leq \dots \leq \sqrt{1-x_n}$.

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\sqrt{x_1^2 - x_1^3} + \sqrt{x_2^2 - x_2^3} + \dots + \sqrt{x_n^2 - x_n^3} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) (\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_n})$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 - x_i^3} \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i} \right)^2 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản $\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^k$ ta được

$$\frac{\sqrt{(1-x_1)^3} + \sqrt{(1-x_2)^3} + \dots + \sqrt{(1-x_n)^3}}{n} \geq \left(\frac{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_n}}{n} \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-x_1)^3} + \sqrt{(1-x_2)^3} + \dots + \sqrt{(1-x_n)^3}} \leq \frac{n^2}{(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_n})^3} \quad (2)$$

Nhân theo vế (1) và (2) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Bài 24. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ và hai số $\alpha, \beta > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \dots + a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta} \geq \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}$$

Chứng minh

Giả sử $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow \begin{cases} 0 < a_1^\alpha \leq a_2^\alpha \leq \dots \leq a_n^\alpha \\ 0 < a_1^\beta \leq a_2^\beta \leq \dots \leq a_n^\beta \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$n [a_1^\alpha \cdot a_1^\beta + a_2^\alpha \cdot a_2^\beta + \dots + a_n^\alpha \cdot a_n^\beta] \geq [a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha] [a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta]$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \dots + a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta} \geq \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}$$

Bài 25. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh: $(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} \quad (1)$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \leq \ln(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n})$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n) \leq a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n) \leq n (a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0 \Rightarrow \ln a_1 \geq \ln a_2 \geq \dots \geq \ln a_n$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n) \leq n(a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n)$$

Bài 26. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a_1}{3-2a_1} + \frac{a_2}{3-2a_2} + \dots + \frac{a_n}{3-2a_n} \geq \frac{n}{3n-2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ suy ra $\frac{1}{3-2a_1} \geq \frac{1}{3-2a_2} \geq \dots \geq \frac{1}{3-2a_n}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** rồi bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{3-2a_1} + \frac{1}{3-2a_2} + \dots + \frac{1}{3-2a_n} \right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{3-2a_1} \cdot \frac{1}{3-2a_2} \dots \frac{1}{3-2a_n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{(3-2a_1)(3-2a_2)\dots(3-2a_n)}} \geq \frac{n}{(3-2a_1) + (3-2a_2) + \dots + (3-2a_n)} = \frac{n}{3n-2} \end{aligned}$$

Bài 27. Cho đa giác n cạnh có độ dài tương ứng là $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ và chu vi P thỏa mãn

$$\frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \dots + \frac{1}{1+a_n^2} = 1. \text{ Chứng minh: } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{P}{n-1} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow P = \sum_{i=1}^n a_i \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1+a_1^2}{a_1} + \frac{1+a_2^2}{a_2} + \dots + \frac{1+a_n^2}{a_n} \geq n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\left(\frac{1+a_1^2}{a_1} + \frac{1+a_2^2}{a_2} + \dots + \frac{1+a_n^2}{a_n} \right) \left(\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2} \right) \geq n^2 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{a_2} \leq \dots \leq \frac{1}{a_n}$

Ta có $\frac{a_k}{1+a_k^2} - \frac{a_{k+1}}{1+a_{k+1}^2} = \frac{(a_k - a_{k+1})(1 - a_k a_{k+1})}{(1+a_k^2)(1+a_{k+1}^2)} \leq 0$, suy ra $\frac{a_1}{1+a_1^2} \leq \frac{a_2}{1+a_2^2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{1+a_n^2}$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2} \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq n \left(\frac{a_1}{1+a_1^2} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{1+a_2^2} \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2} \cdot \frac{1}{a_n} \right) \\ &= n \left(\frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \dots + \frac{1}{1+a_n^2} \right) = n \Rightarrow \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra
$$\left(\frac{1+a_1^2}{a_1} + \frac{1+a_2^2}{a_2} + \dots + \frac{1+a_n^2}{a_n} \right) \geq \frac{n^2}{\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2}} \geq$$
$$\geq \frac{n^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{P}{n-1}$$

Bài 28. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ($n \geq 2$) thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$

Chứng minh rằng $S = \frac{1}{n-1+a_1^2} + \frac{1}{n-1+a_2^2} + \dots + \frac{1}{n-1+a_n^2} \leq 1$ (1)

Chứng minh

Chúng ta xét 2 trường hợp sau đây:

• **Trường hợp 1:** Nếu tồn tại $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($i \neq j$) sao cho $a_i a_j \geq n-1$, giả sử $a_1 a_2 \geq n-1$. Khi đó

$$\frac{1}{n-1+a_1^2} + \frac{1}{n-1+a_2^2} = \frac{2(n-1)+a_1^2+a_2^2}{(n-1)^2+(a_1 a_2)^2+(n-1)(a_1^2+a_2^2)} \leq \frac{2(n-1)+a_1^2+a_2^2}{2(n-1)^2+(n-1)(a_1^2+a_2^2)} = \frac{1}{n-1}$$
$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{n-1} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{n-1+a_i^2} \leq \frac{1}{n-1} + (n-2) \cdot \frac{1}{n-1} = 1$$

• **Trường hợp 2:** $a_i a_j \leq n-1$ với mọi $i \neq j$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1+a_1^2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1+a_2^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1+a_n^2} \right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2-1}{n-1+a_1^2} + \frac{a_2^2-1}{n-1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n^2-1}{n-1+a_n^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{a_i} \right) \frac{a_i}{n-1+a_i^2} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \Rightarrow a_1 - \frac{1}{a_1} \geq a_2 - \frac{1}{a_2} \geq \dots \geq a_n - \frac{1}{a_n}$. Ta có:

$$\frac{a_i}{n-1+a_i^2} - \frac{a_j}{n-1+a_j^2} = \frac{(n-1-a_i a_j)(a_i - a_j)}{(n-1)^2 + (a_i a_j)^2 + (n-1)(a_i^2 + a_j^2)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_i}{n-1+a_i^2} - \frac{a_j}{n-1+a_j^2} \right) (a_i - a_j) \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1}{n-1+a_1^2} \geq \frac{a_2}{n-1+a_2^2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{n-1+a_n^2}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{a_i} \right) \frac{a_i}{n-1+a_i^2} \geq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{a_i} \right) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n-1+a_i^2} = 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c . Chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{a^n}{b+c-a} \geq \frac{(a+b+c)^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Bài 2. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c . Chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{a^x}{(b+c-a)^y} \geq a^{x-y} + b^{x-y} + c^{x-y}$$

Bài 3. Chứng minh $\sqrt{a^2+8bc} + \sqrt{b^2+8ca} + \sqrt{c^2+8ab} \leq 3(a+b+c)$, $\forall a, b, c \geq 0$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=4 \end{cases}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a+b+c+d=4 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{11+a^2} + \frac{1}{11+b^2} + \frac{1}{11+c^2} + \frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 1$. Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sum_{cyc} \frac{a_1^3}{S-a_1} \geq \frac{1}{n-1} \text{ và } \sum_{cyc} \frac{a_1^2}{S-a_1} \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sum_{cyc} \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} \geq \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}$

Bài 9. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ với $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sum_{j \neq k}^n \frac{1}{a_j} + \prod_{j=1}^n a_j} \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k}$

Bài 10. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ($n \geq 2$) thỏa mãn $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \geq (n-1) \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)$$

Bài 11. Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \text{và} \quad b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

Chứng minh rằng

$$a_1 b_2 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Nhìn lại chương I

Có thể các bạn cho rằng bây giờ vẫn còn là quá sớm để có một bản tổng kết nhỏ. Tuy nhiên chúng tôi nghĩ việc tổng kết và nhìn nhận lại những điều đã làm được nên được thực hiện mọi lúc mọi nơi. Bởi vì làm như vậy không chỉ giúp chúng ta có cái nhìn tổng quát và chính xác hơn về những vấn đề đã đặt ra và giải quyết được mà còn góp phần định hướng những công việc tiếp theo. Hơn nữa, vì đây là chương mở đầu dành cho một lớp rộng các bạn độc giả cho nên những chỉ dẫn mang tính chi tiết là rất cần thiết.

Lưu ý rằng như đã nói, trong chương này chúng ta đã làm quen với 5 bất đẳng thức cổ điển cùng những ứng dụng đẹp đẽ của chúng. Mặt khác do mối liên quan - *sự tương đương* - đặc biệt giữa chúng nên nhờ sự đơn giản của mình, bất đẳng thức $AM - GM$ đã được tập trung trình bày trong hơn một nửa số trang sách. Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức này được đưa ra trong mục 1.1. Các kỹ thuật chuyển từ trung bình cộng sang trung bình nhân và từ trung bình nhân sang trung bình cộng được trình bày trong mục 1.2.I và 1.2.II. Trong mục 1.2.III chúng tôi đã đưa ra một ví dụ chó thấy tại sao chỉ nên xét các bất đẳng thức đồng bậc trên $\mathbb{R}^+$. Mục 1.2.IV và đề cập khả năng *đồng bậc hóa* bằng cách sử dụng thêm các điều kiện đặc biệt với các biên, ý tưởng này được triển khai chi tiết hơn với kỹ thuật chuẩn hóa được phân tích trong 1.2.VI. Sự phối hợp giữa các bất đẳng thức ngược chiều, các bất đẳng thức đồng bậc chứa căn thức và các bất đẳng thức không đồng bậc lần lượt được khảo sát trong các mục 1.2.V, 1.2.VII, 1.2.VIII, 1.2.IX. Mục 1.2.X điểm rơi không đối xứng trong bất đẳng thức $AM - GM$ là khởi điểm cho phương pháp cân bằng hệ số (mục 1.2.XI). Nội dung chính về các bất đẳng thức $AM - GM$ kết thúc bằng kỹ thuật tách phân thức âm và đánh giá mẫu số ở mục 1.2.XII. Kỹ thuật rất độc đáo này giúp cho việc sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ trở nên linh hoạt và mang tính nghệ thuật hơn rất nhiều.

Tiếp theo đó các mục 2.1 và 3.1 phát biểu và chứng minh bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* và bất đẳng thức *Holder*, trong đó bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* là trường hợp riêng của bất đẳng thức *Holder*, tuy nhiên nhờ dạng phát biểu rất *giản dị*, trong nhiều trường hợp chúng ta không cần dùng tới bất đẳng thức *Holder*, mà chỉ cần sử dụng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* là đủ. Cũng với hai bất đẳng thức này, các bất đẳng thức với điểm rơi đối xứng tiếp tục được giải quyết trong các mục 2.2.I và 3.2.I. Nội dung đặc sắc nhất về ứng dụng của 2 bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* và *Holder* là sử dụng điểm rơi với các biểu thức chứa biến. Các mục 2.2.II, 2.2.III và 3.2.II đưa

chúng ta tới gần hơn với một phương pháp cân bằng hệ số đại số tổng quát, hơn nữa, chính những ý tưởng này sẽ được tiếp nối một cách giải tích hơn trong chương III, nơi các bạn có thể làm quen với phương pháp nhân tử *Lagrange* tuyệt đẹp.

Trong chương này chúng ta cũng đã làm quen với các bất đẳng thức *Minkowski 1* và *2*. Các bất đẳng thức này cũng tương đương với hai bất đẳng thức *AM – GM*, *Cauchy – Schwarz*. Tuy nhiên, khả năng áp dụng của nó khá hạn chế so với hai bất đẳng thức kia, sự hạn chế này bắt nguồn từ hình thức hơi *kì lạ* của nó. Thực ra có hình thức như vậy là vì bất đẳng thức *Minkowski* vốn được đặt ra để phục vụ cho việc xây dựng các chuẩn và các không gian hình học *Minkowski* trong toán học hiện đại, nơi mà sức mạnh của bất đẳng thức này được phát huy một cách triệt để.

Chú ý rằng do các bất đẳng thức nêu trên đều được phát biểu một cách đối xứng, nên khi áp dụng với các bất đẳng thức hoán vị hoặc bất đẳng thức bất đối xứng thì chúng ta sẽ gặp rất nhiều khó khăn, khó khăn chính là ở việc dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Phương pháp chọn điểm rơi và cân bằng hệ số đã cung cấp một giải pháp tốt để xử lý vấn đề này một cách *đối xứng*. Không giống như vậy, bất đẳng thức *Chebyshev* cho một cách nhìn khác về việc giải quyết các bất đẳng thức đối xứng, theo cách này chúng ta sẽ không cần quan tâm đến tính *bình đẳng* giữa các biến, mà sẽ chủ động tìm cách *sắp xếp* lại các biến theo cách thích hợp với dấu đẳng thức trước khi chứng minh. Ý tưởng này cũng đồng thời mở ra một hướng đi mới để tấn công các bất đẳng thức hoán vị, hướng đi này sẽ được tiếp tục tìm tòi và hoàn thiện hơn trong chương II.

CHƯƠNG II: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CẬN ĐẠI

Tiếp nối chương I: “*Những viên kim cương trong bất đẳng thức cổ điển*” chúng ta sẽ làm quen với chương II: “*Những viên kim cương trong bất đẳng thức cận đại*”. Trong chương này chúng ta sẽ được giới thiệu ba viên kim cương của bất đẳng thức cận đại. Đó là các viên kim cương của bất đẳng thức *hoán vị* (§6), các bất đẳng thức *Schur* (§7) và các bất đẳng thức đối xứng *Muirhead* (§8). Một điều dễ nhận thấy chúng ta không có tên gọi riêng của một cá nhân thay thế cho tên gọi viên kim cương của bất đẳng thức *hoán vị*. Điều này có thể hiểu là có rất nhiều người đã chứng minh các bài toán riêng lẻ dưới dạng không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ hoặc tổng quát hơn $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ sau đó hệ thống hóa thành cấu trúc đơn giản rồi bồi đắp dần thêm các tính chất. Cuối cùng vì là tài sản tri thức của nhân dân nên tên gọi được đặt theo bản chất toán học của bất đẳng thức. Các nội dung quan trọng cần nắm được trong chương này là:

1. Bất đẳng thức hoán vị: Có rất nhiều sách trong và ngoài nước viết về bất đẳng thức hoán vị nhưng có lẽ chưa có cuốn sách nào đề cập bất đẳng thức này chi tiết, tỉ mỉ với các ví dụ minh họa rất phong phú, đa dạng. Chúng ta có thể cảm nhận sự cầu toàn của tác giả khi dẫn nhập bất đẳng thức bởi các ví dụ đầu tiên sắp xếp trình tự tối ưu diễn ra trong đời sống hàng ngày. Có thể thấy ý nghĩa khái quát của vấn đề trong việc sắp xếp lắp ráp các chi tiết máy một cách tối ưu trong các mô hình sản xuất với hàng triệu chi tiết như sản xuất máy bay Boeing, Airbus, tàu con thoi. Tiếp theo lời dẫn nhập là phần giới thiệu chi tiết đi kèm với chứng minh, các bất đẳng thức hoán vị trên dãy số hữu hạn (6.II) trong các định lý mục II.1.1, II.1.2 và II.2. Mục 6.2.I giới thiệu với các bạn một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức hoán vị với các bài tập minh họa là các bất đẳng thức đại số và các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác. Các bạn có thể tự rèn luyện bằng các bài toán được đưa ra trong mục 6.2.II.

2. Bất đẳng thức Schur: Đây là một bất đẳng thức rất đơn giản nhưng lại là một công cụ hữu hiệu khi chứng minh các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị khó và rất khó. Điểm đặc biệt là bất đẳng thức Schur xảy ra dấu bằng tại 2 trạng thái: $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ nên toàn bộ các bất đẳng thức xảy ra dấu bằng tại 2 trạng thái trên đều không sử dụng được *AM – GM* (dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$) hoặc *CBS*. Các bất đẳng thức *Schur* và bất đẳng thức *Schur* suy rộng được trình bày chi tiết theo

các dạng trong các định lý mục 7.1. Sau khi làm quen với các dạng bất đẳng thức *Schur* các bạn sẽ được làm quen các kỹ thuật áp dụng bất đẳng thức *Schur* trong mục 7.2.

Ở mục 7.3. chúng tôi trình bày một phương pháp sử dụng bất đẳng thức *Schur* trong chứng minh bất đẳng thức ba biến đối xứng dựa trên phép biến đổi với các đa thức đối xứng *Viète*. Các bài tập tự giải có trong mục 7.3.IV.

3. Bất đẳng thức Muirhead: Bất đẳng thức *Muirhead* được ra đời vào đầu thế kỷ 20 nhưng chỉ được thực sự mọi người quan tâm việc ứng dụng của nó trong chứng minh bất đẳng thức khi Internet phát triển cùng với sự ra đời các website Toán học nổi tiếng trên thế giới. Sở dĩ bất đẳng thức *Muirhead* được chú ý muộn vì phạm vi của nó chủ yếu là công cụ để so sánh các đa thức đồng bậc nhưng việc chuyển đổi từ một bất đẳng thức đẹp đẽ (dạng phân thức thu gọn) về dạng đa thức công kênh nhiều số hạng là việc làm bất đắc dĩ mang tính chất thợ thủ công hơn là sự thông minh khéo léo. Tuy nhiên phải thừa nhận bất đẳng thức *Muirhead* là một công cụ mạnh hơn *AM – GM* bởi vì nó so sánh 2 cấu trúc liên kết cộng có cả 2 vế chứ không phải giữa một liên kết cộng (liên kết mạnh) với liên kết nhân (liên kết yếu). Với việc mã hóa trong ngôn ngữ kí hiệu thì chúng ta có thể dễ dàng chuyển đổi bất đẳng thức dạng phân thức sang dạng đa thức. Trong phần mở đầu §8.1 bất đẳng thức *Muirhead* được trình bày tỉ mỉ với các ví dụ và sơ đồ minh họa cùng với ý nghĩa của lược đồ *Young* và mối quan hệ giữa nhận biết bất đẳng thức đúng bằng *Muirhead* và chứng minh bằng *AM – GM*. Trong mục §8.2, các bạn được giới thiệu một số dạng ký hiệu và kỹ thuật biến đổi đưa về đa thức đối xứng dưới dạng ký hiệu. Tiếp đó là mối quan hệ giữa bất đẳng thức *Muirhead* với các bất đẳng thức *AM – GM*, *HOLDER*, *ASYM* và các bài tập minh họa. Đặc sắc nhất của phần này chính là kỹ thuật thêm biến và các ứng dụng đặc biệt là việc chứng minh hai bất đẳng thức *Suranyi* và *Vasile*. Phần cuối là sự sáng tạo bất đẳng thức bằng các phương pháp tương tự hóa, tổng quát hóa và đặc biệt hóa cùng với kỹ thuật thêm biến.

Như vậy, nội dung chương này mặc dù sẽ không quá dài, nhưng số lượng bài tập và tính toán là khá lớn. Vì vậy chúng tôi khuyên các bạn nên đọc một cách cẩn thận và từ tốn. Chậm mà chắc! Như thế mới có thể cảm nhận được hết cái hay của từng phương pháp. Chúc các bạn thành công!

§6. BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§6. 1. GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

I. NHỮNG VÍ DỤ TIÊU BIỂU TRONG ĐỜI SỐNG VỀ SẮP XẾP TRÌNH TỰ TỐI ƯU

Trong đời sống hàng ngày ta thường gặp những sự việc có nhiều phương án giải quyết mà đòi hỏi phải lựa chọn ra được phương án tối ưu. Ta xét hai ví dụ đơn giản mà tiêu biểu sau:

1. Ví dụ 1: *Sắp xếp trình tự bán hàng để tổng thời gian mua bán nhỏ nhất*

Tại một trạm bán xăng có 1 mô tô dung tích 8 lít với thời gian để bơm đầy xăng là 1 phút và 1 ô tô tải dung tích 100 lít với thời gian bơm đầy xăng là 10 phút. Khi đó ta có thể thực hiện việc bán xăng theo 1 trong 2 cách sau:

- **Cách 1:** Nếu để xe ô tô tải lấy xăng trước thì xe tải phải mất 10 phút để chờ bơm đầy xăng còn xe mô tô phải mất 10 phút chờ xe tải bơm đầy xăng cộng với 1 phút lấy xăng bằng 11 phút. Lúc đó tổng thời gian cả hai xe phải sử dụng để lấy đầy xăng là:

$$10 \text{ phút} + 11 \text{ phút} = 21 \text{ phút.}$$

- **Cách 2:** Nếu sắp xếp xe mô tô lấy xăng trước còn xe tải lấy xăng sau thì tổng cộng thời gian cả hai xe phải chờ và lấy xăng là 12 phút. Như vậy nếu thực hiện theo phương án 2 thì sẽ tiết kiệm được 9 phút so với phương án 1.

Từ ví dụ đơn giản này ta thấy khi số lượng mô tô, ô tô tăng gấp hàng ngàn, vạn lần thì việc sắp xếp trình tự lấy xăng sẽ tiết kiệm được rất nhiều thời gian. Ta sẽ gặp lại bài toán tổng quát này trong bài 19 ở phần III.

2. Ví dụ 2: *Phân phối các sản phẩm có tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất*

Giả sử Liên hiệp quốc cần viện trợ cho một số quốc gia, mỗi quốc gia đều nhận được 20 xe ô tô gồm 3 loại ô tô: Lexus, Toyota, Hyundai với số lượng các loại ô tô này là một hoán vị của bộ số (5, 7, 8). Trị giá của các xe Lexus là 100.000 USD/chiếc; Toyota là 50.000 USD/1chiếc; Hyundai là 30.000 USD/chiếc. Khi đó các nước được ưu ái nhất sẽ nhận được giá trị viện trợ lớn nhất gồm: 8 chiếc xe Lexus, 7 chiếc xe Toyota và 5 chiếc xe Hyundai với tổng giá trị:

$$8 \times \text{US\$}100,000 + 7 \times \text{US\$}50,000 + 5 \times \text{US\$}30,000 = \text{US\$}1,300,000.$$

- **Kết luận:** Những ý tưởng trên rất gần gũi với việc chúng ta nghiên cứu các bất đẳng thức hoán vị dưới đây:

II. BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ TRÊN DÃY SỐ HỮU HẠN

1. Đặt vấn đề:

Vì mọi dãy số hữu hạn đều có thể được đánh số để sắp xếp nó thành 1 dãy đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm nên có thể chuyển việc nghiên cứu các bất đẳng thức hoán vị trên dãy số hữu hạn thành việc nghiên cứu các bất đẳng thức hoán vị trên các dãy số đơn điệu. Chúng ta sẽ bắt đầu tiếp cận với bất đẳng thức hoán vị bởi 2 định lý sau đây:

1. Định lý 1: Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự cùng chiều nhau chẳng hạn là hai dãy đơn điệu tăng $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là 1 hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, khi đó ta có $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$

Chứng minh

Cách 1: Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp

- Với $n = 2$: Xét hai dãy số gồm 2 phần tử $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq b_2 \end{cases}$

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_1, b_2)$ thì $a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1 t_1 + a_2 t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_2, b_1)$ thì $a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 t_1 + a_2 t_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 t_1 + a_2 t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

- Giả sử bất đẳng thức đúng đến $(n-1)$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n .

$$\text{Đặt } b_1 = t_k \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq a_k \\ t_k = b_1 \leq t_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 t_1 + a_k t_k = a_1 t_1 + a_k b_1 \leq a_1 b_1 + a_k t_1 \quad (1)$$

Sử dụng giả thiết quy nạp là bất đẳng thức đúng với $(n-1)$ ta có

$$a_2 t_2 + \dots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \dots + a_n t_n \leq a_2 b_2 + \dots + a_{k-1} b_{k-1} + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \dots + a_n b_n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_k t_k + \dots + a_n t_n \leq$

$$\leq a_1 b_1 + [a_2 t_2 + \dots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \dots + a_n t_n] \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + \dots + a_n b_n$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức đúng $\forall n$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} S = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n \\ S^* = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{cases}$

Giả sử i là chỉ số nhỏ nhất sao cho $t_i \neq b_i$ tức là $t_k = b_k \quad \forall k = \overline{1, i-1}$

Do $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, nên $t_i > b_i$. Mặt khác $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là 1 hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nên tồn tại $j > i$ sao cho $t_j = b_i$.

Xét hoán vị $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ được xác định theo quy tắc

$$\begin{cases} t'_i = t_j \\ t'_j = t_i \\ t'_k = t_k \quad \forall k \neq i, j \end{cases}$$

Từ $t_i > b_i$ và $t_j = b_j$ suy ra $t_i > t_j$.

Đặt $S' = a_1 t'_1 + a_2 t'_2 + \dots + a_i t'_i + \dots + a_j t'_j + \dots + a_n t'_n$

Khi đó theo cách xây dựng hoán vị $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ ta có

$$S - S' = a_i (t_i - t'_i) + a_j (t_j - t'_j) = a_i (t_i - t_j) - a_j (t_i - t_j) = (a_i - a_j) (t_i - t_j) \leq 0 \Rightarrow S \leq S'$$

Nếu $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) \neq (b_1, b_2, \dots, b_n)$ thì ta lại tiếp tục lặp lại quá trình trên và chỉ sau nhiều nhất $(n-1)$ bước ta có điều phải chứng minh $S \leq S^*$.

2. Định lý 2: Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự ngược chiều nhau chẳng hạn là

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}. \text{ Gọi } (t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ là 1 hoán vị tùy ý của } (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ khi đó ta có}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n$$

Chứng minh

Cách 1: Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp

• Với $n = 2$: Xét hai dãy số gồm 2 phần tử $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \geq b_2 \end{cases}$

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_1, b_2)$ thì $a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1 t_1 + a_2 t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_2, b_1)$ thì $a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 t_1 + a_2 t_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leq 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

• Giả sử bất đẳng thức đúng đến $(n-1)$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n .

$$\text{Đặt } b_1 = t_k \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq a_k \\ t_k = b_1 \geq t_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 t_1 + a_k t_k = a_1 t_1 + a_k b_1 \geq a_1 b_1 + a_k t_1 \quad (1)$$

Sử dụng giả thiết quy nạp là bất đẳng thức đúng với $(n-1)$ ta có

$$\begin{aligned} & a_2 t_2 + \dots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \dots + a_n t_n \geq \\ & \geq a_2 b_2 + \dots + a_{k-1} b_{k-1} + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \dots + a_n b_n \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_k t_k + \dots + a_n t_n \geq$

$$\geq a_1 b_1 + [a_2 t_2 + \dots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \dots + a_n t_n] \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + \dots + a_n b_n$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức đúng $\forall n$.

Cách 2: $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ -b_1 \leq -b_2 \leq \dots \leq -b_n \end{cases}$. Theo kết quả của định lý 1 suy ra

$$a_1(-b_1) + a_2(-b_2) + \dots + a_n(-b_n) \leq a_1(-t_1) + a_2(-t_2) + \dots + a_n(-t_n).$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n$$

2. Bất đẳng thức hoán vị

Giả sử có hai dãy số thực hữu hạn được sắp xếp thứ tự cùng chiều tức là

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

Gọi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là 1 hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Đặt $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$; $T = a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n$; $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$, khi đó $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq T = a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n \leq S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$.

Nhận xét:

2.1. Số các bất đẳng thức hoán vị chính là số hoán vị của bộ n số $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nên có $(n!)$ bất đẳng thức hoán vị.

2.2. $\max_{(t_1, \dots, t_n)} T = S$; $\min_{(t_1, \dots, t_n)} T = s$

2.3. Bất đẳng thức hoán vị xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi một trong hai dãy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\text{hoặc } (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ là dãy dừng, tức là } \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$$

2.4. Ta cũng có các bất đẳng thức hoán vị tương tự như trên nếu cố định bộ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ và gọi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

3. Các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức hoán vị

Giả sử $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ là một hoán vị của $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.1. Nếu $f(x)$ là hàm số không giảm trên (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có

$$x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \dots + x_nf(x_n) \geq x'_1f(x_1) + x'_2f(x_2) + \dots + x'_nf(x_n)$$

3.2. Nếu $f(x)$ là hàm số không tăng trên (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có

$$x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \dots + x_nf(x_n) \leq x'_1f(x_1) + x'_2f(x_2) + \dots + x'_nf(x_n)$$

3.3. Nếu $f(x), g(x)$ là hàm số không giảm trên (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \geq f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + \dots + f(x_n)g(x'_n)$$

4. Nếu $f(x)$ là hàm số không giảm trên (a, b) và $g(x)$ là hàm số không tăng trên (a, b) thì $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có bất đẳng thức sau

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \leq f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + \dots + f(x_n)g(x'_n)$$

§6. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow a+b \leq a+c \leq b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq b \leq c \\ \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b} \end{cases} \text{ . Sử bất đẳng thức hoán vị ta có}$$

$$+ \begin{cases} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a+b+c \leq \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} + \frac{a^2+b^2}{2c} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}$$

Chứng minh

$$\text{Không mất tính tổng quát giả sử } a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$+ \begin{cases} a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{b} + b^2 \cdot \frac{1}{c} + c^2 \cdot \frac{1}{a} \\ a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) \leq \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \Leftrightarrow a+b+c \leq \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} + \frac{a^2+b^2}{2c} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác từ } a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^3 \geq b^3 \geq c^3 \\ \frac{a}{abc} \geq \frac{b}{abc} \geq \frac{c}{abc} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$+ \begin{cases} a^3 \cdot \frac{b}{abc} + b^3 \cdot \frac{c}{abc} + c^3 \cdot \frac{a}{abc} \leq a^3 \cdot \frac{a}{abc} + b^3 \cdot \frac{b}{abc} + c^3 \cdot \frac{c}{abc} \\ a^3 \cdot \frac{c}{abc} + b^3 \cdot \frac{a}{abc} + c^3 \cdot \frac{b}{abc} \leq a^3 \cdot \frac{a}{abc} + b^3 \cdot \frac{b}{abc} + c^3 \cdot \frac{c}{abc} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \leq 2 \left(\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} + \frac{a^2+b^2}{2c} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \quad (2)$$

Dấu bằng ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (1) \quad \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^3 \geq b^3 \geq c^3 \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có: $+ \begin{cases} \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \\ \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^3}{c+a} + \frac{b^3}{a+b} + \frac{c^3}{b+c} \end{cases}$

$$\Rightarrow VT(1) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a^3+b^3}{a+b} + \frac{b^3+c^3}{b+c} + \frac{c^3+a^3}{c+a} \right) = \frac{1}{2} [(a^2+b^2-ab) + (b^2+c^2-bc) + (c^2+a^2-ca)]$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} \right) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1) \quad \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{c^3a^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (2)$

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^5 \geq b^5 \geq c^5 \\ \frac{1}{b^3c^3} \geq \frac{1}{c^3a^3} \geq \frac{1}{a^3b^3} \end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^5 \cdot \frac{1}{b^3c^3} + b^5 \cdot \frac{1}{c^3a^3} + c^5 \cdot \frac{1}{a^3b^3} \geq a^5 \cdot \frac{1}{c^3a^3} + b^5 \cdot \frac{1}{a^3b^3} + c^5 \cdot \frac{1}{b^3c^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{c^3a^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \quad (3)$$

Từ $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{b^3} \geq \frac{1}{a^3} \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$a^2 \cdot \frac{1}{c^3} + b^2 \cdot \frac{1}{a^3} + c^2 \cdot \frac{1}{b^3} \geq a^2 \cdot \frac{1}{a^3} + b^2 \cdot \frac{1}{b^3} + c^2 \cdot \frac{1}{c^3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra bất đẳng thức (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Bài 5. Cho $a, b, c, \alpha, \beta > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$1. a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} \geq c^{\alpha}a^{\beta} + a^{\alpha}b^{\beta} + b^{\alpha}c^{\beta} \quad 2. \frac{a^{\alpha}}{c^{\beta}} + \frac{b^{\alpha}}{a^{\beta}} + \frac{c^{\alpha}}{b^{\beta}} \geq a^{\alpha-\beta} + b^{\alpha-\beta} + c^{\alpha-\beta}$$

Chứng minh

1. Giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \leq c^{\alpha} \\ a^{\beta} \leq b^{\beta} \leq c^{\beta} \end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^{\alpha}a^{\beta} + b^{\alpha}b^{\beta} + c^{\alpha}c^{\beta} \geq c^{\alpha}a^{\beta} + a^{\alpha}b^{\beta} + b^{\alpha}c^{\beta} \Leftrightarrow a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} \geq c^{\alpha}a^{\beta} + a^{\alpha}b^{\beta} + b^{\alpha}c^{\beta}$$

2. Giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \leq c^{\alpha} \\ \frac{1}{a^{\beta}} \geq \frac{1}{b^{\beta}} \geq \frac{1}{c^{\beta}} \end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^{\alpha} \cdot \frac{1}{a^{\beta}} + b^{\alpha} \cdot \frac{1}{b^{\beta}} + c^{\alpha} \cdot \frac{1}{c^{\beta}} \leq a^{\alpha} \cdot \frac{1}{c^{\beta}} + b^{\alpha} \cdot \frac{1}{a^{\beta}} + c^{\alpha} \cdot \frac{1}{b^{\beta}}$$

$$\Leftrightarrow a^{\alpha-\beta} + b^{\alpha-\beta} + c^{\alpha-\beta} \leq \frac{a^{\alpha}}{c^{\beta}} + \frac{b^{\alpha}}{a^{\beta}} + \frac{c^{\alpha}}{b^{\beta}}$$

Bài 6. Cho $a, b, c, \alpha, \beta > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{\alpha}}{b^{\beta} + c^{\beta}} + \frac{b^{\alpha}}{c^{\beta} + a^{\beta}} + \frac{c^{\alpha}}{a^{\beta} + b^{\beta}} \geq \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta} + b^{\beta}} + \frac{b^{\alpha}}{b^{\beta} + c^{\beta}} + \frac{c^{\alpha}}{c^{\beta} + a^{\beta}}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ suy ra

$$\begin{cases} a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \leq c^{\alpha} \\ a^{\beta} \leq b^{\beta} \leq c^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \leq c^{\alpha} \\ a^{\beta} + b^{\beta} \leq a^{\beta} + c^{\beta} \leq b^{\beta} + c^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \leq c^{\alpha} \\ \frac{1}{b^{\beta} + c^{\beta}} \leq \frac{1}{c^{\beta} + a^{\beta}} \leq \frac{1}{a^{\beta} + b^{\beta}} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$\frac{a^{\alpha}}{b^{\beta} + c^{\beta}} + \frac{b^{\alpha}}{c^{\beta} + a^{\beta}} + \frac{c^{\alpha}}{a^{\beta} + b^{\beta}} \geq \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta} + b^{\beta}} + \frac{b^{\alpha}}{b^{\beta} + c^{\beta}} + \frac{c^{\alpha}}{c^{\beta} + a^{\beta}}$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$

Chứng minh

Gọi (a, b, c) là một hoán vị của (x, y, z) sao cho $a \geq b \geq c$ suy ra $ab \geq ac \geq bc$.

Do đó $x(xy) + y(yz) + z(zx) \leq a(ab) + b(ac) + c(bc) = b(a^2 + ac + c^2) \leq b(a+c)^2$

$$= \frac{1}{2} 2b(a+c)^2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2b + (a+c) + (a+c)}{3} \right]^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{2(a+b+c)}{3} \right]^3 = \frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \Leftrightarrow (x, y, z)$ là một hoán vị của $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

Bài 8. Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^n y + y^n z + z^n x \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$

Chứng minh

Gọi (a, b, c) là một hoán vị của (x, y, z) sao cho $a \geq b \geq c$ suy ra $\begin{cases} a^{n-1} \geq b^{n-1} \geq c^{n-1} \\ ab \geq ac \geq bc \end{cases}$

Suy ra $x^n y + y^n z + z^n x = x^{n-1}(xy) + y^{n-1}(yz) + z^{n-1}(zx)$

$\leq a^{n-1}(ab) + b^{n-1}(ac) + c^{n-1}(bc) = b(a^n + acb^{n-2} + c^n) \leq b(a^n + a^{n-1}c + c^n)$

$$\leq b(a+c)^n = \frac{1}{n} nb(a+c)^n \leq \frac{1}{n} \left[\frac{n(a+b+c)}{n+1} \right]^{n+1} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Đẳng thức xảy ra khi (x, y, z) là hoán vị của $\left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n+2}, 0\right)$

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+4a+4c} + \frac{bc}{b+4c+4a} + \frac{ca}{c+4a+4b} \leq \frac{a+b+c}{9} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ab}{a+4b+4c} + \frac{b}{3} \right) \leq \frac{4(a+b+c)}{9} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{4b(a+b+c)}{3(a+4b+4c)} \leq \frac{4(a+b+c)}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+4b+4c} + \frac{c}{b+4c+4a} + \frac{a}{c+4a+4b} \leq \frac{1}{3} \quad (2). \text{ Chuẩn hóa } a+b+c=1.$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \frac{b}{4-3a} + \frac{c}{4-3b} + \frac{a}{4-3c} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq \frac{4}{27}$

Giả sử x, y, z là hoán vị của (a, b, c) mà $x \geq y \geq z \Rightarrow xy \geq xz \geq yz$

Do đó $a(ab) + b(bc) + c(ca) + abc \leq x(xy) + y(yz) + z(zx) + xyz$

$$= y(x^2 + 2xz + z^2) = y(x+z)^2 = \frac{1}{2} 2y(x+z)^2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2y + (x+z) + (x+z)}{3} \right]^3 = \frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc (a, b, c) là một hoán vị của $(2x, x, 0)$, $x > 0$.

Bài 10. Chứng minh: $\frac{2a^3 - b^3 - c^3}{b^2 + c^2} + \frac{2b^3 - c^3 - a^3}{c^2 + a^2} + \frac{2c^3 - a^3 - b^3}{a^2 + b^2} \geq 0$, $\forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c$, suy ra

$$\begin{cases} a^3 \leq b^3 \leq c^3 \\ a^2 \leq b^2 \leq c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 \leq b^3 \leq c^3 \\ a^2 + b^2 \leq a^2 + c^2 \leq b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 \leq b^3 \leq c^3 \\ \frac{1}{b^2 + c^2} \leq \frac{1}{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có:

$$\begin{aligned} & + \left[\frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \right. \\ & \left. + \frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{b^3}{a^2 + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + a^2} \right] \\ & \Rightarrow \frac{2a^3}{b^2 + c^2} + \frac{2b^3}{c^2 + a^2} + \frac{2c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} \Rightarrow (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 11. Cho $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$

Chứng minh

Gọi (x, y, z, t) là hoán vị của (a, b, c, d) sao cho $x \geq y \geq z \geq t \Rightarrow xyz \geq xyt \geq xzt \geq yzt$

Suy ra $a(abc) + b(bcd) + c(cda) + d(dab) \leq x(xyz) + y(xyz) + z(xzt) + t(yzt)$

$$= xy(xz + yt) + zt(xz + yt) = (xy + zt)(xz + yt) \leq \frac{1}{4}(xy + zt + xz + yt)$$

$$= \frac{1}{4}[(x+t)(y+z)]^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x+y+z+t}{2} \right)^4 = 4 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c, d)$ là $(1, 1, 1, 1)$ hoặc hoán vị của $(2, 1, 1, 0)$.

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c, d, e \geq 0 \\ a + b + c + d + e = 5 \end{cases}$

Chứng minh: $a^2bcd + b^2cde + c^2dea + d^2eab + e^2abc \leq 5$

Chứng minh

Gọi (x, y, z, t, u) là hoán vị của (a, b, c, d, e) sao cho $x \geq y \geq z \geq t \geq u$

$\Rightarrow xyz \geq xyzu \geq xyzt \geq xztu \geq yztu$. Suy ra

$$a(abcd) + b(bcde) + c(cdea) + d(deab) + e(eabc) \leq$$

$$\leq x(xyzt) + y(xyzu) + z(xyzt) + t(xztu) + u(yztu)$$

$$= xyz(xt + yu) + xyztu + ztu(tx + uy) = z(xt + yu)(xy + ut)$$

$$\leq z \left(\frac{xt + yu + xy + ut}{2} \right)^2 + \left(\frac{x + y + t + u}{5} \right)^5 = \frac{1}{4} z \left[\frac{(x + u)(y + z)}{2} \right]^2 + 1 \leq \frac{1}{4} z \left(\frac{x + u + y + t}{2} \right)^4 + 1$$

$$= \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{4} 4z(x + y + z + u)^4 + 1 \leq \frac{1}{4^4} \left(\frac{4(x + y + z + t + u)}{5} \right)^5 + 1 = 5 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Bài 13. Cho $\begin{cases} a, b, c, d \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \end{cases}$. Chứng minh: $a^3bc + b^3cd + c^3da + d^3ab \leq 4$

Chứng minh

Gọi (x, y, z, t) là hoán vị của (a, b, c, d) sao cho $x \geq y \geq z \geq t$.

Suy ra $\begin{cases} x^2 \geq y^2 \geq z^2 \geq t^2 \\ xyz \geq xyt \geq xzt \geq yzt \end{cases}$. Do đó $a^2(abc) + b^2(bcd) + c^2(cda) + d^2(dab)$

$$\leq x^2(xyz) + y^2(xyt) + z^2(xzt) + t^2(yzt) = xy(x^2z + y^2t) + zt(xz^2 + yt^2)$$

$$\leq xy\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2z^2 + y^2t^2)} + zt\sqrt{(z^2 + t^2)(x^2z^2 + y^2t^2)}$$

$$= \sqrt{x^2z^2 + y^2t^2} (xy\sqrt{x^2 + y^2} + zt\sqrt{z^2 + t^2}) \leq \sqrt{x^2z^2 + y^2t^2} (\sqrt{x^2y^2 + z^2y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2})$$

$$= 2\sqrt{(x^2z^2 + y^2t^2)(x^2y^2 + z^2y^2)} \leq x^2z^2 + y^2t^2 + x^2y^2 + z^2y^2$$

$$= (y^2 + z^2)(x^2 + t^2) \leq \left(\frac{y^2 + z^2 + x^2 + t^2}{2} \right)^2 = 4 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

Bài 14. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \leq 3$

Chứng minh

Gọi (x, y, z) là hoán vị của (a, b, c) sao cho $x \geq y \geq z$. Khi đó

$$\begin{aligned} a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 &= a(a^2b^2) + b(b^2c^2) + c(c^2a^2) \leq x(x^2y^2) + y(x^2z^2) + z(y^2z^2) \\ &= y(x^3y + x^2z^2 + z^3y) = y \left[x^2 \left(xy + \frac{1}{2}z^2 \right) + z^2 \left(yz + \frac{1}{2}x^2 \right) \right] \\ &\leq y \left(x^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + z^2 \frac{y^2 + z^2 + x^2}{2} \right) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} y(x^2 + z^2) \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{y^2(x^2 + z^2)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{2y^2(x^2 + z^2)(x^2 + z^2)} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \right)^3} = 3 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 15. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \dots + a_n^2a_1 \leq \frac{4}{27} \forall n \geq 3$

Chứng minh

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n

Với $n = 3$, theo bài 6 ta có bất đẳng thức đúng

Giả sử, bất đẳng thức đúng với n . Xét $n+1$ số $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 1$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a_2 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \dots + a_n^2a_{n+1} + a_{n+1}^2a_1 \\ &\leq (a_1 + a_2)^2 a_3 + a_3^2a_4 + \dots + a_{n+1}^2a_{n+1} + \dots + a_{n+1}^2(a_1 + a_2) \leq \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức đúng với $n+1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có (đpcm).

Bài 16. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^{2003}}{a_2^{2002}} + \frac{a_2^{2003}}{a_3^{2002}} + \dots + \frac{a_{n-1}^{2003}}{a_n^{2002}} + \frac{a_n^{2003}}{a_1^{2002}}$$

Chứng minh

Giả sử $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$. Khi đó

$$\begin{cases} a_1^{2003} \leq a_2^{2003} \leq \dots \leq a_n^{2003} \\ \frac{1}{a_1^{2002}} \geq \frac{1}{a_2^{2002}} \geq \dots \geq \frac{1}{a_n^{2002}} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a_1^{2003} \cdot \frac{1}{a_1^{2002}} + a_2^{2003} \cdot \frac{1}{a_2^{2002}} + \dots + a_n^{2003} \cdot \frac{1}{a_n^{2002}} \leq a_1^{2003} \cdot \frac{1}{a_2^{2002}} + a_2^{2003} \cdot \frac{1}{a_3^{2002}} + \dots + a_n^{2003} \cdot \frac{1}{a_1^{2002}}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^{2003}}{a_2^{2002}} + \frac{a_2^{2003}}{a_3^{2002}} + \dots + \frac{a_{n-1}^{2003}}{a_n^{2002}} + \frac{a_n^{2003}}{a_1^{2002}}$$

Bài 17. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $\alpha > \beta > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^\alpha + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^\beta + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^\beta + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\beta$$

Chứng minh

Đặt $\gamma = \alpha - \beta > 0 \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma$. Dễ thấy $(a_1^\beta - a_2^\beta)(a_1^\gamma - a_2^\gamma) \geq 0$

$$\Leftrightarrow a_1^{\beta+\gamma} + a_2^{\beta+\gamma} \geq a_1^\beta \cdot a_2^\gamma + a_2^\beta \cdot a_1^\gamma \Leftrightarrow a_1^\alpha + a_2^\alpha \geq a_1^\beta \cdot a_2^\gamma + a_2^\beta \cdot a_1^\gamma \Leftrightarrow \frac{a_1^\alpha}{a_2^\alpha} + 1 \geq \frac{a_1^\beta}{a_2^\beta} + \frac{a_1^\gamma}{a_2^\gamma}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{cases} \frac{a_1^\alpha}{a_2^\alpha} + 1 \geq \frac{a_1^\beta}{a_2^\beta} + \frac{a_1^\gamma}{a_2^\gamma} \\ \frac{a_2^\alpha}{a_3^\alpha} + 1 \geq \frac{a_2^\beta}{a_3^\beta} + \frac{a_2^\gamma}{a_3^\gamma} \\ \dots \\ \frac{a_n^\alpha}{a_1^\alpha} + 1 \geq \frac{a_n^\beta}{a_1^\beta} + \frac{a_n^\gamma}{a_1^\gamma} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\alpha + n \geq \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\beta + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\gamma + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\gamma \quad (1)$$

Mặt khác có thể giả sử rằng $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$.

Nếu $\gamma > 0$, $\begin{cases} a_1^\gamma \leq a_2^\gamma \leq \dots \leq a_n^\gamma \\ \frac{1}{a_1^\gamma} \geq \frac{1}{a_2^\gamma} \geq \dots \geq \frac{1}{a_n^\gamma} \end{cases}$ suy ra $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\gamma + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^\gamma + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\gamma \geq n \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^\beta + \dots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^\beta$

Bài 18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{(n-1)a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{(n-1)a_4} + \dots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{(n-1)a_2}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$.

Khi đó ta có $\begin{cases} a_1^2 \leq a_2^2 \leq \dots \leq a_n^2 \\ \frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \dots \geq \frac{1}{a_n} \end{cases}$. Gọi $\left(\frac{1}{a'_1}, \frac{1}{a'_2}, \dots, \frac{1}{a'_n}\right)$ là một hoán vị của $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$

Ta có: $a_1^2 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a_n} \leq a_1^2 \cdot \frac{1}{a'_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{a'_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{a'_n}$

Từ bất đẳng thức này suy ra

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^2}{a_3} + \frac{a_2^2}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_1} + \frac{a_n^2}{a_2} \\ \dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^2}{a_n} + \frac{a_2^2}{a_1} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_4} + \dots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{(n-1)a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{(n-1)a_4} + \dots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{(n-1)a_2}$$

Bài 19. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh $S = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = P$

(Bất đẳng thức AM - GM)

Chứng minh

• Nếu $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

• Nếu $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} > 0$ thì $P = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} > 0$. Không mất tính tổng quát giả sử ta có thứ tự các biến số là $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$. Khi đó ta có 2 dãy số sắp xếp thứ tự ngược chiều nhau

$$\begin{cases} \frac{a_1}{P} \geq \frac{a_1 a_2}{P^2} \geq \dots \geq \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{P^n} = 1 \\ \frac{P}{a_1} \leq \frac{P^2}{a_1 a_2} \leq \dots \leq \frac{P^n}{a_1 a_2 \dots a_n} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } n = \frac{a_1}{P} \cdot \frac{P}{a_1} + \frac{a_1 a_2}{P^2} \cdot \frac{P^2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{P^n} \cdot \frac{P^n}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\leq \frac{a_1}{P} \cdot 1 + \frac{a_1 a_2}{P^2} \cdot \frac{P}{a_1} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{P^n} \cdot \frac{P^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{P} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

Bài 20. Cho $2n$ số thực tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$

Chúng minh: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$

(Bất đẳng thức Buniakowski)

Chứng minh

• **Bổ đề:** Nếu $x_1, x_2, \dots, x_m$ là m số thực tùy ý và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ là một hoán vị của $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \geq x'_1x_1 + x'_2x_2 + \dots + x'_mx_m$

• **Chúng minh:** Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho 2 dãy $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \end{cases} \Rightarrow (\text{đpcm}).$

• **Áp dụng:** Nếu $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$ và $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 > 0$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} > 0 \\ B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} > 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_i = \frac{a_i}{A} \text{ với } i = \overline{1, n} \\ x_{n+i} = \frac{b_i}{B} \text{ với } i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Sử dụng bổ đề cho dãy số $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ ta có:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots + x_{2n}^2 \geq \\ & x_1x_{n+1} + x_2x_{n+2} + \dots + x_nx_{2n} + x_{n+1}x_1 + x_{n+2}x_2 + \dots + x_{2n}x_n \\ \Leftrightarrow 2 & \geq \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)}{AB} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq AB \quad (1) \end{aligned}$$

Sử dụng bổ đề cho dãy số $x_1, x_2, \dots, x_n, -x_{n+1}, -x_{n+2}, \dots, -x_{2n}$ ta có:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots + x_{2n}^2 \geq \\ & \geq x_1(-x_{n+1}) + x_2(-x_{n+2}) + \dots + x_n(-x_{2n}) + (-x_{n+1})x_1 + (-x_{n+2})x_2 + \dots + (-x_{2n})x_n \\ \Leftrightarrow 2 & \geq \frac{-2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)}{AB} \Leftrightarrow -(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq AB \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq AB$

$$\Leftrightarrow A^2B^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Bài 21. Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng:

1. Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ thì

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

2. Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ thì

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

(Bất đẳng thức Chebyshev)

Chứng minh

1. Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ thì sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \dots + a_{n-1}b_n + a_nb_1 \\ + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_3 + a_2b_4 + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 \\ \dots \geq \dots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \dots + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

2. Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ thì sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có n

bất đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \leq a_1b_2 + a_2b_3 + \dots + a_{n-1}b_n + a_nb_1 \\ + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \leq a_1b_3 + a_2b_4 + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 \\ \dots \leq \dots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \leq a_1b_n + a_2b_1 + \dots + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Dấu bằng ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Bài 22. [IMO 1975] Cho $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$. Gọi $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Chứng minh: $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2 \leq (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + \dots + (a_n - c_n)^2$

Chứng minh

Vì $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là một hoán vị của $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nên $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$

Ta có: $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2 =$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \leq$$

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) - 2(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n) = (a_1 - c_1)^2 + \dots + (a_n - c_n)^2$$

Bài 23. Cho hàm số $f(x)$. Giả sử $f(x) = 0$ có n nghiệm thực $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ và $f'(x) = 0$ có $(n-1)$ nghiệm thực $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1}$. Gọi $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là một hoán vị tùy ý của bộ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - b_k)^3 - b_n^3 \geq \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k)^3 - c_n^3 \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } a_n = 0 \text{ khi đó } \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - b_k)^3 - b_n^3 \geq \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k)^3 - c_n^3 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^3 \geq \sum_{k=1}^n (a_k - c_k)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (a_k^3 - 3a_k^2 b_k + 3a_k b_k^2 - b_k^3) \geq \sum_{k=1}^n (a_k^3 - 3a_k^2 c_k + 3a_k c_k^2 - c_k^3)$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{k=1}^n a_k b_k (b_k - a_k) \geq 3 \sum_{k=1}^n a_k c_k (c_k - a_k) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k b_k (b_k - a_k) \geq \sum_{k=1}^n a_k c_k (c_k - a_k) \quad (2)$$

Sử dụng định lý **Rolle** ta có: $b_1 \geq a_1 \geq b_2 \geq a_2 \geq \dots \geq b_n \geq a_n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 b_1 \geq a_2 b_2 \geq \dots \geq a_{n-1} b_{n-1} \geq a_n b_n \\ b_1 - a_1 \geq b_2 - a_2 \geq \dots \geq b_{n-1} - a_{n-1} \geq b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

Bài 24. [IMO 1978] Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Chứng minh

Gọi $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ là một hoán vị của $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thoả mãn điều kiện $a'_1 < a'_2 < \dots < a'_n$.

Vì $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên dương phân biệt nên $a_i' \geq i \quad \forall i = 1, n$

Xét 2 dãy số ngược chiều nhau $\begin{cases} a_1' < a_2' < \dots < a_n' \\ \frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \dots > \frac{1}{n^2} \end{cases}$ và coi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một hoán vị của

bộ $(a_1', a_2', \dots, a_n')$, khi đó theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{a_1'}{1^2} + \frac{a_2'}{2^2} + \dots + \frac{a_n'}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Bài 25. [IMO 1964] Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \geq a(b^2 + ca) + b(c^2 + ab) + c(ac + bc)$$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \\ a^2 + bc \geq b^2 + ca \end{cases} \text{ khi đó } a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) \geq a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc) \quad (2)$$

$$\text{Do } \begin{cases} b \geq c \\ a \geq c \end{cases} \text{ nên } ba + c^2 \geq ac + bc \Rightarrow c(c^2 + ab) \geq c(ac + bc) \quad (3)$$

Lấy (2) cộng (3) ta có

$$a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \geq a(b^2 + ca) + b(c^2 + ab) + c(ac + bc)$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 26. [IMO 1983] Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\text{Giả sử } a \geq b \geq c \text{ khi đó dễ dàng chứng minh được } \begin{cases} bc \leq ac \leq ab \\ a^2 + bc \geq b^2 + ac \geq c^2 + ab \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy số trên ta có:

$$bc(a^2 + bc) + ca(b^2 + ca) + ab(c^2 + ab) \leq bc(b^2 + ca) + ca(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

Bình luận: Nếu chuyển điều kiện a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác thành điều kiện $a, b, c > 0$ thì không thể chứng minh được bất đẳng thức đồng bậc

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \forall a, b, c > 0.$$

Chúng ta có thể chỉ ra vô số cặp (a, b, c) chứng tỏ bất đẳng thức này không đúng, chẳng hạn $a = 4, b = 1, c = 1$ thì bất đẳng thức trên đổi chiều ngược lại. Ngoài ra bạn đọc cũng có thể chứng minh được rằng khi thay điều kiện a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác bởi điều kiện $a \geq b \geq c$ thì bất đẳng thức đã cho vẫn đúng.

Bài 27. Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \geq \frac{\alpha}{\beta} \tan \beta + \frac{\beta}{\gamma} \tan \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \tan \alpha$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Hàm số $y = \frac{\tan x}{x}$ đồng biến trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• **Chứng minh:**
$$y' = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} > \frac{x - \sin x}{x^2 \cos^2 x} > \frac{x - x}{x^2 \cos^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow y' > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Vậy } y = \frac{\tan x}{x} \text{ đồng biến trên khoảng } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

• **Áp dụng:** Giả sử $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. Khi đó theo bổ đề suy ra,

$$\frac{\tan \alpha}{\alpha} \leq \frac{\tan \beta}{\beta} \leq \frac{\tan \gamma}{\gamma}. \text{ Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có}$$

$$\alpha \cdot \frac{\tan \alpha}{\alpha} + \beta \cdot \frac{\tan \beta}{\beta} + \gamma \cdot \frac{\tan \gamma}{\gamma} \geq \alpha \cdot \frac{\tan \beta}{\beta} + \beta \cdot \frac{\tan \gamma}{\gamma} + \gamma \cdot \frac{\tan \alpha}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \geq \frac{\alpha}{\beta} \tan \beta + \frac{\beta}{\gamma} \tan \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \tan \alpha$$

Bài 28. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c ; độ dài 3 đường phân giác trong tương ứng với các cạnh a, b, c là l_a, l_b, l_c . Chứng minh rằng:

$$1. al_a + bl_b + cl_c \leq al_b + bl_c + cl_a \quad 2. \frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} \geq \frac{l_a}{b} + \frac{l_b}{c} + \frac{l_c}{a}$$

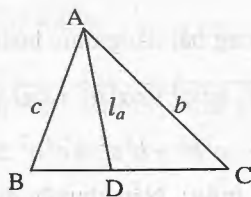
Chứng minh

• **Bổ đề:** $a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$

• **Chứng minh:** $S_{ABC} = S = S_{ABD} + S_{ACD}$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} cl_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} bl_a \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} l_a \sin \frac{A}{2} (b + c)$$

$$\Leftrightarrow l_a = \frac{2S}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}. \text{ Tương tự ta có } l_b = \frac{2S}{(c+a) \sin \frac{B}{2}}$$



$$l_a \geq l_b \Leftrightarrow (b+c) \sin \frac{A}{2} \leq (c+a) \sin \frac{B}{2} \Leftrightarrow (\sin B + \sin C) \sin \frac{A}{2} \leq (\sin C + \sin A) \sin \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin C \left(\sin \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \left(\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} \right) \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Giả sử } a \geq b \text{ thì } A \geq B \Leftrightarrow \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \text{ và } \cos \frac{A}{2} \leq \cos \frac{B}{2}$$

$\Rightarrow (1)$ không thoả mãn $\Rightarrow$ Nếu $l_a \geq l_b$ thì $a \leq b$.

$$\text{Mặt khác } a \leq b \Leftrightarrow A \leq B \Leftrightarrow \frac{A}{2} \leq \frac{B}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \leq \sin \frac{B}{2} \text{ và } \cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \sin C \left(\sin \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \left(\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} \right) \geq 0$$

$\Rightarrow$ Nếu $a \leq b$ thì $l_a \geq l_b$. Vậy $a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$.

Bây giờ ta sử dụng bổ đề để chứng minh 1. và 2.

1. Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow l_a \geq l_b \geq l_c$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có $al_a + bl_b + cl_c \leq al_b + bl_c + cl_a$

$$2. \text{ Không mất tính tổng quát giả sử } a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} l_a \geq l_b \geq l_c \\ \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \end{cases}$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có } \frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} \geq \frac{l_a}{b} + \frac{l_b}{c} + \frac{l_c}{a}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 29. Cho ΔABC có độ dài 3 đường trung tuyến và độ dài 3 đường phân giác trong tương ứng với các cạnh a, b, c là m_a, m_b, m_c và l_a, l_b, l_c .

1. Chứng minh rằng: $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq m_a l_b + m_b l_c + m_c l_a$

2. Chứng minh rằng: $\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \leq \frac{l_a}{m_b} + \frac{l_b}{m_c} + \frac{l_c}{m_a}$

Chứng minh

• **Bổ đề 1:** $a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$.

• **Bổ đề 2:** $m_a \geq m_b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$.

$$\bullet \text{ Chứng minh bổ đề 2: } m_a \geq m_b \Leftrightarrow m_a^2 \geq m_b^2 \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \geq \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq 2c^2 + 2a^2 - b^2 \Leftrightarrow 3b^2 \geq 3a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$$

• **Áp dụng:**

1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} m_a \geq m_b \geq m_c \\ l_a \geq l_b \geq l_c \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có: $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq m_a l_b + m_b l_c + m_c l_a$

2. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} l_a \geq l_b \geq l_c \\ \frac{1}{m_a} \leq \frac{1}{m_b} \leq \frac{1}{m_c} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có $\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \leq \frac{l_a}{m_b} + \frac{l_b}{m_c} + \frac{l_c}{m_a}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

• *Bây giờ chúng ta sẽ xét bài toán khái quát từ ví dụ 1 ở phần I*

Bài 30. Tại một trạm bán xăng, có n người xếp hàng mua xăng. Mỗi người cần mua một số lượng xăng khác nhau. Hãy chọn cách sắp xếp thứ tự người mua để tổng số thời gian chờ đợi của mọi người là nhỏ nhất.

Giải

Gọi thời gian của người thứ i cần để mua xăng là t_i ($i = \overline{1, n}$). Khi đó tổng số thời gian chờ đợi của mọi người là: $T = nt_1 + (n-1)t_2 + \dots + 2t_{n-1} + t_n$.

Nếu thay đổi thứ tự của mọi người thì tổng số thời gian chờ đợi là

$T' = nt'_1 + (n-1)t'_2 + \dots + 2t'_{n-1} + t'_n$ trong đó $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ là một hoán vị của $(t_1, t_2, \dots, t_n)$

Không mất tính tổng quát giả sử $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Khi đó theo bất đẳng thức hoán vị tổng số thời gian chờ đợi của mọi người nhỏ nhất là $T^* = nt_1 + (n-1)t_2 + \dots + 2t_{n-1} + t_n$

• **Ý nghĩa:** Để tiết kiệm thời gian chờ xã hội thì cần phải sắp xếp theo thứ tự: người mua ít xăng đứng trước người mua nhiều xăng. Từ ý tưởng này chúng ta có thể mở rộng sang việc sắp xếp trình tự tối ưu để sản xuất các chi tiết và lắp ráp trong các dây chuyền tự động hóa của các nhà máy chẳng hạn trong các nhà máy sản xuất ô tô, máy bay Boeing...

Bài 31. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy sắp thứ tự sau đây

$$\begin{cases} a\sqrt{a} \leq b\sqrt{b} \leq c\sqrt{c} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{c}} \end{cases} \text{ ta có } S = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \leq \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = a + b + c = 1$$

Với $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $\text{Max } S = 1$.

Bài 32. Cho ABC là tam giác nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$T = \frac{A}{B} \sin B + \frac{B}{C} \sin C + \frac{C}{A} \sin A$$

Giải

• **Bổ đề 1:** Hàm số $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$ giảm trên khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$

• **Chứng minh:**

$$\text{Ta có } y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2} \text{ trong đó } u(x) = x \cos x - \sin x$$

$$\text{Ta có } u'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow u(x) \text{ giảm trên khoảng } (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow u(x) < u(0) = 0 \Rightarrow y' < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y = f(x) \text{ giảm trên khoảng } (0, \frac{\pi}{2})$$

• **Bổ đề 2:** $Q = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ với mọi tam giác ABC.

• **Chứng minh:**

Biến đổi biểu thức Q và sử dụng đánh giá $2xy \leq x^2 + y^2$ ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \cdot \cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}} \cdot \cos A \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4} \right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B \right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A \right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

• **Áp dụng:**

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2}$. Do hàm số $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$

giảm trên khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$ nên suy ra $\frac{\sin A}{A} \geq \frac{\sin B}{B} \geq \frac{\sin C}{C}$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy ngược chiều ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{B} \sin B + \frac{B}{C} \sin C + \frac{C}{A} \sin A = \frac{\sin B}{B} A + \frac{\sin C}{C} B + \frac{\sin A}{A} C \\ &\leq \frac{\sin B}{B} B + \frac{\sin C}{C} C + \frac{\sin A}{A} A = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Khi tam giác ABC đều thì $\text{Max } T = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $\alpha, \beta > 0$. Gọi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau:

$$1. a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \dots + a_{n-1}^{\alpha+\beta} + a_n^{\alpha+\beta} \geq t_1^\alpha a_1^\beta + t_2^\alpha a_2^\beta + \dots + t_{n-1}^\alpha a_{n-1}^\beta + t_n^\alpha a_n^\beta$$

$$2. a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \dots + a_{n-1}^{\alpha+\beta} + a_n^{\alpha+\beta} \geq a_1^\alpha a_2^\beta + a_2^\alpha a_3^\beta + \dots + a_{n-1}^\alpha a_n^\beta + a_n^\alpha a_1^\beta$$

$$3. \frac{a_1^\alpha}{t_1^\beta} + \frac{a_2^\alpha}{t_2^\beta} + \dots + \frac{a_{n-1}^\alpha}{t_{n-1}^\beta} + \frac{a_n^\alpha}{t_n^\beta} \geq a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + \dots + a_{n-1}^{\alpha-\beta} + a_n^{\alpha-\beta}$$

$$4. \frac{a_1^\alpha}{a_2^\beta} + \frac{a_2^\alpha}{a_3^\beta} + \dots + \frac{a_{n-1}^\alpha}{a_n^\beta} + \frac{a_n^\alpha}{a_1^\beta} \geq a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + \dots + a_{n-1}^{\alpha-\beta} + a_n^{\alpha-\beta}$$

Bài 2. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $\alpha > \beta > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^\alpha}{a_2^\alpha} + \frac{a_2^\alpha}{a_3^\alpha} + \dots + \frac{a_{n-1}^\alpha}{a_n^\alpha} + \frac{a_n^\alpha}{a_1^\alpha} \geq \frac{a_1^\beta}{a_2^\beta} + \frac{a_2^\beta}{a_3^\beta} + \dots + \frac{a_{n-1}^\beta}{a_n^\beta} + \frac{a_n^\beta}{a_1^\beta}$$

Bài 3. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Gọi $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ là một hoán vị tùy ý của $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Chứng minh rằng: $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} \geq a_1^{a'_1} a_2^{a'_2} \dots a_n^{a'_n}$

Bài 4. Cho 2 dãy số $\begin{cases} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \\ 0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq b_n \end{cases}$

Chứng minh rằng $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_{n-1}^{b_{n-1}} a_n^{b_n} \geq a_1^{b_n} a_2^{b_{n-1}} \dots a_{n-1}^{b_2} a_n^{b_1}$

Bài 5. Cho $a, b, c > e^{-1}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. a^{a-1} + b^{b-1} + c^{c-1} \leq \frac{a^a}{b} + \frac{b^b}{c} + \frac{c^c}{a} \quad 2. a^{a+1} + b^{b+1} + c^{c+1} \leq a^a b + b^b c + c^c a$$

Bài 6. Cho $0 < a_1, a_2, \dots, a_n < e^{-1}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^{a_1}}{a_1} + \frac{a_2^{a_2}}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}^{a_{n-1}}}{a_{n-1}} + \frac{a_n^{a_n}}{a_n} \geq \frac{a_1^{a_1}}{a_2} + \frac{a_2^{a_2}}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^{a_{n-1}}}{a_n} + \frac{a_n^{a_n}}{a_1}$$

Bài 7. Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta + \frac{\beta}{\gamma} \sin \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \sin \alpha$$

Bài 8. Cho ΔABC . Gọi (A', B', C') là một hoán vị của (A, B, C) . Chứng minh rằng:

$$1. \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} - 4 \sin \frac{A-A'}{4} \sin \frac{B-B'}{4} \sin \frac{C-C'}{4}$$

$$2. \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} - 4 \sin \frac{A-B}{4} \sin \frac{B-C}{4} \sin \frac{C-A}{4}$$

Bài 9. Cho ΔABC . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B \leq$$

$$\leq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2}$$

$$2. \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) - \sin \frac{A-B}{4} \sin \frac{B-C}{4} \sin \frac{C-A}{4}$$

Bài 10. Cho ΔABC , gọi n là số tự nhiên lẻ và $\alpha > 0$. Chứng minh rằng:

$$1. \tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \leq \frac{\sin^n A}{\cos^n B} + \frac{\sin^n B}{\cos^n C} + \frac{\sin^n C}{\cos^n A}$$

$$2. \cot^n A + \cot^n B + \cot^n C \geq \frac{\cos^n A}{\sin^n B} + \frac{\cos^n B}{\sin^n C} + \frac{\cos^n C}{\sin^n A}$$

$$3. \tan^\alpha \frac{A}{2} + \tan^\alpha \frac{B}{2} + \tan^\alpha \frac{C}{2} \geq \frac{\sin^\alpha \frac{A}{2}}{\cos^\alpha \frac{B}{2}} + \frac{\sin^\alpha \frac{B}{2}}{\cos^\alpha \frac{C}{2}} + \frac{\sin^\alpha \frac{C}{2}}{\cos^\alpha \frac{A}{2}}$$

$$4. \cot^\alpha \frac{A}{2} + \cot^\alpha \frac{B}{2} + \cot^\alpha \frac{C}{2} \geq \frac{\cos^\alpha \frac{A}{2}}{\sin^\alpha \frac{B}{2}} + \frac{\cos^\alpha \frac{B}{2}}{\sin^\alpha \frac{C}{2}} + \frac{\cos^\alpha \frac{C}{2}}{\sin^\alpha \frac{A}{2}}$$

Bài 11. Cho ΔABC . Gọi độ dài 3 đường cao, 3 đường trung tuyến, 3 đường phân giác trong ứng với các cạnh a, b, c là $h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, l_a, l_b, l_c$; độ dài các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp là R, r . Chứng minh rằng:

$$1. l_a h_a + l_b h_b + l_c h_c \geq l_a h_b + l_b h_c + l_c h_a$$

$$2. \frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} \leq \frac{l_a}{h_b} + \frac{l_b}{h_c} + \frac{l_c}{h_a}$$

$$3. m_a h_a + m_b h_b + m_c h_c \geq m_a h_b + m_b h_c + m_c h_a$$

$$4. \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{m_a}{h_b} + \frac{m_b}{h_c} + \frac{m_c}{h_a}$$

$$5. ah_b + bh_c + ch_a \geq 6S$$

$$6. \frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \leq \frac{a}{h_b} + \frac{b}{h_c} + \frac{c}{h_a}$$

$$7. \frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq \frac{a+b+c}{3r}$$

$$8. \frac{h_a}{ab} + \frac{h_b}{bc} + \frac{h_c}{ca} \geq \frac{3}{2R}$$

$$9. \frac{\sin \frac{A}{2}}{h_a} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{h_b} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{h_c} \geq \frac{\sin \frac{A}{2}}{h_b} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{h_c} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{h_a}$$

$$10. \frac{\cos \frac{A}{2}}{l_b} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{l_c} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{l_a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$11. \frac{\cot A}{m_a} + \frac{\cot B}{m_b} + \frac{\cot C}{m_c} \leq \frac{\cot A}{m_b} + \frac{\cot B}{m_c} + \frac{\cot C}{m_a}$$

$$12. A \cot A + B \cot B + C \cot C \leq A \cot B + B \cot C + C \cot A \quad 13. \frac{am_a + bm_b + cm_c}{a+b+c} \leq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$14. \frac{a^\alpha}{\sin^\beta A} + \frac{b^\alpha}{\sin^\beta B} + \frac{c^\alpha}{\sin^\beta C} \geq \frac{a^\alpha}{\sin^\beta B} + \frac{b^\alpha}{\sin^\beta C} + \frac{c^\alpha}{\sin^\beta A}, \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

$$15. \frac{\cos^3 A}{B^3 + C^3} + \frac{\cos^3 B}{C^3 + A^3} + \frac{\cos^3 C}{A^3 + B^3} \leq \frac{\cos^3 A}{A^3 + C^3} + \frac{\cos^3 B}{B^3 + A^3} + \frac{\cos^3 C}{C^3 + B^3}$$

$$16. \frac{\cos^\alpha A}{(l_b + l_c)^\beta} + \frac{\cos^\alpha B}{(l_c + l_a)^\beta} + \frac{\cos^\alpha C}{(l_a + l_b)^\beta} \leq \frac{\cos^\alpha A}{(l_a + l_b)^\beta} + \frac{\cos^\alpha B}{(l_b + l_c)^\beta} + \frac{\cos^\alpha C}{(l_c + l_a)^\beta} \quad \begin{cases} \triangle ABC \text{ nhọn} \\ \alpha, \beta > 0 \end{cases}$$

Bài 12. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(1 + \sin A)^{\cos A} + (1 + \sin B)^{\cos B} + (1 + \sin C)^{\cos C} \leq (1 + \sin A)^{\cos B} + (1 + \sin B)^{\cos C} + (1 + \sin C)^{\cos A}$$

Bài 13. Cho $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \frac{b+c+d}{c^3+d^3+a^3} + \frac{c+d+a}{d^3+a^3+b^3} + \frac{d+a+b}{a^3+b^3+c^3} + \frac{a+b+c}{b^3+c^3+d^3} \geq \\ & \geq \frac{b+c+d}{a^3+b^3+c^3} + \frac{c+d+a}{b^3+c^3+d^3} + \frac{d+a+b}{c^3+d^3+a^3} + \frac{a+b+c}{d^3+a^3+b^3} \end{aligned}$$

Bài 14. Cho 2 bộ n số thực được sắp xếp $\begin{cases} (a) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$

được sắp xếp $\begin{cases} a_i \geq a_{i+1} \\ b_i \geq b_{i+1} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, n-1}$. Khi đó ta nói rằng bộ (a) trội hơn bộ (b) và

được ký hiệu $(a) \succ (b)$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m b_k \quad \forall m = \overline{1, n-1} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$$

Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là hai bộ số thực không âm được sắp thứ tự sao cho $(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (b_1, b_2, \dots, b_n)$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương. Chứng minh:

$$\prod_{\text{sym}} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) \leq \prod_{\text{sym}} (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)$$

ở đây các thừa số trong tích được lấy theo $(n!)$ hoán vị của bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

§7. BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§7.1. GIỚI THIỆU BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

I. DẠNG CHÍNH TÁC CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR:

Định lý 1: Với $a, b, c \geq 0$ và k là số thực bất kỳ ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

Chứng minh

Có nhiều cách chứng minh cho **Schur**, xin được giới thiệu với các bạn cách chứng minh đơn giản nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ ta có:

$$VT = c^k(a-c)(b-c) + (a-b)[a^k(a-c) - b^k(b-c)] \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Bất đẳng thức **Schur** được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Các trường hợp hay gặp của **Schur** là khi $k=1$ và $k=2$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(a+c) \quad (1)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(a^2 + c^2) \quad (2)$$

II. CÁC DẠNG SUY RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

1 Bất đẳng thức Schur suy rộng 1 (Vornicu Schur):

Định lý 2: Xét bất đẳng thức: $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$ (1)

Khi đó (1) đúng với mọi $a \geq b \geq c \geq 0$ và $x, y, z \geq 0$ nếu thỏa mãn 1 trong các khả năng:

i. $x \geq y$ (hoặc $z \geq y$)

ii. $ax \geq by$

iii. $bz \geq cy$ (nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác)

iv. $\sqrt{x} + \sqrt{z} \geq \sqrt{y}$

iv. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$

Chứng minh

i. Ta có 2 cách biến đổi ứng với 2 trường hợp $x \geq y$ hoặc $z \geq y$:

Nếu $x \geq y$ thì biến đổi $VT = z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)] \geq 0$

Nếu $z \geq y$ thì biến đổi $VT = x(a-b)(a-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)] \geq 0$

ii. Để ý rằng với $a \geq b \geq c \geq 0$ thì $a-c \geq \frac{a}{b}(b-c)$. Vì vậy:

$$VT = z(a-c)(b-c) + (a-b)[x(a-c) - y(b-c)] \geq z(a-c)(b-c) + \frac{(a-b)(b-c)(ax-by)}{b} \geq 0$$

iii. Do $a \geq b \geq c \geq 0$ và a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a - c \geq \frac{b}{c}(a - b)$.

Suy ra: $VT = x(a-b)(a-c) + (b-c)[z(a-c) - y(a-b)] \geq x(a-b)(a-c) + \frac{(b-c)(a-b)(bz-cy)}{c} \geq 0$

iv. Ta có: $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$

$$\Leftrightarrow x(a-b)(a-c) + z(a-c)(b-c) \geq y(b-c)(a-b)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \frac{a-c}{b-c} + z \cdot \frac{a-c}{a-b} \geq y \Leftrightarrow x + z + \left(x \cdot \frac{a-b}{b-c} + z \cdot \frac{b-c}{a-b} \right) \geq y.$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** và điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{z} \geq \sqrt{y}$ ta có:

$$x + z + \left(x \cdot \frac{a-b}{b-c} + z \cdot \frac{b-c}{a-b} \right) \geq x + z + 2\sqrt{xz} = (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 \geq y$$

iv. Bất đẳng thức tương đương với

$$(x+y-z)(a-b)^2 + (y+z-x)(b-c)^2 + (z+x-y)(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)(a-b)^2 + (y+z-x)[(a-b) + (c-a)]^2 + (z+x-y)(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y(a-b)^2 + (y+z-x)(c-a)(a-b) + z(c-a)^2 \geq 0. (*)$$

Nếu $y = 0$ thì điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$ trở thành $x^2 + z^2 \leq 2zx$

$$\Leftrightarrow (z-x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow z = x. \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } z(c-a)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Xét $y > 0$ khi đó biểu thức vế trái là một tam thức bậc hai với biến số $(a-b)$ và hệ số bậc hai là $y > 0$. Để chứng minh $(*)$ đúng ta sẽ chứng minh biệt thức $\Delta \leq 0$. Thật vậy ta có: $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (y+z-x)^2(c-a)^2 - 4yz(c-a)^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (y+z-x)^2 - 4yz \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do điều kiện có trong giả thiết.

2 Bất đẳng thức Schur suy rộng 2:

Định lý 3: Cho p, q, x, y, z, a, b, c là các số dương sao cho (a, b, c) và (x, y, z) là các bộ đơn điệu cùng chiều. Khi đó ta luôn có:

$$x[(a^p - b^p)(a^q - c^q) + (a^q - b^q)(a^p - c^p)] + y[(b^p - c^p)(b^q - a^q) + (b^q - c^q)(b^p - a^p)] \\ + z[(c^p - a^p)(c^q - b^q) + (c^q - a^q)(c^p - b^p)] \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Giả sử $a \geq b \geq c$ và $p \geq q \Rightarrow x \geq y \geq z$ và $\frac{p}{q} = m \geq 1$. Đặt $a_1 = a^p, b_1 = b^p, c_1 = c^p$,

khi đó: (1) $\Leftrightarrow \sum x[(a^m - b^m)(a - c) + (a - b)(a^m - c^m)] \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum x \left(\frac{a^m - b^m}{a - b} + \frac{a^m - c^m}{a - c} \right) (a - b)(a - c) \geq 0 \quad (2)$$

Theo định lí 2, bất đẳng thức (2) sẽ được chứng minh nếu ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^m - b^m}{a - b} + \frac{a^m - c^m}{a - c} &\geq \frac{b^m - c^m}{b - c} + \frac{b^m - a^m}{b - a} \geq \frac{c^m - a^m}{c - a} + \frac{c^m - b^m}{c - b} \Leftrightarrow \\ \frac{a^m - b^m}{a - b} &\geq \frac{a^m - c^m}{a - c} \geq \frac{b^m - c^m}{b - c} \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^m - y^m}{x - y}$, $m \geq 1; x, y > 0$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{mx^{m-1}(x - y) - (x^m - y^m)}{(x - y)^2} = \frac{(m - 1)x^m - mx^{m-1}y + y^m}{(x - y)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** mở rộng ta có:

$$(m - 1)x^m + y^m \geq m(x^{m-1}y)^{\frac{1}{m}} = mx^{m-1}y \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến}$$

$$\Rightarrow \frac{a^m - c^m}{a - c} \geq \frac{b^m - c^m}{b - c}; \frac{b^m - a^m}{b - a} \geq \frac{c^m - a^m}{c - a} \Leftrightarrow \frac{a^m - b^m}{a - b} \geq \frac{a^m - c^m}{a - c}$$

Vậy (3) đúng suy ra (đpcm)

Các bất đẳng thức hệ quả: Cho $a, b, c, m, p, q \geq 0$. Khi đó:

$$\sum_{cyc} [a^m(a^p - b^p)(a^q - c^q) + a^m(a^q - b^q)(a^p - c^p)] \geq 0$$

$$\sum_{cyc} (a^m b^n + a^n b^m)(c^p - a^p)(c^p - b^p) \geq 0$$

$$\sum_{cyc} (a^m b^n + a^n b^m) [(a^p b^p - a^p c^p)(a^q b^q - b^q c^q) + (a^q b^q - a^q c^q)(a^p b^p - b^p c^p)] \geq 0$$

3 Bất đẳng thức Schur suy rộng 3:

Định lí 4: Xét bất đẳng thức sau, trong mỗi hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\sum f(a - b)f(a - c)f(a - d)f(a - e) \geq 0$$

Khi đó để bất đẳng thức đúng thì hàm số f phải thỏa mãn 2 điều kiện sau đây:

- i. f là hàm đơn điệu tăng.
- ii. $xf(x) \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Phản chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Để bạn đọc có thể hình dung bất đẳng thức này ta xét hai ví dụ sau đây:

- Với $f(x) = x$ thì $f(x) = x$ là hàm tăng và $x.f(x) = x^2 \geq 0$, khi đó ta có:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e) + (b-a)(b-c)(b-d)(b-e) + (c-a)(c-b)(c-d)(c-e) + (d-a)(d-b)(d-c)(d-e) + (e-a)(e-b)(e-c)(e-d) \geq 0$$

- Với $f(x) = x^3$ thì $f(x) = x^3$ là hàm tăng và $x.f(x) = x^4 \geq 0$, khi đó ta có:

$$(a-b)^3(a-c)^3(a-d)^3(a-e)^3 + (b-a)^3(b-c)^3(b-d)^3(b-e)^3 + (c-a)^3(c-b)^3(c-d)^3(c-e)^3 + (d-a)^3(d-b)^3(d-c)^3(d-e)^3 + (e-a)^3(e-b)^3(e-c)^3(e-d)^3 \geq 0$$

4 Bất đẳng thức Schur mở rộng cho tam giác

Cho hai tam giác với độ dài các cạnh tương ứng $ABC(a, b, c)$; $A_1B_1C_1(a_1, b_1, c_1)$. Khi đó:

$$a_1bc(a^\alpha - b^\alpha)(a^\alpha - c^\alpha) + b_1ca(b^\alpha - c^\alpha)(b^\alpha - a^\alpha) + c_1ab(c^\alpha - a^\alpha)(c^\alpha - b^\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \geq 1 \quad (*)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{a_1}{a(b^\alpha - c^\alpha)} + \frac{b_1}{b(c^\alpha - a^\alpha)} + \frac{c_1}{c(a^\alpha - b^\alpha)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (b_1 + c_1 - a_1) \cdot \frac{a^\alpha(b-c) + bc(b^{\alpha-1} - c^{\alpha-1})}{bc(a^\alpha - b^\alpha)(a^\alpha - c^\alpha)} + (c_1 + a_1 - b_1) \cdot \left[\frac{1}{a(b^\alpha - c^\alpha)} + \frac{1}{c(a^\alpha - b^\alpha)} \right] \\ &\quad + (a_1 + b_1 - c_1) \cdot \frac{ab(a^{\alpha-1} - b^{\alpha-1}) + c^\alpha(a-b)}{ab(a^\alpha - c^\alpha)(b^\alpha - c^\alpha)} \geq 0 \quad \text{luôn đúng, suy ra (đpcm)} \end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta xét các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức này:

4.1. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC với độ dài ba cạnh là a, b, c . Khi đó ta có: $MA(a^\alpha - b^\alpha)(a^\alpha - c^\alpha) + MB(b^\alpha - c^\alpha)(b^\alpha - a^\alpha) + MC(c^\alpha - a^\alpha)(c^\alpha - b^\alpha) \geq 0, \forall \alpha \geq 1$

Chứng minh

Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên ba cạnh

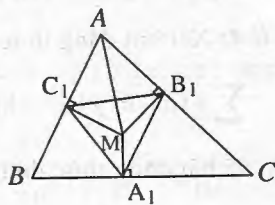
BC, CA, AB . Xét tứ giác MB_1AC_1 nội tiếp trong đường

tròn đường kính AM . Áp dụng định lý hàm số

Sine cho hai tam giác AB_1C_1 và ABC ta có:

$$B_1C_1 = MA \sin A = \frac{aMA}{2R}. \text{ Tương tự ta có: } C_1A_1 = \frac{bMB}{2R}; A_1B_1 = \frac{cMC}{2R}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) đối với 2 tam giác $A_1B_1C_1$ và ABC ta có (đpcm).



4.2. Bây giờ chúng ta sẽ xét một mệnh đề quan trọng để tạo ra các bất đẳng thức mới của (*)

Mệnh đề: Cho M là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng AM , BM , CM cắt các cạnh BC , CA , AB tại A_1 , B_1 , C_1 . Khi đó: $(aMA.MA_1; bMB.MB_1; cMC.MC_1)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh

Bổ đề: Với M là điểm nằm trong tam giác ABC , gọi S_A , S_B , S_C là diện tích của các tam giác MBC , MCA , MAB .

Khi đó: $S_A \cdot \overrightarrow{MA} + S_B \cdot \overrightarrow{MB} + S_C \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

Thật vậy, đặt $\overrightarrow{u} = S_A \cdot \overrightarrow{MA} + S_B \cdot \overrightarrow{MB} + S_C \cdot \overrightarrow{MC}$.

Chiếu vector $\overrightarrow{u}$ xuống cạnh BC theo phương $\overrightarrow{MA}$

ta nhận được $\overrightarrow{u_A} = S_B \cdot \overrightarrow{A_1B} + S_C \cdot \overrightarrow{A_1C}$. Khi đó

$$\frac{|\overrightarrow{A_1B}|}{|\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{S_{AA_1B}}{S_{AA_1C}} = \frac{S_{MA_1B}}{S_{MA_1C}} = \frac{S_{AA_1B} - S_{MA_1B}}{S_{AA_1C} - S_{MA_1C}} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{S_C}{S_B} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} = -\frac{S_C}{S_B} \Rightarrow \overrightarrow{u_A} = \overrightarrow{0}$$

Tương tự, chiếu $\overrightarrow{u}$ xuống cạnh CA theo phương $\overrightarrow{MB}$ ta nhận được

$$\overrightarrow{u_B} = S_C \cdot \overrightarrow{B_1C} + S_A \cdot \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{0}.$$

Vì $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ là các vector không cùng phương nên $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Hệ quả: Sử dụng mệnh đề trên và bất đẳng thức (*) ta có các bất đẳng thức sau:

$$\cdot \frac{m_a}{a}(a-b)(a-c) + \frac{m_b}{b}(b-c)(b-a) + \frac{m_c}{c}(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\cdot a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c \geq bc(m_b + m_c - m_a) + ca(m_c + m_a - m_b) + ab(m_a + m_b - m_c)$$

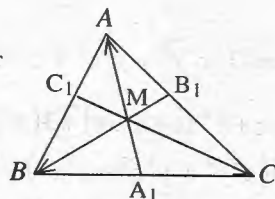
$$\cdot \sqrt{\frac{x}{y+z}}(x-y)(x-z) + \sqrt{\frac{y}{z+x}}(y-z)(y-x) + \sqrt{\frac{z}{x+y}}(z-x)(z-y) \geq 0, \forall x, y, z > 0$$

$$\cdot MA.MA_1(a-b)(a-c) + MB.MB_1(b-c)(b-a) + MC.MC_1(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\cdot m_a h_a(a-b)(a-c) + m_b h_b(b-c)(b-a) + m_c h_c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\cdot IA(a-b)(a-c) + IB(b-c)(b-a) + IC(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\cdot \cos A(a-b)(a-c) + \cos B(b-c)(b-a) + \cos C(c-a)(c-b) \geq 0$$



§7.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 3(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) + 9x^2y^2z^2 + 3(x^4yz + y^4zx + z^4xy) \geq \\
 &(x^4yz + y^4zx + z^4xy) + 3(x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y) + 3(x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2) + 6x^2y^2z^2 \\
 &\Leftrightarrow 3(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) + 3x^2y^2z^2 + 2(x^4yz + y^4zx + z^4xy) \\
 &\geq 3(x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y) + 3(x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2)
 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Schur*, ta có: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$

$$\Rightarrow x^4yz + y^4zx + z^4xy + 3x^2y^2z^2 \geq x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^2y^3z + y^2z^3x + z^3x^2y \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM*, ta có:

$$2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) = 2\left(\frac{2x^3y^3 + y^3z^3}{3} + \frac{2y^3z^3 + z^3x^3}{3} + \frac{2z^3x^3 + x^3y^3}{3}\right) \geq 2(x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y) \quad (2)$$

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = \frac{2x^3y^3 + z^3x^3}{3} + \frac{2y^3z^3 + x^3y^3}{3} + \frac{2z^3x^3 + y^3z^3}{3} \geq x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y \quad (3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{2x^3 + y^3}{3} + \frac{2y^3 + z^3}{3} + \frac{2z^3 + x^3}{3} \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

$$\Rightarrow x^4yz + y^4zx + z^4xy \geq x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y \quad (4)$$

Kết hợp các bất đẳng thức (1), (2), (3), (4) ta có điều cần phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ hoặc $x = t > 0, y = z = 0$ và các hoán vị.

Bài 2. Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{9}{(x + y + z)^2} \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $x + y + z = 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow T = \frac{1}{1 - z - (xy + yz + zx)} + \frac{1}{1 - y - (xy + yz + zx)} + \frac{1}{1 - x - (xy + yz + zx)} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} [(1 - x) - (xy + yz + zx)][(1 - y) - (xy + yz + zx)] \geq 9 \prod_{\text{cyc}} [(1 - x) - (xy + yz + zx)]$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \sum_{cyc} (1-x)(1-y) - \sum_{cyc} xy \sum_{cyc} [(1-x) + (1-y)] + 3 \left(\sum_{cyc} xy \right)^2 \geq \\
 &\geq 9 \left[(1-x)(1-y)(1-z) - \sum_{cyc} xy \sum_{cyc} (1-x)(1-y) + \left(\sum_{cyc} xy \right)^2 \sum_{cyc} (1-x) - \left(\sum_{cyc} xy \right)^3 \right] \\
 &\Leftrightarrow \left(1 + \sum_{cyc} xy \right) - 4 \sum_{cyc} xy + 3 \left(\sum_{cyc} xy \right)^2 \geq 9 \left[\left(\sum_{cyc} xy - xyz \right) - \sum_{cyc} xy \left(1 + \sum_{cyc} xy \right) + 2 \left(\sum_{cyc} xy \right)^2 - \left(\sum_{cyc} xy \right)^3 \right] \\
 &\Leftrightarrow 9 \left(\sum_{cyc} xy \right)^3 - 6 \left(\sum_{cyc} xy \right)^2 - 3 \sum_{cyc} xy + 9xyz + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} xy \left(3 \sum_{cyc} xy - 1 \right)^2 + \left(1 - 4 \sum_{cyc} xy + 9xyz \right) \geq 0
 \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh: $1 - 4 \sum_{cyc} xy + 9xyz \geq 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^3 + 9xyz - 4(x+y+z) \sum_{cyc} xy \geq 0 \Leftrightarrow$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) + 9xyz - 4(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 3xyz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - (x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0 \text{ (đúng theo bất đẳng thức Schur).}$$

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) + (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} a^2bc + \sum_{cyc} (a^3b + ab^3) \geq 4 \sum_{cyc} a^2b^2 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có:

$$(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) \geq (a+b+c)(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + (a^2bc + b^2ca + c^2ab) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3 \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (4)$$

Cộng (3) với (4) suy ra (2) đúng. Vậy (1) đúng (đpcm).

Bài 4. [Iranian Mathematical Olympiad 1996] Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh:

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức trở thành: $\sum_{sym} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** với $r = 1$ ta có:

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$$

Nhân 2 vế của bất đẳng thức trên với $2xyz$ rồi khai triển thành các tổng đối xứng.

Ta có: $\sum_{sym} (x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$, (1).

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{cases} x^5y + y^5z + z^5x \geq x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 \\ x^5y + y^5z + z^5x \geq x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{sym} [(x^5y - x^4y^2) + 3(x^5y - x^3y^3)] \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sum_{sym} (4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2) \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z > 0$ hoặc $x = y > 0, z = 0$

hoặc $y = z > 0, x = 0$ hoặc $z = x > 0, y = 0$.

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq \frac{9 \cdot \sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{a^2+bc} &= \frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc} + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc(b^2+c^2)}{a^2+bc}} = 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}} \\ \Rightarrow \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{abc}} \cdot \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} &\geq \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)} \quad (1) \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) - 3[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)] &= \\ = a^3+b^3+c^3+3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)} &\geq \frac{3}{a+b+c} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{abc}} \cdot \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} \geq \frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} \geq \frac{9 \cdot \sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \quad (\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \geq 0$.

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}} a\sqrt{b^2 - bc + c^2}}$$

$$\text{và } \left(\sum_{\text{cyc}} a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \right)^2 \leq (a + b + c) \sum_{\text{cyc}} a(b^2 - bc + c^2).$$

Từ đó bất đẳng thức được chứng minh khi ta chứng minh được bất đẳng thức

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a + b + c) \sum_{\text{cyc}} a(b^2 - bc + c^2).$$

$$\text{Thật vậy bất đẳng thức tương đương } (a^4 + b^4 + c^4) + abc(a + b + c) \geq \sum_{\text{cyc}} ab(a^2 + b^2),$$

đúng theo bất đẳng thức **Schur**.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 7. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq \frac{3(xy + yz + zx)}{x+y+z}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c}(y+z) &= \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{a}{b+c}(y+z) + y+z \right] - 2(x+y+z) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (b+c) \sum_{\text{cyc}} \frac{y+z}{b+c} - 2(x+y+z) \\ &\geq \frac{1}{2} (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 - 2(x+y+z) = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(x+y)(x+z)} - (x+y+z) \end{aligned}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(x+y)(x+z)} - (x+y+z) \geq \frac{3(xy + yz + zx)}{x+y+z} \quad (2)$$

Đặt $2m^2 = y+z, 2n^2 = z+x, 2p^2 = x+y$ ($m, n, p > 0$), khi đó (2) tương đương với

$$(mn + np + pm) - (m^2 + n^2 + p^2) \geq \frac{6(m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2) - 3(m^4 + n^4 + p^4)}{m^2 + n^2 + p^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} m^4 + \sum_{\text{cyc}} mn(m^2 + n^2) + \sum_{\text{cyc}} m^2np \geq 4 \sum_{\text{cyc}} m^2n^2 \quad (3)$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức } \textbf{Schur} \text{ ta có: } \sum_{\text{cyc}} m^4 + \sum_{\text{cyc}} m^2np \geq \sum_{\text{cyc}} mn(m^2 + n^2)$$

$$\text{Mặt khác theo bất đẳng thức } \textbf{AM - GM} \text{ ta có: } \sum_{\text{cyc}} mn(m^2 + n^2) \geq 2 \sum_{\text{cyc}} m^2n^2$$

Vậy (3) được chứng minh, nên (2) đúng, suy ra (đpcm).

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với $\sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc} \geq 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có $\frac{1}{c^3+abc} \geq \frac{1}{b^3+abc}$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{b+c} \geq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$a \geq b \geq c$, khi đó $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a}$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $3(a^4+b^4+c^4)+a^2+b^2+c^2+6 \geq 6(a^3+b^3+c^3)$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a^4 - 6a^3 + a^2 + 4a - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-1)^2 (3a^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a-b-c)^2 (3a^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (4a^2 + b^2 + c^2 - 4)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$4a^2 + b^2 + c^2 - 4 \geq 4b^2 + c^2 + a^2 - 4 \geq 4c^2 + a^2 + b^2 - 4$$

$$\text{và } 4c^2 + a^2 + b^2 - 4 \geq 4c^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - 4 = \frac{(3c-1)^2}{2} \geq 0. \text{ Theo định lí 2, ta có (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = (1; 1; 1) \vee \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+bc} - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{a}{a+bc} - \frac{2a(b+c)-bc}{2(ab+bc+ca)} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(3a+bc-2ab-2ac)bc}{2(ab+bc+ca)(a+bc)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{[(a+b+c)a+bc-2ab-2ac]bc}{a+bc} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+abc} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $\frac{1}{c^2+abc} \geq \frac{1}{b^2+abc} > 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{2a}{3a^2+bc} + \frac{2b}{3b^2+ca} + \frac{2c}{3c^2+ab} \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}, y = \sqrt{\frac{ca}{b}}, z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x(y+z)} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{2}{x^2+3yz}$. Ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x(y+z)} - \sum_{\text{cyc}} \frac{2}{x^2+3yz} = \sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{x(y+z)(x^2+3yz)} + \sum_{\text{cyc}} \frac{z(x-y)^2 [z(x-y)^2 + xy'(x+y)]}{xy(x+z)(y+z)(x^2+3yz)(y^2+3zx)}$$

Bất đẳng thức này đúng nếu ta chứng minh được: $\sum_{\text{cyc}} \frac{(x-y)(x-z)}{x(y+z)(x^2+3yz)} \geq 0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó:

$$\frac{1}{z(x+y)(z^2+3xy)} - \frac{1}{y(z+x)(y^2+3zx)} = \frac{(y-z)[x(y-z)^2 + yz(y+z)]}{yz(x+y)(x+z)(y^2+3zx)(z^2+3xy)} \geq 0$$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 13. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2\sqrt{b+c}}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{b^2\sqrt{c+a}}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{c^2\sqrt{a+b}}{\sqrt{c^2+ab}} \leq 3 \quad (1)$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\left(\frac{a^2\sqrt{b+c}}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{b^2\sqrt{c+a}}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{c^2\sqrt{a+b}}{\sqrt{c^2+ab}} \right)^2 \leq \sum_{\text{cyc}} a^2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} = 3 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}$$

Ta cần chứng minh $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} \leq 3$. Do $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, nên $a+b+c \leq 3$.

Ta chứng minh $\sum_{cyc} \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc} \leq a+b+c$, hay phải chứng minh $\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \geq 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $a \cdot \frac{a}{a^2+bc} - b \cdot \frac{b}{b^2+ca} = \frac{c(a^3-b^3)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \geq 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 14. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{1}{a} - \frac{b+c}{a^2+bc} \right) \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a} - \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)} \geq \sum_{cyc} \frac{bc(a-b)(a-c)}{abc(ab+bc+ca)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[(a-b)(a-c) \left(\frac{1}{a(a^2+bc)} - \frac{1}{a(ab+bc+ca)} \right) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b+c-a)(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có: $a+b-c \geq c+a-b \geq 0$ và $b(b^2+ca) \geq c(c^2+ab)$.

Vậy $b \cdot \frac{a+b-c}{c^2+ab} \geq c \cdot \frac{c+a-b}{b^2+ca}$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b=2c$ và các hoán vị.

Bài 15. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^3(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^3(a+b)}{c^2+ab} \leq a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sum_{cyc} \frac{2a^3(b+c)}{a^2+bc} - \sum_{cyc} a(b+c) &= \sum_{cyc} \frac{a(b+c)(a^2-bc)}{a^2+bc} \\ &= \sum_{cyc} \left[\frac{a(b+c)(a^2-bc)}{a^2+bc} - (a^2-bc) \right] + \sum_{cyc} (a^2-bc) \\ &= \sum_{cyc} \frac{(bc-a^2)(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \sum_{cyc} (a-b)(a-c) = 2abc \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc} \\ \text{và } \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} &= \sum_{cyc} \frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $\frac{1}{c^3+abc} \geq \frac{1}{b^3+abc}$.

Theo định lí 2, ta có $\sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a^3(b+c)}{a^2+bc} \geq \sum_{cyc} a(b+c) \Leftrightarrow \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^3(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^3(a+b)}{c^2+ab} \geq ab+bc+ca$$

Mặt khác, do $a \geq b \geq c$, nên $\frac{a^2}{a^2+bc} \geq \frac{b^2}{b^2+ca}$. Theo định lí 2, ta có $\sum_{cyc} \frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 \geq \sum_{cyc} \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} \Leftrightarrow \frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b^3(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c^3(a+b)}{c^2+ab} \leq a^2+b^2+c^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c > 0$ hoặc $a=b > 0, c=0$ và các hoán vị.

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^2+ca}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^2+ab}{a+b}} \geq \sqrt{3(a+b+c)}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có: $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{2(a^2+bc)}{b+c}} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}} \text{ hay } \sum_{cyc} M_a(a-b)(a-c) \geq 0$$

$$\text{trong đó: } M_a = \frac{1}{\sqrt{b+c}(\sqrt{2(a^2+bc)} + \sqrt{(a+b)(a+c)})}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó :

$$a(a+c)(b^2+ca) \geq b(b+c)(a^2+bc) \Rightarrow M_a \sqrt{a} \geq M_b \sqrt{b} \Rightarrow aM_a \geq bM_b.$$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c > 0$.

Bài 17. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}} \geq a+b+c$$

Chứng minh

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}} - (a+b+c) = \sum_{cyc} \left(\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}} - a \right)$$

$$= \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(b+c)(a^2+bc)} + (b+c)\sqrt{a}} (a-b)(a-c) \geq 0$$

Đặt $A = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(b+c)(a^2+bc)} + (b+c)\sqrt{a}}$, $B = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(c+a)(b^2+ca)} + (c+a)\sqrt{b}}$. Ta có:

$$A - B = \frac{\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)} + (c+a)\sqrt{ab} - \sqrt{b(a^2+bc)(b+c)} - (b+c)\sqrt{ab}}{(\sqrt{(b+c)(a^2+bc)} + (b+c)\sqrt{a})(\sqrt{(c+a)(b^2+ca)} + (c+a)\sqrt{b})}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ thì

$$\begin{aligned} & \sqrt{a(b^2+ca)(c+a)} + (c+a)\sqrt{ab} - \sqrt{b(a^2+bc)(b+c)} - (b+c)\sqrt{ab} \\ &= \frac{a(b^2+ca)(c+a) - b(a^2+bc)(b+c)}{\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)} + \sqrt{b(a^2+bc)(b+c)}} + (a-b)\sqrt{ab} \\ &= \frac{(a-b)(c(a^2+ab+b^2) + c^2(a+b) - abc)}{\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)} + \sqrt{b(a^2+bc)(b+c)}} + (a-b)\sqrt{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

(vì $a \geq b$ và $c(a^2+ab+b^2) - abc \geq c(2ab+ab) - abc = 2abc \geq 0$). Theo định lí 2 $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 18. Chứng minh: $\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{3} - \left[\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \right] \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{a}{3(a+b+c)} - \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \right] = \frac{1}{3(a+b+c)} \sum_{\text{cyc}} \frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $\begin{cases} a(a+2b) \geq b(b+2a) > 0 \\ a(2b+c) \geq b(2a+c) \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a \cdot \frac{a}{(2a+b)(2a+c)} \geq b \cdot \frac{b}{(2b+c)(2b+a)}$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c > 0$ hoặc $a=b > 0, c=0$ và các hoán vị.

Bài 19. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $3 \leq x+y+z \leq 6$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} \geq \sqrt{xy+yz+zx+15}$ (1)

Chứng minh

Đặt $a^2=1+x, b^2=1+y, c^2=1+z, d=a^2+b^2+c^2$, khi đó $a, b, c \geq 1$ và $9 \geq d \geq 6$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a+b+c \geq \sqrt{18-2d+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$$\Leftrightarrow 3d + 2(ab+bc+ca) \geq 18 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Từ $9 \geq d \geq 6$ và sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$3d(d-6) \geq \frac{1}{3}d^2(d-6) \geq (d-6)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

$$\text{Suy ra: } 3d + \frac{6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{d} \geq 18 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

$$\text{Ta chứng minh: } ab + bc + ca \geq \frac{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{d}$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Leftrightarrow \sum_{cyc} (b+c)(4a-b-c)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$(b+c)(4a-b-c) - (c+a)(4b-c-a) = (a-b)(a+b+6c) \geq 0$$

$$(c+a)(4b-c-a) - (a+b)(4c-a-b) = (b-c)(b+c+6a) \geq 0$$

$$\text{Mặt khác, } 9c^2 \geq 9 \geq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 8c^2 \geq a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow 4c - a - b \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } (b+c)(4a-b-c) \geq (c+a)(4b-c-a) \geq (a+b)(4c-a-b) \geq 0$$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$ hoặc $x = y = z = 1$.

Bài 20. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - bc}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b^2 - ca}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c^2 - ab}{a^2 + ab + b^2} \geq 0$$

Chứng minh

$$\text{Ta có: } \sum_{cyc} \frac{a^2 - bc}{b^2 + bc + c^2} = \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{b^2 + bc + c^2} + \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó

$$\frac{1}{b^2 + bc + c^2} - \frac{1}{a^2 + ac + c^2} = \frac{(a-b)(a+b+c)}{(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)} \geq 0$$

$$\text{Theo định lí 2, ta có } \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{b^2 + bc + c^2} \geq 0 \Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2 - bc}{b^2 + bc + c^2} \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

Bài 21. [Romani TST 2006] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[\frac{1}{a^2} - a^2 + 2(a-1) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-1)^2 \frac{1+2a-a^2}{a^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (4M_a + M_b + M_c)(a-b)(a-c) \geq 0 \text{ trong đó } M_a = \frac{1+2a-a^2}{a^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $M_b - M_a = \frac{(a-b)(a+b+2ab)}{a^2b^2} \geq 0$.

Tương tự, ta có: $M_c \geq M_b \geq M_a \Rightarrow 4M_c + M_a + M_b \geq 4M_b + M_c + M_a \geq 4M_a + M_b + M_c$.

Mặt khác, $4M_a + M_b + M_c = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{8}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 6 \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3\right) \geq 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 22. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Do $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, ta cần chứng minh $\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{b+c}$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} M_a (a-b)(a-c) \geq 0, \text{ trong đó } M_a = \frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})};$$

$$M_b = \frac{\sqrt{b}}{(c+a)\sqrt{c+a}(\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{b(c+a)})} \text{ và } M_c = \frac{\sqrt{c}}{(a+b)\sqrt{a+b}(\sqrt{c^2+ab}+\sqrt{c(a+b)})}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$, khi đó

$$(c+a)^2b - (b+c)^2a = (a-b)(ab-c^2) \geq 0$$

$$\text{và } (c+a)^2(b^2+ca) - (b+c)^2(a^2+bc) = c(a-b)(a^2+b^2+c^2+ac+bc-ab) \geq 0$$

$$\text{suy ra: } (c+a)\sqrt{b} \geq (b+c)\sqrt{a} \text{ và } (c+a)\sqrt{b^2+ca} \geq (b+c)\sqrt{a^2+bc} \Rightarrow M_a \geq M_b \geq 0$$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 23. Cho $x, y, z \geq 1$. Chứng minh rằng: $x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}$ (1)

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1) tương đương với } \ln(x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy}) \geq \ln[(xyz)^{xy+yz+zx}]$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2yz)\ln x + (y^2+2zx)\ln y + (z^2+2xy)\ln z \geq (xy+yz+zx)(\ln x + \ln y + \ln z)$$

$$\Leftrightarrow \ln x(x^2 - xy - xz + yz) + \ln y(y^2 - yx - yz + zx) + \ln z(z^2 - zx - zy + xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x \cdot (x-y)(x-z) + \ln y \cdot (y-z)(y-x) + \ln z \cdot (z-x)(z-y) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$, khi đó $\ln x \geq \ln y \geq 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ hoặc $x = 1, y = z$ và các hoán vị.

§7. 3. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR TRONG

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG 3 BIẾN

I. ĐA THỨC ĐỐI XỨNG 3 BIẾN

1. Định nghĩa: Giả sử $F(a, b, c)$ là đa thức với bộ 3 biến số thực a, b, c có dạng:

$$F(a, b, c) = \sum_{s=0}^N M_s(a, b, c), \text{ trong đó } M_s(a, b, c) = \sum_{i+j+k=s} T_{ijk} a^i b^j c^k \quad (i, j, k \in \mathbb{N})$$

Ta gọi $F(a, b, c)$ là một đa thức đối xứng nếu thỏa mãn tính chất sau

$$F(a', b', c') = F(a, b, c) \text{ với } (a', b', c') \text{ là một hoán vị tùy ý của } (a, b, c)$$

2. Đa thức đối xứng Viète:

2.1. Định nghĩa:

$p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$ là các đa thức đối xứng Viète.

2.2. Mệnh đề:

Mọi đa thức đối xứng $F(a, b, c)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $T(p, q, r)$

2.3. Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

- $(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r$
- $(a+b)(b+c) + (c+a)(a+b) + (c+a)(b+c) = p^2 + q$
- $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$
- $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$
- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr$
- $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2$
- $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = pq - 3r$
- $a^4 + b^4 + c^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr) = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr$
- $ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(a^2 + c^2) = p^2q - 2q^2 - pr$

Ngoài ra, chúng ta có thể thiết lập các hằng đẳng thức có bậc lớn hơn 4.

II. XÂY DỰNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỦA p, q, r

1. Xây dựng các bất đẳng thức từ bất đẳng thức Schur:

1.1. Bất đẳng thức Schur: Cho a, b, c là các số thực dương, thì:

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0, \forall r \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b$ và $c=0$ cùng các hoán vị của nó.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó:

$$\begin{aligned} & a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \\ &= (a-b)[a^r(a-c) - b^r(b-c)] + c^r(a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

1.2. Các trường hợp đặc biệt của định lý Schur

$$\bullet r=0: a^0(a-b)(a-c) + b^0(b-c)(b-a) + c^0(c-a)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow p^2 - 3q \geq 0$$

$$\bullet r=1: a^1(a-b)(a-c) + b^1(b-c)(b-a) + c^1(c-a)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow p^3 - 4pq + 9r \geq 0$$

$$\bullet r=2:$$

$$a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0$$

$$\boxed{p^2 \geq 3q; \quad p^3 - 4pq + 9r \geq 0; \quad p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0}$$

2. Xây dựng các bất đẳng thức cơ bản theo p, q, r :

Sử dụng bất đẳng thức *Schur* và *AM - GM* ta có các bất đẳng thức quan trọng sau đây:

$$\begin{array}{llll} p^2 \geq 3q & p^2q + 3pr \geq 4q^2 & p^2q \geq 3pr + 2q^2 & q^3 + 9r^2 \geq 4pqr \\ q^2 \geq 3pr & pq^2 + 3qr \geq 4p^2r & pq^2 \geq 2p^2r + 3qr & 2q^3 + 9r^2 \geq 7pqr \\ p^3 \geq 27r & p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q & 2p^3 + 9r \geq 7pq & p^3r + q^3 \geq 6pqr \end{array}$$

Chứng minh

$$\bullet p^2 \geq 3q \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

$$\bullet q^2 \geq 3pr \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 - 3(a+b+c)abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq 0. \text{ Hệ quả: } p^2q^2 \geq 9pqr \Leftrightarrow pq \geq 9r$$

$$\bullet p^3 \geq 27r \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 27abc \text{ (đúng theo AM - GM)}$$

$$\bullet p^2q + 3pr \geq 4q^2 \Leftrightarrow ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq 0$$

$$\bullet pq^2 + 3qr \geq 4p^2r \Leftrightarrow a^3(b-c)^2 + b^3(c-a)^2 + c^3(a-b)^2 \geq 0$$

$$\bullet p^4 + 3q^2 \geq 4p^2q \Leftrightarrow (p^2 - 3q)(p^2 - q) \geq 0 \text{ (đúng do } p^2 \geq 3q)$$

$$\bullet p^2q \geq 3pr + 2q^2 \Leftrightarrow (p^2q + 3pr - 4q^2) + 2(q^2 - 3pr) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab+c^2)(a-b)^2 + (bc+a^2)(b-c)^2 + (ca+b^2)(c-a)^2 \geq 0$$

$$\bullet \quad pq^2 \geq 2p^2r + 3qr \Leftrightarrow (pq^2 + 3qr - 4p^2r) + 2r(p^2 - 3q) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (abc+c^3)(a-b)^2 + (abc+a^3)(b-c)^2 + (abc+b^3)(c-a)^2 \geq 0$$

$$\bullet \quad q^3 + 9r^2 \geq 4pqr$$

$$\Leftrightarrow ab(ab-bc)(ab-ca) + bc(bc-ca)(bc-ab) + ca(ca-ab)(ca-bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Trong đó ta đặt $x=ab, y=bc, z=ca$ ở biểu thức vế trái

$$\bullet \quad 2p^3 + 9r \geq 7pq \Leftrightarrow 2(p^3 - 4pq + 9r) + (pq - 9r) \geq 0$$

$$\bullet \quad 2q^3 + 9r^2 \geq 7pqr \Leftrightarrow 2(q^3 - 4pqr + 9r^2) + r(pq - 9r) \geq 0$$

$$\bullet \quad p^3r + q^3 \geq 6pqr \Leftrightarrow (p^2 - 3q)pr + q(q^2 - 3pr) \geq 0$$

III. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 1 [Balkan Contest] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh: $2(a^2 + b^2 + c^2) + 12 \geq 3(a+b+c) + 3(ab+bc+ca)$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2(p^2 - 2q) + 12 \geq 3p + 3q \Leftrightarrow 2p^2 - 3p - 7q + 12 \geq 0 \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có $p^3 + 9r \geq 4pq \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3 + 9r}{4q} = \frac{p^3 + 9}{4q}$

Từ đó suy ra (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$2p^2 - 3p - \frac{7(p^3 + 9)}{4p} + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(p-3)(p^2 - 9p + 21)}{4p} \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 3$$

Ta có: $p = a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} = 3 \Rightarrow$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng: $3(a^2 + b^2 + c^2) + abc \geq 10$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3p^2 - 6q + r \geq 10 \Leftrightarrow 3p^2 - 7q - 6 \geq 0 \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có $p^3 + 9r \geq 4pq \Leftrightarrow p^3 + 9(4-q) \geq 4pq \Leftrightarrow q \leq \frac{36 + p^3}{4p + 9}$

$$3p^2 - 7\frac{36+p^3}{4p+9} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 5p^3 + 27p^2 - 24p - 306 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)(5p^2 + 42p + 102) \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 3$$

Ta có: $q^3 = (ab + bc + ca)^3 \geq 27(abc)^2 = 27r^2 = 27(4-q)^2$

Nếu $q < 3$ thì $27(4-q)^2 > 27 > q^3 \Rightarrow$ vô lý. Vậy $q \geq 3 \Rightarrow p^2 \geq 3q \geq 9 \Rightarrow p \geq 3 \Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 3. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 5abc \geq 8$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow p^2 - 2q + 5r \geq 8 \Leftrightarrow p^2 - 7q + 12 \geq 0$ (để ý là $q + r = 4$ và $p \geq q \geq 3$)

Nếu $p \leq 4$, sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} \Leftrightarrow 4 - q \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3 + 36}{4p + 9}$$

Ta chỉ cần chứng minh $p^2 - 7\frac{p^3 + 36}{4p + 9} + 12 \geq 0 \Leftrightarrow (p-3)(p^2 - 16) \leq 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì $3 \leq p \leq 4$.

Nếu $p \geq 4$ thì $p^2 \geq 4q$ nên $p^2 - 2q + 5r \geq p^2 - 2q \geq p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2} \geq 8$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ hoặc $a = b = 2, c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Chú ý rằng $k = 5$ cũng là hằng số tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$: $a^2 + b^2 + c^2 + kabc \geq 3 + k$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $q = 3$,

khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{p^2 + q}{pq - r} \geq \frac{p}{2q} + \frac{3}{p} \Leftrightarrow \frac{p^2 + 3}{3p - r} \geq \frac{p}{6} + \frac{3}{p}$

$\Leftrightarrow (p^2 + 3)6p - p^2(3p - r) - 18(3p - r) \geq 0 \Leftrightarrow 3p^3 + p^2r - 36p + 18r \geq 0$ (2)

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \Leftrightarrow p^3 - 12p + 9r \geq 0$

Mặt khác, $p^2 \geq 3q = 9$, suy ra: $3p^3 + p^2r - 36p + 18r = 3(p^3 - 12p + 9r) + r(p^2 - 9) \geq 0$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và hoán vị.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực không âm và $k \geq 3$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{k}{a+b+c} \geq \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{ab+bc+ca}} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{p^2+q}{pq-r} + \frac{k}{p} \geq \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{q}}. \text{ Ta có: } \frac{p^2+q}{pq-r} + \frac{k}{p} \geq \frac{p^2+q}{pq} + \frac{k}{p} = \frac{p}{q} + \frac{k+1}{p} \geq \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{q}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(0; t; \frac{k-1+\sqrt{k^2-2k-3}}{2}t\right); \left(0; t; \frac{k-1-\sqrt{k^2-2k-3}}{2}t\right)$$

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq 2 \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **Buniakowski** ta có:

$$VT(1) = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q} + \frac{3 \cdot \sqrt[3]{r}}{p} \geq 4 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $r=1$. Khi đó $(2) \Leftrightarrow p^3 + 3q \geq 4pq$

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \Rightarrow p^3 + 3q \geq 4pq + 3(q-3)$

Mặt khác, $q^3 \geq 27r^2 = 27 \Rightarrow q \geq 3 \Rightarrow p^3 + 3q \geq 4pq \Rightarrow (\text{đpcm})$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 7. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{27}{2} \geq 4(ab+bc+ca) + \frac{a^2b^2}{a+b} + \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{a^2c^2}{c+a} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{27}{2} \geq 4q + \frac{q^3 - 2pqr + 3r^2}{pq-r} \Leftrightarrow \frac{27}{2} \geq 4q + \frac{q^3 - 6qr + 3r^2}{3q-r}$$

$$\Leftrightarrow 2q^3 + 24q^2 - 81q - 20qr + 6r^2 + 27r \leq 0$$

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ và $pq \geq 9r$, suy ra:

$$4pq - p^3 \leq 9r \leq pq \Leftrightarrow 12q - 27 \leq 9r \leq 3q \Leftrightarrow \frac{4q-9}{3} \leq r \leq \frac{q}{3}. \text{ Ta chỉ cần chứng minh:}$$

$$2q^3 + 24q^2 - 81q - 20q \cdot \frac{4q-9}{3} + \frac{6q^2}{9} + \frac{27q}{3} \leq 0 \Leftrightarrow 2q^3 - 2q^2 - 12q \leq 0 \Leftrightarrow 2q(q+2)(q-3) \leq 0 \quad (2)$$

Ta có: $3q \leq p^2 = 9 \Rightarrow q \leq 3 \Rightarrow (2)$ đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 8. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$.

Tìm hằng số k tốt nhất sao cho: $a + b + c + kabc \geq k + 3$ (1) đúng $\forall a, b, c \geq 0$

Giải

Cho $a = 0, b = c = 3$, khi đó (1) $\Leftrightarrow 6 \geq k + 3 \Leftrightarrow k \leq 3$. Ta chứng minh (1) đúng với $k = 3$, tức là chứng minh: $a + b + c + 3abc \geq 6$

$$\Leftrightarrow 2(a + b + c) - (ab + bc + ca) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2p - q - 3 \geq 0 \quad (2)$$

Từ điều kiện $q + 6r = 9$ ta suy ra $q \geq 3 \Rightarrow p \geq 3$. Nếu $p \geq 6$ thì ta có đpcm.

Xét $p \in [3; 6]$: Theo bất đẳng thức **Schur** ta có: $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$

$$\Leftrightarrow p^3 - 4pq + 9 \cdot \frac{9 - q}{6} \geq 0 \Leftrightarrow 2p^3 + 27 \geq (8p + 3)q \Leftrightarrow q \leq \frac{2p^3 + 27}{8p + 3}. \text{ Khi đó:}$$

$$2p - q - 3 \geq 2p - \frac{2p^3 + 27}{8p + 3} - 3 = \frac{-2p^3 + 16p^2 - 18p - 36}{8p + 3} = \frac{2(p+1)(p-3)(6-p)}{8p+3} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ hoặc $a = 0, b = c = 3$ và các hoán vị.

Vậy $k = 3$ là hằng số cần tìm.

Bài 9. Chứng minh với các số thực không âm a, b, c ta có:

$$(a^4 + b^4 + c^4)(ab + bc + ca) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $ab + bc + ca = 1$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr)q \geq (p^2 - 2q)(q^2 - 2pr)$$

$$\Leftrightarrow p^4 - 4p^2 + 2 + 4pr \geq p^2 - 2p^3r - 2 + 4pr \Leftrightarrow p^4 - 5p^2 + 4 + 2p^3r \geq 0$$

Theo bất đẳng thức **Schur** ta có: $p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0 \Leftrightarrow p^4 - 5p^2 + 4 + 6pr \geq 0$.

Mặt khác $p^2 \geq 3q = 3$, suy ra:

$$p^4 - 5p^2 + 4 + 2p^3r = (p^4 - 5p^2 + 4 + 6pr) + 2pr(p^2 - 3) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc $a = t, b = c = 0$ và các hoán vị.

Bài 10. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4 \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5 \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca$ và $r = abc$.

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $p = 1$.

$$\text{Bất đẳng thức (1) trở thành } \frac{1-2q+3r}{q-r} + \frac{4q}{1-3q+3r} \geq 5 \quad (2)$$

Ta có: $VT(2) \geq 1 + \frac{1-3q+3r}{q} + \frac{4q}{1-3q+3r} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{1-3q+3r}{q} \cdot \frac{4q}{1-3q+3r}} = 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x, x, 0\right)$ và $(a, b, c) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}x, x, 0\right)$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)} + 1 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (1)

Chứng minh

Ta có: $(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) = a^3b^3c^3 + a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 + a^3 + b^3 + c^3 + 1$
 $= r^3 + q^3 - 3pqr + 3r^2 + p^3 - 3pq + 3r + 1 = p^3 - 6pq + q^3 + 8$

$$(1) \Leftrightarrow p^3 - 6pq + q^3 + 8 \geq (q-1)^3 \Leftrightarrow p^3 + 9 - 6pq + 3q^2 - 3q \geq 0$$

Do $r = 1$ nên ta có $p \geq 3, q \geq 3$. Xét hai trường hợp:

• Nếu $q \geq p \geq 3$ thì $p^3 + 9 - 6pq + 3q^2 - 3q = (p^3 + 9 - 4pq) + (3q - 2p - 3)q \geq 0$

• Nếu $p \geq q \geq 3$ thì

$$p^3 + 9 - 6pq + 3q^2 - 3q = (p^2 - 3q)(p - 3) + 3(q - 1)(q - 3) + 3p(p - q) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 12. [Iran 1996] Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \right) \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x + y + z = p$, $xy + yz + zx = q$ và $xyz = r$. Ta có:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz = pq - r$$

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow q \cdot \frac{(p^2+q)^2 - 4p(pq-r)}{(pq-r)^2} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3pq(p^3 - 4pq + 9r) + q(p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr) + r(pq - 9r) \geq 0 \quad (2)$$

Từ kết quả trong 1.2 suy ra (2) đúng suy ra (đpcm)

Bài 13. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} \leq \frac{27}{8}$

Chứng minh

Đặt $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$. Ta có:

$$(1-xy)(1-yz)(1-zx) = 1 - q + pr - r^2 = 1 - q + r - r^2$$

$$(1-xy)(1-yz) + (1-xy)(1-zx) + (1-yz)(1-zx) = 3 - 2q + pr = 3 - 2q + r$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3-2q+r}{1-q+r-r^2} \leq \frac{27}{8} \Leftrightarrow 3-11q+19r-27r^2 \geq 0.$$

Ta có: $p^3 \geq 27r$ nên $27r^2 \leq p^3 r = r$, do đó ta chỉ cần chứng minh: $3-11q+19r-r \geq 0$

$$\Leftrightarrow 11(xy+yz+zx) - 18xyz \leq 3 \quad (2). \text{ Không mất tính tổng quát giả sử } z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow z \leq \frac{1}{3}$$

$$VT(2) = 11z(x+y) + xy(11-18z) \leq 11z(x+y) + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (11-18z) = 11z(1-z) + \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (11-18z)$$

$$\text{Ta chứng minh: } 11z(1-z) + \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (11-18z) \leq 3 \Leftrightarrow 18z^3 - 3z^2 - 4z + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(3z-1)^2(2z+1) \geq 0 \text{ đúng nên (2) đúng. Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$$

Bài 14. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ Chứng minh: $\frac{z-xy}{x^2+xy+y^2} + \frac{y-zx}{x^2+xz+z^2} + \frac{x-yz}{y^2+yz+z^2} \geq 2 \quad (1)$

Chứng minh

Đặt $p=x+y+z=1$, $q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Suy ra $xy=q-z(x+y)=q-z+z^2$

$$\text{Ta có: } x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = (x+y)(1-z) - xy = x+y-q = 1-z-q$$

$$\text{Tương tự: } y^2+yz+z^2 = 1-x-q, \quad x^2+xz+z^2 = 1-y-q$$

$$\text{Đề ý rằng } x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = q^2 - 2r, \quad x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = q - 3r$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{z-xy}{1-z-q} + \frac{y-zx}{1-y-q} + \frac{x-yz}{1-x-q} \geq 2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{[(1-q)^2 + xy - (x+y)(1-q)](z-xy)}{(1-q)q^2 - r} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-q)^3 - 2q(1-q) + 3r + (1-q)(q-3r) - (q^2 - 2r)}{(1-q)q^2 - r} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (1-q)^3 - (1-q)(q+3r) - q^2 + 5r \geq 2[(1-q)q^2 - r] \Leftrightarrow q^3 + q^2 - 4q + 3qr + 4r + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9q^3 + 9q^2 - 36q + 9r(3q+4) + 9 \geq 0. \text{ Theo Schur, ta có } 9r \geq 4q-1,$$

$$\text{do đó ta chỉ cần chứng minh } 9q^3 + 9q^2 - 36q + (4q-1)(3q+4) + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3q-1)(3q^2 + 8q - 5) \geq 0. \text{ Bất đẳng thức này đúng vì } 3q \leq (x+y+z)^2 = 1.$$

$$\text{Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Bài 15. Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{4(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3} \geq 5 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tổng quát, ta giả sử $x + y + z = 1$, và đặt $xy + yz + zx = q$, $xyz = r$.

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\frac{1-2q+3r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 4$

Ta có: $\frac{1-3q+4r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq \frac{1-3q+3r}{q-r} + \frac{4(q-r)}{1-3q+3r} \geq 2\sqrt{\frac{1-3q+3r}{q-r} \cdot \frac{4(q-r)}{1-3q+3r}} = 4$

Bài 16. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$, chứng minh:

$$\frac{x+y+z}{xy+yz+zx} \leq 1 + \frac{1}{48}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$$

Chứng minh

Do $x, y, z > 0$, $xy + yz + zx + xyz = 4$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho

$x = \frac{2a}{b+c}$, $y = \frac{2b}{c+a}$, $z = \frac{2c}{a+b}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$P(a, b, c) = \frac{(a+b+c)^2 \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} - \frac{6 \sum_{cyc} a(a+b)(a+c)}{\sum_{cyc} ab(a+b)} + 12 \geq 0$$

Chuẩn hóa cho $p = 1$, khi đó $q \in [0, 1]$. Bất đẳng thức tương đương

$$f(r) = 729r^3 + 27(22q^2 - 1)r^2 + 27(6q^4 - 4q^2 + 1)r + (q^2 - 1)(13q^4 - 5q^2 + 1) \leq 0$$

Ta có $f'(r) = 27(r(81r + 44q^2 - 2) + 6q^4 - 4q^2 + 1)$

Sử dụng bất đẳng thức **Schur** ta có: $81r + 44q^2 - 2 \geq 3(1 - 4q^2) + 44q^2 - 2 = 1 + 32q^2 > 0$

Do đó $f'(r) > 0$, suy ra $f(r)$ là hàm đồng biến. Như vậy

$$f(r) \leq f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right) = \frac{2}{27}q^2(q-1)(q+2)^2(4q^4 + 14q^3 + 15q^2 - 7q + 1) \leq 0$$

Bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 17. Cho các số dương a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \right)$$

Chứng minh

Bổ đề: Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$, đặt $ab + bc + ca = \frac{1-q^2}{3}$

($q \geq 0$) và $r = abc$, khi đó ta có $\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \leq r \leq \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$

Chứng minh: Ta có $0 \leq (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -27r^2 + 2(1-3q^2)r + \frac{1}{27}(1-q^2)^2(4q^2-1)$

$$= -\frac{1}{27} [27r - (1-q)^2(1+2q)] [27r - (1+q)^2(1-2q)]$$

Chú ý rằng $(1-q)^2(1+2q) - (1+q)^2(1-2q) = 4q^3 \geq 0$ và đây là một tam thức bậc 2 theo r nên theo định lý về dấu của tam thức bậc 2, ta phải có:

$$\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27} \leq r \leq \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$$

Áp dụng: Chuẩn hóa cho $p=1$, khi đó $q \in [0,1]$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** và bất đẳng thức **Schur**, ta có

$$\frac{(1-q^2)^2}{9} \geq 3r \geq \max \left\{ 0, \frac{1-4q^2}{9} \right\}. \text{ Bằng biến đổi tương đương, bất đẳng thức được viết lại}$$

$$f(r) = -486(9-q^2)r^3 + 27(q^6 + 64q^4 - 35q^2 + 24)r^2 + 9(4q^2 - 1)(11q^4 - 4q^2 + 2)r + q^2(1-q^2)^3(2q^4 + 8q^2 - 1) \geq 0$$

Ta có

$$f'(r) = 9(-162(9-q^2)r^2 + 6(q^6 + 64q^4 - 35q^2 + 24)r + (4q^2 - 1)(11q^4 - 4q^2 + 2))$$

$$\begin{aligned} f''(r) &= 54(-54(9-q^2)r + q^6 + 64q^4 - 35q^2 + 24) \\ &\geq 54(-2(1-q^2)^2(9-q^2) + q^6 + 64q^4 - 35q^2 + 24) \\ &= 162(q^6 + 14q^4 + q^2 + 2) > 0 \end{aligned}$$

Suy ra $f'(r)$ là hàm đồng biến, do đó

$$+, \text{ Nếu } 2q \geq 1, f'(r) \geq f'(0) = (4q^2 - 1)(11q^4 - 4q^2 + 2) \geq 0$$

Do đó $f(r)$ là hàm đồng biến, suy ra $f(r) \geq f(0) = q^2(1-q^2)^3(2q^4 + 8q^2 - 1) > 0$

$$+, \text{ Nếu } 1 \geq 2q, f'(r) \geq f'\left(\frac{1-4q^2}{27}\right) = (1-4q^2)(q^2+2)(2q^4+17q^2+6) \geq 0$$

Do đó $f(r)$ là hàm đồng biến nên ta có

$$f(r) \geq f\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right) = \frac{1}{81} q^2(2-q)(1+q)^2(6q^3+4q^2-7q+4)(5q^2-2q+2)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 18. Cho $x, y, z \geq 0$, chứng minh rằng:

$$x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5 \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $p = x+y+z, q = xy+yz+zx$ và $r = xyz$. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $p=1$.

Ta có: $x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) = x^3(xy+xz) + y^3(yz+yx) + z^3(zx+zy)$

$$= (x^3 + y^3 + z^3)(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)xyz = (1 - 3q + 3r)q - (1 - 2q)r = (1 - 3q)q + (5q - 1)r$$

Nếu $q \leq \frac{1}{5}$ thì ta có: $(1 - 3q)q + (5q - 1)r \leq (1 - 3q)q = \frac{1}{3}(1 - 3q)3q \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1 - 3q + 3q}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$

Nếu $q > \frac{1}{5}$ thì ta phải chứng minh $f(q) = (1 - 3q)q + (5q - 1)r \leq \frac{1}{12}$

Ta có: $f'(q) = 1 - 6q + 5r < 5r - q < 0$ (do $q \geq 9r$) Vậy $f(q)$ nghịch biến với $q > \frac{1}{5}$,

suy ra $f(q) < f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{25} < \frac{1}{12}$. Với $p = 1$, đẳng thức đạt được khi $r = 0, 3q = \frac{1}{2}$

Vậy đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0; y = (2 \pm \sqrt{3})z$ và các hoán vị.

Bài 19. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 9\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 5$ (1)

Chứng minh

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $p = 1$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành $\frac{1 - 3p + 3r}{q - r} + 9\frac{q}{1 - 2q} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{q - r} + \frac{9q}{1 - 2q} \geq 8$ (2)

VT(2) $\geq \frac{1}{q} + \frac{9q}{1 - 2q} = 2 + \frac{1 - 2q}{q} + \frac{9q}{1 - 2q} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{1 - 2q}{q} \cdot \frac{9q}{1 - 2q}} = 2 + 2\sqrt{9} = 8$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}x, x, 0\right)$ và $(a, b, c) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x, x, 0\right)$ và các hoán vị.

Bài 20. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $xy + yz + zx \geq 12(x^3 + y^3 + z^3)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

Chứng minh

Đặt $p = x + y + z = 1, q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$q \geq 12[p(p^2 - 3q) + 3r](q^2 - 2pr) \Leftrightarrow q \geq 12(1 - 3q + 3r)(q^2 - 2r)$ (2)

Do $pq \geq 9r$ nên $3r \leq \frac{q}{3}$, suy ra: $12(1 - 3q + 3r)(q^2 - 2r) \leq 12\left(1 - 3q + \frac{q}{3}\right)q^2 = 4q^2(3 - 8q)$

Để chứng minh (2) ta chỉ cần chứng minh: $4q(3 - 8q) \leq 1 \Leftrightarrow (1 - 4q)(1 - 8q) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi $q \geq \frac{1}{4}$, vậy ta chỉ cần chứng minh (2) với $0 \leq q \leq \frac{1}{4}$

Bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow q \geq 12q^2(1 - 3q) + 12r(3q^2 + 6q - 2) - 72r^2$

Ta có: $3q^2 + 6q - 2 < 0, \forall 0 \leq q \leq \frac{1}{4}$, do đó ta chỉ cần chứng minh $q \geq 12q^2(1 - 3q)$ (3)

Thật vậy, theo AM - GM $12q(1 - 3q) = 4 \cdot 3q(1 - 3q) \leq [3q + (1 - 3q)]^2 = 1 \Rightarrow (3)$ đúng

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (x, y, z) \sim \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$ hoặc $(x, y, z) \sim (1; 0; 0)$

IV. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$

Bài 2. Chứng minh: $\frac{(a+b+c+d)^2}{16} + \frac{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{9(abc+abd+acd+bcd)} \geq 1 \quad \forall a, b, c, d > 0$.

Bài 3. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + abc+abd+acd+bcd = 16.$$

Chứng minh rằng: $a+b+c+d \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

Bài 4. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ($3 \leq n \in \mathbb{N}$) thỏa mãn

$$(n-2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} a_i a_j a_k = 4 \binom{n}{3}.$$

Chứng minh rằng: $\binom{n}{2} \sum_{i=1}^n a_i \geq \binom{n}{1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$ và $m, n, p \in \mathbb{R}$ với $m \geq n + p$. Chứng minh rằng:

$$a^m b^n (a^p - b^p) + b^m c^n (b^p - c^p) + c^m a^n (c^p - a^p) \geq 0$$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, đặt $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$; $G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$; $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$.

Chứng minh: $\frac{A}{H} \leq -1 + \left(\frac{A}{G}\right)^n$ nếu n là số chẵn và $\frac{A}{H} \leq \frac{2-n}{n} + \frac{2(n-1)}{n} \left(\frac{A}{G}\right)^n$ nếu n là số lẻ.

Bài 8. Cho $A = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 - abcd$; $B = \frac{(a+b+c+d)^3}{16} - (abc+abd+acd+bcd)$

$$C = \frac{3}{8}(a+b+c+d)^2 - (ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Chứng minh rằng: $2A + 13B \geq 5C$, $\forall a, b, c, d \geq 0$

Bài 9. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác với diện tích S .

$$\text{Đặt } A = \sum_{\text{cyc}} ab; B = \frac{1}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Chứng minh rằng: $\frac{(A-B)(3A-5B)}{12} \leq S^2 \leq \frac{(A-B)^2}{12}$

Bài 10. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $(8a^2 + bc)(8b^2 + ca)(8c^2 + ab) \leq (a+b+c)^6$ (1)

Bài 11. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh $\frac{ab+4bc+ca}{a^2+bc} + \frac{bc+4ca+ab}{b^2+ca} + \frac{ca+4ab+bc}{c^2+ab} \geq 6$

Bài 12. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c} \geq 2$

Bài 13: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{9}{4} \leq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leq \frac{27}{4(x+y+z)^2}$

Bài 14: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $(x+y+z)^5 \geq \left(\frac{9}{4\sqrt{6}-9}\right)(x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx)$

Bài 15: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài cạnh của một tam giác thì

$$\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{(b-c)^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{(c-a)^2}{c^2+ca+a^2} \leq 2$$

Bài 16: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + 2 \left[\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \right]^{2/3} \geq 2$

Bài 17: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz \geq 6$

Bài 18. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$

Chứng minh rằng: $(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2 \leq (1+x)(1+y)(1+z)$

Bài 19. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz=1 \end{cases}$ Chứng minh:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1$$

Bài 20. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ Chứng minh: $(1-xy)(1-yz)(1-zx) \geq \frac{8}{27}$

Bài 21. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $1 \leq \frac{x}{1-yz} + \frac{y}{1-zx} + \frac{z}{1-xy} \leq \frac{9}{8}$

Bài 22. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \leq \frac{1}{32}$

Bài 23. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)} \leq \frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{(a+b+c)^3}{6abc(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 24. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 y^2}{1+x+y} + \frac{y^2 z^2}{1+y+z} + \frac{z^2 x^2}{1+z+x} \leq 1$$

Bài 25. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 y}{4 - xy} + \frac{y^2 z}{4 - yz} + \frac{z^2 x}{4 - zx} \leq 1$$

Bài 26. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng $k = \sqrt{2} - 1$ là hằng số tốt nhất để bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}} + \frac{8kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq k + 1$$

Bài 27. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c$$

Bài 28. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4a}{a^2 + 3bc} + \frac{4b}{b^2 + 3ca} + \frac{4c}{c^2 + 3ab}$$

Bài 29. [Tập chí Crux] Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}$$

Bài 30. Cho các số thực a, b, c, k thỏa mãn $a, b, c \geq -\frac{k}{3}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a+2b+k}{c+2b+k} + \frac{b+2c+k}{a+2c+k} + \frac{c+2a+k}{b+2a+k} \geq 3$

Bài 31. Cho $x, y, z, k > 0$. Chứng minh:

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x}{y+z} + k \cdot \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{x^3+y^3+z^3} \geq 2\sqrt{k} + 1$$

Bài 32. Tìm số a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $x, y, z \geq 0$

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Bài 34. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \geq 5$

Bài 35. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh: $12 + 9abc \geq 7(ab+bc+ca)$

Bài 36. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{2}abc \geq \frac{9}{2}$

Bài 37. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \geq 10$

Bài 38. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}$

Bài 39. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh: $\frac{3}{abc} + 5(a+b+c) \geq 18$

§8. ĐỊNH LÝ MUIRHEAD VÀ BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG

§8.1. GIỚI THIỆU VỀ ĐỊNH LÝ MUIRHEAD

I. ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Giả sử các biến số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ và bộ số mũ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$

Ký hiệu: Tập biến số $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; Tập số mũ $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

1. Định nghĩa: Đa thức đối xứng S với các biến số của tập X và số mũ của tập α là

$$S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} \cdot S_{X \setminus \{a_1\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_1\}} + \dots + a_n^{\alpha_n} \cdot S_{X \setminus \{a_n\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_n\}}$$

Nhận xét: Nếu nhân khai triển mà không ước lược các số hạng đồng dạng thì trong biểu thức khai triển của S_X^α có $n!$ số hạng. Nếu giao hoán bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ hoặc bộ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì các S_X^α nhận được đều trùng nhau.

2. Ví dụ: ① $S_{a_1}^{\alpha_1} = a_1^{\alpha_1}$.

$$\textcircled{2} S_{a_1, a_2}^{\alpha_1, \alpha_2} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} + a_2^{\alpha_1} a_1^{\alpha_2}$$

$$\textcircled{3} S_{a_1, a_2, a_3}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = a_1^{\alpha_1} (a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} + a_3^{\alpha_2} a_2^{\alpha_3}) + a_2^{\alpha_1} (a_1^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} + a_3^{\alpha_2} a_1^{\alpha_3}) + a_3^{\alpha_1} (a_1^{\alpha_2} a_2^{\alpha_3} + a_2^{\alpha_2} a_1^{\alpha_3})$$

$$\bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{3, 0, 0} = 2(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)$$

$$\bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{2, 1, 0} = a_1^2(a_2 + a_3) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_1 + a_2)$$

$$\bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{1, 1, 1} = 6a_1 a_2 a_3$$

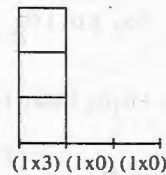
II. LƯỢC ĐỒ YOUNG VÀ SO SÁNH 2 ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Xét các đa thức đối xứng với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Biểu diễn $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ là tổng diện tích của các

hình chữ nhật kích thước $(1 \times \alpha_i)$, tức là $S = (1 \times \alpha_1) + (1 \times \alpha_2) + \dots + (1 \times \alpha_n)$

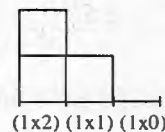
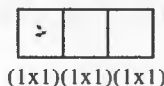
1. Ví dụ:

$$\textcircled{1} \bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{3, 0, 0} = 2(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) \Leftrightarrow$$

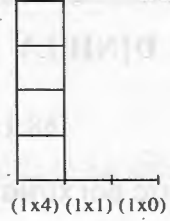


$$\bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{2, 1, 0} = a_1^2(a_2 + a_3) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_1 + a_2) \Leftrightarrow$$

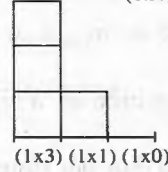
$$\bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{1, 1, 1} = 6a_1 a_2 a_3 \Leftrightarrow$$



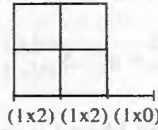
$$\textcircled{2} \cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{4,0,0} = 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) \Leftrightarrow$$



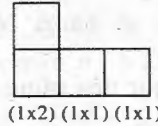
$$\cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{3,1,0} = a_1^3(a_2 + a_3) + a_2^3(a_3 + a_1) + a_3^3(a_1 + a_2) \Leftrightarrow$$



$$\cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{2,2,0} = 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) \Leftrightarrow$$

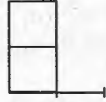


$$\cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{2,1,1} = 2a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2 + a_3) \Leftrightarrow$$



2. So sánh hình học lược đồ Young và bất đẳng thức đối xứng:

$$\cdot S_{a_1, a_2}^{2,0} = a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow$$

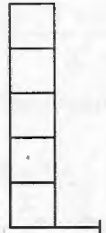


$$; S_{a_1, a_2}^{1,1} = 2a_1 a_2 \Leftrightarrow$$



Nhìn vào lược đồ *Young* suy ra: $S_{a_1, a_2}^{2,0} \geq S_{a_1, a_2}^{1,1} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$

$$\cdot S_{a_1, a_2}^{5,0} = a_1^5 + a_2^5 \Leftrightarrow$$

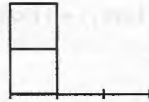


$$; S_{a_1, a_2}^{3,2} = a_1^3 a_2^2 + a_2^3 a_1^2 \Leftrightarrow$$



Nhìn vào lược đồ *Young* suy ra: $S_{a_1, a_2}^{5,0} \geq S_{a_1, a_2}^{3,2} \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 \geq a_1^3 a_2^2 + a_2^3 a_1^2$

$$\cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{2,0,0} = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \Leftrightarrow$$



$$S_{a_1, a_2, a_3}^{1,1,0} = 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) \Leftrightarrow$$



Nhìn vào lược đồ *Young* $\Rightarrow S_{a_1, a_2, a_3}^{2,0,0} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{1,1,0} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$

$$\cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{3,0,0} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{2,1,0} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{1,1,1}$$

$$\cdot S_{a_1, a_2, a_3}^{4,0,0} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{3,1,0} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{2,1,1}$$

Sự hạn chế của lược đồ Young:

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc tức là:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Khi đó nếu trong hình biểu diễn bằng lược đồ Young số các hình chữ nhật (1×0) của $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ và $S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}$ là bằng nhau thì chưa so sánh được 2 đa thức đối xứng này với nhau bằng lược đồ Young.

Ví dụ:

$$\begin{aligned} \bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{3,1,0} &= a_1^3(a_2 + a_3) + a_2^3(a_3 + a_1) + a_3^3(a_1 + a_2) \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ &\quad (1 \times 3) \quad (1 \times 1) \quad (1 \times 0) \\ \bullet S_{a_1, a_2, a_3}^{2,2,0} &= 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ &\quad (1 \times 2) \quad (1 \times 2) \quad (1 \times 0) \end{aligned}$$

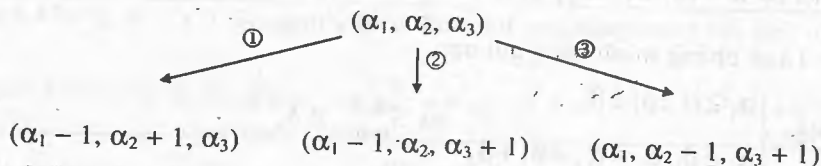
Chúng ta sẽ giải quyết sự bế tắc này bằng định lý Muirhead sau đây:

III. SO SÁNH CÁC ĐA THỨC ĐỐI XỨNG ĐỒNG BẬC

1. Trường hợp $n = 3$

Xét 2 bộ số mũ $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \alpha_i \in \mathbb{N} \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3); \beta_i \in \mathbb{N} \end{cases}$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

Ta nói rằng bộ α trội hơn bộ β và kí hiệu là $\alpha \succ \beta$ nếu như có thể từ α biến thành β bằng cách thực hiện một số lần với 3 phép toán được mô tả theo sơ đồ sau:



Điều kiện tương đương:

Cho $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \end{cases}$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. Khi đó nếu $\alpha \succ \beta$ tức là có thể

sắp xếp α, β thoả mãn các điều kiện: $\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \\ \alpha_1 \geq \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$

Quy tắc so sánh: Nếu $\alpha \succ \beta$ thì $S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, a_3}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3} = S_X^\beta$

2. Định lý Muirhead với số mũ tự nhiên:

Xét các biến số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc tức là:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Khi đó nếu $\alpha \succ \beta$ tức là có thể sắp xếp các bộ α , β thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k \quad \forall k = \overline{1, n-1} \text{ thì } S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \geq S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = S_X^\beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{cases}$$

Đảo lại: Nếu mọi bộ $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gồm n số thực dương ta có $S_X^\alpha \geq S_X^\beta$ thì $\alpha \succ \beta$

3. Định lý Muirhead với số mũ thực:

Xét các biến số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc tức là:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Khi đó nếu $\alpha \succ \beta$ tức là có thể sắp xếp α, β thoả

$$\text{mãn các điều kiện: } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k \quad \forall k = \overline{1, n-1} \text{ thì} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{cases}$$

$$S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \geq S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = S_X^\beta$$

Đảo lại: Nếu mọi bộ $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gồm n số thực dương ta có $S_X^\alpha \geq S_X^\beta$ thì $\alpha \succ \beta$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp

• Với $n = 2$: Nếu $\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2; \beta_1 \geq \beta_2 \\ \alpha_1 \geq \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases}$ thì $S_{a_1, a_2}^{\alpha_1, \alpha_2} \geq S_{a_1, a_2}^{\beta_1, \beta_2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{a_1, a_2}^{\alpha_1, \alpha_2} - S_{a_1, a_2}^{\beta_1, \beta_2} &= (a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} + a_1^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1}) - (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} + a_1^{\beta_2} a_2^{\beta_1}) \\ &= (a_1 a_2)^{\alpha_2} (a_1^{\alpha_1 - \beta_1} - a_2^{\alpha_1 - \beta_1}) (a_1^{\alpha_1 - \beta_2} - a_2^{\alpha_1 - \beta_2}) \geq 0 \Rightarrow (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

• Với $n = 3$: Nếu $\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \\ \alpha_1 \geq \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$ thì $S_{a_1, a_2, a_3}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \geq S_{a_1, a_2, a_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3}$

Gọi I_3 là một hoán vị (i_1, i_2, i_3) của bộ số $(1, 2, 3)$. Sử dụng kết quả với $n = 2$ ta có:

$$\begin{aligned} S_{a_1, a_2, a_3}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} &= \sum_{I_3} a_{i_3}^{\alpha_3} \cdot S_{a_{i_1}, a_{i_2}}^{\alpha_1, \alpha_2} \geq \sum_{I_3} a_{i_3}^{\alpha_3} \cdot S_{a_{i_1}, a_{i_2}}^{\beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1} = S_{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}}^{\beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1, \alpha_3} \\ &= \sum_{I_3} a_{i_1}^{\beta_1} \cdot S_{a_{i_2}, a_{i_3}}^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1, \alpha_3} \geq \sum_{I_3} a_{i_1}^{\beta_1} \cdot S_{a_{i_2}, a_{i_3}}^{\beta_2, \beta_3} = S_{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3} = S_{a_1, a_2, a_3}^{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \end{aligned}$$

• Với $4 \leq n \in \mathbb{N}$: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là ta có mệnh đề:

$$\text{Nếu } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p, \quad \forall p = \overline{1, k-1} \text{ thì } S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} \geq S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là ta có mệnh đề:

$$\text{Nếu } \begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq \alpha_{k+1}; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k \geq \beta_{k+1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p, \quad \forall p = \overline{1, k} \text{ thì } S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}} \geq S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k + \beta_{k+1} \end{cases}$$

Gọi I_{k+1} là một hoán vị $(i_1, i_2, \dots, i_{k+1})$ của bộ số $(1, 2, \dots, k+1)$.

Biến đổi và sử dụng giả thiết qui nạp ta có:

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}} &= \sum_{I_{k+1}} a_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}} S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} \geq \sum_{I_{k+1}} a_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}} S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} \\ &= S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}} = \sum_{I_{k+1}} a_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}} S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} \\ &\geq \sum_{I_{k+1}} a_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}} S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} = S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} S_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}} = S_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}} \end{aligned}$$

Theo nguyên lý qui nạp bất đẳng thức **Muirhead** được chứng minh.

4. Một số ví dụ minh họa quan hệ giữa Muirhead và AM - GM

Dùng lược đồ Young và Muirhead dự đoán các bất đẳng thức và chứng minh bằng AM - GM

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$. So sánh 2 biểu thức sau và chứng minh kết quả so sánh:

$$S_1 = 2(a^5 + b^5 + c^5); S_2 = a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right)$$

Chứng minh

Chúng ta có thể thấy bất đẳng thức trên đúng bằng lược đồ Young

$$\begin{aligned} S_{a,b,c}^{5,0,0} &= 2(a^5 + b^5 + c^5) \Leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} S_{a,b,c}^{3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) \\ + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) \\ + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ &\quad (1 \times 5) \quad (1 \times 0) \quad (1 \times 0) \quad \quad \quad (1 \times 3)(1 \times \frac{3}{2})(1 \times \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Từ lược đồ Young ta có $S_{a,b,c}^{5,0,0} \geq S_{a,b,c}^{3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$. Ta sẽ chứng minh kết quả này bằng AM - GM

$$\begin{aligned}
 & a^5 + a^5 + a^5 + a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + b^5 + b^5 + c^5 \geq 10 \cdot \sqrt[10]{a^{30} b^{15} c^5} = 10 a^3 b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \\
 & a^5 + a^5 + a^5 + a^5 + a^5 + a^5 + c^5 + c^5 + c^5 + b^5 \geq 10 \cdot \sqrt[10]{a^{30} c^{15} b^5} = 10 a^3 c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \\
 & b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + c^5 + c^5 + c^5 + a^5 \geq 10 \cdot \sqrt[10]{b^{30} c^{15} a^5} = 10 b^3 c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \\
 + & \\
 & b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + b^5 + a^5 + a^5 + a^5 + c^5 \geq 10 \cdot \sqrt[10]{b^{30} a^{15} c^5} = 10 b^3 a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \\
 & c^5 + c^5 + c^5 + c^5 + c^5 + c^5 + a^5 + a^5 + a^5 + b^5 \geq 10 \cdot \sqrt[10]{c^{30} a^{15} b^5} = 10 c^3 a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \\
 & c^5 + c^5 + c^5 + c^5 + c^5 + c^5 + b^5 + b^5 + b^5 + a^5 \geq 10 \cdot \sqrt[10]{c^{30} b^{15} a^5} = 10 c^3 b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 20(a^5 + b^5 + c^5) \geq 10 \left[a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

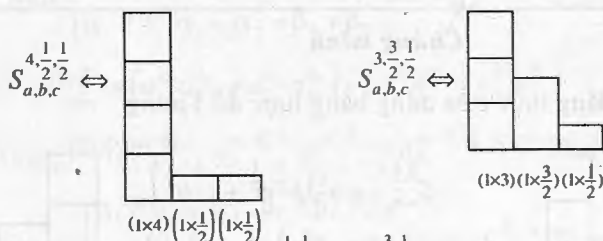
$$\Leftrightarrow 2(a^5 + b^5 + c^5) \geq a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right)$$

Ví dụ 2. Cho $a, b, c > 0$. So sánh 2 biểu thức sau:

$$S_1 = 2 \left(a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} + b^4 c^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} + c^4 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right); S_2 = a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right)$$

Chứng minh

Chúng ta có thể thấy không thể so sánh $S_{a,b,c}^{4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ với $S_{a,b,c}^{3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$ được bằng lược đồ Young



Sử dụng **Muirhead** ta dự đoán $S_{a,b,c}^{4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \geq S_{a,b,c}^{3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$ và chứng minh bằng **AM - GM**

$$2 \left(a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} + b^4 c^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} + c^4 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) = 2 a^{\frac{7}{2}} b^{\frac{7}{2}} c^{\frac{7}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot a^{\frac{5}{2}} b \\ & a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot a^{\frac{5}{2}} c \\ & b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot b^{\frac{5}{2}} c \\ & b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot b^{\frac{5}{2}} a \\ & c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot c^{\frac{5}{2}} a \\ & c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot c^{\frac{5}{2}} b \end{aligned} \right. \\
 & + \left\{ \begin{aligned} & a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot a^{\frac{5}{2}} b \\ & a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot a^{\frac{5}{2}} c \\ & b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot b^{\frac{5}{2}} c \\ & b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot b^{\frac{5}{2}} a \\ & c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot c^{\frac{5}{2}} a \\ & c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} \geq 7 \cdot c^{\frac{5}{2}} b \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow 14 \left(a^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \right) \geq 7 \left(a^{\frac{5}{2}} b + a^{\frac{5}{2}} c + b^{\frac{5}{2}} c + b^{\frac{5}{2}} a + c^{\frac{5}{2}} a + c^{\frac{5}{2}} b \right) \\
 & \Rightarrow 2 \left(a^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \right) \geq \left(a^{\frac{5}{2}} b + a^{\frac{5}{2}} c + b^{\frac{5}{2}} c + b^{\frac{5}{2}} a + c^{\frac{5}{2}} a + c^{\frac{5}{2}} b \right) \\
 & \Rightarrow 2 \cdot a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{7}{2}} + b^{\frac{7}{2}} + c^{\frac{7}{2}} \right) \geq a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{5}{2}} b + a^{\frac{5}{2}} c + b^{\frac{5}{2}} c + b^{\frac{5}{2}} a + c^{\frac{5}{2}} a + c^{\frac{5}{2}} b \right) \\
 & = a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Cho $a, b, c > 0$. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
 & a^3 \left(b^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) + b^3 \left(c^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} \right) + c^3 \left(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right) \geq \\
 & \geq a^{\frac{8}{3}} \left(b^{\frac{5}{3}} c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{5}{3}} b^{\frac{2}{3}} \right) + b^{\frac{8}{3}} \left(c^{\frac{5}{3}} a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{5}{3}} c^{\frac{2}{3}} \right) + c^{\frac{8}{3}} \left(a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{5}{3}} a^{\frac{2}{3}} \right)
 \end{aligned}$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức đã cho có dạng } S_{a,b,c}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \geq S_{a,b,c}^{\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Bước 1: Chứng minh } S_{a,b,c}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \geq S_{a,b,c}^{\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}} \quad (2)$$

$$\text{Bổ đề: } x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} \geq x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} \quad \forall x, y > 0$$

Thật vậy theo bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} \geq 6 x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} \\ & y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} \geq 6 y^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6\left(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right) \geq 6\left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} \geq x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

• **Bước 2:** Ta sẽ chứng minh $S_{a,b,c}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \geq S_{a,b,c}^{\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}}$ (3)

Bổ đề: $x^3y^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}} \geq x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}} \quad \forall x, y > 0$

Thật vậy theo bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$+ \begin{cases} x^3y^{\frac{4}{3}} + x^3y^{\frac{4}{3}} + x^3y^{\frac{4}{3}} + x^3y^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}} \geq 5x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}} \\ y^3x^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}} + x^3y^{\frac{4}{3}} \geq 5y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\left(x^3y^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}}\right) \geq 5\left(x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}}\right) \Leftrightarrow x^3y^{\frac{4}{3}} + y^3x^{\frac{4}{3}} \geq x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}}$$

Từ đó (2) và (3) đúng và suy ra (1) được chứng minh tức là $S_{a,b,c}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \geq S_{a,b,c}^{\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}}$

5.12. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} T_{a,b,c,d}^{\frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}} &= \sum_{a,b,c,d} a^8 \left(b^{\frac{9}{2}}c^{\frac{5}{2}}d^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{9}{2}}d^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{9}{2}}b^{\frac{5}{2}}d^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{9}{2}}d^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{9}{2}}b^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{9}{2}}c^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} \right) \geq \\ &\geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}} = \sum_{a,b,c,d} a^7 \left(b^{\frac{16}{3}}c^{\frac{13}{6}}d^{\frac{5}{6}} + b^{\frac{16}{3}}d^{\frac{13}{6}}c^{\frac{5}{6}} + c^{\frac{16}{3}}b^{\frac{13}{6}}d^{\frac{5}{6}} + c^{\frac{16}{3}}d^{\frac{13}{6}}b^{\frac{5}{6}} + d^{\frac{16}{3}}b^{\frac{13}{6}}c^{\frac{5}{6}} + d^{\frac{16}{3}}c^{\frac{13}{6}}b^{\frac{5}{6}} \right) \end{aligned}$$

Hướng dẫn

• **Bước 1:** Chứng minh: $T_{a,b,c,d}^{\frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}} \geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}}$

Bổ đề: $x^8y^{\frac{9}{2}} + y^8x^{\frac{9}{2}} \geq x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{11}{2}} + y^{\frac{11}{2}}x^{\frac{11}{2}}, \quad \forall x, y > 0$

• **Bước 2:** Chứng minh: $T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}} \geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}}$

Bổ đề: $x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{11}{2}}x^{\frac{5}{2}} \geq x^{\frac{16}{3}}y^{\frac{8}{3}} + y^{\frac{16}{3}}x^{\frac{8}{3}}, \quad \forall x, y > 0$

• **Bước 3:** Chứng minh: $T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}} \geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}}$

Bổ đề: $x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{3}} \geq x^{\frac{13}{6}}y^{\frac{5}{6}} + y^{\frac{13}{6}}x^{\frac{5}{6}}, \quad \forall x, y > 0$

Kết luận: $T_{a,b,c,d}^{\frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}} \geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}} \geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}} \geq T_{a,b,c,d}^{\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}}$

IV. MỘT SỐ DẠNG KÍ HIỆU ĐA THỨC ĐỐI XỨNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ với $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Khi đó ta có:

1. Kí hiệu gốc: $S_X^\alpha = S_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} \cdot S_{X \setminus \{a_1\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_1\}} + \dots + a_n^{\alpha_n} \cdot S_{X \setminus \{a_n\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_n\}} = \sum_{\text{sym}} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$

2. Kí hiệu mới: $S_X^\alpha = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; $d(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n!} S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Đặc biệt nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số tự nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là:

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \quad d_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{1}{n!} S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

Ngoài ra nếu $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$ thì $S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$

Trường hợp đặc biệt cho 3 biến số a, b, c : $S_3 = \sum_{\text{sym}} a^3 = 2(a^3 + b^3 + c^3)$

$$S_{21} = \sum_{\text{sym}} a^2 b = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b); \quad S_{111} = \sum_{\text{sym}} abc = 6abc$$

3. Thực hiện phép biến đổi đa thức đối xứng bằng kí hiệu

3.1. Phép cộng các đa thức đối xứng giống nhau

Ta xét một ví dụ minh họa cho phép cộng: $(a+b) + (b+c) + (c+a) = 2(a+b+c)$

Đề ý rằng về trái là tổng của 3 đa thức đối xứng S_1 xét trên 3 cặp biến $(a;b), (b;c), (c;a)$ còn về phải là 1 đa thức đối xứng S_1 xét trên 3 biến a, b, c . Từ đó suy ra:

Qui tắc: Khi cộng các đa thức đối xứng giống nhau xét trên tất cả các hoán vị của một vài biến số thì nhận được một đa thức đối xứng đồng bậc xét trên tất cả các biến số.

3.2. Phép nhân 2 đa thức đối xứng

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \times S(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \sigma(1, 2, \dots, n)} S(\alpha_1 + \beta_{i_1}, \alpha_2 + \beta_{i_2}, \dots, \alpha_n + \beta_{i_n})$$

4. Hệ quả: Phép nhân các đa thức đối xứng với 3 biến số

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = \frac{1}{2} S_1 \cdot \frac{1}{2} S_{11} = S_{21} + \frac{1}{2} S_{111}$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{2} S_1 \cdot \frac{1}{2} S_2 = \frac{1}{2} S_3 + S_{21}; \quad (a+b)(b+c)(c+a) = S_{21} + \frac{1}{3} S_{111};$$

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = -\frac{1}{2} S_3 + S_{21} - \frac{1}{3} S_{111}$$

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = S_{22} - \frac{1}{2} S_4$$

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{1}{2} S_1\right)^2 = \frac{1}{4} (2S_2 + 4S_{11}) = \frac{1}{2} S_2 + S_{11}$$

$$(a+b+c)^3 = \left(\frac{1}{2} S_1\right)^3 = \frac{1}{8} (4S_3 + 24S_{21} + 8S_{111}) = \frac{1}{2} S_3 + 3S_{21} + S_{111}$$

$$(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2)^2 = S_{21}^2 = S_{42} + S_{411} + S_{33} + 2S_{321} + S_{222}$$

§8.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MUIRHEAD

I. Sử dụng biến đổi tương đương và định lý Muirhead

1. Phương pháp chung

Để ứng dụng đa thức đối xứng và định lý *Muirhead* trong chứng minh bất đẳng thức, ta cần thực hiện theo 2 bước cơ bản sau:

Bước 1: Phân tích:

+ Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tổng các đa thức đối xứng ở cả 2 vế của bất đẳng thức.

+ Biểu diễn các đa thức đối xứng theo kí hiệu qui ước trong lý thuyết.

Bước 2: Đánh giá:

+ Cách đánh giá: Sử dụng các bất đẳng thức để làm mất dần các đa thức đối xứng có giá trị lớn ở vế có giá trị nhỏ hơn (Chẳng hạn: ta sẽ làm mất dần các đa thức đối xứng có giá trị lớn ở vế phải nếu các phép biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức đã cho được biểu diễn dưới dạng $VT \geq VP$). Thay vào đó là các đa thức đối xứng nhỏ nhất có thể (thường là các đa thức ở VT để giản lược cả hai vế)

+ Phép đánh giá được thực hiện nhờ các nguyên tắc sau:

Sử dụng các đánh giá (bất đẳng thức) sẵn có.

Tìm tòi, dự đoán các bất đẳng thức nhỏ cần phải chứng minh.

Sử dụng các cách biến đổi để tạo ra các đánh giá mới.

2. Các bài tập mẫu minh họa

Hãy biến đổi về dạng cơ sở và chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

Bài 1. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x+y}{xy+z^2} + \frac{y+z}{yz+x^2} + \frac{z+x}{zx+y^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+y)(yz+x^2)(zx+y^2) + (y+z)(zx+y^2)(xy+z^2) + (z+x)(xy+z^2)(yz+x^2)}{(xy+z^2)(yz+x^2)(zx+y^2)} \leq \frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow (S_{41} + S_{32} + S_{311} + S_{221}) \cdot \frac{1}{6} S_{111} \leq \frac{1}{2} S_{11} \left(\frac{1}{3} S_{222} + \frac{1}{2} S_{411} + \frac{1}{2} S_{33} \right)$$

$$\Leftrightarrow S_{521} + S_{431} + S_{422} + S_{332} \leq S_{332} + S_{521} + \frac{1}{2} S_{422} + \frac{1}{2} S_{44} + S_{431}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} S_{422} \leq \frac{1}{2} S_{44} \Leftrightarrow S_{422} \leq S_{44} \text{ (đúng theo Muirhead)}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab+bc+ca = \frac{1}{3} \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a}{a^2-bc+1} + \frac{b}{b^2-ca+1} + \frac{c}{c^2-ab+1} \geq \frac{1}{a+b+c}$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \sum \frac{a}{a(a+b+c)+2(ab+bc+ca)} \geq \frac{1}{a+b+c} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{16} \cdot S_1 (S_{111} \cdot S_1^2 + 8S_1 \cdot S_{11}^2) \geq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} S_{111} \cdot S_1^3 + 3S_{11}^2 \cdot S_1^2 + 8S_{11}^3 \right) \Leftrightarrow \frac{1}{24} S_{111} \cdot S_1^3 + \frac{1}{8} S_1^2 \cdot S_{11}^2 \geq S_{11}^3 \\
 &\Leftrightarrow S_{411} + 6S_{311} + 2S_{222} + 2S_{42} + S_{222} + 2S_{111} + 4S_{321} + 2S_{33} + 4S_{321} + 8S_{321} + 4S_{222} \geq 4S_{33} + 24S_{321} + 8S_{222} \\
 &\Leftrightarrow 2S_{42} + 3S_{411} \geq 2S_{33} + 2S_{321} + S_{222}
 \end{aligned}$$

Theo định lý **Muirhead** ta có: $2S_{42} \geq 2S_{33}; 2S_{411} \geq 2S_{321}; S_{411} \geq S_{222} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 3. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab+bc+ca = \frac{1}{3} \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2-bc+1} + \frac{1}{b^2-ca+1} + \frac{1}{c^2-ab+1} \leq 3$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \sum \frac{1}{a(a+b+c)+2(ab+bc+ca)} \leq \frac{1}{ab+bc+ca} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot S_{11} \left(\frac{1}{8} S_{11} \cdot S_1^2 + \frac{1}{2} S_{11} \cdot S_1^2 + 3S_{11}^3 \right) \leq \frac{1}{48} S_{111} \cdot S_1^3 + \frac{1}{8} S_{11}^2 \cdot S_1^2 + \frac{1}{4} S_1^2 \cdot S_{11}^2 + S_{11}^3 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} S_{11}^3 \leq \frac{1}{48} S_{111} S_1^3 + \frac{1}{16} S_1^2 \cdot S_{11}^2 \\
 &\Leftrightarrow 2S_{33} + 12S_{321} + 4S_{222} \leq \frac{1}{2} S_{411} + 3S_{321} + S_{222} + S_{42} + S_{33} + S_{411} + 8S_{321} + \frac{5}{2} S_{222} \\
 &\Leftrightarrow S_{33} + S_{321} + \frac{1}{2} S_{222} \leq \frac{3}{2} S_{411} + S_{42}, \text{ đúng do } S_{33} \leq S_{42}; S_{321} \leq S_{411}; \frac{1}{2} S_{222} \leq \frac{1}{2} S_{411}
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}, c=0$ và các hoán vị.

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} S_2 + \frac{3}{2} S_{11}}{S_{21} + \frac{1}{3} S_{111}} \leq \frac{\frac{3}{2} S_1}{S_{11}} \Leftrightarrow S_{11} \left(\frac{1}{2} S_2 + \frac{3}{2} S_{11} \right) \leq \frac{3}{2} S_1 \left(S_{21} + \frac{1}{3} S_{111} \right) \\
 &\Leftrightarrow 2S_{31} + S_{211} + 3S_{22} + 6S_{211} \leq 3S_{31} + 3S_{22} + 3S_{211} + 3S_{211} \Leftrightarrow S_{211} \leq S_{31} \text{ (đúng)}
 \end{aligned}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} S_{211} + S_{32} + \frac{1}{2} S_{311}}{\frac{1}{3} S_{222} + \frac{1}{2} S_{33} + \frac{1}{2} S_{411}} \leq \frac{\frac{1}{2} S_2 + \frac{3}{2} S_{11}}{S_{21} + \frac{1}{3} S_{111}}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}S_{211} + S_{32} + \frac{1}{2}S_{311} \right) \left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111} \right) \leq \left(\frac{1}{2}S_2 + \frac{3}{2}S_{11} \right) \left(\frac{1}{3}S_{222} + \frac{1}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{411} \right) \\
 &\Leftrightarrow S_{431} + S_{422} + S_{332} + S_{332} + S_{53} + S_{521} + S_{44} + S_{431} + S_{422} + S_{332} + 2S_{431} + S_{521} + S_{431} + S_{332} + S_{422} \\
 &\leq S_{422} + S_{53} + \frac{1}{2}S_{332} + \frac{1}{2}S_{611} + S_{431} + 3S_{332} + \frac{3}{2}S_{44} + 3S_{431} + 3S_{521} + \frac{3}{2}S_{422} \\
 &\Leftrightarrow S_{431} + \frac{1}{2}S_{332} + \frac{1}{2}S_{422} \leq \frac{1}{2}S_{611} + \frac{1}{2}S_{44} + S_{521} \text{ (đúng theo Muirhead)}
 \end{aligned}$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}S_3 + S_{11} + \frac{1}{2}S_{111}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} \leq \frac{\frac{1}{2}S_{11} + S_2}{S_{11}} \Leftrightarrow 2S_{41} + S_{311} + 2S_{32} + 2S_{311} + 2S_{221} + 3S_{221} \\
 &\leq S_{32} + S_{311} + S_{221} + S_{221} + 2S_{41} + 2S_{32} + 2S_{221} + 2S_{311} \Leftrightarrow S_{221} \leq S_{32} \text{ (đúng theo Muirhead)}
 \end{aligned}$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca) \left[\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \right] \geq (a+b+c) \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{11} \left[\frac{S_{21}}{\frac{1}{6}S_{111}} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}S_3 + S_{11} + \frac{1}{2}S_{111}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} \right] \geq \frac{1}{2}S_1 \cdot \frac{\frac{1}{2}S_{22}}{\frac{1}{6}S_{111}} \\
 &\Leftrightarrow S_{11} \left[\frac{6S_{21}}{S_{111}} - \frac{S_3 + 2S_{11} + S_{111}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} \right] \geq S_1 \frac{3S_{22}}{S_{111}} \Leftrightarrow S_{431} \geq S_{332} \text{ (đúng)}
 \end{aligned}$$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+1}{bc+1} + \frac{b^2+1}{ca+1} + \frac{c^2+1}{ab+1} \geq 3 \quad (1)$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{411} + S_{31} + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_{211} + S_{11} + 3 \geq \frac{1}{2}S_{222} + \frac{3}{2}S_{211} + \frac{3}{2}S_{11} + 3 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{411} + S_{31} + \frac{1}{2}S_2 \geq \frac{1}{2}S_{222} + S_{211} + \frac{1}{2}S_{11}
 \end{aligned}$$

Theo định lý **Muirhead** ta có: $\frac{1}{2}S_{411} \geq \frac{1}{2}S_{222}; S_{31} \geq S_{211}; \frac{1}{2}S_2 \geq \frac{1}{2}S_{11} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (1)$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{44} + S_{422} \geq \frac{3}{2}S_{422} \Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{44} \geq \frac{1}{2}S_{422} \text{ (đúng theo Muirhead)}
 \end{aligned}$$

Bài 11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{S_{11}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} \leq \frac{9}{2S_1} \Leftrightarrow 8S_{21} + 4S_{111} \leq 9S_{21} + 3S_{111} \Leftrightarrow S_{111} \leq S_{21} \text{ (đúng)}$$

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^3}{b^3} \geq \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2S(3; -3) \geq S(2; -1; -1) + S(1; 1; -2)$$

Theo **Muirhead**: $S(3; -3) \geq S(2; -1; -1)$, $S(3; -3) \geq S(1; 1; -2) \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 13: Cho $a, b, c \geq 0$, $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng: $a + b + c + 3abc \geq 2$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow [(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc]^2 \geq 4(ab+bc+ca)^3$$

$$\Leftrightarrow (S_{21} + S_{111})^2 \geq \frac{1}{2}S_{11}^3 \Leftrightarrow S_{42} + S_{411} + S_{33} + 2S_{321} + S_{222} + 12S_{321} + 6S_{222} \geq 2S_{33} + 12S_{321} + 4S_{222}$$

$$\Leftrightarrow S_{42} + S_{411} + 2S_{321} + 3S_{222} \geq S_{33} \text{ (đúng theo Muirhead và } S_{411} + 2S_{321} + 3S_{222} \geq 0)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq abc(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right)^2 \geq abc[a+(a+b+c)][b+(a+b+c)][c+(a+b+c)]$$

$$\Leftrightarrow S_{42} + S_{411} + S_{33} + 2S_{321} + S_{222} + 4S_{321} + \frac{2}{3}S_{222} \geq \frac{1}{6}S_{222} + S_{321} + \frac{1}{2}S_{222} + S_{411} + 6S_{321} + 2S_{222}$$

$$\Leftrightarrow S_{42} + S_{33} \geq S_{321} + S_{222} \text{ (đúng theo Muirhead)}$$

II. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MUIRHEAD VỚI AM – GM, HOLDER, ASYM

1. Bất đẳng thức AM – GM:

Dạng tổng quát: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, $\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Dạng suy rộng: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n}$,

2. Bất đẳng thức Holder:

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m a_{ij}} \right)^m, \quad \forall a_{ij} > 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$$

Sử dụng đa thức đối xứng, định lý **Muirhead** và 2 bất đẳng thức trên ta có:

3. Hệ quả: Bất đẳng thức ASYM

Cho m bộ số $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn})$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$

và $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, đặt $t_i = \frac{\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \dots + \alpha_{mi}}{m} \quad \forall i = \overline{1, n}$. Khi đó ta có:

$$S_{\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n}} + \dots + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}\dots\alpha_{mn}} \geq m \cdot \sqrt[m]{S_{\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n}} S_{\alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n}} \dots S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}\dots\alpha_{mn}}} \geq m S_{t_1 t_2 \dots t_n}$$

Bất đẳng thức bên trái chính là hệ quả của bất đẳng thức **AM – GM**, còn bất đẳng thức bên phải được suy ra từ bất đẳng thức **Holder**. Điều mà chúng ta cần quan tâm ở đây là bất đẳng thức mà ta sẽ gọi là bất đẳng thức **ASYM**:

$$S_{\alpha_{11}\alpha_{12}\dots\alpha_{1n}} + S_{\alpha_{21}\alpha_{22}\dots\alpha_{2n}} + \dots + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}\dots\alpha_{mn}} \geq m S_{t_1 t_2 \dots t_n}$$

4. Ứng dụng của ASYM và Muirhead

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(ab + bc + ca)^2 \geq 8a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (1)$$

Chứng minh.

$$(1) \Leftrightarrow \left(S_{42} + \frac{1}{3} S_{222} \right) \left(\frac{1}{2} S_{22} + S_{211} \right) \geq \frac{4}{3} S_{222} \left(\frac{1}{2} S_{4} + S_{22} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (2S_{64} + 2S_{622} + 2S_{442}) + 2S_{631} + 2S_{541} + 2S_{532} + S_{442} + 2S_{433} \geq 4S_{622} + 8S_{442}$$

$$\Leftrightarrow S_{64} + 2S_{631} + 2S_{541} + 2S_{532} + 2S_{433} \geq 3S_{622} + 6S_{442} \quad (2)$$

$$\text{Theo định lý Muirhead ta có: } S_{64} \geq S_{622}; 2S_{631} \geq 2S_{622} \quad (3)$$

$$\text{Theo ASYM ta có: } 2S_{541} + 2S_{532} + 2S_{433} \geq 6S_{442} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0: a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a + b + c)^2 \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(S_{42} + \frac{1}{3}S_{222}\right)\left(\frac{1}{2}S_2 + S_{11}\right) \geq 8\left(\frac{1}{2}S_{44} + S_{422}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{62} + S_{44} + S_{422} + 2S_{53} + 2S_{521} + 2S_{431} + S_{422} + 2S_{332} \geq 4S_{44} + 8S_{422}$$

$$\Leftrightarrow S_{62} + 2S_{53} + 2S_{521} + 2S_{431} + 2S_{332} \geq 3S_{44} + 6S_{422} \quad (2)$$

Theo định lý **Muirhead** ta có: $S_{62} \geq S_{44}; 2S_{53} \geq 2S_{44} \quad (3)$

Theo **ASYM** ta có: $2S_{521} + 2S_{413} + 2S_{332} \geq 6S_{422} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ và các hoán vị.

III. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MUIRHEAD VỚI BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

1. Biểu diễn bất đẳng thức Schur dưới dạng Muirhead

1.1. Dạng chính tắc: Với các số thực dương a, b, c và k bất kì ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow S(k+2;0;0) + S(k;1;1) \geq 2S(k+1;1;0)$$

1.2. Dạng suy rộng: Với $a, b, c, m, p, q \geq 0$ ta luôn có:

1.2.1. $\sum [a^m(a^p - b^p)(a^q - c^q) + a^m(a^q - b^q)(a^p - c^p)] \geq 0$

$$\Leftrightarrow S(m+p+q) + S(m;n;p) \geq S(m+p;q) + S(m+q;p)$$

1.2.2. $\sum (a^m b^n + a^n b^m)(c^p - a^p)(c^p - b^p) \geq 0$

$$\Leftrightarrow S(m+p;n+p) + S(m;n;2p) \geq S(m+p;n;p) + S(m;n+p;p)$$

1.2.3. $\sum (a^m b^n + a^n b^m)[(a^p b^p - a^p c^p)(a^q b^q - b^q c^q) + (a^q b^q - a^q c^q)(a^p b^p - b^p c^p)] \geq 0$

$$\Leftrightarrow S(m+p+q;n+p+q) + S(m+p;n+q;p+q) \geq S(m+p+q;n+q;p) + S(m+p;n+p+q;q)$$

1.2.4. Đặc biệt khi $m = n$:

$$S(m+p+q;m+p+q) + S(m+p;m+q;p+q) \geq S(m+p+q;m+q;p) + S(m+p+q;m+p;q)$$

Ví dụ: $m = n = p = q = 1: S_{33} + S_{222} \geq 2S_{321}$

2. Ứng dụng của bất đẳng thức Schur và Muirhead

Bài 1: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(xy + yz + zx) \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $a = \sqrt[3]{x}; b = \sqrt[3]{y}; c = \sqrt[3]{z} \Rightarrow abc = 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow a^6 + b^6 + c^6 + (a^3 + b^3 + c^3)abc \geq 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$$

Theo **Schur** và **Muirhead** ta có: $S_6 + S_{411} \geq 2S_{51}; 2S_{51} \geq 2S_{33} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 2bc} + \frac{b}{b^2 + 2ca} + \frac{c}{c^2 + 2ab} \leq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}S_{211} + 2S_{32} + 2S_{311} \right) \cdot \frac{1}{2}S_{11} \leq \frac{1}{2}S_1 \left(\frac{3}{2}S_{222} + S_{33} + 2S_{411} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{331} + S_{322} + 2S_{43} + 2S_{421} + 2S_{331} + 4S_{421} + 2S_{322} \leq \frac{9}{2}S_{322} + 2S_{43} + S_{331} + 2S_{511} + 4S_{421}$$

$$\Leftrightarrow 2S_{511} + \frac{3}{2}S_{322} \geq 2S_{421} + \frac{3}{2}S_{331} \Leftrightarrow 2S_4 + \frac{3}{2}S_{211} \geq 2S_{31} + \frac{3}{2}S_{22} \quad (2)$$

Theo **Schur** và **Muirhead** ta có:

$$\frac{3}{2}S_4 + \frac{3}{2}S_{211} \geq 3S_{31}; \frac{1}{2}S_4 \geq \frac{1}{2}S_{22}; S_{31} \geq S_{22} \Rightarrow$$
 (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 3: Cho $a, b, c > 0: abc = 1$. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 + 3 \geq 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)$ (1)

Chứng minh

Đặt $x = \sqrt[3]{a}; y = \sqrt[3]{b}; z = \sqrt[3]{c} \Rightarrow xyz = 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x^{12} + y^{12} + z^{12} + 3x^4y^4z^4 \geq 2(x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6)$$

$\Leftrightarrow S(12) + S(4; 4; 4) \geq 2S(6; 6)$. Theo **Schur** và **Muirhead** ta có:

$$S(12) + S(4; 4; 4) \geq 2S(8; 4); S(8; 4) \geq S(6; 6) \Rightarrow$$
 (đpcm)

Bài 4: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $8(x+y+z)^2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 64x^2y^2z^2 \geq 6xyz(x+y+z)[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2] + (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{2}S_2 + S_{11}\right) \cdot \frac{1}{2}S_{22} + \frac{32}{3}S_{222} \geq 3S_{211}(S_2 + S_{11}) + \left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow 8S_{42} + 4S_{222} + 8S_{33} + 16S_{321} + \frac{32}{3}S_{222} \geq \\
 &\geq 6S_{411} + 12S_{321} + 12S_{321} + 6S_{222} + S_{42} + S_{411} + S_{33} + 2S_{321} + S_{222} + 4S_{321} + \frac{2}{3}S_{222} \\
 &\Leftrightarrow 7S_{42} + 7S_{33} + 7S_{222} \geq 7S_{411} + 14S_{321} \Leftrightarrow S_{42} + S_{33} + S_{222} \geq S_{411} + 2S_{321} \\
 &\text{Theo Schur và Schur 5 ta có: } S_{42} \geq S_{411}; S_{33} + S_{222} \geq 2S_{321} \Rightarrow (\text{đpcm})
 \end{aligned}$$

Bài 5: Cho $x, y, z \geq 0$; $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng: $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 27[(x + y + z)(xy + yz + zx) - 2xyz] \leq 7(x + y + z)^3 \\
 &\Leftrightarrow 27\left(S_{21} + \frac{1}{6}S_{111}\right) \leq 7\left(\frac{1}{2}S_3 + 3S_{21} + S_{111}\right) \Leftrightarrow 6S_{21} \leq \frac{7}{2}S_3 + \frac{5}{2}S_{111}
 \end{aligned}$$

Theo Schur: $3S_3 + 3S_{111} \geq 6S_{21}$; và Muirhead: $\frac{1}{2}S_3 \geq \frac{1}{2}S_{111}$. Từ đó suy ra (đpcm)

Bài 6: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ (1)

Chứng minh

Đặt $\frac{a}{b} = x^3$; $\frac{b}{c} = y^3$; $\frac{c}{a} = z^3 \Rightarrow xyz = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq (x^3 + y^3 + z^3)xyz + x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \\
 &\Leftrightarrow S_6 + S_{222} \geq S_{411} + S_{333}. \text{ Theo Schur và Muirhead ta có:}
 \end{aligned}$$

$$S_6 + S_{222} \geq 2S_{42}; S_{42} \geq S_{411}; S_{42} \geq S_{33} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 7: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $27 + \left(2 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(2 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(2 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 6(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (1)

Chứng minh

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 27 + \frac{(a^2 + 2bc)(b^2 + 2ca)(c^2 + 2ab)}{a^2b^2c^2} \geq \frac{6(a + b + c)(ab + bc + ca)}{abc} \\
 &\Leftrightarrow 27a^2b^2c^2 + 9a^2b^2c^2 + 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + 4(a^4bc + ab^4c + abc^4) \\
 &\geq 6abc\left(S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}\right) \Leftrightarrow 6S_{222} + S_{33} + 2S_{411} \geq 6S_{321} + 3S_{222} \Leftrightarrow 2S_{411} + S_{33} + 3S_{222} \geq 6S_{321}.
 \end{aligned}$$

Theo Schur ta có: $S_{33} + S_{222} \geq 2S_{321}$; $S_3 + S_{111} \geq 2S_{21} \Leftrightarrow 2S_{411} + 2S_{222} \geq 4S_{321}$

Bài 8: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq xyz(x + y + z)^3$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}S_{411} + \frac{3}{2}S_{33} + \frac{3}{2}S_{222} \geq \frac{1}{2}S_{411} + 3S_{321} + S_{222} \Leftrightarrow S_{411} + \frac{3}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{222} \geq 3S_{321}$$

Theo Schur 5 và Schur ta có: $\frac{1}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{222} \geq S_{321}$; $S_{33} \geq S_{321}$; $S_{411} \geq S_{321}$

IV. KỸ THUẬT THÊM BIẾN VÀ CÁC ỨNG DỤNG

1. Kỹ thuật thêm biến

1.1. Đặt vấn đề: Chúng ta sẽ mở đầu kỹ thuật này với 2 bài toán sau

Bài toán 1: Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow S_3 \geq S_{21} \text{ (đúng theo Muirhead)}$$

Bài toán 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow S(1; -2) \geq S(-1; 0) \Leftrightarrow S_{32} \geq S_{221} \text{ (đúng) (nhân cả 2 vế với } a^2b^2c^2 \text{)}$$

Nhận xét: Thay bộ số (a, b) trong bài toán 1 bằng các bộ số $(a; b), (b; c), (c; a)$ rồi cộng lại thì nhận được bài toán 2. Ngoài ra ta thấy nếu tăng thêm một biến số bằng cách điền thêm số 2 vào hai dãy chỉ số của bất đẳng thức $S_3 \geq S_{21}$ ở bài toán 1 thì thu được bài toán 2. Đây chính là ý tưởng của kỹ thuật thêm biến.

1.2. Mệnh đề: Với một bất đẳng thức đúng đối xứng $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \forall x_1, \dots, x_n \geq 0$ với n biến ta có thể thêm vào m biến để được một bất đẳng thức đối xứng mới đúng với $(n+m)$ biến bằng cách lấy tổng dưới dạng:

$\sum f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot g(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m}) \geq 0$ trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+m}$ chạy trên tất cả các hoán vị của $(n+m)$ biến $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ và $g(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m})$ là một hàm đối xứng có giá trị không âm với mọi $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m}$ không âm.

1.3. Hệ quả:

Khi $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là 1 biểu thức có giá trị không âm được biểu diễn dưới dạng cơ sở

và $g(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m}) = \sum_{\text{sym}} \alpha_{n+1}^{i_1} \alpha_{n+2}^{i_2} \dots \alpha_{n+m}^{i_m}$ (tổng bên xét trên m biến

$\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m}$) thì ta có 2 định lý sau đây:

. Định lý 1: Khi thêm m số $t_1, t_2, \dots, t_m$ vào tất cả các bộ số ở cả 2 vế của một bất đẳng thức đối xứng n biến được biểu diễn dưới dạng cơ sở thì ta thu được một bất đẳng thức mới đúng với $n+m$ biến ($m, n \in \mathbb{Z}^+$)

. Định lý 2: Khi $g(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+m}) = 1$ thì một bất đẳng thức đối xứng đúng với n biến thì cũng đúng với m biến ($m, n \in \mathbb{Z}^+; m \geq n$)

. **Ý nghĩa:** Từ 2 định lý trên, ta có thể rút ra được phương pháp sau đây:

– Muốn chứng minh 1 bất đẳng thức đối xứng đúng với số biến lớn (n biến) ta có thể chứng minh nó đúng với số biến nhỏ hơn.

– Khi bất đẳng thức được biểu diễn dưới dạng cơ sở, nếu tất cả các bộ số ở cả 2 vế của bất đẳng thức đều chứa 1 số nào đó thì có thể chứng minh bất đẳng thức đúng khi bỏ số đó ở tất cả các bộ số và giảm số biến đi 1.

Ví dụ: Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng khi xét trên 5000 biến không âm

$$S_{31} + S_{1111} \geq 2S_{211} \quad (*)$$

Ta chứng minh (*) đúng với 4 biến. Nhận thấy tất cả các bộ số ở 2 vế đều chứa số 1 nên ta tìm cách chứng minh bất đẳng thức: $S_3 + S_{111} \geq 2S_{21}$ đúng với 3 biến.

Bất đẳng thức trên đúng vì nó chính là bất đẳng thức **Schur** với $r=1$.

Nhận xét: Kỹ thuật thêm biến là một kỹ thuật vô cùng quan trọng trong việc nghiên cứu và chứng minh các bất đẳng thức đối xứng. Nó giúp chúng ta mở ra một con đường đi từ bất đẳng thức 3 biến, 4 biến đến n biến và ngược lại. Và nó là phần nào xóa đi rào cản về số biến trong một bất đẳng thức đối xứng.

2. Ứng dụng kỹ thuật thêm biến:

Kỹ thuật thêm biến có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Và một trong những ứng dụng khá đẹp của nó là 2 bất đẳng thức **SuranYi** và **Vasile**.

. **Bất đẳng thức SuranYi:** Cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1a_2\dots a_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})$$

. **Bất đẳng thức Vasile:** Cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng:

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n + n(n-1)a_1a_2\dots a_n \geq a_1a_2\dots a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Chứng minh: Ta biểu diễn 2 bất đẳng thức trên dưới dạng cơ sở:

$$\text{SuranYi: } (n-2)S_n + S_{\underbrace{11\dots 1}_{n \text{ số } 1}} \geq (n-1)S(n-1; 1)$$

$$\text{Vasile: } S_n + (n-2)S_{\underbrace{11\dots 1}_{n \text{ số } 1}} \geq (n-1)S_{\underbrace{211\dots 1}_{n-2 \text{ số } 1}}(n-1; 1)$$

Cả 2 bất đẳng thức trên đều là trường hợp riêng của bất đẳng thức sau:

$$\text{Với } k \text{ nguyên dương, } 1 \leq k \leq n \text{ thì } (k-1)S_n + (n-k)S_{\underbrace{11\dots 1}_{n \text{ số } 1}} \geq (n-1)S(k; \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{n-k \text{ số } 1}) \quad (*)$$

$$\text{Đặt } S(q+1; \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{n-q-1 \text{ số } 1}) - S(q; \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{n-q \text{ số } 1}) = \alpha_q \quad (q \in \mathbb{N}; 1 \leq q \leq n-1)$$

Bất đẳng thức (*) trở thành: $(k-1)(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_k) \geq (n-k)(\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} + \dots + \alpha_1)$ (1)

Mặt khác, ta có: $S(q+2) + S(q; 1; 1) \geq 2S(q+1; 1)$ đúng với ba biến (Schur)

Theo định lý 2, ta thêm $n-q-2$ số 1 và $q-1$ số 0 vào cả 3 bộ số của bất đẳng thức trên, ta được

$$S(q+2; \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{n-q-2 \text{ số } 1}) - S(q; \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{n-q \text{ số } 1}) \geq 2S(q+1; \underbrace{1; 1; \dots; 1}_{n-q-1 \text{ số } 1}) \text{ hay } \alpha_{q+1} \geq \alpha_q \quad \forall q = \overline{1, n-2}$$

Cho q chạy từ 1 đến $n-2$ ta có: $\alpha_{n-1} \geq \alpha_{n-2} \geq \dots \geq \alpha_k \geq \alpha_{k-1} \geq \dots \geq \alpha_1$

Từ đó hiển nhiên ta có: $VT(1) \geq (n-k)(k-1)\alpha_k \geq VP(1)$. Vậy ta có (đpcm).

V. SÁNG TẠO CÙNG "TỔNG ĐỐI XỨNG"

Trong rất nhiều cách sáng tạo bất đẳng thức, chúng tôi giới thiệu 3 cách sáng tạo tiêu biểu: "Tương tự hóa, tổng quát hóa và đặc biệt hóa".

1. Tương tự hóa:

Phép tương tự hóa ở đây là việc phối hợp các bất đẳng thức đơn giản bằng cách nhân, cộng, trừ các bất đẳng thức đơn giản với nhau hoặc thay đổi số biến; ...

Ví dụ: Từ 2 bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ hay $S_2 \geq S_{11}$

và $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$, $\forall a, b, c \geq 0$ hay $S_3 + S_{111} \geq 2S_{21}$.

Ta có bất đẳng thức sau: $(S_2 - S_{11})(S_3 + S_{111} - 2S_{21}) \geq 0$, $\forall a, b, c \geq 0$

$$\Leftrightarrow S_5 + 3S_{311} + 2S_{32} \geq 4S_{41} + 2S_{221} \text{ hay}$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + 3(a^3bc + ab^3c + abc^3) + (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3)$$

$$\geq 2(a^4b + b^4c + c^4a + ab^4 + bc^4 + ca^4) + 2(a^2b^2c + b^2c^2a + c^2a^2b)$$

2. Tổng quát hóa

Xét bất đẳng thức $(a-b)^4 \geq 0$. Viết dưới dạng cơ sở là: $S_4 + 3S_{22} \geq 4S_{31}$

Ta xét bài toán tổng quát của bất đẳng thức trên:

Bài toán 1: Cho M, a_1, b_1, a_2, b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$; $a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$. Cho 2 biến $x, y \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $x, y \geq 0$: $S_M + kS_{a_2b_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$

Giải: Nếu $x = y \Rightarrow S_M = S_{a_1b_1} = S_{a_2b_2} \Rightarrow$ bất đẳng thức đã cho đúng với mọi k .

Nếu $x \neq y$: Bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow S_M - S_{a_1b_1} \geq k(S_{a_1b_1} - S_{a_2b_2})$

$$\Leftrightarrow x^M + y^M - x^{a_1}y^{b_1} - x^{b_1}y^{a_1} \geq k(x^{a_1}y^{b_1} + x^{b_1}y^{a_1} - x^{a_2}y^{b_2} - x^{b_2}y^{a_2})$$

$$\Leftrightarrow (x^{a_1} - y^{a_1})(x^{b_1} - y^{b_1}) \geq kx^{b_1}y^{b_1}(x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1})(x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1})$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 (x^{a_1-1} + x^{a_1-2}y + \dots + y^{a_1-1})(x^{b_1-1} + x^{b_1-2}y + \dots + y^{b_1-1})$$

$$\geq k(x-y)^2 x^{b_1} y^{b_1} (x^{a_2-b_1-1} + x^{a_2-b_1-2}y + \dots + y^{a_2-b_1-1})(x^{b_2-b_1-1} + \dots + y^{b_2-b_1-1})$$

$$\text{Cho } \frac{x}{y} \rightarrow 1 \text{ suy ra } a_1 b_1 x^{M-2} \geq k(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)x^{M-2} \Rightarrow k \leq \frac{a_1 b_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với $k = \frac{a_1 b_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)}$ hay

$$\text{chứng minh bất đẳng thức } \frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \cdot \frac{x^{b_1} - y^{b_1}}{b_1(x-y)} \geq x^{b_1} y^{b_1} \cdot \frac{x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)} \cdot \frac{x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}$$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta sẽ sử dụng 2 bổ đề sau:

$$\text{Bổ đề 1. } \frac{a^{m+2} - b^{m+2}}{(m+2)(a-b)} \cdot \frac{a^m - b^m}{m(a-b)} \geq \left[\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{(m+1)(a-b)} \right]^2 \quad (*), \quad \forall a, b > 0; a \neq b; m \in \mathbb{Z}^+$$

$$(*) \Leftrightarrow (m+1)^2 (a^{m+2} - b^{m+2})(a^m - b^m) \geq m(m+2)(a^{m+1} - b^{m+1})^2$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 (a^{2m+2} + b^{2m+2}) - (m+1)^2 (a^{m+2}b^m + a^m b^{m+2}) \geq$$

$$\geq m(m+2)(a^{2m+2} + b^{2m+2}) - 2m(m+2)a^{m+1}b^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow a^{2m+2} + b^{2m+2} - 2a^{m+1}b^{m+1} \geq (m+1)^2 (a^{m+2}b^m + a^m b^{m+2} - 2a^{m+1}b^{m+1})$$

$$\Leftrightarrow (a^{m+1} - b^{m+1})^2 \geq (m+1)^2 a^m b^m (a-b)^2 \Leftrightarrow (a^m + a^{m-1}b + \dots + b^m)^2 \geq (m+1)^2 a^m b^m$$

$$\Leftrightarrow a^m + a^{m-1}b + \dots + b^m \geq (m+1)\sqrt{a^m b^m} \text{ đúng theo AM - GM, suy ra (đpcm)}$$

$$\text{Bổ đề 2. } \left[\frac{a^m - b^m}{m(a-b)} \right]^{n-1} \geq \left[\frac{a^n - b^n}{n(a-b)} \right]^{m-1} \quad (1), \quad \forall a, b > 0; a \neq b; m, n \in \mathbb{Z}^+; m \geq n$$

$$\text{Đặt } \frac{m(a^{m+1} - b^{m+1})}{(m+1)(a^m - b^m)} = \alpha_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+, \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow \alpha_{m+1} \geq \alpha_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow (\alpha_{m-1} \alpha_{m-2} \dots \alpha_n)^{n-1} \geq (\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_1)^{m-n}$$

$$\text{Bất đẳng thức này đúng vì } (\alpha_{m-1} \alpha_{m-2} \dots \alpha_n)^{n-1} \geq \alpha_n^{(m-n)(n-1)} \geq (\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_1)^{m-n}.$$

$$\text{Áp dụng: } \frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \cdot \frac{x^{b_1} - y^{b_1}}{b_1(x-y)} \geq x^{b_1} y^{b_1} \cdot \frac{x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)} \cdot \frac{x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^{b_1} - y^{b_1}}{b_1(x-y)} = \frac{x^{b_1-1} + x^{b_1-2}y + \dots + y^{b_1-1}}{b_1} \geq \sqrt{(xy)^{b_1-1}} \quad (2)$$

$$\left[\frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \right]^{b_1+1} = \left(\frac{x^{a_1-1} + x^{a_1-2}y + \dots + y^{a_1-1}}{a_1} \right)^{b_1+1} \geq \sqrt{(xy)^{(a_1-1)(b_1+1)}} \quad (3)$$

Sử dụng bổ đề 2 ta có:
$$\left[\frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \right]^{a_2-b_1-1} \geq \left[\frac{x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)} \right]^{a_1-1} \quad (4)$$

$$\left[\frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \right]^{b_2-b_1-1} \geq \left[\frac{x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)} \right]^{a_1-1} \quad (5)$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức (3), (4) và (5) ta được:

$$\left[\frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \right]^{a_1-1} \geq \sqrt{(xy)^{(a_1-1)(b_1+1)}} \left[\frac{x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)} \cdot \frac{x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)} \right]^{a_1-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \geq \frac{x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)} \cdot \frac{x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)} \sqrt{(xy)^{b_1+1}} \quad (6)$$

Nhân vế với vế (2) và (6) ta có:

$$\frac{x^{a_1} - y^{a_1}}{a_1(x-y)} \cdot \frac{x^{b_1} - y^{b_1}}{b_1(x-y)} \geq (xy)^{b_1} \cdot \frac{x^{a_2-b_1} - y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)} \cdot \frac{x^{b_2-b_1} - y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Từ bài toán trên, ta tổng quát lên để dùng làm công cụ giải quyết các bài toán khác.

Bài toán 2: Cho M, a_1, b_1, a_2, b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$; $a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$. Xét bài toán với n biến dương ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Chứng minh rằng:

$$k = \frac{a_1 b_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)} \text{ là hằng số tốt nhất để } S_M + k S_{a_2 b_2} \geq (k+1) S_{a_1 b_1} \quad (*) \text{ luôn đúng:}$$

Chứng minh

Các biến dương $x_1, x_2, \dots, x_n$. Biến đổi tương tự bài toán 1 ở trên rồi cho

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n \rightarrow 1 : 1 : \dots : 1 \text{ ta thu được: } k \leq \frac{a_1 b_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)}.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $k = \frac{a_1 b_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)}$

Theo bài toán 1 ở trên, ta có bất đẳng thức (*) đúng với 2 biến dương. Theo định lý 3, ta có bất đẳng thức (*) đúng với n biến dương ($n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+$). Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4)(a+b+c) + 9abc(ab+bc+ca) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}S_5 + 3S_{41} + \frac{9}{2}S_{221} \geq S_2 \left(S_{21} + \frac{1}{2}S_{111} \right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}S_5 + 3S_{41} + \frac{9}{2}S_{221} \geq 2S_{41} + 2S_{32} + 2S_{221} + 3S_{311}$$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}S_5 + S_{41} + \frac{5}{2}S_{221} \geq 2S_{32} + 3S_{311}$. Bất đẳng thức này được chứng minh từ các bất đẳng

thức: $S_{41} + 3S_{221} \geq 4S_{311} \Leftrightarrow S_4 + 3S_{22} \geq 4S_{31}; \frac{3}{2}S_5 + \frac{3}{2}S_{221} \geq 3S_{32}; S_{32} \geq S_{221}; S_{311} \geq S_{221}$ và

sử dụng **Kĩ thuật thêm biến**: Thêm số 1 vào cả 3 bộ số của bất đẳng thức ta có $S_{41} + 3S_{221} \geq 4S_{311}$. Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4} + \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \geq 5 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow abc(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2) + 12(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4) \geq 5(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{311}\left(\frac{1}{2}S_2 + S_{11}\right) + 12\left(\frac{1}{2}S_7 + S_{43}\right) \geq \frac{5}{2}S_4\left(S_{21} + \frac{1}{2}S_3\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{511} + S_{331} + 2S_{421} + S_{322} + 12S_{43} + 6S_7 \geq \frac{5}{2}S_7 + 5S_{43} + 5S_{61} + 5S_{421} + 5S_{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}S_7 + 7S_{43} + \frac{1}{2}S_{511} + S_{331} + S_{322} \geq 5S_{61} + 5S_{52} + 3S_{421}$$

$$\Leftrightarrow 7S_7 + 14S_{43} + S_{511} + 2S_{331} + 2S_{322} \geq 10S_{61} + 10S_{52} + 6S_{421}$$

Bất đẳng thức cuối được chứng minh từ các bất đẳng thức sau:

$$7S_7 + 7S_{43} \geq 14S_{61}; S_{511} + 2S_{322} \geq 3S_{421} \Leftrightarrow S_5 + 2S_{32} \geq 3S_{41};$$

$$4S_{61} + 8S_{43} \geq 12S_{52} \Leftrightarrow S_5 + 2S_{32} \geq 3S_{41}$$

$$S_{52} + 2S_{322} \geq 3S_{421} \Leftrightarrow S_5 + 2S_{32} \geq 3S_{41}; S_{52} \geq S_{43}; S_{421} \geq S_{331}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 3: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3} \quad (1)$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}S_3 + S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} + \frac{\frac{1}{6}S_{111}}{S_3} \geq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3S_3\left(\frac{1}{2}S_3 + S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}\right) + \frac{1}{2}S_{111}\left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right) \geq 5S_3\left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(S_6 + 2S_{33} + 2S_{51} + 2S_{42} + 2S_{321} + 3S_{411} + S_{321} + \frac{1}{3}S_{222}\right) \geq 5(2S_{51} + 2S_{42} + 2S_{321} + 2S_{411})$$

$$\Leftrightarrow 3S_6 + 6S_{33} + S_{222} \geq 4S_{51} + 4S_{42} + S_{321} + S_{411}$$

Bất đẳng thức cuối được chứng minh nhờ các bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{222} \geq S_{321}, \quad \frac{1}{2}S_6 + \frac{1}{2}S_{222} \geq S_{42}; \quad \frac{5}{2}S_6 + \frac{25}{6}S_{42} \geq \frac{20}{3}S_{51} \Leftrightarrow S_6 + \frac{5}{3}S_{42} \geq \frac{8}{3}S_{51};$$

$$\frac{8}{3}S_{51} + 8S_{33} \geq \frac{32}{3}S_{42} \Leftrightarrow S_4 + 3S_{22} \geq 4S_{31}; \quad \frac{5}{2}S_{42} \geq \frac{5}{2}S_{33}; \quad S_{42} \geq S_{321}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Chú ý: Đọc xong lời giải bài này chắc chắn các bạn sẽ tự hỏi tại sao lại có những hệ số ở trước các bất đẳng thức trên như vậy? Câu trả lời là trong quá trình giải, chúng ta vô tình sử dụng giải hệ phương trình bậc nhất nhiều lần nên mới tạo ra những hệ số đó.

Ví dụ 4: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $\frac{7(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{11}{3}(a+b+c)$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 21(a^3+b^3+c^3)^2 + 12(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\geq 11(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{2}S_6 + 21S_{33} + 12S_{42} + 6S_{222} \geq 11S_{51} + 11S_{42} + 11S_{321} + \frac{11}{2}S_6 + \frac{11}{3}S_{33}$$

$$\Leftrightarrow 5S_6 + S_{42} + 10S_{33} + 6S_{222} \geq 11S_{51} + 11S_{321}$$

$$\text{Đúng vì: } \frac{9}{2}S_{33} + \frac{9}{2}S_{222} \geq 9S_{321}; \quad \frac{1}{2}S_{42} + \frac{3}{2}S_{222} \geq 2S_{321} \Leftrightarrow S_4 + 3S_{22} \geq 4S_{31}$$

$$\frac{3}{10}S_6 + \frac{1}{2}S_{42} \geq \frac{4}{5}S_{51} \Leftrightarrow S_6 + \frac{5}{3}S_{42} \geq \frac{8}{3}S_{51};$$

$$\frac{22}{5}S_6 + \frac{11}{2}S_{33} \geq \frac{99}{10}S_{51} \Leftrightarrow S_6 + \frac{5}{4}S_{33} \geq \frac{9}{4}S_{51}, \quad \frac{3}{10}S_6 \geq \frac{3}{10}S_{51}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét: Cũng giống với ví dụ 3 ở trên, bài này ta cũng phải giải hệ phương trình bậc nhất nhiều lần để chọn hệ số đứng trước mỗi bất đẳng thức.

3. Phương pháp chung sáng tạo các bài tập áp dụng

Nhận xét: Hai bài toán 3 và 4 dưới đây là những bài toán rất khó. Hai bài toán 1, 2 và các bất đẳng thức *Schur*, *SuranYi*, *Vasile* đều là những trường hợp rất riêng của nó. Và cho đến nay vẫn chưa có 1 lời giải thỏa đáng cho nó. Đây chính là một thử thách cho tất cả những người say mê toán học, đặc biệt là bất đẳng thức.

3.1. Đặc biệt hóa

Xét các trường hợp riêng của các bất đẳng thức tổng quát sẽ giúp ta có được những bài toán đẹp và dễ áp dụng.

3.2. Mối liên hệ giữa các phương pháp sáng tạo

Từ một cấu trúc về một dạng bất đẳng thức nào đó, ta có thể sử dụng phép "tương tự hóa" để nhận được các bất đẳng thức mới. Từ các bất đẳng thức mới này, ta có thể "tổng quát hóa" các dạng bất đẳng thức này. Sau khi "tổng quát hóa" một bất đẳng thức, ta có thể quay về sử dụng phương pháp "đặc biệt hóa" để tạo ra các bất đẳng thức đơn giản và đẹp. Chúng ta có thể thấy rõ điều này qua các bài toán sau:

Bài 1: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2$; $a_1 \geq b_1$; $a_2 \geq b_2 \geq c_2$; $a_1 \geq a_2$

Bài 2: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1c_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $a_1 \geq b_1 \geq c_1$; $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$; $M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$

Bài 3: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1b_1} + kS_{a_3b_3c_3} \geq (k+1)S_{a_2b_2c_2}$ trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: $a_1 \geq b_1 \geq c_1$; $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2$; $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$

Bài 4: Cho các biến $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1a_2\dots a_n} + kS_{c_1c_2\dots c_n} \geq (k+1)S_{b_1b_2\dots b_n}$ trong đó $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$ là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

Tổng quát hơn một chút nữa là bài toán 5 sau:

Bài 5: Cho các biến không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1a_2\dots a_n} - S_{b_1b_2\dots b_n} \geq k(S_{c_1c_2\dots c_n} - S_{d_1d_2\dots d_n})$ trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n), (d_1, d_2, \dots, d_n)$ là các dãy số nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

Bài 6: Cho dãy số không tăng $\{a_n\}$ và 1 hoán vị của nó $\{b_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Chứng minh: nếu $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ thì $\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{a_n} x_2^{a_{n-1}} \dots x_n^{a_1}$

Chú ý: Bài toán trên có ý nghĩa đối với bất đẳng thức hoán vị tương tự như bất đẳng thức Muirhead đối với bất đẳng thức đối xứng. Làm mạnh hơn bài toán trên ta có:

Bài 7: Cho 2 dãy không tăng $\{a_n\}, \{b_n\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

Dãy biến $\{x_n\}$ không tăng và không âm có $\{y_n\}$ là 1 hoán vị của nó.

Chứng minh rằng: $\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}$

Và tương tự quá trình ta sẽ có những bài bất đẳng thức hoán vị sau:

$$\text{Kí hiệu: } C_X^\alpha = \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Đặc biệt nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số tự nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là:

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Ngoài ra nếu $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$ thì $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$

Bài 8: Cho M, a_1, b_1, a_2, b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$;

$a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$. Cho 2 biến $x, y \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\text{với mọi } x, y \geq 0: C_M + k C_{a_2 b_2} \geq (k+1) C_{a_1 b_1}$$

Bài 9: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_m + kC_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)C_{a_1b_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$

Bài 10: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_m + kC_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)C_{a_1b_1c_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2; M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$;

Bài 11: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1b_1} + kC_{a_3b_3c_3} \geq (k+1)C_{a_2b_2c_2}$ trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $a_1 \geq b_1 \geq c_1; a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2; a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$;

Bài 12: Cho các biến $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1a_2\dots a_n} + kC_{c_1c_2\dots c_n} \geq (k+1)C_{b_1b_2\dots b_n}$ trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$ là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán 4 sau:

Bài 13: Cho các biến không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1a_2\dots a_n} - C_{b_1b_2\dots b_n} \geq k(C_{c_1c_2\dots c_n} - C_{d_1d_2\dots d_n})$ trong đó

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n), (d_1, d_2, \dots, d_n)$ là các dãy số nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq c_1 + c_2 + \dots + c_k \geq d_1 + d_2 + \dots + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

Nhìn lại chương II

Cũng giống như chương I, trong chương này chúng ta đã tiếp tục khám phá thế giới các bất đẳng thức đồng bậc. Các bất đẳng thức được khai thác chủ yếu là các bất đẳng thức đối xứng ba biến. Ngoài ra dựa trên bất đẳng thức *hoán vị* (mục 6) một lớp các bài toán hoán vị đã được giải quyết. Đối với các bất đẳng thức đối xứng ba biến, các bất đẳng thức *Schur* có tính ứng dụng rất cao. Thực hiện phép đổi biến trên các đa thức *Viète* (mục 7.3.2) từ bất đẳng thức *Schur* ta thu được các đánh giá rất chặt giữa $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Chuyển các bất đẳng thức đối xứng ba biến về ba đại lượng mới này, từ đó ta có thể tiến tới chứng minh hoàn thiện bài toán.

Sự phát triển tự nhiên của phép đổi biến dựa trên các đa thức *Viète* đưa ta đến với một hệ thống ký hiệu đầy đủ trong mục 8.I và 8.IV, nhờ hệ thống ký hiệu này mối liên quan giữa các định lý tưởng như khác xa nhau trở nên rất rõ ràng. Thật vậy, từ lược đồ *Young* ta có thể so sánh được mọi tổng đối xứng đồng bậc với nhau nhờ bất đẳng thức *Muirhead* $S_X^\alpha \geq S_X^\beta$ trong đó α và β là hai bộ số mũ đồng bậc, và $\alpha \succ \beta$ (định lý III.3, mục 8). Từ kết quả này có thể thu lại bất đẳng thức *AM - GM* rất dễ dàng, ngược lại, sử dụng các bất đẳng thức *AM - GM* cũng có thể chứng minh lại được bất đẳng thức *Muirhead*. Điều này khá phổ biến trong thế giới các bất đẳng thức đồng bậc đối xứng. Mặt khác, kết hợp bất đẳng thức *Muirhead* và bất đẳng thức *AM - GM* ta nhận được bất đẳng thức *ASYM*, bất đẳng thức này đưa ra một đánh giá khá chặt chẽ khi hai vế được pha trộn bởi các tổng đối xứng đồng bậc, cụ thể

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} + S_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n}} + \dots + S_{\alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{mn}} \geq m S_{1^m 2^{m-1} \dots n}$$

Lưu ý rằng mọi bất đẳng thức đối xứng đều là sự pha trộn giữa các tổng đối xứng đồng bậc khác nhau (sử dụng phép biến đổi trình bày trong mục 8.IV.3). Như vậy bất đẳng thức *ASYM* là một sự phát triển của bất đẳng thức *Muirhead* để tấn công thế giới đó. Cũng như vậy, nhờ việc biểu diễn bất đẳng thức *Schur* theo dạng *Muirhead* ta dễ dàng nhận thấy bất đẳng thức *Schur* (dạng tổng quát) cũng là một đánh giá thú vị khi hai vế được trộn lẫn bởi các tổng đối xứng đồng bậc. Tuy nhiên phạm vi áp dụng của bất đẳng thức *ASYM* và bất đẳng thức *Schur* là rất khác nhau. Chính vì thế, chúng bổ sung hỗ trợ cho nhau rất hiệu quả khi chứng minh bất đẳng thức đối xứng.

Tiếp theo đó, kỹ thuật thêm biến trình bày trong mục 8.VIII.2 cho ta một hướng đi mới rất hấp dẫn, đó là chuyển từ bất đẳng thức đối xứng ba biến lên bất đẳng thức đối xứng n biến dựa trên chính các tổng đối xứng, mà nếu như đi theo cách thức tổng quát lược đồ *Young* rồi tổng quát định lý *Muirhead* cho n biến thì sẽ gặp nhiều khó khăn trong khâu kỹ thuật và tính toán. Hai bất đẳng thức *Suranyi* và *Vasile* trong mục 8.VIII.2.3 là những ứng dụng đẹp nhất của ý tưởng này.

Mục 8.IX tìm cách kết hợp những điểm mạnh nhất của *Muirhead*, *ASYM* và *Schur*. Tuy nhiên các kết quả thu được còn khá hạn chế, chúng ta mới chỉ dừng lại ở hai bài toán 1 và 2 mục 8.IX.2. Có thể nhận thấy nhờ kỹ thuật thêm biến, hai kết quả này cũng đã là rất mạnh. Như thế, 13 bài toán cuối chương sẽ là những bài toán mới, rất khó, thách thức khả năng tìm tòi của bạn đọc.

CHƯƠNG III: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG GIẢI TÍCH

Theo lẽ thông thường thì sau phần trình bày những viên kim cương của bất đẳng thức cổ điển, bất đẳng thức cận đại là phải đến những viên kim cương của bất đẳng thức hiện đại. Tuy nhiên trước khi đề cập những viên kim cương của bất đẳng thức hiện đại chúng tôi đặt 1 chương trung gian nối giữa bất đẳng thức cận đại và hiện đại. Sự sắp đặt và tên gọi của chương III có thể hiểu vì sự ra đời của các viên kim cương trong giải tích xuyên suốt theo chiều dọc thời gian cả cổ điển, cận đại lẫn hiện đại và để phù hợp với tính chất phát triển hệ thống của chương thì một số viên kim cương mới được phát hiện không lâu như: **Popoviciu, RCF, LCF** sẽ được sắp đặt sau các viên kim cương như **Jensen, Karamata**, một số khác sẽ được xếp vào chương IV: "**Những viên kim cương trong bất đẳng thức hiện đại**".

Có thể nói phương pháp giải tích là một sự tiếp nối của các bất đẳng thức đại số cả về mặt lịch sử lẫn ý tưởng, nhưng kèm theo nó là một đột phá về mặt công cụ, đó chính là phép toán đạo hàm, bởi vì sử dụng đạo hàm cho phép ta có thể khảo sát bất đẳng thức một cách "địa phương" hơn (điều này sẽ được mô tả cụ thể ở cuối chương). Mặt khác, như đã thấy đối với các phương pháp đại số, kỹ thuật chọn điểm rơi có tầm ứng dụng rất rộng rãi. Trong chương này, các định lý cụ thể của phương pháp giải tích còn cung cấp cho chúng ta những giải pháp rất hiệu quả để tìm ra các điểm rơi đó. Toàn bộ bố cục của chương gồm các nội dung chính sau đây:

1. Định lý Fermat và ứng dụng trong bất đẳng thức
2. Định lý Lagrange cho hàm một biến và các ứng dụng
3. Cực trị của hàm nhiều biến và phương pháp nhân tử Lagrange
4. Bất đẳng thức Bernoulli và các ứng dụng
5. Bất đẳng thức Jensen và kỹ thuật sử dụng
6. Bất đẳng thức Karamata và kỹ thuật sử dụng
7. Bất đẳng thức với các hàm số lồi bên phải và lõm bên trái (**RCF, LCF**)
8. Bất đẳng thức Popoviciu
9. Ứng dụng tích phân Riman

Các định lý **Fermat** trong mục 9 là nền tảng của toàn bộ **chương III** và thậm chí của cả các chương sau nữa. Các định lý **Lagrange** và phương pháp nhân tử **Lagrange** trong mục 10 là những sự phát triển sâu sắc và triệt để của các định lý đó. Bất đẳng thức **Bernoulli** trong mục 11 là một đánh giá cụ thể đặc biệt có ý nghĩa đối với các hàm số mũ thực. Một cách chung nhất, các định lý được trình bày trong ba mục này cho ta cách xác định điểm rơi bất đẳng thức rất đáng *tin cậy*.

Mặt khác, cũng nhờ đạo hàm ta có thể khảo sát đáng điệu của các bất đẳng thức một cách cụ thể hơn. Các bất đẳng thức **Jensen**, **Karamata**, **RCF**, **LCF**, **Popoviciu** là các bất đẳng thức phát biểu cho các hàm lồi, lõm, nửa lồi, nửa lõm, tức là các hàm có đáng điệu đặc biệt. Điểm thú vị nhất là các bất đẳng thức này đều mang hơi hướng một phép dồn biến trực tiếp, mà nội dung của nó ta sẽ bắt gặp một cách đầy đủ hơn trong **chương IV**: "*Những viên kim cương trong bất đẳng thức hiện đại*".

Cuối cùng, những ứng dụng của tích phân Riman cho ta một cái nhìn toàn cục trong chứng minh bất đẳng thức, bởi vì phép lấy tích phân là phép toán ngược của phép đạo hàm.

Tóm lại, đây sẽ là một chương vừa mang màu sắc cổ điển, vừa phảng phát hơi hướng hiện đại. Chính sự pha trộn đặc biệt này sẽ giúp cho các bạn độc giả có đủ hứng thú để đi suốt chặng đường đầy gian nan sắp tới. Chúc các bạn may mắn!

§9. ĐỊNH LÝ FERMAT VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

§9.1. GIỚI THIỆU ĐỊNH LÝ FERMAT

1. Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a, b]$.

- Nếu $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ tăng trên $[a, b]$ và khi đó ta có

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$$

- Nếu $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ giảm trên $[a, b]$ và khi đó ta có

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(b), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$$

Chứng minh: Với mọi $x_0, x \in (a, b); x_0 < x$, ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Nếu $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ mà $x > x_0$ nên $f(x) > f(x_0)$

Do $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(b)$

- Nếu $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ mà $x > x_0$ nên $f(x) < f(x_0)$

Do $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(b), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(a)$

2. Định lý 2 (Điều kiện cần để hàm số có cực trị): Giả sử $y = f(x)$ xác định trên một

lân cận đủ bé của điểm $x_0 \in (a, b)$ và có đạo hàm tại điểm x_0 . Khi đó nếu hàm số

$y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

Chứng minh:

Giả sử x_0 là điểm cực đại của hàm số. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)} f(x)$.

$$\text{Nếu } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(x_0) \\ x < x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\text{Nếu } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 nên $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

3. Định lý 3 (Điều kiện đủ để hàm số có cực trị):

Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Trong một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0 , nếu $f'(x)$ thay đổi dấu khi x đi qua x_0 (có thể không tồn tại $f'(x_0)$) thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 .

- Nếu $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
- Nếu $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì x_0 là điểm cực đại.

Chứng minh: Xem minh họa trong 2 bảng biến thiên sau:

x	$x_0 - \varepsilon$	x_0	$x_0 + \varepsilon$
$f'(x)$		$\begin{matrix} 0 \\ \\ - \end{matrix}$	
$f(x)$		$\begin{matrix} \nearrow \text{CD} \searrow \end{matrix}$	

x	$x_0 - \varepsilon$	x_0	$x_0 + \varepsilon$
$f'(x)$		$\begin{matrix} 0 \\ \\ + \end{matrix}$	
$f(x)$		$\begin{matrix} \searrow \text{CT} \nearrow \end{matrix}$	

4. Định lý 4: Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Trong một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0 , hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, đồng thời $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số với sự phân loại chi tiết:

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$.
- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm $f(x)$.

Chứng minh:

Giả sử $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$. Do $f''(x)$ liên tục tại x_0 nên tồn tại một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0 sao cho $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Khi đó ta có

Với mọi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ thì $f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Với mọi $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì $f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Vậy x_0 là điểm cực đại của hàm số và $f(x_0)$ là một cực đại của hàm số.

Xét tương tự khi $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$.

§9.2. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ FERMAT

I. DẠNG 1. Khi gặp các bất đẳng thức có dạng $f(x) > 0$ ta có thể tiến hành đạo hàm để khảo sát trực tiếp các cực trị của $f(x)$, từ đó suy ra kết luận bài toán. Sau đây là một số ví dụ:

Bài 1. Chứng minh rằng: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > 0$

Chứng minh

• $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \Leftrightarrow f(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x > 0 \quad \forall x > 0$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{1+x} + x - 1 = \frac{x^2}{1+x} > 0, \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$

• $\ln(1+x) < x \Leftrightarrow g(x) = \ln(1+x) - x < 0, \quad \forall x > 0$

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow g(x)$ giảm trên $(0, +\infty)$

$\Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\ln x < \sqrt{x} \quad \forall x > 0$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} - \ln x > 0 \quad \forall x > 0$

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Từ bảng biến thiên suy ra

$f(x) \geq f(4) > 0 \Leftrightarrow \ln x < \sqrt{x} \quad \forall x > 0$

x	0	4	$+\infty$	
f'		-	0	+
f			$2-2\ln 2$	

Bài 3. Chứng minh rằng: $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow f(x) = 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên của $f(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq f(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	$+$
f		0	

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a^a$ với $a > 0$

Giải

Đặt $f(a) = \ln T = a \ln a$.

Ta có: $f'(a) = 1 + \ln a = 0 \Leftrightarrow a = e^{-1}$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên

$\Rightarrow \text{Min } f(a) = f(e^{-1}) = -e^{-1} \Rightarrow \text{Min } T = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

x	$-\infty$	e^{-1}	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$f(e^{-1})$		

Bài 5. Cho $3 \leq n$ là số chẵn. Chứng minh rằng $\forall x \neq 0$ ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^n}{n!}\right) < 1$$

Chứng minh

Đặt $\begin{cases} u(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\ v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^n}{n!} \end{cases}$ ta cần chứng minh $f(x) = u(x) \cdot v(x) < 1$

Ta có $\begin{cases} u'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = u(x) - \frac{x^n}{n!} \\ v'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = -v(x) - \frac{x^n}{n!} \end{cases}$

x	0	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	1		

Vậy $f'(x) = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$f'(x) = \left[u(x) - \frac{x^n}{n!}\right]v(x) - u(x)\left[v(x) + \frac{x^n}{n!}\right] = \frac{-x^n}{n!}[u(x) + v(x)]$$

$$f'(x) = \frac{-2x^n}{n!} \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

Vì $3 \leq n$ chẵn nên $f'(x)$ cùng dấu với $(-2x)$

Nhìn bảng biến thiên ta có, $f(x) < f(0) = 1 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 6. Cho $3 \leq n \in \mathbb{N}$ và $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\sin^n x + \cos^n x \geq 2^{\frac{2-n}{2}}$

Chứng minh

Đặt $y = \sin^n x + \cos^n x \Rightarrow y' = n \sin x \cos x (\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$

Ta có với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Nhìn bảng biến thiên suy ra: $\text{Min } y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{2-n}{2}}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$-$	0
f	1	CT	1

II. DẠNG 2. Đối với các trường hợp đơn giản như trên chỉ cần đạo hàm một lần và lập bảng biến thiên là có thể biết được đủ thông tin về $f(x)$, tuy nhiên trong các bài toán phức tạp, ta phải tiến hành đạo hàm vài lần, thậm chí phải khảo sát thêm một số hàm phụ mới xuất hiện.

Bài 1. Chứng minh rằng: $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \forall x > 0$

Chứng minh

$$\bullet x - \frac{x^3}{3!} < \sin x \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{3!} - x + \sin x > 0, \forall x > 0$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x^2}{2!} - 1 + \cos x \Rightarrow f''(x) = x - \sin x \Rightarrow f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \text{ đồng biến } [0, +\infty) \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến } [0, +\infty) \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến } [0, +\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

$$\bullet \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow g(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x - \sin x > 0, \forall x > 0$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} + 1 - \cos x \Rightarrow g''(x) = \frac{x^3}{3!} - x + \sin x = f(x) > 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \text{ đồng biến } [0, +\infty) \Rightarrow g'(x) > g'(0) = 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ đồng biến } [0, +\infty) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sin x > \frac{2x}{\pi}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Chứng minh

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Xét}$$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\text{trong đó } g(x) = x \cos x - \sin x. \text{ Ta có } g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ suy ra } g(x) \text{ giảm trên } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$$

$$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \text{ giảm trên } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \sin x > \frac{2x}{\pi}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{x}{1-x} + \frac{1}{x^{1-x}} > \frac{2}{e}, \forall x \in (0, 1)$

Chứng minh

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x^{1-x}} = \frac{x}{1-x} + x \cdot \frac{x}{1-x} = (1+x) \frac{x}{1-x} \text{ với } x \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(1+x) \cdot x^{1-x} = \ln(1+x) + \frac{x}{1-x} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow [\ln f(x)]' = \left[\ln(1+x) + \frac{x}{1-x} \cdot \ln x \right]' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2} \right] = (1+x)x^{1-x} \cdot \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2} \right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = (1+x)x^{1-x} \cdot (1-x)^{-2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1-x}{1+x} + \ln x \right)$$

$$\text{Xét } g(x) = 2 \cdot \frac{1-x}{1+x} + \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{-4}{(1+x)^2} + \frac{1}{x} = \frac{(1-x)^2}{x(1+x)^2} > 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ tăng trên } (0, 1) \Rightarrow g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ giảm trên } (0, 1) \Rightarrow f(x) > \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x)x^{-1} \cdot x^{1-x} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{1-x} \right)^{-\frac{1}{1-x}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} > \frac{2}{e} \quad \forall x \in (0, 1)$$

Bài 4. Cho $a, b, x > 0$ và $a \neq b$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+x}{b+x} \right)^{b+x} > \left(\frac{a}{b} \right)^b$

Chứng minh

$$\text{Xét } f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x} \right)^{b+x} \text{ với } x \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = (b+x) \ln \frac{a+x}{b+x} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \left[(b+x) \ln \frac{a+x}{b+x} \right]'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \frac{a+x}{b+x} + (b+x) \frac{b+x}{a+x} \left(\frac{a+x}{b+x} \right)' = \ln \frac{a+x}{b+x} + \frac{(b+x)^2}{a+x} \cdot \frac{b-a}{(b+x)^2} = \ln \frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln \frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x} \right) = \left(\frac{a+x}{b+x} \right)^{b+x} \left(\ln \frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x} \right)$$

$$\text{Xét } g(x) = \ln \frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x} \Rightarrow f'(x) = g(x) \left(\frac{a+x}{b+x} \right)^{b+x}$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{b+x}{a+x} \cdot \frac{b-a}{(b+x)^2} + \frac{a-b}{(a+x)^2} = \frac{-(a-b)^2}{(a+x)^2(b+x)} < 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ giảm trên } (0, +\infty) \Rightarrow g(x) > \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tăng trên } [0, +\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 5. Tìm số thực α lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leq e, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Giải

Gọi $f(n)$ là số thực thỏa mãn điều kiện

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+f(n)} = e \Leftrightarrow \left[n + f(n) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = 1 \Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n$$

Xét $f(x) = \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x$ với $x \in [1, +\infty)$. Khi đó $f'(x) = \frac{1}{x(x+1) \ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1$

Ta chứng minh $\ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ với $t > 0$. Thật vậy, $g(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}} - \ln(1+t)$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{\sqrt{1+t} - \frac{t}{\sqrt{1+t}}}{1+t} - \frac{1}{1+t} = \frac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}} - \frac{1}{1+t} < 0 \Rightarrow g(t) \text{ giảm}$$

Suy ra $g(t) < g(0), \forall t > 0$ hoặc $\ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Vậy

$$\ln^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow x(x+1) \ln^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) < 1, \forall x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 0$$

Vậy hàm số $n f(x)$ tăng trên $[1, +\infty)$.

Vậy suy ra $\alpha \leq f(n)$, và khi đó $\alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ là giá trị cần tìm.

III. DẠNG 3. Đối với một lớp các bất đẳng thức hai biến số, ta có thể biến đổi để quy về bất đẳng thức một biến. Biến này có thể là một trong hai biến số ban đầu, hoặc là một biến mới.

Bài 1. Cho $x^2 + y^2 = 1$ và $S = \frac{2(xy + y^2)}{2xy + 2x^2 + 1}$. Chứng minh: $\frac{2-\sqrt{6}}{2} \leq S \leq \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

$$S = \frac{2(xy + y^2)}{2xy + 2x^2 + 1} = \frac{2(xy + y^2)}{2xy + 2x^2 + (x^2 + y^2)} = \frac{2(xy + y^2)}{3x^2 + 2xy + y^2}. \text{ Nếu } y = 0 \text{ thì } S = 0.$$

Với $y \neq 0$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow S = \frac{2y^2(t+1)}{y^2(3t^2 + 2t + 1)} = \frac{2(t+1)}{3t^2 + 2t + 1}$.

$$S' = \frac{2(3t^2 + 2t + 1) - 2(t+1)(6t+2)}{(3t^2 + 2t + 1)^2} = \frac{-2(3t^2 + 6t + 1)}{(3t^2 + 2t + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = t_1 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3}; t = t_2 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$$

Nhìn bảng biến thiên suy ra: $\frac{2-\sqrt{6}}{2} \leq S \leq \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

t	$-\infty$	t_1	t_2	$+\infty$
S'	-	0	+	0
S	0	$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	0

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}, \forall a, b > 0.$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{a^4+b^4}}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^4}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^3}} = \frac{\sqrt[4]{1+t^4}}{\sqrt[3]{1+t^3}} \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \text{ với } t = \frac{a}{b} > 0.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\sqrt[4]{1+t^4}}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \frac{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}{(1+t^3)^{\frac{1}{3}}} \text{ với } t > 0;$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{(1+t^4)^{-\frac{3}{4}} t^3 (1+t^3)^{\frac{1}{3}} - (1+t^4)^{\frac{1}{4}} t^2 (1+t^3)^{-\frac{2}{3}}}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(t) = \frac{t^2 \left(1+t^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} (1+t^4)^{-\frac{3}{4}} [t(1+t^3) - (1+t^4)]}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{t^2 \left(1+t^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} (1+t^4)^{-\frac{3}{4}} (t-1)}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \text{Bảng biến thiên } f(t)$$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \leq f(t) < 1 \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{\sqrt[4]{a^4+b^4}}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a = b > 0.$$

t	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	1	$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}}$	1

Bài 3. Cho $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \leq (1 + 2 \cdot \sqrt[5]{2})^{\frac{5}{6}}$

Chứng minh

$$\text{Ta có } x^3 + y^3 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{1-x^3}$$

$$\text{Xét } f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \sqrt{x} + 2\sqrt[6]{1-x^3} \text{ với } x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{1+2 \cdot \sqrt[5]{2}} \Rightarrow \text{Bảng biến thiên}$$

Từ bảng biến thiên suy ra:

$$f(x) \leq f(x_0) = M = (2 \cdot \sqrt[5]{2} + 1)^{\frac{5}{6}} \quad \forall x \in [0, 1]$$

x	0	x_0	1
f'	+	0	-
f		M	

Bài 4. Cho $\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \leq 2$

Chứng minh

$$\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \leq -2x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 5x^2 - 6x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{6}{5} \end{cases}$$

Ta có $x^2 + y^2 \leq x^2 + (-2x^2 + 3x)^2 = f(x)$.

Ta sẽ chứng minh: $f(x) \leq 2$

Biến đổi $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 10x^2$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x(x-1)(x-5)$$

x	0	1	6/5
f'	+	0	-
f		2	

Từ bảng biến thiên suy ra $\text{Max } f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq f(x) \leq 2$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \quad \forall x > y > 0$

Chứng minh

Vì $x > y > 0$, $\ln x > \ln y \Leftrightarrow \ln x - \ln y > 0$, khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln x - \ln y > 2 \cdot \frac{x-y}{x+y}$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x}{y} > 2 \cdot \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1} \Leftrightarrow \ln t > 2 \cdot \frac{t-1}{t+1}, \quad \text{với } t = \frac{x}{y} > 1 \Leftrightarrow f(t) = \ln t - 2 \cdot \frac{t-1}{t+1} > 0 \quad \forall t > 1.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0 \quad \forall t > 1$$

$\Rightarrow f(t)$ tăng trên $[1, +\infty) \Rightarrow f(t) > f(1) = 0 \quad \forall t > 1 \Rightarrow$ (đpcm.)

Bài 6. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm Max, Min của biểu thức $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

Giải

Xét Max A: Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\begin{aligned} A &= x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \leq \sqrt{(x^2 + y^2)[(1+x) + (1+y)]} = \sqrt{2+1x+1y} \\ &\leq \sqrt{2 + \sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Xét Min A:

i) Nếu $xy \geq 0$. Xét hai khả năng sau đây:

$$\bullet x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow \text{Min } A > 0 \quad (1)$$

$$\bullet x \leq 0, y \leq 0: |A| \leq \sqrt{(x^2 + y^2)[(1+x) + (1+y)]} = \sqrt{2+x+y} = \sqrt{2-|x|-|y|}$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x|, |y| \leq 1 \Rightarrow |x| + |y| \geq x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow |A| \leq \sqrt{2-1} = 1 \Rightarrow A \geq -1 \Rightarrow \text{Min } A = -1 \quad (2)$$

ii) Nếu $xy < 0$ thì đặt $t = x + y \Rightarrow xy = \frac{1}{2}(t^2 - 1) < 0 \Rightarrow -1 < t < 1$

Sử dụng $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2A^2 = 2x^2(1+y) + 4xy\sqrt{(1+y)(1+x)} + 2y^2(1+x)$

$$= 2 + 2xy(x+y) + 4xy\sqrt{1+x+y+xy} = f(t) = 2 + (t^2 - 1)t + 2(t^2 - 1)\sqrt{1+t+\frac{t^2-1}{2}}$$

$$\Rightarrow f(t) = (1+\sqrt{2})t^3 + \sqrt{2}t^2 - (1+\sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2} \Rightarrow f'(t) = 3(1+\sqrt{2})t^2 + 2\sqrt{2}t - (1+\sqrt{2})$$

Ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{-(1+\sqrt{2})}{3}; t_2 = \sqrt{2} - 1$

t	-1	t_1	t_2	1	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	2	$f(t_1)$	$f(t_2)$	2	

Từ bảng biến thiên suy ra

$$f(t) \leq f(t_1) = \frac{76-12\sqrt{2}}{27} \quad \forall t \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow 2A^2 \leq \frac{76-12\sqrt{2}}{27} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}} \leq A \leq \sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}} \Rightarrow \text{Min } A = -\sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{Min } A = -\sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}}$ xảy ra $\Leftrightarrow x, y = \frac{-(1+\sqrt{2}) \pm \sqrt{15-2\sqrt{2}}}{6}$

IV. DẠNG 4. Đối với một lớp các bất đẳng thức hai biến số khác, ta thường phải tìm cách phân ly hai biến và đưa ra một hàm đặc trưng để khảo sát. Phương pháp này cũng có hiệu quả với một số bài toán ba biến.

Bài 1. Chứng minh rằng: $a^b < b^a, \quad \forall a > b \geq e$.

Chứng minh

$$a^b < b^a \Leftrightarrow \ln a^b < \ln b^a \Leftrightarrow b \ln a < a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \geq e$. Ta có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq \frac{1 - \ln e}{x^2} = 0$

$$\Rightarrow f(x) \text{ giảm trên } [e, +\infty) \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow a^b < b^a$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a, \quad \forall a \geq b > 0$

Chứng minh

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a \Leftrightarrow \left(\frac{1+4^a}{2^a}\right)^b \leq \left(\frac{1+4^b}{2^b}\right)^a$$

$$\Leftrightarrow (1+4^a)^b \leq (1+4^b)^a \Leftrightarrow \ln(1+4^a)^b \leq \ln(1+4^b)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1+4^b)}{b}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x) \ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ giảm trên } (0, +\infty) \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4 \quad \begin{cases} \forall x, y \in (0,1) \\ x \neq y \end{cases} \quad (1)$

Chứng minh

• Nếu $y > x$ thì (1) $\Leftrightarrow \ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} > 4(y-x) \Leftrightarrow \ln \frac{y}{1-y} - 4y > \ln \frac{x}{1-x} - 4x$

• Nếu $y < x$ thì (1) $\Leftrightarrow \ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} < 4(y-x) \Leftrightarrow \ln \frac{y}{1-y} - 4y < \ln \frac{x}{1-x} - 4x$

Xét $f(t) = \ln \frac{t}{1-t} - 4t$ với $t \in (0, 1)$

Ta có $f'(t) = \frac{1-t}{t} \left(\frac{t}{1-t} \right)' - 4 = \frac{1-t}{t} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} - 4 = \frac{1}{t(1-t)} - 4 = \frac{(2t-1)^2}{t(1-t)} > 0 \quad \forall t \in (0, 1)$

$\Rightarrow f(t)$ tăng trên $(0, 1) \Rightarrow f(y) > f(x)$ nếu $y > x$ và $f(y) < f(x)$ nếu $y < x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4 \quad \begin{cases} \forall x, y \in (0,1) \\ x \neq y \end{cases}$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1)$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Xét $f(x) = x(1-x^2)$ với $x \in (0, 1)$

Ta có $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 1)$

x	0	$1/\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \forall x \in (0, 1)$, khi đó ta có:

$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow (\text{đpcm}).$

Bài 5. a. Lập bảng biến thiên và tìm cực trị của $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

b. Cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geq \sqrt{10}$

Chứng minh

a. $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

• Đạo hàm: $y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{(x+3)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-3x}{(x^2+1)^{3/2}}$

• Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+3)}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \rightarrow +\infty \\ (-1) & \text{nếu } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	-1	$\sqrt{10}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{\text{Max}} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}$

b. Sử dụng kết quả của a. $\Rightarrow y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} \leq y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10} \Leftrightarrow x+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x=a \Rightarrow \\ x=b \Rightarrow \\ x=c \Rightarrow \end{cases} + \begin{cases} a+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+1} \\ b+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{b^2+1} \\ c+3 \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{c^2+1} \end{cases}$$

Do $a+b+c=1 \Rightarrow 10 \leq \sqrt{10} [\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}]$

$\Leftrightarrow \sqrt{10} \leq \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 6. a. Lập bảng biến thiên và tìm cực trị của $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

b. Cho $a+b+c=3$. Chứng minh: $\sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1} \geq 3$

Chứng minh

a. $y' = \frac{\sqrt{x^2-x+1} - \frac{(x+1)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{x^2-x+1} = \frac{3(1-x)}{2(x^2-x+1)^{3/2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 2 \Rightarrow$ Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{\text{Max}} = y(1) = 2$

b. Theo a. suy ra $\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \leq 2 \Leftrightarrow x+1 \leq 2\sqrt{x^2-x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x=a \Rightarrow \\ x=b \Rightarrow \\ x=c \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a+1 \leq 2\sqrt{a^2-a+1} \\ b+1 \leq 2\sqrt{b^2-b+1} \\ c+1 \leq 2\sqrt{c^2-c+1} \end{cases}$$

Vì $a+b+c=3 \Rightarrow 6 \leq 2(\sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1})$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	-1	2	1

V. DẠNG 5. Đối với các bất đẳng thức nhiều biến, ta có thể chọn một biến làm tham số biến thiên và cố định các biến còn lại, bài toán lúc này trở thành bất đẳng thức một biến và ta có thể sử dụng các kết quả đã biết trong định lý Fermat.

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $x = a \Rightarrow x \geq b \geq c > 0$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{b+c} + \frac{b}{c+x} + \frac{c}{x+b}$ với $x \geq b \geq c > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(x+c)^2} - \frac{c}{(x+b)^2} > \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(b+c)^2} - \frac{c}{(b+c)^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ tăng trên } [b, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(b) = \frac{2b+c}{b+c} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } x = b \Rightarrow x \geq c > 0, \text{ Xét } g(x) = \frac{2x+c}{x+c} \text{ với } x \geq c > 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{c}{(x+c)^2} > 0 \quad \forall c > 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ tăng trên } [c, +\infty) \Rightarrow g(x) \geq g(c) = \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3) suy ra } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$$

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c < a+b$.

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow f(c) = c^3 - c^2(a+b) - c(a^2 + b^2 - 2ab) + a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 < 0$$

Chúng ta sẽ khảo sát hàm $f(c)$ với $b \leq c < a+b$. Ta có

$$f'(c) = 3c^2 - 2c(a+b) - (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow c = c_1 = \frac{(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 3(a-b)^2}}{3} < 0$$

$$\text{hoặc } c = c_2 = \frac{(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 3(a-b)^2}}{3} = \frac{(a+b) + 2\sqrt{\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2}}{3} \in (b, a+b)$$

Ta có bảng biến thiên với chú ý:

$$f(a+b) = 0; f(b) = a^2(a-2b) < 0 \text{ (vì } 0 < a \leq b)$$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(c) < 0, \forall c \in (b, a+b]$

c	b	c_2	$a+b$
f'	-	0	+
f	$\nearrow$	$f(c_2)$	$\searrow$

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có thể suy biến

(tức là $a, b, c > 0; b + c \geq a; c + a \geq b; a + b \geq c$)

Đặt $T = \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Tìm $\text{Max } T$ và chứng minh rằng $\text{Max } T < \frac{1}{21}$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, theo giả thiết ta có $a \leq b + c$.

$$\text{Xét } f(a) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{a-c}{a+c} \Rightarrow f'(a) = \frac{2(a^2 - bc)(b-c)}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(a) \text{ tăng} \Rightarrow f(a) \leq f(b+c) = \frac{bc(b-c)}{(b+c)(2b+c)(2c+b)}. \text{ Đặt } \frac{b}{c} = x, \text{ Ta có}$$

$$f(b+c) = \frac{(x-1)x}{(x+1)(2x+1)(2+x)} = g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 4x - 2}{[(x+1)(2x+1)(2+x)]^2}$$

$$\text{Xét } -2x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow [2x^2 + 2 + (\sqrt{38} - 2)x][2x^2 + 2 - (\sqrt{38} + 2)x] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{28 + 4\sqrt{38}} + (2 + \sqrt{38})}{2} = x_0. \text{ Sử dụng máy tính bỏ túi ta có:}$$

$$\text{Max } f(a) = \frac{(x_0 - 1)x_0}{(x_0 + 1)(2x_0 + 1)(2 + x_0)} < \frac{1}{21}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3 \quad \forall x, y, z \in [0, 1]$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z \leq 3$. Ta có:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2 \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}); x = x_2 = \frac{1}{6}(y + \sqrt{y^2 + 6z^2})$$

Vì $x_1 \leq 0$ nên $x_1 \notin (0, 1)$. Xét hai trường hợp:

• Nếu $x_2 \notin (0, 1) \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $[0, 1]$

$$\Rightarrow \text{Max}_{x \in [0, 1]} f(x) = \text{Max}\{f(0), f(1)\}$$

x	0	x_2	1
f'		- 0 +	
f		$f(x_2)$	

• Nếu $x_2 \in (0, 1)$ thì ta có bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \text{Max}_{x \in [0, 1]} f(x) = \text{Max}\{f(0), f(1)\}$

Như vậy trong cả hai trường hợp ta có $\text{Max}_{x \in [0, 1]} f(x) = \text{Max}\{f(0), f(1)\}$

$$\text{Mặt khác: } f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \leq 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$$

Ta sẽ chứng minh $f(1) \leq 3$. Thật vậy, đặt $f(1) = g(y) = 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2)$.

Ta có: $g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = y_1 = \frac{1}{6}(z - \sqrt{z^2 + 6}) < 0$; $y = y_2 = \frac{1}{6}(z + \sqrt{z^2 + 6})$

• Nếu $y_2 \notin (0, 1) \Rightarrow g'(y) \leq 0 \forall y \in [0, 1] \Rightarrow g(y)$ giảm trên $[0, 1]$

Khi đó ta có $\max_{y \in [0, 1]} g(y) = \max\{g(0), g(1)\}$

• Nếu $y_2 \in (0, 1)$ thì ta có bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \max_{y \in [0, 1]} g(y) = \max\{g(0), g(1)\}$

y	0	y_2	1
g'	-	0	+
g			

Như vậy trong cả hai trường hợp thì $\max_{y \in [0, 1]} g(y) = \max\{g(0), g(1)\}$

Ta có $g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \leq 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1) = z(z - 1)(2z + 1) + 3 \leq 3 \forall z \in [0, 1]$

Bài 5. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Giải

Đặt $f(a) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$. Xét hai trường hợp sau:

• **Trường hợp 1:** $a \geq b \geq c$: Ta có $f'(a) = \frac{b}{(a+b)^2} - \frac{c}{(a+c)^2} = \frac{(b-c)(a^2 - bc)}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq 0$

$\Rightarrow f(a) \leq f(3) = \frac{3}{b+3} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+3} = g(c)$. Mặt khác,

$g'(c) = \frac{-b}{(b+c)^2} + \frac{3}{(c+3)^2} = \frac{(b-3)(3b-c^2)}{(b+c)^2(c+3)^2} \leq 0 \Rightarrow g(c) \leq g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{b+3} + \frac{3b}{3b+1} + \frac{1}{10} = h(b)$

Ta có: $h'(b) = \frac{3}{(3b+1)^2} - \frac{3}{(b+3)^2} = \frac{(1-b)(1+b)}{(3b+1)(b+3)} \Rightarrow$ Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow f\left(3, b, \frac{1}{3}\right) \leq f\left(3, 1, \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5}$

• **Trường hợp 2:** $c \geq b \geq a$: Từ kết quả của trường hợp 1, ta có $f(c, b, a) \leq \frac{8}{5}$. Mặt khác,

$f(a, b, c) - f(c, b, a) = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \leq 0$

$\Rightarrow f(a, b, c) \leq \frac{8}{5}$. Vậy $\max S = \frac{8}{5}$, xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = \left\{\left(3, 1, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right); \left(1, \frac{1}{3}, 3\right)\right\}$

b	$\frac{1}{3}$	1	3
$f'_b\left(3, b, \frac{1}{3}\right)$	+	-	
$f_b\left(3, b, \frac{1}{3}\right)$			

Bài 6. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{b^3 + c^3 + 6} + \frac{b}{c^3 + a^3 + 6} + \frac{c}{a^3 + b^3 + 6}$$

Giải

Ta có $f'(c) = \frac{1}{6+a^3+b^3} - \frac{3ac^2}{(6+b^3+c^3)^2} - \frac{3bc^2}{(6+c^3+a^3)^2}$

$f''(c) = -\frac{6ca(6+b^3-2c^3)}{(6+b^3+c^3)^2} - \frac{6bc(6+a^3-2c^3)}{(6+c^3+a^3)^2} \leq 0 \Rightarrow f'(c)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow f'(c) \geq f'(1) = \frac{1}{6+a^3+b^3} - \frac{3a}{(7+b^3)^2} - \frac{3b}{(7+a^3)^2} \geq \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{3}{49} > 0$

$\Rightarrow f(c)$ tăng trên $[0, 1] \Rightarrow S = f(c) \leq f(1) = \frac{a}{b^3+7} + \frac{b}{a^3+7} + \frac{1}{a^3+b^3+6} = g(a)$

Ta có: $g'(a) = \frac{1}{b^3+7} - \frac{3a^2b}{(a^3+7)^2} - \frac{3a^2}{(a^3+b^3+6)^2}$

$g''(a) = -\frac{6ab(7-2a^3)}{(a^3+7)^3} - \frac{6a(b^3+6-2a^3)}{(a^3+b^3+6)^3} \leq 0 \Rightarrow g'(a)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow g'(a) \geq g'(1) = \frac{1}{b^3+7} - \frac{3b}{64} - \frac{3}{(b^3+7)^2} = \left(\frac{1}{b^3+7} - \frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{b^3+7}\right) + \frac{5-3b}{64} > 0$

$\Rightarrow g(a)$ tăng trên $[0, 1] \Rightarrow S \leq g(a) \leq g(1) = \frac{2}{b^3+7} + \frac{b}{8} = h(b)$

Ta có: $h'(b) = \frac{1}{8} - \frac{6b^2}{(b^3+7)^2} = \frac{(b^3+7)^2 - 48b^2}{8(b^3+7)^2} > 0 \quad \forall b \in [0, 1]$

$\Rightarrow h(b)$ tăng trên $[0, 1] \Rightarrow h(b) \leq h(1) = \frac{3}{8} \Rightarrow S \leq \frac{3}{8}$.

Với $a = b = c = 1$ thì $\text{Max } S = \frac{3}{8}$

Bài 7. [USAMO – 1980] Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Chứng minh

Xét $f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$. Ta có

$f'(a) = \frac{1}{b+c+1} - \frac{b}{(a+c+1)^2} - \frac{c}{(a+b+1)^2} - (1-b)(1-c)$

$f''(a) = \frac{2b}{(a+c+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)^3} \geq 0 \Rightarrow f'(a)$ tăng trên $[0, 1]$. Xét các trường hợp sau:

a. Nếu $f'(a) \geq 0 \quad \forall a \in [0, 1] \Rightarrow f(a) \leq f(1) = \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{c+1+1} + \frac{c}{1+b+1} \leq \frac{1+b+c}{b+c+1} = 1$

b. Nếu $f'(a) \leq 0 \quad \forall a \in [0, 1] \Rightarrow f(a)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow f(a) \leq f(0) = \frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) = \frac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc} \leq \frac{1+b+c+bc}{1+b+c+bc} = 1$

c. Nếu $f'(x)$ thay đổi dấu trên đoạn $[0, 1]$, khi đó kết hợp với $f'(x)$ là hàm liên tục và tăng trên $[0, 1]$ nên phương trình $f'(x) = 0$

có nghiệm duy nhất $x = \alpha \in (0, 1)$

Từ đó suy ra bảng biến thiên như hình vẽ

Theo kết quả a. & b. ta có $f(0) \leq 1, f(1) \leq 1$

Nên suy ra $\max_{x \in [0,1]} f(x) \leq 1$

x	0	α	1
f'	-	0	+
f	$f(0)$	$f(\alpha)$	$f(1)$

Kết luận: Tổng hợp các kết quả từ a., b. và c. ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c)$ là 1 hoán vị $(1, 1, 0)$ hoặc $(1, 0, 0)$

Bài 8. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \quad (1)$$

Giải

Chúng ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của $Q = |(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow Q = (a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$

Đặt $f(a) = (a-b)(a-c)(a+b+c)$. Ta có:

$$f'(a) = (a-c)(a+b+c) + (a-b)(a+b+c) + (a-b)(a-c) \geq 0, \forall a \in [b, 1]$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $[b, 1]$. Suy ra $f(a) \leq f(1) = (1-b)(1-c)(1+b+c)$

$$\Rightarrow Q = (b-c)f(a) \leq (1-b)(b-c)(1-c)(1+b+c) \quad (2)$$

Đặt $g(c) = (b-c)(1-c)(1+b+c)$. Ta có:

$$g'(c) = (c-1)(1+b+c) + (c-b)(1+b+c) + (b-c)(1-c) = 3c^2 - (b^2 + b + 1)$$

Vì $1 \geq b \geq c \geq 0$ nên $1 \geq b \geq b^2 \geq c^2 \Rightarrow g'(c) \leq 0$

$$\Rightarrow g(c) \text{ giảm trên } [0, b] \Rightarrow g(c) \leq g(0) = b(1+b) \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $Q \leq (1-b)g(c) \leq (1-b)b(1+b) = b - b^3 = b(1-b^2) = T$

$$\text{Ta có: } T^2 = b^2(1-b^2)^2 = \frac{1}{2}(2b^2)(1-b^2)(1-b^2) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2b^2 + (1-b^2) + (1-b^2)}{3} \right]^3 = \frac{4}{27}$$

$$\text{Vậy } P \leq Q \leq T \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \max P = \max Q = \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ với } a=1, b=\frac{\sqrt{3}}{3}, c=0$$

Kết luận: Với (a, b, c) là hoán vị của $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ thì $\max P = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$

Giải

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0; 2x + 8y + 21z \leq 12xyz$ và $S = x + 2y + 3z$.

Từ $2x + 8y + 21z \leq 12xyz$

suy ra $z(12xy - 21) \geq 2x + 8y > 0$

$$\Rightarrow z \geq \frac{2x+8y}{12xy-21} \text{ và } x > \frac{7}{4y}$$

x	$7/4y$	x_0	$+\infty$
f'	-	0	+
f		$f(x_0)$	

$$\Rightarrow S \geq x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7} = f(x). \text{ Ta có}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y} \in \left(\frac{7}{4y}, +\infty\right)$$

y	0	$5/4$	$+\infty$
g'	-	0	+
g		$\frac{15}{2}$	

Từ bảng biến thiên suy ra

$$S \geq f(x) \geq f(x_0) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y} = g(y) \Rightarrow g'(y) = \frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{32y^2+14} > 0 \text{ thì phương trình } g'(y) = 0 \Leftrightarrow (8y^2-9)\sqrt{32y^2+14}-28 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 50t - 112 = 0 \Leftrightarrow (t-8)(t^2+8t+14) = 0 \Leftrightarrow t = 8 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } S \geq g(y) \geq g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$$

$$\text{Với } y = \frac{5}{4}, x = 3; z = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}; b = \frac{4}{5}; c = \frac{3}{2} \text{ thì } \min S = \frac{15}{2}$$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2}$

Giải

$$\text{Ta có: } abc + a + c = b \Leftrightarrow b(1-ac) = a+c > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{c} \text{ và } b = \frac{a+c}{1-ac}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{1+a^2} + \frac{2b^2}{1+b^2} - 2 + \frac{3}{1+c^2} = \frac{2}{1+a^2} + \frac{2(a+c)^2}{(1+a^2)(1+c^2)} - 2 + \frac{3}{1+c^2} \quad (2)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(x+c)^2}{(1+x^2)(1+c^2)} - 1 \text{ với } 0 < x < \frac{1}{c}. \text{ Khi đó}$$

$$f'(x) = \frac{-2c(x^2+2cx-1)}{(1+x^2)^2(1+c^2)} = 0 \text{ có một nghiệm duy nhất } x_0 = -c + \sqrt{1+c^2} \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq f(x_0) = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

Khi đó $S = 2f(a) + \frac{3}{1+c^2} \leq \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{3}{1+c^2} = g(c)$

Ta có: $g'(c) = \frac{2(1-8c^2)}{(1+c^2)^2(3c+\sqrt{1+c^2})} = 0$

$\Leftrightarrow c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{8}} \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra: $g(c) \leq g(c_0)$

$\Rightarrow S \leq g(c) \leq g(c_0) = \frac{10}{3}$

Với $c = \frac{1}{\sqrt{8}}, a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $b = \sqrt{2}$ thì $\text{Max } S = \frac{10}{3}$.

x	0	x_0	$1/c$
f'	+	0	-
f		$f(x_0)$	

c	0	c_0	$+\infty$
g'	+	0	-
g		$g(c_0)$	

VI. DẠNG 6. Đối với các bài toán phức tạp, cần phối hợp áp dụng định lý Fermat và nhiều bất đẳng thức phụ, như bất đẳng thức **AM – GM**, **CBS**, hoặc các đánh giá khác.

Bài 1. [IMO25 – Czech 1984] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = xy + yz + zx - 2xyz$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow 0 < z \leq \frac{1}{3}$

Biến đổi rồi đánh giá: $S = xy(1-2z) + z(x+y) = xy(1-2z) + z(1-z)$

$\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z) + z(1-z) = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (1-2z) + z(1-z) = \frac{-1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4} = f(z)$

Ta có: $f'(z) = -\frac{3}{2}(3z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0; z = \frac{1}{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra $S \leq \text{Max } f(z) = \frac{7}{27}$

Với $x = y = z = \frac{1}{3}$ thì $\text{Max } S = \text{Max } f(z) = \frac{7}{27}$

z	0	$1/3$
$f'(z)$		+
$f(z)$	1	$\frac{7}{27}$

Bài 2. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{4+2\ln(1+x)-y} + \frac{1}{4+2\ln(1+y)-z} + \frac{1}{4+2\ln(1+z)-x} \geq \frac{3}{3+\ln 4}$$

Chứng minh

Vì $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$, suy ra $0 \leq x, y, z \leq 3$

$\Rightarrow 4 + 2\ln(x+1) - y > 0; 4 + 2\ln(y+1) - z > 0$ và $4 + \ln(z+1) - x > 0$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\left[(4 + 2\ln(1+x) - y) + (4 + 2\ln(1+y) - z) + (4 + 2\ln(1+z) - x) \right] \cdot S \geq 9$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{9}{(4 + 2\ln(1+x) - y) + (4 + 2\ln(1+y) - z) + (4 + 2\ln(1+z) - x)}$$

$$= \frac{9}{12 + 2\ln(x+1) - x + 2\ln(y+1) - y + 2\ln(z+1) - z}$$

Xét hàm số $f(t) = 2\ln(1+t) - t$ với $0 \leq t \leq 3$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1-t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

t	0	1	3
f'	+	0	-
f	0	$\nearrow \ln 4 - 1$	$\searrow 2\ln 4 - 3$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên của $f(t)$. Từ bảng biến thiên suy ra

$$0 \leq f(t) \leq \ln 4 - 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) + f(y) + f(z) \leq 3\ln 4 - 3$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{9}{12 + 3\ln 4 - 3} = \frac{9}{9 + 3\ln 4} = \frac{3}{3 + \ln 4}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 3. Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2xy + 2yz + 2xz$

Chứng minh

Giả sử $x = \min\{x, y, z\} \Rightarrow x \in (0, 1]$. Đặt $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - (2xy + 2yz + 2xz)$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 z^2} + z^2 + x + \frac{1}{xz} + z - \frac{2}{x} - \frac{2}{z} - 2xz. \text{ Ta có:}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2xz^2}{x^4 z^4} + 1 - \frac{z}{x^2 z^2} - \frac{2}{x^2} - 2z = 2(x-z) + 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3 z^2} - \frac{1}{x^2 z} < 0 \text{ (vì } x \leq z; 1 < \frac{2}{x^2})$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ giảm trên } (0, 1] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = z + z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + \frac{1}{z} - 2 - \frac{2}{z} - 2z$$

$$= z^2 + \frac{1}{z^2} - z - \frac{1}{z} = z(z-1) - (z-1) \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{(z-1)(z^3-1)}{z^2} \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = 3(a + b + c) - 22abc$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = -1$ thì $b = c = 0 \Rightarrow S = -3$
- Nếu $-1 < a < 0$ thì sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$S = 3(a + b + c) + 11(-a)(2bc) \leq 3\left[a + \sqrt{2(b^2 + c^2)}\right] - 11a(b^2 + c^2)$$

$$= 11a^3 - 8a + 3\sqrt{2(1-a^2)} = f(a) \Rightarrow f'(a) = 33a^2 - 8 - \frac{3\sqrt{2}a}{\sqrt{1-a^2}}; f''(a) = 66a - \frac{3\sqrt{2}}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2}}$$

Ta có $f'(a)=0$ có một nghiệm duy nhất $a=-\sqrt{\frac{2}{11}} \in (-1, 0)$. Mặt khác, $f''\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}\right) < 0$

$\Rightarrow f(a)$ đạt giá trị lớn nhất tại $a=-\sqrt{\frac{2}{11}} \Rightarrow \text{Max } S = \text{Max}_{-1 < a < 0} f(a) = f\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}\right) = 15\sqrt{\frac{2}{11}}$

• Nếu $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow S \leq 3(a+b+c)$. Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$3(a+b+c) \leq 3\sqrt{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S \leq 3\sqrt{3} < 15\sqrt{\frac{2}{11}}$$

Kết luận: Tổng hợp các khả năng đã xét ta có: $\text{Max } S = 15\sqrt{\frac{2}{11}}$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là một hoán vị của $\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right)$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của $T = \frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} - \frac{5}{4}\sqrt{x+y+z} \quad \forall x, y, z \geq 0$

Giải

Bước 1: Dự đoán Max T :

Đặt $x=0, y=3, z=1 \Rightarrow T=0$; Đặt $x=y=z=2 \Rightarrow T=3-\frac{5\sqrt{6}}{4} < 0$

Dự đoán $\text{Max } T=0 \Leftrightarrow$ Chứng minh: $\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} - \frac{5}{4}\sqrt{x+y+z} \leq 0$

Bước 2: Chứng minh: $\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{x+y+z} \quad \forall x, y, z \geq 0$ (1)

Đặt $\begin{cases} x+y=c^2, c>0 \\ y+z=a^2, a>0 \\ z+x=b^2, b>0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}; y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}; z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{c} + \frac{c^2+a^2-b^2}{a} + \frac{a^2+b^2-c^2}{b} \leq \frac{5}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Giả sử $a = \text{Max}\{a, b, c\}$. Ta sẽ chứng minh: $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}}$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq a+\sqrt{b^2+c^2} \Leftrightarrow$

$2(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+2a\sqrt{b^2+c^2}$

$\Leftrightarrow a^2+(b^2+c^2) \geq 2a\sqrt{b^2+c^2} \Leftrightarrow (a-\sqrt{b^2+c^2})^2 \geq 0$. Điều này luôn đúng $\Rightarrow$ (2) đúng

Vậy (1) sẽ được chứng minh nếu ta có thể chứng minh được bất đẳng thức sau

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{c} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b} \leq \frac{5}{4}(a + \sqrt{b^2 + c^2})$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) + \frac{(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)}{abc} \leq \frac{5}{4}(a + \sqrt{b^2 + c^2}) \quad (3)$$

Nếu $c < b$ thì $c - b < 0$ nên khi thay đổi vai trò c và b cho nhau tức là tạo ra $c - b \geq 0$ ta thấy về trái tăng còn về phải không thay đổi.

Do đó chỉ cần chứng minh (3) với $c \geq b$. Khi đó

$$(3) \Leftrightarrow 4abc(a+b+c) + 4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \leq 5abc(a + \sqrt{b^2 + c^2})$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 4(c-b)a^3 - bca^2 + (4b^3 + 4b^2c + 4bc^2 - 4c^3 - 5bc\sqrt{b^2 + c^2})a + 4bc(c^2 - b^2) \leq 0$$

Ta có: $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \geq 0 \Rightarrow a \leq \sqrt{b^2 + c^2}$, vậy (3) $\Leftrightarrow f(a) \leq 0 \quad \forall b \leq c \leq a \leq \sqrt{b^2 + c^2}$

Nếu $b = c$ thì $f(a) = -ab^2[(a-b) + (5\sqrt{2}-7)b] < 0$

Xét $b < c$ Ta có: $f(-\infty) < 0$; $f(+\infty) > 0$; $f(0) = 4bc(c^2 - b^2) > 0$;

$$f(c) = -bc^2(5\sqrt{b^2 + c^2} - 4b - 3c) = -bc^2[\sqrt{(4^2 + 3^2)}(b^2 + c^2) - (4b + 3c)] \leq 0$$

$$f(\sqrt{b^2 + c^2}) = 2bc(4b\sqrt{b^2 + c^2} - 5b^2 - c^2) = -2bc(\sqrt{b^2 + c^2} - 2b)^2 \leq 0$$

Từ đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	c	$\sqrt{b^2 + c^2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Do $f(a)$ là đa thức bậc ba theo biến a nên $f(a)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nhìn bảng biến thiên suy ra

$f(a) = 0$ có ba nghiệm thỏa mãn $a_1 \in (-\infty, 0)$, $a_2 \in (0, c)$, $a_3 \in (\sqrt{b^2 + c^2}, +\infty)$. Suy ra

$f(a) < 0, \forall c \leq a \leq \sqrt{b^2 + c^2}$. Vậy (3) đúng nên (2) đúng, suy ra (1) đúng.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ 2b = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow a:b:c = 2:1:\sqrt{3} \Leftrightarrow x:y:z = 0:3:1$

Bài 6. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n \geq a_1 \ln b_1 + a_2 \ln b_2 + \dots + a_n \ln b_n \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n) - (a_1 \ln b_1 + a_2 \ln b_2 + \dots + a_n \ln b_n) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [a_1 (\ln a_1 - \ln b_1) + a_2 (\ln a_2 - \ln b_2) + \dots + a_n (\ln a_n - \ln b_n)] \geq 0$$

Xét hàm $f(x) = x \ln x - x + 1$ với $x > 0$

Ta có $f'(x) = \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra

$$f(x) \geq f(1) = 0 \Rightarrow x \ln x \geq x - 1, \forall x > 0$$

$$\text{Vì } \frac{a_i}{b_i} > 0 \quad (i = \overline{1, n}) \text{ nên ta có } \frac{a_i}{b_i} \ln \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_i}{b_i} - 1$$

$$\Leftrightarrow a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geq a_i - b_i \Leftrightarrow a_i (\ln a_i - \ln b_i) \geq a_i - b_i \quad (i = \overline{1, n})$$

$$\Rightarrow [a_1 (\ln a_1 - \ln b_1) + a_2 (\ln a_2 - \ln b_2) + \dots + a_n (\ln a_n - \ln b_n)] \geq \\ \geq (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n \geq a_1 \ln b_1 + a_2 \ln b_2 + \dots + a_n \ln b_n \text{ (đpcm)}$$

x	0	1	$+\infty$
f'		- 0 +	
f		0	

Bài 7. Cho $e \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$ sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_k. \text{ Chứng minh rằng: } x_1 x_2 \dots x_n > y_1 y_2 \dots y_k$$

Chứng minh

$$\text{Xét } f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ với } x > e. \text{ Ta có } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq \frac{1 - \ln e}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ giảm trên } [e, +\infty) \Rightarrow \text{Với } e \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$$

$$\text{Ta có } \frac{\ln x_1}{x_1} \geq \frac{\ln x_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{\ln x_n}{x_n} \geq \frac{\ln y_1}{y_1} \geq \frac{\ln y_2}{y_2} \geq \dots \geq \frac{\ln y_k}{y_k}$$

$$\Rightarrow \ln x_1 \geq x_1 \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}; \ln x_2 \geq x_2 \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}; \dots \ln x_n \geq x_n \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}$$

$$\Rightarrow \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \frac{\ln y_1}{y_1} \geq (y_1 + y_2 + \dots + y_k) \frac{\ln y_1}{y_1} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \ln y_1 = y_1 \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}; \ln y_2 \leq y_2 \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}; \ln y_3 \leq y_3 \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}; \dots; \ln y_k \leq y_k \cdot \frac{\ln y_1}{y_1}$$

$$\Rightarrow \ln y_1 + \ln y_2 + \dots + \ln y_k \leq (y_1 + y_2 + \dots + y_k) \frac{\ln y_1}{y_1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \geq \ln y_1 + \ln y_2 + \dots + \ln y_k$$

$$\Leftrightarrow \ln(x_1 x_2 \dots x_n) \geq \ln(y_1 y_2 \dots y_k) \Leftrightarrow x_1 x_2 \dots x_n \geq y_1 y_2 \dots y_k \text{ (đpcm)}$$

Bài 8. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^2}{a_2^2 + \dots + a_n^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2} \geq \frac{a_1}{a_1 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots + a_{n-1}}$$

Chứng minh

Đặt $S = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n$ và $f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a'_i}{S - a'_i}$. Ta cần chứng minh $f(2) \geq f(1)$.

Ta sẽ chứng minh: $f(t)$ tăng với $t \geq 0$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{a'_i \ln a'_i (a'_2 + a'_3 + \dots + a'_n) - a'_i (a'_2 \ln a'_2 + a'_3 \ln a'_3 + \dots + a'_n \ln a'_n)}{(S - a'_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{a'_i a'_2 (\ln a'_1 - \ln a'_2) + a'_i a'_3 (\ln a'_1 - \ln a'_3) + \dots + a'_i a'_n (\ln a'_1 - \ln a'_n)}{(S - a'_i)^2} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{a'_i a'_j (\ln a'_i - \ln a'_j)}{(S - a'_i)^2} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a'_i a'_j (\ln a'_i - \ln a'_j) \left(\frac{1}{(S - a'_i)^2} - \frac{1}{(S - a'_j)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a'_i a'_j (\ln a'_i - \ln a'_j) (a'_i - a'_j) \frac{2S - a'_i - a'_j}{(S - a'_i)^2 (S - a'_j)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $f(t)$ tăng với $t \geq 0 \Rightarrow f(2) \geq f(1)$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n > 0$

Nhận xét. Bằng cách làm trên ta chứng minh được bài toán tổng quát sau:

Bài toán tổng quát. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $p > q > 0$ Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^p}{a_2^p + \dots + a_n^p} + \dots + \frac{a_n^p}{a_1^p + \dots + a_{n-1}^p} \geq \frac{a_1^q}{a_1^q + \dots + a_n^q} + \dots + \frac{a_n^q}{a_1^q + \dots + a_{n-1}^q}$$

Trường hợp đặc biệt khi $n=3, p=2, q=1$ ta có một bài toán rất đẹp và có thể giải bằng nhiều cách của tác giả **Vasile Cirtoaje**:

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Bài 9. Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 6$ (1)

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq 9 + 6\sqrt{2}$

Chứng minh

Đặt $x = a + b + c, y = ab + bc + ca, z = abc$. Từ (1) suy ra $x = \frac{y}{z} + 6 \Leftrightarrow y = (x - 6)z$.

Theo **AM - GM**: $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 6 \geq \frac{9}{a+b+c} + 6 = \frac{9}{x} + 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 + 3\sqrt{2}$.

Theo **Viét** thì a, b, c là ba nghiệm của phương trình $f(u) = u^3 - xu^2 + yu - z = 0$.

Vì $f(u)=0$ có ba nghiệm $a, b, c > 1$ nên $f'(u)=3u^2+2xu+y=0$ có 2 nghiệm

$u_{1,2} = \frac{x \mp \sqrt{x^2 - 3y}}{3} > 1$. Thực hiện phép chia $f(u)$ cho $f'(u)$ ta có

$f(u) = f'(u) \left(\frac{u}{3} - \frac{x}{9} \right) + \left(\frac{2y}{3} - \frac{2x^2}{9} \right) u + \frac{xy}{9} - z$. Do $f'(u_1) = f'(u_2) = 0$ nên suy ra

$f(u_1) = \left(\frac{2y}{3} - \frac{2x^2}{9} \right) u_1 + \frac{xy}{9} - z \geq 0$; $f(u_2) = \left(\frac{2y}{3} - \frac{2x^2}{9} \right) u_2 + \frac{xy}{9} - z \leq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(u_1)f(u_2) \leq 0 &\Leftrightarrow 2(x^2 - 3y)\sqrt{x^2 - 3y} \geq 2x^3 + 27z - 9xy \Leftrightarrow 4(x^2 - 3y)^3 \geq (2x^3 + 27z - 9xy)^2 \\ &\Leftrightarrow 4(x^6 - 27y^3 - 9x^4y + 27x^2y^2) \geq 4x^6 + 729z^2 + 81x^2y^2 + 108x^3z - 36x^4y - 486xyz \\ &\Leftrightarrow x^2y^2 + 18xyz \geq 4y^3 + 4x^3z + 27x^2 \Leftrightarrow x^2(x-6)^2 + 18x(x-6) \geq 4(x-6)3z + \frac{4}{3}x^3 + 27 \quad (2) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $y \leq 9 + 6\sqrt{2} \Leftrightarrow z \leq \frac{9+6\sqrt{2}}{x-6}$. Giả sử ngược lại $z > \frac{9+6\sqrt{2}}{x-6}$ (3)

Do $a, b, c > 1 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) > 0 \Leftrightarrow x+z > y+1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-7} > z$ (4)

Lấy (3) + (4) ta có $\frac{x-1}{x-7} > \frac{9+6\sqrt{2}}{x-6} \Rightarrow x < 7,61$. Từ đó suy ra $y \leq 9 + 6\sqrt{2}; \forall x \in [3 + 3\sqrt{2}; 7,61]$

Xét $f(z) = (x-6)^3z + \frac{x^3}{z}$; $f'(z) = (x-6)^2 - \frac{x^3}{z^2}$; $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{x}{x-6} \right)^{\frac{3}{2}}$

Ta chứng minh: $\frac{9+6\sqrt{2}}{x-6} \geq \left(\frac{x}{x-6} \right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{9+6\sqrt{2}}{x-6} \right)^2 \geq \left(\frac{x}{x-6} \right)^3 \Leftrightarrow (x-6)(9+6\sqrt{2})^2 \geq x^3$.

$\Leftrightarrow h(x) = x^3 - (9+6\sqrt{2})^2x + 6(9+6\sqrt{2})^2 \leq 0$; $h'(x) = 3x^2 - (9+6\sqrt{2})^2$;

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{9+6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} > 3 + 3\sqrt{2}$. Có $h(3+3\sqrt{2}) = 0$, $h(7,61) = -51,52 < 0 \Rightarrow h(x) < 0$

Vậy ta có $f(z) \geq 4A(x-6)^2 + \frac{4x^3}{A}(x-6) + 27$ với $A = 9 + 6\sqrt{2}$.

Ta chứng minh $4A(x-6)^2 + \frac{4x^2}{A}(x-6) + 27 \geq x^2(x-6)^2 + 18x(x-6)$

$H(x) = 4A(x-6) + \frac{4}{A}x^3 + \frac{27}{x-6} - x^2(x-6) - 18x \geq 0$

Có $H'(x) = 4A + \frac{12}{A}x^2 + 12x - 3x^2 - 18 - \frac{27}{(x-6)^2}$; $H''(x) = 12 + \frac{24}{A}x - 6x + \frac{54}{(x-6)^3}$

$= 12 + \frac{54}{(x-6)^3} + \left(\frac{24}{A} - 6 \right)x = 12 + \frac{54}{(x-6)^3} - \frac{6(5+6\sqrt{2})}{9+6\sqrt{2}}x$

Bài 10. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 1 \\ \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{8}{ab-1} + \frac{1}{bc-1} + \frac{1}{ca-1} \geq 2$ (1)

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{1+a}$; $y = \frac{1}{1+b}$; $z = \frac{1}{1+c}$ thì $0 < x, y, z \leq \frac{1}{2}$ và $x + y + z = 1$. Để ý rằng:

$$ab-1 = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} - 1 = \frac{z}{xy}. \text{ Khi đó bất đẳng thức (1) } \Leftrightarrow S = \frac{8xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2, \quad (2)$$

Đặt $xy = u$ và $x + y = v$. Do $0 < x, y, z \leq \frac{1}{2}$ và $x + y + z = 1$ nên $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$ và

$$u^2 = (xy)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{v^2}{4}. \text{ Ta có } S = \frac{8xy}{z} + \frac{z(x^2 + y^2)}{xy} = \frac{8u}{1-v} + (1-v) \cdot \frac{v^2 - 2u}{u}$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{8u}{1-v} + (1-v) \frac{v^2 - 2u}{u}$. Ta có: $f'(u) = \frac{8}{1-v} - \frac{v^2(1-v)}{u^2}$

Giải phương trình $f'(u) = 0$ cho ta $u = \frac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}$.

Nếu $v \geq 2 - \sqrt{2}$ thì $\frac{v(1-v)}{2\sqrt{2}} \leq \frac{v^2}{4}$. Khi đó $f(u) \geq f\left(\frac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}\right) = (4\sqrt{2} + 2)v - 2 \geq 7\sqrt{2} - 6$

Nếu $v \leq 2 - \sqrt{2}$ thì $\frac{v^2}{4} \leq \frac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}$. Khi đó

$$f(u) \geq f\left(\frac{v^2}{4}\right) = \frac{2v^2}{1-v} + 2(1-v) = \frac{4v^2 - 4v + 2}{1-v} \geq 2, \forall \frac{1}{2} \leq v \leq 2 - \sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{4}$ và $z = \frac{1}{2}$, tức là $a = b = 3$ và $c = 1$.

Bài 11. Chứng minh: $(a+b+c)^4 \geq 16(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 11abc(a+b+c)$, $\forall a, b, c \geq 0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$ và $a + b + c = 1$. Khi đó $0 \leq c \leq \frac{1}{3}$.

Đặt $v = a + b, u = ab$ thì $\frac{2}{3} \leq v \leq 1$ và $u \leq \frac{v^2}{4}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow f(u) = 16u^2 + 16(1-v)^2(v^2 - 2u) + 11vu(1-v) \leq 1.$$

Ta có $f'(u) = 32u + (1-v)(32v - 21) > 0$ với $\frac{2}{3} \leq v \leq 1$. Suy ra $f(u)$ đồng biến trên

$$\left[0, \frac{v^2}{4}\right] \text{ và } f(u) \leq f\left(\frac{v^2}{4}\right) = 9v^4 - \frac{75}{4}v^3 + \frac{43}{4}v^2 = \frac{1}{4}(3v-2)^2(v-1)(4v+1) + 1 \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b > 0; c = 0$ và các hoán vị.

VII. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức đúng với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sin x + \tan x > 2x \quad ; \quad 2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1} \quad ; \quad 2^{2\sin x} + 2^{2\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}+1} \quad ; \quad \frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

$$\sin 2x < \frac{2}{3x-x^3} \quad ; \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sin x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-\sin x}} \geq 2 \quad ; \quad \tan^n x + \cot^n x \geq 2 + n^2 \cos^2 2x$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{\sin y}{\sin x} > \frac{y - \frac{y^3}{3!}}{x - \frac{x^3}{3!}}$ cho $0 < x < y < \sqrt{6}$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\cos(x+y) < \frac{y \sin x}{x \sin y} \quad \begin{cases} \forall x, y > 0 \\ x+2y < \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\cos(x+y) < \text{Min}\left(\frac{y \sin x}{x \sin y}, \frac{x \sin y}{y \sin x}\right) \quad \forall x, y \in \left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$

Bài 5. Chứng minh rằng: $x \sin x - y \sin y > 2(\cos y - \cos x) \quad \forall 0 < x < y < \frac{\pi}{2}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in (0, 1)$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\tan^n x + \cot^n x \geq 2 + n^2 \cos^2 2x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\sin^m x \cos^n x \leq \sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Bài 9. Chứng minh rằng: $1-x \leq e^{-x} \leq 1-x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in [0, 1]$

Bài 10. Chứng minh rằng: $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{x^4}{2(1+x)} \quad \forall x \in [0, 1]$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\log_x(x+1) > \log_{x+1}(x+2) \quad \forall x > 1$

Bài 12. Chứng minh rằng: $\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} < \frac{x+y}{2} \quad \begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq y \end{cases}$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} \cdot \ln(a^x + b^x) > \frac{1}{y} \cdot \ln(a^y + b^y) \quad \forall y > x > 0$

Bài 14. Cho $p_1, p_2, \dots, p_n, a_1, a_2, \dots, a_n, k > 0$ and $x > y > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{p_1 a_1^x + p_2 a_2^x + \dots + p_n a_n^x}{p_1 a_1^{x-k} + p_2 a_2^{x-k} + \dots + p_n a_n^{x-k}} > \frac{p_1 a_1^y + p_2 a_2^y + \dots + p_n a_n^y}{p_1 a_1^{y-k} + p_2 a_2^{y-k} + \dots + p_n a_n^{y-k}}$$

Bài 15. Chứng minh rằng: $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} + \frac{x^{4k+5}}{(4k+5)!}$ $\begin{cases} \forall x > 0 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Bài 16. Chứng minh rằng: $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}$ $\begin{cases} \forall x > 0 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Bài 17. Chứng minh: $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{x^{4k+4}}{(4k+4)!}$ $\begin{cases} \forall x > 0 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{4k}}{(4k)!} - \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}$ $\begin{cases} \forall x > 0 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Bài 19. Chứng minh rằng: $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ $\begin{cases} \forall x > 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Bài 20. Chứng minh rằng: $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ $\begin{cases} \forall x > 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Bài 21. Chứng minh rằng: $k \ln k - k < \ln k! < \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + 1$ $\forall 2 \leq k \in \mathbb{N}$

Bài 22. Cho $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx > 0 \quad \forall x \in \text{CMR}$: $a_0 > 0$

Bài 23. Cho $y \geq x + 1 \geq 4.15$. Chứng minh rằng: $x^y - y^x > x + y$

Bài 24. Cho $a, b, c, r, s > 0$ thỏa mãn điều kiện $a > b > c$ và $r > s$.

Chứng minh rằng: $a^r b^s + b^r c^s + c^r a^s > a^s b^r + b^s c^r + c^s a^r$

Bài 25. a. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+8}}$

b. Cho $a+b+c=12$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+8} + \sqrt{b^2+8} + \sqrt{c^2+8} \geq 6\sqrt{6}$

Bài 26. a. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

b. Cho $a, b, c \in [-1, 6]$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c = -9/4$.

Chứng minh: $\sqrt{4a^2+2a+1} + \sqrt{4b^2+2b+1} + \sqrt{4c^2+2c+1} \geq \frac{3\sqrt{7}}{2}$

Bài 27. Chứng minh rằng: $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x \geq \frac{2}{3} \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$

Bài 28. Chứng minh rằng: $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} \geq \sin nx \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right), 2 \leq n \in \mathbb{N}$

Bài 29. Chứng minh rằng: $\frac{1+2x \arctan x}{2+\ln(1+x^2)} \geq \frac{1+e^{x/2}}{3+e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 30. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C)$$

Bài 31. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(1 - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) < \frac{3\pi}{16}$$

Bài 32. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$1 + \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{13}{12} (\cos A + \cos B + \cos C) + \cos A \cos B \cos C$$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{3 + \ln(a^a b^b c^c)}$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$2 \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) + 5 \ln \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{8} \geq 3$$

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{(a+1)^5(b+1)^5(c+1)^5}{a^4 b^4 c^4} \geq \frac{243}{16} \cdot e^{\frac{2-a}{a+1} + \frac{2-b}{b+1} + \frac{2-c}{c+1}}$

Bài 36. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4+a^3}{4+(a^2+1)\ln \frac{a^2+1}{5}} + \frac{4+b^3}{4+(b^2+1)\ln \frac{b^2+1}{5}} + \frac{4+c^3}{4+(c^2+1)\ln \frac{c^2+1}{5}} \geq 9$$

Bài 37. Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 12$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{a,b,c} \frac{8+15\ln \frac{a^2-1}{3} - 32\ln \frac{a}{2}}{a} \leq a+b+c + \frac{48}{abc}$$

Bài 38. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[3]{5(16a^3+9)} + \sqrt[3]{5(16b^3+9)} + \sqrt[3]{5(16c^3+9)} + \frac{16}{3} \ln \frac{(3+\sqrt{16a^2+9})(3+\sqrt{16b^2+9})(3+\sqrt{16c^2+9})}{512abc} \geq 15$$

Bài 39. Chứng minh: $\cot \frac{x}{2} \cot \frac{y}{2} \cot \frac{z}{2} \leq (\sqrt{2}-1)^3 e^{3\sqrt{2}+2(\cos x + \cos y + \cos z)}, \forall x, y, z \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$

Bài 40. Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\ln(\sqrt{2}-1)(a+\sqrt{a^2-1})}} + \frac{1}{\sqrt{2+\ln(\sqrt{2}-1)(b+\sqrt{b^2-1})}} + \frac{1}{\sqrt{2+\ln(\sqrt{2}-1)(c+\sqrt{c^2-1})}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{a^2-1} + \sqrt{b^2-1} + \sqrt{c^2-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} \right)$$

Bài 41. [USAMO – 1977] Cho $a, b, c, d, e \in [p, q]$, $p > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

Bài 42. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$$

Bài 43. Cho $2 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \sin^m x \cos^n x$

Bài 44. Cho $x, y, z \in [0, 1]$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = \frac{3}{2}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $S = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 45. Cho $\cos 2x + \cos 2y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \tan^2 x + \tan^2 y$

Bài 46. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$ và $a > 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{a}{xy}$

Bài 47. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \cot A + \cot B + \cot C - 2\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$

Bài 48. Cho tam giác nhọn ABC với $A, B, C \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A \cot B \cot C$

Bài 49. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \sin A \cos B + \sin B \cos C + \sin C \cos A$$

Bài 50. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = 2\tan A + 3\tan B + \tan C$$

Bài 51. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{y^3}} + \sqrt[3]{y^3 + \frac{1}{z^3}} + \sqrt[3]{z^3 + \frac{1}{x^3}}$

Bài 52. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\prod_{i=1}^n [xa_i + (1-x)b_i] \leq \text{Max} \left(\prod_{i=1}^n a_i, \prod_{i=1}^n b_i \right) \quad \forall x \in [0, 1]$$

§10. ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

§10.1 ĐỊNH LÝ LAGRANGE CHO HÀM MỘT BIẾN VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một giá trị c (với $a < c < b$) sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

II. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad \forall 0 < a < b$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \arctan x$. Ta có: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm với mọi x nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) . Sử dụng định lý **Lagrange** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (a, b)$ thỏa

$$\text{mãn } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a}$$

$$\text{Vì } c \in (a, b) \Rightarrow 0 < a < c < b \Rightarrow a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow \frac{1}{1+a^2} > \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2} > \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a} > \frac{1}{1+b^2}.$$

$$\text{Mặt khác ta có: } a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+(n+1)^2} < \arctan \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{1+n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

Theo kết quả bài 1, thay $a = n, b = n+1$ ta có

$$\frac{1}{1+(n+1)^2} < \arctan(n+1) - \arctan n < \frac{1}{1+n^2}$$

$$\text{Đặt } y = \arctan(n+1) - \arctan n \Rightarrow \tan y = \tan[\arctan(n+1) - \arctan n]$$

$$\Rightarrow \tan y = \frac{\tan[\arctan(n+1)] - \tan(\arctan n)}{1 + \tan[\arctan(n+1)] \tan(\arctan n)} = \frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

$$\Rightarrow y = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} \Rightarrow \frac{1}{1+(n+1)^2} < \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1} < \frac{1}{1+n^2}$$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, $\forall 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \tan x$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a, b) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ nên theo định lý

Lagrange suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (a, b)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\tan b - \tan a}{b - a}. \text{ Vì } c \in (a, b) \Rightarrow 0 < a < c < b < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \cos b < \cos c < \cos a < 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan b - \tan a}{b - a} < \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\text{Mặt khác, } a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \ln x$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{x}$. Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm $\forall x > 0$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[2n, 2n+1]$ và có đạo hàm trên khoảng $(2n, 2n+1)$.

Sử dụng định lý **Lagrange** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (2n, 2n+1)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(2n+1) - f(2n)}{(2n+1) - 2n} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(2n+1) - \ln 2n \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln \frac{2n+1}{2n}$$

$$\text{Vì } c \in (2n, 2n+1) \Rightarrow 0 < 2n < c < 2n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} < \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) < \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2n}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $x^n \sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}$, $\forall x \in (0, 1)$ và $n \in \mathbb{Z}^+$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức} \Leftrightarrow x^{2n} (1-x) < \frac{1}{2ne} \Leftrightarrow x^{2n} (2n-2nx) < \frac{1}{e} \quad \forall x \in (0, 1)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$x^{2n} (2n - 2nx) = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{2n} (2n - 2nx) \leq \left(\frac{2nx + 2n - 2nx}{2n+1} \right)^{2n+1} = \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1}$$

Ta sẽ chứng minh $\left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n+1} > e \Leftrightarrow \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n+1} > \ln e = 1$

Theo bài 4 ta có: $\ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) > \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) > \frac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow (2n+1) \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) > 1 \Rightarrow \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n+1} > 1 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \forall a > b > 0$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \ln x$, ta có $f'(x) = \frac{1}{x}$. Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm $\forall x > 0$ nên $f(x)$

liên tục trên đoạn $[b, a]$ và có đạo hàm trên khoảng (b, a) .

Sử dụng định lý **Lagrange** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (b, a)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln a - \ln b}{a - b} \Leftrightarrow \frac{a - b}{c} = \ln a - \ln b \Leftrightarrow \frac{a - b}{c} = \ln \frac{a}{b}$$

$$\text{Vì } c \in (b, a) \Rightarrow 0 < b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}$$

$$\text{Mặt khác, Vì } a - b > 0 \Rightarrow \frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} < \frac{a-b}{b} \Rightarrow \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Chứng minh

- Với $a = b$, bất đẳng thức luôn đúng $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- Với $a \neq b$: Không mất tính tổng quát giả sử $a > b \Rightarrow a - b > 0$

Xét hàm số $f(x) = \arctan x$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm với mọi x nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[b, a]$ và có đạo hàm trên khoảng (b, a) .

Sử dụng định lý **Lagrange** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (b, a)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan a - \arctan b}{a - b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} (a - b) = \arctan a - \arctan b \Rightarrow |\arctan a - \arctan b| = \frac{1}{1+c^2} \cdot |a - b|$$

$$\text{Ta có } c^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+c^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} \cdot |a - b| \leq |a - b| \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\forall a < b < c$. Ta có:

$$3a < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3c$$

Chứng minh

$$\text{Xét } f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \Rightarrow f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

$$f(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

Ta có $f(x)$ là hàm liên tục và có đạo hàm với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên theo định lý **Lagrange** suy ra tồn

$$\text{tại } x_1 \in (a, b) \text{ và } x_2 \in (b, c) \text{ sao cho } f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; f'(x_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

$$\text{Mặt khác } f'(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình } f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}; x_2 = \frac{a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$

$$\text{Ta lại có } a < x_1 < b < x_2 < c \Rightarrow 3a < 3x_1 < 3x_2 < 3c \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \forall x > 0$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Leftrightarrow (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) > x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x[\ln(x+1) - \ln x], x > 0 \Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

Sử dụng định lý **Lagrange** cho hàm số $g(t) = \ln t$ trên $[x, x+1] \Rightarrow$

$$\text{Tồn tại } \alpha \in (x, x+1) \text{ sao cho } \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến}$$

$$\Rightarrow f(x+1) > f(x) \Leftrightarrow (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) > x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định $\forall x > 0$. Chứng minh rằng:

$$1. \text{ Nếu } f''(x) \geq 0 \quad \forall x > 0 \text{ thì } f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad \forall a > 0$$

$$2. \text{ Nếu } f''(x) \leq 0 \quad \forall x > 0 \text{ thì } f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a) \quad \forall a > 0$$

$$3. \text{ Cho } x > 0. \text{ Chứng minh rằng: } x^\alpha + (1-x)\alpha \geq 1 \quad \forall \alpha \leq 0 \text{ hoặc } \alpha \geq 1$$

$$x^\alpha + (1-x)\alpha \leq 1 \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh 1. đại diện. Xét hai khả năng sau:

- Nếu $x \geq a > 0$ thì $x - a \geq 0$, nên theo định lý **Lagrange** suy ra tồn tại điểm $c \in (a, x)$

Sao cho $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Vì $f''(x) \geq 0 \forall x > 0$ nên $f'(x)$ đồng biến $\forall x > 0$

$$\Rightarrow f'(c) > f'(a) \Rightarrow f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

- Nếu $0 < x \leq a$ thì $x - a \leq 0$, nên theo định lý **Lagrange** suy ra tồn tại điểm $d \in (x, a)$

Sao cho $f'(d) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$. Vì $f''(x) \geq 0 \forall x > 0$ nên $f'(x)$ đồng biến $\forall x > 0$

$$\Rightarrow f'(d) < f'(a) \Rightarrow f(a) - f(x) \leq f'(a)(a - x) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

Kết luận: Nếu $f''(x) \geq 0 \forall x > 0$ thì $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad \forall a > 0$

3. Chọn $f(x) = x^\alpha$ với $x > 0$ và $a = 1$ ta có

$$\begin{cases} f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 0 \text{ hoặc } \alpha \geq 1 \\ f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 11. Cho $0 < b < a < 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} + \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \geq \frac{25\sqrt{15}}{18}(a-b) \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ với } x \in (0, 1), \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \geq \frac{25\sqrt{15}}{18}$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x^2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Từ định lý **Lagrange** có tồn tại $c \in (b, a)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$

$$\text{Ta có } f'(c) = \frac{1}{c^2(1-c^2)\sqrt{1-c^2}}. \text{ Đặt } M = c^2(1-c^2)\sqrt{1-c^2} \Rightarrow M > 0$$

$$\Rightarrow M^2 = c^4(1-c^2)^3 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}c^2\right) \left(\frac{3}{2}c^2\right) (1-c^2)(1-c^2)(1-c^2)$$

$$\leq \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{1}{5} \left(\frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}c^2 + (1-c^2) + (1-c^2) + (1-c^2) \right) \right]^5 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{108}{5^5}$$

$$\Rightarrow 0 < M \leq \frac{6\sqrt{15}}{125} \Rightarrow \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c) = \frac{1}{M} \geq \frac{125}{6\sqrt{15}} = \frac{25\sqrt{15}}{18}$$

Bài 12. Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a \cos^2 a - 2b \cos^2 b - \cos(a+b) \sin(a-b) - (a-b)}{\cos a - \cos b} \leq \pi(\cos a + \cos b) \quad (1)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{2a \cos^2 a - 2b \cos^2 b - \cos(a+b) \sin(a-b) - (a-b)}{\cos a - \cos b} \leq \pi(\cos a + \cos b) \\ \Leftrightarrow & \frac{2a \cos^2 a - 2b \cos^2 b - \cos a \sin a + \cos b \sin b - (a-b)}{\cos a - \cos b} \leq \pi(\cos a + \cos b) \\ \Leftrightarrow & \frac{2a \cos^2 a - 2b \cos^2 b - \cos a \sin a + \cos b \sin b - (a-b) - \pi(\cos^2 a - \cos^2 b)}{\cos a - \cos b} \leq 0 \end{aligned}$$

Đặt $u = \cos a, v = \cos b \Rightarrow a = \arccos u, b = \arccos v$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{2u^2 \arccos u - 2v^2 \arccos v - u\sqrt{1-u^2} + v\sqrt{1-v^2} - (\arccos u - \arccos v) - \pi(u^2 - v^2)}{u-v} \leq 0 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 \arccos x - \arccos x - x\sqrt{1-x^2} - \pi x^2$

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x \arccos x - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - 2\pi x$$

$$f'(x) = 4x \arccos x - 2\pi x \Rightarrow f''(x) = 4 \arccos x - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\pi$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0 \Rightarrow f''(x) \text{ nghịch biến trên } (0, 1).$$

$$\Rightarrow f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x) \text{ nghịch biến trên } (0, 1) \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$$

Sử dụng định lý **Lagrange** suy ra tồn tại $p \in (v, u)$ sao cho $f'(p) = \frac{f(u) - f(v)}{u-v} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2u^2 \arccos u - 2v^2 \arccos v - u\sqrt{1-u^2} + v\sqrt{1-v^2} - (\arccos u - \arccos v) - \pi(u^2 - v^2)}{u-v} \leq 0$$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} + \dots + \frac{1}{1+na} \leq \frac{n}{\sqrt{1+na}}, \forall a > 0, n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$

Chứng minh

Với $n = 1$ thì hiển nhiên (1) đúng. Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n = k$, ta sẽ chứng minh (1)

$$\text{đúng với } n = k+1, \text{ tức là } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} + \dots + \frac{1}{1+ka} + \frac{1}{1+(k+1)a} \leq \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}} \quad (2)$$

Sử dụng giả thiết quy nạp với $n = k$ suy ra (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{k}{\sqrt{1+ka}} + \frac{1}{1+(k+1)a} \leq \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+(k+1)a} \leq \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}} - \frac{k}{\sqrt{1+ka}}$$

Sử dụng định lý **Lagrange** với $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+xa}}$ thì tồn tại $c \in (k, k+1)$ sao cho

$$f'(c) = f(k+1) - f(k) \Rightarrow \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}} - \frac{k}{\sqrt{1+ka}} = \frac{2+ca}{2[1+ca]^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{1+ca} > \frac{1}{1+(k+1)a}$$

Vậy (2) đúng suy ra (1) đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta có (đpcm)

Bài 14. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

Chứng minh

Đặt $a = x_1; b = x_2; c = x_3; d = x_4$. Không mất tính tổng quát, giả sử: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$

Xét đa thức $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$$P(x) = x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4$$

$$P'(x) = 4x^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \quad (1)$$

Trường hợp 1: Xét $x_i < x_{i+1}$. Áp dụng định lý **Lagrange** ta có $\exists y_1 \in (x_1; x_2)$ sao cho:

$$0 = P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2)P'(y_1) \Rightarrow P'(y_1) = 0$$

Tương tự $\exists y_2 \in (x_2; x_3)$ sao cho $P'(y_2) = 0$; $\exists y_3 \in (x_3; x_4)$ sao cho $P'(y_3) = 0$

Trường hợp 2: nếu $x_i = x_{i+1}$ thì $P'(x)$ có nghiệm $y_i = x_i = x_{i+1}$

Vậy với cả hai trường hợp trên ta đều có $P'(x)$ có 3 nghiệm y_1, y_2, y_3 trong đó

$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq x_4$. Từ đó suy ra:

$$P'(x) = 4(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3) = 4x^3 - 4(y_1 + y_2 + y_3)x^2 + 4(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)x - 4y_1y_2y_3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) đồng nhất các hệ số ta được:

$$\begin{cases} y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ y_1y_2y_3 = \frac{1}{4}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \end{cases} \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức **AM - GM** thì $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 \geq 3\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2}$

Từ đó suy ra

$$\sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{4}} \leq \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4}{6}}$$

Hay ta có $\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}} \quad (\text{đpcm})$

III. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad \forall x > 0$

Bài 2. Chứng minh rằng: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \forall x, y$

Bài 3. Chứng minh rằng: $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1 \quad \forall x \geq 2$

Bài 4. Cho $x \geq y \geq z > 0$ và $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng:

$$x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geq 0$$

Bài 5. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{\sqrt{b^2-1}} - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{a(a^2-1)\sqrt{a^2-1} - b(b^2-1)\sqrt{b^2-1}}{4} - \frac{3}{8}(a\sqrt{a^2-1} - b\sqrt{b^2-1}) + \frac{3}{8}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{b+\sqrt{b^2-1}} \geq 2(a-b)$$

Bài 6. Cho $a, b \in [-2, 2]$. Chứng minh rằng: $\frac{b\sqrt{4-a^2} - a\sqrt{4-b^2}}{4ab(b-a)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

Bài 7. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $\ln\frac{a(2+\sqrt{4-b^2})}{b(2+\sqrt{4-a^2})} \geq a-b$

Bài 8. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(4-a^2)^2\sqrt{4-a^2} - (4-b^2)^2\sqrt{4-b^2}}{5} - \frac{4}{3}[(4-a^2)\sqrt{4-a^2} - (4-b^2)\sqrt{4-b^2}] \leq 3\sqrt{3}(a-b)$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\ln\frac{a^2+1}{b^2+1} + 2(\arctan a - \arctan b) \leq (1+\sqrt{2})(a-b); \forall a > b > 0$

Bài 10. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ba-1}{(a^2+1)(b^2+1)} - \frac{a+b}{2a^2b^2} + \frac{\ln\frac{a^2+1}{b^2+1} - 2\ln\left(\frac{a^2+b^2+1}{b^2a^2+1}\right) - 2(\arctan a - \arctan b)}{2(a-b)} \geq 0$$

Bài 11. Cho $0 \leq b \leq a \leq 1$. Chứng minh rằng: $\ln\frac{(1+a)^2(1-b)}{(1+b)^2(1-a)} + a+b \geq 0$

Bài 12. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} - \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \frac{a(a^2-1)\sqrt{a^2-1} - b(b^2-1)\sqrt{b^2-1}}{4} + \frac{a\sqrt{a^2-1} - b\sqrt{b^2-1}}{8} - \frac{1}{8}\ln\frac{b-\sqrt{b^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}} \geq 2(a-b)$$

Bài 13. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^3 + b^3 + 2c^3 + d^4$

§ 10.2 CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN VÀ PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

§ 10.2.1. CỰC TRỊ KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

I. CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN NHẬN BIẾT CỰC TRỊ

a. Khái niệm cực trị địa phương

Cho $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ xác định và liên tục trong

$$D = \{X(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in (a_i, b_i), i = \overline{1, n}\}$$

Định nghĩa: Ta nói rằng hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in D$ nếu tồn tại số $r > 0$ sao cho ta có $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ (1.1)

đúng với mọi $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ thỏa mãn điều kiện khoảng cách: $0 < d(X, \overline{X}) < r$

Ta nói rằng hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in D$ nếu tồn tại số $r > 0$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ đúng với mọi $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ thỏa mãn điều kiện khoảng cách: $0 < d(X, \overline{X}) < r$

Điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in D$ mà tại đó hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số. Nói cách khác, điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương của một hàm số là điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong phạm vi một lân cận nào đó.

b. Điều kiện cần của cực trị

Giả sử hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền $D = \{X(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in (a_i, b_i), i = \overline{1, n}\}$ khi đó ta có định lý:

Định lý: Điều kiện cần để hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt được cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in D$ là tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$\begin{cases} w'_{x_i} = f'_{x_i}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1.2)$$

Chứng minh

Với mỗi i cố định ($i = 1, \dots, n$) ta xét hàm số một biến x_i : $\varphi(x_i) = f(\overline{x_1}, \dots, x_i, \dots, \overline{x_n})$

Nếu hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in D$ thì bất đẳng thức

(1.1) thỏa mãn khi $X \in D$ và $0 < d(X, \bar{X}) < r$. Từ đây suy ra

$$\varphi(x_i) = f(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n) < f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n) = \varphi(\bar{x}_i) \text{ với mọi } 0 < |x_i - \bar{x}_i| < r.$$

Điều này chứng tỏ hàm số $\varphi(x_i)$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\bar{x}_i$. Theo định lý về điều kiện cần để hàm một biến đạt cực trị ta có: $\varphi'(\bar{x}_i) = f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$. Định lý được chứng minh.

Định nghĩa: Điểm $\bar{X}$ thỏa mãn điều kiện (1.2) được gọi là *điểm dừng* của hàm số. Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng. Tuy nhiên đây mới chỉ là điều kiện cần, chứ chưa phải là điều kiện đủ. Điều kiện đủ nêu dưới đây cho phép ta kiểm tra xem tại điểm dừng hàm số có thực sự đạt cực trị hay không. Chú ý rằng điều kiện đủ chỉ áp dụng sau khi điều kiện cần đã được thỏa mãn (chỉ áp dụng cho các điểm dừng).

II. ĐIỀU KIỆN ĐỦ

a. Trường hợp hàm số hai biến số

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(x, y)$ và tại điểm đó tất cả các đạo

hàm riêng cấp 2 của nó đều tồn tại và liên tục. Đặt
$$\begin{cases} a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0); a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0) \\ a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0); a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Với giả thiết về sự tồn tại và liên tục của các đạo hàm riêng cấp hai nên ta có $a_{12} = a_{21}$

$$\text{Xét định thức: } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

Định lý:

1. Nếu $D > 0$ thì điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực trị* của hàm số $w = f(x, y)$:

- $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực đại* nếu $a_{11} < 0$
- $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực tiểu* nếu $a_{11} > 0$

2. Nếu $D < 0$ thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số $w = f(x, y)$.

3. Trường hợp $D = 0$ ta không có kết luận gì về cực trị tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$: hàm số có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại điểm đó. Muốn có được kết luận ta phải sử dụng phương pháp khác. Để tìm các điểm cực trị của hàm số trước hết ta phải xét điều kiện cần để tìm các điểm dừng, sau đó dùng điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng và kết luận.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = x^3 + 3xy + y^2 - y$

Điều kiện cần: Ta có $w'_x = 3x^2 + 3y$, $w'_y = 3x + 2y - 1$, $w''_{xx} = 6x$, $w''_{xy} = w''_{yx} = 3$, $w''_{yy} = 2$

Giải hệ phương trình tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 1; y = -1 \\ x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Tại điểm $(x = 0 \text{ và } y = 0)$ ta có $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 2; D = -3^2 = -9 < 0$

Vậy điểm $(x = 0, y = 0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại điểm $(x = 1, y = -1)$ ta có: $a_{11} = 6 > 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 2; D = 6 \cdot 2 - 3^2 = 3 > 0;$

Vậy điểm $(x = 1, y = -1)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho với $w_{\min} = w(1, -1) = 0.$

Tại điểm $\left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}\right)$ ta có: $a_{11} = 3 > 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 2; D = 3 \cdot 2 - 3^2 = -3 < 0;$

Vậy điểm $\left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}\right)$ là điểm cực đại của hàm số đã cho với

$$w_{\max} = w\left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}.$$

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = 8x^3 + 2xy - 3x^3 + y^2$

Điều kiện cần:

Ta có $w'_x = 24x^2 + 2y - 6x, w'_y = 2x + 2y, w''_{xx} = 48x - 6, w''_{xy} = w''_{yx} = 2, w''_{yy} = 2$

Giải hệ phương trình tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + y - 3x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Tại điểm $(x = 0 \text{ và } y = 0)$ ta có $a_{11} = -6, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22} = 2; D = (-6) \cdot 2 - 2^2 = -16 < 0$

Vậy điểm $(x = 0, y = 0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại điểm $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}\right)$ ta có: $a_{11} = 10 > 0, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22} = 2; D = 20 - 4 > 0;$

Vậy điểm $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho với $w_{\min} = w\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{17}.$

b. Trường hợp hàm số n biến số

Giả sử $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in D$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Như đã biết, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in D$ là một dạng toàn

phương của n biến số $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$: $d^2 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j$

Trong đó a_{ij} là các đạo hàm riêng cấp hai: $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{X})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

Định lý:

1. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(X)$;
2. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là *điểm cực đại* của hàm số $f(X)$.
3. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số $f(X)$.

Ma trận của dạng toàn phương $d^2 f$ là ma trận vuông với các phần tử là các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng $\bar{X}$ (gọi là ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó: } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{X})}{\partial x_i \partial x_j}. \text{ Đặt } H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

Một trong các phương pháp xem xét tính xác định của một dạng toàn phương là dựa vào các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương đó. Chú ý rằng, định thức con H_k tạo thành từ k dòng đầu và k cột đầu của nó. Như vậy H có n định thức con chính từ cấp 1 đến n .

Áp dụng định lý về dấu hiệu dạng toàn phương xác định ta có quy tắc sau đây:

Định lý:

1. Nếu tất cả các định thức con chính của ma trận H đều dương ($H_k > 0$ với mọi $k=1, 2, \dots, n$) thì điểm dừng $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(X)$.
2. Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với mọi $k=1, 2, \dots, n$, tức là ma trận H có tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, thì điểm dừng $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là *điểm cực đại* của hàm số $f(X)$.

Ví dụ: Tìm cực trị hàm số $w = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} (x > 0, y > 0, z > 0)$

Giải: Để tìm các điểm cực trị, trước hết ta tính đạo hàm riêng:

$$w'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, w'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, w'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}; w''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}, w''_{yy} = w''_{yx} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},$$

$$w''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}; w''_{xy} = w''_{yx} = -\frac{y}{2x^2}, w''_{xz} = w''_{zx} = 0, w''_{yz} = w''_{zy} = -\frac{2z}{y^2}$$

Giải hệ $w'_x = w'_y = w'_z = 0$ với $x > 0, y > 0, z > 0$ ta được 1 nghiệm: $(x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1)$. Thay các

đạo hàm riêng cấp 2 ta được:

$$a_{11} = 4, a_{22} = 3, a_{33} = 6, a_{12} = a_{21} = -2, a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = a_{32} = -2;$$

$$\text{Xét } H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ có: } H_1 = 4 > 0; H_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0; H_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Vậy $(x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho và $w_{\min} = w(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$

c. Từ cực trị địa phương đến cực trị toàn cục

Điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là điểm cực trị của hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nếu tại điểm này hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất so với mọi giá trị của hàm số tại những điểm $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cách điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ một khoảng cách nhỏ hơn một số $r > 0$ nào đó gọi là cực trị địa phương. Bài toán tìm điểm cực trị toàn cục (điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số nhiều biến số trên toàn bộ một miền D bất kì cho trước là một bài toán khá phức tạp. Ngay cả khi D là một miền đóng và bị chặn, ngoài việc tìm các điểm cực trị địa phương, ta còn phải tiếp tục xét cực trị trên tập hợp các điểm biên.

Định lý: Giả sử hàm số $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong miền: $D = \{X(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in (a_i, b_i), i = \overline{1, n}\}$

Nếu trong miền D hàm số $f(X)$ chỉ có một điểm dừng duy nhất $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ và điều kiện đủ để hàm số đạt giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được thỏa mãn tại mọi điểm thuộc miền D thì giá trị của hàm số tại điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương $\bar{X}$ đồng thời là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số $f(X)$ trên toàn bộ miền D .

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$w = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 4y - 6z + 10; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Giải: Điều kiện cần: Xét hệ sau đây để tìm điểm cực trị của hàm số

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = 4x - 2z = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 2z - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } H = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}; H_1 = 4 > 0, H_2 = 8 > 0, H_3 = |H| = 8 > 0$$

Suy ra $(x = 3, y = 2, z = 6)$ là điểm cực tiểu của hàm số

Điều kiện đủ: Do hàm số đạt cực tiểu duy nhất thỏa mãn với mọi điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, do đó điểm dừng $(x = 3, y = 2, z = 6)$ là điểm mà tại đó hàm số đã cho nhận giá trị nhỏ nhất trong toàn bộ $\mathbb{R}^3$ với $\text{Min } w = w(x = 3, y = 2, z = 6) = -12$

§ 10.2.2 CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

I. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI HAI BIẾN CHỌN VÀ MỘT ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

Xét bài toán: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = f(x, y)$ (2.1)

Với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = b$ (2.2)

Trong đó: x và y là các biến chọn; w là biến mục tiêu; f là hàm mục tiêu.

a. Liên hệ với cực trị tự do

Nếu từ (2.2) ta biểu diễn được y dưới dạng hàm ẩn $y = \varphi(x)$ thì bài toán cực tiểu có điều kiện nêu trên quy về bài toán cực trị tự do của hàm số một biến số x : $w = f[x, \varphi(x)] = h(x)$

Ví dụ: Chọn (x, y) để hàm số $w = 2xy + 7x + y$ đạt cực đại, với điều kiện $3x + y = 4$.

Giải: Từ $3x + y = 4$ suy ra $y = 4 - 3x$, suy ra $w = -6x^2 + 12x + 4$.

Ta có $w' = -12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Từ đó suy ra hàm số đạt giá trị cực đại khi $x = 1$.

Khi đó điểm cực đại là: $(x, y) = (1, 1)$.

b. Phương pháp nhân tử Lagrange

Trong cách tiếp cận nêu trên ta xem một trong hai biến chọn là biến độc lập và biến kia phụ thuộc vào nó. Hơn nữa, khi biểu thức $g(x, y)$ phức tạp thì việc áp dụng phương pháp thế để loại bớt biến chọn sẽ gặp khó khăn. Nhà toán học Lagrange đề ra một phương pháp cho phép đưa bài toán cực tiểu có điều kiện về bài toán cực trị tự do mà vẫn giữ vai trò bình đẳng của các biến chọn.

Xuất phát từ hàm mục tiêu (2.1) và điều kiện (2.2) ta lập hàm số sau (gọi là hàm Lagrange):

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[b - g(x, y)] \quad (2.3)$$

Hàm số (2.3) có thêm một biến phụ λ , gọi là *nhân tử Lagrange*. Chú ý rằng với tất cả các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (2.2), tức là khi xét cặp biến chọn (x, y) trong miền biến thiên đã bị thu hẹp bởi điều kiện (2.2), hàm mục tiêu w đồng nhất với hàm số L .

Định lý sau đây cho biết mối liên hệ giữa hàm số Lagrange (2.3) và bài toán cực trị có điều kiện mà ta đang xem xét.

Định lý:

Giả sử các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, nếu hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt cực tiểu tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì tồn tại số λ_0 sao cho bộ ba số thực (x_0, y_0, λ_0) là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} L'_\lambda = b - g(x, y) = 0 \\ L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Chứng minh

Với các giả thiết đã nêu, phương trình ràng buộc (2.2) xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ nhận giá trị y_0 tại điểm x_0 : $y(x_0) = y_0$.

Giả sử hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Do (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện (2.2), ta có: $b - g(x_0, y_0) = 0$ (2.5)

Xét hàm số: $h(x) = f[x, y(x)]$

Do hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nên $h(x)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 . Từ điều kiện $h'(x_0) = 0$ suy ra;

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = 0 \quad (2.6)$$

Mặt khác, lấy đạo hàm hai vế của phương trình ràng buộc (2.2) theo x , ta có:

$$g'_x(x, y) + g'_y(x, y) \cdot y'(x) = 0$$

Tại điểm $x = x_0$ hàm ẩn $y = y(x)$ nhận giá trị y_0 , do đó

$$g'_x(x_0, y_0) + g'_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = 0 \quad (2.7)$$

Đặt $\lambda_0 = \frac{f'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}$, ta có $f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0) = 0$ (2.8)

Từ (2.7) suy ra $\lambda_0 g'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g'_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0) = 0$ (2.9)

Trừ các vế tương ứng của (2.6), (2.9) và lưu ý đến (2.8) ta được:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0) + [f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0)] \cdot y'(x_0) &= 0 \\ \Rightarrow f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Các hệ thức (2.5), (2.8) và (2.10) chứng tỏ (x_0, y_0, λ_0) là một nghiệm của hệ phương trình (2.4). Định lý đã được chứng minh.

Định lý vừa chứng minh cho thấy điều kiện cần để hàm số (2.1) với điều kiện (2.2) đạt cực trị quy về điều kiện cần để hàm số Lagrange (2.3) đạt cực trị không có điều kiện. Điều lý thú là phương trình đầu của hệ điều kiện (2.4) chính là điều kiện ràng buộc (2.2) của bài toán cực trị có điều kiện.

Ví dụ: Trờ lại bài toán tìm cực trị $w = 2xy + 7x + y$, với điều kiện $3x + y = 4$.

Giải: Hàm số Lagrange trong trường hợp này là: $L = 2xy + 7x + y + \lambda(4 - 3x - y)$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} L'_\lambda = 4 - 3x - y = 0 \\ L'_x = 2y + 7 - 3\lambda = 0 \\ L'_y = 2x + 1 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 4 \\ \lambda = 2x + 1 = \frac{2y + 7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Vậy hàm số $w = 2xy + 7x + y$, với điều kiện $3x + y = 4$ chỉ có thể đạt cực trị tại điểm $(x=1, y=1)$. Để có được kết luận cuối cùng về cực trị ta phải dùng điều kiện đủ để kiểm tra.

c. Điều kiện đủ

Gọi (x_0, y_0, λ_0) là một điểm dừng của hàm số Lagrange, tức là một nghiệm của hệ phương trình (2.4). Giả sử rằng các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm (x_0, y_0) . Xét ma trận

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \text{ với } g_1 = \frac{\partial g}{\partial x}, g_2 = \frac{\partial g}{\partial y}; L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21}, L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}$$

Được tính khi $x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0$.

Định lý: Nếu định thức $|\overline{H}| > 0$ (< 0) thì hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = b$, đạt giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Ví dụ 1: Ta lại tiếp tục xét bài toán tìm cực trị $w = 2xy + 7x + y$, với điều kiện $3x + y = 4$.

Giải: Như đã nêu ở trên, hàm số **Lagrange** $L = 2xy + 7x + y + \lambda(4 - 3x - y)$

Có một điểm dừng duy nhất: $(x=1, y=1, \lambda=3)$

Tại điểm này ta có: $g_1 = \frac{\partial g}{\partial x} = 3; g_2 = \frac{\partial g}{\partial y} = 1; g = 3x + y;$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21} = 2, L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0; |\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Vậy hàm số đã cho đạt cực đại khi $x=1, y=1$.

Ví dụ 2:

Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 6x + 8y + 7$ với điều kiện $x^2 + 2y^2 = 17$

Giải: Hàm số **Lagrange** trong ví dụ này là $L = 6x + 8y + 7 + \lambda(17 - x^2 - 2y^2)$

$$\text{Hệ phương trình điều kiện cần là hệ: } \begin{cases} L'_\lambda = 17 - x^2 - 2y^2 = 0 \\ L'_x = 6 - 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 8 - 4\lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ \lambda = \frac{3}{x} = \frac{2}{y} \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $y = \frac{2x}{3}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^2 + 2 \frac{4x^2}{9} = 17 \Rightarrow 17x^2 = 9 \cdot 17 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Với $x=3$ ta có tương ứng: $y=2, \lambda=1$.

Với $x = -3$ ta có tương ứng: $y = -2, \lambda = -1$.

Hàm số Lagrange có 2 điểm dừng: $(x=3, y=2, \lambda=1)$ và $(x=-3, y=-2, \lambda=-1)$

Để xét điều kiện đủ đối với các điểm dừng này ta phải tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số Lagrange và các đạo hàm riêng của hàm số $g = x^2 + 2y^2$ ở vế trái của phương trình ràng

buộc: $L_{11} = L'_{xx} = -2\lambda, L_{12} = L'_{xy} = 0, L_{21} = L'_{yx} = 0, L_{22} = L'_{yy} = -4\lambda$;

$g_1 = g'_x = 2x, g_2 = g'_y = 4y$.

Ta có:
$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & -4\lambda \end{vmatrix} = 16\lambda x^2 + 32\lambda y^2 = 16\lambda(x^2 + 2y^2)$$

Để xét điều kiện đủ ta không nhất thiết phải tính trị số của định thức $|\overline{H}|$, mà chỉ cần xác định dấu của nó. Ta có $|\overline{H}| > 0$ tại điểm $(x=3, y=2, \lambda=1)$ và $|\overline{H}| < 0$ tại điểm $(x=-3, y=-2, \lambda=-1)$. Theo định lý về điều kiện đủ ta đi đến kết luận:

Hàm số có hai điểm cực trị: Điểm cực đại: $(x=3, y=2)$; Điểm cực tiểu: $(x=-3, y=-2)$

II. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI n BIẾN CHỌN VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BƯỚC

Xét bài toán:

Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. (2.11)

Với điều kiện $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ (2.12)

Hàm số (2.11) được gọi là *hàm mục tiêu*; $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là các *biến chọn*; phương trình (2.12) được gọi là *phương trình ràng buộc*. Các nội dung đã trình bày về bài toán cực trị có điều kiện trong trường hợp hai biến chọn được phát triển tương tự cho trường hợp n biến chọn như sau:

a. Hàm số Lagrange

Hàm số Lagrange là hàm số $n+1$ biến số:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[b - g(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Biến phụ λ được gọi là *nhân tử Lagrange*.

b. Điều kiện cần

Với giả thiết rằng các hàm số f và g có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ và tại điểm $\overline{X}$ ít nhất một trong các đạo hàm riêng của g khác 0, ta có định lý sau đây:

Định lý:

Nếu hàm số (2.11), với điều kiện (2.12), đạt cực trị tại điểm $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ thì tồn tại một giá trị

$\lambda = \overline{\lambda}$ của nhân tử Lagrange sao cho $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{\lambda})$ là nghiệm của hệ phương trình: .

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.13)$$

Nói cách khác, điều kiện cần để hàm số (2.11), với điều kiện (2.12) đạt cực trị tại điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là tồn tại số $\bar{\lambda}$ sao cho $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ là một điểm dừng của hàm số **Lagrange**. Chú ý rằng phương trình đầu của hệ phương trình (2.13) chính là điều kiện ràng buộc (2.12) của bài toán đang xét.

c. Điều kiện đủ

Điều kiện đủ được áp dụng với những điểm đã thỏa mãn điều kiện cần.

Gọi $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ là một điểm dừng của hàm số **Lagrange**. Giả sử, ngoài các điều kiện đã nói ở trên, các hàm số f và g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

$$\text{Lập ma trận } \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}, \text{ với } g_k = \frac{\partial g}{\partial x_k} (k = 1, 2, \dots, n), L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

được tính tại điểm $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$.

Định lý về điều kiện đủ dưới đây căn cứ vào các *định thức con chính* của ma trận $\bar{H}$:

$$\bar{H}_k = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_k \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1k} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_k & L_{k1} & L_{k2} & \dots & L_{kk} \end{pmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots, n). \text{ Chú ý rằng } \bar{H} \text{ là một ma trận vuông cấp } n+1 \text{ và}$$

$\bar{H}_k$ là định thức con chính cấp $k+1$ có phần tử ở góc dưới bên phải là L_{kk} . Để xét điều kiện đủ ta phải tính các định thức con chính từ cấp 3 đến cấp $n+1$ (định thức con chính cấp $n+1$ chính là định thức của ma trận $\bar{H}$).

Định lý:

1. Nếu $(-1)^k \bar{H}_k > 0$ với mọi $k = 2, 3, \dots, n$ tức là: $\bar{H}_2 > 0, \bar{H}_3 < 0, \dots, (-1)^n \bar{H}_n > 0$

Thì hàm số (2.11), với điều kiện (2.12), đạt giá trị cực đại tại điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

2. Nếu $\overline{H}_k < 0$ với mọi $k = 2, 3, \dots, n$ thì hàm số (2.11) với điều kiện (2.12) đạt giá trị cực tiểu tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = x + y + z$ với điều kiện $xyz = 8$

Giải: Hàm số **Lagrange** trong trường hợp này có dạng: $L = x + y + z + \lambda(8 - xyz)$

$$\text{Điều kiện cần là: } \begin{cases} xyz = 8 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \lambda xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = 2 \\ \overline{y} = 2 \\ \overline{z} = 2 \\ \overline{\lambda} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Để xét điều kiện đủ ta tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $g(x, y, z) = xyz$ và các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số **Lagrange** tại điểm $(\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 2, \overline{\lambda} = \frac{1}{4})$.

Tại điểm này, ta có

$$\begin{cases} g_1 = yz = 4, g_2 = xz = 4, g_3 = xy = 4 \\ L_{11} = L_{22} = L_{33} = 0, L_{12} = L_{21} = -\lambda z = -\frac{1}{2} \\ L_{13} = L_{31} = -\lambda y = -\frac{1}{2}, L_{23} = L_{32} = -\lambda x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} \overline{H}_2 = -16 < 0 \\ \overline{H}_3 = -12 < 0 \\ |\overline{H}| = -12 < 0 \end{cases}$$

Vậy theo định lý về điều kiện đủ, hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm $(x = y = z = 2)$.

III. Ý NGHĨA CỦA NHÂN TỬ LAGRANGE

Trong mô hình bài toán cực trị có điều kiện (2.11) - (2.12) ta phân biệt vai trò của các biến số $x_1, x_2, \dots, x_n, w$ với tham số b . Các biến chọn $x_1, x_2, \dots, x_n$ và biến mục tiêu w được gọi là các **biến nội sinh**, do bản thân mô hình quyết định thông qua phương pháp nhân tử **Lagrange**. Khác với biến nội sinh, tham số b là một hằng số cho trước, không do mô hình quyết định. Trong nhiều mô hình kinh tế tham số b là giá trị của một biến số nào đó và giá trị đó được xác định bên ngoài mô hình. Người ta gọi b đặc trưng cho sự thay đổi của ngoại cảnh, làm nới rộng hoặc thu hẹp ràng buộc; dẫn đến sự thay đổi lời giải tối ưu của bài toán. Nói cách khác phương án chọn tối ưu $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ của bài toán và giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu phụ thuộc vào b :

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_1(b), \overline{x}_2 = \overline{x}_2(b), \dots, \overline{x}_n = \overline{x}_n(b);$$

Theo phương pháp nhân tử **Lagrange**, phương án chọn tối ưu nói trên được xác định cùng với một giá trị của nhân tử **Lagrange** $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(b)$ và giá trị tối ưu của w là hàm số của b

$$\overline{w} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) = \overline{w}(b)$$

Theo quy tắc tính đạo hàm hợp ta có: $\frac{d\bar{w}}{db} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d\bar{x}_1}{db} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d\bar{x}_2}{db} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{d\bar{x}_n}{db}$.

Do $(\bar{\lambda}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là điểm dừng của hàm số **Lagrange** nên từ (2.19), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \bar{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \forall i=1, 2, \dots, n. \text{ Vậy } \frac{d\bar{w}}{db} = \bar{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{d\bar{x}_1}{db} + \bar{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{d\bar{x}_2}{db} + \dots + \bar{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{d\bar{x}_n}{db} \\ \Rightarrow \frac{d\bar{w}}{db} &= \bar{\lambda} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{d\bar{x}_1}{db} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{d\bar{x}_2}{db} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{d\bar{x}_n}{db} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Mặt khác, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ thỏa mãn phương trình ràng buộc (2.12), do đó $g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = b$.

Lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức này theo b ta được:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{d\bar{x}_1}{db} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{d\bar{x}_2}{db} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{d\bar{x}_n}{db} = 1 \quad (2.15)$$

Từ các hệ thức (2.14) và (2.15) suy ra: $\bar{\lambda} = \frac{d\bar{w}}{db}$ (2.16)

Hệ thức (2.16) cho thấy nhân tử **Lagrange** $\bar{\lambda}$ chính là giá trị $\bar{w}$ cận biên của b . Điều này có nghĩa là khi b tăng thêm 1 đơn vị thì giá trị tối ưu $\bar{w}$ của hàm mục tiêu thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $\bar{\lambda}$.

IV. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI n BIẾN CHỌN VÀ m PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BƯỚC

Bài toán tổng quát: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (2.17)

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \end{cases} \quad (2.18)$$

Trong mô hình này hàm số (2.17) là *hàm mục tiêu*; các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ là *các biến chọn*; hệ phương trình (2.18) là *hệ phương trình ràng buộc*. Ta luôn luôn giả thiết rằng số phương trình ràng buộc nhỏ hơn số biến chọn ($m < n$)

Phương pháp nhân tử **Lagrange** để giải bài toán này được thực hiện với các giả thiết sau đây:

- Hàm mục tiêu f và các hàm số g_k ($k=1, 2, \dots, m$) ở vế trái của các phương trình ràng buộc (2.18) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục:

$$\bullet \quad \text{Ma trận Jacobi } \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Có hạng bằng m tại tất cả các điểm được xét.

a. Hàm số Lagrange

Trong trường hợp này, hàm số **Lagrange** là hàm số $n + m$ biến số $x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$:

$$L = f + \lambda_1 (b_1 - g_1) + \lambda_2 (b_2 - g_2) + \dots + \lambda_m (b_m - g_m).$$

Trong đó các biến phụ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ được gọi là các nhân tử **Lagrange**.

b. Điều kiện cần

Định lý:

Nếu hàm số (2.17), với điều kiện (2.18), đạt cực trị tại điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ thì tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sao cho bộ $m + n$ số $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = b_k - g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & (k = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0, & (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (2.19)$$

Nói cách khác, điều kiện cần để hàm số (2.17), với điều kiện (2.18), đạt cực trị tại điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là: tồn tại các số $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m$ sao cho bộ $m + n$ số $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)$ là một điểm dừng của hàm số **Lagrange**. Chú ý rằng m phương trình đầu của hệ (2.19) trùng với các điều kiện ràng buộc (2.18).

Điểm $\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ thỏa mãn điều kiện cần chưa chắc đã phải là điểm cực trị. Ta còn phải tiếp tục xét điều kiện đủ.

c. Điều kiện đủ

Điều kiện đủ được sử dụng để xét các điểm đã thỏa mãn điều kiện cần. Tại mỗi điểm dừng $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)$ của hàm số **Lagrange** ta lập ma trận

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{21} & \dots & g_{m1} & L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{m2} & L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} & \dots & g_{mn} & L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó}$$

$$g_{ki} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_k \partial x_i}, L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

Ma trận $\overline{H}$ có $m+n$ định thức con chính, nhưng khi xét điều kiện đủ ta chỉ xét $n-m$ định thức con chính từ cấp $2m+1$ đến cấp $m+n$. Để cho tiện ta gọi $\overline{H}_p$ ($p=m+1, \dots, n$) là định thức con chính cấp $m+p$ có phần tử ở góc dưới cùng bên phải là L_{pp} ($\overline{H}_n$ chính là định thức của ma trận $\overline{H}$).

Định lý:

- Nếu tại điểm $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_m})$ tất cả các định thức con chính $\overline{H}_p$ cùng dấu với $(-1)^p$, tức là $(-1)^p \overline{H}_p > 0$ ($\forall p=m+1, \dots, n$) thì hàm số (2.17), với điều kiện (2.18) đạt giá trị cực đại tại điểm $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$;
- Nếu tại điểm $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_m})$ tất cả các định thức con chính $\overline{H}_p$ ($p=m+1, \dots, n$) luôn luôn giữ dấu không đổi như $(-1)^p$ thì hàm số (2.17), với điều kiện (2.18) đạt cực tiểu tại điểm $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = xyz$ với điều kiện $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \end{cases}$

Giải: Hàm số **Lagrange** trong trường hợp này là:

$$L = xyz + \lambda(5 - x - y - z) + \mu(8 - xy - yz - zx)$$

$$\text{Điều kiện cần: } \begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \\ L_x = yz - \lambda - \mu(y+z) = 0 \\ L_y = xz - \lambda - \mu(x+z) = 0 \\ L_z = xy - \lambda - \mu(y+x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=8 \\ yz = \lambda + \mu(y+z) \\ xz = \lambda + \mu(x+z) \\ xy = \lambda + \mu(y+x) \end{cases}$$

Trừ các vế của phương trình thứ ba và phương trình thứ tư, ta được

$$z(y-x) = \mu(y-x) \Rightarrow y=x \text{ hoặc } \mu=z$$

- Với $y=x$, theo hai điều kiện phía trên ta có:

$$2x+z=5 \text{ và } x^2+2xz=8 \Rightarrow x^2+2x(5-2x)=8 \Rightarrow 3x^2-10x+8=0 \Rightarrow x=2, x=\frac{4}{3}$$

Từ đây suy ra hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$$M_1(x=2, y=2, z=1, \lambda=-4, \mu=2); M_2\left(x=\frac{4}{3}, y=\frac{4}{3}, z=\frac{7}{3}, \lambda=-\frac{16}{9}, \mu=\frac{4}{3}\right).$$

- Với $\mu=z$ thì từ ba phương trình cuối ta có: $\lambda = -z^2 = xy = z(x+y) \Rightarrow xy = z(x+y) - z^2$

Kết hợp với phương trình thứ hai, ta được:

$$z(x+y) - z^2 = z(x+y) + 8 \Rightarrow 2z(x+y) - z^2 - 8 = 0$$

Thay $x + y = 5 - z$ từ phương trình thứ hai, ta được: $2z(5 - z) - z^2 - 8 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 10z + 8 = 0$

Từ đây ta tìm được $z = 2, z = \frac{4}{3}$.

Ứng với $z = 2$ ta tìm được hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$$M_5 \left(x = \frac{4}{3}, y = \frac{7}{3}, z = \frac{4}{3}, \lambda = -\frac{16}{9}, \mu = \frac{4}{3} \right), M_6 \left(x = \frac{7}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{4}{3}, \lambda = -\frac{16}{9}, \mu = \frac{4}{3} \right).$$

Tóm lại, hàm số **Lagrange** có 6 điểm dừng. Vì các biến chọn x, y, z có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét điều kiện đủ tại hai điểm M_1 và M_2 .

Ta có: $g_{11} = g_{12} = g_{13} = 1, g_{21} = 2x, g_{22} = 2y, g_{23} = 2z; L_{11} = L_{22} = L_{33} = 0,$

$L_{12} = L_{21} = z - \mu, L_{13} = L_{31} = y - \mu, L_{23} = L_{32} = x - \mu;$

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2x & 0 & z - \mu & y - \mu \\ 1 & 2y & z - \mu & 0 & x - \mu \\ 1 & 2z & y - \mu & x - \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Trong bài toán này ta chỉ cần xét một định thức con chính của ma trận $\overline{H} (n - m = 1)$ là định thức $\overline{H}_3 = |\overline{H}|$ (định thức con chính có phần tử ở góc dưới cùng bên phải là L_{33})

Tại điểm M_1 có: $|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0;$ Tại điểm

M_2 có: $|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 1 & \frac{8}{3} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{8}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{14}{3} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0$

Theo định lý về điều kiện đủ, ta đi đến kết luận:

Điểm cực đại là các điểm:

$$(x = 2, y = 2, z = 1), (x = 2, y = 1, z = 2), (x = 1, y = 2, z = 2);$$

Điểm cực tiểu là các điểm:

$$\left(x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{7}{3}\right), \left(x = \frac{4}{3}, y = \frac{7}{3}, z = \frac{4}{3}\right), \left(x = \frac{7}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{4}{3}\right)$$

d. Ý nghĩa của nhân tử Lagrange

Điểm tối ưu $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ của bài toán cực trị có điều kiện trên đây được xác định cùng với các nhân tử **Lagrange** $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m)$. Nếu $b_1, b_2, \dots, b_m$ ở vế phải của các phương trình ràng buộc (2.24) là các biến ngoại sinh thì điểm tối ưu $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ phụ thuộc vào các biến ngoại sinh đó, do vậy giá trị tối ưu của hàm mục tiêu (2.23) là hàm số của $b_1, b_2, \dots, b_m$:

$$\bar{w} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \bar{w}(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

Tương tự như trường hợp cực trị có điều kiện với một phương trình ràng buộc, có thể chứng minh được rằng $\frac{\partial \bar{w}}{\partial b_k} = \bar{\lambda}_k$ ($\forall k = 1, 2, \dots, m$)

Điều này có ý nghĩa là nhân tử Lagrange $\bar{\lambda}$ chính là giá trị $\bar{w}$ - cận biên của bán kính: khi tăng bán kính thêm 1 đơn vị thì giá trị tối ưu $\bar{w}$ của hàm mục tiêu thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $\bar{\lambda}$

V. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI RÀNG BUỘC LÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Trong các bài toán liên quan đến đời sống nhiều khi chúng ta gặp các tình huống lựa chọn với ràng buộc là các bất phương trình. Sau đây chúng tôi nêu một cách vắn tắt phương pháp giải bài toán loại này trong trường hợp hai biến chọn và một bất phương trình ràng buộc.

Bài toán: Chọn (x, y) để hàm số $w = f(x, y)$ đạt cực đại (cực tiểu) với điều kiện $g(x, y) \geq b$ [hoặc $g(x, y) \leq b$].

Phương pháp chung: Để giải bài toán này, trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $g(x, y) = b$. Bằng phương pháp nhân tử **Lagrange** ta tìm được $x = \bar{x}, y = \bar{y}$ và $\lambda = \bar{\lambda}$. Quyết định cuối cùng được thực hiện theo quy tắc sau đây:

1. Đối với bài toán cực đại hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \geq b$:

- Nếu $\bar{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \bar{x}, y = \bar{y}$.
- Nếu $\bar{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

2. Đối với bài toán cực đại hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \leq b$:

- Nếu $\bar{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \bar{x}, y = \bar{y}$.
- Nếu $\bar{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

3. Đối với bài toán cực tiểu hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \geq b$:

- Nếu $\bar{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \bar{x}, y = \bar{y}$.
- Nếu $\bar{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

4. Đối với bài toán cực tiểu hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \leq b$:

- Nếu $\bar{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \bar{x}, y = \bar{y}$;
- Nếu $\bar{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

Ví dụ 1: Chọn (x, y) để hàm số $w = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20$

đạt giá trị cực tiểu, với điều kiện $x + y \geq 15$

Giải: Trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $x + y = 15$.

Lập trình số **Lagrange**: $L = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20 + \lambda(15 - x - y)$

$$\text{Giải điều kiện cần: } \begin{cases} x + y = 15 \\ L'_x = 6x - y - 4 - \lambda = 0 \\ L'_y = -x + 4y - 7 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ \lambda = 6x - y - 4 = -x + 4y - 7 \end{cases}$$

Ta tìm được $\bar{x} = 6, \bar{y} = 9, \bar{\lambda} = 23$. Điều kiện đủ trong trường hợp này thỏa mãn (bạn đọc tự kiểm tra). Đối chiếu với quy tắc 3 nêu trên, do $\bar{\lambda} > 0$, điều kiện $x + y \geq 15$ thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = 6, y = 9$. Giá trị tối ưu cực tiểu của hàm mục tiêu w là $w = 149$.

Ví dụ 2: Chọn (x, y) để hàm số $w = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50$

đạt giá trị cực đại, với điều kiện $x + y \leq 79$

Giải: Trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $x + y = 79$. Lập hàm số **Lagrange**:

$L = w = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50 + \lambda(79 - x - y)$

$$\text{Giải điều kiện cần: } \begin{cases} x + y = 79 \\ L'_x = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0 \\ L'_y = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 79 \\ \lambda = 64 - 4x + 4y = 4x - 8y + 32 \end{cases}$$

Ta tìm được $\bar{x} = 49, \bar{y} = 30, \bar{\lambda} = -12$. Điều kiện đủ để w đạt cực đại trong trường hợp này thỏa mãn. Theo quy tắc 2 nêu trên, do $\bar{\lambda} < 0$, điều kiện $x + y \leq 79$ không phải là ràng buộc thực. Để chọn (x, y) ta chuyển sang bài toán cực trị không có điều kiện và xác định được rằng w đạt cực đại khi $x = 40, y = 24$.

VI. ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1: Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 3$. Tìm Max, Min của $P = 2x^2 + 3y^2 + xy$

Giải

Đặt $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + xy - \lambda(x + y)$. Điểm cực trị của $f(x, y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - \lambda = 0 \\ 6y + x - \lambda = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{69}{8}, x = \frac{15}{8}, y = \frac{9}{8}$$

Khi đó: $P = \frac{207}{16}$. Xét các trường hợp tại biên:

Với $x = 0, y = 3$ thì $P = 27$; Với $x = 3, y = 0$ thì $P = 18$

Kết luận: Min $P = \frac{207}{16}$ đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{15}{8}, y = \frac{9}{8}$

Max $P = 27$ đạt được khi và chỉ khi $x = 0, y = 3$

Bài 2. [Việt Nam TST 2001] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $2x + 4y + 7z = 2xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y + z$

Giải

Đặt $S = f(x, y, z) = x + y + z + \lambda(2x + 4y + 7z - 2xyz)$.

Điểm cực trị của $f(x, y, z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda(2 - 2yz) = 0 \\ 1 + \lambda(4 - 2zx) = 0 \\ 1 + \lambda(7 - 2xy) = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 2xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2yz = 2 + \frac{1}{\lambda}; 2zx = 4 + \frac{1}{\lambda}; 2xy = 7 + \frac{1}{\lambda} \\ \frac{2}{2yz} + \frac{4}{2zx} + \frac{7}{2xy} = \frac{2\lambda}{2\lambda + 1} + \frac{4\lambda}{4\lambda + 1} + \frac{7\lambda}{7\lambda + 1} = 1 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình cuối ta nhận được $112\lambda^3 + 50\lambda^2 - 1 = 0$.

Phương trình này có các nghiệm $\lambda = \frac{1}{8}, \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{14}$.

Với $\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{14}$ thì $2yz = 2 + \frac{1}{\lambda} < 0$ nên không thỏa mãn.

Với $\lambda = \frac{1}{8}$ thì $2yz = 10; 2zx = 12; 2xy = 15$.

Từ đó ta có điểm dừng $(x, y, z) = \left(3, \frac{5}{2}, 2\right)$ và suy ra $\text{Min} S = \frac{15}{2}$.

Bài 3. Cho tham số $x, y > 1$. Tìm Min của: $P = \frac{(a^2 + 1)^x (b^2 + 1)^y}{(a + b)^2}$ theo $a, b > 0$

Giải

Đặt $f(a, b) = \frac{(a^2 + 1)^x (b^2 + 1)^y}{(a + b)^2}$. Điểm cực trị của $f(a, b)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (y-1)b^2 + yab - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (x-1)a^2 + (x-y)ab - (y-1)b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2(x-1) + \frac{x(x-1)}{y-1}a^2 - 1 = 0 \\ b = \frac{x-1}{y-1}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{y-1}{(x-1)(x+y-1)}} \\ b = \sqrt{\frac{x-1}{(y-1)(x+y-1)}} \end{cases}$$

Từ đó suy ra Min $P = \frac{x^x}{(x-1)^{x-1}} \cdot \frac{y^y}{(y-1)^{y-1}} \cdot \frac{(x+y-2)^{x+y-2}}{(x+y-1)^{x+y-1}}$ tại

$$a = \sqrt{\frac{y-1}{(x-1)(x+y-1)}}, b = \sqrt{\frac{x-1}{(y-1)(x+y-1)}}$$

Bài 4. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = \frac{1}{9}$. Tìm Min và Max của: $P = x^2 + 2y^2 + 3z^3$

Giải

Đặt $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 - \lambda(x + y + z)$. Điểm cực trị của $f(x, y, z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ x + y + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 4y - \lambda = 0 \\ 9z^2 - \lambda = 0 \\ x + y + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2}, y = \frac{\lambda}{4}, z = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\sqrt{\lambda}}{3} = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{81}, x = \frac{2}{81}, y = \frac{1}{81}, z = \frac{2}{27}$$

Khi đó: $P = \frac{14}{6561}$. Xét các trường hợp tại biên:

Trường hợp 1: $z = 0$. Khi đó: $x + y = \frac{1}{9}$ và $f(x, y, 0) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x + y) = g(x, y)$.

Điểm cực trị của $g(x, y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ x + y = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 4y - \lambda = 0 \\ x + y = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{27}, x = \frac{2}{27}, y = \frac{1}{27}. \text{ Khi đó: } P = \frac{2}{243}$$

Trường hợp 2: $y = 0$. Khi đó: $x + z = \frac{1}{9}$ và $f(x, 0, z) = x^2 + 3z^3 - \lambda(x + z) = h(x, z)$.

Điểm cực trị của $h(x, z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \\ x + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 9z^2 - \lambda = 0 \\ x + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{9}, x = \frac{2 - \sqrt{3}}{9}, z = \frac{\sqrt{3} - 1}{9}. \text{ Khi đó: } P = \frac{11 - 6\sqrt{3}}{243}$$

Trường hợp 3: $x = 0$. Khi đó: $y + z = \frac{1}{9}$ và $f(0, y, z) = 2y^2 + 3z^3 - \lambda(y + z) = q(y, z)$.

Điểm cực trị của $q(y, z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ y + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - \lambda = 0 \\ 9z^2 - \lambda = 0 \\ y + z = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{12 - 8\sqrt{2}}{9}, y = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{9}, z = \frac{2\sqrt{2} - 2}{9}. \text{ Khi đó: } P = \frac{46 - 32\sqrt{2}}{243}$$

Trường hợp 4: Hai trong ba số x, y, z bằng 0. Khi đó: $P = \left\{ \frac{1}{81}, \frac{2}{81}, \frac{1}{243} \right\}$. So sánh các giá trị ta có:

Kết luận: $\min P = \frac{14}{6561}$ đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{2}{81}, y = \frac{1}{81}, z = \frac{2}{27}$

$\max P = \frac{2}{81}$ đạt được khi và chỉ khi $x = 0, y = \frac{1}{9}, z = 0$

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + ab + bc + ca \geq 6$$

Chứng minh

Đặt $f(a, b, c) = a^4 + b^4 + c^4 + ab + bc + ca - 6 - \lambda(a + b + c - 3)$

Điểm cực trị của $f(a, b, c)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 + b + c - \lambda a = 0 \\ 4b^3 + a + c - \lambda b = 0 \\ 4c^3 + a + b - \lambda c = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1. \text{ Khi đó: } f(a, b, c) = 0.$$

Xét trường hợp tại biên, chẳng hạn $c = 0$, khi đó $a + b = 3$.

Ta có: $a^4 + b^4 + ab \geq a^4 + b^4 \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 6$

Kết luận: $f(a, b, c) = a^4 + b^4 + c^4 + ab + bc + ca - 6 - \lambda(a + b + c - 3) \geq 0$

hay $a^4 + b^4 + c^4 + ab + bc + ca \geq 6$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = ma^2 + nb^2 + pc^2, \quad m, n, p > 0$$

Giải

Đặt $f(a, b, c) = ma^2 + nb^2 + pc^2 - \lambda(ab + bc + ca)$.

Điểm cực trị của $f(a, b, c)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ma - \lambda(b + c) = 0 \\ 2nb - \lambda(c + a) = 0 \\ 9pc - \lambda(a + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{\lambda + 2m}{\lambda + 2p} a \\ b = \frac{\lambda + 2m}{\lambda + 2n} a \\ \lambda^3 + 2(m + n + p)\lambda^2 - 8mnp = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình: $h(x) = x^3 + 2(m + n + p)x^2 - 8mnp = 0$ chỉ có duy nhất một nghiệm dương, giả sử nghiệm dương duy nhất này là λ_0 . Khi đó ta có:

$$a_0 = \sqrt{\frac{(\lambda_0 + 2p)(\lambda_0 + 2n)}{(\lambda_0 + 2m)(3\lambda_0 + 2m + 2n + 2p)}}, \quad b_0 = \sqrt{\frac{(\lambda_0 + 2p)(\lambda_0 + 2m)}{(\lambda_0 + 2n)(3\lambda_0 + 2m + 2n + 2p)}}$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{(\lambda_0 + 2m)(\lambda_0 + 2n)}{(\lambda_0 + 2p)(3\lambda_0 + 2m + 2n + 2p)}}$$

$$\lambda_0 = \frac{2ma}{b+c} = \frac{2nb}{c+a} = \frac{2pc}{a+b} = \frac{ma^2 + nb^2 + pc^2}{ab + bc + ca} = ma^2 + nb^2 + pc^2$$

Xét các trường hợp tại biên:

Trường hợp 1: $a = 0$: Khi đó: $bc = 1$ và $P = nb^2 + pc^2 \geq 2\sqrt{pnbc} \geq 2\sqrt{pn}$

Trường hợp 2: $b = 0$: Khi đó: $ac = 1$ và $P = ma^2 + pc^2 \geq 2\sqrt{mpac} \geq 2\sqrt{mp}$

Trường hợp 3: $c = 0$: Khi đó: $ab = 1$ và $P = ma^2 + nb^2 \geq 2\sqrt{mnab} \geq 2\sqrt{mn}$

Mặt khác, dễ thấy $h(2\sqrt{mn}), h(2\sqrt{mp}), h(2\sqrt{pn}) > 0$ nên $\lambda_0 \leq \min\{2\sqrt{mn}, 2\sqrt{mp}, 2\sqrt{pn}\}$

Kết luận: $\min P = \lambda_0$ đạt được khi và chỉ khi: $a = a_0; b = b_0; c = c_0$

Bài 7. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm Max của: $P = (2a + c)b^2 + (a + c)(2c + a)b$

Giải

Đặt $f(a, b, c) = (2a + c)b^2 + (a + c)(2c + a)b - \lambda(a + b + c)$.

Điểm cực trị của $f(a, b, c)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2ab + 3bc - \lambda = 0 \\ a^2 + 2c^2 + 2bc + 3ac + 4ab - \lambda = 0 \\ b^2 + 3ab + 4bc - \lambda = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{81}{8} \\ a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{81}{8}$$

Xét các trường hợp tại biên:

Trường hợp 1: Hai trong ba số a, b, c bằng 0. Khi đó: $P = 0$

Trường hợp 2: $b = 0$. Khi đó: $P = 0$

Trường hợp 3: $c = 0$. Khi đó $a + b = 3$ và $f(a, b, 0) = 2ab^2 + a^2b = g(a, b)$.

Điểm cực trị của $g(a, b)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial b} = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2ab - \lambda = 0 \\ a^2 + 4ab - \lambda = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3 - \sqrt{3}, b = \sqrt{3} \quad \text{Khi đó: } P = 6\sqrt{3}$$

Trường hợp 4: $a = 0$. Khi đó $b + c = 3$ và $f(0, b, c) = cb^2 + 2c^2b = h(b, c)$.

Điểm cực trị của $h(b, c)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial b} = \frac{\partial h}{\partial c} = 0 \\ b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2 + 2bc - \lambda = 0 \\ b^2 + 4bc - \lambda = 0 \\ b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3 - \sqrt{3}, c = \sqrt{3} \quad \text{Khi đó: } P = 6\sqrt{3}$$

Kết luận: $\text{Max} P = 6\sqrt{3}$ đạt được khi và chỉ khi $(a, b, c) = \{(3 - \sqrt{3}, \sqrt{3}, 0), (0, 3 - \sqrt{3}, \sqrt{3})\}$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$. Tìm Max, Min của biểu thức: $P = a^2b + b^2c + c^2a$

Giải

Đặt $f(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a - \lambda(a + b + c) - \eta(a^2 + b^2 + c^2)$.

Điểm cực trị của $f(a, b, c)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + c^2 - \lambda - 2\eta a = 0 \\ 2bc + a^2 - \lambda - 2\eta b = 0 \\ 2ca + b^2 - \lambda - 2\eta c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được (a, b, c) là hoán vị vòng quanh của

$$\left(2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9} \right), \left(-2\cos\frac{2\pi}{9}, -2\cos\frac{4\pi}{9}, -2\cos\frac{8\pi}{9} \right)$$

Mà ta có: $f\left(2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9} \right) = 6, f\left(-2\cos\frac{2\pi}{9}, -2\cos\frac{4\pi}{9}, -2\cos\frac{8\pi}{9} \right) = -6$

Kết luận: $\text{Max} f(a, b, c) = 6 \Leftrightarrow (a, b, c)$ là hoán vị của $\left(2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9} \right)$

$\text{Min} f(a, b, c) = -6 \Leftrightarrow (a, b, c)$ là hoán vị của $\left(-2\cos\frac{2\pi}{9}, -2\cos\frac{4\pi}{9}, -2\cos\frac{8\pi}{9} \right)$

Bài 9. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \leq 3$

Chứng minh

Nếu $abc = 0$ thì bất đẳng thức đúng. Giả sử rằng $a, b, c > 0$. Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$.

Xét hàm số: $f(x, y, z) = x^k y + y^k z + z^k x - \varphi(x + y + z - 3)$ với $k = \frac{3}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = kx^{k-1}y + z^k - \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ky^{k-1}z + x^k - \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = kz^{k-1}x + y^k - \varphi$$

Đề ý rằng nếu (x, y, z) là một hoán vị của (α, β, γ) với $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ khi đó ta có

$$\text{Max} (x^k y + y^k z + z^k x) = \alpha^k \beta + \beta^k \gamma + \gamma^k \alpha. \text{ Do đó ta sẽ xét } \text{Max} f(x, y, z) \text{ với}$$

$$x \geq y \geq z, x + y + z = 3 \text{ và } k = \frac{3}{2}. \text{ Dễ dàng chứng minh } ky^{k-1}z + x^k \geq kz^{k-1}x + y^k \text{ và đẳng thức}$$

chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$, từ đó suy ra $\text{Max} f(x, y, z) = f(1, 1, 1) = 3$ hay

$$f(x, y, z) \leq 3$$

Bài 10. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a).$$

Điểm cực trị của $f(a, b, c)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 3bc = 2ab + 2ac + b^2 + c^2 \\ 3b^2 + 3ac = 2ba + 2bc + a^2 + c^2 \\ 3c^2 + 3ab = 2ca + 2cb + a^2 + b^2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow a = b = c$. Khi đó: $f(a, b, c) = 0$.

Xét trường hợp $a = 0$: $b^3 + c^3 \geq bc(b + c) \Leftrightarrow (b + c)(b - c)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 0, b = c$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2$$

Chứng minh

Đặt $f(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2)$.

Điểm cực trị của $f(a, b, c, d)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial d} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 + bcd = a(b^2 + c^2 + d^2) \\ 2b^3 + acd = b(a^2 + c^2 + d^2) \\ 2c^3 + abd = c(a^2 + b^2 + d^2) \\ 2d^3 + abc = d(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta có: $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 2d^3 + cda + abc + dab + bcd$

$$= a(b^2 + c^2 + d^2) + b(a^2 + c^2 + d^2) + c(a^2 + b^2 + d^2) + d(a^2 + b^2 + c^2) \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức **Shur** bậc 3 ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2)$$

$$b^3 + c^3 + d^3 + 3bcd \geq b(d^2 + c^2) + c(d^2 + b^2) + d(b^2 + c^2)$$

$$c^3 + d^3 + a^3 + 3cda \geq c(d^2 + a^2) + d(a^2 + c^2) + a(d^2 + c^2)$$

$$d^3 + a^3 + b^3 + 3dab \geq d(a^2 + b^2) + b(d^2 + a^2) + b(a^2 + d^2)$$

Cộng lại ta có VT(*) $\geq$ VP(*). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$ hoặc a, b, c, d là hoán vị của $(0, t, t, t)$, ($t > 0$). Thử lại thấy chỉ có bộ $a = b = c = d$ thỏa mãn. Khi đó: $f(a, b, c, d) = 0$

Xét trường hợp có một biến bằng 0. Giả sử $d = 0$. Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$ hoặc a, b, c, d là hoán vị của $(0, t, t, t)$ ($t > 0$).

Bài 12. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c + d = 2$. Tìm Min của: $P = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2$

Giải

Đặt $f(a, b, c, d) = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 - \lambda(a + b + c + d)$ thì điểm cực trị là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial d} = 0 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - \lambda = 0 \\ 4b - \lambda = 0 \\ 4c - \lambda = 0 \\ 6d - \lambda = 0 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{12}{7}, a = \frac{6}{7}, b = \frac{3}{7}, c = \frac{3}{7}, d = \frac{2}{7} \Rightarrow P = \frac{12}{7}$$

Kết luận: min $P = \frac{12}{7}$ đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{6}{7}, b = \frac{3}{7}, c = \frac{3}{7}, d = \frac{2}{7}$

Bài 13. Cho $n \geq 2$ và $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ là $2n$ số thực thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0. \text{ Chứng minh rằng: } \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \leq n$$

Chứng minh

Đặt $A = \sum_{i=1}^n a_i, B = \sum_{i=1}^n b_i$. Ta có $(1 - Aa_i - Bb_i)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - 2Aa_i - 2Bb_i + 2A^2a_i^2 + B^2b_i^2 \geq 0$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng các vế và sử dụng giả thiết ta được $n \geq A^2 + B^2$

Bình luận: Lời giải hết-sức ấn tượng như trên chỉ là chiếc áo khoác ngoài trong việc trình bày khi tiếp cận bài toán bằng phương pháp nhân tử **Langrange**. Thật vậy, xét bài toán tìm giá trị

lớn nhất của hàm số $f(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2$ với các điều kiện ràng buộc

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0.$$

Lập nhân tử **Langrange**: $L = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 \right) + \eta \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 - 1 \right) + \mu \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Các phương trình tìm điểm dừng có dạng

$$2A + 2\lambda a_i + \mu b_i = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad 2B + 2\eta b_i + \mu a_i = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Từ hệ này, nếu $4\lambda\eta - \mu^2 \neq 0$ thì tất cả các a_i bằng nhau và tất cả các b_i bằng nhau. Do điều này không thể xảy ra nên suy ra $4\lambda\eta - \mu^2 = 0$. Khi đó, để hệ có nghiệm, ta phải có

$$A/B = 2\lambda/\mu = \mu/2\eta \text{ đồng thời ta cũng có } 0 = \sum_{i=1}^n a_i \mu b_i = \sum_{i=1}^n a_i (-2A - 2\lambda a_i) = -2A^2 - 2\lambda$$

Suy ra $2\lambda = -2A^2$ và $\mu = -2AB$. Từ đó ta có điều kiện $1 - Aa_i - Bb_i = 0$.

Như vậy tại điểm dừng ta có các hệ thức $1 - Aa_i - Bb_i = 0$ và đây chính là cơ sở để ta thực hiện các phép bình phương trong lời giải ấn tượng nói trên.

VII. CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, a > 0, b > 0, c > 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x, y, z) = z^2 - 2xy$

Bài 4. Cho x, y thỏa mãn điều kiện $g(x, y) = 7x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 13 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 11 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

Bài 7. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + 15 \geq 3(a + b + c) + 4(ab + bc + ca)$$

Bài 8. [Holder] Cho hai bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ với $p, q \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Chứng minh rằng: $(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Bài 9. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}, \forall k \geq 0$$

Bài 10. [VMO II] Cho $a, b, c, x, y, z > 0$ thỏa mãn $ax + by + cz = xyz$.

Chứng minh rằng $x + y + z > \sqrt{4(a+b+c)} + \sqrt{8(ab+bc+ca)}$

Bài 11. [IMO Shortlist 2007] Cho $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1. \text{ Chứng minh } a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1 < \frac{12}{25}$$

Bài 12. [IMO Shortlist 1995] Cho a, b, c là các số thực dương cho trước và x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x = y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z)$

§11. BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

§11.1 GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

I. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

1. DẠNG NGUYÊN THỦY CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực cùng dấu và lớn hơn (-1) . Khi đó ta có:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

2. DẠNG CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

2.1. $\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $(1+a)^n \geq 1+na$

2.2. $\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$ và $0 \leq r \leq 1$ ta có $(1+a)^r \leq 1+ra$

2.3. $\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$ và $(r \leq 0) \cup (r \geq 1)$ ta có: $(1+a)^r \geq 1+ra$

3. DẠNG TỔNG QUÁT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

3.1. $\forall x > -1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$

Hệ quả: $\forall t > 0, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha)$

3.2. $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$

Hệ quả: $\forall t > 0, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $t^\alpha \geq \alpha t + (1-\alpha)$

Chứng minh

• Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức đúng.

Đặt $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$ với $x > -1$. Ta có $f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$

Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.1. Nếu $0 < \alpha < 1$ thì ta có bảng biến thiên sau:

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \quad \forall x > -1$

$$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad \forall x > -1, 0 < \alpha < 1$$

3.2. Nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$ thì ta có bảng biến thiên

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq 0 \quad \forall x > -1$

$$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad \forall x > -1, \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha < 0 \end{cases}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		0	

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		0	

Chú ý: Cũng có thể chứng minh các bất đẳng thức ở 3.1 và 3.2 bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM – GM suy rộng.

§11.2. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

Các bài toán dưới đây chủ yếu xét các bất đẳng thức với số mũ vô tỉ dương là điểm hạn chế khi sử dụng bất đẳng thức *Buniakowski* và bất đẳng thức *Holder*. Để nắm vững kỹ thuật này chúng ta phải xác định điều kiện xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức *Bernoulli* với các tình huống khác nhau. Dấu bằng xảy ra khi các biến số bằng nhau nên có thể gọi đây là:

"Kỹ thuật chọn điểm rơi đối xứng trong bất đẳng thức Bernoulli"

1. BẤT ĐẲNG THỨC CƠ SỞ

$$t^\alpha \geq \alpha \cdot t + (1 - \alpha) \quad \forall t > 0, \forall \alpha > 1 \Leftrightarrow t^\alpha + (\alpha - 1) \geq \alpha \cdot t \quad \forall t > 0, \forall \alpha > 1$$

$$\Rightarrow t^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \geq \frac{\alpha}{\beta} t \quad \forall t > 0, \forall \alpha > \beta > 0. \text{ Đặt } u = t^{\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow t = u^\beta \text{ khi đó:}$$

$$u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \geq \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta \quad \forall u > 0, \forall \alpha > \beta > 0 \quad (*). \text{ Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \boxed{u = 1}$$

2. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $x, y > 0, \alpha \geq 2$. Chứng minh rằng: $x^\alpha + y^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha$

Chứng minh

$$\text{Sử dụng: } x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+y}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức *Bernoulli* (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{2x}{x+y}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \right] \geq \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2x}{x+y}\right)^2 \\ & + \left[\left(\frac{2y}{x+y}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \right] \geq \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2y}{x+y}\right)^2 \\ \Rightarrow & 2^\alpha \left[\left(\frac{x}{x+y}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{x+y}\right)^\alpha \right] + \alpha - 2 \geq 2\alpha \left[\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+y}\right)^2 \right] \geq \frac{2\alpha}{2} = \alpha \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{x+y}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{x+y}\right)^\alpha \geq 2^{1-\alpha} \Leftrightarrow x^\alpha + y^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha \end{aligned}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của: $S = x + y + z$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* (*) ta có:

$$\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \geq \sqrt{2} x \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \geq \sqrt{2} y \\ z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \geq \sqrt{2} z \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}) + 3\sqrt{2} - 3 \geq \sqrt{2}(x + y + z)$$

$$\Rightarrow x + y + z \leq \frac{(x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}) + 3\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2}} \leq \frac{3\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

Với $x = y = z = 3^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$ thì $\text{Min } S = 3 - \sqrt{2}$

Bài 3. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}} [ab(a+b)]^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

Sử dụng: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)ab \Leftrightarrow \frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức **Bernoulli** (*) ta có:

$$\begin{aligned} & + \left[\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{2} \left[\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^2 \\ & + \left[\sqrt{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{2} \left[\sqrt{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \left[\frac{a^{2\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}}(a+b)^{\sqrt{2}}} + \frac{b^{2\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}(a+b)^{\sqrt{2}}} \right] + 2\sqrt{2} - 2 \geq 2\sqrt{2} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)} \right] \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}} [ab(a+b)]^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b$$

Bài 4. Cho $a, b, c, p > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh: $a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)} (a+b+c)^{n+p}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\frac{x^n + y^n + z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^n$

• **Hệ quả:** $\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^n + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^n + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^n \geq \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** ta có:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(3 \cdot \frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n} \left(3 \cdot \frac{a}{a+b+c} \right)^n \right. \\
& + \left[\left(3 \cdot \frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n} \left(3 \cdot \frac{b}{a+b+c} \right)^n \right. \\
& \left. \left. \left(3 \cdot \frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n} \left(3 \cdot \frac{c}{a+b+c} \right)^n \right] \right] \\
& \Rightarrow 3^{n+p} \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} \right] + \frac{3p}{n} \geq \\
& \geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^n + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^n + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^n \right] \\
& \geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \cdot 3 \cdot \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) \right]^n = 3 \cdot \frac{n+p}{n} = 3 + \frac{3p}{n} \\
& \Rightarrow 3^{n+p} \left[\left(\frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} \right] \geq 3 \\
& \Rightarrow \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)} \\
& \Rightarrow a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)} (a+b+c)^{n+p}
\end{aligned}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b+c} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b} \right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli (*) ta có:

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{2a}{b+c} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{2a}{b+c} \right) \right. \\
& + \left[\left(\frac{2b}{c+a} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{2b}{c+a} \right) \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{2c}{a+b} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{2c}{a+b} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{a}{b+c} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b} \right)^{\sqrt{2}} \right] + 3(\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{a}{b+c} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b} \right)^{\sqrt{2}} \right] + 3(\sqrt{2}-1) \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} \right) = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b} \right)^{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{2^{\sqrt{2}}} = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c$$

Bài 6. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(\frac{a}{b+c+d} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{c+d+a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{d+a+b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{d}{a+b+c} \right)^{\sqrt{3}}$$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$

• **Chứng minh:** $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{b+c+d} \right) + \left(1 + \frac{b}{c+d+a} \right) + \left(1 + \frac{c}{d+a+b} \right) + \left(1 + \frac{d}{a+b+c} \right) \geq 4 + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d) \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c} \right) \geq \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow P = 3(a+b+c+d) \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c} \right) \geq 16$$

Sử dụng Bất đẳng thức **Côsi** ta có:

$$\times \begin{cases} (a+b+c) + (b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) \geq 4 \cdot \sqrt[4]{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)} \\ \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 3(a+b+c+d) \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c} \right)$$

$$= [(b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) + (a+b+c)] \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c} \right)$$

$$\geq 4 \cdot \sqrt[4]{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)} \times$$

$$\times 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}} = 16$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\frac{3a}{b+c+d} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{3a}{b+c+d} \right)^{\sqrt{3}} \right) \\
 & + \left(\left(\frac{3b}{c+d+a} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{3b}{c+d+a} \right)^{\sqrt{3}} \right) \\
 & + \left(\left(\frac{3c}{d+a+b} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{3c}{d+a+b} \right)^{\sqrt{3}} \right) \\
 & + \left(\left(\frac{3d}{a+b+c} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{3d}{a+b+c} \right)^{\sqrt{3}} \right) \\
 \Rightarrow & 3^{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{a}{b+c+d} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{c+d+a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{d+a+b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{d}{a+b+c} \right)^{\sqrt{3}} \right] + 4(\sqrt{3} - 1) \\
 & \geq 3\sqrt{3} \left(\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \right) \geq 4\sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{a}{b+c+d} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{c+d+a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{d+a+b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{d}{a+b+c} \right)^{\sqrt{3}} \geq \frac{4}{3^{\sqrt{3}}}
 \end{aligned}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì $\text{Min } S = \frac{4}{3^{\sqrt{3}}}$

Bài 7. Chứng minh: $\left(\frac{b+c}{2a} \right)^{\alpha} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{\alpha} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{\alpha} \geq \left(\frac{b+c}{2a} \right)^{\beta} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{\beta} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{\beta}, \forall \begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta > 0 \end{cases}$

Chứng minh

Đặt: $F(t) = \left(\frac{b+c}{2a} \right)^t + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^t + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^t, \forall t > 0$. Ta cần chứng minh $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$ hay $\forall t_1, t_2 \in (0, +\infty), t_1 < t_2$,

ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ tức là:

$$\left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_2} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_2} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_2} \geq \left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_1} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_1} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_1}.$$

Theo bất đẳng thức **Bernoulli**:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_1}, \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_1}, \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_1}, \\
 & \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \left[\left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_1} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_1} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_1} \right] \geq \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) 3^{\sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{8abc}}} \geq 3 \frac{t_2}{t_1} - 3
 \end{aligned}$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_2} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_2} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_2} \geq \left(\frac{b+c}{2a} \right)^{t_1} + \left(\frac{c+a}{2b} \right)^{t_1} + \left(\frac{a+b}{2c} \right)^{t_1}, \forall t_2 > t_1 > 0$$

Suy ra $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0, \infty)$. Khi đó $\forall \alpha > \beta$ ta luôn có

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^\alpha + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^\alpha + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^\alpha \geq \left(\frac{b+c}{2a}\right)^\beta + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^\beta + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^\beta.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} m, k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \\ \alpha > \beta > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^\alpha + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^\alpha + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^\beta + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^\beta + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^\beta$$

Chứng minh

Đặt: $F(t) = \left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^t + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^t + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^t$, $\forall t > 0$. Ta cần chứng minh $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$ hay $\forall t_1, t_2 \in (0, +\infty), t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ tức là:

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_2} + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_2} + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_2} \geq \left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}.$$

Theo **Bernoulli** ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 &\geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \\ &\geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1} \\ &\quad \left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right) \left[\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1} \right] \\ &\geq \left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right) 3 \sqrt[t_1]{\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1} \cdot \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1} \cdot \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}} = 3 \left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right) \end{aligned}$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_2} + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_2} + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_2} \geq \left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1} + \left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}$$

$\Rightarrow F(t)$ là hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$. Khi đó $\forall \alpha > \beta \geq 1$ ta có (đpcm)

Bài 9. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác và $\alpha > \beta \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^\alpha + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^\alpha \geq \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^\beta + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^\beta$$

Chứng minh

Bổ đề: Nếu a, b, c là 3 cạnh của 1 tam giác và $t \geq 1$ thì

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^t + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^t + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^t \geq 3$$

Áp dụng: Xét hàm số $F(t) = \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^t + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^t + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^t$; $\forall t \geq 1$

Ta cần chứng minh $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0, +\infty)$ hay $\forall t_1, t_2 \in [0, +\infty), t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_2} + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_2} + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_2} \geq \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1} + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1} + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}$$

Ta có: $\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1}, \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1$

$$\geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1}, \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1} \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}$$

$$\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right) \left[\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1} + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1} + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1} \right] \geq 3 \left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_2} + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_2} + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_2} \geq \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1} + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1} + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}, \forall t_2 > t_1 \geq 1$$

Hay $F(t)$ là hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$. Khi đó $\forall \alpha > \beta \geq 1$ ta luôn có

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^\alpha + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^\alpha \geq \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^\beta + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^\beta$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 10. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \left(\frac{a}{2b+2c-a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{2c+2a-b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{2a+2b-c}\right)^{\sqrt{2}}$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{a}{2b+2c-a} + \frac{b}{2c+2a-b} + \frac{c}{2a+2b-c} \geq 1$ (1)

• **Chứng minh:** (1) $\Leftrightarrow \frac{3a}{2b+2c-a} + \frac{3b}{2c+2a-b} + \frac{3c}{2a+2b-c} \geq 3$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{3a}{2b+2c-a}\right) + \left(1 + \frac{3b}{2c+2a-b}\right) + \left(1 + \frac{3c}{2a+2b-c}\right) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow P = 3(a+b+c) \left(\frac{1}{2b+2c-a} + \frac{1}{2c+2a-b} + \frac{1}{2a+2b-c} \right) \geq 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$$

$$P = [(2b+2c-a) + (2c+2a-b) + (2a+2b-c)] \left(\frac{1}{2b+2c-a} + \frac{1}{2c+2a-b} + \frac{1}{2a+2b-c} \right)$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{(2b+2c-a)(2c+2a-b)(2a+2b-c)} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{(2b+2c-a)(2c+2a-b)(2a+2b-c)}} = 9$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* ta có:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{3a}{2b+2c-a} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{3a}{2b+2c-a} \right) \right. \\ & + \left[\left(\frac{3b}{2c+2a-b} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{3b}{2c+2a-b} \right) \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{3c}{2a+2b-c} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(\frac{3c}{2a+2b-c} \right) \right] \right] \\ \Rightarrow & 3^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{a}{2b+2c-a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{2c+2a-b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{2a+2b-c} \right)^{\sqrt{2}} \right] + 3(\sqrt{2} - 1) \\ & \geq \sqrt{2} \left(\frac{3a}{2b+2c-a} + \frac{3b}{2c+2a-b} + \frac{3c}{2a+2b-c} \right) \geq 3\sqrt{2} \\ \Rightarrow & T = \left(\frac{a}{2b+2c-a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{2c+2a-b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{2a+2b-c} \right)^{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{3^{\sqrt{2}}} = 3^{1-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Với $a = b = c > 0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều thì $\text{Min } T = 3^{1-\sqrt{2}}$

Bài 11. Cho ΔABC . Chứng minh rằng: $\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin A \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin A \right)^{\sqrt{2}} \right. \\ & + \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin B \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin B \right)^{\sqrt{2}} \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin C \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin C \right)^{\sqrt{2}} \right] \right] \\ \Rightarrow & \frac{4}{3} (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 3\sqrt{2} - 3 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} (\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} + 3\sqrt{2} = 3 \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}} (\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C)$$

$$\Rightarrow \sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Bài 12. Cho ΔABC . Chứng minh: $\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* (*) ta có:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + (2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \\ \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + (2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right) \\ \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + (2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}} \left[\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \right] + 3(2\sqrt{2} - 1) \geq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}} \left[\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \right] + 6\sqrt{2} - 3 \geq 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Bài 13. Cho ΔABC . Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài 3 đường cao và r là bán kính đường tròn nội

tiếp. Chứng minh rằng: $\left(\frac{1}{h_a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c} \right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{3r} \right)^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* (*) ta có:

$$\begin{cases} \left(3r \cdot \frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(3r \cdot \frac{1}{h_a}\right) \\ \left(3r \cdot \frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(3r \cdot \frac{1}{h_b}\right) \\ \left(3r \cdot \frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left(3r \cdot \frac{1}{h_c}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3r)^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} \right] + 3\sqrt{2} - 3 \geq \sqrt{2} \cdot 3 \left(\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} \right) = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{3r}\right)^{\sqrt{2}}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài 14. Cho ΔABC . Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến và bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(\frac{1}{m_a}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_b}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{5-\sqrt{2}}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2} = \frac{9}{2}$

• **Hệ quả:** $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{9}{m_a + m_b + m_c} = \frac{9}{9/2} = 2$

• **Áp dụng:** Không mất tính tổng quát giả sử $m_a \geq m_b \geq m_c$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_a} \leq \frac{1}{m_b} \leq \frac{1}{m_c} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}} \\ \left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có:

$$\frac{\left(\frac{1}{m_a}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_b}\right)^5 + \left(\frac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}} \geq \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}} \right] \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** (*) ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_a}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} + (5-\sqrt{2}) - 1 \geq (5-\sqrt{2}) \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_a}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{4-\sqrt{2}} \\
 & + \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_b}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} + (5-\sqrt{2}) - 1 \geq (5-\sqrt{2}) \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_b}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{4-\sqrt{2}} \\
 & + \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_c}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{5-\sqrt{2}} + (5-\sqrt{2}) - 1 \geq (5-\sqrt{2}) \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{m_c}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}} \right)^{4-\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow & 3^{5-\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{m_a} \right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b} \right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c} \right)^{5-\sqrt{2}} \right] \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \right)^{\sqrt{2}-5} + 12 - 3\sqrt{2} \geq 15 - 3\sqrt{2} \\
 \Rightarrow & \left(\frac{1}{m_a} \right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b} \right)^{5-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c} \right)^{5-\sqrt{2}} \geq \frac{3}{3^{5-\sqrt{2}}} \cdot 2^{5-\sqrt{2}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{\left(\frac{1}{m_a} \right)^5 + \left(\frac{1}{m_b} \right)^5 + \left(\frac{1}{m_c} \right)^5}{\left(\frac{1}{m_a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{m_c} \right)^{\sqrt{2}}} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3^{5-\sqrt{2}}} \cdot 2^{5-\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{5-\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{m_a} = \frac{1}{m_b} = \frac{1}{m_c} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m_a = m_b = m_c = \frac{3}{2}$

Bài 15. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \left(\frac{a}{m_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{m_b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{m_c} \right)^{\sqrt{3}}$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3} \quad (1)$

• **Chứng minh:** $(1) \Leftrightarrow \frac{a^2}{a \cdot m_a} + \frac{b^2}{b \cdot m_b} + \frac{c^2}{c \cdot m_c} \geq 2\sqrt{3}$

Ta có: $a \cdot m_a = a \cdot \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2) \cdot a^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2) \cdot 3a^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2) + 3a^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \frac{a}{m_a} = \frac{a^2}{a \cdot m_a} \geq \frac{a^2}{\frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \frac{b}{m_b} = \frac{b^2}{b \cdot m_b} \geq \frac{b^2}{\frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \frac{c}{m_c} = \frac{c^2}{c \cdot m_c} \geq \frac{c^2}{\frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq \frac{2\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = 2\sqrt{3}$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\sqrt{3}a}{2m_a} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}a}{2m_a} \right) \right. \\ & + \left(\left(\frac{\sqrt{3}b}{2m_b} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}b}{2m_b} \right) \right. \\ & \left. \left(\left(\frac{\sqrt{3}c}{2m_c} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geq \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}c}{2m_c} \right) \right) \right. \\ & \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{a}{m_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{m_b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{m_c} \right)^{\sqrt{3}} \right] + 3(\sqrt{3} - 1) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \right) \geq 3\sqrt{3} \\ & \Rightarrow T = \left(\frac{a}{m_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{m_b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{m_c} \right)^{\sqrt{3}} \geq 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{3}} \\ & \text{Với } a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều thì } \min T = 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Bài 16. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nhọn ABC .

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \left(\frac{ab}{m_a m_b} \right)^{\sqrt{5}} + \left(\frac{bc}{m_b m_c} \right)^{\sqrt{5}} + \left(\frac{ca}{m_c m_a} \right)^{\sqrt{5}}$

Giải

• **Bổ đề:** $\frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \geq 4$

• **Chứng minh:** Ta có: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = R^2(2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A)$
 $= R^2(1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C - 1 + \cos^2 A) = R^2[1 - 2\cos(B+C)\cos(B-C) + \cos^2 A]$

$$= R^2 [1 - 2\cos A \cos(B - C) + \cos^2 A] \leq R^2 (1 + 2\cos A + \cos^2 A) = R^2 (1 + \cos A)^2$$

$\Rightarrow m_a \leq R(1 + \cos A)$. Tương tự suy ra: $m_b \leq R(1 + \cos B)$; $m_c \leq R(1 + \cos C)$. Khi đó

$$\begin{cases} m_a m_b \leq R^2 (1 + \cos A)(1 + \cos B) \\ m_b m_c \leq R^2 (1 + \cos B)(1 + \cos C) \\ m_c m_a \leq R^2 (1 + \cos C)(1 + \cos A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ab}{m_a m_b} \geq \frac{ab}{R^2 (1 + \cos A)(1 + \cos B)} = 4 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \\ \frac{bc}{m_b m_c} \geq \frac{bc}{R^2 (1 + \cos B)(1 + \cos C)} = 4 \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \\ \frac{ca}{m_c m_a} \geq \frac{ca}{R^2 (1 + \cos C)(1 + \cos A)} = 4 \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \geq 4 \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) = 4$$

• **Áp dụng:**

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{3ab}{4m_a m_b} \right)^{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \right] \geq \sqrt{5} \left(\frac{3ab}{4m_a m_b} \right)^{\sqrt{5}} \\ & + \left[\left(\frac{3bc}{4m_b m_c} \right)^{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \right] \geq \sqrt{5} \left(\frac{3bc}{4m_b m_c} \right)^{\sqrt{5}} \\ & \left[\left(\frac{3ca}{4m_c m_a} \right)^{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \right] \geq \sqrt{5} \left(\frac{3ca}{4m_c m_a} \right)^{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left(\frac{3}{4} \right)^{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{ab}{m_a m_b} \right)^{\sqrt{5}} + \left(\frac{bc}{m_b m_c} \right)^{\sqrt{5}} + \left(\frac{ca}{m_c m_a} \right)^{\sqrt{5}} \right] + 3(\sqrt{5} - 1) \\ & \geq \frac{3\sqrt{5}}{4} \left(\frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \right) \geq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{m_a m_b} \right)^{\sqrt{5}} + \left(\frac{bc}{m_b m_c} \right)^{\sqrt{5}} + \left(\frac{ca}{m_c m_a} \right)^{\sqrt{5}} \geq 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Với $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều thì $\min T = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{\sqrt{5}}$

Bài 17. Cho ΔABC có độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và độ dài các đường phân giác trong là l_a, l_b, l_c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \left(\frac{m_a}{l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_b}{l_b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_c}{l_c} \right)^{\sqrt{3}}$$

Giải

• **Bổ đề:** $m_a \geq l_a$; $m_b \geq l_b$; $m_c \geq l_c$

• **Chứng minh:** Ta sẽ chứng minh $\begin{cases} m_a \geq \sqrt{p(p-a)} \\ l_a \leq \sqrt{p(p-a)} \end{cases} \Rightarrow m_a \geq l_a$

Ta có: $m_a = \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}} \geq \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}} = \sqrt{p(p-a)}$

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \leq \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \leq \sqrt{p(p-a)} \cdot \frac{b+c}{b+c} = \sqrt{p(p-a)}$$

• **Hệ quả:** $\frac{m_a}{l_a} + \frac{m_b}{l_b} + \frac{m_c}{l_c} \geq 3$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{m_a}{l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{m_a}{l_a} \right) \\ \left(\frac{m_b}{l_b} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{m_b}{l_b} \right) \\ \left(\frac{m_c}{l_c} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{m_c}{l_c} \right) \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow & \left(\frac{m_a}{l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_b}{l_b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_c}{l_c} \right)^{\sqrt{3}} + 3(\sqrt{3} - 1) \geq \sqrt{3} \left(\frac{m_a}{l_a} + \frac{m_b}{l_b} + \frac{m_c}{l_c} \right) \geq 3\sqrt{3} \\ \Rightarrow & \left(\frac{m_a}{l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_b}{l_b} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_c}{l_c} \right)^{\sqrt{3}} \geq 3 \end{aligned}$$

Với ΔABC đều hay $m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c$ thì $\text{Min} T = 3$

Bài 18. Cho ΔABC có độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và độ dài các đường phân giác trong là l_a, l_b, l_c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \left(\frac{m_a}{l_b + l_c} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_b}{l_c + l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_c}{l_a + l_b} \right)^{\sqrt{3}}$$

Giải

• **Bổ đề 1:** $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \quad \forall x, y, z > 0$

• **Bổ đề 2:** $\begin{cases} m_a \geq \sqrt{p(p-a)} \\ l_a \leq \sqrt{p(p-a)} \end{cases}; \begin{cases} m_b \geq \sqrt{p(p-b)} \\ l_b \leq \sqrt{p(p-b)} \end{cases}; \begin{cases} m_c \geq \sqrt{p(p-c)} \\ l_c \leq \sqrt{p(p-c)} \end{cases}$

• **Hệ quả:** $\frac{m_a}{l_b + l_c} + \frac{m_b}{l_c + l_a} + \frac{m_c}{l_a + l_b} \geq \frac{3}{2}$

• **Chứng minh:**

$$\begin{aligned} & \frac{m_a}{l_b + l_c} \geq \frac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)}} = \frac{\sqrt{p-a}}{\sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}} = \frac{x}{y+z} \\ & + \frac{m_b}{l_c + l_a} \geq \frac{\sqrt{p(p-b)}}{\sqrt{p(p-c)} + \sqrt{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{p-b}}{\sqrt{p-c} + \sqrt{p-a}} = \frac{y}{z+x} \\ & \frac{m_c}{l_a + l_b} \geq \frac{\sqrt{p(p-c)}}{\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)}} = \frac{\sqrt{p-c}}{\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b}} = \frac{z}{x+y} \\ \Rightarrow & \frac{m_a}{l_b + l_c} + \frac{m_b}{l_c + l_a} + \frac{m_c}{l_a + l_b} = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức *Bernoulli* ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{2m_a}{l_b + l_c} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{2m_a}{l_b + l_c} \right) \\ \left(\frac{2m_b}{l_c + l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{2m_b}{l_c + l_a} \right) \\ \left(\frac{2m_c}{l_a + l_b} \right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{2m_c}{l_a + l_b} \right) \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow 2^{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{m_a}{l_b + l_c} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_b}{l_c + l_a} \right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_c}{l_a + l_b} \right)^{\sqrt{3}} \right] + 3(\sqrt{3} - 1) \geq 2\sqrt{3} \left(\frac{m_a}{l_b + l_c} + \frac{m_b}{l_c + l_a} + \frac{m_c}{l_a + l_b} \right) \geq 3\sqrt{3} \\
 & \Leftrightarrow T \geq \frac{3}{2^{\sqrt{3}}}. \text{ Với } \Delta ABC \text{ đều hay } m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c \text{ thì } \min T = 3 \times 2^{-\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Bài 19. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c và độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c . Tìm giá trị lớn nhất của:

$$T = \left(\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{m_b^2}{c^2 + a^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Giải

• **Bổ đề:**
$$\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} + \frac{m_b^2}{c^2 + a^2} + \frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{9}{8} \quad (1)$$

• **Chứng minh:**
$$(1) \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{b^2 + c^2} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{c^2 + a^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{a^2}{b^2 + c^2} + 1 + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + 1 + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow Q = [(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)] \left(\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) \geq 9$$

Ta có:
$$Q \geq 3 \sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)} \cdot 3 \sqrt{\frac{1}{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)}} = 9$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \frac{8m_a^2}{3(b^2 + c^2)} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{8m_a^2}{3(b^2 + c^2)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ \frac{8m_b^2}{3(c^2 + a^2)} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{8m_b^2}{3(c^2 + a^2)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ \frac{8m_c^2}{3(a^2 + b^2)} + \sqrt{3} - 1 &\geq \sqrt{3} \left(\frac{8m_c^2}{3(a^2 + b^2)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} + 3(\sqrt{3} - 1) = \frac{8}{3} \left(\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} + \frac{m_b^2}{c^2 + a^2} + \frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \right) + 3(\sqrt{3} - 1) \geq$$

$$\geq \sqrt{3} \left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left[\left(\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{m_b^2}{c^2 + a^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{m_b^2}{c^2 + a^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq 3 \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}. \text{ Với } \Delta ABC \text{ đều thì } \text{Max } T = 3 \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Bài 20. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c và độ dài 3 đường phân giác trong là l_a, l_b, l_c . Tìm giá trị lớn nhất của $T = \left(\frac{l_a}{b+c} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{l_b}{c+a} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{l_c}{a+b} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

Giải

• **Bổ đề 1:** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$

• **Bổ đề 2:** $\frac{l_a}{b+c} + \frac{l_b}{c+a} + \frac{l_c}{a+b} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \forall \Delta ABC$

• **Chứng minh:** $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)} \leq \sqrt{p(p-a)}$ suy ra

$$\begin{aligned} \frac{l_a}{b+c} &\leq \frac{\sqrt{p(p-a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{(b+c+a)(3b+3c-3a)}}{2\sqrt{3}(b+c)} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2b+2c-a}{b+c} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(2 - \frac{a}{b+c} \right) \\ + \frac{l_b}{c+a} &\leq \frac{\sqrt{p(p-b)}}{c+a} = \frac{\sqrt{(c+a+b)(3c+3a-3b)}}{2\sqrt{3}(c+a)} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2c+2a-b}{c+a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(2 - \frac{b}{c+a} \right) \\ \frac{l_c}{a+b} &\leq \frac{\sqrt{p(p-c)}}{a+b} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(3a+3b-3c)}}{2\sqrt{3}(a+b)} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2a+2b-c}{a+b} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(2 - \frac{c}{a+b} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{l_a}{b+c} + \frac{l_b}{c+a} + \frac{l_c}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[6 - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \right] \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(6 - \frac{3}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** ta có:

$$\begin{aligned} \frac{4l_a}{\sqrt{3}(b+c)} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 &\geq \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4l_a}{\sqrt{3}(b+c)} \right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \\ + \frac{4l_b}{\sqrt{3}(c+a)} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 &\geq \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4l_b}{\sqrt{3}(c+a)} \right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \\ \frac{4l_c}{\sqrt{3}(a+b)} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 &\geq \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4l_c}{\sqrt{3}(a+b)} \right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} + 3 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \sum_{a,b,c} \frac{l_a}{b+c} + 3 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \sum_{a,b,c} \left(\frac{l_a}{b+c} \right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{l_a}{b+c} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{l_b}{c+a} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \left(\frac{l_c}{a+b} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

III. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BERNOULLI

Trong các mục trước chúng ta đã xây dựng các bất đẳng thức đối xứng với lũy thừa có số mũ là số vô tỉ dương. Các bất đẳng thức này đều có dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các biến số bằng nhau. Trong mục này ta xét các bất đẳng thức không đối xứng với lũy thừa có số mũ vô tỉ dương mà khi sử dụng bất đẳng thức Bernoulli dấu bằng xảy ra khi các biến số nhận các giá trị khác nhau.

1. BẤT ĐẲNG THỨC CƠ SỞ

$$t^\alpha \geq \alpha \cdot t + (1 - \alpha) \quad \forall t > 0, \forall \alpha > 1. \text{ Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow t = 1$$

Thay $t = \frac{u}{u_0}$ ta có: $\left(\frac{u}{u_0}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha \cdot \frac{u}{u_0}$

$$\Leftrightarrow u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^\alpha \geq \alpha u_0^{\alpha-1} \cdot u \quad \text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow u = u_0 \quad (**)$$

2. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $\begin{cases} y \geq 3 \\ 3x + 2y \geq 12 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}}$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{y}{3} \geq 1; \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq 2$. Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** (**):

$$\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)2^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}-1} x = \sqrt{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 2^{\sqrt{2}} \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)3^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 3^{\sqrt{2}-1} y = \sqrt{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot 3^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)(2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}) &\geq \sqrt{2} \left[2^{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) + (3^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}) \frac{y}{3} \right] \\ &\geq \sqrt{2} (2^{\sqrt{2}} \cdot 2 + 3^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} (3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Với $x = 2, y = 3$ thì $\text{Min} S = 2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}$

Bài 2. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0; x \geq 4 \\ 3x + 4y \geq 24 \\ 3x + 4y + 6z \geq 36 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{x}{4} \geq 1; \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \geq 2; \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \geq 3$.

Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** ta có:

$$\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)4^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 4^{\sqrt{2}-1} x = \sqrt{2} \cdot \frac{x}{4} \cdot 4^{\sqrt{2}} \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)3^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 3^{\sqrt{2}-1} y = \sqrt{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot 3^{\sqrt{2}} \\ z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)2^{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}-1} z = \sqrt{2} \cdot \frac{z}{2} \cdot 2^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)(4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) &\geq \sqrt{2} \left(4^{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{4} + 3^{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{3} + 2^{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left[\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \right) 4^{\sqrt{2}} + \left(\frac{y}{3} + \frac{z}{2} \right) (3^{\sqrt{2}} - 4^{\sqrt{2}}) + \frac{z}{2} (2^{\sqrt{2}} - 3^{\sqrt{2}}) \right] \\ &\geq \sqrt{2} [3 \cdot 4^{\sqrt{2}} + 2(3^{\sqrt{2}} - 4^{\sqrt{2}}) + (2^{\sqrt{2}} - 3^{\sqrt{2}})] = \sqrt{2} (4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) \\ \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} &\geq 4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}. \text{ Với } x=4, y=3, z=2 \text{ thì Min } S = 4^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Bài 3. Cho	$\begin{cases} 4 \geq x \geq y \geq z > 0 \\ 3x + 4y \geq 2xy \\ 2xy + 3xz + 4yz \geq 3xyz \end{cases}$	. Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} + z^{\sqrt{3}}$
-------------------	---	---

Giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{4}{x} \geq 1; \frac{4}{x} + \frac{3}{y} \geq 2; \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} \geq 3.$

Sử dụng bất đẳng thức **Bernoulli** ta có

$$\begin{cases} 4^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-1)x^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} \cdot 4 \cdot x^{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{x} \cdot x^{\sqrt{3}} \\ 3^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-1)y^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} \cdot 3 \cdot y^{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{y} \cdot y^{\sqrt{3}} \\ 2^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-1)z^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} \cdot 2 \cdot z^{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{z} \cdot z^{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 2^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-1)(x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} + z^{\sqrt{3}}) &\geq \sqrt{3} \left(\frac{4}{x} \cdot x^{\sqrt{3}} + \frac{3}{y} \cdot y^{\sqrt{3}} + \frac{2}{z} \cdot z^{\sqrt{3}} \right) \\ &= \sqrt{3} \left[\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} \right) x^{\sqrt{3}} + \left(\frac{3}{y} + \frac{2}{z} \right) (y^{\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}}) + \frac{2}{z} (z^{\sqrt{3}} - y^{\sqrt{3}}) \right] \\ &\geq \sqrt{3} [3 \cdot x^{\sqrt{3}} + 2(y^{\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}}) + (z^{\sqrt{3}} - y^{\sqrt{3}})] = \sqrt{3} (x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} + z^{\sqrt{3}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} + z^{\sqrt{3}} \leq 4^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 2^{\sqrt{3}}. \text{ Với } x=4, y=3, z=2 \text{ thì Max} = 4^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 2^{\sqrt{3}}$$

IV. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $\begin{cases} 2a+3b+4c \geq 3 \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $2a^{\sqrt{2}} + 3b^{\sqrt{2}} + 4c^{\sqrt{2}} \geq 3^{2-\sqrt{2}}$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a+b+c \geq 3 \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $a^{\sqrt{5}} + 2^{1-\sqrt{5}} b^{\sqrt{5}} + 3^{1-\sqrt{5}} c^{\sqrt{5}} \geq 3 \times 2^{1-\sqrt{5}}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a+b+c \geq 3 \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $2^{1-\sqrt{2}} a^{\sqrt{2}} + 3^{1-\sqrt{2}} b^{\sqrt{2}} + 4^{1-\sqrt{2}} c^{\sqrt{2}} \geq 3^{2-\sqrt{2}}$

Bài 4. Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, $\alpha, \beta \geq 1$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. \left(\frac{3a}{2b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{3b}{2c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{3c}{2a+b}\right)^\alpha \geq \left(\frac{3a}{2b+c}\right)^\beta + \left(\frac{3b}{2c+a}\right)^\beta + \left(\frac{3c}{2a+b}\right)^\beta$$

$$2. \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^\alpha + \left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^\alpha + \left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^\alpha \\ \geq \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^\beta + \left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^\beta + \left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^\beta$$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^\alpha + \left(\frac{b^2}{ac}\right)^\alpha + \left(\frac{c^2}{ab}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a^2}{bc}\right)^\beta + \left(\frac{b^2}{ac}\right)^\beta + \left(\frac{c^2}{ab}\right)^\beta$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta \geq \frac{2}{3} \end{cases}$. Chứng minh: $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^\alpha \geq \left(\frac{2a}{b+c}\right)^\beta + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^\beta + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^\beta$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$1. \left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^\alpha + \left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^\alpha + \left(\frac{3c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^\alpha \\ \geq \left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^\beta + \left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^\beta + \left(\frac{3c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^\beta$$

$$2. \left(\frac{2a^2}{bc+ca}\right)^\alpha + \left(\frac{2b^2}{ca+ab}\right)^\alpha + \left(\frac{2c^2}{ab+bc}\right)^\alpha \geq \left(\frac{2a^2}{bc+ca}\right)^\beta + \left(\frac{2b^2}{ca+ab}\right)^\beta + \left(\frac{2c^2}{ab+bc}\right)^\beta$$

$$3. \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^\alpha + \left(\frac{b^2+ac}{b(a+c)}\right)^\alpha + \left(\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^\beta + \left(\frac{b^2+ac}{b(a+c)}\right)^\beta + \left(\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\right)^\beta$$

$$4. \left(\frac{4a^3+4b^3}{(a+b)^3}\right)^\alpha + \left(\frac{4b^3+4c^3}{(b+c)^3}\right)^\alpha + \left(\frac{4c^3+4a^3}{(c+a)^3}\right)^\alpha \geq \left(\frac{4a^3+4b^3}{(a+b)^3}\right)^\beta + \left(\frac{4b^3+4c^3}{(b+c)^3}\right)^\beta + \left(\frac{4c^3+4a^3}{(c+a)^3}\right)^\beta$$

$$5. \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{6(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\right)^\alpha \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{6(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\right)^\beta$$

$$6. \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\right)^\alpha \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\right)^\beta$$

$$7. \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a+bc}}\right)^\alpha \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a+bc}}\right)^\beta \quad 8. \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{3b^4}{c\sqrt{5a^6+4b^3c^3}}\right)^\alpha \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{3b^4}{c\sqrt{5a^6+4b^3c^3}}\right)^\beta$$

$$9. \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{5a^2}{a^2+(b+c)^2}\right)^\alpha \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{5a^2}{a^2+(b+c)^2}\right)^\beta \quad 10. \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{9a^3}{a^3+(b+c)^3}\right)^\alpha \geq \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{9a^3}{a^3+(b+c)^3}\right)^\beta$$

§12. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§12.1. HÀM LÒI, HÀM LỖM VÀ BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

1. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH LÒI

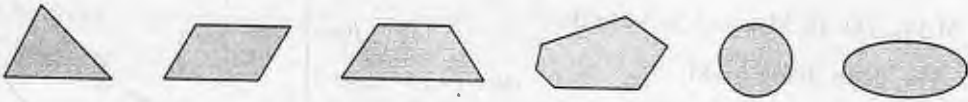
1. Định nghĩa

Một bộ phận $\mathcal{K}$ của mặt phẳng gọi là hình lồi khi và chỉ khi với hai điểm bất kỳ A và B thuộc $\mathcal{K}$ thì đoạn thẳng AB cũng nằm hoàn toàn ở trong $\mathcal{K}$

$$\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{K}, [AB] \subset \mathcal{K} \Leftrightarrow \{A + \alpha \overrightarrow{AB} \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset \mathcal{K}$$

Nếu một hình lồi có thể phủ nó bởi một hình tròn đủ lớn thì gọi là hình lồi đóng và ngược lại một hình lồi không có tính chất như vậy gọi là một hình lồi mở.

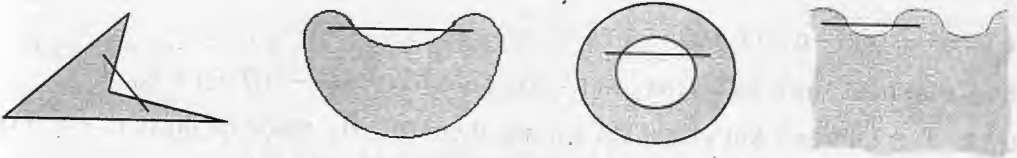
2. CÁC VÍ DỤ HÌNH HỌC VỀ HÌNH LÒI VÀ HÌNH KHÔNG LÒI



Hình 1: Hình lồi đóng



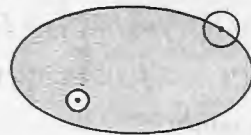
Hình 2: Hình lồi mở



Hình 3: Hình không lồi

3. ĐIỂM TRONG, ĐIỂM BIÊN VÀ BIÊN CỦA MỘT HÌNH LÒI

- Điểm M gọi là điểm trong của hình lồi $\mathcal{K}$ nếu tồn tại một hình tròn tâm M nằm hoàn toàn trong hình lồi $\mathcal{K}$.
- Điểm $N \in \mathcal{K}$ gọi là điểm biên của hình lồi $\mathcal{K}$ nếu mọi hình tròn tâm N đều có ít nhất một điểm không nằm trong $\mathcal{K}$.



Hình 4: Điểm trong và điểm biên

- Một hình lồi đóng có thể có điểm biên hoặc không có điểm biên nhưng nếu có điểm biên thì tập hợp các điểm biên là một đường liên tục khép kín và được gọi là biên của hình lồi. Nói chung người ta chỉ xét đến các hình lồi đóng có biên còn gọi là Oval.

II. HÀM LỒI, HÀM LỖM

1. Định nghĩa hàm lồi, hàm lõm

Giả sử I là một khoảng trong $\mathbb{R}$ tức là I thuộc 1 trong 9 khoảng sau:

$(-\infty, a); (-\infty, a]; (a, b); (a, b]; [a, b); [a, b]; (b, +\infty); [b, +\infty); (-\infty, +\infty)$

- Hàm số $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lồi trên khoảng I khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \alpha \in [0, 1] \text{ ta có } f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

- Hàm số $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lõm trên khoảng I khi và chỉ khi $(-f)$ lồi trên I

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, \forall \alpha \in [0, 1] \text{ ta có } f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Sau đây chúng ta chỉ xét đại diện các ý nghĩa và tính chất của hàm lồi.

2. Ý nghĩa hình học

Giả sử f lồi trên I . Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in I$ với $x_1 < x_2$.

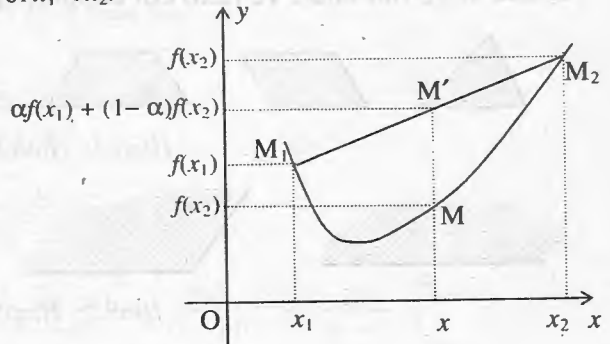
Gọi $M_1(x_1, f(x_1)); M_2(x_2, f(x_2))$ khi đó

$M'(x, y) \in$ đoạn thẳng M_1M_2

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in [0, 1] \text{ sao cho } \overrightarrow{M_2M'} = \alpha \overrightarrow{M_2M_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \\ y - f(x_2) = \alpha[f(x_1) - f(x_2)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \\ y = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \end{cases}$$



Vì hàm f lồi trên I nên $y_M = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) = y_{M'}$

Ý nghĩa: $f(x)$ lồi trên I khi và chỉ khi với mọi điểm M_1, M_2 thuộc đồ thị (C): $y = f(x)$ đều có cung M_1M_2 của đồ thị (C) nằm ở phía dưới đoạn thẳng M_1M_2 .

3. Quan hệ giữa Hàm lồi và Hình lồi

Gọi $\mathcal{H}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} | y \geq f(x)\}$ suy ra $\mathcal{H}_f$ là bộ phận của mặt phẳng nằm ở phía trên của đồ thị (C): $y = f(x)$, khi đó f lồi khi và chỉ khi $\mathcal{H}_f$ là hình lồi

Chứng minh:

Lấy bất kỳ $A, B \in \mathcal{H}_f$, gọi C là điểm

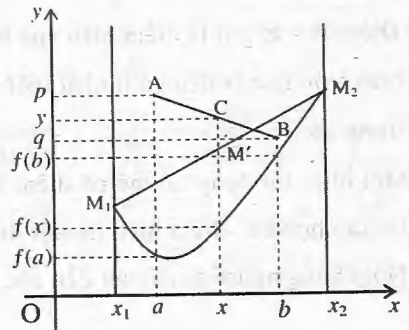
bất kỳ $\in [AB] \Leftrightarrow C = \alpha \overrightarrow{AB}$ với $\alpha \in [0, 1]$

Giả sử $A(a, p), B(b, q), C(x, y)$

$$\Rightarrow x = a + \alpha(b - a) = (1 - \alpha)a + \alpha b$$

Do f lồi theo định nghĩa ta có

$$f(x) = f((1 - \alpha)a + \alpha b) \leq (1 - \alpha)f(a) + \alpha f(b)$$



Vì $A, B \in \mathcal{H}_f$ nên $f(a) \leq p, f(b) \leq q \Rightarrow f(x) \leq (1 - \alpha)p + \alpha q = y \Rightarrow C \in \mathcal{H}_f$

$\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{H}_f, [AB] \subset \mathcal{H}_f \Rightarrow \mathcal{H}_f$ là hình lồi.

Đảo lại: Giả sử $\mathcal{H}_f$ là hình lồi với biên là đồ thị $f(x)$ trên $\mathbb{I}$.

Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$ và đặt $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ với $\alpha \in [0, 1]$.

$M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2)), M(x, f(x))$. Do $M_1, M_2 \in \mathcal{H}_f$ nên $[M_1 M_2] \subset \mathcal{H}_f$

Mà điểm $M' \in [M_1 M_2] \Rightarrow M'(x, \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)) \in \mathcal{H}_f$

$\Rightarrow f(x) = f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \Rightarrow f$ lồi trên $\mathbb{I}$

4. Dấu hiệu nhận biết hàm lồi

4.1. Định lý: Giả sử f có đạo hàm trên $\mathbb{I}$, khi đó f lồi trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi f' tăng trên $\mathbb{I}$

Chứng minh: Giả sử f lồi và $a, b \in \mathbb{I}$ với $a < b$. Lấy bất kỳ $x \in (a, b)$

Biểu diễn: $x = \frac{b-x}{b-a}a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right)b$ với $\frac{b-x}{b-a} \in (0, 1)$

$$\Rightarrow f(x) = f\left[\frac{b-x}{b-a}a + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right)b\right] \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \left(1 - \frac{b-x}{b-a}\right)f(b)$$

$$\Leftrightarrow (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b) \Leftrightarrow (b-a)[f(x) - f(a)] \leq (x-a)[f(b) - f(a)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad (1)$$

Biểu diễn $x = \frac{a-x}{a-b}b + \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)a$ với $\frac{a-x}{a-b} \in (0, 1)$

$$\Rightarrow f(x) = f\left[\frac{a-x}{a-b}b + \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)a\right] \leq \frac{a-x}{a-b}f(b) + \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)f(a)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)f(x) \leq (a-x)f(b) + (x-b)f(a) \Leftrightarrow (a-b)[f(x) - f(b)] \leq (x-b)[f(a) - f(b)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(b)}{x-b} \geq \frac{f(a) - f(b)}{a-b} \Rightarrow f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} \geq \frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow f'(a) \leq f'(b) \Rightarrow f'$ tăng trên $\mathbb{I}$

• **Đảo lại:** Giả sử f' tăng trên $\mathbb{I}$ và $a, b \in \mathbb{I}$ với $a < b$; $\alpha \in (0, 1)$, lấy $x \in (a, b)$

Suy ra $x = \alpha a + (1 - \alpha)b$ (chú ý: $\alpha = 0, \alpha = 1$ thì bất đẳng thức luôn đúng).

Sử dụng định lý **Lagrange** ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c \in (a, x) \\ \exists d \in (x, b) \end{array} \right. \text{ sao cho } \left\{ \begin{array}{l} f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{(1-\alpha)(b-a)} \\ f'(d) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(b) - f(x)}{\alpha(b-a)} \end{array} \right.$$

$$\text{Do } f' \text{ tăng trên } f'(c) \leq f'(d) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{(1-\alpha)(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(x)}{\alpha(b-a)}$$

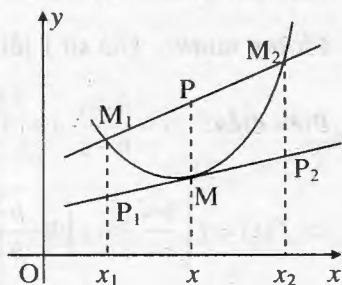
$$\Leftrightarrow \alpha[f(x) - f(a)] \leq (1-\alpha)[f(b) - f(x)] \Leftrightarrow f(x) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b) \Rightarrow f \text{ lồi}$$

Hệ quả: Giả sử f có đạo hàm đến cấp hai, khi đó f lồi khi và chỉ khi $f'' \geq 0 \forall x \in \mathbb{I}$

4.2. Định lý 2:

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng $\mathbb{I}$. Nếu tiếp tuyến tại mỗi điểm của đường cong $(C): y = f(x)$ đều nằm về phía dưới của (C) , thì f lồi trên $\mathbb{I}$

Chứng minh: Giả sử $M_1(x_1, f(x_1)); M_2(x_2, f(x_2))$ là 2 điểm bất kỳ thuộc $(C): y = f(x)$ với $x_1 < x_2 \in \mathbb{I}$. Lấy điểm $M(x, f(x)) \in (C)$, $P \in M_1M_2$ với $x_1 < x < x_2$ và $x_P = x$. Ta cần chứng minh $y_M < y_P$.



Gọi P_1, P_2 là các giao điểm của tiếp tuyến tại M với 2 đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$. Giả sử các đường thẳng P_1P_2 và M_1M_2 lần lượt có phương trình là: $y = g(x)$ và $y = \varphi(x)$. Theo giả thiết thì tiếp tuyến nằm về phía dưới của $(C) \forall x \in \mathbb{I}$ nên $y_{P_1} < y_{M_1}$ và $y_{P_2} < y_{M_2}$,

$$\Rightarrow P_1P_2 \text{ nằm ở phía dưới } M_1M_2 \Leftrightarrow g(\alpha) < \varphi(\alpha) \quad \forall \alpha \in (x_1, x_2) \Rightarrow y_P < y_M \Rightarrow f \text{ lồi trên } \mathbb{I}$$

4.3. Định lý 3: Giả sử f là một hàm liên tục trên khoảng $\mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{I} \quad (1). \text{ Chứng minh rằng hàm } f \text{ lồi trên } \mathbb{I}, \text{ hoặc}$$

$$f[(1-\alpha)x + \alpha y] \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{I} \text{ và } \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2)$$

Giải

• **Bổ đề 1:** Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có bất đẳng thức

$$f\left(\frac{m}{2^n}x + \frac{2^n - m}{2^n}y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \frac{2^n - m}{2^n}f(y) \quad \forall m \in [0, 2^n], m \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{I} \quad (3)$$

• **Chứng minh:** Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$

+ Với $n = 1$, thì $m \in \{0, 1, 2\}$, sử dụng (1) dễ thấy (3) đúng

+ Giả sử (3) đúng đến $n = k \in \mathbb{N}^*$, ta chứng minh (3) đúng với $n = k + 1$.

Nếu m chẵn, $m = 2p$ với $0 \leq p \leq 2^k$ thì $\frac{m}{2^{k+1}} = \frac{p}{2^k} : \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}} = \frac{2^k - p}{2^k}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}y\right) = f\left(\frac{p}{2^k}x + \frac{2^k - p}{2^k}y\right) \leq \frac{p}{2^k}f(x) + \frac{2^k - p}{2^k}f(y) = \frac{m}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}f(y)$$

Nếu m lẻ: Để ý rằng trong (1) vai trò của x, y có tính đối xứng nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $0 < m < 2^k$. Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}y\right) &= f\left(\frac{2p+1}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1} - 2p - 1}{2^{k+1}}y\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2p+1}{2^k}x + \frac{2^k - 2p - 1}{2^k}y\right) + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{2p+1}{2^k}x + \frac{2^k - 2p - 1}{2^k}y\right) + \frac{1}{2}f(y) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2p+1}{2^k}f(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^k - 2p - 1}{2^k}f(y) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{2p+1}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1} - 2p - 1}{2^{k+1}}f(y) \\ &= \frac{m}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}f(y) \Rightarrow f\left(\frac{m}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}y\right) \leq \frac{m}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}f(y) \end{aligned}$$

Ta đã chứng minh (3) đúng với m chẵn và m lẻ nên (3) đúng với $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bổ đề được chứng minh.

• **Bổ đề 2:** Giả sử $\alpha \in [0, 1]$, khi đó tồn tại dãy số $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ sao cho

$$a_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n] \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2^n} = \alpha$$

• **Chứng minh:** Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$: $[0, 1] = \bigcup_{m=0}^{2^n-1} \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$ suy ra tồn tại

$$a_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n - 1] \text{ sao cho } \frac{a_n}{2^n} \leq \alpha \leq \frac{a_n + 1}{2^n}.$$

$$\text{Do } \left| \frac{a_n}{2^n} - \alpha \right| \leq \frac{a_n + 1 - a_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2^n} = \alpha$$

• **Áp dụng:** Với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, theo **bổ đề 2** thì tồn tại dãy $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ sao cho

$$a_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n] \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2^n} = \alpha. \text{ Theo } \text{bổ đề 1} \text{ thì } \forall x, y \in \mathbb{I} \text{ ta có}$$

$$f\left(\frac{a_n}{2^n}y + \frac{2^n - a_n}{2^n}x\right) \leq \frac{a_n}{2^n}f(y) + \frac{2^n - a_n}{2^n}f(x) \quad (4)$$

$$\text{Do } f \text{ liên tục nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{a_n}{2^n}y + \frac{2^n - a_n}{2^n}x\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{a_n}{2^n}f(y) + \frac{2^n - a_n}{2^n}f(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow f[(1 - \alpha)x + \alpha y] \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{I} \text{ với } \forall \alpha \in [0, 1] \Leftrightarrow f \text{ lồi trên } \mathbb{I}$$

Bình luận: Với kết quả trên ta có thể thay thế định nghĩa hàm lồi bởi điều kiện

$$\text{đơn giản hơn: Hàm } f \text{ lồi trên khoảng } \mathbb{I} \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{I}$$

5. Các ví dụ về hàm lồi

$$\bullet y = x^\alpha \ (x > 0) \Rightarrow y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \Rightarrow y \text{ là hàm số lồi với } \alpha < 0 \text{ hoặc } \alpha > 1$$

$$\bullet y = a^x \ (0 < a \neq 1) \Rightarrow y'' = a^x \cdot \ln^2 a > 0 \Rightarrow y \text{ là hàm số lồi}$$

$$\bullet y = \log_a x \Rightarrow y'' = \frac{-1}{x^2 \ln a} > 0 \ \forall \ 0 < a < 1 \Rightarrow y \text{ là hàm số lồi } \forall \ 0 < a < 1$$

$$\bullet y = x \ln x \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow y \text{ là hàm số lồi } \forall x > 0$$

$$\bullet y = \ln(1 + e^x) \Rightarrow y'' = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \Rightarrow y \text{ là hàm số lồi } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet y = (1 + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \ (x > 0) \Rightarrow y'' = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1 + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2} \Rightarrow y'' > 0 \ \forall \alpha > 1$$

và $y'' < 0 \ \forall \alpha < 1$ suy ra y là hàm số lồi nếu $\alpha > 1$ và hàm số lõm nếu $\alpha < 1$

III. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

1. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0; 1]$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Khi đó ta có

a. Nếu $f(x)$ lồi trên $\mathbb{I}$ thì $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$ (1)

b. Nếu $f(x)$ lõm trên $\mathbb{I}$ thì $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

Chứng minh

1a. Với $n = 1$, (1) là đẳng thức; với $n = 2$ thì (1) đúng (theo định nghĩa của hàm lồi)

Giả sử (1) đúng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta phải chứng minh (1) đúng với $(n + 1)$.

Xét $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{I}$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in [0; 1]$ với $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 1$

Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ suy ra $\alpha_{n+1} = 1$ thì hiển nhiên (1) đúng với $(n + 1)$

Giả sử $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$; đặt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 - \alpha_{n+1} > 0$

và $x_0 = \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha} \in \mathbb{I}$. Sử dụng định nghĩa hàm lồi của f , ta có

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) &= f(\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_{n+1}) \\ &\leq \alpha f(x_0) + (1 - \alpha)f(x_{n+1}) = \alpha f(x_0) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = \alpha f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq \alpha \left[\frac{\alpha_1}{\alpha} f(x_1) + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha} f(x_n) \right] + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Do (1) đúng với $(n + 1)$ nên theo nguyên lý quy nạp ta có (1) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Bất đẳng thức hệ quả

• Giả sử $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ và $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$. Đặt $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ và

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m}, \alpha_2 = \frac{m_2}{m}, \dots, \alpha_n = \frac{m_n}{m} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0; 1], \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$$

Khi đó ta có bất đẳng thức $f\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$

• Lấy $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$

§12.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

1. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$

(Bất đẳng thức AM - GM)

Chứng minh

• Nếu $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = 0$ thì $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ suy ra (đpcm)

• Xét trường hợp còn lại: $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} > 0$.

Đặt $f(x) = -\ln x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x}$; $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$,

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi với $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$-\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \leq -\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = -\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Bài 2. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ là $2n$ số thực. Chứng minh rằng:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\right)^2$$

(Bất đẳng thức BunhiaCôpski)

Chứng minh

Xét $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f(x)$ lồi trên $\mathbb{R}$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$ ta có

$$f\left(\frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} x_1 + \frac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} x_n\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} f(x_k)$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2} \leq \frac{\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)^2 \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2)$$

Đặt $\alpha_i = b_i^2, x_i = \frac{a_i}{b_i}$ và thế vào bất đẳng thức trên ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Bài 3. Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$; $p, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

(Bất đẳng thức Holder)

Chứng minh

Do $p, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nên $\max(p, q) > 1$, giả sử $p > 1$.

Xét hàm số $f(x) = x^p$ với $x > 0, p > 1$. Ta có $f'(x) = p \cdot x^{p-1} \Rightarrow$

$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0 \forall x > 0, p > 1 \Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi $\forall x > 0$

Đặt $\alpha_1 = \frac{b_1^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}, \alpha_2 = \frac{b_2^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}, \dots, \alpha_n = \frac{b_n^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \Rightarrow \alpha_i \in [0, 1]$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$

Đặt $x_1 = a_1 b_1^{1-q}; x_2 = a_2 b_2^{1-q}; \dots; x_n = a_n b_n^{1-q} \Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_n > 0$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q}\right) \leq \frac{b_1^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \cdot (a_1 b_1^{1-q})^p + \dots + \frac{b_n^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \cdot (a_n b_n^{1-q})^p$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q}\right)^p \leq \frac{a_1^p \cdot b_1^{p+q-pq} + \dots + a_n^p \cdot b_n^{p+q-pq}}{b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q} \quad (2)$$

Do $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p + q - pq = 0$, khi đó bất đẳng thức (2) tương đương

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q}\right)^p &\leq \frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q} \\ \Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^p &\leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p) (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{p-1} \\ \Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) &\leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{p-1}{p}} \\ \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Bài 4. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \quad (1)$$

(Bất đẳng thức Minkowski)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \sqrt[n]{\frac{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{b_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Đặt $x_1 = \ln \frac{b_1}{a_1}, x_2 = \ln \frac{b_2}{a_2}, \dots, x_n = \ln \frac{b_n}{a_n}$ thì bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow 1 + (e^{x_1})^{\frac{1}{n}} \cdot (e^{x_2})^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot (e^{x_n})^{\frac{1}{n}} \leq (1 + e^{x_1})^{\frac{1}{n}} \cdot (1 + e^{x_2})^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot (1 + e^{x_n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq \left[(1 + e^{x_1})(1 + e^{x_2}) \cdot \dots \cdot (1 + e^{x_n}) \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left[1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \right] \leq \frac{\ln(1 + e^{x_1}) + \ln(1 + e^{x_2}) + \dots + \ln(1 + e^{x_n})}{n}$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(1 + e^x) \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm số lồi trên } \mathbb{R} \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln \left[1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \right] \leq \frac{\ln(1 + e^{x_1}) + \ln(1 + e^{x_2}) + \dots + \ln(1 + e^{x_n})}{n} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_n^{a_n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \ln(a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_n^{a_n}) \geq \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$\Leftrightarrow a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n}{n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n} \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$$

Xét hàm số $f(x) = x \ln x$ với $x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi với $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + \dots + a_n \ln a_n}{n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n} \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \dots \cdot a_n^{a_n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Bài 8. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, a]$ sao cho

$x_1 + x_2 + \dots + x_n \in [0, a]$. Chứng minh rằng:

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-1)f(0)$$

(Bất đẳng thức Petrovica)

Chứng minh

Đặt $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} f(x_1) &= f\left(\frac{x_1}{S} \cdot S + \frac{S-x_1}{S} \cdot 0\right) \leq \frac{x_1}{S} f(S) + \frac{S-x_1}{S} f(0) \\ f(x_2) &= f\left(\frac{x_2}{S} \cdot S + \frac{S-x_2}{S} \cdot 0\right) \leq \frac{x_2}{S} f(S) + \frac{S-x_2}{S} f(0) \\ &\dots\dots\dots \\ f(x_n) &= f\left(\frac{x_n}{S} \cdot S + \frac{S-x_n}{S} \cdot 0\right) \leq \frac{x_n}{S} f(S) + \frac{S-x_n}{S} f(0) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Suy ra: $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{S} f(S) + \frac{(n-1)S}{S} f(0)$

$$\Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-1)f(0)$$

Bất đẳng thức Petrovica mở rộng:

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$ và $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\right]$ và

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i < a. \text{ Khi đó ta có bất đẳng thức } \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1\right) f(0)$$

Bài 9. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$ và $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$ thỏa mãn:

1. $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, a]$
2. $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$
3. $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i \in [0, a]$
4. $\sum_{i=1}^{n_1-1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2-1} p_i x_i = \dots = \sum_{i=n_{k-1}}^n p_i x_i \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1})$

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq k f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^n p_i\right) f(0)$

(Bất đẳng thức Vasic)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *Petrovica* mở rộng

$$\sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i x_i\right) - \left(1 - \sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i\right) f(0) \quad \text{với } v = 0, 1, \dots, k \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có $\sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i$ (Chú ý ở đây $n_0 = 1$, còn $n_k = n + 1$)

Cộng các vế k bất đẳng thức ở dạng (1), ta có

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq k f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^n p_i\right) f(0)$$

$$\text{Bài 10. Chứng minh: } T = \frac{x_1}{\sqrt{x_1 x_2 + x_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2 x_3 + x_3^2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n x_1 + x_1^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad \forall x_k > 0$$

Chứng minh

Đặt $u_k = \frac{x_k}{x_{k+1}}$ trong đó $x_{n+1} = x_1 \Rightarrow u_1 u_2 \dots u_n = 1$.

Bây giờ đặt $t_k = \ln u_k$ suy ra $t_1 + \dots + t_n = 0$

Xét $f(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} \Rightarrow f''(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số lồi trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow T = \sum_{k=1}^n \frac{(x_k/x_{k+1})}{\sqrt{1+(x_k/x_{k+1})}} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\sqrt{1+u_k}} = \sum_{k=1}^n f(t_k) \geq n f\left(\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}\right) = n f(0) = \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Bài 11. Chứng minh: } (b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c \leq \left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}, \quad \forall a, b, c > 0$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức} \Leftrightarrow \ln[(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c] \leq \ln\left[\left(\frac{2}{3}(a+b+c)\right)^{a+b+c}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{a \ln(b+c) + b \ln(c+a) + c \ln(a+b)}{a+b+c} \leq \ln\left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right] \quad (1)$$

Xét $f(x) = -\ln(a+b+c-x)$ với $0 < x < a+b+c$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{a+b+c-x} \Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{a+b+c-x}\right)^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi

Sử dụng bất đẳng thức *Jensen* ta có

ta có $f'(u) = -10 \frac{(1-u)^4}{(1+u)^6}$; $f''(u) = 80 \frac{(1-u)^3}{(1+u)^7} + 20 \frac{(1-u)^4}{(1+u)^7} > 0 \forall u \in (-1, 1) \Rightarrow f(u)$ lồi trên khoảng $(-1, 1)$. Áp dụng bất đẳng thức **Jensen**, ta được:

$$f(x) + f(y) + f(z) + f(t) \geq 4f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right) = 4f(0) = 4$$

Bài 14. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ($n \geq 2$)

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{x_i}{1+x_i^2} \right)} > \frac{1}{n} + \prod_{j=1}^n \left(1 - \sum_{i=1}^j \frac{x_i}{1+x_i^2} \right) \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $a_j = \sum_{i=1}^j \frac{x_i}{1+x_i^2}$. Ta sẽ chứng minh $a_j < 1 \quad \forall j = \overline{1, n}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ với $t \in (0, 1)$. Ta có $f'(t) = \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$

$\Rightarrow f''(t) = \frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3} < 0, \forall t \in (0, 1) \Rightarrow f(t)$ là hàm số lõm.

Sử dụng bất đẳng thức **Jensen** ta có: $a_j = \sum_{i=1}^j f(x_i) \leq j f\left(\frac{\sum_{i=1}^j x_i}{j}\right) = \frac{j^2}{1+j^2} < 1$

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_j} \geq \frac{1}{n} + \prod_{j=1}^n (1 - a_j)$, $\forall 0 < a_j < 1$. (2). Đặt $S = \sum_{j=1}^n a_j$

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$\frac{1}{n} + \prod_{j=1}^n (1 - a_j) \leq \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - a_j) \right]^n = \frac{1}{n} + \left(\frac{n-S}{n} \right)^n$$

Để chứng minh (2), ta sẽ chứng minh $\frac{1}{n} + \left(\frac{n-S}{n} \right)^n \leq \frac{1}{S} \Leftrightarrow \frac{S}{n^{n-1}} (n-S)^n \leq n-S$

$\Leftrightarrow (n-1)S(n-S)^{n-1} \leq n^{n-1}(n-1)$. Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$(n-1)S(n-S)^{n-1} \leq \left[\frac{(n-1)S + (n-1)(n-S)}{n} \right]^n = (n-1)^n < n^{n-1}(n-1)$$

Như vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh suy ra (1) được chứng minh.

2. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 1. Chứng minh rằng: $1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Bài 2. Cho $p, q \geq 0, p + q = 1$. Chứng minh rằng: $e^{px+qy} \leq pe^x + qe^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Bài 3. Cho $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0; p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Chứng minh rằng:

$$e^{p_1 x_1} e^{p_2 x_2} \dots e^{p_n x_n} \leq p_1 e^{x_1} + p_2 e^{x_2} + \dots + p_n e^{x_n}; \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{1}{n} \ln x_1 \ln x_2 \dots \ln x_n, \quad \forall x_i > 1$

Bài 5. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng: $(1-a)(1-b)(1-c) \leq (1 - \sqrt[3]{abc})^3$

Bài 6. Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt[3]{b^3 + c^3 + 6abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c^3 + a^3 + 6abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + 6abc}} \geq \frac{3}{2}, \quad \forall a, b, c > 0$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1^n}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2^n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n^n}} \leq \frac{n}{\sqrt{1+a_1 a_2 \dots a_n}}$$

Bài 8. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ và $p \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p) \geq n^{2-p} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^p$$

Bài 9. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right], 2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n)} \leq \left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \right]^n$$

Bài 10. Cho n góc $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ với $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \pi$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{n - (\tan^2 x_1 + \tan^2 x_2 + \dots + \tan^2 x_n)}{n + (\tan^2 x_1 + \tan^2 x_2 + \dots + \tan^2 x_n)} \leq \cos \frac{2\pi}{n}$$

Bài 11. Cho hàm f tăng trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0, f''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$f(a), f(b), f(c)$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$1. T = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}.$$

$$2. P = \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} + 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$3. Q = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)$$

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = (\tan A)^{\tan A} (\tan B)^{\tan B} (\tan C)^{\tan C}$$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} (2a+1)^{\frac{5}{2}} + (2b+1)^{\frac{5}{2}} + (2c+1)^{\frac{5}{2}} + 5 \left[(a+b+1)^{\frac{3}{2}} + (b+c+1)^{\frac{3}{2}} + (c+a+1)^{\frac{3}{2}} \right] \geq \\ \geq (a+b+1)^{\frac{5}{2}} + (b+c+1)^{\frac{5}{2}} + (c+a+1)^{\frac{5}{2}} + 5 \left[(2a+1)^{\frac{3}{2}} + (2b+1)^{\frac{3}{2}} + (2c+1)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

Bài 15. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{27abc}{(1+\sqrt{1-a})^2(1+\sqrt{1-b})^2(1+\sqrt{1-c})^2} \leq \left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a}} + \frac{b}{1+\sqrt{1-b}} + \frac{c}{1+\sqrt{1-c}} \right)^3$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{9}{4} + \ln \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{8abc} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)$$

Bài 17. Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$27e^{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{3}{4}} \geq 64 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) \left(1 - \frac{1}{c^2} \right)$$

Bài 18. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left[\frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 + 1} \right]^3 \geq$

$$\geq \left(a + \frac{a+1}{\sqrt{2}}\right) \left(b + \frac{b+1}{\sqrt{2}}\right) \left(c + \frac{c+1}{\sqrt{2}}\right) e^{\frac{(a+b+c)(3+a+b+c)}{3\sqrt{2}} - (a+b+c)\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}}$$

Bài 19. Cho $a, b, c \in [\sqrt{2}, 2]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2 + \sqrt{4-a^2})(2 + \sqrt{4-b^2})(2 + \sqrt{4-c^2})}{abc} \leq (1 + \sqrt{2})^3$$

Bài 20. Cho $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\cos x + \cos y + \cos z \leq$

$$\leq \ln\left(\cot \frac{x}{2} \cot \frac{y}{2} \cot \frac{z}{2}\right) - 3 \ln\left(\cot \frac{x+y+z}{6}\right) + 3\sqrt{1 - \frac{1}{9}(\sin x + \sin y + \sin z)^2}$$

Bài 21. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\prod_{k=1}^n (a_k + \sqrt{a_k^2 + \alpha^2}) \leq \left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2 + \alpha^2} \right]^n$$

Bài 22. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq \left(\frac{7}{16}\right)^3 (a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2$$

Bài 23. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a^2 - \sqrt{2}a + 1)(b^2 - \sqrt{2}b + 1)(c^2 - \sqrt{2}c + 1)}{(10 - 3\sqrt{2})^6} \geq \frac{(a^2 + \sqrt{2}a + 1)(b^2 + \sqrt{2}b + 1)(c^2 + \sqrt{2}c + 1)}{82^3}$$

Bài 24. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{3a+2b+2c} + \frac{b}{3b+2c+2a} + \frac{c}{3c+2a+2b} \geq \frac{3}{7}$

Bài 25. Cho $x, y, z \in [0, 3]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{4-x^7} + \sqrt[3]{4-y^7} + \sqrt[3]{4-z^7} \leq 3\sqrt[3]{3}$$

Bài 26. Cho $\begin{cases} 0 < x, y, z < 1 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$. Chứng minh $\frac{8x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \geq (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$

Bài 27. [China TST 2006] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 28. Cho $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq b_{n-1} \leq a_n$ và $b_n \geq 0$

thỏa mãn $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$ là hàm lồi

trên $(0, +\infty)$ thì $\sum_{k=1}^n (f(a_k) - f(b_k)) \geq f\left(\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k\right) - f(0)$

Bài 29. Nếu f là hàm số lồi và x, y, z chạy trên tập xác định. Chứng minh rằng:

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

Bài 30. Nếu f là hàm số lồi và x, y, z chạy trên tập xác định. Chứng minh rằng:

$$f(x) + f(y) + f(z) + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{4}{3} \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right]$$

Bài 31. [Hong Kông, 2005] Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 1$.

Chứng minh rằng: $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$

Bài 32. [Mỹ, 2003] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Bài 33. [Nhật Bản, 1997] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-c)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

Bài 34. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d \leq 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

Bài 35. [Trung Quốc, 2003] Cho các số $x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$ và $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{1+x_i} = 1$

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{4+x_i^2} \leq 1$

§13. BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§13.1. GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC ĐỊNH LÝ

1. Bộ số sắp thứ tự

$(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ với $x_i \in \mathbf{R}$ và $x_i \geq x_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1}$

2. So sánh hai bộ số sắp thứ tự

Cho 2 bộ n số sắp thứ tự $\begin{cases} (a) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$ tức là $\begin{cases} a_i \geq a_{i+1} \\ b_i \geq b_{i+1} \end{cases} \forall i = \overline{1, n-1}$.

Ta nói bộ số (a) trội hơn bộ số (b) và được ký hiệu $(a) \succ (b)$ nếu thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m b_k \quad \forall m = \overline{1, n-1} \\ \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k \end{cases}$$

3. Bất đẳng thức Karamata

Cho 2 bộ n số thực được sắp thứ tự $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $(a) \succ (b)$

- Nếu f là hàm lồi trên $\mathbf{I}$ thì $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$
- Nếu f là hàm lõm trên $\mathbf{I}$ thì $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$
- **Đặc biệt:** Nếu $b_1 = b_2 = \dots = b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ ta nhận được bất đẳng thức **Jensen**

Chứng minh 1

- **Phương pháp quy nạp:** Ta sẽ chứng minh đại diện khi f là hàm lồi.

Bước 1. $n = 2$: Giả sử $\begin{cases} (a) = (a_1, a_2) \\ (b) = (b_1, b_2) \end{cases}$ với $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \\ b_1 \geq b_2 \end{cases}$ và $\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \end{cases}$

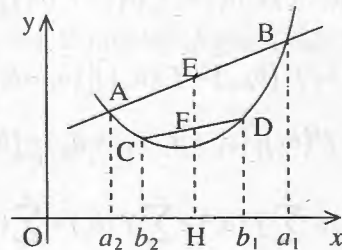
Ta phải chứng minh: $f(a_1) + f(a_2) \geq f(b_1) + f(b_2)$

Trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$,

lấy các điểm A, B, C, D sao cho

$A(a_2, f(a_2)); B(a_1, f(a_1)); C(b_2, f(b_2)); D(b_1, f(b_1))$

Gọi E, F là trung điểm hai đoạn thẳng AB, CD.



Do $a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq a_1$ và $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \Rightarrow FH = \frac{1}{2}[f(b_1) + f(b_2)]$;

$EH = \frac{1}{2} [f(a_1) + f(a_2)]$. Đề ý rằng $FH \leq EH \Rightarrow f(a_1) + f(a_2) \leq f(b_1) + f(b_2)$

Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với n , tức là ta có

$$\begin{cases} (a) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} a_i \geq a_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1} \\ b_i' \geq b_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m b_k, \forall m = \overline{1, n-1} \\ a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n \end{cases}$$

Khi đó $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$ (f là hàm lồi)

Ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức đúng với $n+1$. Thật vậy, giả sử ta có 2 bộ số

$$\begin{cases} (a) = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \\ (b) = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1}) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} a_i \geq a_{i+1}, \forall i = \overline{1, n} \\ b_i \geq b_{i+1}, \forall i = \overline{1, n} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m b_k, \forall m = \overline{1, n} \\ a_1 + \dots + a_{n+1} = b_1 + \dots + b_{n+1} \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1}) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) + f(b_{n+1})$

Sử dụng giả thiết quy nạp cho 2 bộ n số thực ta có:

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1}) &= [f(a_1) + f(a_2)] + [f(a_3) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1})] \geq \\ &\geq [f(b_1) + f(a_1 + a_2 - b_1)] + f(a_3) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1}) \quad (\forall (a_1, a_2) \succ (b_1, a_1 + a_2 - b_1)) \\ &= f(b_1) + [f(a_1 + a_2 - b_1) + f(a_3) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1})] \geq \\ &\geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) + f(b_{n+1}) \quad (\forall (a_1 + a_2 - b_1, a_3, \dots, a_{n+1}) \succ (b_2, b_3, \dots, b_{n+1})) \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi n .

Chứng minh 2

Sử dụng khai triển **Taylor** và $f''(c) \geq 0$ với f lồi, ta có:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(c) \geq f(a) + (x-a)f'(a) \quad \text{với } c \in (x, a)$$

$$\Rightarrow f(a_i) = f[b_i + (a_i - b_i)] \geq f(b_i) + (a_i - b_i)f'(b_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i) + \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)f'(b_i)$$

Sử dụng khai triển **Abel** ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) f'(b_i) &= [f'(b_1) - f'(b_2)](a_1 - b_1) + [f'(b_2) - f'(b_3)][(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)] + \dots \\ &\dots + [f'(b_{n-1}) - f'(b_n)][(a_1 - b_1) + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})] + \\ &+ f'(b_n)[(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)] \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i) + \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) f'(b_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i)$$

(vì f lồi nên $f'' > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f'(x)$ tăng $\Rightarrow f'(b_i) - f'(b_{i+1}) \geq 0$)

4. Thiết lập điều kiện sử dụng bất đẳng thức Karamata

Định lý (I.Schur). Cho 2 bộ n số sắp thứ tự $\begin{cases} (a) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$ tức là

$$\begin{cases} a_i \geq a_{i+1} \\ b_i \geq b_{i+1} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Điều kiện cần và đủ để hai bộ dãy số đơn điệu giảm (a) và (b) thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1 \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \\ \dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \geq \sum_{k=1}^m b_k \quad \forall m = \overline{1, n-1} \\ \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k \end{cases}$$

là giữa chúng có một phép biến đổi tuyến tính dạng

$$b_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} a_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{trong đó} \quad c_{kl} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n c_{kj} = 1; \quad \sum_{j=1}^n c_{jl} = l; \quad k, l = 1, 2, \dots, n$$

5. Các định lý mở rộng và hệ quả của bất đẳng thức Karamata

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a, b)$ sao cho $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số $\in [a, b]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$

$$\begin{cases} b_1 \geq a_1 \\ b_1 + b_2 \geq a_1 + a_2 \\ \dots \\ b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{cases} \quad \text{Khi đó, ta luôn có} \quad \sum_{k=1}^n f(b_k) \geq \sum_{k=1}^n f(a_k) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng biểu diễn với hàm lồi

$$f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) = \max_{t_1, \dots, t_n \in I(a, b)} \left[\sum_{i=1}^n f(t_i) + \sum_{i=1}^n (b_i - t_i) f'(t_i) \right]$$

Không mất tính tổng quát, giả sử bộ số $t_1, \dots, t_n \in I(a, b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$. Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$b_1 f'(t_1) + b_2 f'(t_2) + \dots + b_n f'(t_n) \geq y_1 f'(t_1) + y_2 f'(t_2) + \dots + y_n f'(t_n)$$

Sử dụng biến đổi Abel

$$\begin{aligned} b_1 f'(t_1) + b_2 f'(t_2) + \dots + b_n f'(t_n) &= S_1 [f'(t_1) - f'(t_2)] + S_2 [f'(t_2) - f'(t_3)] + \dots + \\ &\quad S_{n-1} [f'(t_{n-1}) - f'(t_n)] + S_n f'(t_n) \end{aligned}$$

Định lý 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$ và $f(0) \leq 0$. Xét dãy số không âm và đơn điệu giảm $a \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$.

Khi đó ta có bất đẳng thức
$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f(a_j) \geq f\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j\right)$$

(Bất đẳng thức Bellman)

Định lý 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$. Xét cặp dãy số không âm và đơn điệu giảm $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$; $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$.

Khi đó ta có bất đẳng thức
$$\left[1 - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_j f(a_j)\right] \geq f\left(\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} a_j a_j\right)$$

(Bất đẳng thức Olkin)

II. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA TRONG TAM GIÁC

A. Độ gần đều và tính sắp thứ tự của hai tam giác theo góc

1. Định nghĩa 1: Với mỗi tam giác ABC cho trước, kí hiệu

$$\delta_{ABC} = \text{Max}\{A, B, C\} - \text{Min}\{A, B, C\}$$

và ta nói δ_{ABC} là độ "gần đều" của tam giác ABC. Hiển nhiên $\delta_{ABC} \geq 0$ và $\delta_{ABC} = 0$ khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

2. Định nghĩa 2: Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thỏa mãn 2 điều kiện: $\text{Max}\{A_1, B_1, C_1\} \leq \text{Max}\{A_2, B_2, C_2\}$ và $\text{Min}\{A_1, B_1, C_1\} \geq \text{Min}\{A_2, B_2, C_2\}$, khi đó ta nói cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là cặp được sắp thứ tự và ta có bất đẳng thức $\delta_{A_1B_1C_1} \leq \delta_{A_2B_2C_2}$ đồng thời ta nói tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

3. Nhận xét

1. Tam giác đều có độ gần đều nhỏ nhất trong mọi tam giác ($\delta = 0$).
2. Trong tập hợp các tam giác không nhọn thì tam giác vuông cân gần đều hơn mọi tam giác khác.
3. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ được sắp thứ tự trong đó $A_1B_1C_1$ gần đều hơn $A_2B_2C_2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $A_1 \geq B_1 \geq C_1$ và $A_2 \geq B_2 \geq C_2$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \text{Max}\{A_1, B_1, C_1\} = A_1 \leq A_2 = \text{Max}\{A_2, B_2, C_2\} \\ \text{Min}\{A_1, B_1, C_1\} = C_1 \geq C_2 = \text{Min}\{A_2, B_2, C_2\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 \geq A_1 \\ A_2 + B_2 \geq A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 + C_2 = A_1 + B_1 + C_1 \end{cases}$$

Vậy (A_2, B_2, C_2) và (A_1, B_1, C_1) được sắp thứ tự và $(A_2, B_2, C_2) \succ (A_1, B_1, C_1)$

4. Tính chất: Cho tam giác ABC và 3 số thực $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \text{ Đặt } \begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B \end{cases} (*)$$

Khi đó tam giác $A_0B_0C_0$ gần đều hơn so với tam giác ABC.

Chứng minh

$$\begin{cases} A_0 \geq \alpha \min\{A, B, C\} + \beta \min\{A, B, C\} + \gamma \min\{A, B, C\} = \min\{A, B, C\} \\ B_0 \geq \alpha \min\{A, B, C\} + \beta \min\{A, B, C\} + \gamma \min\{A, B, C\} = \min\{A, B, C\} \\ C_0 \geq \alpha \min\{A, B, C\} + \beta \min\{A, B, C\} + \gamma \min\{A, B, C\} = \min\{A, B, C\} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max\{A_0, B_0, C_0\} \leq \max\{A, B, C\} \\ \min\{A_0, B_0, C_0\} \leq \min\{A, B, C\} \end{cases} \Rightarrow \delta_{\Delta A_0 B_0 C_0} \leq \delta_{\Delta ABC} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

5. Áp dụng

5. 1. Tính chất: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

+) Nếu hàm số $f(x)$ lồi trên $(0, \pi)$, tức là $f''(x) \geq 0, \forall x \in (0, \pi)$ thì

$$f(A_2) + f(B_2) + f(C_2) \geq f(A_1) + f(B_1) + f(C_1).$$

+) Nếu hàm số $f(x)$ lõm trên $(0, \pi)$, tức là $f''(x) \leq 0, \forall x \in (0, \pi)$ thì

$$f(A_2) + f(B_2) + f(C_2) \leq f(A_1) + f(B_1) + f(C_1)$$

5. 2. Các ví dụ tiêu biểu:

• Ví dụ 1: Cho tam giác ABC và 3 số $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \text{ Đặt } \begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B \end{cases}, \text{ khi đó ta có}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \sin \frac{A_0}{2} + \sin \frac{B_0}{2} + \sin \frac{C_0}{2}$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A_0}{2} + \cos \frac{B_0}{2} + \cos \frac{C_0}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \leq \tan \frac{A_0}{2} + \tan \frac{B_0}{2} + \tan \frac{C_0}{2}$$

• Ví dụ 2: Cho tam giác ABC không nhọn. Khi đó ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}; \quad \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 2\sqrt{2} - 1$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \geq B \geq C$. Khi đó

$$\begin{cases} A \geq \frac{\pi}{2} \\ A+B \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ A+B+C \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{4} \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A, B, C) \succ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right) \succ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x$, $\forall x \in (0, \pi) \Rightarrow f''(x) = -\sin x < 0$, $\forall x \in (0, \pi)$.

Suy ra $f(x)$ lõm trên $(0, \pi)$. Sử dụng bất đẳng thức **Karamata** ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$$

Xét hàm số $g(x) = \tan x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ suy ra $g''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) > 0$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Suy ra $g(x)$ lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$. Sử dụng bất đẳng thức **Karamata** ta có:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2} - 1$$

• **Ví dụ 3:** $\sin^\alpha A + \sin^\alpha B + \sin^\alpha C \geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha$, $\forall \alpha < 0$

$$\sin^\alpha A + \sin^\alpha B + \sin^\alpha C \leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha$$
, $\forall 0 < \alpha \leq 1$

$$\sin^\alpha \frac{A}{2} + \sin^\alpha \frac{B}{2} + \sin^\alpha \frac{C}{2} \geq 3\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$$
, $\forall \alpha < 0$

$$1 < \sin^\alpha \frac{A}{2} + \sin^\alpha \frac{B}{2} + \sin^\alpha \frac{C}{2} \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$$
, $\forall 0 < \alpha \leq 1$

B. Sắp thứ tự các đại lượng độ dài trong tam giác

Cho tam giác ABC với độ dài 3 cạnh là a, b, c . Đặt $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến. Đặt $m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có các bộ sắp thứ tự sau đây:

$$(a, b, c) \succ (2(p-a), 2(p-b), 2(p-c)) ;$$

$$(p, p, 0) \succ (a, b, c) \succ \left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right) ; (p, 0, 0) \succ (p-c, p-b, p-a) \succ \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3}\right)$$

Do m_a, m_b, m_c cũng là độ dài 3 cạnh của một tam giác, giả sử $m_a \geq m_b \geq m_c$, khi đó

$$(m, m, 0) \succ (m_a, m_b, m_c) \succ \left(\frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}\right) ; (m, 0, 0) \succ (m-m_c, m-m_b, m-m_a) \succ \left(\frac{m}{3}, \frac{m}{3}, \frac{m}{3}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Karamata** cho hàm lồi và hàm lõm, ta có:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} < \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \leq \frac{1}{3} ; \sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} < \sqrt{3p} ;$$

$$\sqrt{a(p-a)} + \sqrt{b(p-b)} + \sqrt{c(p-c)} < \sqrt{2p} ; \frac{1}{4} < \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27} ; \frac{4}{9} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(m_a + m_b + m_c)^2} < \frac{2}{3} ;$$

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c) ; \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)} \leq \frac{abc}{ab+bc+ca} ;$$

$$32(p-a)(p-b)(p-c)[(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)] \leq abc(ab+bc+ca)$$

§13. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$, với mọi $a, b, c > 0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ suy ra $a+b \geq a+c \geq b+c$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} 2a \geq a+b \\ 2a+2b \geq (a+b) + (a+c) \\ 2a+2b+2c = (a+b) + (a+c) + (b+c) \end{cases} \quad \text{nên } (2a, 2b, 2c) \succ (a+b, a+c, b+c)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Karamata* cho $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$ ta có

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3} \quad (1)$$

Chứng minh

$$A_1 = a^4 + b^4 + c^4; A_2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2; B_1 = a^3b + b^3c + c^3a; B_2 = ab^3 + bc^3 + ca^3$$

$$\text{Ta có: } A_1 - A_2 = \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] \geq 0 \Rightarrow A_1 \geq A_2$$

Xét $B_1 \geq B_2$. Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$\begin{cases} a^4 + a^4 + a^4 + b^4 \geq 4a^3b \\ b^4 + b^4 + b^4 + c^4 \geq 4b^3c \\ c^4 + c^4 + c^4 + a^4 \geq 4c^3a \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} a^4 + a^2b^2 \geq 2a^3b; b^4 + a^2b^2 \geq 2ab^3 \\ b^4 + b^2c^2 \geq 2b^3c; c^4 + b^2c^2 \geq 2bc^3 \\ c^4 + c^2a^2 \geq 2c^3a; a^4 + c^2a^2 \geq 2ca^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(a^4 + b^4 + c^4) \geq 4(a^3b + b^3c + c^3a) \\ 2(a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a) + 2(ab^3 + bc^3 + ca^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 \geq B_1 \\ A_1 + A_2 \geq B_1 + B_2 \end{cases} \quad \text{. Sử dụng bất đẳng thức Karamata với } f(x) = \sqrt{x} \text{ lồi ta có:}$$

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}$$

$$\text{Nếu } B_2 \geq B_1 \text{ thì tương tự ta có: } \begin{cases} A_1 \geq B_2 \\ A_1 + A_2 \geq B_2 + B_1 \end{cases} \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^6 + b^6 + c^6)^{10} + [abc(a^3 + b^3 + c^3)]^{10} \geq (a^5b + b^5c + c^5a)^{10} + (ab^5 + bc^5 + ca^5)^{10}$$

Chứng minh

$$A_1 = a^6 + b^6 + c^6; A_2 = abc(a^3 + b^3 + c^3); B_1 = a^5b + b^5c + c^5a; B_2 = ab^5 + bc^5 + ca^5$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^6 + a^6 + a^6 + a^6 + b^6 + c^6 \geq 6a^4bc \\ b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + c^6 + a^6 \geq 6b^4ca \\ c^6 + c^6 + c^6 + c^6 + a^6 + b^6 \geq 6c^4ab \end{cases} \Rightarrow A_1 \geq A_2. \text{ Xét 2 trường hợp sau:}$$

$$\text{Nếu } B_1 \geq B_2 \text{ khi đó ta chứng minh: } \begin{cases} A_1 \geq B_1 \\ A_1 + A_2 \geq B_1 + B_2 \end{cases};$$

$$\text{nếu } B_2 \geq B_1 \text{ khi đó ta chứng minh: } \begin{cases} A_1 \geq B_2 \\ A_1 + A_2 \geq B_2 + B_1 \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Karamata** với $f(x) = x^{10}$ lời ta có

$$(a^6 + b^6 + c^6)^{10} + [abc(a^3 + b^3 + c^3)]^{10} \geq (a^5b + b^5c + c^5a)^{10} + (ab^5 + bc^5 + ca^5)^{10}$$

Bài 4. Cho $-1 \leq x, y, z \leq 1$ và $x + y + z = -\frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^8 + y^8 + z^8$

Giải

Xét hàm số $f(u) = u^8$ với $u \in [-1, 1]$. Ta có $f'(u) = 8u^7$; $f''(u) = 56u^6 \geq 0$

Với $f''(u) \geq 0 \quad \forall u \in [-1, 1]$ khi đó $f(u)$ là hàm lồi trên $[-1, 1]$. Không mất tính tổng quát, giả sử $-1 \leq z \leq y \leq x \leq 1$. Xét hai bộ (x, y, z) và $(1, -\frac{1}{2}, -1)$ ta có:

$$x \leq 1; x + y \leq 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; x + y + z = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{bộ } \left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) \succ (x, y, z).$$

Sử dụng bất đẳng thức **Karamata** với hàm lồi $f(u) = u^8$ ta có:

$$S = x^8 + y^8 + z^8 \leq 1^8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^8 + (-1)^8 = 2 + \frac{1}{256} = \frac{513}{256} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{513}{256}$$

Bài 5. Cho $x \geq y \geq z > 0$ và $x \leq 3$; $x + y \leq 5$; $x + y + z = 6$

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}$

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^\alpha$ với $x > 0, \alpha > 1$. Ta có $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

Do $f''(x) > 0 \quad \forall x > 0, \forall \alpha > 1$ khi đó $f(x)$ là hàm lồi $\forall x > 0$. Xét 2 bộ số (x, y, z) và $(3, 2, 1)$ ta có: $x \leq 3$; $x + y \leq 3 + 2$; $x + y + z = 3 + 2 + 1 \Rightarrow \text{bộ } (3, 2, 1) \succ (x, y, z)$.

Sử dụng bất đẳng thức **Karamata** cho hàm lồi $f(x) = x^\alpha$ ta có:

$$S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \leq 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}} + 1^{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Max } S = 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}} + 1^{\sqrt{2}}$$

Bài 6. Chứng minh: $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \quad (1) \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \ln[(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)] \leq \ln \left[\frac{(a_1^2+a_2)(a_2^2+a_3)\dots(a_n^2+a_1)}{a_1 a_2 \dots a_n} \right]$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+a_1) + \ln(1+a_2) + \dots + \ln(1+a_n) + \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n \leq$$

$$\leq \ln(a_1^2+a_2) + \ln(a_2^2+a_3) + \dots + \ln(a_n^2+a_1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(a_1^2+a_1) + \ln(a_2^2+a_2) + \dots + \ln(a_n^2+a_n) \leq \ln(a_1^2+a_2) + \ln(a_2^2+a_3) + \dots + \ln(a_n^2+a_1).$$

Cho $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lõm $\forall x > 0$. Xét 2 bộ số:

$$(a) = (a_1^2+a_1, a_2^2+a_2, \dots, a_n^2+a_n) \text{ và } (b) = (a_1^2+a_2, a_2^2+a_3, \dots, a_n^2+a_1)$$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$$(a_m) = (3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}, 3a_{m_2} - 2a_{m_2+1}, \dots, 3a_{m_n} - 2a_{m_n+1})$$

$$(a_k) = (a_{k_1}^2 + a_{k_1}, a_{k_2}^2 + a_{k_2}, \dots, a_{k_n}^2 + a_{k_n}) \text{ và } (b_m) = (a_{m_1}^2 + a_{m_1+1}, a_{m_2}^2 + a_{m_2+1}, \dots, a_{m_n}^2 + a_{m_n+1})$$

Ta có: $a_{k_1}^2 + a_{k_1} \geq a_{m_1}^2 + a_{k_1} \geq a_{m_1}^2 + a_{m_1+1} + 1$

$$(a_{k_1}^2 + a_{k_1}) + (a_{k_2}^2 + a_{k_2}) \geq (a_{m_1}^2 + a_{k_1}) + (a_{m_2}^2 + a_{k_2}) \geq (a_{m_1}^2 + a_{m_1+1}) + (a_{m_2}^2 + a_{m_2+1}) + 1$$

.....

$$(a_{k_1}^2 + a_{k_1}) + \dots + (a_{k_{n-1}}^2 + a_{k_{n-1}}) \geq (a_{m_1}^2 + a_{k_1}) + \dots + (a_{m_{n-1}}^2 + a_{k_{n-1}}) \geq (a_{m_1}^2 + a_{m_1+1}) + \dots + (a_{m_{n-1}}^2 + a_{m_{n-1}+1})$$

$$(a_{k_1}^2 + a_{k_1}) + \dots + (a_{k_n}^2 + a_{k_n}) = (a_{m_1}^2 + a_{m_1+1}) + \dots + (a_{m_n}^2 + a_{m_n+1}) + 1$$

Vậy điều kiện của bất đẳng thức **Karamata** được thỏa mãn và ta có

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right), \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $3a_j - 2a_{j+1} \neq 0, \forall j = \overline{1, n} \quad (a_1 = a_{n+1})$

Chứng minh rằng: $|3a_1 - 2a_2|^{|3a_1 - 2a_2|} \dots |3a_n - 2a_1|^{|3a_n - 2a_1|} \geq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} \quad (1)$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \ln(|3a_1 - 2a_2|^{|3a_1 - 2a_2|} \dots |3a_n - 2a_1|^{|3a_n - 2a_1|}) \geq \ln(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n})$$

$$\Leftrightarrow |3a_1 - 2a_2| \ln|3a_1 - 2a_2| + \dots + |3a_n - 2a_1| \ln|3a_n - 2a_1| \geq a_1 \ln a_1 + \dots + a_n \ln a_n$$

Xét hai bộ số: $(a) = (3a_1 - 2a_2, \dots, 3a_n - 2a_1)$ và $(b) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$$(a_m) = (3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}; 3a_{m_2} - 2a_{m_2+1}; \dots; 3a_{m_n} - 2a_{m_n+1})$$

Với $3a_{m_1} - 2a_{m_1+1} \geq 3a_{m_2} - 2a_{m_2+1} \geq \dots \geq 3a_{m_n} - 2a_{m_n+1} > 0$ với $a_{n+1} = a_1$

$$(b_k) = (a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}) \quad \text{với } a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_n}$$

Ta có $3a_{m_1} - 2a_{m_1+1} \geq 3a_{k_1} - 2a_{k_1+1} \geq 3a_{k_1} - 2a_{k_1} \geq a_{k_1}$

$$(3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}) + (3a_{m_2} - 2a_{m_2+1}) \geq (3a_{k_1} - 2a_{k_1+1}) + (3a_{k_2} - 2a_{k_2+1}) \geq a_{k_1} + a_{k_2}$$

$$(3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}) + \dots + (3a_{m_{n-1}} - 2a_{m_{n-1}+1}) \geq (3a_{k_1} - 2a_{k_1+1}) + \dots + (3a_{k_{n-1}} - 2a_{k_{n-1}+1}) \geq a_{k_1} + \dots + a_{k_{n-1}}$$

$$(3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}) + \dots + (3a_{m_n} - 2a_{m_n+1}) = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n}$$

Xét hàm số $f(x) = x \ln x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 1 + \ln x$; $f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0$.

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi $\forall x > 0$. Theo bất đẳng thức **Karamata** ta có

$$(3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}) \ln(3a_{m_1} - 2a_{m_1+1}) + \dots + (3a_{m_n} - 2a_{m_n+1}) \ln(3a_{m_n} - 2a_{m_n+1}) \geq a_1 \ln a_1 + \dots + a_n \ln a_n$$

$$\Leftrightarrow |3a_1 - 2a_2| \ln |3a_1 - 2a_2| + \dots + |3a_n - 2a_1| \ln |3a_n - 2a_1| \geq a_1 \ln a_1 + \dots + a_n \ln a_n$$

$$\Leftrightarrow |3a_1 - 2a_2|^{3a_1 - 2a_2} \dots |3a_n - 2a_1|^{3a_n - 2a_1} \geq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}$$

Bài 8. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Chứng minh rằng:

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n$$

Chứng minh

Gọi $f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\cos x < 0 \forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow f$ lõm trên $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

Xét hai bộ số: $(a) = (2x_1 - x_2, \dots, 2x_n - x_1)$ và $(b) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$$(a_m) = (2x_{m_1} - x_{m_1+1}; 2x_{m_2} - x_{m_2+1}; \dots; 2x_{m_n} - x_{m_n+1})$$

với $2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq \dots \geq 2x_{m_n} - x_{m_n+1}$ và $x_{n+1} = x_1$

$$(b_k) = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \quad \text{với } x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \dots \geq x_{k_n}$$

Ta có $2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq 2x_{k_1} - x_{k_1} \geq x_{k_1}$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (2x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq x_{k_1} + x_{k_2}$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \dots + (2x_{m_{n-1}} - x_{m_{n-1}+1}) \geq (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + \dots + (2x_{k_{n-1}} - x_{k_{n-1}+1}) \geq x_{k_1} + \dots + x_{k_{n-1}}$$

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \dots + (2x_{m_n} - x_{m_n+1}) = x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_n}$$

Vậy điều kiện của bất đẳng thức **Karamata** được thỏa mãn và ta có

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ (1) $\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Chứng minh

Đặt $x_1 = \ln a_1$; $x_2 = \ln a_2$; ...; $x_n = \ln a_n$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow e^{3x_1 - x_2} + e^{3x_2 - x_3} + \dots + e^{3x_n - x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + \dots + e^{2x_n}$$

Đặt $f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Xét hai bộ số: $(a) = (3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, \dots, 3x_n - x_1)$ và $(b) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$$(a_m) = (3x_{m_1} - x_{m_1+1}, 3x_{m_2} - x_{m_2+1}, \dots, 3x_{m_n} - x_{m_n+1}) \text{ với } 3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq \dots \geq 3x_{m_n} - x_{m_n+1}$$

$$\text{trong đó } x_{n+1} = x_1; (b_k) = (2x_{k_1}, 2x_{k_2}, \dots, 2x_{k_n}) \text{ với } 2x_{k_1} \geq 2x_{k_2} \geq \dots \geq 2x_{k_n}.$$

Khi đó ta có

$$3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq 2x_{k_1}$$

$$(3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (3x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (3x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (3x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq 2x_{k_1} + 2x_{k_2}$$

.....

$$(3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \dots + (3x_{m_{n-1}} - x_{m_{n-1}+1}) \geq (3x_{k_1} - x_{k_1+1}) + \dots + (3x_{k_{n-1}} - x_{k_{n-1}+1}) \geq 2x_{k_1} + \dots + 2x_{k_{n-1}}$$

$$(3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + \dots + (3x_{m_n} - x_{m_n+1}) = 2x_{k_1} + 2x_{k_2} + \dots + 2x_{k_n}$$

Vậy điều kiện của bất đẳng thức **Karamata** được thỏa mãn và ta có (dpcm)

Bài 10. Tìm hằng số C nhỏ nhất để

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \text{ đúng } \forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0; n \geq 2.$$

Giải

Nếu $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ thì bất đẳng thức đúng với mọi $C \geq 0$. Nếu có ít nhất một số $x_i > 0$ thì $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$, khi đó chuẩn hóa bất đẳng thức thuần nhất trên với $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

với $f(x) = x^3 - x^4$. Vì vậy, ta cần xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq C \text{ với } x_1 + \dots + x_n = 1, \text{ trong đó } f(x) = x^3 - x^4 \text{ là hàm số lồi trên } [0, 1/2].$$

Ta sẽ chứng minh $\min C = \frac{1}{8}$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Ta sẽ xét 2 trường hợp sau.

- $x_1 \leq \frac{1}{2}$. Do $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \succ (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nên

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) + \dots + f(0) = \frac{1}{8}$$

- $x_1 \geq \frac{1}{2}$. Do $(1-x_1, 0, \dots, 0) \succ (x_2, \dots, x_n)$ nên

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) &= f(x_1) + \sum_{i=2}^n f(x_i) \leq f(x_1) + f(1-x_1) + (n-2)f(0) = f(x_1) + f(1-x_1) = \\ &= x_1(1-x_1)[x_1^2 + (1-x_1)^2] = \frac{1}{2}(2x_1 - 2x_1^2)[2x_1^2 - 2x_1 + 1] \leq \frac{1}{2} \left[\frac{2x_1 - 2x_1^2 + 2x_1^2 - 2x_1 + 1}{2} \right]^2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

II. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $x \geq y \geq z > 0$ và $x \geq 5$; $x + y \geq 8$; $x + y + z = 10$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (\sqrt{3} - 1)^x + (\sqrt{3} - 1)^y + (\sqrt{3} - 1)^z$

Bài 2. Cho $x \geq y \geq z \geq t > 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$x \leq 7; x + y \leq 13; x + y + z \leq 18; x + y + z + t = 22. \text{ Tìm Max của } T = x^x y^y z^z t^t$$

Bài 3. Cho tam giác ABC với $0 < C < B < A \leq 90^\circ$; $A + B \leq 150^\circ$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = (\sin A)^{\sin A} (\sin B)^{\sin B} (\sin C)^{\sin C}$

Bài 4. Cho tam giác ABC với $0 < C < B < A \leq 90^\circ$; $A + B \leq 150^\circ$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của } T = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} - \left(\tan \frac{A}{4} + \tan \frac{B}{4} + \tan \frac{C}{4} \right)$$

Bài 5. Cho tam giác ABC với $0 < C < B < A \leq 90^\circ$; $A + B \leq 150^\circ$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của } T = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$$

Bài 6. Cho tam giác ABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$\cos^\alpha \frac{A}{2} + \cos^\alpha \frac{B}{2} + \cos^\alpha \frac{C}{2} \geq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^\alpha, \forall \alpha < 0$$

$$2 < \cos^\alpha \frac{A}{2} + \cos^\alpha \frac{B}{2} + \cos^\alpha \frac{C}{2} \leq 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^\alpha, \forall 0 < \alpha \leq 1$$

Bài 7. Cho tứ giác ABCD với $A \geq 150^\circ > B > C > D$; $A + B \geq 240^\circ$; $A + B + C \geq 300^\circ$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } T = \left(\tan \frac{A}{2} \right)^{2\sqrt{3}} + \left(\tan \frac{B}{2} \right)^{2\sqrt{3}} + \left(\tan \frac{C}{2} \right)^{2\sqrt{3}} + \left(\tan \frac{D}{2} \right)^{2\sqrt{3}}$$

Bài 8. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh: $e^{a^4+b^4+c^4} + e^{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq e^{a^3b+b^3a+c^3a} + e^{ab^3+bc^3+ca^3}$

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} + \frac{1}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}} + \frac{1}{\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}}$$

§14. BẤT ĐẲNG THỨC VỚI CÁC HÀM SỐ LÒI BÊN PHẢI VÀ LỖM BÊN TRÁI

§14.1. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM SỐ LÒI BÊN PHẢI VÀ LỖM BÊN TRÁI

Cho f là hàm số xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là lồi bên phải trên $\mathbb{I}$ nếu nếu tồn tại $s \in \mathbb{I}$ sao cho f là hàm lồi với $x \geq s$. Tương tự, f được gọi là lõm bên trái trên $\mathbb{I}$ nếu tồn tại $s \in \mathbb{I}$ sao cho f là hàm lõm với $x \leq s$. Hai định lý sau đây và những hệ quả của chúng rất có ích khi chứng minh một lớp rộng các bất đẳng thức kiểu Jensen cho các hàm lồi bên phải và lõm bên trái.

I. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LÒI BÊN PHẢI

Định lý hàm số lồi bên phải (Định lý RCF)

Cho $f(u)$ là một hàm số xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ và lồi với $u \geq s, s \in \mathbb{I}$.

Nếu bất đẳng thức $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$ (1) đúng

với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = s$ và $x_2 = x_3 = \dots = x_n \geq s$

thì (1) cũng đúng với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq s$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Nếu $x_1 \geq s$ thì bất đẳng thức cần chứng minh chỉ là bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi f . Bây giờ giả sử $x_1 < s$. Từ

$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq ns$, suy ra tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ thỏa mãn $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq s \leq x_{k+1} \leq \dots \leq x_n$

Đặt $S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, $z = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$, $t = \frac{x_{k+1} + \dots + x_n}{n-k}$,

ta có $z \in \mathbb{I}, t \in \mathbb{I}, kz + (n-k)t = nS$ và $z < s \leq S < t$

Sử dụng bất đẳng thức **Jensen**, ta có $f(x_{k+1}) + \dots + f(x_n) \geq (n-k)f(t)$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $f(x_1) + \dots + f(x_k) + (n-k)f(t) \geq nf(S)$

Ký hiệu $y_i = \frac{ns - x_i}{n-1}$ với $i = 1, 2, \dots, k$. Ta sẽ chứng minh rằng $s < y_i < t$.

Về trái bất đẳng thức này quy về $x_i < s$, điều này đúng với $i = 1, 2, \dots, k$. Hơn nữa ta có

$$y_i \leq y_1 = \frac{ns - x_1}{n-1} \leq \frac{ns - x_1}{n-1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n-1} \leq \frac{x_{k+1} + \dots + x_n}{n-k} = t$$

Vì vậy, theo giả thiết, bất đẳng thức sau đúng $f(x_i) + (n-1)f(y_i) \geq nf(s)$.

Cộng tất cả các bất đẳng thức với $i=1,2,\dots,k$, ta thu được

$$f(x_1) + \dots + f(x_k) \geq knf(s) - (n-1)[f(y_1) + \dots + f(y_k)]$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng $knf(s) + (n-k)f(t) \geq nf(s) + (n-1)[f(y_1) + \dots + f(y_k)]$,

$$\text{Đặt } s_1 = \frac{(n+k-1)s - kz}{n-1}. \text{ Ta có } s < s_1 \leq \frac{ns + (k-1)s - kz}{n-1} = \frac{(k-1)s + (n-k)t}{n-1} \leq t$$

Để ý rằng vector $\vec{A} = (s_1, s, \dots, s)$ trội hơn vector $\vec{B} = (y_k, y_{k-1}, \dots, y_1)$, với chú ý

$$(k-1)s + s_1 = y_1 + \dots + y_k \text{ và } s \leq y_k \leq y_{k-1} \leq \dots \leq y_1.$$

Nên sử dụng bất đẳng thức **Karamata** về bộ trội ta có

$$f(y_1) + \dots + f(y_k) \leq (k-1)f(s) + f(s_1)$$

Tiếp theo, chỉ cần chứng minh rằng $(n+k-1)f(s) + (n-k)f(t) \geq nf(s) + (n-1)f(s_1)$.

Bất đẳng thức này có thể nhận được bằng cách cộng các bất đẳng thức **Jensen** sau đây sau khi nhân chúng với n và $n-1$ tương ứng:

$$\frac{t-s}{t-s} f(s) + \frac{s-s}{t-s} f(t) \geq f(s), \quad \frac{t-s_1}{t-s} f(s) + \frac{s_1-s}{t-s} f(t) \geq f(s_1)$$

Chú ý 1. Giả thiết của định lý tương đương với điều kiện $f(x) + (n-1)f(y) \geq nf(s)$

với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$ và $x + (n-1)y = ns$

Chú ý 2. Đặt $g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t-s}$. Với $x < s < y$ và $x + (n-1)y = ns$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) &= f(x) - f(s) + (n-1)[f(y) - f(s)] \\ &= (x-s)g(x) + (n-1)(y-s)g(y) = (s-x)[g(y) - g(x)] \end{aligned}$$

Vì vậy, giả thiết của định lý tương đương với điều kiện $g(x) \leq g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$ và $x + (n-1)y = ns$.

Chú ý 3. Giả sử rằng f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$. Thế thì Định lý RCF đúng với các giả thiết ban đầu kèm theo điều kiện hạn chế $f'(x) \leq f'(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$

và $x + (n-1)y = ns$. Để chứng minh bổ đề này, ta ký hiệu

$$F(x) = f(x) + (n-1)f\left(\frac{ns-x}{n-1}\right) - nf(s)$$

Từ $F'(x) = f'(x) - f'(y) \leq 0$, hàm $F(x)$ tăng với $x \leq s$.

Tiếp theo, $F(x) \geq F(s) = 0$ với $x \leq s$, và vì thế $f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) \geq 0$

Hệ quả định lý hàm lồi bên phải (Hệ quả RCF).

Cho f là hàm số xác định trên $(0, +\infty)$, $r > 0$. Nếu hàm $f_1(u) = f(e^u)$ lồi với $u \geq \ln r$, và

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right) \quad (2)$$

với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = r$ và $a_2 = a_3 = \dots = a_n \geq r$

thì (2) đúng với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq r$

Chứng minh:

Áp dụng Định lý RCF cho hàm $f(e^u)$, ngoài ra, thay a bởi $\ln r$, và thay x_i bởi $\ln a_i$ với mọi chỉ số i

Chú ý 4. Giả thiết trong hệ quả tương đương với điều kiện $f(x) + (n-1)f(y) \geq nf(r)$ với mọi $x, y > 0$ thỏa mãn $x \leq r \leq y$ và $xy^{n-1} = r^n$

Chú ý 5. Giả sử rằng f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$. Thế thì hệ quả RCF đúng với các giả thiết ban đầu và điều kiện hạn chế $xf'(x) \leq yf'(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$ và $xy^{n-1} = r^n$

Chứng minh:

$$\text{Ta ký hiệu } F(x) = f(x) + (n-1)f\left(r \cdot n^{-1} \sqrt[n]{\frac{r}{x}}\right) - nf(r)$$

$$\text{và nhận xét } F'(x) = f'(x) - \frac{r}{n} \cdot n^{-1} \sqrt[n]{\frac{r}{x}} \cdot f'(y) = \frac{xf'(x) - yf'(y)}{x} \leq 0.$$

Suy ra $f(x)$ tăng với $x \leq r$.

Tiếp theo, $F(x) \geq F(r) = 0$ với $x \leq r$, và vì thế $f(x) + (n-1)f(y) - nf(r) \geq 0$

II. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LỖM BÊN TRÁI

Định lý hàm số lõm bên trái (Định lý LCF)

Cho $f(u)$ là hàm xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ và lõm với $u \leq s, s \in \mathbb{I}$.

Nếu bất đẳng thức $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$ (3) đúng

với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = s$ và $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq s$

Thì (3) cũng đúng với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq s$

Chứng minh: Chứng minh định lý này tương tự chứng minh Định lý RCF

Chú ý 6. Giả thiết định lý tương đương với điều kiện $(n-1)f(x) + f(y) \leq nf(s)$

với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$ và $(n-1)x + y = ns$

Chú ý 7. Đặt $g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$, giả thiết định lý tương đương với điều kiện:

$g(x) \geq g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$ và $(n-1)x + y = ns$

Chú ý 8. Nếu f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$, thế thì Định lý LCF đúng với các giả thiết ban đầu và điều kiện hạn chế $f'(x) \geq f'(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \leq s \leq y$ và $(n-1)x + y = ns$

Hệ quả định lý hàm lõm bên trái (Hệ quả LCF).

Cho f là hàm liên tục trên $(0, +\infty)$, $r > 0$. Nếu hàm $f_1(u) = f(e^u)$ lõm với $u \leq \ln r$, và bất

đẳng thức $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\right)$ (4) đúng $\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa

mãn điều kiện $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = r$ và $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} \leq r$ thì bất đẳng thức (4) cũng

đúng với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq r$

Chú ý 9. Giả thiết của hệ quả tương đương với điều kiện $(n-1)f(x) + f(y) \leq nf(r)$

với mọi $x, y > 0$ thỏa mãn $x \leq r \leq y$ và $x^{n-1}y = r^n$.

Chú ý 10. Nếu f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$ thì Hệ quả LCF đúng với các giả thiết ban đầu và điều kiện hạn chế $xf'(x) \geq yf'(y)$ với mọi $x, y > 0$ thỏa mãn $x \leq r \leq y$ và $x^{n-1}y = r^n$.

III. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LỒM BÊN TRÁI VÀ LỒI BÊN PHẢI

Định lý hàm lồi bên trái – lồi bên phải (Định lý LCRCF).

Cho $a < c$ là các số thực, f là hàm liên tục trên khoảng $\mathbb{I} = [a, +\infty)$, lồi trên $[a, c]$ và lồi trên $[c, +\infty)$. Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S = \text{const}$, thế thì biểu thức $E = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ đạt giá trị lớn nhất với $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Nếu $x_n \leq c$, áp dụng bất đẳng thức **Jensen** cho hàm lồi ta có $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$.

Do đó biểu thức E đạt giá trị lớn nhất với $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Nếu $x_n > c$, tồn tại $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq c < x_{k+1} \leq \dots \leq x_n$.

Áp dụng bất đẳng thức **Karamata** cho bộ trội cho hàm lồi và **Jensen** cho hàm lồi, ta có

$$f(x_{k+1}) + \dots + f(x_n) \leq (n-k+1)f(c) + f(x_{k+1} + \dots + x_n - (n-k-1)c)$$

và $(n-k-1)f(c) + f(x_1) + \dots + f(x_k) \leq (n-1)f\left(\frac{(n-k-1)c + x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n-1}\right)$, tương ứng.

Cộng các bất đẳng thức lại dẫn tới $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq (n-1)f(x) + f(y)$

trong đó $x = \frac{(n-k-1)c + x_1 + \dots + x_k}{n-1}$, $y = x_{k+1} + \dots + x_n - (n-k-1)c$

Để dàng kiểm tra rằng $(n-1)x + y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ và $x \leq y$. Theo bất đẳng thức cuối cùng, biểu thức E đạt giá trị lớn nhất với $x_1 = \dots = x_{n-1} = x$ và $x_n = y$

Chú ý II. Định lý 1 cũng đúng trong trường hợp $\mathbb{I} = (a, +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Thêm nữa, Định lý 1 vẫn đúng nếu $a < c < b$, $S < (n-1)c + b$ và f là hàm liên tục trên $\mathbb{I} = [a, b)$, lồi trên $[a, c]$ và lồi trên $[c, b)$. Theo cách tương tự, ta có thể chứng minh mệnh đề sau đây

Định lý điểm uốn đơn (Định lý SIP).

Cho f là hàm khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ với điểm uốn đơn, cho S là số thực cố định và cho

$g(x) = f(x) + (n-1)f\left(\frac{S-x}{n-1}\right)$. Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$ thì $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$

§14. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC RCF, LCF, LCRCF**I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA**

Bài 1. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

Chứng minh rằng $(n-1)(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + n^2 \geq (2n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

Chứng minh

Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$

trong đó $f(u) = (n-1)u^3 - (2n-1)u^2, u \geq 0$. Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = 6(n-1)u - 2(2n-1)$ chỉ ra rằng f lồi với $u > \frac{2n-1}{3(n-1)}$, và vì vậy với $u \geq s$, trong đó

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1 \geq \frac{2n-1}{3(n-1)}$$

Theo Định lý RCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x_1 \leq 1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$ là đủ.

Để áp dụng Chú ý 2, ta sẽ chứng minh rằng $g(x) \leq g(y)$ với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và

$$x + (n-1)y = n, \text{ trong đó } g(t) = \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = (n-1)(t^2 + t + 1) - (2n-1)(t+1)$$

Thật vậy, ta có $g(x) - g(y) = (x-y)[(n-1)(x+y+1) - 2n+1] = (n-2)x(x-y) \leq 0$

Với $n=2$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi hoặc

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1, \text{ hoặc một trong các số } x_i \text{ bằng } 0 \text{ và các số còn lại bằng } \frac{n}{n-1}$$

Bài 2. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

Chứng minh rằng $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 + n^2 \leq (n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \text{ trong đó } f(u) = u^3 - (n+1)u^2, u \geq 0.$$

Hàm số này lõm với $0 \leq u \leq \frac{n-1}{3}$, và vì vậy với $0 \leq u \leq s$, trong đó

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1 \leq \frac{n+1}{3}$$

Theo Định lý LCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq 1 \leq x_n$

Để áp dụng Chú ý 7, ta chứng minh rằng $g(x) \geq g(y)$, với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $(n-1)x + y = n$. Ta

$$\text{có } g(t) = \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = t^2 - nt - n \text{ và } g(x) - g(y) = (x+y)(x+y-n) = (n-2)x(y-x) \geq 0$$

Với $n=2$, bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức. Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi hoặc $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, hoặc một trong các số x_i bằng n và các số còn lại bằng 0

Bài 3. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \geq \frac{n}{1+r^2}$$

Chứng minh

Áp dụng Định lý RCF cho hàm $f(u) = \frac{1}{1+u^2}, u \geq 0$. Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = \frac{2(3u^2-1)}{(1+u^2)^3}$,

từ đó f lồi trên $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$. Mà $s = \sqrt{\frac{n-1}{n}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra hàm f là lồi trên $[s, +\infty)$.

Theo Định lý RCF và Chú ý 2, ta sẽ chứng minh rằng $g(x) \leq g(y)$ với $0 \leq x \leq s \leq y$ và

$$x + (n-1)y = ns, \text{ trong đó } g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{-t - s}{(1+s^2)(1+t^2)}$$

Từ $g(x) - g(y) = \frac{(x-y)[s(x+y) + xy - 1]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)}$, ta chứng minh $s(x+y) + xy - 1 \geq 0$.

$$\text{Thật vậy, } s(x+y) + xy - 1 = \frac{ns^2 - n + 1 + x[2(n-1)s - x]}{n+1} \geq \frac{ns^2 - n + 1}{n+1} = 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = r$. Trong trường hợp $r = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$, đẳng thức lại

xảy ra khi một trong các số x_i bằng n , và các số còn lại bằng $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$

Bài 4. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq \sqrt{\frac{n-1}{n^2 - n + 1}}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \leq \frac{n}{1+r^2}$$

Chứng minh

Sử dụng Định lý LCF cho hàm số $f(u) = \frac{1}{1+u^2}, u \geq 0$. Do f lõm trên $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ và

$$s = \sqrt{\frac{n-1}{n^2 - n + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ chứng tỏ } f \text{ lõm trên } [0, s].$$

Để áp dụng Định lý LCF và Chú ý 7, ta chứng minh rằng $g(x) \geq g(y)$ với $0 \leq x \leq s \leq y$

$$\text{và } (n-1)x + y = ns, \text{ trong đó } g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{-t - s}{(1+s^2)(1+t^2)}$$

$$\text{Từ } g(x) - g(y) = \frac{(x-y)[s(x+y) + xy - 1]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(x-y)[ns^2 - 1 + 2sx - (n-1)x^2]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)}$$

Ta chứng minh rằng $ns^2 - 1 + 2sx - (n-1)x^2 \leq 0$.

Thật vậy,

$$ns^2 - 1 + 2sx - (n-1)x^2 = \frac{(n^2 - n + 1)s^2 - n + 1 - [(n-1)x - s]^2}{n-1} = \frac{-[(n-1)x - s]^2}{n-1} \leq 0$$

Đẳng thức xảy ra với $x_1 = x_2 = \dots = x_n = r$. Trong trường hợp $r = \sqrt{\frac{n-1}{n^2-n+1}}$, đẳng thức

lại xảy ra khi một trong các số x_i bằng $(n-1)r$, và các số còn lại bằng $\frac{r}{n-1}$

Bài 5. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ thì

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq (n-2)^2 + 4n(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Trong đó $f(u) = 4n(n-1)u^2 - \frac{1}{u}, u > 0$.

Nhận thấy rằng hàm $f(u)$ lõm với $0 < s \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4n(n-1)}}$.

Do $s = \frac{1}{n} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4n(n-1)}}$, hàm $f(u)$ lõm trên $(0, s]$

Để áp dụng Định lý LCF và Chú ý 7, chỉ cần chứng minh rằng $g(x) \geq g(y)$ với

$0 < x \leq \frac{1}{n} \leq y$ và $(n-1)x + y = 1$ là đủ. Thật vậy, ta có

$$g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = 4n(n-1)(t+s) + \frac{1}{st} = 4(n-1)(nt+1) + \frac{n}{t}$$

$$\text{và } g(x) - g(y) = n(x-y)\left(4n-4-\frac{1}{xy}\right) = \frac{n(y-x)(2nx-2x-1)^2}{xy} \geq 0$$

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$, hoặc khi

một trong các số x_i bằng $\frac{1}{2}$, và các số còn lại bằng $\frac{1}{2n-2}$

Bài 6. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq \frac{n-1}{(n+\sqrt{n-1})^2}. \quad \text{CMR: } \frac{1}{1-\sqrt{x_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{1-\sqrt{x_n}} \leq \frac{n}{1-\sqrt{r}}$$

Chứng minh

Do $\sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \leq \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n + \sqrt{n-1}} < 1$, sử dụng Định lý LCF cho hàm $f(u) = \frac{1}{1-\sqrt{u}}, 0 \leq u < 1$.

Do $f''(u) = \frac{3\sqrt{u}-1}{4u\sqrt{u}(1-\sqrt{u})^3}$, chứng tỏ f lõm trên $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, và vì vậy trên $[0, s]$, trong đó

$s = \frac{n-1}{(n+\sqrt{n-1})^2}$. Theo Định lý LCF, chỉ cần xét trường hợp $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq s \leq x_n$.

Để áp dụng Chú ý 7, ta chứng minh rằng $g(x) \geq g(y)$, với $0 \leq x \leq s \leq y$ và $(n-1)x + y = ns$.

$$\text{Từ } g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{1}{(1-\sqrt{s})(1-\sqrt{t})(\sqrt{s} + \sqrt{t})}$$

$$\text{và } g(x) - g(y) = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(1-\sqrt{s} - \sqrt{x} - \sqrt{y})}{(1-\sqrt{s})(1-\sqrt{x})(\sqrt{s} + \sqrt{x})(1-\sqrt{y})(\sqrt{s} + \sqrt{y})}$$

Ta sẽ chứng minh $1 - \sqrt{s} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Theo bất đẳng thức **Cauchy - Schwarz**, ta có

$$\left(\frac{1}{n-1} + 1\right)[(n-1)x + y] \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \text{ hay } \sqrt{\frac{s}{n-1}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\text{Vì thế } 1 - \sqrt{s} - \sqrt{x} - \sqrt{y} \geq 1 - \left(1 + \frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)\sqrt{s} = 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = r$. Trong trường hợp $r = \frac{n-1}{(n+\sqrt{n-1})^2}$, đẳng thức

còn xảy ra khi một trong các số x_i bằng $(n-1)r$, và các số còn lại bằng $\frac{r}{n-1}$.

Bài 7. Giả sử $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \frac{n-1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{1-\sqrt{x_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{1-\sqrt{x_n}} \geq \frac{n}{1-\sqrt{r}}$$

Chứng minh

Ta sẽ sử dụng Định lý RCF cho hàm $f(u) = \frac{1}{1-\sqrt{u}}, 0 \leq u < 1$.

$$\text{Do } f''(u) = \frac{3\sqrt{u}-1}{4u\sqrt{u}(1-\sqrt{u})^3},$$

chứng tỏ f lõm trên $\left[\frac{1}{9}, 1\right)$, và vì vậy lõm trên $[s, 1)$, trong đó $s = \frac{n-1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$.

Theo Định lý LCF, chỉ cần xét trường hợp $x_1 \leq s \leq x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$.

Để áp dụng Chú ý 2, ta chứng minh rằng $g(x) \leq g(y)$, với $0 \leq x \leq s \leq y < 1$ và

$$x + (n-1)y = ns. \text{ Từ } g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{1}{(1-\sqrt{s})(1-\sqrt{t})(\sqrt{s} + \sqrt{t})} \text{ và}$$

$$g(x) - g(y) = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(1 - \sqrt{s} - \sqrt{x} - \sqrt{y})}{(1 - \sqrt{s})(1 - \sqrt{x})(\sqrt{s} + \sqrt{x})(1 - \sqrt{y})(\sqrt{s} + \sqrt{y})}, \text{ ta phải chứng minh}$$

$$1 - \sqrt{s} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

$$\text{Thật vậy, ta có } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{s} - 1 \geq \sqrt{\frac{x}{n-1}} + y + \sqrt{s} - 1 = \sqrt{\frac{ns}{n-1}} + \sqrt{s} - 1 = 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = r$.

Trong trường hợp $r = \frac{n-1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$, đẳng thức còn xảy ra khi một trong các số

x_i bằng 0 và các số còn lại bằng $\frac{nr}{n-1}$

Bài 8. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq 1 + \frac{2\sqrt{n-1}}{n}.$$

$$\text{Chứng minh rằng } \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(r + \frac{1}{r}\right)^n$$

Chứng minh

Sử dụng Định lý LCF cho hàm $f(u) = -\ln\left(u + \frac{1}{u}\right)$, $u > 0$. Đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của f

$$\text{lần lượt là } f'(u) = \frac{1-u^2}{u(u^2+1)} \text{ và } f''(u) = \frac{u^4 - 4u^2 - 1}{u^2(u^2+1)^2}.$$

Chứng tỏ f lõm với $0 < u \leq \sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Do $s = 1 + \frac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq 2 < \sqrt{2+\sqrt{5}}$, $f(u)$ lõm với $0 < u \leq s$. Theo Định lý LCF và Chú ý 8,

chỉ cần chứng minh rằng $f'(x) \geq f'(y)$ với $0 < x \leq s \leq y$ và $(n-1)x + y = ns$

$$\text{Từ } f'(x) - f'(y) = (y-x) \frac{1+(x+y)^2 - x^2y^2}{xy(1+x^2)(1+y^2)} \geq (y-x) \frac{(x+y)^2 - x^2y^2}{xy(1+x^2)(1+y^2)},$$

như thế chỉ cần chứng minh $x + y \geq xy$ là đủ.

$$\text{Thật vậy, ta có } x + y - xy = x + (1-x)[n + 2\sqrt{n-1} - (n-1)x] = (\sqrt{n-1}x - 1 - \sqrt{n-1})^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = r$

Ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

trong đó $f(x) = \frac{1}{3x^2 - x + 3}$. Đạo hàm cấp 2 $f''(x) = \frac{18x^2 - 6x - 17}{(3x^2 - x + 3)^3}$ chứng tỏ f lõm với

$$0 \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{35}}{6}, \text{ và vì vậy lõm với } 0 \leq x \leq 1 = \frac{a+b+c}{3}$$

Theo Định lý LCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $b=c \leq 1, a=3-2b$.

Thật vậy, $\frac{1}{3(3-2b)^2 + 2b} + \frac{2}{3b^2 - b + 3} \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow (b-1)^2(63b^2 + 27b + 24) \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Chứng minh $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \sqrt{x_2}\right) \dots \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n}\right) \geq \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ (5)

Chứng minh

Ta sẽ sử dụng Định lý LCF cho hàm $f(u) = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\right), 0 < u < 1$.

Ta có $f'(u) = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{2u}, f''(u) = \frac{u^2 + 2u - 1}{2u^2(1-u)^2}$. Do hàm f lõm trên khoảng $(0, \sqrt{2}-1)$ và

$s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} < \sqrt{2}-1$ (với $n \geq 3$) nên f lõm trên đoạn $[0, s]$. Theo Định lý

LCF, chỉ cần chứng minh $(n-1)f(x) + f(y) \leq nf\left(\frac{1}{n}\right)$ với $0 < x \leq \frac{1}{n} \leq y$ và

$(n-1)x + y = 1$ là đủ.

Viết bất đẳng thức này như là $n^{\frac{n}{2}}(1-x)^{n-1} \geq (n-1)^{n-1} x^{\frac{n-3}{2}} y^{\frac{1}{2}}$

Bình phương hai vế, bất đẳng thức trở thành $(2-2x)^{2n-2} = (2n-2)^{2n-2} \frac{1}{n^n} x^{n-3} y$

Từ $2-2x = n\frac{1}{n} + (n-3)x + y$; bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức AM - GM.

Bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Nhận xét 1. Theo Chú ý 8, bất đẳng thức (5) đúng nếu $f'(x) \geq f'(y)$ với $0 < x \leq \frac{1}{n} \leq y$ và $(n-1)x + y = 1$. Thật vậy, ta có

$$f'(x) - f'(y) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2y} - \frac{1}{1-y} = \frac{(y-x)(1-x-y-xy)}{2xy(1-x)(1-y)}$$

$$= \frac{x(y-x)(n-2-y)}{2xy(1-x)(1-y)} \geq \frac{x(y-x)(1-y)}{2xy(1-x)(1-y)} = \frac{(n-1)x^2(y-x)}{2xy(1-x)(1-y)} \geq 0$$

Nhận xét 2. Bất đẳng thức (5) có thể viết ở dạng

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}} - 1 \right) \prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{x_i}) \geq \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức **AM - GM** và bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\prod_{i=1}^n (1 + \sqrt{x_i}) \leq \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^n \leq \left(1 + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$$

Vì vậy, kết quả sau đây đúng.

Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 3$) là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ thì

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} - 1 \right) \geq (\sqrt{n} - 1)^n$$

Bài 10. Giả sử x, y, z là các số thực không âm, không có 2 số nào cùng bằng 0.

Chúng minh rằng
$$\sqrt{1 + \frac{48x}{y+z}} + \sqrt{1 + \frac{48y}{z+x}} + \sqrt{1 + \frac{48z}{y+x}} \geq 15$$

Chứng minh

Do đây là bất đẳng thức thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $x + y + z = 1$. Với giả thiết này,

bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\frac{1+47x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1+47y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1+47z}{1-z}} \geq 15$. Để chứng minh, ta sẽ sử

dụng Định lý RCF cho hàm $f(u) = \sqrt{\frac{1+47u}{1-u}}$, $0 \leq u < 1$. Ta có $f''(u) = \frac{48(47u-11)}{\sqrt{(1-u)^5(1+47u)^3}}$,

nên suy ra hàm số f lồi trên $\left[\frac{11}{47}, 1 \right)$. Vì thế, f lồi trên $[s, 1)$, trong đó $s = \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$.

Theo Định lý RCF, chỉ cần xét trường hợp $x \leq y = z$. Trong trường hợp này, bài toán

quy về việc chứng minh từ $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ dẫn tới $\sqrt{\frac{1+47z}{1-z}} + 2\sqrt{\frac{49-47x}{1+x}} \geq 15$

Đặt $t = \sqrt{\frac{49-47x}{1+x}}$ ($5 \leq t \leq 7$), bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\frac{1175-23t^2}{t^2-1}} \geq 15-2t$

Bình phương hai vế, ta có $350 + 15t - 61t^2 + 15t^3 - t^4 \geq 0$ hay $(t-5)^2(t+2)(7-t) \geq 0$, điều này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) \sim (1, 1, 1)$ hoặc $(x, y, z) \sim (0, 1, 1)$ và các hoán vị vòng.

Bài 11. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = n \end{cases}$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

Chứng minh

Trường hợp 1: $n = 2$. Ta cần chứng minh $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \geq a_1^2 + a_2^2$ với $a_1, a_2 > 0$ thỏa mãn

$a_1 + a_2 = 2$. Ta có: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \geq a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow 1 \geq a_1^2 a_2^2$ điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = 1$.

Trường hợp 2: $n \geq 3$

Ta có thể viết bất đẳng thức ở dạng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)$

trong đó $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$. Đạo hàm cấp 2 $f''(x) = \frac{6}{x^4} - 2$ chứng tỏ f lồi trên $0 \leq x \leq \sqrt[4]{3}$,

và vì vậy f lồi trên $0 \leq x \leq 1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Để áp dụng Định lý RCF và Chú ý 2, ta chỉ cần chứng minh $g(x) \leq g(y)$ với

$0 \leq x \leq 1 \leq y \leq \frac{n}{n-1}$ và $x + (n-1)y = n$, trong đó $g(t) = \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = -\frac{1 + t + t^2 + t^3}{t^2}$

Ta có:

$$g'(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2} - 1 \geq 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 1 \geq 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{27} > 0, \forall 0 \leq t \leq \frac{n}{n-1}$$

Chứng tỏ g tăng với $0 \leq t \leq \frac{n}{n-1}$. Do đó $g(x) \leq g(y)$.

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Bài 12. Giả sử x, y, z là các số không âm, không có hai số nào cùng bằng 0, và nếu

$r \geq r_0$, trong đó $r_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 \approx 0.585$, chứng minh rằng $\left(\frac{2x}{y+z}\right)^r + \left(\frac{2y}{z+x}\right)^r + \left(\frac{2z}{x+y}\right)^r \geq 3$

Chứng minh

Ta phân biệt ba trường hợp:

Nếu $r = 1$, bất đẳng thức quy về bất đẳng thức quen biết $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

Nếu $r > 1$, bất đẳng thức thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm

$$\text{lỗm } f(u) = u^r \cdot \left(\frac{2x}{y+z}\right)^r + \left(\frac{2y}{z+x}\right)^r + \left(\frac{2z}{x+y}\right)^r \geq 3 \left(\frac{\frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}}{3}\right)^r \geq 3$$

Nếu $r_0 \leq r < 1$. Do bất đẳng thức này là thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $x+y+z=1$ và viết lại nó ở dạng $f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ trong đó $f(u) = \left(\frac{2u}{1-u}\right)^r, 0 \leq u < 1$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = \frac{4r}{(1-u)^4} \left(\frac{2u}{1-u}\right)^{r-2} (2u+r-1)$ chứng tỏ rằng f lồi trên $\left[\frac{1-r}{2}, 1\right)$.

Vì thế, f lồi trên $[s, 1)$ trong đó $s = \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3} > \frac{1-r}{2}$. Theo Định lý RCF, chỉ cần chứng minh trong trường hợp $x \leq y = z$.

Để thuận tiện, ta trở lại bất đẳng thức ban đầu (bỏ đi điều kiện $x+y+z=1$) nhưng bây giờ chỉ xét trường hợp $y=z=1$ (và khi đó $0 \leq x \leq 1$). Bài toán quy về việc chứng minh

rằng giả thiết $0 \leq x \leq 1$ dẫn tới $h(x) \geq 3$, trong đó $h(x) = x^r + 2\left(\frac{2}{x+1}\right)^r$. Ta có

$$h'(x) = rx^{r-1} - r\left(\frac{2}{x+1}\right)^{r+1} \text{ với } 0 < x \leq 1 \text{ có cùng dấu với hàm}$$

$$g(x) = (r-1)\ln x - (r+1)\ln \frac{2}{x+1}.$$

Do $g'(x) = \frac{2rx+r-1}{x(x-1)}$, chứng tỏ $g'(x) = 0$ với $x_0 = \frac{1-r}{2r} < 1$, $g'(x) > 0$ với $x \in (0, x_0)$ và tăng nghiêm ngặt với $x \in [x_0, 1]$.

Do $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ và $g(1) = 0$, tồn tại $x_1 \in (0, x_0)$ thỏa mãn $g(x_1) = 0, g(x) > 0$ với

$x \in (0, x_1)$ và $g(x) < 0$ với $x \in (x_1, 1)$; Vì vậy $h'(x_1) = 0, h'(1) = 0, h'(x) > 0$ với

$x \in (0, x_1)$ và $h'(x) < 0$ với $x \in (x_1, 1)$. Vì thế, hàm $h(x)$ tăng nghiêm ngặt với

$x \in [0, x_1]$ và giảm nghiêm ngặt với $x \in [x_1, 1]$. Do $h(0) = 2^{r+1} \geq 2^{r_0+1} = 3$ và $h(1) = 3$,

chứng tỏ rằng $h(x) \geq 3$ với $0 \leq x \leq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) \sim (1, 1, 1)$.

Ngoài ra khi $r = r_0$ đẳng thức còn xảy ra khi $(x, y, z) \sim (0, 1, 1)$ hoặc các hoán vị.

Bài 13. Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và nếu $0 < r \leq r_0$,

$$\text{trong đó } r_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 1.71,$$

Chứng minh rằng $x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \leq 6$

Chứng minh

Ta xét ba trường hợp:

- Nếu $r=1$ bất đẳng thức quy về bất đẳng thức quen biết $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$
- Nếu $0 < r \leq 1$, bất đẳng thức thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức **Jensen** cho hàm lồi $f(u) = \sqrt[r]{u}$ ta có:

$$(y+z)x^r + (z+x)y^r + (x+y)z^r \leq 2(x+y+z) \left[\frac{(y+z)x + (z+x)y + (x+y)z}{2(x+y+z)} \right]^r$$

$$= 6 \left(\frac{xy + yz + zx}{3} \right)^r \leq 6 \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^{2r} = 6$$

- Nếu $1 < r \leq r_0$. Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \text{ trong đó } f(u) = u^r(u-3), 0 \leq u \leq 3.$$

Do $f''(u) = ru^{r-2}[(r+1)u - 3(r-1)]$, chứng tỏ f lồi trên $\left[\frac{3r-3}{r+1}, 3\right]$.

Do $s = \frac{x+y+z}{3} = 1 > \frac{3r-3}{r+1}$, f cũng lồi trên $[s, 3]$. Theo định lý RCF, chỉ cần chứng minh $x \leq y = z$ là đủ. Để thuận tiện, ta viết bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$6 \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^{r+1} \geq x^r(y+z) + y^r(x+z) + z^r(x+y)$$

Có thể bỏ đi điều kiện $x+y+z=3$ và chỉ cần xét trường hợp $y=z=1$ (và khi đó $0 \leq x \leq 1$).

Bất đẳng thức quy về $g(x) \geq 0$, trong đó $g(x) = 3 \left(\frac{x+2}{3} \right)^{r+1} - x^r - x - 1$

$$\text{Ta có } g'(x) = (r+1) \left(\frac{x+2}{3} \right)^r - rx^{r-1} - 1; \quad \frac{1}{r} g''(x) = \frac{r+1}{3} \left(\frac{x+2}{3} \right)^{r-1} - \frac{r-1}{x^{2-r}}$$

Do g'' tăng nghiêm ngặt trên $(0, 1]$, $g''(0) = -\infty$ và $\frac{1}{r} g''(1) = \frac{2(2-r)}{3} > 0$ nên tồn tại $x_2 \in (0, 1)$ thỏa mãn $g''(x_1) = 0, g''(x) < 0$ với $x \in (0, x_1)$ và $g''(x) > 0$ với $x \in (x_1, 1]$. Vì thế hàm $g'(x)$ giảm nghiêm ngặt với $x \in [0, x_1]$ và tăng nghiêm ngặt với $x \in [x_1, 1]$.

Từ $g'(0) = (r+1) \left(\frac{2}{3} \right)^r - 1 \geq (r+1) \left(\frac{2}{3} \right)^{r_0} - 1 = \frac{r+1}{2} - 1 = \frac{r-1}{2} > 0$ và $g'(1) = 0$, tồn tại $x_2 \in (0, x_1)$ thỏa mãn $g'(x_2) = 0, g'(x) > 0$ với $x \in [0, x_2)$ và $g'(x) < 0$ với $x \in (x_2, 1]$. Vì vậy, hàm $g(x)$ tăng thực sự với $x \in (0, x_2]$, và giảm thực sự với $x \in (x_2, 1)$.

Do $g(0) = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{r+1} - 1 = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^r - 1 \geq 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{r_0} - 1 = 0$ và $g(1) = 0$, chứng tỏ $g(x) \geq 0$ với $0 \leq x \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Ngoài ra khi $r = r_0$, đẳng thức còn xảy ra khi $(x, y, z) = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ hoặc các hoán vị vòng.

Bài 14. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ là các số thực không âm thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \frac{1}{3}$

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{x_1}}{1-x_1} + \frac{\sqrt{x_2}}{1-x_2} + \dots + \frac{\sqrt{x_n}}{1-x_n} \geq \frac{x\sqrt{r}}{1-r}$

Chứng minh

Sử dụng định lý RCF cho hàm $f(u) = \frac{\sqrt{u}}{1-u}$, $0 \leq u < 1$. Do $f''(u) = \frac{3u^2 + 6u - 1}{4u\sqrt{u}(1-u)^3}$, chứng

tỏ f lồi trên $\left[\frac{2}{\sqrt{3}} - 1, 1\right)$. Từ $s = \frac{1}{3} > \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$, hàm f lồi trên $[s, 1)$.

Theo Định lý RCF và Chú ý 2, chỉ cần chứng minh rằng $g(x) \leq g(y)$ với

$0 \leq x \leq s \leq y < 1$ và $x + (n-1)y = ns$, trong đó $g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t-s}$.

Để thuận tiện, đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ và $c = \sqrt{s}$

$$g(t^2) = \frac{f(t^2) - f(c^2)}{t^2 - c^2} = \frac{1+ct}{(1-c^2)(1-t^2)(t+c)} \quad \text{và}$$

$$g(x) - g(y) = g(a^2) - g(b^2) = (a^2 - b^2) \frac{a^2 + b^2 + c(a+b) + c^2 - 1 + ab(1+c^2) + abc(a+b)}{(1-c^2)(1-a^2)(1-b^2)(a+c)(b+c)}$$

Từ $a^2 + b^2 + c(a+b) + c^2 - 1 + ab(1+c^2) + abc(a+b) \geq a^2 + b^2 + c(a+b) + c^2 - 1 \geq a^2 + b^2 + c\sqrt{a^2 + b^2} + c^2 - 1$

Chỉ cần chứng minh $x + y\sqrt{s(x_y)} + s - 1 \geq 0$ là đủ.

Thật vậy, ta có $x + y = \frac{ns + (n-2)x}{n-1} \geq \frac{ns}{n-1}$, và vì thế,

$$x + y + \sqrt{s(x+y)} + s - 1 \geq \left(\frac{n}{n-1} + \sqrt{\frac{n}{n-1} + 1}\right)s - 1 > 3s - 1 = 0$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = r$

Chú ý. Bất đẳng thức vẫn đúng với điều kiện lỏng hơn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \frac{1}{\frac{n}{n-1} + \sqrt{\frac{n}{n-1} + 1}}$$

Khi $r = \frac{1}{\frac{n}{n-1} + \sqrt{\frac{n}{n-1} + 1}}$, đẳng thức còn xảy ra khi một số $x_k = 0$ và các số còn lại bằng $\frac{nr}{n-1}$

Bài 15. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq 1$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng $f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

trong đó $f(u) = -\ln(1-u+u^2)$, $0 \leq u \leq 3$.

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{1-2u}{1-u+u^2}, f''(u) = \frac{2u^2-2u-1}{(1-u+u^2)^2}$$

Do f lõm trên $\left[0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ và $s = \frac{a+b+c}{3} = 1$, f cũng lõm trên $[0, s]$.

Vì thế, để áp dụng định lý LCF và chú ý 8, chỉ cần chứng minh $f'(x) \geq f'(y)$ với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $2x+y=3$ là đủ. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(y) &= \frac{(y-x)(1+x+y-2xy)}{(1-x+x^2)(1-y-y^2)} = \frac{(y-x)(4x^2-7x+4)}{(1-x-x^2)(1-y-y^2)} \geq \\ &\geq \frac{(y-x)(4x^2-8x+4)}{(1-x-x^2)(1-y-y^2)} = \frac{4(y-x)(x-1)^2}{(1-x-x^2)(1-y-y^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$

Nhận xét 1. Marian Tetiva đã tìm ra cho bất đẳng thức này một lời giải sơ cấp rất đẹp. Chú ý rằng trong các số a, b, c luôn tồn tại hai số (chẳng hạn là b và c) cùng nhỏ hơn 1 hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 1, nghĩa là $(b-1)(c-1) \geq 0$. Vì vậy,

$$\begin{aligned} (1-b+b^2)(1-c+c^2) &\geq (b^2-b)(c^2-c) + b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq \\ &\geq b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq \frac{1}{2}(b+c)^2 - (b+c) + 1 = \frac{a^2-4a+5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{và do đó } (1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq \frac{(a^2-a+1)(a^2-4a+5)}{2} - 1 = \frac{(a-1)^2(a^2-3a+3)}{2} \geq 0$$

Nhận xét 2. Thật ra, mệnh đề tổng quát dưới đây cũng đúng:

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = r \geq 1$

Nếu $n \leq 13$ thì $(1-x_1+x_1^2)(1-x_2+x_2^2)\dots(1-x_n+x_n^2) \geq (1-r+r^2)^n$

Ta có thể chứng minh mệnh đề này với $n \leq 10$ theo cùng cách đã chứng minh khi $n=3$.

Ta chỉ phải chứng minh rằng $1+x+y-2xy \geq 0$ với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $(n-1)x+y=n$. Thật

vậy, với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ta có $1+x+y-2xy = 1+x+y(1-2x) > 0$ và với $\frac{1}{2} < x \leq 1$ ta có

$$1+x+y-2xy = 1+2x-2x^2 - n(2x-1)(1-x)$$

$$\geq 1+2x-2x^2 - 10(2x-1)(1-x) = 18x^2 - 28x + 11 = 2\left(3x - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} > 0$$

Nhận xét 3. Bin Zhao đã post trên Mathlink Site dự đoán dưới đây vào tháng 11 năm 2005

Nếu a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$ thì

$$(1-a+a^p)(1-b+b^p)(1-c+c^p) \geq 1 \text{ với mọi } p > 1$$

Bài 16. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{n-x_1+x_1^2} + \frac{1}{n-x_2+x_2^2} + \dots + \frac{1}{n-x_n+x_n^2} \leq 1$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \text{ trong đó } f(u) = \frac{1}{n-u+u^2}, u > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{1-2u}{(n-u+u^2)^2} \text{ và } f''(u) = \frac{6u(u-1)+2(1-n)}{(n-u+u^2)^3}$$

Từ $f''(u) < 0$ với $0 \leq u \leq 1$, chúng ta thấy hàm $f(u)$ lõm trên $[0, 1]$, trong đó

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1. \text{ Để áp dụng Định lý LCF và Chú ý 7, chỉ cần chứng minh}$$

$$g(x) \geq g(y) \text{ với } 0 < x \leq 1 \leq y \text{ và } (n-1)x + y = n \text{ là đủ, ở đây } g(t) = \frac{f(t) - f(1)}{t-1}$$

$$\text{Thật vậy, ta có } g(t) = \frac{-t}{n(n-t+t^2)} \text{ và } g(x) - g(y) = \frac{(y-x)(n-xy)}{n(n-x+x^2)(n-y+y^2)} \geq 0$$

Bởi vì $n-xy \geq n-y = (n-1)x \geq 0$. Điều này hoàn thành chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

Dự đoán. Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ thì với

$$\text{mọi } p > 1 \text{ bất đẳng thức sau đúng } \frac{1}{n-x_1+x_1^p} + \frac{1}{n-x_2+x_2^p} + \dots + \frac{1}{n-x_n+x_n^p} \leq 1$$

Bài 17. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng } 1 + a + b + c \geq 2\sqrt{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Chứng minh

Bình phương hai vế, bất đẳng thức trở thành

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 3$$

$$\text{hay } f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f(\sqrt[3]{abc}) \text{ trong đó } f(t) = t^2 + 2t - \frac{2}{t}, t > 0.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ sử dụng hệ quả RCF với $r=1$.

Đặt $f_1(u) = f(e^u) = e^{2u} + 2e^u - 2e^{-u}$. Đạo hàm cấp 2 $f_1''(u) = 2e^{-u}(2e^{3u} + e^{2u} - 1)$, chúng

tò $f_1(u)$ lồi trên $u \geq \ln r = 0$. Để áp dụng hệ quả RCF, ta cần chứng minh

$f(x) + 2f(y) \geq 3f(1)$ với $0 < x \leq 1 \leq y$ và $xy^2 = 1$. Bất đẳng thức này tương đương với một trong các dạng sau:

$$x^2 + 2x - \frac{2}{x} + 2y^2 + 4y - \frac{4}{y} \geq 3; 4y^5 - 3y^4 - 4y^3 + 2y^2 + 1 \geq 0; (y-1)^2(y+1)(4y^2+y+1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Chú ý. Marian Tetiva đã lưu ý rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c) - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) - 3 \\ = (b-c)^2 + (a-1)^2 + 2(1-a)(b+c-2) \geq 0$$

Bởi vì có thể giả sử rằng $a \leq b \leq c$ dẫn tới $1-a \geq 0$ và

$$b+c-2 \geq 2\sqrt{bc} - 2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right) \geq 0$$

Bài 18. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$.

Chứng minh rằng $(a-1)(a-2) + (b-1)(b-2) + (c-1)(c-2) + (d-1)(d-2) \geq 0$

Chứng minh

Viết bất đẳng thức dưới dạng $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq 4f(\sqrt[4]{abcd})$, trong đó

$f(t) = (t-1)(t-2), t > 0$ và áp dụng Hệ quả RCF với $r=1$.

Đặt $f_1(u) = f(e^u) = (e^u - 1)(e^u - 2)$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = e^u(4e^u - 3)$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi với $u \geq \ln r = 0$. Để áp dụng Hệ quả RCF, ta cần chứng minh $f(x) + 3f(y) \geq 4f(1)$ với $x \leq 1 \leq y$ và $xy^3 = 1$. Bất đẳng thức này tương đương với $\left(\frac{1}{y^3} - 1\right)\left(\frac{1}{y^3} - 2\right) + 3(y-1)(y-2) \geq 0$.

Hay $(y-1)^2[y^3(y-1)(3y^2-1) + 3y^2 + 2y + 1] \geq 0$, điều này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Bài 19. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 4$) là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Chứng minh rằng: $(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n(n+3) \geq (2n+2)(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

Chứng minh

Viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq n f(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})$

trong đó $f(t) = (n-1)t^2 - (2n+2)t + n+3, t > 0$ và áp dụng Hệ quả RCF với $r=1$.

Đặt $f_1(u) = f(e^u) = (n-1)e^{2u} - (2n+2)e^u + n+3$. Đạo hàm cấp 2

$f_1''(u) = 2e^u[(2n-2)e^u - n - 1]$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi trên $u \geq \ln r = 0$.

Áp dụng hệ quả RCF và chú ý 5, chỉ cần chứng minh rằng $xf'(x) \leq yf'(y)$ với $x \leq 1 \leq y$ và $xy^{n-1} = 1$.

Do $xf'(x) - yf'(y) = 2(n-1)x^2 - (2n+2)x - 2(n-1)y^2 + (2n+2)y$

$= 2(x-y)[(n-1)(x+y) - n-1]$, ta cần chứng minh $x+y \geq \frac{n+1}{n-1}$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có

$$x+y = x + \frac{y}{n-1} + \dots + \frac{y}{n-1} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{xy^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{n \cdot \sqrt[n]{n-1}}{n-1}$$

Tiếp theo, chỉ cần chứng minh rằng $n \cdot \sqrt[n]{n-1} \geq n+1$. Bất đẳng thức này tương đương với $n-1 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Điều này đúng vì với $n \geq 4$ ta có $n-1 \geq 3 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Nhận xét. Với cùng cách thức này, ta có thể chứng minh mệnh đề sau đây

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ thì

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - n \geq \frac{2n \cdot \sqrt[n]{n-1}}{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n - n)$$

(Gabriel Dospinescu và Calin Popa)

Bài 20. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Chứng minh rằng $a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$

Chứng minh

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})$

trong đó $f(t) = t^{n-1} - \frac{n-1}{t}$, $t > 0$. Đặt $f_1(u) = f(e^u) = e^{(n-1)u} - (n-1)e^{-u}$

Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = (n-1)^2 e^{(n-1)u} - (n-1)e^{-u} = (n-1)e^{-u} [(n-1)e^{nu} - 1]$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi với $u \geq \ln r = 0$, trong đó $r=1$. Theo hệ quả RCF và chú ý 5, chỉ cần chứng minh rằng $xf'(x) \leq yf'(y)$ với $0 < x \leq 1 \leq y$ và $xy^{n-1} = 1$.

Ta có: $tf'(t) = (n-1)t^{n-1} + \frac{n-1}{t}$ và

$$\begin{aligned} yf'(y) - xf'(x) &= (n-1)y^{n-1} + \frac{n-1}{y} - (n-1)x^{n-1} - \frac{n-1}{x} = \\ &= \frac{n-1}{y} - (n-1)x^{n-1} = \frac{(n-1)(y^{n^2-2n} - 1)}{y^{(n-1)^3}} \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Bài 21. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ và $m \geq n$.

Chứng minh rằng $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m + mn \geq (m+1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$

Chứng minh

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})$

trong đó $f(t) = t^m - \frac{m+1}{t}, t > 0$. Đặt $f_1(u) = f(e^u) = e^{mu} - (m+1)e^{-u}$

Đạo hàm cấp 2 $f_1''(u) = m^2 e^{mu} - (m+1)e^{-u} = e^{-u} [m^2 e^{(m+1)u} - m - 1]$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi với $u \geq \ln r = 0$, trong đó $r=1$, bởi vì $m^2 e^{(m+1)u} - m - 1 \geq m^2 - m - 1 > 0$

Để áp dụng hệ quả LCF, chỉ cần chứng minh rằng bất đẳng thức đã cho là đúng với $a_2 = a_3 = \dots = a_n \geq 1$; nghĩa là chứng minh rằng

$$x^m + (n-1)y^m + mn - \frac{m+1}{x} - \frac{(m+1)(n-1)}{y} \geq 0 \text{ với } 0 < x \leq 1 \leq y \text{ và } xy^{n-1} = 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có $x^m + (mn - m - 1) \geq m(n-1)^{n-1} \sqrt[n]{x} = \frac{m(n+1)}{y}$

Do đó ta cần chứng minh $(n-1) \left(y^m - \frac{1}{y} \right) - (m+1) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \geq 0$

Bất đẳng thức này $\Leftrightarrow h(y) \geq 0 \quad y \geq 1$, trong đó $h(y) = (n-1)(y^{m+n} - 1) - (m+1)(y^n - y)$

Do $\frac{h'(y)}{m+1} = (n-1)y^m - ny^{n-1} + 1 \geq (n-1)y^n - ny^{n-1} + 1 =$

$$ny^{n-1}(y-1) - (y^n - 1) = (y-1)[(y^{n-1} - y^{n-2}) + (y^{n-1} - y^{n-3}) + \dots + (y^{n-1} - 1)] \geq 0$$

Hàm $h(y)$ tăng. Vì vậy $h(y) \geq h(1) = 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Bài 22. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq \sqrt{n} - 1.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \geq \frac{n}{(1+p)^2}$ (7)

Chứng minh

Áp dụng Hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}, t > 0$. Trước hết ta phải chứng minh hàm

$$f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{(1+e^u)^2} \text{ lồi với } u \geq \ln r, \text{ trong đó } r = \sqrt{n} - 1.$$

Thật vậy, đạo hàm cấp 2 cho bởi $f_1''(u) = \frac{2e^u(2e^u - 1)}{(1+e^u)^4}$ và với $u > \ln r$, ta có

$$2e^u - 1 \geq 2r - 1 = 2\sqrt{n} - 3 > 0$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng (7) đúng với $a_2 = a_3 = \dots = a_n \geq r$ và $a_1 a_2 \dots a_n = r^n$;

Nghĩa là chứng minh $h(x) \geq h(r)$ với $x \geq r$, trong đó $h(x) = \frac{x^{2n-2}}{(x^{n-1} + r^n)^2} + \frac{n-1}{(1+x)^2}$

Đạo hàm $h'(x) = \frac{2(n-1)r^n x^{2n-3}}{(x^{n-1} + r^n)^3} - \frac{2(n-1)}{(x+1)^3}$ có cùng dấu với hàm

$$h_1(x) = r^n x^{\frac{2n-1}{3}} (x+1) - x^{n-1} - r^n. \text{ Đặt } m = \frac{n}{3}, m \geq 1. \text{ Ta nhận thấy}$$

$$h_1(x) = r^m (x^{2m} + x^{2m-1}) - x^{3m-1} - r^{3m} = (x^m - r^m)(r^m x^m + r^{2m} - x^{2m-1}) = x^m (x^m - r^m) h_2(x),$$

$$\text{trong đó } h_2(x) = r^m + \frac{r^{2m}}{x^m} - x^{m-1}$$

Do $h_2(x)$ là hàm giảm nghiêm ngặt với $x \geq r$, $h_2(x) = r^{m-1}(2r-1) = r^{m-1}(2\sqrt{n}-3)$

Và $h_2(+\infty) < 0$ ($h_2(+\infty) = r-1 = \sqrt{3}-2$ với $m=1$, và $h_2(\infty) = -\infty$ với $m>1$), tồn tại $x_1 > r$ thỏa mãn $h_2(x_1) = 0$, $h_2(x) > 0$ với $r \leq x < x_1$, và $h_2(x) < 0$ với $x > x_1$.

Từ việc hai hàm $h_1(x)$ và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $x > r$, ta có thể nói rằng hàm liên tục $h(x)$ tăng nghiêm ngặt với $r \leq x \leq x_1$, và giảm nghiêm ngặt với $x \geq x_1$; bởi vậy, $h(x) \geq \min\{h(r), h(+\infty)\}$. Do $h(r) = h(+\infty) = 1$, ta nhận được $h(x) \geq h(r)$ với $x \geq r$, và chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = p$.

Nhận xét. Ta có thể viết lại bất đẳng thức (7) dưới dạng:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ và với $p \geq \sqrt{n}-1$ thì

$$\frac{1}{(1+pa_1)^2} + \frac{1}{(1+pa_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+pa_n)^2} \geq \frac{n}{(1+p)^2}$$

Với $n=4$ và $p=1$, ta nhận được kết quả quen thuộc

Nếu a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $abcd = 1$ thì

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

(Vasile Cirtoaje, GM-B, 11, 1989)

Bài 23. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq n^2 - 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \geq \frac{n}{\sqrt{1+p}} \quad (8)$$

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}, t > 0$

Trước hết ta phải chứng minh rằng hàm $f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{\sqrt{1+e^u}}$ lồi với $u \geq \ln r$, trong

đó $r = n^2 - 1$. Thật vậy, đạo hàm cấp 2 cho bởi $f_1''(u) = \frac{e^u(e^u - 2)}{4(1+e^u)^{\frac{5}{2}}}$ và với $u \geq \ln r$, ta có

$$e^u - 2 \leq r - 2 = n^2 - 3 > 0$$

Bây giờ ta chứng minh rằng (8) đúng với $a_2 = a_3 = \dots = a_n \geq r$ và $a_1 a_2 \dots a_n = r^n$,

nghĩa là chứng minh rằng $h(x) \geq h(r)$ với $x \geq r$ trong đó $h(x) = \sqrt{\frac{x^{n+1}}{x^{n-1} + r^n}} + \frac{n-1}{\sqrt{1+x}}$

Đạo hàm $h'(x) = \frac{(n-1)r^n x^{\frac{n-3}{2}}}{2(x^{n-1} + r^n)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(n-1)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ có cùng dấu với hàm

$$h_1(x) = r^{\frac{2n}{3}} x^{\frac{n-1}{3}} (x+1) - x^{n-1} - r^n. \text{ Đặt } m = \frac{n}{3}, m \geq \frac{2}{3}. \text{ Ta nhận thấy}$$

$$h_1(x) = r^{2m} (x^m + x^{m-1}) - x^{3m-1} - r^{3m} = r^{2m} (x^m - r^m) + x^{m-1} (r^{2m} - x^{2m}) = (x^m - r^m) h_2(x)$$

trong đó $h_2(x) = r^{2m} - r^m x^{m-1} - x^{2m-1}$. Do $h_2(x)$ tăng nghiêm ngặt với $x \geq r$ trong đó

$$h_2(r) = r^{2m-1} (r - 2) = r^{2m-1} (n^2 - 3) > 0 \text{ và } h_2(+\infty) < 0. \text{ Như thế tồn tại } x_1 > r \text{ thỏa mãn}$$

$$h_2(x_1) = 0, h_2(x) > 0 \text{ với } r \leq x < x_1, \text{ và } h_2(x) < 0 \text{ với } x > x_1. \text{ Từ việc } h_1(x) \text{ và } h'(x) \text{ có}$$

cùng dấu như $h_2(x)$ với $x > r$, hàm $h(x)$ tăng nghiêm ngặt với $r \leq x \leq x_1$, và giảm

nghiêm ngặt với $x \geq x_1$; bởi vậy, $h(x) \geq \min\{h(r), h(+\infty)\}$. Từ $h(r) = h(+\infty) = 1$, ta thu

được $h(x) \geq h(r)$ với $x \geq r$, và chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = p$$

Nhận xét. Các bất đẳng thức (7) và (8) là trường hợp đặc biệt của mệnh đề tổng quát sau:

Cho số nguyên $n \geq 2$, và $k \leq n-1$ là số dương.

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq n^{\frac{1}{k}} - 1$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \frac{n}{(1+p)^k}$$

(Vasile Critoaje, GM-A, 2, 2005)

Ta có thể viết lại mệnh đề này dưới dạng sau đây:

Cho số nguyên $n \geq 2$, $0 < k \leq n-1$ và $p \geq n^{\frac{1}{k}} - 1$. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa

$$\text{mãn } a_1 a_2 \dots a_n = 1 \text{ thì } \frac{1}{(1+pa_1)^k} + \frac{1}{(1+pa_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+pa_n)^k} \geq \frac{n}{(1+p)^k}$$

Một hệ quả thú vị được chỉ ra dưới đây:

Cho số nguyên $n \geq 2$, $0 < k \leq n-1$ và $p = n^{\frac{1}{k}} - 1$. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ thì $\frac{1}{(1+pa_1)^k} + \frac{1}{(1+pa_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+pa_n)^k} \geq 1$

Bài 24. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$.

Chúng minh rằng: $\frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}$ (9)

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả LCF cho hàm $g(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, $t > 0$.

Trước hết ta chứng minh rằng hàm $f(u) = g(e^u) = \frac{1}{(1+e^u)^2}$ lõm với $u \leq \ln r$, trong đó

$r = \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$. Thật vậy, ta có $f''(u) = \frac{2e^u(2e^u - 1)}{(1+e^u)^4}$. Và với $u \leq \ln r$,

$$2e^u - 1 \leq 2r - 1 = 2\sqrt{\frac{n}{n-1}} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3 < 0.$$

Bây giờ ta cần chứng minh rằng (9) đúng với $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} \leq r$ và $a_1 a_2 \dots a_n = r^n$,

nghĩa là chứng minh rằng $h(x) \leq h(r)$ với $0 < x \leq r$ trong đó $h(x) = \frac{n-1}{(1+x)^2} + \frac{x^{2n-2}}{(x^{n-1} + r^n)^2}$

Đạo hàm $h'(x) = \frac{2(n-1)r^n x^{2n-3}}{(x^{n-1} + r^n)^3} - \frac{2(n-1)}{(x+1)^3}$ có cùng dấu với hàm

$$h_1(x) = r^{\frac{n}{3}} x^{\frac{2n-1}{3}} (x+1) - x^{n-1} - r^n. \text{ Đặt } m = \frac{n}{3}, m \geq \frac{2}{3}. \text{ Ta có}$$

$$h_1(x) = (r^m - x^m)(x^{2m-1} - r^m x^m - r^{2m}) = x^m (r^m - x^m) h_2(x) \text{ trong đó}$$

$$h_2(x) = x^{m-1} - r^m - \frac{r^{2m}}{x^m}$$

Chú ý rằng $\lim_{x \rightarrow 0} h_2(x) = -\infty$; $h_2(x) = r^{m-1}(1-2r) = r^{m-1} \left(3 - 2\sqrt{\frac{n}{n-1}} \right) > 0$

Trong trường hợp $n \geq 3 (m \geq 1)$, hàm $h_2(x)$ hiển nhiên tăng nghiêm ngặt với $0 < x \leq r$.

Có thể dễ dàng kiểm tra tính chất này là đúng với $n = 2 \left(m = \frac{2}{3} \right)$. Vì vậy có $x_1 \in (0, r)$

thỏa mãn $h_2(x_1) = 0$, $h_2(x) < 0$ với $0 < x < x_1$, và $h_2(x) > 0$ với $x_1 < x < r$. Từ việc $h_1(x)$

và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $0 < x < r$, hàm liên tục $h(x)$ giảm nghiêm ngặt với $0 \leq x \leq x_1$, và tăng nghiêm ngặt với $x_1 \leq x \leq r$; bởi vậy, $h(x) \leq \max\{h(0), h(r)\}$. Từ

$h(0)=h(r)=n-1$, ta thu được $h(x)\leq h(r)$ với $0\leq x\leq r$, và chứng minh hoàn tất Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\dots=a_n=p$

Chú ý. Ta có thể viết lại bất đẳng thức (9) dưới dạng

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$; $p \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$.

Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(1+pa_1)^2} + \frac{1}{(1+pa_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+pa_n)^2} \geq \frac{n}{(1+p)^2}$$

Bài 25. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \geq \frac{n}{\sqrt{1+p}} \quad (10)$$

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$, $t > 0$. Trước hết ta chứng minh rằng

hàm $f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{\sqrt{1+e^u}}$ lõm với $u \leq \ln r$, trong đó $r = \frac{2n-1}{(n-1)^2}$.

Thật vậy, đạo hàm cấp 2 cho bởi $f_1''(u) = \frac{e^u(e^u - 2)}{4(1+e^u)^{\frac{5}{2}}}$

và với $u \leq \ln r$, ta có $e^u - 2 \leq r - 2 = \frac{-2n^2 + 6n - 3}{(n-1)^2} = \frac{2n(3-n)}{(n-1)^2} \leq 0$

Ta cần chứng minh rằng (10) đúng với $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} \leq r$ và $a_1 a_2 \dots a_n = r^n$;

nghĩa là chứng minh rằng $h(x) \leq h(r)$ với $0 < x \leq r$, trong đó $h(x) = \frac{n-1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{x^{n-1}}{x^{n-1} + r^n}}$

Đạo hàm $h'(x) = \frac{(n-1)r^n x^{\frac{n-3}{2}}}{2(x^{n-1} + r^n)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ có cùng dấu với $h_1(x) = r^{\frac{2n}{3}} x^{\frac{n-1}{3}}(x+1) - x^{n-1} - r^n$.

Đặt $m = \frac{n}{3}$, $m \geq 1$. Ta nhận thấy

$$h_1(x) = r^{2m}(x^m + x^{m-1}) - x^{3m-1} - r^{3m} = r^{2m}(x^m - r^m) + x^{m-1}(r^{2m} - x^{2m}) = (r^m - x^m)h_2(x)$$

trong đó $h_2(x) = x^{2m-1} + r^m x^{m-1} - r^{2m}$

Chú ý rằng $h_2(x)$ là hàm tăng nghiêm ngặt với $0 \leq x \leq r$, $h_2(0) < 0$ và

$$h_2(r) = r^{2m-1}(2-r) > 0$$

Do đó, tồn tại $x_1 \in (0, r)$ thỏa mãn $h_2(x_1) = 0$, $h_2(x) < 0$ với $0 \leq x < x_1$, và $h_2(x) > 0$ với $x_1 < x \leq r$. Từ việc $h_1(x)$ và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $0 < x < r$, hàm $h(x)$

giảm nghiêm ngặt với $0 \leq x \leq x_1$, tăng nghiêm ngặt với $x_1 \leq x \leq r$; bởi vậy, $h(x) \leq \max\{h(0), h(r)\}$. Từ $h(0) = h(r) = n-1$, ta nhận được $h(x) \leq h(r)$ với $0 \leq x \leq r$, và chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = p$

Chú ý. Các bất đẳng thức (9) và (10) là trường hợp đặc biệt của mệnh đề tổng quát sau:

Cho số nguyên $n \geq 2$, và số thực dương $k \geq \frac{1}{n-1}$. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} - 1, \text{ khi đó } \frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \leq \frac{n}{(1+p)^k}$$

(Vasile Cîrtoaje, GM-A, 2, 2005)

Ta có thể viết lại mệnh đề này dưới dạng sau đây:

Cho số nguyên $n \geq 2$, và các số thực dương $k > \frac{1}{n-1}$, $0 < p \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} - 1$. Nếu

$a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ thì

$$\frac{1}{(1+pa_1)^k} + \frac{1}{(1+pa_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+pa_n)^k} \leq n-1$$

Bài 26. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq 1$.

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{1+a_1+\dots+a_1^{n-1}} + \frac{1}{1+a_2+\dots+a_2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{1+a_n+\dots+a_n^{n-1}} \geq \frac{n}{1+p+\dots+p^{n-1}} \quad (11)$$

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \frac{1}{1+t+\dots+t^{n-1}}, t > 0$. Trước hết ta chứng

minh rằng hàm $f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{1+e^u+\dots+e^{(n-1)u}}$ lồi với $u \geq \ln r$, trong đó $r=1$; nghĩa

là với $u \geq 0$. Đặt $y = e^u$ ($y \geq 1$), điều kiện cần $f''(u) > 0$ quy về

$$2[y + 2y^2 + \dots + (n-1)y^{n-1}]^2 \geq [y + 2y^2 + \dots + (n-1)^2 y^{n-1}][1 + y + \dots + y^{n-1}]$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này bằng quy nạp theo n . Với $n=2$, bất đẳng thức trở thành $y(y-1) \geq 0$, hiển nhiên đúng. Giả sử rằng bất đẳng thức đã đúng đến n và ta sẽ chứng

minh nó cũng đúng với $n+1, n \geq 2$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta cần chứng minh rằng

$$n^2(y^n - 1) + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1} \geq 0 \text{ trong đó } a_i = 3n^2 - (2n-i)^2. \text{ Do}$$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} \text{ và } y \leq y^2 \leq \dots \leq y^{n-1}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta nhận được

$$n(a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1}) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})(y + y^2 + \dots + y^{n-1})$$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq 0$ là đủ.

Thật vậy, ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{n(10n^2 - 15n - 1)}{6} > 0$

Cuối cùng, chỉ còn cần chứng minh (11) đúng với $a_2 = a_3 = \dots = a_n \geq 1$ và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$;

nghĩa là chứng minh rằng $f(x) + (n-1)f(y) \geq 1$ với $0 < x \leq 1 \leq y$ và $xy^{n-1} = 1$. Đặt

$k = n-1, k \geq 1$, bất đẳng thức này tương đương với $h(y) \geq h(1)$ trong đó

$$h(y) = \frac{y^{k^2} + \dots + y^{k^2}}{1 + y^k + \dots + y^{k^2}} + \frac{k}{1 + y + \dots + y^k}$$

Đối với trường hợp không tầm thường $y > 1$, ta viết lại bất đẳng thức $h(y) \geq h(1)$ dưới dạng

$$\frac{k}{1 + y + \dots + y^k} \geq \frac{1 + y^k + \dots + y^{(k-1)k}}{1 + y^k + \dots + y^{k^2}}, \quad \frac{k(y-1)}{y^{k+1} - 1} \geq \frac{y^{k^2} - 1}{y^k - 1} \cdot \frac{y^k - 1}{y^{(k+1)k} - 1},$$

$$\frac{k(y-1)}{y^{k+1} - 1} \geq \frac{y^{k^2} - 1}{y^{(k+1)k} - 1}, \quad k \frac{y^{k(k+1)} - 1}{y^{k+1} - 1} \geq \frac{y^{k^2} - 1}{y - 1}$$

$$k[1 + y^{k+1} + y^{2(k+1)} + \dots + y^{(k-1)(k+1)}] \geq 1 + y + y^2 + \dots + y^{(k-1)(k+1)}$$

$$k[1 \cdot 1 + y \cdot y^k + y^2 \cdot y^{2k} + \dots + y^{k-1} y^{(k-1)k}] \geq (1 + y + y^2 + \dots + y^{k-1})[1 + y^k + y^{2k} + \dots + y^{(k-1)k}]$$

Do $1 < y < y^2 < \dots < y^{k-1}$ và $1 < y^k < y^{2k} < \dots < y^{(k-1)k}$, bất đẳng thức cuối cùng chính là

bất đẳng thức **Chebyshev** áp dụng cho k bộ $(1, y, \dots, y^k)$ và $(1, y^k, \dots, y^{(k-1)k})$. Điều này

hoàn thành chứng minh. Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Chú ý. Với $p=1$, ta nhận được mệnh đề rất đẹp sau đây:

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ thì

$$\frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}} + \frac{1}{1 + a_2 + \dots + a_2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{1 + a_n + \dots + a_n^{n-1}} \geq 1$$

Trong trường hợp $n=4$, ta thu lại một kết quả quen biết:

Nếu a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $abcd = 1$ thì

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{1}{(1+b)(1+b^2)} + \frac{1}{(1+c)(1+c^2)} + \frac{1}{(1+d)(1+d^2)} \geq 1$$

(Vasile Cirtoaje, GM-B, 11, 1999)

Bài 27. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$.

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{1}{2n^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\ln a_i - \ln a_j)^2$

Chứng minh

Do $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\ln a_i - \ln a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n \ln^2 a_i - \left(\sum_{i=1}^n \ln a_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^n \ln^2 a_i - \ln^2 (a_1 a_2 \dots a_n)$, ta có thể viết

bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})$ trong đó

$$f(t) = t - \frac{1}{2n} \ln^2 t, t > 0.$$

Hàm $f_1(u) = f(e^u) = e^u - \frac{1}{2n} u^2$ có đạo hàm cấp 2 $f_1''(u) = e^u - \frac{1}{n}$. Do $f_1''(u) > 0$ với $u \geq 0$, hàm $f_1(u)$ lõm với $u \geq \ln r$, trong đó $r = 1$. Sử dụng Hệ quả RCF và Chú ý 5, chỉ cần chứng minh rằng $xf'(x) \leq yf'(y)$ với $0 < x \leq 1 \leq y$ và $xy^{n-1} = 1$. Ta có

$$tf'(t) = t - \frac{1}{n} \ln t \text{ và } yf'(y) - xf'(x) = y - \frac{1}{n} \ln y - x + \frac{1}{n} \ln x = y - x - \ln y = y - \frac{1}{y^{n-1}} - \ln y$$

Đặt $h(y) = y - \frac{1}{y^{n-1}} - \ln y$. Do $h'(y) = 1 + \frac{n-1}{y^n} - \frac{1}{y} \geq \frac{n-1}{y^n} > 0$, hàm $h(y)$ tăng nghiêm

ngặt với $y \geq 1$. Bởi vậy, $h(y) \geq h(1) = 0$ và do đó $yf'(y) - xf'(x) \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Bài 28. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{a_1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{a_2} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{a_n} \leq n - 1$$

Chứng minh

Đặt $a_i = \frac{x_i}{\ln n - \ln(n-1)}$ với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, mệnh đề trở thành:

Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = r = \ln \frac{n}{n-1}$ thì

$$e^{-x_1} + e^{-x_2} + \dots + e^{-x_n} \leq ne^{-r}.$$

Ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}) \text{ trong đó } f(t) = e^{-t}, t > 0.$$

Hàm $f_1(u) = f(e^u) = e^{-e^u}$ có đạo hàm cấp 2 $f_1''(u) = (e^u - 1)e^{u-e^u}$

Do $f_1''(u) < 0$ với $u < 0$, hàm $f_1(u)$ lõm với $u < \ln r = \ln \ln \frac{n}{n-1} < 0$

Để áp dụng hệ quả LCF, chỉ cần chứng minh rằng $(n-1)e^{-x} + e^{-y} \leq ne^{-r}$ với

$0 < x \leq r \leq y$ và $x^{n-1}y = r^n$. Nghĩa là $g(x) \leq g(r)$ với $0 < x \leq r$, trong đó

$$g(x) = (n-1)e^{-x} + e^{-y}, \text{ với } y = \frac{r^n}{x^{n-1}}$$

Do $\frac{x^n e^y}{n-1} g'(x) = r^n - x^n e^{y-x}$, chứng tỏ rằng đạo hàm g' có cùng dấu với hàm

$g_1(x) = r^n - x^n e^{y-x}$. Từ $e^{x-y} g_1'(x) = x^n - nx^{n-1} + (n-1)r^n$, ta nhận thấy $g_1'(x)$ có cùng dấu với hàm $h(x) = x^n - nx^{n-1} + (n-1)r^n$.

Đạo hàm của $h(x)$ được cho bởi $h'(x) = nx^{n-2}(x-n+1)$.

Do $h'(x) < 0$ với $0 < x \leq r$, hàm $h(x)$ giảm nghiêm ngặt. Thêm vào đó, từ

$h(0) = (n-1)r^n > 0$ và $h(r) = nr^{n-1}(r-1) < 0$, tồn tại $x_1 \in (0, r)$ thỏa mãn $h(x) > 0$ với

$x \in [0, x_1)$, $h(x_1) = 0$ và $h(x) < 0$ với $x \in (x_1, r)$. Bởi vậy hàm $g_1(x)$ tăng nghiêm ngặt

với $(0, x_1]$ và giảm nghiêm ngặt với $[x_1, r]$. Do $g_1(0_+) = -\infty$ và $g_1(r) = 0$, tồn tại

$x_2 \in (0, x_1)$ thỏa mãn $g_1(x) < 0$ với $x \in (0, x_2)$, $g_1(x_2) = 0$ và $g_1(x) > 0$ với $x \in (x_2, r)$.

Bởi vậy hàm $g(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $(0, x_2]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[x_2, r]$. Từ

$g(0_+) = n-1$ và $g(r) = ne^{-r} = n-1 = g(0_+)$ ta nhận được $g(x) \leq g(r)$ với $0 < x \leq r$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Bài 29. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$

Chứng minh rằng: $n^{-x_1^2} + n^{-x_2^2} + \dots + n^{-x_n^2} \geq 1$

Chứng minh

Ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \text{ trong đó } f(u) = n^{-u^2}, u \geq 0.$$

Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = 2n^{-u^2}(2u^2 \ln n - 1) \ln n$ chứng tỏ f lồi với $u \geq 1$, và do đó cũng

lồi với $u \geq s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1$

Theo định lý RCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $-x_1 \leq 1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

Đặt $g(x) = n^{-x^2} + (n-1)n^{-y^2} - 1$ trong đó $x + (n-1)y = n$ và $0 \leq x \leq 1 \leq y$. Ta chứng

minh rằng $g(x) \geq 0$ với $0 \leq x \leq 1$. Ta có $g'(x) = 2(y n^{-y^2} - x n^{-x^2}) \ln n$.

Đạo hàm g' cùng dấu với hàm $g_1(x) = \ln(y n^{-y^2}) - \ln(x n^{-x^2}) = \ln y - \ln x + (x^2 - y^2) \ln n$

Từ $g_1'(x) = \frac{-1}{(n-1)y} - \frac{1}{x} + 2\left(x + \frac{y}{n-1}\right) \ln n = n \left[\frac{-1}{x(n-x)} + \frac{2+2(n-2)x}{(n-1)^2} \ln n \right]$, ta nhận thấy

$g_1'(x)$ có cùng dấu với hàm $h(x) = \frac{-(n-1)^2}{2 \ln n} + x(n-x)[1+(n-2)x]$ với $0 < x \leq 1$

Đạo hàm của $h(x)$ được cho bởi $h'(x) = n + 2(n^2 - 2n - 1)x - 3(n-2)x^2$.

Do

$$h'(x) = n + 2(n^2 - 2n - 1)x - 3(n-2)x^2 \geq nx + 2(n^2 - 2n - 1)x - 3(n-2)x = 2(n-1)(n-2)x > 0$$

với $0 < x \leq 1$, hàm $h(x)$ tăng nghiêm ngặt.

Do $h(0) < 0$ và $h(1) = (n-1)^2 \left(1 - \frac{1}{2 \ln n}\right) > 0$, tồn tại $x_1 \in (0, 1)$ thỏa mãn $h(x) < 0$ với $x \in [0, x_1]$, $h(x_1) = 0$ và $h(x) > 0$ với $x \in (x_1, 1]$. Bởi vậy, hàm $g_1(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $(0, x_1]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[x_1, 1]$. Từ $g_1(0_+) = +\infty$ và $g_1(1) = 0$, tồn tại $x_2 \in (0, x_1)$ thỏa mãn $g_1(x) > 0$ với $x \in (0, x_2)$, $g_1(x_2) = 0$ và $g_1(x) < 0$ với $x \in (x_2, 1)$. Bởi vậy, hàm $g(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $[0, x_2]$ và giảm nghiêm ngặt trên $[x_2, 1]$.

Do $g(0) = (n-1)n^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)^2} > 0$ và $g(1) = 0$, chúng ta có $g(x) \geq 0$ với $0 \leq x \leq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

Bài 30. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

Chứng minh rằng: $2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + n^2 \leq (2n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

Chứng minh

Viết bất đẳng thức dưới dạng $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq 0$ trong đó

$f(x) = 2x^3 - (2n+1)x^2 + n$. Đạo hàm cấp 2 $f''(x) = 2(6x - 2n - 1)$, chứng tỏ rằng f lõm trên $\left[0, \frac{2n+1}{6}\right]$ và lồi trên $\left[\frac{2n+1}{6}, +\infty\right)$.

Sử dụng định lý LCRCF, tổng $E = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ đạt giá trị lớn nhất với

$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$. Bởi vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$(n-1)f(x) + f(y) \leq 0$ với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $(n-1)x + y = n$.

Bất đẳng thức này tương đương với $n(n-1)x[2(n-2)x^2 - (4n-7)x + 2n-2] \geq 0$

Điều này đúng bởi vì $2(n-2)x^2 - (4n-7)x + 2n-2 = 2(n-2)(x-1)^2 + 2-x \geq 0$

Đẳng thức xảy ra nếu một trong các số x_i bằng n và các số còn lại 0.

Bài 31. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng: $8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 9 \geq 10(x^2 + y^2 + z^2)$

Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $f(x) - f(y) + f(z) \leq 9$ trong đó $f(t) = 10t^2 - \frac{8}{t}$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(t) = \frac{4(5t^3 - 4)}{t^3}$, chứng tỏ f lõm trên $\left[0, \sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right]$ và lồi trên $\left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}}, +\infty\right)$

Sử dụng định lý LCRCF, tổng $E = f(x) + f(y) + f(z)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = y \leq z$.

Bởi vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $2f(x) + f(z) \leq 9$ với $0 \leq x \leq 1 \leq z$ và $2x + z = 3$.

Bất đẳng thức này tương đương với $40x^4 - 140x^3 + 174x^2 - 89x + 16 \geq 0$

hay $(2x - 1)^2(10x^2 - 25x + 16) \geq 0$

Bởi vì $10x^2 - 25x + 16 = 10(x - 1)^2 + 6 - 5x > 0$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (x, y, z) là một hoán vị của bộ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. CMR: $\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1) \dots (a_n^2 + 1)} \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}}$

Bài 2. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+(2a-b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2b-c)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(2c-a)^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
 $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \leq 2$

Bài 4. [Chinese 2003] Cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn: $\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 \dots \tan \alpha_n = 2^{\frac{n}{2}} (n \geq 3)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của L_n sao cho $T = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n < L_n$

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}$

Bài 6. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$; $a, b, c \geq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T_\alpha = \left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha$

Bài 7. Cho $a, b, c, p, q > 0$ và $\alpha \geq \frac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T_\alpha = \left(\frac{a}{pb+qc}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{pc+qa}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{pa+qb}\right)^\alpha$$

Bài 8. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \dots + \sqrt[3]{x_n}$

§15. BẤT ĐẲNG THỨC POPOVICIU

I. GIỚI THIỆU

Năm 1965, nhà toán học Romanian *T. Popoviciu* đã chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

trong đó f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $x, y, z \in \mathbb{I}$

A. Lupas đã mở rộng bất đẳng thức này vào năm 1982 và đạt được kết quả sau đây (với p, q và r là các số dương):

$$\begin{aligned} pf(x) + qf(y) + rf(p+q+r)f\left(\frac{px+qr+rz}{p+q+r}\right) &\geq \\ &\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right) \end{aligned}$$

Vào các năm 2002 và 2004, chúng tôi đã mở rộng bất đẳng thức Popoviciu cho n biến [5, 6] và thu được các định lý dưới đây:

Định lý 1 (Mở rộng của bất đẳng thức Popoviciu).

Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$ thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + n(n-2)f(a) \geq (n-1)[f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)],$$

Định lý 2. Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$ thì

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + \frac{n}{n-2}f(a) \geq \frac{2}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)$$

trong đó $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ và $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ với mọi i .

Ngay sau khi những bất đẳng thức này được post trên Mathlinks Inequalities Forum, **Bill Zhao** đã dự đoán mệnh đề tổng quát sau đây là đúng:

Định lý 3. Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{I}$ thì

$$\binom{m-1}{n-2} \sum_{k=1}^n f(a_k) + n \binom{m-2}{n-2} f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \geq m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} f\left(\frac{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}}{m}\right)$$

Cũng trên Mathlinks Inequalities Forum, vào năm 2005 **Darij Grinberg** đã post một chứng minh dài cho bất đẳng thức này bằng cách quy nạp theo n .

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh các định lý nêu trên, và sẽ đưa ra một số ứng dụng của chúng. Lời giải của chúng tôi dựa vào bất đẳng thức **Karamata** cho hàm lồi.

Trước hết hãy nhắc lại bất đẳng thức **Karamata**. Ta nói rằng vector $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

với $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ trội hơn vector $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, và viết $\vec{A} \geq \vec{B}$

nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$a_1 \geq b_1, \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$$

$$\dots\dots\dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Bất đẳng thức **Karamata** phát biểu rằng với mọi hàm lồi f và các vector $\vec{A} \geq \vec{B}$, ta có bất đẳng thức sau: $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$

Chứng minh định lý 1. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $n \geq 3$ và $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Thế thì tồn tại số nguyên m với $1 \leq m \leq n-1$, thỏa mãn

$$a_1 \leq \dots \leq a_m \leq a = a_{m+1} \leq \dots \leq a_n \quad \text{và} \quad b_1 \geq \dots \geq b_m \geq a \geq b_{m+1} \geq \dots \geq b_n \quad \text{trong đó}$$

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Để dàng nhận thấy rằng bất đẳng thức cần chứng minh là tổng của hai bất đẳng thức dưới đây

$$f(a_1) + \dots + f(a_m) + n(n-m-1)f(a) \geq (n-1)[f(b_{m+1}) + \dots + f(b_n)] \quad (1)$$

$$f(a_{m+1}) + \dots + f(a_n) + n(m-1)f(a) \geq (n-1)[f(b_1) + \dots + f(b_m)] \quad (2)$$

Để chứng minh (1), ta sử dụng bất đẳng thức **Jensen** và thu được

$$f(a_1) + \dots + f(a_m) + (n-m-1)f(a) \geq (n-1)f(b) \quad \text{trong đó} \quad b = \frac{a_1 + \dots + a_n + (n-m-1)a}{n-1}$$

Vì vậy, chúng ta chỉ còn phải chứng minh rằng

$$(n-m-1)f(a) + f(b) \geq f(b_{m+1}) + \dots + f(b_n)$$

Đã có $a \geq b_{m+1} \geq \dots \geq b_n$ và $(n-m-1)a + b = b_{m+1} + \dots + b_n$, ta nhận thấy vector

$$\vec{A}_{n-m} = (a, \dots, a, b) \text{ trội hơn vector } \vec{B}_{n-m} = (b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n).$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức **Karamata** cho hàm lồi f ta có kết quả cần chứng minh

Tương tự, ta có thể chứng minh (2) bằng cách cộng bất đẳng thức **Jensen**

$$\frac{f(a_{m+1}) + \dots + f(a_n) + (m-1)f(a)}{n-1} \geq f(c) \quad \text{với bất đẳng thức}$$

$$f(c) + (m-1)f(a) \geq f(b_1) + \dots + f(b_m) \quad \text{trong đó} \quad c = \frac{a_{m+1} + \dots + a_n + (m-1)a}{n-1}$$

Bất đẳng thức sau cùng thu được từ bất đẳng thức **Karamata**, bởi vì $b_1 \geq \dots \geq b_m \geq a$ và

$$c + (m-1)a = b_1 + \dots + b_m \quad \text{và do đó vector } \vec{C}_m = (c, a, \dots, a) \text{ trội hơn vector}$$

$$\vec{D}_m = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

Chứng minh định lý 2. Ta sẽ chứng minh bằng cách quy nạp theo n . Với $n=2$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Bây giờ giả sử $n \geq 3$ và bất đẳng thức đúng khi có $(n-1)$ bằng nhau. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n .

Đặt $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ và đặt $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$. Theo giả thiết quy nạp,

$$\text{ta có } (n-3) [f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1})] + (n-1) f(x) \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)$$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) + (n-2) f(a_n) + n f(a) \geq (n-1) f(x) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_n}{2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức **Jensen**, ta có $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) \geq (n-1) f(x)$

$$\text{Vì vậy, ta sẽ chứng minh rằng } (n-2) f(a_n) + n f(a) \geq 2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_n}{2}\right)$$

Từ $(n-2)a_n + na \geq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i + a_n}{2}$, lại sử dụng bất đẳng thức **Karamata** cho hai trường hợp:

Nếu $2a \geq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Như thế $2a \geq a_1 + a_n$. Để áp dụng bất đẳng thức **Karamata**, ta chứng minh rằng

$$a_n \leq \min\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\} \text{ và } a \geq \max\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}$$

Điều kiện thứ nhất hiển nhiên đúng, còn điều kiện thứ hai được quy về $a \geq \frac{a_1 + a_n}{2}$

Nếu $2a \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_n = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Như thế $2a \leq a_1 + a_n$. Để áp dụng bất đẳng thức **Karamata**, ta chứng minh rằng

$$a \leq \min\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\} \text{ và } a_n \geq \max\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}$$

Điều kiện thứ nhất quy về $a \leq \frac{a_1 + a_n}{2}$, còn điều kiện thứ hai hiển nhiên đúng.

Bình luận. Mở rộng của bất đẳng thức **Popoviciu** có thể viết lại dưới dạng sau đây

$$E_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) - n f(a)}{f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) - n f(a)} \geq n-1$$

Với một số hàm lồi, chặn dưới lớn nhất của E_n là $(n-1)$ nhưng với một số khác thì chặn dưới lớn nhất của E_n lại lớn hơn $(n-1)$. Trong trường hợp sau, mở rộng của bất

đẳng thức **Popoviciu** có thể làm mạnh hơn. Chẳng hạn, với hàm lồi $f(x) = x^2$, bất đẳng

thức sau đúng:
$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - na^2}{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 - na^2} \geq (n-1)^2$$

Trong khi đó với hàm lồi $f(x) = x^3$, chặn dưới lớn nhất của E_n là $\frac{(2n-1)(n-1)^3}{3n^2 - 5n + 1}$

Bởi vậy, nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm thì
$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 - na^3}{b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3 - na^3} \geq \frac{(2n-1)(n-1)^3}{3n^2 - 5n + 1}$$

Với giả sử rằng $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức thứ nhất theo kết quả ở mục 3.4: $(n-1)(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3) + n^2 \geq (2n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$

Với $n \geq 3$, đẳng thức chỉ xảy ra khi hoặc $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, hoặc một trong các số a_i bằng 0 và các số còn lại bằng $\frac{n}{n-1}$.

II. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

Chứng minh rằng: $a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ (3)

Chứng minh

Bất đẳng thức này thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức **Popoviciu** mở rộng (Định lý 1) với hàm lồi $f(x) = e^x$ và thay thế $a_1, a_2, \dots, a_n$ lần lượt bởi

$$(n-1)\ln a_1, (n-1)\ln a_2, \dots, (n-1)\ln a_n$$

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Nhận xét. Với $n=3$ và $a_1 = \frac{x^2}{yz}, a_2 = \frac{y^2}{zx}, a_3 = \frac{z^2}{xy}$, ta có bất đẳng thức quen biết

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3(xyz)^2 \geq 2(y^3 z^3 + z^3 x^3 + x^3 y^3)$$

Bài 2. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Chứng minh: $a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq \frac{n-1}{2} \left(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$

Chứng minh

Ta có thể thu được bất đẳng thức này bằng cách cộng (3) với bất đẳng thức

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Bất đẳng thức cuối cùng thu được bằng cách cộng các bất đẳng thức $a_i^{n-1} + n-2 \geq (n-1)a_i$ với mọi i . Ta có

$$a_i^{n-1} + n-2 - (n-1)a_i = a_i^{n-1} - 1 - (n-1)(a_i - 1) = (a_i - 1) \left[(a_i^{n-2} - 1) + (a_i^{n-3} - 1) + \dots + (a_i - 1) \right] \geq 0$$

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Bài 3. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

Chứng minh rằng: $(n - a_1)(n - a_2) \dots (n - a_n) \geq (n - 1)^n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Chứng minh

Ta áp dụng định lý 1 cho hàm lồi $f(x) = -\ln x$ với $x > 0$.

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

Nhận xét. Từ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ suy ra $a_1 a_2 \dots a_n \leq 1$ (sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**),

bất đẳng thức trên mạnh hơn bất đẳng thức sau

$(n - a_1)(n - a_2) \dots (n - a_n) \geq (n - 1)^n a_1 a_2 \dots a_n$, bất đẳng thức này dễ dàng thu được bằng cách nhân tương ứng các bất đẳng thức sau:

$$n - a_1 = a_2 + \dots + a_n \geq (n - 1) \sqrt[n-1]{a_2 \dots a_n}$$

$\vdots$

$$n - a_n = a_1 + \dots + a_{n-1} \geq (n - 1) \sqrt[n-1]{a_1 \dots a_{n-1}}$$

Bài 4. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương, và $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ với mọi i .

Chứng minh rằng: $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$ (4)

Chứng minh

Đặt $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$. Sử dụng hệ thức $\frac{(n-1)b_i}{a_i} = \frac{na}{a_i} - 1$ và $\frac{a_i}{b_i} = \frac{na}{b_i} - n + 1$

với $i = 1, 2, \dots, n$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{n(n-2)}{a} \geq (n-1) \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right)$$

Bất đẳng thức này dễ dàng thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức **Popoviciu** mở rộng cho hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x > 0$.

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = 1$.

Bài 5. [AMM 1996]

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$ (5).

Chứng minh rằng: a. $\frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$ (6)

b. $\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$ (7)

Chứng minh

a. Bất đẳng thức này có thể thu được từ (4) theo cách sau. Giả sử rằng bất đẳng thức (6) là sai, nghĩa là có khả năng $\frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} < 1$. Ta sẽ chỉ ra

khi đó (5) cũng không thể đúng. Để chứng minh điều đó, đặt $x_i = \frac{1-a_i}{(n-1)a_i}$ với mọi

$i=1, 2, \dots, n$. Thế thì, bất đẳng thức trên dẫn tới $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$ và vì thế

$$1 - \sum_{j \neq i} a_j = (n-1)b_i \text{ với mọi } i=1, 2, \dots, n. \text{ Do đó } x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1-a_i}{(n-1)a_i} > \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$$

Đề ý tới (4), ta có $x_1 + x_2 + \dots + x_n > \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} > \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)a_i}{1-a_i} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$

Điều này chứng tỏ (5) không thể đúng. Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

b) Thay thế $\frac{1}{x_i}$ bởi x_i trong (6) và sử dụng (5), dẫn tới

$$\frac{x_1}{n-1+x_1} + \frac{x_2}{n-1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{n-1+x_n} \geq 1 \text{ là điều tương đương với (7)}$$

Bài 6. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) là các số dương thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

Chứng minh rằng: $\left(a_1 + \frac{1}{a_1} - 2\right) \left(a_2 + \frac{1}{a_2} - 2\right) \dots \left(a_n + \frac{1}{a_n} - 2\right) \geq \left(n + \frac{1}{n} - 2\right)^n$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Popoviciu mở rộng cho hàm lồi $f(x) = -\ln x$ với $x > 0$, ta thu

được $(b_1 b_2 \dots b_n)^{n-1} \geq (a_1 a_2 \dots a_n) \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{n(n-2)}$ trong đó $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ với mọi i .

Dưới điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, bất đẳng thức trở thành

$$(1-a_1)^{n-1} (1-a_2)^{n-1} \dots (1-a_n)^{n-1} \geq n^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2-n} a_1 a_2 \dots a_n \quad (8)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$(1-a_1) + (1-a_2) + \dots + (1-a_n) \geq n \cdot \sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n)}$$

Hay $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq (1-a_1)(1-a_2) \dots (1-a_n)$. Từ bất đẳng thức này, với $n \geq 3$ ta thu được

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n(n-3)} \geq (1-a_1)^2 (1-a_2)^2 \dots (1-a_n)^2 \geq (1-a_1)^{n-1} (1-a_2)^{n-1} \dots (1-a_n)^{n-1}$$

Nhân bất đẳng thức này với (8) dẫn tới bất đẳng thức mong muốn

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$

Bài 7.

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = ns$.

Chứng minh: $\frac{1}{x_1 + n - 1} + \frac{1}{x_2 + n - 1} + \dots + \frac{1}{x_n + n - 1} \geq \frac{1}{ns - x_1 + 1} + \frac{1}{ns - x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{ns - x_n + 1}$

Chứng minh

Theo bất đẳng thức **AM - GM**, ta có $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$

Từ $s \geq 1$ dẫn tới

Áp dụng bất đẳng thức **Popoviciu** mở rộng cho hàm lồi $f(x) = \frac{1}{1+(n-1)x}$ với $x > 0$, ta thu được

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(n-1)x_i} + \frac{n(n-2)}{1+(n-1)s} \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{ns - x_i + 1}$$

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng $(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + n-1} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(n-1)x_i} + \frac{n(n-2)}{1+(n-1)s}$

Với $n \geq 3$, bất đẳng thức này tương đương với $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i + n-1) \left(\frac{1}{x_i} + n-1 \right)} \geq \frac{1}{1+(n-1)s}$

hay $\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \dots + \frac{1}{A_n} \geq \frac{1}{1+(n-1)s}$ trong đó $A_i = (n-1) \left(x_i + \frac{1}{x_i} \right) + n^2 - 2n + 2$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \dots + \frac{1}{A_n} \geq \frac{n^2}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{n}{2(n-1)s + n^2 - 2n + 2}$$

Do đó, chỉ cần chứng minh rằng $\frac{n}{2(n-1)s + n^2 - 2n + 2} \geq \frac{1}{1+(n-1)s}$ là đủ

Dễ dàng kiểm tra bất đẳng thức trên là đúng với $s \geq 1$.

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

Bài 8. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 3$) là các số dương thỏa mãn $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ và

$$0 < p \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}. \text{ Chứng minh rằng } \frac{1}{\sqrt{1+px_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+px_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+px_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{1+p}}$$

Chứng minh

Ta giả sử bất đẳng thức ngược lại là có thể xảy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1+px_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+px_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+px_n}} > \frac{n}{\sqrt{1+p}} \text{ và chứng minh rằng bất đẳng thức này dẫn}$$

tới việc $x_1 x_2 \dots x_n < 1$, là điều trái với giả thiết $x_1 x_2 \dots x_n = 1$

Sử dụng phép đổi biến $1 + px_i = \frac{1+p}{a_i^2}$ ($a_i > 0$) với mọi $i = 1, 2, \dots, n$, ta sẽ chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > n \text{ dẫn tới } (1+p-a_1^2)(1+p-a_2^2) \dots (1+p-a_n^2) < p^n (a_1 a_2 \dots a_n)^2$$

Nhận xét rằng phân số $(1+p-a_i^2)/a_i^2$ tăng khi a_i giảm, ta chỉ cần xét trường hợp

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Ký hiệu $1+p = q^2, 1 < q \leq \frac{n}{n-1}$, bất đẳng thức trở thành

$$(q^2 - a_1^2)(q^2 - a_2^2) \dots (q^2 - a_n^2) \leq (q^2 - 1)^n (a_1 a_2 \dots a_n)^2 \quad (9)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Popoviciu** mở rộng cho hàm lồi $f(x) = -\ln\left(\frac{n}{n-1} - x\right)$ với

$$0 < x < 1 \text{ dẫn tới } (a_1 a_2 \dots a_n)^{n-1} \geq [n - (n-1)a_1][n - (n-1)a_2] \dots [n - (n-1)a_n] \quad (10)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức **Jensen** cho hàm lồi $f(x) = \ln \frac{n-(n-1)x}{q-x}$ dẫn tới

$$\frac{[n-(n-1)a_1][n-(n-1)a_2] \dots [n-(n-1)a_n]}{(q-a_1)(q-a_2) \dots (q-a_n)} \geq \frac{1}{(q-1)^n} \quad (11)$$

Nhân (10) và (11) ta có $(a_1 a_2 \dots a_n)^{n-1} \geq \frac{(q-a_1)(q-a_2) \dots (q-a_n)}{(q-1)^n}$

Vì vậy, để chứng minh (9), ta sẽ chỉ cần chứng tỏ rằng

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{n-3} (q+a_1)(q+a_2) \dots (q+a_n) \leq (q+1)^n$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM-GM**, ta có $a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n = 1$

$$\text{và } (q+a_1)(q+a_2) \dots (q+a_n) \leq \left(q + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n = (q+1)^n$$

từ đó rút ra kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

Bài 9 [Kvant, No.3,1979].

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n \cdot \sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

Chứng minh

Bất đẳng thức này thu được bằng cách áp dụng Định lý 2 cho hàm lồi $f(x) = e^x$ và thay thế $a_1, a_2, \dots, a_n$ lần lượt bởi $2 \ln x_1, 2 \ln x_2, \dots, 2 \ln x_n$

$$\text{Cuối cùng, sử dụng đẳng thức } 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Bài 10. Giả sử a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 4$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right) \left(1 + \frac{d}{a}\right) \geq (a+b+c+d)^2$$

Chứng minh

Áp dụng Định lý 2 cho hàm lồi $f(x) = -\ln x$, ta có

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(a+c)(b+d) \geq 4abcd(a+b+c+d)^2$$

Từ $(a+c)(b+d) = ab + bc + cd + da = 4$, bất đẳng thức trở thành

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geq abcd(a+b+c+d)^2 \text{ hay}$$

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right) \left(1 + \frac{d}{a}\right) \geq (a+b+c+d)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

§16. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TÍCH PHÂN RIMAN

I. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

1. **Mệnh đề 1:** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{thì } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

2. **Mệnh đề 2:** Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{thì } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3. **Mệnh đề 3:** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{và } f(x) \text{ không đồng nhất bằng } 0 \text{ trên } [a, b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx > 0$$

4. **Mệnh đề 4:** Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ và $f(x), g(x)$ không đồng nhất với nhau trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

5. **Mệnh đề 5:** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ và $f(x)$ không đồng nhất với m hoặc M thì $m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$

6. **Mệnh đề 6:** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

7. **Mệnh đề 7:** Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) g(x)| dx$$

8. **Định lý về giá trị trung bình:** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in [a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

9. **Định lý mở rộng về giá trị trung bình:** Giả sử f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$.

Nếu $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ hoặc $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

II. BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b $	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) $
$\int m^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln m} m^{ax+b}$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) $
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b)$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right $	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$	$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \left \frac{x}{a} \right $	$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2)$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} \right $	$\int \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2)$
$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \frac{ax+b}{2} \right $
$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{\cos(ax+b)} = \frac{1}{a} \ln \left \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax+b}{2} \right) \right $
$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right $	$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2}$
$\int \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$	$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2+b^2}$
$\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} \right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \arctan \frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$	

III. CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Bài 1. Chứng minh rằng:
$$\frac{\pi}{16} < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \frac{\pi}{10}$$

Chứng minh

Xét $f(x) = \frac{1}{5+3\cos^3 x}$ liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $0 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow 0 \leq \cos^3 x \leq 1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{5+3\cos^3 x} \leq \frac{1}{5} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{16} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8} dx < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} dx = \frac{\pi}{10}$$

Bài 2. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Chứng minh

$$\text{Do } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq x^{2n} \leq x^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 \leq 1 - x^{2n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} \leq \frac{1}{1-x^{2n}} \leq \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^{1/2} dx < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Bài 3. Chứng minh rằng:
$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Chứng minh

$$\text{Do } x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x^3 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < 4 - 2x^2 \leq 4 - x^2 - x^3 \leq 4 - x^2$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{4-2x^2} \leq \sqrt{4-x^2-x^3} \leq \sqrt{4-x^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\ln 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \frac{\pi}{4}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x\sqrt{x} \leq x \Rightarrow 1+x^2 \leq 1+x\sqrt{x} \leq 1+x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln |1+x|_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $0 < \int_0^{\pi/4} x\sqrt{\tan x} dx < \frac{\pi^2}{32}$

Chứng minh

Do $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x\sqrt{\tan x} \leq x \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi/4} x\sqrt{\tan x} dx < \int_0^{\pi/4} x dx = \frac{\pi^2}{32}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{26\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{25} dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \frac{1}{26}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1] \Rightarrow 1 \leq 1+x^{10} \leq 1+1=2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt[3]{1+x^{10}} \leq \sqrt[3]{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \leq x^{25} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{25} dx}{\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{25} dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \int_0^1 x^{25} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{26\sqrt[3]{2}} = \frac{x^{26}}{26\sqrt[3]{2}} \Big|_0^1 < \int_0^1 \frac{x^{25} dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \frac{x^{26}}{26} \Big|_0^1 = \frac{1}{26}$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{1-x} \sin x dx}{x^2+1} < \frac{\pi}{12}$

Chứng minh

Do $x \in [1, \sqrt{3}] \Rightarrow 1 \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin x \leq 1 \\ 1-x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow e^{1-x} \sin x \leq 1$

$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{1-x} \sin x dx}{x^2+1} < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}$

Chứng minh

$$\text{Xét } f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ với } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\text{Xét } g(x) = x \cos x - \sin x \Rightarrow g'(x) = -x \sin x < 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}-6}{12} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{3}{\pi} \Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\pi} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{3}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{12} < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x}{x} dx < \frac{1}{3}$

Chứng minh

$$\text{Xét } f(x) = \frac{\cot x}{x} \text{ với } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow f'(x) = -\frac{x(1 + \cot^2 x) + \cot x}{x^2} < 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} \leq f(x) \leq \frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{3}}{\pi} dx < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x}{x} dx < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{4}{\pi} dx = \frac{1}{3}$$

Bài 10. 1. Tìm $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx$

2. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$

Chứng minh

$$1. \text{ Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \text{ Khi đó}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (t-1)^2} = \arctan(t-1) \Big|_0^1 = \arctan 0 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}$$

$$2. \frac{\pi}{2} = I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} + \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x(2 + \sin^4 x + \cos^4 x)}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x(3 - 2\sin^2 x \cos^2 x)}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x (6 - \sin^2 2x)}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx < \int_0^{\pi/2} \frac{6 \sin x \cos x}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx$$

Bài 11.

$$1. \text{ Tìm } I(t) = \int_0^t \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx \text{ với } 0 < t < \frac{\pi}{4}$$

$$2. \text{ Chứng minh rằng: } \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) > e^{\frac{2}{3}(\tan^3 t + 3 \tan t)} \text{ với } 0 < t < \frac{\pi}{4}$$

Chứng minh

$$1. I(t) = \int_0^t \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^t \frac{\tan^4 x dx}{(1 - \tan^2 x) \cos^2 x} = \int_0^t \frac{\tan^4 x d(\tan x)}{1 - \tan^2 x} = \int_0^t \frac{[(\tan^4 x - 1) + 1] d(\tan x)}{1 - \tan^2 x}$$

$$= \int_0^t \left(\tan^2 x + 1 + \frac{1}{\tan^2 x - 1} \right) d(\tan x) = - \left[\frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right| \right]_0^t$$

$$= - \left[\frac{\tan^3 t}{3} + \tan t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan t - 1}{\tan t + 1} \right| \right] = - \frac{1}{3} \tan^3 t - \tan t + \frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ với } 0 < t < \frac{\pi}{4}$$

$$2. \text{ Do } \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} > 0 \forall 0 < t < \frac{\pi}{4} \Rightarrow I(t) = \int_0^t \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = - \frac{1}{3} \tan^3 t - \tan t + \frac{1}{2} \ln \tan \left(t + \frac{\pi}{4} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \tan \left(t + \frac{\pi}{4} \right) > \frac{2}{3} (\tan^3 t + 3 \tan t) \Leftrightarrow \tan \left(t + \frac{\pi}{4} \right) > e^{\frac{2}{3}(\tan^3 t + 3 \tan t)}$$

Bài 12. Chứng minh rằng: $I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$; $J = \int_0^1 e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4}$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $e' > 1 + t \quad \forall t > 0$

• **Chứng minh:** $e' > 1 + t \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow g(t) = e' - t > 1 \quad \forall t > 0$

Ta có $g'(t) = e' - 1 > e^0 - 1 = 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$

$\Rightarrow g(t) > g(0) = 1 \Rightarrow e' - t > 1 \Rightarrow e' > 1 + t \quad \forall t > 0$

• **Áp dụng:** Sử dụng bổ đề ta có $e^{\sin^2 x} > 1 + \sin^2 x$, do đó

$$I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \int_0^{\pi} (1 + \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \left[\frac{3x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Mặt khác $e^{-x^2} > 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \neq 0$ suy ra

$$J = \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

Chứng minh

Xét $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}}$ với $x \in [0, \pi]$. Đặt $t = \cos x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow f(x) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$ với $t \in [-1, 1]$. Ta có $g'(t) = \frac{-2t - 1}{2(t^2 + t + 1)\sqrt{t^2 + t + 1}}$

$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Bảng biến thiên của $g(t)$ với $t \in [-1, 1]$

Nhìn bảng biến thiên suy ra,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \leq g(t) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3}} &< \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \int_0^{\pi} \frac{2dx}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi\sqrt{3}}{3} &< \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

t	-1	-1/2	1
g'	+	0	-
g	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 14. Chứng minh rằng: $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\sin x} (1 + 2\sqrt{\sin x}) (8 - 5\sqrt{\sin x}) dx < \frac{3\pi}{2}$

Chứng minh

Đặt $f(x) = \sqrt{\sin x} (1 + 2\sqrt{\sin x}) (8 - 5\sqrt{\sin x})$. Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{\sin x} (1 + 2\sqrt{\sin x}) (8 - 5\sqrt{\sin x}) \leq \frac{1}{3} \left[\frac{3\sqrt{\sin x} + (1 + 2\sqrt{\sin x}) + (8 - 5\sqrt{\sin x})}{3} \right]^3 = 9$$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\sin x} (1 + 2\sqrt{\sin x}) (8 - 5\sqrt{\sin x}) dx < \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9 dx = 9 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

Bài 15. Chứng minh rằng:

$$I = \int_{-1}^1 (\sqrt[4]{1+x^4} + \sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt[4]{1-x^4} + \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt{1-x^2}) dx < 12$$

Chứng minh

$$+ \begin{cases} \sqrt[4]{1-x^4} = \sqrt[4]{(1-x^4) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(1-x^4) + 1 + 1 + 1}{4} = \frac{4-x^4}{4} \\ \sqrt[4]{1+x^4} = \sqrt[4]{(1+x^4) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(1+x^4) + 1 + 1 + 1}{4} = \frac{4+x^4}{4} \\ \sqrt[3]{1-x^3} = \sqrt[3]{(1-x^3) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(1-x^3) + 1 + 1}{3} = \frac{3-x^3}{3} \\ \sqrt[3]{1+x^3} = \sqrt[3]{(1+x^3) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{(1+x^3) + 1 + 1}{3} = \frac{3+x^3}{3} \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x^2) \cdot 1} \leq \frac{(1-x^2) + 1}{2} = \frac{2-x^2}{2} \\ \sqrt{1+x^2} = \sqrt{(1+x^2) \cdot 1} \leq \frac{(1+x^2) + 1}{2} = \frac{2+x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{1-x^4} + \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[4]{1+x^4} \leq 6$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 (\sqrt[4]{1+x^4} + \sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt[4]{1-x^4} + \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt{1-x^2}) dx < \int_{-1}^1 6 dx = 12$$

Bài 16. Chứng minh rằng: $I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} e^{\tan x} dx > 2(e^{\pi/2} - 1)$

Chứng minh

• **Bổ đề:** $\sin x + \tan x > 2x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• **Chứng minh:** $\sin x + \tan x > 2x \Leftrightarrow f(x) = \sin x + \tan x - 2x > 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{(\cos^2 x - 1)^2}{\cos^2 x} \geq 0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• **Áp dụng:** Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$e^{\sin x} + e^{\tan x} \geq 2\sqrt{e^{\sin x + \tan x}} \geq 2 \cdot \sqrt{e^{2x}} = 2e^x$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} e^{\tan x} dx = \int_0^{\pi/2} (e^{\sin x} + e^{\tan x}) dx > \int_0^{\pi/2} 2e^x dx = 2e^x \Big|_0^{\pi/2} = 2(e^{\pi/2} - 1)$$

Bài 17. Chứng minh rằng: $I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x} dx < \frac{1}{200\pi}$

Chứng minh

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{d(\sin x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \Big|_{100\pi}^{200\pi} + \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{100\pi}^{200\pi} = \frac{1}{200\pi} \Rightarrow \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x} dx < \frac{1}{200\pi}$$

Bài 18. Chứng minh rằng:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} dx + \int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{3\cos^2 x + 5\sin^2 x} dx < \pi\sqrt{2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **BunhiaCôpski** ta có

$$\sqrt[4]{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} + \sqrt[4]{3\cos^2 x + 5\sin^2 x} \leq$$

$$\leq \sqrt{(1^2 + 1^2) [\sqrt{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} + \sqrt{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}]}$$

$$\leq \sqrt{2\sqrt{(1^2 + 1^2) [(3\sin^2 x + 5\cos^2 x) + (3\cos^2 x + 5\sin^2 x)]}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} [\sqrt[4]{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} + \sqrt[4]{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}] dx < \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{2} dx = \pi\sqrt{2}$$

Bài 19. Chứng minh rằng $\forall \alpha > 0$ ta có bất đẳng thức sau:

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha dx + \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha dx > \pi 3^{\alpha-1}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha \geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha} \\
 & = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1 + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)^\alpha} = 2 \sqrt{\left(\frac{2 + \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)^\alpha} = 2 \sqrt{\left(\frac{8}{\sin^2 2x} + 1\right)^\alpha} \\
 & = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{\sin^2 2x} + 1\right)^\alpha} \geq 2 \sqrt{\left(\frac{8}{1} + 1\right)^\alpha} = 2 \cdot 3^\alpha \\
 & I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha \right] dx > \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2 \cdot 3^\alpha dx = 2 \cdot 3^\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi \cdot 3^{\alpha-1}
 \end{aligned}$$

Bài 20. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $\left| \int_0^\pi e^{x^2} \sin nx \, dx \right| \leq \frac{2e^{\pi^2}}{n}$

Chứng minh

Đặt $I_n = \int_0^\pi e^{x^2} \sin nx \, dx$; $u = e^{x^2} \Rightarrow du = 2xe^{x^2} \, dx$, $dv = \sin nx \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx$

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I_n = \frac{-e^{x^2}}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} \left[(-1)^n e^{\pi^2} - 1 \right] + \frac{2}{n} \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx$$

Đặt $J_n = \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx \Rightarrow nI_n - 2J_n = 1 - (-1)^n e^{\pi^2} \Rightarrow I_n = \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2} + 2J_n}{n}$

$$\Rightarrow |I_n| = \left| \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2}}{n} + \frac{2J_n}{n} \right| \leq \left| \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2}}{n} \right| + \left| \frac{2J_n}{n} \right| \leq \frac{1 + e^{\pi^2}}{n} + \frac{2}{n} |J_n|$$

Mặt khác $|J_n| = \left| \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx \right| \leq \int_0^\pi x e^{x^2} |\cos nx| \, dx = \int_0^\pi x e^{x^2} |\cos nx| \, dx$

$$\Rightarrow |J_n| \leq \int_0^\pi x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{x^2} d(x^2) = \frac{e^{\pi^2} - 1}{2} \Rightarrow |I_n| \leq \frac{1 + e^{\pi^2}}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{\pi^2} - 1}{2} = \frac{2e^{\pi^2}}{n}$$

Bài 21. Cho $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Chứng minh

Nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < 1 \Rightarrow \sin^{n+1} x < \sin^n x$ tức là $I_n > I_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha \geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1 + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)^\alpha} = 2 \sqrt{\left(\frac{2 + \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)^\alpha} = 2 \sqrt{\left(\frac{8}{\sin^2 2x} + 1\right)^\alpha} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{8}{\sin^2 2x} + 1\right)^\alpha} \geq 2 \sqrt{\left(\frac{8}{1} + 1\right)^\alpha} = 2 \cdot 3^\alpha \\ &I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^\alpha + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^\alpha\right] dx > \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2 \cdot 3^\alpha dx = 2 \cdot 3^\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi \cdot 3^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Bài 20. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $\left| \int_0^\pi e^{x^2} \sin nx \, dx \right| \leq \frac{2e^{\pi^2}}{n}$

Chứng minh

Đặt $I_n = \int_0^\pi e^{x^2} \sin nx \, dx$; $u = e^{x^2} \Rightarrow du = 2xe^{x^2} dx$, $dv = \sin nx \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx$

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I_n = \frac{-e^{x^2}}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} [(-1)^n e^{\pi^2} - 1] + \frac{2}{n} \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx$$

Đặt $J_n = \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx \Rightarrow nI_n - 2J_n = 1 - (-1)^n e^{\pi^2} \Rightarrow I_n = \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2} + 2J_n}{n}$

$$\Rightarrow |I_n| = \left| \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2}}{n} + \frac{2J_n}{n} \right| \leq \left| \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2}}{n} \right| + \left| \frac{2J_n}{n} \right| \leq \frac{1 + e^{\pi^2}}{n} + \frac{2}{n} |J_n|$$

Mặt khác $|J_n| = \left| \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx \, dx \right| \leq \int_0^\pi x e^{x^2} |\cos nx| \, dx = \int_0^\pi x e^{x^2} |\cos nx| \, dx$

$$\Rightarrow |J_n| \leq \int_0^\pi x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{x^2} d(x^2) = \frac{e^{\pi^2} - 1}{2} \Rightarrow |I_n| \leq \frac{1 + e^{\pi^2}}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{\pi^2} - 1}{2} = \frac{2e^{\pi^2}}{n}$$

Bài 21. Cho $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Chứng minh

Nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < 1 \Rightarrow \sin^{n+1} x < \sin^n x$ tức là $I_n > I_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$

Xét $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx$. Đặt $u = \sin^{n+1} x$ theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I_{n+2} = -\sin^{n+1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

Xét hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức $f(n) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}$

$$\Rightarrow f(n+1) = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} \Rightarrow f(n+1) = (n+2)I_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} I_n = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}$$

$$\Rightarrow f(n+1) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = f(0) = I_0 \cdot I_1 = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Do } I_{n+1} < I_n \text{ ta có } \frac{\pi}{2} = f(n) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1} < (n+1)I_n^2 \Rightarrow I_n^2 > \frac{\pi}{2(n+1)} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ta có } I_{n-1} > I_n \text{ suy ra } \frac{\pi}{2} = f(n-1) = nI_{n-1} \cdot I_n > nI_n^2 \Rightarrow I_n^2 < \frac{\pi}{2n} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{\pi}{2(n+1)} < I_n^2 < \frac{\pi}{2n} \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Bài 22. Chứng minh rằng: $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

Chứng minh

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x} \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} \, dx \\ v = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases} \text{ Khi đó suy ra:}$$

$$I_n = -\frac{2}{3} x^n (1-x)\sqrt{1-x} \Big|_0^1 + \frac{2}{3} n \int_0^1 (1-x) x^{n-1} \sqrt{1-x} \, dx$$

$$I_n = \frac{2}{3} n \left[\int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} \, dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx \right] = \frac{2}{3} n (I_{n-1} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4) \dots \times 6 \times 4 \times 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1) \dots \times 9 \times 7 \times 5} I_0 \quad \text{trong đó } I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n-2}{2n+1} \cdot \frac{2n-4}{2n-1} \dots \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_0 \quad \text{Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:}$$

$$\sqrt{(2k+2)2k} < \frac{(2k+2)+2k}{2} = 2k+1 \Rightarrow \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{\sqrt{(2k+2)2k}}$$

$$\Rightarrow I_n < \frac{2n}{\sqrt{(2n+4)(2n+2)}} \cdot \frac{2n-2}{\sqrt{(2n+2)2n}} \cdot \frac{2n-4}{\sqrt{2n(2n-2)}} \cdots \frac{6}{\sqrt{10 \times 8}} \cdot \frac{4}{\sqrt{8 \times 6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6 \times 4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 \times 2}}$$

$$\Rightarrow I_n < \frac{2\sqrt{2}}{(2n+2)\sqrt{(2n+4)}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

Bài 23. Cho $|I_n| \leq \frac{1}{2}(e^{\pi^2} - 1)$. Chứng minh rằng: $I_n = \int_0^{\pi} x e^{x^2} \cos nx \, dx$

Chứng minh

$$|I_n| = \left| \int_0^{\pi} x e^{x^2} \cos nx \, dx \right| \leq \int_0^{\pi} |x e^{x^2} \cos nx| \, dx \leq \int_0^{\pi} x e^{x^2} \, dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} d(e^{x^2}) = \frac{1}{2}(e^{\pi^2} - 1)$$

Bài 24. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^m e^{2x} \, dx > \frac{\pi^{m+2}}{m+2} + \frac{\pi^{m+3}}{m+3} \quad (m \in \mathbb{N})$

Chứng minh

Xét $f(x) = e^{2x} - 2(x^2 + x)$, $x \geq 0$. Ta có: $f'(x) = 2(e^{2x} - 2x - 1)$

$\Rightarrow f''(x) = 4(e^{2x} - 1) \geq 0$, $\forall x \geq 0 \Rightarrow f'(x)$ đồng biến $\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1$ thì $e^{2x} \geq 2(x^2 + x) + 1 > 2(x^2 + x)$, $\forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^m e^{2x} \, dx > \int_0^{\pi} x^m (x^2 + x) \, dx = \left[\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{m+3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^{m+2}}{m+2} + \frac{\pi^{m+3}}{m+3}$$

Bài 25. Chứng minh rằng: $\int_0^{1/n} \left(\sum_{k=1}^n \cos^{km} x + n \sin x \right) dx < \frac{5}{4}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$

Chứng minh

Ta có: $\cos^{km} x \leq \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = \frac{5}{4} - \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{5}{4}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \cos^{km} x + \sin x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \cos^{km} x + n \sin x < \frac{5}{4} \cdot n \Rightarrow \int_0^{1/n} \left(\sum_{k=1}^n \cos^{km} x + n \sin x \right) dx < \int_0^{1/n} \frac{5}{4} \cdot n \, dx = \frac{5}{4}$$

Bài 26. Chứng minh rằng: $\int_0^{4\pi} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x) \, dx < 10\pi$

Chứng minh

$$f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x + 2 \sin 2x \cos x = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x \cos x$$

Sử dụng bất đẳng thức **Buniakowski** ta có:

$$f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x \sin 2x \leq \sqrt{4(\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 2x)} \leq$$

$$2\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 2x} = 2\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 - \cos^2 2x} = 2\sqrt{\frac{25}{16} - \left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2} \leq 2\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{4\pi} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x) dx = \int_0^{4\pi} f(x) dx < \int_0^{4\pi} \frac{5}{2} dx = \frac{5}{2} \cdot 4\pi = 10\pi$$

Bài 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1703}{1800}$

Chứng minh

Bước 1: Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \in (0, 1] \Rightarrow f(x) \text{ liên tục trên } (0, 1].$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

Bước 2: Bỏ đề: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x > 0$

Chứng minh: • $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{3!} - x + \sin x > 0 \quad \forall x > 0$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x^2}{2!} - 1 + \cos x \Rightarrow f''(x) = x - \sin x \Rightarrow f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \text{ tăng trên } [0, +\infty) \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ tăng trên } [0, +\infty) \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ tăng trên } [0, +\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

$$\bullet \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow g(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x - \sin x > 0 \quad \forall x > 0$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} + 1 - \cos x \Rightarrow g''(x) = \frac{x^3}{3!} - x + \sin x = f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow g'(x) \text{ tăng trên } [0, +\infty) \Rightarrow g'(x) > g'(0) = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ tăng trên } [0, +\infty) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bước 3: Áp dụng: $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}, \quad \forall x > 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x^3}{18}\right) \Big|_0^1 < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right) \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{17}{18} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1703}{1800}$$

IV. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TÍCH PHÂN RIMAN

Bài 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \quad (\text{Bất đẳng thức CBS})$$

Chứng minh

$$\text{Ta có } 0 \leq [tf(x) + g(x)]^2 = t^2 f^2(x) + 2t f(x)g(x) + g^2(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 0 < \int_a^b [t^2 f^2(x) + 2t f(x)g(x) + g^2(x)] dx = t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

$$\Leftrightarrow F(t) = t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

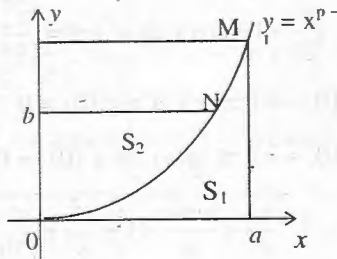
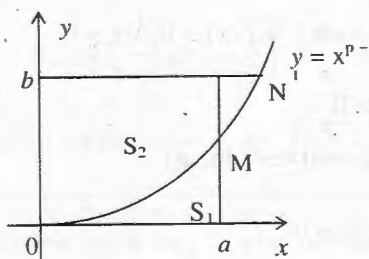
Bài 2. Cho $p, q > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b > 0$

(Bất đẳng thức Young)

Chứng minh

Xét hàm số $y = x^{p-1}$ liên tục và đồng biến trên $(0, +\infty)$ và có tập giá trị là $(0, +\infty)$

nên nó có hàm số ngược là $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ trên khoảng $(0, +\infty)$. Đường thẳng $x = a$ và $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = x^{p-1}$ tại các điểm M, N (xem hình vẽ)



Gọi S_1 là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $\{y=0; x=a; y=x^{p-1}\}$,

S_2 là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $\{x=0; y=b; x=y^{q-1}\}$

và S là diện tích hình chữ nhật tạo bởi các đường $\{x=0; x=a; y=0; y=b\}$

Ta có $S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$; $S_2 = \int_0^a y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$; $S = ab$.

Nhìn vào đồ thì ta có thể thấy rằng $S_1 + S_2 \geq S \Leftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$

Bài 3. Chứng minh rằng: Nếu $a_i, b_j \geq 0$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p > 1$ thì

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_n b_m}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} \left(\sum_{n=1}^k a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^k b_m^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{Bất đẳng thức Hilbert})$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(\sum_{n=1}^k a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^k b_m^q \right)^{\frac{1}{q}} = 1$. Sử dụng bất đẳng thức Young ta có

$$\frac{a_n b_m}{n+m} = \left(n^{\frac{1}{p}} a_n m^{\frac{1}{q}} b_m \right) \cdot \frac{1}{(n+m) n^{\frac{1}{p}} m^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\frac{n a_n^p}{p} + \frac{m b_m^q}{q} \right) \frac{1}{(n+m) n^{\frac{1}{p}} m^{\frac{1}{q}}}$$

$$\text{Vì vậy suy ra } \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \frac{1}{p} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{n^{\frac{1}{p}} a_n^p}{(n+m) m^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{q} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{m^{\frac{1}{q}} b_m^q}{(n+m) n^{\frac{1}{p}}}$$

Sử dụng các đánh giá tích phân cơ bản ta có thể dễ dàng chứng minh rằng

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{(n+m) m^{\frac{1}{q}}} \leq p \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^{\frac{1}{q}}}{(n+m) n^{\frac{1}{p}}} \leq q \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{q}}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}$$

Bài 4. Cho $p, q > 1$ với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 > 0: A|f(x)|^p = B|g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b]$$

(Bất đẳng thức tích phân Holder)

Chứng minh

Xét hai khả năng sau đây:

- Nếu $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$ thì do $|f(x)|^p \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ nên suy ra $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow f(x)g(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

• Giả sử $\int_a^b |f(x)|^p dx > 0$ và $\int_a^b |g(x)|^q dx > 0$

Sử dụng bất đẳng thức **Young** với $a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ và $b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$

Ta có $\frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}, \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b |f(x)g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 5. Cho $p > 1$ và f, g là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Bất đẳng thức tích phân Minkowski)

Chứng minh

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_a^b |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \quad (1)$$

Cho $q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sử dụng bất đẳng thức **Holder** cho hai hàm số liên tục

$$|f(x)| \text{ và } |f(x) + g(x)|^{p-1} \text{ Ta có } \int_a^b |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

Tương tự như trên ta sử dụng bất đẳng thức **Holder** cho hai hàm số liên tục $|g(x)|$ và

$$|f(x) + g(x)|^{p-1} \text{ Ta có: } \int_a^b |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4)$$

+ Nếu $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx = 0$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đã cho đúng.

+ Nếu $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx > 0$ thì hai vế của (4) cho $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Bài 6. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a, b]$, $f(x) \neq 0$ và $m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

$$\text{Chúng minh rằng: } \int_a^b g^2(x) dx + Mm \int_a^b f^2(x) dx \leq (M+m) \int_a^b f(x)g(x) dx$$

(Bất đẳng thức tích phân Diaz)

Chứng minh

$$\text{Ta có } m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{g(x)}{f(x)} - m \right) \left(M - \frac{g(x)}{f(x)} \right) f^2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -g^2(x) + (M+m)f(x)g(x) - Mmf^2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b g^2(x) dx + Mm \int_a^b f^2(x) dx \leq (M+m) \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Bài 7. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và $\begin{cases} 0 < a \leq f(x) \leq A \\ 0 < b \leq g(x) \leq B \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{Chúng minh rằng: } \frac{(ab + AB)^2}{4aAbB} \geq \frac{\int_a^b g^2(x) dx \cdot \int_a^b f^2(x) dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2} \geq \frac{4aAbB}{(ab + AB)^2}$$

(Bất đẳng thức tích phân G.Polya)

Chứng minh

Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{b}{A} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{B}{a} \quad \forall x \in [a, b]$. Sử dụng bất đẳng thức tích phân Diaz với

$$M = \frac{B}{a} \quad \text{và} \quad m = \frac{b}{A}. \text{ Ta có } \int_a^b g^2(x) dx + \frac{bB}{aA} \int_a^b f^2(x) dx \leq \left(\frac{B}{a} + \frac{b}{A} \right) \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\int_a^b g^2(x) dx + \frac{bB}{aA} \int_a^b f^2(x) dx \geq 2 \sqrt{\frac{bB}{aA} \int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4 \frac{bB}{aA} \int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx \leq \left(\frac{B}{a} + \frac{b}{A} \right)^2 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b g^2(x) dx \cdot \int_a^b f^2(x) dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2} \leq \frac{\left(\frac{B}{a} + \frac{b}{A} \right)^2}{4 \frac{bB}{aA}} = \frac{(ab + AB)^2}{4aAbB}. \text{ Ta có } \frac{4aAbB}{(ab + AB)^2} \leq 1.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\frac{\int_a^b g^2(x) dx \int_a^b f^2(x) dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{4aAbB}{(ab + AB)^2} \leq \frac{\int_a^b g^2(x) dx \cdot \int_a^b f^2(x) dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2}$$

Bài 8. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a, b]$.

1. Chứng minh rằng: Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm cùng đồng biến hoặc là hai hàm cùng nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \geq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right)$$

2. Chứng minh rằng: Nếu $f(x), g(x)$ có tính đơn điệu ngược chiều nhau tức là một hàm đồng biến và một hàm nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức tích phân Chebyshev)

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh $f(x), g(x)$ là hai hàm liên tục và đồng biến $[a, b]$

$$\text{Ta có } f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(a) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(b) dx$$

$$\Leftrightarrow f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(b)(b-a) \Leftrightarrow f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(b) \quad (1)$$

Theo định lý về giá trị trung gian của một hàm số liên tục thì tồn tại điểm $x_0 \in [a, b]$

sao cho $f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Mặt khác, do $f(x), g(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ nên

$$[f(x) - f(x_0)][g(x) - g(x_0)] \geq 0 \text{ với mọi } x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - g(x_0)f(x) + f(x_0)g(x_0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b [f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - g(x_0)f(x) + f(x_0)g(x_0)] dx$$

$$= \int_a^b f(x)g(x) dx - f(x_0) \int_a^b g(x) dx - g(x_0) \int_a^b f(x) dx + f(x_0)g(x_0)(b-a)$$

$$= \int_a^b f(x)g(x) dx - f(x_0) \int_a^b g(x) dx - g(x_0)f(x_0)(b-a) + f(x_0)g(x_0)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx \geq f(x_0) \int_a^b g(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 9. Cho hai hàm số f, g liên tục: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \left(\int_0^1 f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$$

Chứng minh

$$\text{Do } f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 0 \leq g(x) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x)g(x) \leq f(x) \\ 0 \leq f(x)g(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \\ 0 \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx \end{cases} \Rightarrow \left(\int_0^1 f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$$

Bài 10. Cho $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0, 1]$ và $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 1]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)} dx \leq \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** cho hai hàm số:

$$F(x) = \sqrt{1-f^2(x)} \text{ và } g(x) \equiv 1 \text{ với } x \in [0, 1] \text{ Ta có}$$

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)} dx \right)^2 \leq \int_0^1 [1-f^2(x)] dx \int_0^1 dx \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)} dx \leq \sqrt{1 - \int_0^1 f^2(x) dx} \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ ta có

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 dx \Rightarrow 1 - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq 1 - \int_0^1 f^2(x) dx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)} dx \leq \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2}$ (đpcm)

Bài 11. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[0, 1]$ và $f(1) - f(0) = 1$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS cho hai hàm số $f'(x)$ và $g(x) \equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \int_0^1 1 dx \Rightarrow \left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

Theo công thức *Newton - Leibnitz* thì:

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$$

Bài 12. Cho $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $1 \leq f(x) \leq 2 \forall x \in [0, 1]$ và

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}. \quad \text{Chứng minh rằng: } \frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{3}{4}$$

Giải

$$\bullet \forall x \in [0, 1] \text{ Ta có } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \int_0^1 1 dx = 1$$

$$\text{Sử dụng CBS ta có } 1 = \left(\int_0^1 dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{2}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}} \Rightarrow f(x) = \lambda = \frac{3}{2}, \forall x \in [0, 1]$$

$$\bullet \forall x \in [0, 1] \text{ Ta có } 1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq [2 - f(x)][f(x) - 1] = -f^2(x) + 3f(x) - 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{f(x)} + f(x) \leq 3 \Rightarrow 2 \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{f(x)} + f(x) \right] dx < \int_0^1 3 dx = 3$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{3}{4} \text{ (Bạn phải chứng minh rằng dấu bằng không xảy ra)}$$

Bài 13. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^1 f(x) dx = a > 0 \text{ và } 0 \leq f(x) \leq a^{\frac{2}{3}}. \text{ Chứng minh rằng: } \int_0^1 \sqrt{f(x)} dx = a^{\frac{2}{3}}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)} dx \leq \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2}$ (đpcm)

Bài 11. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[0, 1]$ và $f(1) - f(0) = 1$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** cho hai hàm số $f'(x)$ và $g(x) \equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \int_0^1 dx \Rightarrow \left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

Theo công thức **Newton - Leibnitz** thì:

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$$

Bài 12. Cho $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $1 \leq f(x) \leq 2 \forall x \in [0, 1]$ và

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{2}{3} \leq \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{3}{4}$$

Giải

$$\bullet \forall x \in [0, 1] \text{ Ta có } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \int_0^1 dx = 1$$

$$\text{Sử dụng CBS ta có } 1 = \left(\int_0^1 dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{2}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}} \Rightarrow f(x) = \lambda = \frac{3}{2}, \forall x \in [0, 1]$$

$$\bullet \forall x \in [0, 1] \text{ Ta có } 1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq [2 - f(x)][f(x) - 1] = -f^2(x) + 3f(x) - 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{f(x)} + f(x) \leq 3 \Rightarrow 2 \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{f(x)} + f(x) \right] dx < \int_0^1 3 dx = 3$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{3}{4} \text{ (Bạn phải chứng minh rằng dấu bằng không xảy ra)}$$

Bài 13. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn điều kiện:

$$\int_0^1 f(x) dx = a > 0 \text{ và } 0 \leq f(x) \leq a^{\frac{2}{3}}. \text{ Chứng minh rằng: } \int_0^1 \sqrt{f(x)} dx = a^{\frac{2}{3}}$$

Giải

Ta có: $\int_0^1 \sqrt{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \geq \int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \int_0^1 f(x) dx = \frac{a}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}$

Bài 14. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1] \text{ và } f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$$

a. Chứng minh rằng: $0 < \int_0^1 f(x) dx < 1$

b. Biết $c = \int_0^1 f(x) dx$. Đặt $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Chứng minh rằng: $\begin{cases} F(x) \leq x & \text{khi } 0 \leq x \leq c \\ F(x) \leq c & \text{khi } c \leq x \leq 1 \end{cases}$

c. Chứng minh rằng: $\int_0^1 F(x) dx < c - \frac{c^2}{2}$

d. Sử dụng kết quả trên chứng minh rằng: $\frac{c^2}{2} < \int_0^1 xf(x) dx < c - \frac{c^2}{2}$

Chứng minh

a. Ta có $0 \leq f(x) \leq 1$ và $f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 1 dx = 1 \Rightarrow$ (đpcm)

b. Ta có $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ với $F(0) = 0, F(1) = c; F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow F(x)$ đồng biến trên $[0, 1] \Rightarrow F(x) \leq F(1) = c \quad (1)$

Mặt khác từ giả thiết $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow 0 \leq f(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, x] \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt < \int_0^x 1 dt = x \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $F(x) \leq \min\{x, c\} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) \leq x & \text{nếu } 0 \leq x \leq c \\ F(x) \leq c & \text{nếu } c \leq x \leq 1 \end{cases}$

c. Theo b. Ta có $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^c F(x) dx + \int_c^1 F(x) dx \leq \int_0^c x dx + \int_c^1 c dx = c - \frac{c^2}{2}$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = x & \text{if } 0 \leq x \leq c \\ F(x) = c & \text{if } c \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(c^-) = 1 \\ F'(c^+) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{không tồn tại } F'(c)$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $F(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

Vậy dấu bằng không xảy ra hay ta có $\int_0^1 F(x) dx < c - \frac{c^2}{2}$

d. Chứng minh: $\frac{c^2}{2} < \int_0^1 xf(x) dx < c - \frac{c^2}{2}$

$$\int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 x d(F(x)) = xF(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx > F(1) - \left(c - \frac{c^2}{2}\right) = \frac{c^2}{2}$$

Xét hàm số $g(x) = 1 - f(x) \Rightarrow g(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và $g(0) = g(1) = \frac{1}{2}$

Do $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện của hàm f có mặt trong giả thiết đồng thời

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 [1 - f(x)] dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 - c, \text{ sử dụng bất đẳng thức}$$

$$\int_0^1 xf(x) dx > \frac{c^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 xg(x) dx > \frac{(1-c)^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 x[1 - f(x)] dx > \frac{(1-c)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x dx - \int_0^1 xf(x) dx > \frac{(1-c)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{(1-c)^2}{2} = c - \frac{c^2}{2} > \int_0^1 xf(x) dx$$

Bài 15. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[a, b]$. Giả sử $f(a) = 0$ và cho

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx \leq M$$

Chứng minh

$$\text{Ta có } f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt \leq \int_a^x M dt = M(x-a) \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \leq M \int_a^b (x-a) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \leq M \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b = \frac{M(b-a)^2}{2} \Rightarrow M \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$$

Bài 16. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[a, b]$.

Giả sử $f(a) = f(b) = 0$ và cho $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx \leq M$

Chứng minh

Lấy x tùy ý sao cho $a < x < b$. Sử dụng định lý **Lagrange** trên $[a, x]$:

$$\text{Tồn tại } \alpha_1 \in (a, x) \text{ thỏa mãn } f(x) - f(a) = (x-a)f'(\alpha_1) \Rightarrow |f(x)| \leq M(x-a) \quad (1)$$

Lại sử dụng định lý **Lagrange** trên $[x, b]$, suy ra tồn tại $\alpha_2 \in (x, b)$ thỏa mãn

$$f(b) - f(x) = (b-x)f'(\alpha_2) \Rightarrow |f(x)| \leq M(b-x) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \leq M \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) dx + M \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) dx \\ &\Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \leq M \left(\frac{(b-a)^2}{8} + \frac{(b-a)^2}{8} \right) = \frac{M(b-a)^2}{4} \Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx \leq M \end{aligned}$$

Bài 17. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục đến đạo hàm cấp 2 trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$.

Chứng minh rằng: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$ với $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$

Chứng minh

$$\text{Ta có } \int_a^b f''(x)(x-a)(b-x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(b-x) dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f''(x)(x-a)(b-x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(b-x) dx$$

Do $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ nên suy ra $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{2} \left[\frac{-x^3}{3} + (a+b) \frac{x^2}{2} - abx \right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6} \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

Bài 18. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục cùng đạo hàm của nó $[a, b]$ và $f(a) = 0$.

Đặt $M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Chứng minh rằng: $M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx$

Chứng minh

Giả sử x_0 là điểm thỏa mãn đẳng thức $|f(x_0)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = M$

Sử dụng bất đẳng thức CBS với hàm số $f'(x)$ và 1 ta có

$$\left(\int_a^{x_0} f'(x) dx \right)^2 \leq \int_a^{x_0} f'^2(x) dx \int_a^{x_0} 1 \cdot dx = (x_0 - a) \int_a^{x_0} f'^2(x) dx \quad (1)$$

Mà $\int_a^{x_0} f'(x) dx = f(x) \Big|_a^{x_0} = f(x_0) - f(a) = f(x_0) - 0 = f(x_0) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $M = |f(x_0)| = \left| \int_a^{x_0} f'(x) dx \right| \leq \sqrt{x_0 - a} \sqrt{\int_a^{x_0} f'^2(x) dx}$

$$\leq \sqrt{x_0 - a} \sqrt{\int_a^b f'^2(x) dx} \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f'^2(x) dx} \Rightarrow M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx$$

Bài 19. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} dx < \sqrt{\frac{\pi}{6}}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1]$ ta có $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} > \sqrt{\frac{1-x^2}{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-x^2}$. Đặt $x = \sin t$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} dx > \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Mặt khác $x^{3/2} \geq x^2 \forall x \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} < \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} dx < \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} dx \right)^2 &< \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 (1-x^2) dx \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \left[\left(x - \frac{x^3}{3} \right) \arctg x \right]_0^1 = \frac{2}{3} \arctg 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} dx < \sqrt{\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\text{Từ các kết quả trên} \Rightarrow \frac{\pi}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} dx < \sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

Bài 20. Chứng minh rằng $\forall x > 0$, ta có: $e^x - 1 \leq \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt < \sqrt{(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)}$

Chứng minh

Ta có $\int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt = \int_0^{\frac{x}{2}} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} dt$. Sử dụng bất đẳng thức **CBS**

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\int_0^{\frac{x}{2}} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t}} dt \right)^2 &\leq \int_0^{\frac{x}{2}} e^t dt \int_0^{\frac{x}{2}} (e^t + e^{-2t}) dt \Rightarrow \left(\int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt \right)^2 \leq \int_0^x e^t dt \int_0^x (e^t + e^{-2t}) dt \\ \Rightarrow \left(\int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt \right)^2 &\leq (e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right) < (e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $\sqrt{e^{2t} + e^{-t}} > e^t \forall 0 < t < x \Rightarrow \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt > \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $e^x - 1 \leq \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}} dt < \sqrt{(e^x - 1) \left(e^x - \frac{1}{2} \right)}$

Bài 21. Cho $f(x)$ liên tục cùng với đạo hàm của nó trên $[0, 2]$ và $f(0) = f(2) = 1$,

$|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0, 2]$. Chứng minh rằng: $\int_0^2 f(x) dx > 1$

Chứng minh

Lấy $x \in (0, 2)$. Sử dụng định lý **Lagrange** suy ra tồn tại $\alpha_1 \in (0, x)$ và $\alpha_2 \in (x, 2)$

$$\text{Sao cho } \begin{cases} f(x) - f(0) = xf'(\alpha_1) \\ f(2) - f(x) = (2-x)f'(\alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + xf'(\alpha_1) \\ f(x) = 1 + (x-2)f'(\alpha_2) \end{cases}$$

Do $|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0, 2] \Rightarrow f'(\alpha_1) \geq -1, f'(\alpha_2) \leq 1$ lại có $x > 0, x-2 < 0$ suy ra

$$\begin{cases} f(x) \geq 1 + x(-1) \\ f(x) \leq 1 + (x-2) \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 1-x \\ f(x) \leq x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \quad (1) \\ \int_1^2 f(x) dx \geq \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow f(x) \equiv 1-x \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f'(1^-) = -1$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow f(x) \equiv x-1 \quad \forall x \in [1, 2] \Rightarrow f'(1^+) = +1$

Suy ra không tồn tại $f'(1)$ và mâu thuẫn với $f'(x)$ liên tục trên $[0, 2]$

Vậy (1) và (2) không thể đồng thời xảy ra dấu bằng và ta có

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Bài 22. Cho $f(x)$ là hàm liên tục và nghịch biến trên $[0, 1]$.

Chứng minh rằng: $\alpha \int_0^1 f(x) dx < \int_0^\alpha f(x) dx$ với mọi $\alpha \in (0, 1)$

Chứng minh

Do $f(x)$ nghịch biến trên $[0, 1]$ nên với $x \in [\alpha, 1] \subset [0, 1]$. Ta có

$$f(x) < f(\alpha) \Rightarrow \int_\alpha^1 f(x) dx < \int_\alpha^1 f(\alpha) dx = f(\alpha) \int_\alpha^1 dx = f(\alpha)(1-\alpha) \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 f(x) dx < f(\alpha)$$

$$\text{Do } f(x) > f(\alpha) \quad \forall \alpha > x \geq 0 \text{ nên } \int_0^\alpha f(x) dx > \int_0^\alpha f(\alpha) dx = \alpha f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 f(x) dx < \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx \Leftrightarrow \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx < (1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx$$

$$\Rightarrow \alpha \left(\int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^1 f(x) dx \right) < (1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx + \alpha \int_0^\alpha f(x) dx \Leftrightarrow \alpha \int_0^1 f(x) dx < \int_0^\alpha f(x) dx$$

Bài 23. Cho $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ là n hàm số dương và liên tục trên $[0, 1]$. Đặt

$$a_k = \int_0^1 f_k(x) dx \quad \text{với } k = \overline{1, n}. \text{ Chứng minh rằng tồn tại } x_0 \in [0, 1] \text{ sao cho}$$

$$f_1(x_0)f_2(x_0)\dots f_n(x_0) \leq a_1 a_2 \dots a_n$$

Chứng minh

$$\text{Từ giả thiết } f_k(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow a_k = \int_0^1 f_k(x) dx > 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$$

$$\text{Đặt } u_k(x) = \frac{f_k(x)}{a_k} \quad \forall k = \overline{1, n} \Rightarrow \int_0^1 u_k(x) dx = \frac{1}{a_k} \int_0^1 f_k(x) dx = \frac{1}{a_k} \cdot a_k = 1$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có } \sqrt[n]{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)} \leq \frac{u_1(x) + \dots + u_n(x)}{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt[n]{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)} dx \leq \frac{1}{n} \left(\int_0^1 u_1(x) dx + \int_0^1 u_2(x) dx + \dots + \int_0^1 u_n(x) dx \right) = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \quad (*)$$

$$\text{Nếu } \min_{x \in [0, 1]} \left(\sqrt[n]{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)} \right) = p > 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt[n]{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)} dx > \int_0^1 p dx = p > 1$$

$$\Rightarrow \text{mâu thuẫn với } (*). \text{ Vậy từ } (*) \text{ suy ra } \min_{x \in [0, 1]} \left(\sqrt[n]{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)} \right) \leq 1.$$

Mà $g(x) = \sqrt[n]{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)}$ là hàm số dương và liên tục trên $[0, 1]$, nên theo định lý về giá trị trung gian của một hàm số liên tục thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$g(x_0) = \sqrt[n]{u_1(x_0)u_2(x_0)\dots u_n(x_0)} = p \leq 1 \Leftrightarrow u_1(x_0)u_2(x_0)\dots u_n(x_0) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x_0)}{a_1} \cdot \frac{f_2(x_0)}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{f_n(x_0)}{a_n} \leq 1 \Leftrightarrow f_1(x_0)f_2(x_0)\dots f_n(x_0) \leq a_1 a_2 \dots a_n$$

Bài 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục cùng với đạo hàm của nó trên $[0, 1]$ và $f(x)$ lấy cả giá trị âm và dương trên $[0, 1]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^1 |f(x)| dx < \int_0^1 |f'(x)| dx$$

Chứng minh

Giả sử với $x_1, x_2 \in [0, 1]$, $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$. Theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục thì tồn tại 1 điểm $a \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(a) = 0$. Vì hàm số $|f(x)|$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$ nên nó đạt giá trị lớn nhất trên đoạn này, tức là tồn tại một điểm $b \in [0, 1]$ sao cho $|f(x)| \leq |f(b)| \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow b \neq a$ và $b \in [0, a)$ hoặc $b \in (a, 1]$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b \in (a, 1]$. Ta có

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 |f(b)| dx = |f(b)| = |f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(x) dx \right| \leq \int_a^b |f'(x)| dx \leq \int_0^1 |f'(x)| dx$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thực sự } \int_a^b |f'(x)| dx < \int_0^1 |f'(x)| dx$$

Thật vậy nếu $\int_a^b |f'(x)| dx = \int_0^1 |f'(x)| dx$ thì từ phép biến đổi sau:

$$\int_0^1 |f'(x)| dx = \int_0^a |f'(x)| dx + \int_a^b |f'(x)| dx + \int_b^1 |f'(x)| dx \Rightarrow \int_0^a |f'(x)| dx + \int_b^1 |f'(x)| dx = 0$$

$\Rightarrow |f'(x)| = 0$ hay $f'(x) = 0 \forall x \in [0, a] \Rightarrow f(x)$ là hàm hằng trên $[0, a]$ mà $f(a) = 0$,
nên $f(x) = 0 \forall x \in [0, a]$ mâu thuẫn với $f(x_1) < 0$ trong đó $x_1 \in [0, a]$

Vậy ta có bất đẳng thức thực sự: $\int_0^1 |f(x)| dx < \int_0^1 |f'(x)| dx$

Bài 25. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục cùng tăng hoặc cùng giảm trên $[0, 1]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^1 f(x)g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét khi f và g cùng đồng biến trên $[0, 1]$ vì nếu f và g cùng nghịch biến trên $[0, 1]$ thì $(-f)$ và $(-g)$ đồng biến trên $[0, 1]$.

Theo định lý về giá trị trung bình của tích phân thì tồn tại 1 số $a \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x) dx = f(a) \Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(a)] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a [f(x) - f(a)] dx + \int_a^1 [f(x) - f(a)] dx = 0 \Rightarrow \int_a^1 [f(x) - f(a)] dx = \int_0^a [f(a) - f(x)] dx$$

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức (1):

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 f(x)g(x) dx - f(a) \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 [f(x) - f(a)] g(x) dx \\ &= \int_0^a [f(x) - f(a)] g(x) dx + \int_a^1 [f(x) - f(a)] g(x) dx = \int_a^1 [f(x) - f(a)] g(x) dx - \int_0^a [f(a) - f(x)] g(x) dx \end{aligned}$$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0, 1]$, $f(x) \geq f(a) \forall x \in [a, 1]$ và $f(a) \geq f(x) \forall x \in [0, a]$

$\Rightarrow f(x) - f(a) \geq 0 \forall x \in [a, 1]$ và $f(a) - f(x) \geq 0 \forall x \in [0, a]$.

Theo định lý mở rộng về giá trị trung bình của tích phân thì tồn tại ít nhất 1 điểm $b \in [0, a]$ và tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in [a, 1]$ sao cho

$$\int_0^a [f(a) - f(x)] g(x) dx = g(b) \int_0^a [f(a) - f(x)] dx \text{ và}$$

$\int_a^b [f(x) - f(a)] g(x) dx = g(c) \int_a^b [f(x) - f(a)] dx$. Từ đó suy ra:

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx = [g(c) - g(b)] \int_0^1 [f(a) - f(x)] dx$$

Do $b \leq a \leq c$ và g là hàm đồng biến trên $[0, 1]$, $g(c) \geq g(b)$ và $f(a) - f(x) \geq 0 \forall x \in [0, a]$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx = [g(c) - g(b)] \int_0^1 [f(a) - f(x)] dx \geq 0 \Rightarrow (1) \text{ đúng}$$

Bài 26. Cho hàm f xác định trên $(0, +\infty)$ với $f(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha} dx$.

Chứng minh rằng: $\frac{\alpha}{1+\alpha} < f(\alpha) < \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha + 1}$

Giải

Bước 1. Chứng minh $1 - x^\alpha \leq \sqrt{1-x^\alpha} \leq 1 - \frac{1}{2}x^\alpha; \forall x \in [0, 1]$ (1)

Bước 2. Từ (1) suy ra $\int_0^1 (1 - x^\alpha) dx < \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha} dx < \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{2}x^\alpha\right] dx$

$$\Leftrightarrow \left[x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 < f(\alpha) < \left[x - \frac{x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} < f(\alpha) < \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha + 1}$$

Bài 27. Cho $a > 0$ và hàm f liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn $\int_a^t f^2(x) dx < \int_a^t x^2 dx \quad (t > a)$.

Chứng minh rằng: $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b x dx$ trong đó $b > a$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức CBS ta có: $\left(\int_a^t xf(x) dx\right)^2 \leq \int_a^t x^2 dx \int_a^t f^2(x) dx$

$$0 \leq \int_a^t f^2(x) dx < \int_a^t x^2 dx \Rightarrow \left(\int_a^t xf(x) dx\right)^2 < \left(\int_a^t x^2 dx\right)^2 \Rightarrow \int_a^t xf(x) dx < \int_a^t x^2 dx$$

Xét $F(t) = \int_a^t [x - f(x)] dx$. Ta có: $F'(t) = t - f(t)$, $F(a) = 0$, $F(b) > 0$ và $F(t) > 0$

$$\forall t \in (a, b) \Rightarrow \int_a^b [t - f(t)] dt = \int_a^b \frac{1}{t} F'(t) dt. \text{ Đặt } u = \frac{1}{t}; dv = F'(t) dt \Rightarrow du = -\frac{dt}{t^2}; v = F(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b [t - f(t)] dt = \frac{1}{t} F(t) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2} dt = \frac{F(b)}{b} + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2} dt > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b x dx$$

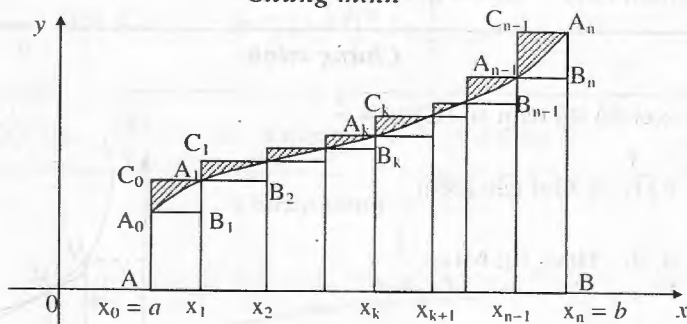
Bài 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $[a, b]$. Gọi π là 1 phân hoạch tùy ý của đoạn $[a, b]$ bởi các điểm chia $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($a = x_0 < \dots < x_n = b$). Chứng minh rằng:

1. Nếu $f(x)$ đồng biến $[a, b]$ thì $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) < \int_a^b f(x) dx < \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$

2. Nếu $f(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ và $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx < \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1}))}{2}$$

Chứng minh



1. Đặt $C_k(x_k; f(x_{k+1})); B_{k+1}(x_{k+1}; f(x_k)); A_k(x_k; f(x_k)); A(a; 0); B(b; 0)$

Gọi S là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi: $y = f(x)$, $x = a$; $x = b$; $y = 0$, khi đó diện tích của hình thang cong này là $S = \int_a^b f(x) dx$

Gọi S_1 là diện tích của đa giác $AC_0A_1C_1 \dots A_{n-1}C_{n-1}A_nB$ gồm tổng diện tích của các hình chữ nhật với các độ dài là $f(x_k); (x_k - x_{k-1})$. Khi đó, $S_1 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$

Gọi S_2 là diện tích của đa giác $AA_0B_1A_1 \dots B_{n-1}A_{n-1}B_nB$ gồm tổng diện tích của các hình chữ nhật với các độ dài là $f(x_{k-1}); (x_k - x_{k-1})$. Khi đó, $S_2 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1})$

Theo giả thiết, hàm $f(x)$ tăng trên $[a, b]$ nên $S_2 < S < S_1$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) < \int_a^b f(x) dx < \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

2. Gọi S_3 là diện tích của đa giác $AA_0A_1 \dots A_nB$.

$$\text{Khi đó, } S_3 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1}))}{2}$$

$$\text{Do } f''(x) > 0 \text{ trên } [a, b], \text{ Ta có: } \int_a^b f(x) dx < \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_k) + f(x_{k-1}))}{2}$$

V. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Thông thường để chứng minh một bất đẳng thức ta thường tìm cách quy nó về việc khảo sát một hàm số nào đó bằng công cụ đạo hàm. Trong mục này ta sẽ nhìn hai về của một bất đẳng thức như là nguyên hàm của các hàm số nào đó, theo cách này việc chứng minh bất đẳng thức sẽ quy về so sánh tính chất của hai hàm số trên toàn miền xác định. Nếu gọi cách chứng minh bất đẳng thức bằng đạo hàm là cách giải địa phương, thì chứng minh bất đẳng thức bằng tích phân có thể gọi là phương pháp toàn cục. Dưới đây là một số bài tập minh họa.

Bài 1. Chứng minh rằng: $\ln(1+a) > \frac{2a}{a+2} \quad \forall a > 1$

Chứng minh

Trong hệ Oxy, xét đồ thị hàm số (C): $y = \frac{1}{x}$.

Lấy $x_0 = \frac{1+a}{2} \in [1, a]$. Gọi các điểm

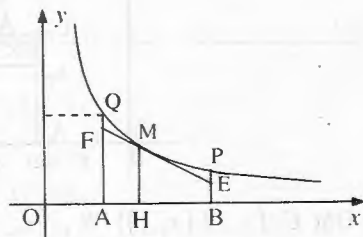
$A(1, 0)$; $B(1+a, 0)$; $H(x_0, 0)$; $M(x_0, \frac{1}{x_0})$

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3} > 0 \quad \forall x > 0$

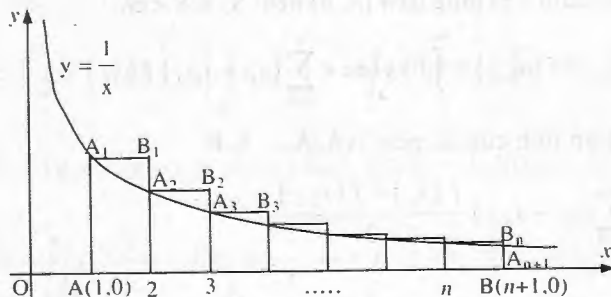
$\Rightarrow y = \frac{1}{x}$ là hàm lồi $\forall x > 0$ nên tiếp tuyến (t) tại M luôn nằm dưới đồ thị (C).

Giả sử tiếp tuyến (t) cắt các đường thẳng $x = 1+a$, $x = 1$ tại 2 điểm E và F và cắt đồ thị (C) tại 2 điểm P, Q. Do diện tích hình thang cong ABPQ lớn hơn diện tích hình thang ABEF nên ta có bất đẳng thức:

$$\ln(1+a) = \int_1^{1+a} \frac{dx}{x} = S(ABPQ) > S(ABEF) = AB \cdot MH = a \cdot \frac{1}{(1+a)/2} = \frac{2a}{a+2}$$



Bài 2. Chứng minh rằng: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

Xét hàm số $y = \frac{1}{x}$ với $x \in [1, n+1]$. Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường

$$\left\{ x=1, x=n+1, y=0, y=\frac{1}{x} \right\} \Rightarrow S = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Gọi $A_1(1, 1), A_2\left(2, \frac{1}{2}\right), \dots, A_k\left(k, \frac{1}{k}\right), \dots, A_n\left(n, \frac{1}{n}\right), A_{n+1}\left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$

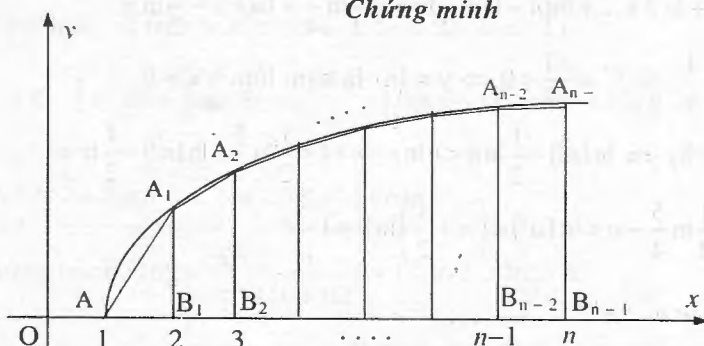
$B_1(2, 1), B_2\left(3, \frac{1}{2}\right), \dots, B_k\left(k, \frac{1}{k-1}\right), \dots, B_n\left(n, \frac{1}{n-1}\right)$ và $A(1, 0); B(n+1, 0)$

Gọi S^* là diện tích đa giác $AA_1B_1A_2B_2\dots A_kB_k\dots A_nB_nB$ thì dễ thấy

$$S^* = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \text{ Do } S < S^*, \text{ nên } \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot n^{\frac{n+1}{2}} e^{1-n} < n! < n^{\frac{n+1}{2}} e^{1-n} \cdot \forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$

Chứng minh



Xét hàm số $y = \ln x$ với $x \in [1, n]$. Gọi S là diện tích tam giác cong giới hạn bởi các đường $\{x=1, x=n, y=0, y=\ln x\}$. Ta có:

$$S = \int_1^n \ln x dx = [x \ln x]_1^n - \int_1^n dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1$$

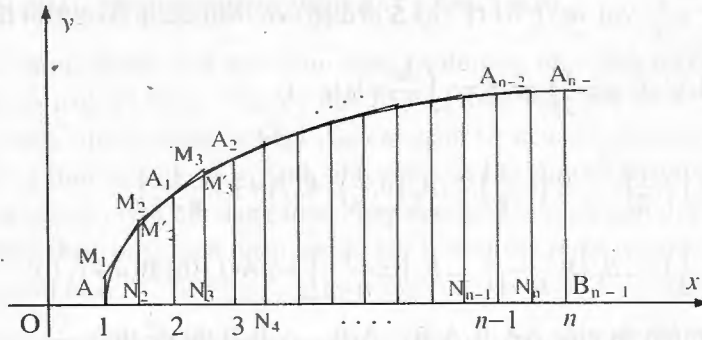
Gọi $A(1, 0), A_1(2, \ln 2), \dots, A_{k-1}(k, \ln k), \dots, A_{n-1}(n, \ln n)$

Và $B_1(2, 0); B_2(3, 0); \dots; B_{k-1}(k, 0); \dots; B_{n-1}(n, 0)$.

Khi đó diện tích S^* của đa giác $AA_1A_2\dots A_{n-1}B_{n-1}$ là:

$$S_1 = \frac{1}{2} (\ln 2 + (\ln 2 + \ln 3) + (\ln 3 + \ln 4) + \dots + [\ln(n-2) + \ln(n-1)] + [\ln(n-1) + \ln n])$$

$$S_1 = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n - \frac{1}{2} \ln n = \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n$$



Gọi S_2 là tổng diện tích của hình thang $AM_1M_2N_2$, $(n-2)$ hình thang $N_kM'_kM_{k+1}N_{k+1}$ ($k = \overline{2, n-1}$) và hình chữ nhật $N_nM'_nA_{n-1}B_{n-1}$ và M_1M_2 là tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{5}{4}$; $N_k\left(k - \frac{1}{2}, 0\right)$, $N_{k+1}\left(k + \frac{1}{2}, 0\right)$; AM_1 , N_kM_k , $N_kM'_k$ song song với trục tung M'_kM_{k+1} và là tiếp tuyến với đồ thị $y = \ln x$ tại A_{k-1} .

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} + \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n$$

$$\text{Khi đó } y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x \text{ là hàm lõm } \forall x > 0$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_1 < S < S_2 \Leftrightarrow \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n < n \ln n - n + 1 < \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} + \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n$$

$$\Rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - n < \ln(n!) < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + 1 - n$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot n^{\frac{n+1}{2}} e^{1-n} < n! < n^{\frac{n+1}{2}} e^{1-n}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\frac{e^a - e^b}{a - b} < \frac{e^a + e^b}{2} \quad \forall \begin{cases} a \neq b \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$

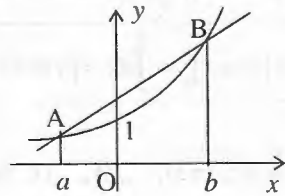
Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b$. Ta có

$$\frac{e^a - e^b}{a - b} < \frac{e^a + e^b}{2} \Leftrightarrow e^b - e^a < \frac{e^a + e^b}{2} (b - a)$$

Xét hàm số $y = e^x \Rightarrow y'' = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

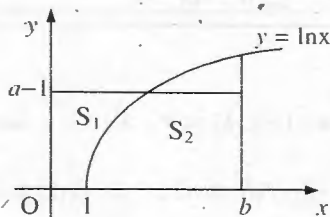
$\Rightarrow y = e^x$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Gọi A, B là giao điểm của đồ thị $y = e^x$ và 2 đường thẳng $x = a, x = b$. Ta có diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $\{x = a, x = b, y = 0, y = e^x\}$ nhỏ hơn diện tích hình thang AabB



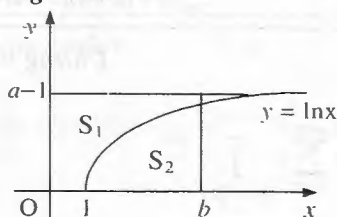
$$\Rightarrow \int_a^b e^x dx < \frac{e^a + e^b}{2} (b - a) \Leftrightarrow e^b - e^a < \frac{e^a + e^b}{2} (b - a) \Leftrightarrow \frac{e^a - e^b}{a - b} < \frac{e^a + e^b}{2}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $ab \leq e^{a-1} + b \ln b, \quad \forall a, b \geq 1$.

Chứng minh



Hình 1: $\ln b \geq a-1$



Hình 2: $\ln b \leq a-1$

Xét hàm số $y = \ln x \quad \forall x \geq 1 \Leftrightarrow x = e^y \quad \forall y \geq 0$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\{x=0, x=e^y, y=0, y=a-1\}$

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\{x=1, x=b, y=0, y=\ln x\}$

S là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $\{x=0, x=b, y=0, y=a-1\}$

Trong cả hai hình vẽ trên ta đều có $S_1 + S_2 \geq S = b(a-1)$

$$\Leftrightarrow b(a-1) \leq \int_0^{a-1} e^y dy + \int_1^b \ln x dx = e^y \Big|_0^{a-1} + [x \ln x - x]_1^b = e^{a-1} + b \ln b - b$$

$$\Leftrightarrow ab - b \leq e^{a-1} + b \ln b - b \Leftrightarrow ab \leq e^{a-1} + b \ln b$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)2^k} < 1 - \ln 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

$$\forall x \in (0, 1) \text{ ta có: } 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} < \frac{1}{1-x}$$

$$\forall t \in (0, 1) \text{ ta có } \int_0^t (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) dx < \int_0^t \frac{1}{1-x} dx \Rightarrow t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{t^n}{n} < -\ln(1-t)$$

$$\forall z \in (0, 1) \text{ ta có } \int_0^z \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{t^n}{n} \right) dt < \int_0^z -\ln(1-t) dt = z + (1-z) \ln(1-z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2 \times 3} + \frac{z^4}{3 \times 4} + \dots + \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} < z + (1-z) \ln(1-z).$$

Chia 2 vế cho $z > 0$ ta có:

$$\frac{z}{1 \times 2} + \frac{z^2}{2 \times 3} + \frac{z^3}{3 \times 4} + \dots + \frac{z^n}{n(n+1)} < 1 + \frac{1-z}{z} \ln(1-z) \text{ đúng } \forall z \in (0, 1).$$

Cho $z = \frac{1}{2}$ ta nhận được bất đẳng thức $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)2^k} < 1 - \ln 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 7. Chứng minh rằng: $(x-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+(k+1)(x-1)} < \ln x < (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k(x-1)} \quad \forall x > 1$

Chứng minh

Ta có $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k(\frac{x-1}{n})+1}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t}$.

Chú ý rằng khi $1+k \cdot \frac{x-1}{n} < t < 1+(k+1) \cdot \frac{x-1}{n}$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+k \cdot \frac{x-1}{n}} &> \frac{1}{t} > \frac{1}{1+(k+1) \cdot \frac{x-1}{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{n+k(x-1)} > \frac{1}{t} > \frac{n}{n+(k+1)(x-1)} \\ \Rightarrow \int_{1+k \cdot \frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{n}{n+k(x-1)} dt &> \int_{1+k \cdot \frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} > \int_{1+k \cdot \frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{n}{n+(k+1)(x-1)} dt \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+k(x-1)} \cdot \frac{x-1}{n} &> \int_{1+k \cdot \frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} > \frac{n}{n+(k+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{n} \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{n+k(x-1)} &> \int_{1+k \cdot \frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} > \frac{x-1}{n+(k+1)(x-1)}. \text{ Cho } k \text{ lấy từ } 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \Rightarrow (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k(x-1)} &> \sum_{k=0}^{n-1} \int_{1+k \cdot \frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} = \ln x > (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+(k+1)(x-1)} \end{aligned}$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{2}{3} \cdot n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < \frac{2}{3} [(n+1)\sqrt{n+1} - 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh

Ta có $\sqrt{x} \leq \sqrt{k} \quad \forall x \in [k-1, k]$ và $\sqrt{k} \leq \sqrt{x} \quad \forall x \in [k, k+1] \quad (k = \overline{1, n})$

$$\Rightarrow \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx < \int_{k-1}^k \sqrt{k} dx = \sqrt{k} = \int_k^{k+1} \sqrt{k} dx < \int_k^{k+1} \sqrt{x} dx.$$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng lại ta có

$$\frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^n = \int_0^n \sqrt{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \sqrt{x} dx < \sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \sqrt{x} dx = \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_1^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} < \frac{2}{3} [(n+1)\sqrt{n+1} - 1]$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

Ta có $\sqrt{x} \geq \sqrt{k} \quad \forall x \in [k, k+1] \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \forall x \in [k, k+1] \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx$.

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng lại ta có

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx \Leftrightarrow \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} \Big|_1^{n+1} = 2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Bài 10. Chứng minh rằng: $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

Ta có $0 < x-1 \leq k \leq x \quad \forall x \in [k, k+1] \Rightarrow 0 < (x-1)^2 \leq k^2 \leq x^2 \quad \forall x \in [k, k+1]$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2} \quad \forall x \in [k, k+1] \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

Cho k chạy từ 2 đến n rồi cộng lại ta có

$$\sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx \leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx. \text{ Cộng 1 vào các vế ta có}$$

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{dx}{(x-1)^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{-1}{x} \Big|_2^{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{-1}{x-1} \Big|_2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 11. Không dùng bảng số, chứng minh rằng: $\ln 2 > \frac{2}{3}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức **Buniakowski** ta có:

$$\ln 2 = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{2}{3} \int_0^1 (x+1) dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x+1} > \frac{2}{3} \left[\int_0^1 \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \right]^2 = \frac{2}{3}$$

Bài 12. Cho $0 < a < b$. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

Chứng minh

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, b) \text{ Ta có bất đẳng thức: } \frac{1}{a} > \frac{1}{x} > \frac{1}{b} &\Rightarrow \frac{1}{a} \int_a^b dx > \int_a^b \frac{dx}{x} > \frac{1}{b} \int_a^b dx \\ \Leftrightarrow \frac{b-a}{a} > \ln \left| \frac{b}{a} \right| < \frac{b-a}{b} &\Leftrightarrow \frac{b-a}{a} > \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \end{aligned}$$

Bài 13. Chứng minh rằng: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Chứng minh

Đặt $u(t) = \arctan t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow u(t)$ đồng biến $\mathbb{R}$

Xét $x < y$. Với $x < t < y$ khi đó: $\frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \int_x^y \frac{dt}{1+t^2} < \int_x^y dt$

$\Rightarrow 0 < \arctan y - \arctan x < y - x \Leftrightarrow |\arctan x - \arctan y| < |x - y|$

Xét $y < x$. Với $y < t < x$ thì: $\frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \int_y^x \frac{dt}{1+t^2} < \int_y^x dt$

$\Rightarrow 0 < \arctan x - \arctan y < x - y \Leftrightarrow |\arctan x - \arctan y| < |x - y|$

Bài 14. 1. Chứng minh rằng: $x > \sin x$ và $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x > 0$

2. Chứng minh rằng: $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$ và $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x > 0$

3. Chứng minh rằng: $\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \forall x > 0$

Chứng minh

1. Từ $\cos t \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \cos t dt < \int_0^x 1 dt \Leftrightarrow \sin t \Big|_0^x < x \Leftrightarrow \sin x < x \quad \forall x > 0$

$\sin t < t \quad \forall t > 0 \Rightarrow \int_0^x \sin t dt < \int_0^x t dt \Leftrightarrow -\cos t \Big|_0^x < \frac{t^2}{2} \Big|_0^x \Leftrightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x > 0$

2. $\int_0^x \cos t dt > \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \Rightarrow \sin t \Big|_0^x > \left[t - \frac{t^3}{3!}\right]_0^x \Leftrightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall x > 0$

$\int_0^x \sin t dt > \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt \Leftrightarrow -\cos t \Big|_0^x > \left[\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!}\right]_0^x \Leftrightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x > 0$

3. $\int_0^x \cos t dt < \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\right) dt \Rightarrow \sin t \Big|_0^x < \left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\right]_0^x \Leftrightarrow \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Bài 15. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < x \leq y$. Chứng minh rằng:

$$xy(\operatorname{arccot} y - \operatorname{arccot} x) \leq \ln \frac{(x^2 + 1)^y}{(y^2 + 1)^x} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow y \left[x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right] \geq x \left[y \operatorname{arccot} y + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) \right]$$

Xét hàm số $u(t) = \operatorname{arccot} t$ ($0 \leq t \leq y$). Ta có: $u'(t) = -\frac{1}{1+t^2} < 0$

$$\Rightarrow u(t) \text{ nghịch biến trên } [0, y] \Rightarrow \int_0^x \operatorname{arccot} t \, dt \geq \int_0^y \operatorname{arccot} t \, dt$$

$$\Leftrightarrow t \operatorname{arccot} t \Big|_0^x + \int_0^x \frac{t \, dt}{t^2 + 1} \geq t \operatorname{arccot} t \Big|_0^y + \int_0^y \frac{t \, dt}{t^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \geq y \operatorname{arccot} y + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1). \text{ Do } 0 < x < y \text{ thì}$$

$$\Rightarrow y \left[x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right] \geq x \left[y \operatorname{arccot} y + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) \right]$$

$$\Rightarrow xy(\operatorname{arccot} y - \operatorname{arccot} x) \leq \ln \frac{(x^2 + 1)^y}{(y^2 + 1)^x}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y$$

Bài 16. Chứng minh rằng: $(x - y)[2 - (x + y)] < 2 \ln \frac{1+x}{1+y} \quad \forall x > y > 0 \quad (1)$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2(x - y) - (x^2 - y^2) < 2[\ln(1+x) - \ln(1+y)].$$

$$\text{Ta có: } 1 > 1 - t^2 \Rightarrow \frac{1}{1+t} > 1-t \quad \forall t > 0 \Rightarrow \int_y^x \frac{dt}{1+t} > \int_y^x (1-t) \, dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+t) \Big|_y^x > \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_y^x \Leftrightarrow \ln \frac{1+x}{1+y} > (x-y) - \frac{x^2 - y^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \ln \frac{1+x}{1+y} > (x-y)[2 - (x+y)] \Leftrightarrow (x-y)[2 - (x+y)] < 2 \ln \frac{1+x}{1+y}$$

Bài 17. Chứng minh rằng: $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

Chứng minh

Đặt $f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), t > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \quad \forall t > 0$. Nếu $x = 0$ thì (1) đúng.

Nếu $x > 0$ thì với $0 < t \leq x$ ta có: $\int_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt > 0$

$$\Rightarrow t \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} > 0 \Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \Big|_0^x > 0$$

$$\Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$$

Nếu $x < 0$ thì đặt $y = -x > 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 1 - y \ln(-y + \sqrt{1+y^2}) \geq \sqrt{1+y^2}$

$$\Leftrightarrow 1 + y \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \geq \sqrt{1+y^2} \quad \forall y > 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 18. 1. Chứng minh rằng: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \leq 3 - \frac{12}{\pi^2} \quad \forall x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Chứng minh

1. Sử dụng $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

2. $\frac{1}{t^3} > \frac{\cos t}{\sin^3 t} \Rightarrow \int_x^{\pi/2} \frac{dt}{t^3} > \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^3 t} dt \Leftrightarrow \frac{-1}{2t^2} \Big|_x^{\pi/2} > \frac{-1}{2\sin^2 t} \Big|_x^{\pi/2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \leq 1 - \frac{4}{\pi^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \leq 3 - \frac{12}{\pi^2} \quad \forall x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Bài 19. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0$

Chứng minh

Đặt $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x} dx \geq 0$

Bài 20. $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1} \geq 0$

Chứng minh

Đặt $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1} = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2} dx \geq 0$

VI. ĐỔI BIẾN ĐỂ ỨNG DỤNG TÍCH PHẦN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Với mọi $x \geq y \geq z > 0$ ta có: $x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ (1)

• **Chứng minh:** Xét hiệu $(x^3y + y^3z + z^3x) - (xy^3 + yz^3 + zx^3) = (x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z) \geq 0$

Suy ra $VT(1) = x^3y + y^3z + z^3x \geq \frac{1}{2}((x^3y + y^3z + z^3x) + (xy^3 + yz^3 + zx^3))$

$$= \frac{xy}{2}(x^2 + y^2) + \frac{yz}{2}(y^2 + z^2) + \frac{zx}{2}(z^2 + x^2) \geq (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = VP(1) \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

• **Áp dụng:** Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a} \geq t^{2a+2b} + t^{2b+2c} + t^{2c+2a} \Leftrightarrow \frac{1}{t} (t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a}) \geq \frac{1}{t} (t^{2a+2b} + t^{2b+2c} + t^{2c+2a})$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế theo biến t ta có:

$$\int_0^1 \frac{1}{t} (t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a}) dt \geq \int_0^1 \frac{1}{t} (t^{2a+2b} + t^{2b+2c} + t^{2c+2a}) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}) dt \geq \int_0^1 (t^{2a+2b-1} + t^{2b+2c-1} + t^{2c+2a-1}) dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b} + \frac{t^{3b+c}}{3b+c} + \frac{t^{3c+a}}{3c+a} \right) \Big|_0^1 \geq \left(\frac{t^{2a+2b}}{2a+2b} + \frac{t^{2b+2c}}{2b+2c} + \frac{t^{2c+2a}}{2c+2a} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} + \frac{1}{2b+a} + \frac{1}{2c+b} + \frac{1}{2a+c}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** (Bất đẳng thức Schur) Với mọi $x, y, z > 0$ ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

• **Áp dụng:** Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$, bất đẳng thức trở thành

$$t^{3a} + t^{3b} + t^{3c} + 3t^{a+b+c} \geq t^{a+b}(t^a + t^b) + t^{b+c}(t^b + t^c) + t^{c+a}(t^c + t^a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} (t^{3a} + t^{3b} + t^{3c} + 3t^{a+b+c}) \geq \frac{1}{t} (t^{a+b}(t^a + t^b) + t^{b+c}(t^b + t^c) + t^{c+a}(t^c + t^a))$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế theo biến t ta có

$$\int_0^1 (t^{3a} + t^{3b} + t^{3c} + 3t^{a+b+c}) dt \geq \int_0^1 \left(t^{\frac{a+b}{2}} (t^a + t^b) + t^{\frac{b+c}{2}} (t^b + t^c) + t^{\frac{c+a}{2}} (t^c + t^a) \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{3a}}{3a} + \frac{t^{3b}}{3b} + \frac{t^{3c}}{3c} + 3 \frac{t^{a+b+c}}{a+b+c} \right) \Big|_0^1 \geq \left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b} + \frac{t^{2b+c}}{2b+c} + \frac{t^{2c+a}}{2c+a} + \frac{t^{2b+a}}{2b+a} + \frac{t^{2c+b}}{2c+b} + \frac{t^{2a+c}}{2a+c} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} + \frac{1}{2b+a} + \frac{1}{2c+b} + \frac{1}{2a+c}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{2}{3a+b} + \frac{2}{3b+c} + \frac{2}{3c+a}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Với mọi $x, y, z > 0$ ta có: $x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq 2(x^3y + y^3z + z^3x)$ (1)

• **Chứng minh:** VT (1) - VP (1) = $\sum_{cyc} (a^2 - ab + bc - b^2) \geq 0$.

• **Áp dụng:** Đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, bất đẳng thức trên trở thành

$$t^{4a} + t^{4b} + t^{4c} + t^{a+3b} + t^{b+3c} + t^{c+3a} \geq 2(t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a})$$

$$\Leftrightarrow t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + t^{a+3b-1} + t^{b+3c-1} + t^{c+3a-1} \geq 2(t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1})$$

Lấy tích phân theo biến t từ 0 đến 1 cả hai vế ta được

$$\int_0^1 (t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + t^{a+3b-1} + t^{b+3c-1} + t^{c+3a-1}) dt \geq 2 \int_0^1 (t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}) dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{4a}}{4a} + \frac{t^{4b}}{4b} + \frac{t^{4c}}{4c} + \frac{t^{a+3b}}{a+3b} + \frac{t^{b+3c}}{b+3c} + \frac{t^{c+3a}}{c+3a} \right) \Big|_0^1 \geq 2 \left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b} + \frac{t^{3b+c}}{3b+c} + \frac{t^{3c+a}}{3c+a} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{2}{3a+b} + \frac{2}{3b+c} + \frac{2}{3c+a}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{3a+b} + \frac{3}{3b+c} + \frac{3}{3c+a}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Với mọi $x, y, z > 0$ ta có: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x)$.

• **Áp dụng:** Đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, bất đẳng thức trên trở thành

$$(t^{2a} + t^{2b} + t^{2c})^2 \geq 3(t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a}) \Leftrightarrow \frac{1}{t} (t^{2a} + t^{2b} + t^{2c})^2 \geq \frac{3}{t} (t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a}),$$

Lấy tích phân cả 2 vế ta được

$$\int_0^1 \frac{1}{t} (t^{2a} + t^{2b} + t^{2c})^2 dt \geq 3 \int_0^1 \frac{1}{t} (t^{3a+b} + t^{3b+c} + t^{3c+a}) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + 2t^{2a+2b-1} + 2t^{2b+2c-1} + 2t^{2c+2a-1}) dt \geq \int_0^1 (t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}) dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{4a}}{4a} + \frac{t^{4b}}{4b} + \frac{t^{4c}}{4c} + \frac{t^{2a+2b}}{a+b} + \frac{t^{2b+2c}}{b+c} + \frac{t^{2c+2a}}{c+a} \right) \Big|_0^1 \geq \left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b} + \frac{t^{3b+c}}{3b+c} + \frac{t^{3c+a}}{3c+a} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{3a+b} + \frac{3}{3b+c} + \frac{3}{3c+a}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 5. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{8}{a+b+c+d} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+d} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{b+d} + \frac{2}{c+d}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Với mọi $x, y, z > 0$ ta có: $3(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) + 4xyz \geq (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$

• **Áp dụng:** Đặt $x = \lambda^a, y = \lambda^b, z = \lambda^c, t = \lambda^d$, bất đẳng thức trên trở thành

$$3(\lambda^{4a} + \lambda^{4b} + \lambda^{4c} + \lambda^{4d}) + 4\lambda^{a+b+c+d} \geq (\lambda^{2a} + \lambda^{2b} + \lambda^{2c} + \lambda^{2d})^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{1}{\lambda} (\lambda^{4a} + \lambda^{4b} + \lambda^{4c} + \lambda^{4d}) + 4 \frac{1}{\lambda} \lambda^{a+b+c+d} \geq 2 \frac{1}{\lambda} \sum_{sym} \lambda^{2a+2b}$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 theo biến λ , ta có

$$2 \int_0^1 \frac{1}{\lambda} (\lambda^{4a} + \lambda^{4b} + \lambda^{4c} + \lambda^{4d}) + 4 \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \lambda^{a+b+c+d} \geq 2 \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \sum_{sym} \lambda^{2a+2b}$$

$$\left(\frac{\lambda^{4a}}{2a} + \frac{\lambda^{4b}}{2b} + \frac{\lambda^{4c}}{2c} + \frac{\lambda^{4d}}{2d} \right) \Big|_0^1 + 4 \left(\frac{\lambda^{a+b+c+d}}{a+b+c+d} \right) \Big|_0^1 \geq \left(\sum_{sym} \frac{\lambda^{2a+2b}}{a+b} \right) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{8}{a+b+c+d} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+d} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{b+d} + \frac{2}{c+d}$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{\sqrt{2}}{3a+b} + \frac{\sqrt{2}}{3b+c} + \frac{\sqrt{2}}{3c+a} \geq \frac{1+\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{1+\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{1+\sqrt{2}}{c+3a}$$

Chứng minh

• **Bổ đề:** Với mọi $x, y, z > 0$ ta có:

$$x^4 + y^4 + z^4 + \sqrt{2}(x^3y + y^3z + z^3x) \geq (1+\sqrt{2})(xy^3 + yz^3 + zx^3) \quad (*)$$

• **Áp dụng:** Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ thì (*) trở thành

$$t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + \sqrt{2}(t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}) \geq (1+\sqrt{2})(t^{a+3b-1} + t^{b+3c-1} + t^{c+3a-1})$$

Lấy tích phân 2 vế trong $[0, 1]$ ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

VI. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng:
$$\frac{-\pi}{4} < \int_0^2 \frac{\cos x + \sqrt{3} \sin x}{x^2 + 4} dx < \frac{\pi}{4}$$

Bài 2. Chứng minh rằng:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Bài 3. Chứng minh rằng:
$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx > 0$$

Bài 4. Chứng minh rằng:
$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

Bài 5. Chứng minh rằng:
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \right) dx \geq \frac{\pi}{8}$$

Bài 6. Chứng minh rằng:
$$\int_2^x t^2 \arctan^n t dt \geq \frac{x^{n+3} - 2^{n+2}}{n+3} ; \quad \int_0^x t \tan^n t dt \geq \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Bài 7. Chứng minh rằng:
$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4 + 1} dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4 - 1} dx < 9.0001$$

Bài 8. Chứng minh rằng:
$$\int_1^2 \frac{x^4 + 1}{x(x^2 + a^2)^2} dx > \frac{3}{(1+a^2)(4+a^2)}$$

Bài 9. Chứng minh rằng:
$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4 + 4a^4} dx < \frac{1}{8a^2}$$

Bài 10. Chứng minh rằng:
$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2}} > 2a^{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n)^n}$$

Bài 11. Chứng minh rằng:
$$\int_{a/\sqrt{2}}^{2a} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{x^4 - a^4}} < \frac{\pi}{a^2} \left[\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right]$$

Bài 12. Chứng minh rằng:
$$\int_{a/\sqrt{2}}^a x \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx < \frac{a^5}{4} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Bài 13. Chứng minh rằng:
$$\int_1^2 x^2 \sin^n x dx \geq \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \left(\frac{2^{n+3} - 1}{n+3} \right)$$

Bài 14. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2} (a^2 \cdot \sqrt[3]{\cos x \tan x} + b^2 \sin x) dx > \pi ab$

Bài 15. Chứng minh rằng: $\int_{-1}^1 [(1+x)^n + (1-x)^n] dx \leq 2^{n+1}$

Bài 16. Chứng minh rằng: $\int_0^1 \frac{e^x \sin x}{x} dx > 1.36$; $\int_1^{10} x^x dx > \frac{10^{10}}{1 + \ln 10}$

Bài 17. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2} e^{ax} (\cos x - a \sin x) dx > \frac{\pi}{2}$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\int_{-2}^2 \left[x \ln(x^2 - 3) + \sqrt{3} \ln \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right] dx < 4 \left(4 - \sqrt{3} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right)$

Bài 19. Cho $I(m) = \int_0^1 |x^2 + m| dx$. Chứng minh rằng: $I(m) \geq I\left(\frac{-1}{4}\right) \quad \forall m \in \mathbb{R}$

Bài 20. Chứng minh rằng:

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \dots + \arctan n < \left(n - \frac{1}{2}\right) \arctan n - \ln \sqrt{1 + n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 21. Cho hàm số $f(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$, thỏa mãn $f(a) = 0$. Cho $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Chứng minh rằng: $|f(x)| \leq M(x - a), \quad \forall x \in [a, b]$

Bài 22. Giả sử hàm số $f(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^1 |f(x)| dx \leq \max \left\{ \left| \int_0^1 f(x) dx \right|, \int_0^1 |f'(x)| dx \right\}$$

Bài 23. Giả sử hàm số $f(x)$ cùng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx \geq [f(b) - f(a)]^2$$

Bài 24. Giả sử hàm số $f(x)$ cùng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(a) = 0$ và tồn tại $k > 0$ sao cho $|f'(x)| \leq k |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$.

$$\text{Chứng minh rằng: } f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Bài 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ với $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_a^b f(x) dx \geq (b-a) \left[f(c) + \left(\frac{b+a}{2} - c \right) f'(c) \right] \quad \forall c \in (a, b)$$

Bài 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ với $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Chúng minh rằng:
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Bài 27. Cho $T_n(x)$ là đa thức Chebyshev bậc n ($n \geq 2$).

Chúng minh rằng:
$$\int_{-1}^1 T_n^3(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Bài 28. Cho hàm số $f(x)$ và $f''(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn

$f(a) = f(b) = 0$ và $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Cho $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

1. Chúng minh rằng: $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$ với $c_1 < c_2$ sao cho $f'(c_1) - f'(c_2) \geq \frac{4M}{b-a}$

2. Chúng minh rằng:
$$\int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)} dx \geq \frac{4}{b-a}$$

Bài 29. Cho $f(x)$ là hàm liên tục và đồng biến $[0, c]$ với $c > 0$. Giả sử $f(0) = 0$ và lấy các điểm $a \in [0, c]; b \in [0, f(c))$. Gọi $f^{-1}(x)$ là hàm ngược của f

(x). Chúng minh rằng:
$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx \geq ab$$

(Bất đẳng thức tích phân Young)

Bài 30. Cho dãy các hàm $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $\int_a^b f_n^2(x) dx = 1$,

$\forall n = 1, 2, \dots$ Chúng minh rằng luôn tồn tại $p_1, p_2, \dots, p_k$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^k p_i^2 = 1$ sao

cho
$$\max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{i=1}^k p_i f_i(x) \right| > 100$$

Bài 31. Cho hàm f liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Chúng minh rằng:

$$\forall a > 0, \forall b, c \in \mathbb{R} \text{ ta có } 2af(b-c^2) \leq \int_{c-a}^{c+a} f(x^2 - 2cx + b) dx \leq 2af(a^2 + b - c^2)$$

Bài 32. Cho $a > 0$ và hàm số f liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn

$$\int_a^t f^2(x) dx \leq \int_a^t x^2 dx \quad \forall t \geq a. \text{ Chúng minh rằng: } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b x dx \quad \forall b \geq a$$

Bài 33. Cho f là một số dương liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $\int f(x) dx = F(x) + c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{F(a+b) - F(a)}{2\sqrt{a+b}} \leq \int_a^{a+b} f(x^2) dx \leq \frac{F(a+b) - F(a)}{2\sqrt{a}} \quad \forall a, b > 0$$

Bài 34. Cho $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$ và $u_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx$

1. Chứng minh rằng: $a_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - 2x \right) u_n(x) dx$ 3. Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

2. Chứng minh rằng: $\frac{\pi^2}{6} - a_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n+1)x}{2} dx$ với $f(x) = \begin{cases} \frac{x - x^2}{2\pi} & \forall x \in (0, \pi) \\ \sin \frac{x}{2} & \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

Bài 35. Cho f liên tục và không âm trên đoạn $[0, 1]$ thỏa mãn điều kiện

$$f^2(t) \leq 1 + 2 \int_0^t f(x) dx. \text{ Chứng minh rằng: } f(t) \leq 1 + t \quad \forall t \in [0, 1]$$

Bài 36. Cho g liên tục, không tăng trên $[0, 1]$ thỏa mãn $0 \leq g(x) \leq 1$

$$\text{Chứng minh rằng: } \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{a+b}}\right) dx \geq \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{a}}\right) dx \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{b}}\right) dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; ab \neq 0, a + b \neq 0$$

Bài 37. Cho $m, k \in \mathbb{N}^*$ và $P(x) = a_0 x^{m+1} + a_1 x^m + \dots + a_m x$ ($a_0 \neq 0$)

Lập dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $u_n = \sum_{i=0}^{nk} P\left(\frac{1}{n+i}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Bài 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và tăng thực sự trên $[0, 1]$, $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$.
Cho $f(0)=0$ và $f(1)=1$

$$\text{Chứng minh rằng: } \sum_{k=1}^9 \left[f\left(\frac{k}{10}\right) + g\left(\frac{k}{10}\right) \right] < 9.9$$

Bài 39. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(a) + f(b) \geq \int_a^b f^2(x) dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \text{ Chứng minh rằng: } f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 40. Cho $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$. Tìm I_n và $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

Bài 41. Cho $I_n = \int_n^{n+k} \frac{\sin x}{x} dx$, $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

Bài 42. Cho $m, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^n y^m + x^m y^n) \geq nm(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x)$$

Bài 43. Chứng minh với mọi a, b, c, d dương thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{8}{a+b+c+d} \geq (a+b+c+d) \left(\frac{2}{(a+b)(c+d)} + \frac{2}{(b+c)(d+a)} + \frac{2}{(c+a)(b+d)} \right)$$

Bài 44. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} - \frac{9}{a+b+c} \geq 9 \left(\frac{2}{a+2b} + \frac{2}{b+2c} + \frac{2}{c+2a} - \frac{1}{2a+b} - \frac{1}{2b+c} - \frac{1}{2c+a} \right)$$

Bài 45. Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$ thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{4}{5a+b} + \frac{4}{5b+c} + \frac{4}{5c+a} + \frac{4}{5b+a} + \frac{4}{5c+b} + \frac{4}{5a+c}$$

Bài 46. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \geq 4 \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} - \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{b+3c} - \frac{1}{c+3a} \right)$$

Bài 47. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{8}{3(a+b+c)} \geq \frac{17}{9} \left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \right)$$

Bài 48. Chứng minh với các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{(n-1)a_i + a_j}$$

Bài 49. Chứng minh với các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có

$$\frac{n(n-1)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{S - a_i + a_j}$$

Trong đó $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Nhìn lại chương III

Như vậy là chúng ta đã cùng nhau đi hết 8 đề mục của chương III, một chương mà có cảm tưởng khắp nơi chỉ tràn ngập không khí giải tích và những phép đạo hàm buồn tẻ. Nhưng nếu nắm bắt được ý tưởng và không sa đà vào các kỹ năng tính toán thì chúng ta sẽ thấy các bài toán của cả chương này không buồn tẻ một chút nào.

Trước hết chúng ta hãy nhớ lại ý nghĩa hình học của phép đạo hàm. Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong một hệ trục tọa độ Oxy nào đó. Khi ấy việc chứng minh bất đẳng thức $f(x) > 0$ tương đương với việc chứng minh rằng đồ thị của hàm $y = f(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành Ox $y = 0$. Tư tưởng chính của phương pháp giải tích là thay vì ngay lập tức tìm cách chứng minh bất đẳng thức trong toàn miền như các phương pháp đại số thường làm, ta sẽ khảo sát đáng điệu chung của đồ thị hàm số $y = f(x)$, sau đó tìm ra những điểm đặc biệt, chẳng hạn điểm cao nhất hoặc điểm thấp nhất trong một lân cận đủ nhỏ (cực đại hoặc cực tiểu), cuối cùng dựa trên việc khảo sát tính chất của hàm số tại những điểm đặc biệt này ta đưa ra kết luận tổng quát. Chú ý rằng đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 chính là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm đó, nó cho biết sự tăng giảm của hàm số tại các điểm cụ thể, và do đó cũng mô tả chính xác đáng điệu chung của toàn bộ đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Các định lý **Fermat** trong mục I §9 cho biết các dấu hiệu nhận biết các điểm cực trị của hàm số và từ tính chất cụ thể của đạo hàm suy ra đáng điệu chung của hàm số như thế nào. Thật vậy, nếu đạo hàm luôn dương hoặc luôn âm thì hàm số tăng hoặc giảm trên toàn miền xác định và do đó sẽ đạt min hay max ở các biên (định lý I.1 §9). Tổng quát hơn hàm số sẽ chỉ đạt cực trị (cực đại hay cực tiểu địa phương) tại các điểm mà ở đó đạo hàm đổi dấu, hoặc đạo hàm một hay hai phía tại đó không xác định (định lý I.2 và I.3 §9). Định lý **Lagrange** (xem 10.1.I) cho ta một cái nhìn sâu sắc hơn về hình ảnh của đồ thị hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng (a, b) , cụ thể định lý nói rằng có ít nhất 1 điểm đặc biệt c (với $a < c < b$) mà tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại c song song với đoạn thẳng nối 2 điểm $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Điểm đặc biệt này rất có ý nghĩa trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức lượng giác tinh tế. Cũng theo hướng tiếp cận này, bài toán cực trị hàm nhiều biến không điều kiện và bài toán cực trị hàm nhiều biến có điều kiện ràng buộc giữa các biến về lý thuyết đã được giải quyết trọn vẹn bằng phương pháp nhân tử **Lagrange** (xem nội dung mục 10.2). Có thể nhận thấy phương pháp này đã sử dụng tối đa sức mạnh của các định lý **Fermat** cổ điển. Tiếp theo đó, bất đẳng thức **Bernoulli** dạng đại số (11.1.I.1) cho ta một đánh giá giữa dạng tổng và tích các biến số đại số, trong khi đó bất đẳng thức **Bernoulli** dạng giải tích (các định lý trong mục 11.1.I.2 và 11.1.I.3) đưa ra một số so sánh giữa các hàm số không đồng bậc, cụ thể là giữa hàm số bậc thực tùy ý với hàm bậc nhất. Tuy tầm ứng dụng của bất đẳng thức này khá “khiêm tốn”, nhưng kết hợp với kỹ thuật chọn điểm rơi ta có thể nhận được những lời giải khá ngắn gọn và độc đáo.

Phát triển theo một hướng khác, các bất đẳng thức **Jensen**, **Karamata**, **RCF**, **LCF** và **Popoviciu** được xây dựng cho một lớp các hàm có tính chất đặc biệt như lồi, lõm, (**Jensen**, **Karamata**, **Popoviciu**) và nửa lồi (**RCF**), nửa lõm (**LCF**). Sự khác biệt giữa các định lý này với

các nội dung ở trên không chỉ ở chỗ nó khảo sát đáng điệu của hàm số theo tính chất của đạo hàm cấp 2 mà còn ở chỗ mỗi định lý đó đều bao hàm một phép dồn biến cụ thể. Thật vậy, với bất đẳng thức Jensen (xem định lý III.1 §12) các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ với các trọng số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thỏa mãn đẳng thức $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ được dồn về giá trị trung bình $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$. Trong khi đó bất đẳng thức *Karamata* (định lý I.3 §13) được phát biểu cho hai bộ số được sắp thứ tự $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ với $(a) \succ (b)$. Nhờ định lý này ta có thể dồn được một bộ đủ tốt (có thể sắp thứ tự) về một bộ số khác yếu hoặc trội hơn nó. Các mở rộng và hệ quả của bất đẳng thức này cho ta những cách dồn biến khá quen thuộc, chẳng hạn trường hợp riêng của bất đẳng thức *Karamata* khi $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ chính là bất đẳng thức *Jensen* với các trọng số $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1/n$, còn trong hệ quả định lý I.5.4

§13 ta có phép dồn biến từ bộ n số $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ về $\left(\frac{b_1 + b_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}, b_3, \dots, b_n\right)$. Một hướng

dồn biến khác rất thú vị chính là nội dung của bất đẳng thức *Popoviciu* được phát biểu trong hai định lý I.1 và I.2 §15. Theo đó ta sẽ thực hiện phép dồn biến không chỉ trên các biến ban đầu

$a_1, a_2, \dots, a_n$ mà còn kéo thêm một biến nữa là trung bình cộng $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ của chúng

vào về trái, về phải lúc này sẽ là các trung bình cộng của các bộ m số trong chúng, số m được xác định tùy trường hợp cụ thể. Định lý này cho ta khả năng dồn biến về các giá trị trung bình rất thoải mái và đa dạng.

Đối với các hàm số không đủ tốt, nghĩa là hàm số đó không lồi hoặc lõm trên toàn miền xác định của nó, các định lý *RCF* và *LCF* đã chỉ ra một cách khắc phục khá hiệu quả. Cụ thể nếu hàm f xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, nhưng chỉ lồi với $u \geq s, s \in \mathbb{I}$ khi đó nếu ta có bất đẳng thức

dạng *Jensen* $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$ với mọi bộ n số

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = s$ và $x_2 = x_3 = \dots = x_n \geq s$ thì bất đẳng thức đó

cũng đúng với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq s$ (định lý *RCF* – 14.I). Định

lý *LCF* và định lý kết hợp *RCLCF* được phát biểu trong các mục 14.II và 14.III. Nhờ định lý này thay vì việc phải kiểm tra bất đẳng thức trên toàn miền ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức với một số các bộ số đặc biệt. Đây cũng chính là tư tưởng chính của phép dồn biến được trình bày trong chương IV, §18.

Cuối cùng, với ứng dụng của tích phân Riman trong §16, trong nhiều trường hợp ta có thể nhìn hai vế của các bất đẳng thức như là nguyên hàm của các hàm số nào đó. Khi đó việc chứng minh bất đẳng thức có thể quy về việc so sánh các tính chất mang tính toàn cục của hai hàm số:

CHƯƠNG IV: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI

Các bạn độc giả thân mến! Vậy là chúng ta đã trải qua ba chương đầu thực sự dài với đầy những đánh giá ước lượng và chứng minh. Các bạn sẽ hơi mệt mỏi với việc theo dõi suốt từng bài toán và có thể đã tự hỏi rằng điều đó liệu có ý nghĩa gì không. Thật ra đây cũng là câu hỏi mà chính những người biên tập chúng tôi đã tự đặt ra cho mình. Chúng ta đều biết rằng thế giới bất đẳng thức vô cùng rộng lớn và phong phú, muốn đi tìm và khám phá được những bí ẩn mà chưa ai biết tới là một việc không hề đơn giản. Vì thế, giống như những ngư dân phải ngồi đan lưới trước khi ra khơi bắt cá, như người thợ săn phải chuẩn bị súng đạn kỹ càng trước khi vào rừng săn hổ, chúng ta cũng cần phải tự trang bị cho mình những hiểu biết nhất định về chính thế giới mà chúng ta đang khát khao khai phá. Cũng vì lẽ đó, các bạn hãy hiểu rằng ba chương trước chính là những nền tảng vững chắc nhất, những viên kim cương đẹp đẽ nhất mà chúng tôi đã cung cấp cho các bạn nhằm giúp các bạn có đủ hứng thú và khả năng để tiếp tục đi cùng chúng tôi trên con đường đầy chông gai sắp tới nhằm khám phá những viên kim cương mới đẹp đẽ hơn nữa. Như vậy chúng ta mới có thể tiếp tục một cuộc hành trình dài này cùng với nhau.

Những con đường không phải bao giờ cũng bằng phẳng, và những kết quả mới không phải lúc nào cũng đẹp, cũng đã ngay lập tức trở thành kim cương. Để biết được một kết quả mới có thực sự là kim cương hay không, cần phải có thời gian và những thử nghiệm cần thiết. Trong chương này, chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn sáu kết quả mới, mà theo quan điểm của chúng tôi, chúng thực sự là những viên kim cương còn trẻ. Những kết quả này cũng có thể đã được ấp ủ từ rất lâu bởi những tác giả khuyết tên, nhưng đây sẽ là lần đầu tiên nó được trình bày một cách đầy đủ, chi tiết và có hệ thống (trừ ra định lý *EV* của *Vasile Crîtoaje*). Sáu kết quả đó lần lượt là phương pháp phân tích tổng bình phương *SOS* (nhiều tác giả), phương pháp dồn biến (nhiều tác giả), phương pháp đánh giá tích *ABC* của *Nguyễn Anh Cường*, phương pháp hình học hóa đại số *GLA* của *Bùi Việt Anh*, phương pháp biến số bằng nhau *EV* của *Vasile Crîtoaje* và phương pháp chia đề trị *DAC* do hai anh em *Phan Thành Nam*, *Phan Thành Việt* phát triển và hoàn thiện.

Sáu chuyên đề, sáu kết quả, sáu phương pháp, đó đều là những câu chuyện dài và riêng biệt. Nhưng có một đặc điểm chung là mặc dù chúng mới chỉ được phát triển trong khoảng ba, bốn năm trở lại đây, tính đẹp đẽ của chúng dường như ngay lập tức đã trở nên phổ biến và được thừa nhận trong cộng đồng những người yêu thích bất đẳng

thức sơ cấp Việt Nam và thế giới. Hơn nữa, một điều đặc biệt thú vị là mặc dù chúng được các tác giả đưa ra hoàn toàn trên cơ sở làm việc độc lập, nhưng xét trong tổng thể, chúng lại vô cùng gắn bó với nhau. Chẳng hạn mặc dù phương pháp phân tích tổng bình phương *SOS* ban đầu chỉ có hiệu quả với các bài toán đối xứng, thì nay, nếu kết hợp nó với phương pháp chia để trị sẽ khiến cho một lớp rộng các bài toán hoán vị được giải quyết. Các định lý dồn biến mạnh (*SMV* – *Phạm Kim Hùng*), dồn biến không xác định (*UMV* – *Đinh Ngọc An*), cuối cùng đều được khái quát và trở thành trường hợp riêng của dồn biến tổng quát (*GMV* – *Phan Thành Việt, Phan Thành Nam*). Phương pháp đánh giá tích (*ABC* – *Nguyễn Anh Cường*) và phương pháp hình học hóa đại số (*GLA* – *Bùi Việt Anh*) lúc mới ra đời đã bị rất nhiều người cho rằng chưa chặt chẽ, thậm chí sai về logic, nhưng thật ra chúng hoàn toàn chính xác, đồng thời còn là hai anh em trong một gia đình có ba anh em sinh ba, người anh em thứ ba còn lại chính là phương pháp biến số bằng nhau *EV* của *Vasile Critoaje*. Đến lượt mình, phương pháp chia để trị *DAC* với tính linh hoạt đáng ngạc nhiên của nó có thể kết hợp với hầu hết các phương pháp khác để cùng tấn công mọi bất đẳng thức hiện tại được cho là khó, bất kể đối xứng hay hoán vị.

Tất nhiên, nếu nói rằng với sáu phương pháp này chúng ta có thể giải quyết được mọi bất đẳng thức sơ cấp hiện nay thì hoàn toàn không đúng. Có những bất đẳng thức mà cho đến nay tất cả các phương pháp đã biết đều trở nên vô hiệu, mặc dù những bất đẳng thức như thế không phổ biến lắm. Dù sao, chúng tôi tin rằng sáu cuộc hành trình “nhớ” sắp tới sẽ khiến cho các bạn đọc có thêm những kiến thức và những cái nhìn rộng hơn về thế giới bất đẳng thức, từ đó tiến tới khả năng có thể tự tìm kiếm cho riêng mình những viên kim cương sáng lấp lánh khác. Còn bây giờ, chúng tôi sẽ tạm ngừng phần bình luận, và để các bạn thoải mái tham gia sáu cuộc hành trình. Chúng ta sẽ gặp lại nhau ngay sau khi cuộc hành trình thứ sáu kết thúc!

§17. PHƯƠNG PHÁP S.O.S (SUM OF SQUARE)

I. BIỂU DIỄN ĐA THỨC KHÔNG ÂM DƯỚI DẠNG TỔNG BÌNH PHƯƠNG

1. Định nghĩa: Đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là hàm n biến số $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và

$\sum F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là tổng $n!$ biểu thức thu được từ $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bằng tất cả các hoán vị của bộ biến số $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

• Đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là hàm thuần nhất bậc $m \Leftrightarrow$

$$F(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = t^m \cdot F(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

• Đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0 \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in D \Leftrightarrow F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gọi là dạng không âm trong miền D .

2. Đồng nhất thức Hurwitz – Muirhead và bất đẳng thức AM – GM

Xét trường hợp đặc biệt: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ với $a_k \geq 0, \alpha_k \geq 0$

$$\text{Đặt } [\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \frac{1}{n!} \sum F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{n!} \sum a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$$

$$\text{Đặc biệt: } [1, 0, 0, \dots, 0] = \frac{(n-1)!}{n!} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A(a) : \text{Trung bình cộng (AM)}$$

$$\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right] = \frac{n!}{n!} a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \dots a_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = g(a) : \text{Trung bình nhân (GM)}$$

$$\text{Xét biến đổi: } A(a^n) - g(a^n) = \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n} - a_1 a_2 \dots a_n = [n, 0, 0, \dots, 0] - [1, 1, 1, \dots, 1]$$

$$= [n, 0, 0, \dots, 0] - [n-1, 1, 0, \dots, 0] + [n-1, 1, 0, \dots, 0] - [n-2, 1, 1, 0, \dots, 0] +$$

$$+ [n-2, 1, 1, 0, \dots, 0] - [n-3, 1, 1, 1, 0, \dots, 0] + \dots + [3, 1, 1, \dots, 1, 0, 0] - [2, 1, 1, \dots, 1, 0] + [2, 1, 1, \dots, 1, 0] - [1, 1, 1, \dots, 1]$$

$$= \frac{1}{2n!} \left[\sum (a_1^{n-1} - a_2^{n-1})(a_1 - a_2) + \sum (a_1^{n-2} - a_2^{n-2})(a_1 - a_2)a_3 + \sum (a_1^{n-3} - a_2^{n-3})(a_1 - a_2)a_3 a_4 + \dots \right]$$

$$\text{Do } (a_p - a_q)(a_p^n - a_q^n) \geq 0 \forall a_p, a_q \geq 0 \text{ nên } A(a^n) - g(a^n) \geq 0$$

Đặt $a_1 = x_1^2, \dots, a_n = x_n^2$ và gọi bộ $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$. Khi đó ta có:

$$n[A(a^n) - g(a^n)] = (a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) - n a_1 a_2 \dots a_n = x_1^{2n} + \dots + x_n^{2n} - n x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2(n-1)!} \left[\sum (x_{i_1}^{2n-2} - x_{i_2}^{2n-2})(x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2) + \sum (x_{i_1}^{2n-4} - x_{i_2}^{2n-4})(x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2)x_{i_3}^2 + \dots + \sum (x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2)^2 x_{i_3}^2 x_{i_4}^2 \dots x_{i_{n-1}}^2 \right]$$

Mặt khác:

$$(x_{i_1}^{2n-2k} - x_{i_2}^{2n-2k})(x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2)x_{i_3}^2 \dots x_{i_{k+1}}^2 = (x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2)^2 [x_{i_1}^{2n-2k-2} + x_{i_1}^{2n-2k-4} x_{i_2}^2 + \dots + x_{i_2}^{2n-2k-2}] x_{i_3}^2 \dots x_{i_{k+1}}^2$$

$$= (x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2)^2 \left[\sum_{j=1}^{n-k} (x_{i_1}^{n-k-j} x_{i_2}^{j-1})^2 \right] x_{i_3}^2 \dots x_{i_{k+1}}^2 = \sum_{j=1}^{n-k} [(x_{i_1}^2 - x_{i_2}^2) x_{i_1}^{n-k-j} x_{i_2}^{j-1} x_{i_3}^2 \dots x_{i_{k+1}}^2]^2$$

$$\Rightarrow n[A(a^n) - g(a^n)] = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_m^2 \geq 0 \Rightarrow A(a^n) \geq g(a^n) \Rightarrow A(a) \geq g(a)$$

3. Các trường hợp đặc biệt: • $n = 2$: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$

• $n = 3$:

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 - 3x_1^2x_2^2x_3^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\left[(x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_2^2 - x_3^2)^2 + (x_3^2 - x_1^2)^2\right]$$

• $n = 4$: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 4x_1x_2x_3x_4 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_3^2 - x_4^2)^2 + 2(x_1x_2 - x_3x_4)^2$

• $n = 5$: $x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10} + x_4^{10} + x_5^{10} - 5x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2.4!} \left[\sum! (x_1^8 - x_2^8)(x_1^2 - x_2^2) + \sum! (x_1^6 - x_2^6)(x_1^2 - x_2^2)x_3^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum! (x_1^4 - x_2^4)(x_1^2 - x_2^2)x_3^2x_4^2 + \sum! (x_1^2 - x_2^2)^2x_3^2x_4^2x_5^2 \right] \\ &= \frac{1}{2.4!} \left[\sum! \sum_{j=1}^4 \left[(x_1^2 - x_2^2)x_1^{4-j}x_2^{j-1} \right]^2 + \sum! \sum_{j=1}^3 \left[(x_1^2 - x_2^2)x_1^{3-j}x_2^{j-1}x_3 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum! \sum_{j=1}^2 \left[(x_1^2 - x_2^2)x_1^{2-j}x_2^{j-1}x_3x_4 \right]^2 + \sum! \left[(x_1^2 - x_2^2)x_3x_4x_5 \right]^2 \right] \end{aligned}$$

• $n = 6$:

$$\begin{aligned} x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 + x_6^6 - 6x_1x_2x_3x_4x_5x_6 &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\left[(x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_2^2 - x_3^2)^2 + (x_3^2 - x_1^2)^2\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)\left[(x_4^2 - x_5^2)^2 + (x_5^2 - x_6^2)^2 + (x_6^2 - x_4^2)^2\right] + 3(x_1x_2x_3 - x_4x_5x_6)^2 \end{aligned}$$

4. Định lý và các ví dụ:

4.1. Định lý Hilbert 1:

Nếu đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thuần nhất và không âm trong miền D , tức là:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0 \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in D \text{ thì có thể biểu diễn}$$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2 \text{ với } p_k \text{ là các hàm hữu tỉ thực.}$$

4.2. Định lý Hilbert 2: Nếu đa thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ không thuần nhất và không âm trong miền $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$ thì

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum c_k a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)^{\alpha_{n+1}}$$

trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ là các số nguyên không âm và $c_k > 0$.

4.3. Bình luận: Các Định lý Hilbert 1 và 2 mang tính chất định tính, nó giúp chúng ta tin tưởng rằng tồn tại một cách chứng minh một đa thức không âm bằng phương pháp phân tích thành tổng các bình phương (đối với hàm thuần nhất) hoặc phân tích thành tổng các đại lượng không âm (đối với hàm không thuần nhất). Tuy nhiên chính vì sự tồn tại mơ hồ này nên nó ít có giá trị thực tiễn trong chứng minh bất đẳng thức của toán học sơ cấp. Ta xét 2 ví dụ tiêu biểu sau đây để bạn đọc thấy rằng việc phân tích thành tổng các bình phương thật sự là khó khăn nếu không có niềm tin về sự tồn tại của phép

phân tích. Các ví dụ 1 và ví dụ 2 có lời giải rất ngắn gọn nhưng rất thiếu tự nhiên nên việc tìm ra lời giải khác nào ta phải đoán các ô chữ mà chỉ biết kết quả là một ô chữ có ý nghĩa.

Ví dụ 1: $a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Giải: $2[a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 - 2(a^3b + b^3c + c^3a)] =$
 $= (a^2 - ab + ac - c^2)^2 + (b^2 - bc + ba - a^2)^2 + (c^2 - ca + cb - b^2)^2 \geq 0$

Ví dụ 2: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (1)

Lời giải 1:

$$(1) \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a) \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + 2 \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 3 \sum_{cyc} a^3b$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 \right) + 3 \left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc \right) - 3 \left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc \right) \geq 0$$

$$\text{Biến đổi: } \sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2; \quad 3 \left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc \right) = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2$$

$$3 \left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc \right) = 3 \left(\sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc \right) = -3 \sum_{cyc} bc(a^2 - b^2)$$

$$= -3 \sum_{cyc} bc(a^2 - b^2) + \sum_{cyc} (ab + bc + ca)(a^2 - b^2) = \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc)$$

$$\text{Khi đó: } S = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2 - \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2 - ab - ac + 2bc)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

$$\text{Lời giải 2: } 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) \right] =$$

$$= \left[(a^3 + b^3 + c^3) - 5(a^2b + b^2c + c^2a) + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) \right]^2 +$$

$$+ 3 \left[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) - 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc \right]^2 \geq 0$$

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S.)

1. Đặt vấn đề:

Để chứng minh một đa thức thuần nhất $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$ thì theo Định lý Hilbert sẽ

tồn tại một cách biểu diễn $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2$ với p_k là các hàm hữu tỉ

thực nhưng việc chỉ ra cách biểu diễn cụ thể là rất khó khăn. Phương pháp phân tích

tổng các bình phương S.O.S. dưới đây sẽ giúp chúng ta khắc phục được tính trừu tượng

phân tích. Các ví dụ 1 và ví dụ 2 có lời giải rất ngắn gọn nhưng rất thiếu tự nhiên nên việc tìm ra lời giải chẳng khác nào ta phải đoán các ô chữ mà chỉ biết kết quả là một ô chữ có ý nghĩa.

Ví dụ 1: $a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Giải: $2[a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 - 2(a^3b + b^3c + c^3a)] =$
 $= (a^2 - ab + ac - c^2)^2 + (b^2 - bc + ba - a^2)^2 + (c^2 - ca + cb - b^2)^2 \geq 0$

Ví dụ 2: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (1)

Lời giải 1:

$$(1) \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a) \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + 2 \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 3 \sum_{cyc} a^3b$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 \right) + 3 \left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc \right) - 3 \left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc \right) \geq 0$$

$$\text{Biến đổi: } \sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2; \quad 3 \left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc \right) = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2$$

$$3 \left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc \right) = 3 \left(\sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc \right) = -3 \sum_{cyc} bc(a^2 - b^2)$$

$$= -3 \sum_{cyc} bc(a^2 - b^2) + \sum_{cyc} (ab + bc + ca)(a^2 - b^2) = \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc)$$

$$\text{Khi đó: } S = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc} (ab + ac - 2bc)^2 - \sum_{cyc} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a^2 - b^2 - ab - ac + 2bc)^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Lời giải 2: $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a)] =$
 $= [(a^3 + b^3 + c^3) - 5(a^2b + b^2c + c^2a) + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2)]^2 +$
 $+ 3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) - 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc]^2 \geq 0$

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S.)

1. Đặt vấn đề:

Để chứng minh một đa thức thuần nhất $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$ thì theo Định lý Hilbert sẽ tồn tại một cách biểu diễn $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_m^2$ với p_k là các hàm hữu tỉ thực nhưng việc chỉ ra cách biểu diễn cụ thể là rất khó khăn. Phương pháp phân tích tổng các bình phương S.O.S. dưới đây sẽ giúp chúng ta khắc phục được tính trừu tượng

của định lý Hilbert, đặc biệt là đối với các hàm đối xứng $F(a, b, c)$. Ở Việt Nam, phương pháp này đã được **Trần Phương, Trần Tuấn Anh** và **Anh Cường** nghiên cứu và phát biểu vào tháng 8 năm 2004. Đến năm 2006, **Phạm Kim Hùng** đặt tên chính thức là **S.O.S**.

2. Giới thiệu về phương pháp S.O.S.

Xét bất đẳng thức $A \geq B$ trong đó A, B là các biểu thức chứa các biến số a, b, c .

Giả sử ta biến đổi được bất đẳng thức $A - B \geq 0$ có dạng:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1). \text{ Xét các mệnh đề sau:}$$

2.1. Mệnh đề 1: Nếu $S_a \geq 0; S_b \geq 0; S_c \geq 0$ thì

$$S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Đây là một trường hợp tầm thường. Dưới đây ta sẽ xét các dấu hiệu khác để (1) đúng.

2.2. Mệnh đề 2: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn 2 điều kiện:

$$\text{i) } S_a + S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0.$$

$$\text{ii) Nếu } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \text{ thì } S_b \geq 0$$

$$\text{Khi đó ta có } S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó $S_b \geq 0$ và

$$(1) \Leftrightarrow S_b[(c-b) + (b-a)]^2 + S_a(b-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

2.3. Mệnh đề 3: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

$$\text{Nếu } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \text{ thì } S_a \geq 0, S_c \geq 0 \text{ và } S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$$

$$\text{Khi đó ta có } S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ và $S_a \geq 0, S_c \geq 0; S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$

Nếu $S_b \geq 0$ thì (1) luôn đúng.

$$\begin{aligned} \text{Nếu } S_b < 0 \text{ thì } S &= (S_b + S_a)(c-b)^2 + (S_b + S_c)(b-a)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \\ &\geq (S_b + S_a)(c-b)^2 + (S_b + S_c)(b-a)^2 + S_b[(c-b)^2 + (b-a)^2] \\ &= (S_a + 2S_b)(c-b)^2 + (S_c + 2S_b)(b-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.4. Mệnh đề 4: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

của định lý Hilbert, đặc biệt là đối với các hàm đối xứng $F(a, b, c)$. Ở Việt Nam, phương pháp này đã được **Trần Phương, Trần Tuấn Anh** và **Anh Cường** nghiên cứu và phát biểu vào tháng 8 năm 2004. Đến năm 2006, **Phạm Kim Hùng** đặt tên chính thức là S.O.S.

2. Giới thiệu về phương pháp S.O.S.

Xét bất đẳng thức $A \geq B$ trong đó A, B là các biểu thức chứa các biến số a, b, c .

Giả sử ta biến đổi được bất đẳng thức $A - B \geq 0$ có dạng:

$$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1). \text{ Xét các mệnh đề sau:}$$

2.1. Mệnh đề 1: Nếu $S_a \geq 0; S_b \geq 0; S_c \geq 0$ thì

$$S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Đây là một trường hợp tầm thường. Dưới đây ta sẽ xét các dấu hiệu khác để (1) đúng.

2.2. Mệnh đề 2: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn 2 điều kiện:

$$\text{i) } S_a + S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0.$$

$$\text{ii) Nếu } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \text{ thì } S_b \geq 0$$

$$\text{Khi đó ta có } S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó $S_b \geq 0$ và

$$(1) \Leftrightarrow S_b[(c-b) + (b-a)]^2 + S_a(b-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

2.3. Mệnh đề 3: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

$$\text{Nếu } a \leq b \leq c \text{ hoặc } a \geq b \geq c \text{ thì } S_a \geq 0, S_c \geq 0 \text{ và } S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$$

$$\text{Khi đó ta có } S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ và $S_a \geq 0, S_c \geq 0; S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$

Nếu $S_b \geq 0$ thì (1) luôn đúng.

$$\begin{aligned} \text{Nếu } S_b < 0 \text{ thì } S &= (S_b + S_a)(c-b)^2 + (S_b + S_c)(b-a)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \\ &\geq (S_b + S_a)(c-b)^2 + (S_b + S_c)(b-a)^2 + S_b[(c-b)^2 + (b-a)^2] \\ &= (S_a + 2S_b)(c-b)^2 + (S_c + 2S_b)(b-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.4. Mệnh đề 4: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

Nếu $a \leq b \leq c$ thì $S_a \geq 0, S_b \geq 0$ và $b^2 S_c + c^2 S_b \geq 0$

Khi đó ta có $S = S_a (b-c)^2 + S_b (c-a)^2 + S_c (a-b)^2 \geq 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ và $S_a \geq 0, S_b \geq 0; b^2 S_c + c^2 S_b \geq 0$

$$\begin{aligned} S &= S_a (b-c)^2 + (b-a)^2 \left[S_b \left(\frac{c-a}{b-a} \right)^2 + S_c \right] \geq S_a (b-c)^2 + (b-a)^2 \left[S_b \left(\frac{c}{b} \right)^2 + S_c \right] \\ &= S_a (b-c)^2 + (c^2 S_b + b^2 S_c) \left(\frac{b-a}{b} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.5. Mệnh đề 5: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn 2 điều kiện:

i) $S_a + S_b > 0 \vee S_b + S_c > 0 \vee S_c + S_a > 0$

ii) $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \geq 0$

Khi đó ta có $S = S_a (b-c)^2 + S_b (c-a)^2 + S_c (a-b)^2 \geq 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $S_b + S_c > 0$. Đặt $u = b-a; v = c-b$, khi đó:

$$\begin{aligned} S &= S_a (b-c)^2 + S_b [(c-b) + (b-a)]^2 + S_c (a-b)^2 \\ &= (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b (c-b)(b-a) + (S_a + S_b)(b-c)^2 \\ &= (S_b + S_c) \left(u + \frac{S_b}{S_b + S_c} v \right)^2 + \frac{S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a}{S_b + S_c} \cdot v^2 \geq 0 \Rightarrow (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

2.6. Mệnh đề 6: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thỏa mãn điều kiện:

i) $a \leq b \leq c$ hoặc $a \geq b \geq c$

ii) Tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $S_a + \alpha^2 S_c + (\alpha+1)^2 S_b \geq 0$

iii)
$$\begin{cases} |a-b| \geq \alpha |c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + \frac{\alpha+1}{\alpha} S_b \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \geq \alpha |a-b| \\ S_a + S_b \geq 0 \\ S_a + \frac{\alpha+1}{\alpha} S_b \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có: $S_a (b-c)^2 + S_b (c-a)^2 + S_c (a-b)^2 \geq 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$,

$\exists \alpha > 0$ sao cho $S_a + \alpha^2 S_c + (\alpha+1)^2 S_b \geq 0$ và $\begin{cases} |a-b| \geq \alpha |c-b| \\ S_c + S_b \geq 0 \\ S_c + \frac{\alpha+1}{\alpha} S_b \geq 0 \end{cases}$

$$\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = \sum P_{ij}(a)(a_i - a_j)^2$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng quy nạp theo k là số lượng các số khác không trong tập hợp $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ (n, m là các hằng số).

Nếu $k = 1$ thì định lý hiển nhiên đúng.

Nếu $k = 2$ thì ta cần chứng minh tồn tại phép biểu diễn

$$\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} = \sum P_{ij}(a)(a_i - a_j)^2$$

Điều này có thể được chứng minh với chú ý rằng:

$$ta^m + (m-1)b^m - ma'b^{m-1} = P(a,b)(a-b)^2$$

Thật vậy, trước tiên chú ý rằng phương trình $f(x) = tx^n + (m-1) - mx^i = 0$ có nghiệm kép là 1, bởi vì $f(1) = f'(1) = 0$. Vì vậy $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$Q(x)(x-1)^2, \deg(Q) = m-2$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{b}, \text{ khi đó ta có: } b^m f\left(\frac{a}{b}\right) = ta^m + (m-1)b^m - ma'b^{m-1} = b^{m-2} Q\left(\frac{a}{b}\right)(a-b)^2.$$

Tuy nhiên $b^{m-2} Q\left(\frac{a}{b}\right)$ là một đa thức hai biến a, b bởi vì Q là một đa thức bậc $n-2$

Giả sử rằng mệnh đề của chúng ta đã đúng với k , là số lượng các số khác không trong tập $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, với $k+1$, chúng ta có thể đưa về trường hợp k như sau:

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = - \frac{\alpha_1 a_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \alpha_2 a_2^{\alpha_1+\alpha_2} - (\alpha_1 + \alpha_2) a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

$$\text{Chú ý rằng với } k=2: \frac{\alpha_1 a_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \alpha_2 a_2^{\alpha_1+\alpha_2} - (\alpha_1 + \alpha_2) a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}}{\alpha_1 + \alpha_2} = H_{12}(a)(a_1 - a_2)^2, \text{ ta có:}$$

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = Q_{12}(a)(a_1 - a_2)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

$$\text{Vì vậy: } \sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

$$= - \sum_{cyc} Q_{12}(a)(a_1 - a_2)^2 + \sum_{cyc} a_1^m - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{cyc} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

$$\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = - \sum_{cyc} Q_{12}(a)(a_1 - a_2)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \right) +$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1 + \alpha_2} a_2^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \right)$$

Mặt khác, hai biểu thức $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1 + \alpha_2} a_2^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ và $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_2^{\alpha_1 + \alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ có thể được biểu diễn dưới S.O.S, từ đó suy ra $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ cũng biểu diễn được dưới dạng S.O.S.

Theo nguyên lý quy nạp, định lý được chứng minh.

Áp dụng: Sử dụng bổ đề và đẳng thức sau ta có đpcm.

$$\sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} - \sum_{cyc} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} = \left(\sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} - \sum_{cyc} a_1^m \right) + \left(\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n} \right) \quad 3.$$

2. Nhận xét: Nói chung các bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị của các đa thức đồng bậc 3 biến số (hoặc dạng phân thức) đều có thể chuyển về dạng đa thức hoán vị thuần nhất 3 biến tức là có thể biểu diễn được dưới dạng S.O.S. Vì vậy phương pháp S.O.S gần như có thể giải quyết tất cả các lớp bất đẳng thức 3 biến số thuần nhất. Câu hỏi tiếp theo là: “Làm thế nào để biến đổi về các dạng chuẩn của S.O.S?” Lê đương nhiên thuật toán trên cũng là một gợi ý cho chúng ta một cách thức chuyển một đa thức về dạng S.O.S. Tuy nhiên đối với các dạng đại số khác thì sao? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta sẽ đưa ra một khái niệm sau đây:

Ta gọi hai đa thức A và B có mối quan hệ S.O.S “thân mật” nếu A-B có thể biểu diễn được dưới dạng S.O.S một cách trực tiếp không cần thông qua các biểu thức phụ trung gian. Khi đó chúng ta có thể biến đổi các biểu thức để làm rõ mối quan hệ S.O.S thông qua mối quan hệ trung gian S.O.S “thân mật”. Dưới đây là một số dạng biểu thức mà chúng ta thường gặp:

i) $P(a,b,c)A(a,b,c) - Q(a,b,c)B(a,b,c)$. Trong đó A và B, P và Q là thân mật. Để chuyển biểu thức đã cho về dạng S.O.S, chúng ta sẽ thông qua đại lượng trung gian $Q(a,b,c)A(a,b,c)$

$$P(a,b,c)A(a,b,c) - Q(a,b,c)A(a,b,c) + Q(a,b,c)A(a,b,c) - Q(a,b,c)B(a,b,c)$$

$$= A(a,b,c)[P(a,b,c) - Q(a,b,c)] + Q(a,b,c)[A(a,b,c) - B(a,b,c)]$$

ii) Hay dưới dạng phân thức

$$\frac{A(a,b,c)}{P(a,b,c)} - \frac{B(a,b,c)}{Q(a,b,c)} = \frac{A(a,b,c) - B(a,b,c)}{P(a,b,c)} + \frac{B(a,b,c)[Q(a,b,c) - P(a,b,c)]}{P(a,b,c)Q(a,b,c)}$$

iii) Cũng như căn thức:

$$\sqrt{A(a,b,c)P(a,b,c)} - \sqrt{B(a,b,c)Q(a,b,c)} = \frac{A(a,b,c)P(a,b,c) - B(a,b,c)Q(a,b,c)}{\sqrt{A(a,b,c)P(a,b,c)} + \sqrt{B(a,b,c)Q(a,b,c)}}$$

iv) Các trường hợp đặc biệt:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{3}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = \frac{(2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2}{3}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a =$$

$$\frac{(3a^2 + 2ab + b^2)(a-b)^2 + (3b^2 + 2bc + c^2)(b-c)^2 + (3c^2 + 2ca + a^2)(c-a)^2}{4}$$

$$a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3 = \frac{a+b+c}{3} [(b-a)^3 + (c-b)^3 + (a-c)^3]$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = \frac{(a-b)^2(a+b)^2 + (b-c)^2(b+c)^2 + (c-a)^2(c+a)^2}{2}$$

III. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. [Iranian Mathematical Olympiad 1996] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$(ab+bc+ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $c \geq b \geq a > 0$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c=2x \\ c+a=2y \\ a+b=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+y+z \\ b=x-y+z \\ c=x+y-z \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}$$

Do $c \geq b \geq a > 0$ nên $x \geq y \geq z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \left(\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_x = \frac{2}{yz} - \frac{1}{x^2}, S_y = \frac{2}{zx} - \frac{1}{y^2}, S_z = \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2}$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Do $x \geq y \geq z > 0$ và $y+z > x$ nên $S_x \geq 0$ và $S_y \geq 0$

Ta chứng minh $y^2 S_x + z^2 S_y \geq 0 \Leftrightarrow y^3 + z^3 \geq xyz$.

Mà $y + z > x$ nên ta chỉ cần chứng minh $y^3 + z^3 \geq (y+z)yz \Leftrightarrow (y-z)^2(y+z) \geq 0$ (đúng)

Từ đây, áp dụng **Mệnh đề 4**, ta suy ra (đpcm).

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\min\{a, b, c\} \geq \frac{1}{4} \max\{a, b, c\}$. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c \geq b \geq a \geq \frac{1}{4}c > 0$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c=2x \\ c+a=2y \\ a+b=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+y+z \\ b=x-y+z \\ c=x+y-z \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác}$$

Do $c \geq b \geq a \geq \frac{1}{4}c > 0$ nên $x \geq y \geq z > 0$ và $4(-x+y+z) \geq x+y-z \Rightarrow 3y+5z \geq 5x$

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow (2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2) \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow (2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 + \frac{1}{4} \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \left(\frac{2}{xy} - \frac{5}{4z^2} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_x = \frac{2}{yz} - \frac{5}{4x^2}, S_y = \frac{2}{zx} - \frac{5}{4y^2}, S_z = \frac{2}{xy} - \frac{5}{4z^2}$$

Ta phải chứng minh $S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$

Do $x \geq y \geq z > 0$ và $3y+5z \geq 5x$ nên $S_x > 0$ và $8y \geq 5x \Rightarrow S_y \geq 0$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } y^2 S_y + z^2 S_z \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2y^2}{xz} + \frac{2z^2}{xy} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4(y^3 + z^3) \geq 5xyz$$

Mà $3y+5z \geq 5x$ nên ta chỉ cần chứng minh $4(y^3 + z^3) \geq (3y+5z)yz$,

$$\Leftrightarrow (y-z)(4y^2 + yz - 4z^2) \geq 0 \text{ (đúng)}. \text{ Vậy } y^2 S_y + z^2 S_z \geq 0$$

Ta có $x-z \geq \frac{y}{z}(x-y) \geq 0$. Do đó:

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2$$

$$\geq S_x \cdot \frac{y^2}{z^2} \cdot (x-y)^2 + S_z \cdot (x-y)^2 = \frac{(x-y)^2 (y^2 S_x + z^2 S_z)}{z^2} \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b=4c$ và các hoán vị.

Bài 3. [IMO 45 – 2005] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } S = \frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0$$

Chứng minh

$$\text{Do } abc \geq 1 \text{ nên } S \geq \frac{a^5 - a^2 abc}{a^5 + (b^2 + c^2) abc} + \frac{b^5 - b^2 abc}{b^5 + (c^2 + a^2) abc} + \frac{c^5 - c^2 abc}{c^5 + (a^2 + b^2) abc}$$

$$= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4 - a^2 bc}{a^4 + (b^2 + c^2) bc} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{2a^4 - a^2 (b^2 + c^2)}{2a^4 + (b^2 + c^2)^2}$$

$$\text{Đặt } x = a^2, y = b^2, z = c^2 \Rightarrow S \geq \frac{2x^2 - x(y+z)}{2x^2 + (y+z)^2} + \frac{2y^2 - y(z+x)}{2y^2 + (z+x)^2} + \frac{2z^2 - z(x+y)}{2z^2 + (x+y)^2}$$

$$= \sum_{\text{cyc}} (x-y) \left(\frac{x}{2x^2 + (y+z)^2} - \frac{y}{2y^2 + (z+x)^2} \right) = \sum_{\text{cyc}} (x-y)^2 \frac{x^2 + y^2 - xy + z^2 + 2z(x+y)}{[2x^2 + (y+z)^2][2y^2 + (z+x)^2]} \geq 0$$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 4. Tìm hằng số k lớn nhất ($k > 0$) sao cho bất đẳng thức sau đúng $\forall a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq k + \frac{3}{2} \quad (1)$$

Giải

$$\text{Biến đổi chung: } (1) \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) \geq k \left(1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right) \quad (2)$$

Ta có:

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b) + (a-c)}{b+c} = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a-b) \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq k \frac{2(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq k \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} - k \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 \left[\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)(c+a)} - k \right] \geq 0 \quad (3)$$

Điều kiện cần: Cho $c = b \neq a$ vào (3) $\Rightarrow (a-b)^2 \left[\frac{a^2 + 2b^2}{2b(a+b)} - k \right] \geq 0$

$$\Rightarrow k \leq \frac{a^2 + 2b^2}{2b(a+b)} = u(a, b). \text{ Ta có: } u(a, b) = \frac{a^2 + 2b^2}{2b(a+b)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a}{b} + 1\right)} = \frac{t^2 + 2}{2t + 2}$$

$$\Rightarrow (2t+2)u = t^2 + 2 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2ut + 2 - 2u = 0$$

$u \in$ Tập giá trị của hàm số $\Leftrightarrow f(t) = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_t' = u^2 + 2u - 2 \geq 0 \Rightarrow u \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Điều kiện đủ:

Ta sẽ chứng minh $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \min u(a, b)$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức (1)

Thật vậy với $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ta có (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(b+c)(c+a)} - k \right] \geq 0$ (4)

$$\text{Đặt } S_a = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(c+a)(b+a)} - k; S_b = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(c+b)} - k; S_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(b+c)(a+c)} - k$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \leq S_b \leq S_c$

$$\text{Xét } S_a + S_b = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(c+a)(b+a)} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(c+b)} - 2k = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 2k$$

$$\text{Đặt } v = \frac{a+b}{2} \Rightarrow$$

$$S_a + S_b \geq \frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 \right] (2v+2c)}{2v(b+c)(c+a)} - 2k \geq \frac{(2v^2 + c^2)(v+c)}{v \left[\frac{(b+c)+(c+a)}{2} \right]^2} - 2k = \frac{2v^2 + c^2}{v(v+c)} - 2k$$

$$\Rightarrow S_a + S_b \geq 2 \left(\frac{2v^2 + c^2}{2v(v+c)} - k \right) = 2[u(v, c) - k] \geq 0 \quad (\text{do } u(v, c) \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} = k)$$

Do $S_a \leq S_b \leq S_c$ và $S_a + S_b \geq 0$ nên $S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0$

Sử dụng **Mệnh đề 2** suy ra với $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ thì (4) đúng $\forall a, b, c > 0$.

Kết luận: $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là hằng số lớn nhất để (1) đúng $\forall a, b, c > 0$.

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k \quad (1)$$

Điều kiện cần: Cho $c = b \neq a$ vào (3) $\Rightarrow (a-b)^2 \left[\frac{a^2 + 2b^2}{2b(a+b)} - k \right] \geq 0$

$$\Rightarrow k \leq \frac{a^2 + 2b^2}{2b(a+b)} = u(a, b). \text{ Ta có: } u(a, b) = \frac{a^2 + 2b^2}{2b(a+b)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a}{b} + 1\right)} = \frac{t^2 + 2}{2t + 2}$$

$$\Rightarrow (2t+2)u = t^2 + 2 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2ut + 2 - 2u = 0$$

$u \in$ Tập giá trị của hàm số $\Leftrightarrow f(t) = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_t' = u^2 + 2u - 2 \geq 0 \Rightarrow u \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Điều kiện đủ:

Ta sẽ chứng minh $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \min u(a, b)$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức (1)

$$\text{Thật vậy với } k = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ ta có (1)} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(b+c)(c+a)} - k \right] \geq 0 \quad (4)$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(c+a)(b+a)} - k; S_b = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(c+b)} - k; S_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(b+c)(a+c)} - k$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \leq S_b \leq S_c$

$$\text{Xét } S_a + S_b = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(c+a)(b+a)} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b)(c+b)} - 2k = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 2k$$

$$\text{Đặt } v = \frac{a+b}{2} \Rightarrow$$

$$S_a + S_b \geq \frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 \right] (2v+2c)}{2v(b+c)(c+a)} - 2k \geq \frac{(2v^2 + c^2)(v+c)}{v \left[\frac{(b+c)+(c+a)}{2} \right]^2} - 2k = \frac{2v^2 + c^2}{v(v+c)} - 2k$$

$$\Rightarrow S_a + S_b \geq 2 \left(\frac{2v^2 + c^2}{2v(v+c)} - k \right) = 2[u(v, c) - k] \geq 0 \quad (\text{do } u(v, c) \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} = k)$$

Do $S_a \leq S_b \leq S_c$ và $S_a + S_b \geq 0$ nên $S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0$

Sử dụng **Mệnh đề 2** suy ra với $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ thì (4) đúng $\forall a, b, c > 0$.

Kết luận: $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là hằng số lớn nhất để (1) đúng $\forall a, b, c > 0$.

Bài 5. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + k \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k \quad (1)$$

Chứng minh

Ta sử dụng các biến đổi sau:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}+\frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\sum_{cyc}\left(\frac{1}{bc}-\frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)}\right)(b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} S_a (b-c)^2 \geq 0$ (2)

Trong đó:

$$S_a = 2a(a^2+b^2+c^2)-kabc, S_b = 2b(a^2+b^2+c^2)-kabc, S_c = 2c(a^2+b^2+c^2)-kabc$$

Bây giờ ta cho $b=c$ thì (2) $\Leftrightarrow$

$$S_b \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2+2b^2)-kab \geq 0 \Leftrightarrow 2(a-\sqrt{2}b)^2+(4\sqrt{2}-k)ab \geq 0$$

Cho $a=\sqrt{2}b$ thì $k \leq 4\sqrt{2}$. Ngược lại, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $k=4\sqrt{2}$.

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$. Mặt khác:

$$S_b+S_c=2(b+c)(a^2+b^2+c^2)-8\sqrt{2}abc \geq 4\sqrt{2}bc(a^2+2bc)-8\sqrt{2}abc=4\sqrt{2}bc(a-\sqrt{2}bc)^2 \geq 0$$

Sử dụng **Mệnh đề 2** ta có đpcm.

Kết luận: $k=4\sqrt{2}$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức.

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$\frac{bc}{b^2+c^2+ka^2}+\frac{ca}{c^2+a^2+kb^2}+\frac{ab}{b^2+a^2+kc^2} \leq \frac{3}{5} \quad (1)$$

Giải

Cho $a=3, b=2, c=2$ ta có được: $k \leq 3$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng khi $k=3$.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Ta sử dụng

biến đổi sau: $2(b^2+c^2+3a^2)-10bc=5(b+c)^2+3(a^2-b^2+a^2-c^2)$

$$\text{Do đó bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{5(b-c)^2+3(a^2-b^2+a^2-c^2)}{1+2a^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} S_a (b-c)^2 \geq 0$$

$$\text{Trong đó: } S_a = 5(1+2b^2)(1+2c^2)-6(b+c)^2(1+2a^2);$$

$$S_b = 5(1+2c^2)(1+2a^2)-6(c+a)^2(1+2b^2); S_c = 5(1+2a^2)(1+2b^2)-6(a+b)^2(1+2c^2)$$

$$\text{Đặt } x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \text{ Dễ thấy } S_c \geq 0 \text{ và: } (a+c)^2(1+2b^2)+(b+c)^2(1+2a^2) \leq 2(x+c)^2(1+2x^2)$$

Ta sẽ chứng minh $S_a+S_b \geq 0$. Thật vậy:

$$S_a+S_b \geq 10(1+2c^2)(1+2x^2)-6(x+c)^2(1+2x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3c)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $S_b \geq 0$. Thật vậy:

$$S_b = 5(1+2c^2)(1+2a^2) - 6(c+a)^2(1+2b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2+b^2+c^2}{3b^2+c^2+a^2} \geq \frac{6(a+c)^2}{5(3c^2+a^2+b^2)} \Leftrightarrow \frac{2(a^2-b^2)}{3b^2+c^2+a^2} \geq \frac{a^2+12ac-5b^2-9c^2}{5(3c^2+a^2+b^2)}$$

Mà điều này thì hiển nhiên đúng do:

$$2(a^2-b^2) \geq a^2+12ac-5b^2-9c^2, \quad 3b^2+c^2+a^2 \leq 5(3c^2+a^2+b^2)$$

Sử dụng **mệnh đề 2** ta có đpcm.

Kết luận: $k = 3$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức.

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{5}{2}$ (1)
--

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(ab+bc+ca)^2 + a^2b^2}{(a+b)^2} \geq \frac{5}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} \frac{2ab(ab+bc+ca) + (bc+ca)^2}{(a+b)^2} \geq 5(ab+bc+ca).$$

$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) \left[\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \right] + 2(a^2+b^2+c^2) \geq 5(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca) \left[\frac{4ab}{(a+b)^2} + \frac{4bc}{(b+c)^2} + \frac{4ca}{(c+a)^2} - 3 \right] + 2(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(ab+bc+ca) \left[\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2} \right] + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b)^2} \right] (a-b)^2 + \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2} \right] (b-c)^2 + \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(c+a)^2} \right] (c-a)^2 \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_a = 1 - \frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}; S_b = 1 - \frac{ab+bc+ca}{(c+a)^2}; S_c = 1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b)^2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$.

$$\text{Ta có: } S_b = 1 - \frac{ab+bc+ca}{(c+a)^2} = \frac{a^2 + (a+c)(c-b)}{(c+a)^2} > 0 \Rightarrow S_a \geq S_b > 0$$

$$\text{Mặt khác: } b^2 S_c + c^2 S_b = b^2 \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b)^2} \right] + c^2 \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(c+a)^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= b^2 \cdot \frac{a^2 + (a+b)(b-c)}{(a+b)^2} + c^2 \cdot \frac{a^2 + (a+c)(c-b)}{(c+a)^2} = a^2 \left[\frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{c^2}{(c+a)^2} \right] + (c-b) \left(\frac{c^2}{a+c} - \frac{b^2}{a+b} \right) \\
 &= a^2 \left[\frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{c^2}{(c+a)^2} \right] + (c-b)^2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{(a+c)(a+b)} > 0
 \end{aligned}$$

Sử dụng **Mệnh đề 4** suy ra (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc

$a=b=1, c=0$ và các hoán vị.

Bài 8. Cho $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$3 \min \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\} \geq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $\min \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right\} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2c + b^2a + c^2b) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2c + b^2a + c^2b) \geq (a^2b + b^2c + c^2a) + 3abc$$

$$\Leftrightarrow 2[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2c + b^2a + c^2b)]$$

$$\leq (a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) + (a^3 + b^3 + c^3) - 3abc \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \begin{cases} 2b^3 + a^3 - 3b^2a = (b-a)(2b^2 - ba - a^2) = (b-a)^2(2b+a) \\ 2c^3 + b^3 - 3c^2b = (c-b)(2c^2 - cb - b^2) = (c-b)^2(2c+b) \\ 2a^3 + c^3 - 3a^2c = (a-c)(2a^2 - ac - c^2) = (a-c)^2(2a+c) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2c + b^2a + c^2b)] = (a-b)^2(2b+a) + (b-c)^2(2c+b) + (c-a)^2(2a+c)$$

Tương tự:

$$3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a)] = (a-b)^2(2a+b) + (b-c)^2(2b+c) + (c-a)^2(2c+a)$$

$$\text{Mặt khác: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\text{Suy ra } (2) \Leftrightarrow \frac{2}{3} \sum_{cyc} (2b+a)(a-b)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{cyc} (2a+b)(a-b)^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a+b+c)(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left[\frac{1}{3}(2a+b) + \frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{2}{3}(2b+a) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{cyc} (c+a-b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c+a-b)(a-b)^2 + (a+b-c)(b-c)^2 + (b+c-a)(c-a)^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } S_a = a+b-c; S_b = b+c-a; S_c = c+a-b$$

$\Rightarrow S_a + S_b = 2b > 0; S_b + S_c = 2c > 0; S_c + S_a = 2a > 0$. Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a &= (a+b-c)(b+c-a) + (b+c-a)(c+a-b) + (c+a-b)(a+b-c) = \\ &= a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2 + c^2 - (a-b)^2 = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \\ &= 4ab - (a+b-c)^2 = (2\sqrt{ab} + a+b-c)(2\sqrt{ab} - a-b+c) \\ &= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}) \end{aligned}$$

Do $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên suy ra $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a > 0$

Theo **Mệnh đề 5** suy ra (3) đúng suy ra (2) đúng suy ra (1) đúng (đpcm).

Bài 9. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng: } 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3(a^2c + b^2a + c^2b) \geq 2(b^2c + c^2a + a^2b) + 3abc$$

$$\Leftrightarrow 3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2c + b^2a + c^2b)] \leq 2[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a)] + (a^3 + b^3 + c^3) - 3abc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (2b+a)(a-b)^2 \leq \frac{2}{3} \sum_{cyc} (2a+b)(a-b)^2 + \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a+b+c)(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(5a-5b+3c) + (b-c)^2(5b-5c+3a) + (c-a)^2(5c-5a+3b) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_a = 5b-5c+3a; S_b = 5c-5a+3b; S_c = 5a-5b+3c$$

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c . Xét 2 khả năng:

• Xét $c \geq b \geq a$: Khi đó $S_b = 5c-5a+3b > 0; S_a + S_b = 8b-2a \geq 0; S_b + S_c = 8c-2b \geq 0$

Sử dụng **Mệnh đề 2** ta suy ra điều phải chứng minh.

• Xét $a \geq b \geq c$: Khi đó $S_a + S_c + 4S_b = 18c + 12b - 12a > 12(c+b-a) > 0$

+ Nếu $|a-b| \geq |c-b|$ thì $c > a-b \geq b-c \geq 0 \Rightarrow 2c > b$

$$\Rightarrow S_b + S_c = 8c-2b > 4b-2b=2b > 0 \Rightarrow S_c + 2S_b > S_b + 2b = 5(c-a+b) > 0$$

+ Nếu $|c-b| \geq |a-b|$ thì $b-c \geq a-b \geq 0 \Rightarrow 2b \geq a+c > a$

$$\Rightarrow S_a + S_b = 8b-2a > 4a-2a=2a > 0 \Rightarrow S_a + 2S_b > S_b + 2a = 5c-3a+3b > 3(c-a+b) > 0$$

Sử dụng **Mệnh đề 6** với $\alpha = 1$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 10. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq \sqrt{2} \left(x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{z^2 + x^2} + z\sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \geq 2\sqrt{2} \left(x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{z^2 + x^2} + z\sqrt{x^2 + y^2} \right) - 4(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x - y)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \left(x\sqrt{2(y^2 + z^2)} - x(y + z) \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x - y)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{x(y - z)^2}{\sqrt{2(y^2 + z^2)} + y + z} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x - y)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{z(x - y)^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Buniakowski** ta có:

$$2 \sum_{cyc} \frac{z(x - y)^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y} \leq \sum_{cyc} \frac{z(x - y)^2}{x + y}. \text{ Do đó ta chỉ cần chứng minh:}$$

$$\sum_{cyc} (x - y)^2 \geq \sum_{cyc} \frac{z(x - y)^2}{x + y} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(1 - \frac{z}{x + y} \right) (x - y)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } S_x = 1 - \frac{x}{y + z}, S_y = 1 - \frac{y}{z + x}, S_z = 1 - \frac{z}{x + y},$$

$$\text{khi đó } (2) \Leftrightarrow S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó $S_y, S_z > 0$

$$\text{Ta có } x^2 S_y + y^2 S_x = x^2 + y^2 - \frac{x^2 y}{x + z} - \frac{xy^2}{y + z} \geq x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

Sử dụng **Mệnh đề 4** suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 11. [Komal] $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a + b + c} \geq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Chứng minh

$$\text{Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a + b + c} \geq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - \frac{9abc}{a+b+c} \geq \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{6abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{c(a-b)^2}{a+b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{c(a-b)^2(c^2 + bc + ca - 2ab)}{(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} c(a-b)^2(a^2 + b^2 + 2ab - bc - ca) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_a = a(b^2 + c^2 + 2bc - ca - ab); S_b = b(c^2 + a^2 + 2ca - ab - bc);$$

$$S_c = c(a^2 + b^2 + 2ab - bc - ca)$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_b, S_c \geq 0$.

$$\text{Ta có } a^2S_b + b^2S_a = ab[(a-b)^2(a+b) + 2c(a^2 + b^2 - ab) + c(a^2 + b^2)] > 0$$

Từ đây, sử dụng **Mệnh đề 4**, ta suy ra đpcm.

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi số dương x, y, z thỏa $xy + yz + zx = 1$, ta luôn có

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z \right) + x + y + z - \sqrt{3} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{y} + \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{x+y+z+\sqrt{3}} \geq \sum_{cyc} (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1 \right] \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_x = \frac{1}{z} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1; S_y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1;$$

$$S_z = \frac{1}{y} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1$$

$$\text{Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_x + S_y + S_z &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &= \frac{xy+yz+zx}{xyz} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} = \frac{1}{xyz} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &\geq \frac{3\sqrt{3}}{(xy+yz+zx)^{\frac{3}{2}}} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} = 3\sqrt{3} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} > 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x &\leq \left(t + \frac{1}{x} - 1\right) \left(t + \frac{1}{y} - 1\right) + \left(t + \frac{1}{y} - 1\right) \left(t + \frac{1}{z} - 1\right) + \left(t + \frac{1}{z} - 1\right) \left(t + \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= 3t^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3\right)t + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 3 \\ &> \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 3 = \frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz} \end{aligned}$$

Ta chứng minh $\frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz} \geq 0 \Leftrightarrow x+y+z+3xyz-2 \geq 0$ (*)

Nếu $x+y+z \geq 2$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Nếu $x+y+z \leq 2$, đặt $p = x+y+z \Rightarrow 2 \geq p \geq \sqrt{3}$.

Thế thì theo bất đẳng thức **Schur**, ta có $xyz \geq \frac{4p-p^3}{9}$. Do đó:

$$p + 3xyz - 2 \geq p - 2 + \frac{4p-p^3}{3} = \frac{-p^3+7p-6}{3} = \frac{(2-p)(p-1)(p+3)}{3} \geq 0 \Rightarrow (*) \text{ đúng}$$

Vậy $\begin{cases} S_x + S_y + S_z > 0 \\ S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x > 0 \end{cases}$ nên ta có $S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$ (dpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}} \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^4}{b^2} + 2 \sum_{cyc} \frac{a^2 b}{c} \geq \frac{9(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{a^4}{b^2} + b^2 - 2a^2 \right) + 2 \sum_{cyc} \left(\frac{a^2 b}{c} + bc - 2ab \right) \geq \left(\frac{9(a^4 + b^4 + c^4)}{a^2 + b^2 + c^2} - 3 \sum_{cyc} a^2 \right) + \left(2 \sum_{cyc} a^2 - 2 \sum_{cyc} ab \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{a}{b} + 1 \right)^2 + 2 \sum_{cyc} (c-a)^2 \frac{b}{c} \geq \frac{3 \sum_{cyc} (a-b)^2 (a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \sum_{cyc} (a-b)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} S_c (a-b)^2 \geq 0$$

trong đó $S_a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2b}{c} + \frac{2a}{b} - \frac{3(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; $S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{2c}{a} + \frac{2b}{c} - \frac{3(c+a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

$$S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + \frac{2c}{a} - \frac{3(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $a \geq b \geq c > 0$

* **Trường hợp 1.** $b - c \geq a - b \Leftrightarrow 2(b - c) \geq a - c \Leftrightarrow 2b \geq a + c$. Ta có:

$$S_a + S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{b} + \frac{2b}{c} + \frac{2c}{a} - \frac{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{b} + 4\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\geq 10 - \frac{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{7a^2 + 4b^2 + 7c^2 - 6ab - 6bc}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0$$

$$S_a + S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2b}{c} + \frac{2a}{b} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{2c}{a} + \frac{2b}{c} - \frac{3(a+c)^2 + 3(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\geq 9 - \frac{3(a+c)^2 + 3(b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3[(2a-b)^2 + (b-2c)^2]}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 0$$

$$S_a + 4S_b = \frac{4c^2}{a^2} + \frac{8c}{a} + \frac{10b}{c} + \frac{2a}{b} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{3(b+c)^2 + 12(a+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\geq \frac{4c}{a} - 1 + \frac{8c}{a} + \frac{5a}{c} + 5 + \frac{b^2}{c^2} + \frac{2a}{b} - \frac{3(b+c)^2 + 12(a+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\geq 22 - \frac{3(b+c)^2 + 12(a+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{10a^2 + 19b^2 + 7c^2 - 24ac - 6bc}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0$$

$$S_a + 4S_b + S_c = \frac{4c^2}{a^2} + \frac{10c}{a} + \frac{10b}{c} + \frac{4a}{b} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{3(b+c)^2 + 12(a+c)^2 + 3(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\geq 26 - \frac{3(b+c)^2 + 12(a+c)^2 + 3(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{11a^2 + 20b^2 + 11c^2 - 24ab}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0$$

Nếu $S_b \geq 0$ thì ta có $\sum_{cyc} S_c (a-b)^2 \geq (S_a + S_c)(a-b)^2 \geq 0$

Nếu $S_b \leq 0, S_c \geq 0$ thì $\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 4S_b)(b-c)^2 \geq 0$

Nếu $S_b, S_c \leq 0$ thì $\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 4S_b + S_c)(b-c)^2 \geq 0$

*** Trường hợp 2.** $a-b \geq b-c$. Ta sẽ chứng minh $S_c \geq 0$, thật vậy xét hàm số

$$f(c) = S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + \frac{2c}{a} - \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}. \text{ Dễ thấy đây là hàm tăng theo } c \text{ nên}$$

+ Nếu $2b \leq a$ ta có

$$f(c) \geq f(0) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} - \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2} \geq 8 - \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{5a^2+5b^2-6ab}{a^2+b^2} \geq 0$$

+ Nếu $2b \geq a$, ta có $f(c) \geq f(2b-a) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + \frac{4b}{a} - 2 - \frac{3(a+b)^2}{2a^2+5b^2-4ab} \geq 0$

Vậy ta có $S_a, S_c \geq 0$. Do đó nếu $S_b \geq 0$ thì ta có ngay đpcm.

Xét trường hợp $S_b \leq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} S_a + 2S_b &= \frac{2c^2}{a^2} + \frac{4c}{a} + \frac{6b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{2a}{b} - \frac{6(a+c)^2 + 3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ &\geq \frac{8c}{a} - 2 + \frac{8b}{c} - 1 + \frac{2a}{b} - \frac{6(a+c)^2 + 3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 12 - \frac{6(a+c)^2 + 3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_c + 2S_b &= \frac{2c^2}{a^2} + \frac{6c}{a} + \frac{4b}{c} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} - \frac{6(a+c)^2 + 3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ &\geq \frac{(2\sqrt{2}+6)c}{a} - 1 + \frac{4b}{c} + \frac{4a}{b} - 1 - \frac{6(a+c)^2 + 3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 13.6 - \frac{6(a+c)^2 + 3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Khi đó: $\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 14. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 2 \left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a+b} + \frac{b^2 - bc + c^2}{b+c} + \frac{c^2 - ca + a^2}{c+a} \right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{b} - (a+b+c) \geq 2 \left(\sum_{cyc} \frac{a^2 - ab + b^2}{a+b} - \frac{a+b+c}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{3}{2} \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{3}{2(a+b)} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{1}{c} - \frac{3}{2(b+c)}; S_b = \frac{1}{a} - \frac{3}{2(c+a)}; S_c = \frac{1}{b} - \frac{3}{2(a+b)}$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $a \geq b \geq c$ là đủ. Khi đó, ta có $S_a, S_c \geq 0$. Như thế, nếu $S_b \geq 0$ thì ta có ngay đpcm.

$$\text{Xét } S_b \leq 0, \text{ ta có: } S_a + 2S_b = \frac{2}{a} - \frac{3}{a+c} + \frac{1}{c} - \frac{3}{2(b+c)} \geq \frac{3}{a+c} - \frac{3}{a+c} + \frac{3}{4c} - \frac{3}{2(b+c)} \geq 0$$

$$S_c + 2S_b = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3}{a+c} - \frac{3}{2(a+b)}$$

* Trường hợp 1. $b-c \geq a-b \Leftrightarrow 2(b-c) \geq a-c \Leftrightarrow 2b \geq a+c$

$$\text{Ta có } S_a + 4S_b = \frac{4}{a} + \frac{1}{c} - \frac{6}{a+c} - \frac{3}{2(b+c)} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{c} \right) + \frac{4}{3a} + \frac{1}{3c} - \frac{6}{a+c} - \frac{3}{a+3c}$$

$$\geq \frac{2 \cdot 9}{3(a+c)} + \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right)^2}{a+3c} - \frac{6}{a+c} - \frac{3}{a+3c} \geq 0. \text{ Khi đó: } \sum_{cyc} S_c (a-b)^2 \geq (S_a + 4S_b)(b-c)^2 \geq 0$$

* Trường hợp 2. $b-c \leq a-b \Leftrightarrow a+c \geq 2b$. Đặt $f(c) = S_c + 2S_b$.

Dễ thấy $f(c)$ là hàm tăng nên

+ Nếu $2b \leq a$, ta có:

$$f(c) \geq f(0) = \frac{2}{a} - \frac{3}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3}{2(a+b)} = \frac{a-b}{ab} - \frac{3}{2(a+b)} = \frac{2a^2 - 3ab - 2b^2}{2ab(a+b)} \geq 0$$

$$+ \text{ Nếu } 2b \geq a, \text{ ta có: } f(c) \geq f(2b-a) = \frac{2}{a} - \frac{3}{2b} + \frac{1}{b} - \frac{3}{2(a+b)} \geq \frac{2}{a} - \frac{1}{a} - \frac{3}{2a+a} = 0$$

$$\text{Vậy } f(c) \geq 0 \text{ nên ta có: } \sum_{cyc} S_c (a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bình luận: Chúng ta có thể thấy được sự hiệu quả của kỹ thuật S.O.S đối với bài toán ba biến, còn đối với các bài toán nhiều biến thì như thế nào? Trong thực tế, S.O.S tỏ ra không có nhiều hiệu quả, tuy nhiên chúng ta vẫn có thể áp dụng nó trong một số trường hợp. Và nó thường đi kèm với nguyên lý quy nạp và kỹ thuật dồn biến. Chúng ta hãy xét một số ví dụ để làm rõ vấn đề này.

Bài 15. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

$$\text{Chứng minh rằng: } n^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq 4(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n(n-2)^2$$

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức theo nguyên lý quy nạp. Ở đây chúng tôi sẽ chỉ xét phần phức tạp nhất, đó là bước chuyển quy nạp, nghĩa là bất đẳng thức sẽ đúng với $n+1$ biến khi nó đã đúng với n hoặc nhỏ hơn n biến.

Đầu tiên, chú ý rằng bất đẳng thức tương đương với:

$$\left[n^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n(n-2)^2 \right] (a_1 + \dots + a_n)^2 \geq 4(n-1)n^2 (a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

Vì vậy nếu bất đẳng thức đúng cho $a_1 + \dots + a_n = n$ thì nó cũng đúng cho $a_1 + \dots + a_n \leq n$.

Đặt $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = VT - VP$. Giả sử rằng: $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) - f\left(a_1, \frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1}, \dots, \frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1}\right) \\ = n^2 \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{n^2}{a_2 + \dots + a_n} \right) - 4(n-1) \left[a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_2 + \dots + a_n)^2}{n-1} \right] \\ = \frac{n^2}{(a_2 + \dots + a_n)} \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} - 4 \sum (a_i - a_j)^2 \geq \frac{n^2}{n-1} \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} - 4 \sum (a_i - a_j)^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Tuy nhiên, chúng ta đã có bất đẳng thức cho n biến:

$$\begin{aligned} (n-1)^2 \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) &\geq 4(n-2)(a_2^2 + \dots + a_n^2) + (n-1)(n-3)^2 \\ \Leftrightarrow (n-1) \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} &\geq \frac{4(n-2)}{n-1} \sum (a_i - a_j)^2 \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{n-2} \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \geq 4 \sum (a_i - a_j)^2 \end{aligned}$$

Và rõ ràng $\frac{n^2}{n-1} > \frac{(n-1)^2}{n-2}$ vậy nên $(*) \geq 0$.

Vì vậy chúng ta chỉ cần chứng minh rằng $f(a, d, \dots, d) \geq 0, a + (n-1)d = n$. Điều này không quá khó khăn và bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra câu trả lời. Kỹ thuật áp dụng cũng chính là biểu diễn về $S.O.S$.

Bài 16. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng:

$$a_1^n + \dots + a_n^n + n(n-1)a_1 \dots a_n \geq a_1 \dots a_n (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Chứng minh

Lời giải dưới đây sử dụng bất đẳng thức **Suranyi**:

$$(n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n) - \sum a_i (a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) \geq a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 \dots a_n$$

Một lần nữa chúng ta sẽ dùng nguyên lý quy nạp. Ở đây chúng tôi cũng sẽ chỉ xét phần phức tạp nhất, đó là bước chuyển quy nạp, nghĩa là bất đẳng thức sẽ đúng với $n+1$ biến khi nó đã đúng với n hoặc nhỏ hơn n biến.

$$\begin{aligned} \text{Bất đẳng thức} &\Leftrightarrow (a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n) \geq a_1 \dots a_n \left[(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 \right] \\ &\Leftrightarrow (a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n) \geq a_1 \dots a_n \left[\frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \right] \end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta sẽ chuyển biểu thức $a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n$ về dạng S.O.S. Điều này có thể được thực hiện dễ dàng thông qua biểu thức trung gian $\sum a_i (a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &(n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n) \\ &= (n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n) - \sum a_i (a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) + \sum a_i [a_2^n + \dots + a_n^n - (n-1)a_2 \dots a_n] \\ &\geq a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n + (n-2) \sum a_i \dots a_n \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \\ &\Rightarrow a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n \geq \sum a_i \dots a_n \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} = a_1 a_2 \dots a_n \left[(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 \right] \end{aligned}$$

Bài 17. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{8(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 48$$

Chứng minh

Ta sử dụng các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 &= \frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{abc} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3 \left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 \right] \geq 8 \left[3 - \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \right] \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{3}{bc} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2} \right) (b-c)^2$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{3}{bc} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2}, S_b = \frac{3}{ca} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2}, S_c = \frac{3}{ab} - \frac{8}{a^2+b^2+c^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $S_a \geq S_b \geq S_c$. Ta có

$$S_b = \frac{3(a^2+b^2+c^2) - 8ca}{ca(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{3(a^2+2c^2) - 8ca}{ca(a^2+b^2+c^2)} = \frac{3(a-\sqrt{2}c)^2 + 2(3\sqrt{2}-4)ca}{ca(a^2+b^2+c^2)} \geq 0$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh } S_b + S_c \geq 0 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{16}{a^2+b^2+c^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ca}\right) \geq \frac{12}{a(b+c)} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}a.(b+c)} \geq \frac{24\sqrt{2}}{2a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{12\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2} > \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Sử dụng **Mệnh đề 2** ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự chúng ta chứng minh được bất đẳng thức sau

$$\frac{2\sqrt{2}(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8 + 6\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$ và các hoán vị. Chú ý rằng lúc đó $2\sqrt{2}$ cũng là hằng số tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức đã cho đúng.

Bài 18. [Moldova 2006] Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng } a^2 \left(\frac{b}{c} - 1 \right) + b^2 \left(\frac{c}{a} - 1 \right) + c^2 \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \geq 0$$

Chứng minh

* **Cách 1.** Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} a^3 b(b-c) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{cyc} c^2 (b+c-a)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

* **Cách 2.** Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a^2 b}{c} &\geq \sum_{cyc} a^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{a^2 b}{c} + bc - 2ab \right) \geq \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a-b)^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b(c-a)^2}{c} \geq \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a-b)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{a}{b} - \frac{1}{2}, S_b = \frac{b}{c} - \frac{1}{2}, S_c = \frac{c}{a} - \frac{1}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 1.** $b+c > a \geq b \geq c$. Thế thì ta có $S_a, S_b > 0$.

Ta có $S_b + S_c = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1 > 0$ (do $b \geq c > 0$). Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

+ **Trường hợp 2.** $a \leq b \leq c < a+b$. Thế thì ta có $S_c, S_b > 0$.

$$\text{Ta có } S_b + S_a = \frac{b}{c} + \frac{a}{b} - 1 > \frac{b}{c} + \frac{c-b}{b} - 1 = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 = \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Bài 19. $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot abc \geq \frac{5}{4}$

Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + 3abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 5(ab + bc + ca)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 \sum_{\text{sym}} a^3b - 5 \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 - 6(a + b + c)abc + 3abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có: $x^3y + xy^3 = xy \cdot (x^2 + y^2) \geq 2x^2y^2, \forall x, y \geq 0$, suy ra

$$\frac{5}{2} \cdot \sum_{\text{sym}} a^3b = \frac{5}{2} (a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3) \geq 5 \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 = 5 \cdot (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\frac{3}{2} \sum_{\text{sym}} a^3b + 3abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 6abc(a + b + c)$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^3b + 2abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 4abc(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow 2abc(a + b + c - \sqrt{3(ab + bc + ca)}) \leq \sum_{\text{sym}} a^3b - 2abc(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc \sum_{\text{cyc}} (a - b)^2}{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}} \leq \sum_{\text{cyc}} (ab + ac)(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (b - c)^2 \left(ab + ac - \frac{abc}{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}} \right) \geq 0$$

Điều này rõ ràng đúng vì $\frac{abc}{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}} < \min\{ab, bc, ca\} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab} \geq \frac{3}{2}$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2 \sum_{\text{cyc}} a(b + ca)(c + ab) \geq 3(a + bc)(b + ca)(c + ab) \Leftrightarrow 3abc + \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \geq 3a^2b^2c^2 + abc \sum_{\text{cyc}} a^2$$

$$\Leftrightarrow 3abc + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} c^2(a - b)^2 \geq 3a^2b^2c^2 + abc \left(\sum_{\text{cyc}} a^2 - \sum_{\text{cyc}} a \right)$$

$$\Leftrightarrow 9abc + \frac{3}{2} \sum_{cyc} c^2(a-b)^2 \geq 9a^2b^2c^2 + abc \sum_{cyc} (a-b)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(abc^2 + \frac{3c^2}{2} - \frac{abc}{2} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_a = a^2bc + \frac{3a^2}{2} - \frac{abc}{2}, S_b = ab^2c + \frac{3b^2}{2} - \frac{abc}{2}, S_c = abc^2 + \frac{3c^2}{2} - \frac{abc}{2}$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_a > 0$.

$$\text{Ta có } S_b > \frac{3b^2}{2} - \frac{abc}{2} = \frac{b}{2}(3b-ac) > 0; S_b + S_c > \frac{3(b^2+c^2)}{2} - abc \geq 3bc - abc = bc(3-a) > 0$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$\frac{a}{2+b^2+c^2} + \frac{b}{2+c^2+a^2} + \frac{c}{2+a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức **Buniakowski**, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{2+b^2+c^2} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a+ab^2+ac^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c) + \sum_{sym} a^2b} = \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c) - 3abc}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c) - 3abc} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow 8(a+b+c)^2 + 9\sqrt{3}abc \geq 9\sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2 \sqrt{ab+bc+ca} + 9\sqrt{3}abc \geq 9\sqrt{3}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c) \sqrt{ab+bc+ca} (a+b+c - \sqrt{ab+bc+ca}) \geq \sqrt{3}((a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(a+b+c) \sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sum_{cyc} (a-b)^2 \geq \sqrt{3} \sum_{cyc} c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{8(a+b+c) \sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}c \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{8(a+b+c) \sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}a$$

$$S_b = \frac{8(a+b+c) \sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}b; S_c = \frac{8(a+b+c) \sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}c$$

$$\text{Bất đẳng thức cần chứng minh} \Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_b, S_c \geq 0$.

$$\text{Ta chứng minh } a^2S_b + b^2S_a \geq 0 \Leftrightarrow 4(a^2b + b^2c + ab^2 + ca^2 + a^3 + b^3) \sqrt{ab+bc+ca} \geq$$

$$\geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2b+ab^2)+3(a^2b+ab^2)\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow 4(b^2c+ca^2+a^3+b^3)\sqrt{ab+bc+ca}+(a^2b+ab^2)\sqrt{ab+bc+ca} \geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2b+ab^2)$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$4(a^3+b^3)\sqrt{ab}+(a^2b+ab^2)\sqrt{ab} > \sqrt{3}(a+b)(a^2b+ab^2) \quad (1)$$

$$\text{Và } 4a^2c\sqrt{ab+bc+ca} > \sqrt{3}c(a^2b+ab^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $a^2S_b+b^2S_a \geq 0$.

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 22. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

Chứng minh

$$\text{Ta có bất đẳng thức } \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3a(b+c)}{a^2+2bc} \leq 6 + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(2 - \frac{3a(b+c)}{a^2+2bc} \right) + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a^2 - 3a(b+c) + 4bc}{a^2+2bc} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-2c)(a-b) - (a-2b)(c-a)}{a^2+2bc} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{(a-2b)(c-a)}{a^2+2bc} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{(b-2c)(a-b)}{b^2+2ca} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-ab)}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-ab)(c^2+2ab) + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) + \sum_{cyc} (a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-4ab)(c^2+2ab) + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) + 4(a-b)(b-c)(c-a) \cdot \sum_{cyc} (a-b)(c^2+2ab) + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 12(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó, ta có

$$\sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) \geq ab(a-b)^2(c^2+2ab) \geq 2a^2b^2(a-b)^2 \geq 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

$$\text{Vậy } \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị

Bài 23. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1 \geq \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab}$$

Chứng minh

$$* \text{ Chứng minh } 1 \geq \sum_{cyc} \frac{bc}{a^2+2bc} \quad (1)$$

* **Bổ đề.** Nếu a, b, c, x, y, z là sáu số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c$ và $x \geq y \geq z$ (hoặc $x \leq y \leq z$) thì

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

Chứng minh.

+ **Trường hợp 1.** $x \geq y \geq z \geq 0$.

$$\text{Ta có } a-c \geq b-c \geq 0 \quad (\text{do } a \geq b \geq c) \Rightarrow x(a-c) \geq y(b-c) \geq 0$$

$$\text{Mà } a-b \geq 0 \text{ nên } x(a-c)(a-b) \geq y(b-c)(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow x(a-c)(a-b) + y(b-c)(b-a) \geq 0$$

$$\text{Mặt khác, do } a \geq b \geq c \text{ và } z \geq 0 \text{ nên } z(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\text{Do đó } x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

+ **Trường hợp 2.** $0 \leq x \leq y \leq z$.

$$\text{Ta có } a-c \geq a-b \geq 0 \quad (\text{do } a \geq b \geq c) \Rightarrow z(a-c) \geq y(a-b) \geq 0$$

$$\text{Mà } b-c \geq 0 \text{ nên } z(a-c)(b-c) \geq y(a-b)(b-c) \geq 0 \Leftrightarrow z(c-a)(c-b) + y(b-c)(b-a) \geq 0$$

$$\text{Mặt khác, do } a \geq b \geq c \text{ và } x \geq 0 \text{ nên } x(a-c)(a-b) \geq 0$$

$$\text{Do đó } x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn. Trở lại bài toán của ta.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{bc}{ab+bc+ca} - \frac{bc}{a^2+2bc} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{bc(a-b)(a-c)}{(ab+bc+ca)(a^2+2bc)} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{abc}{ab+bc+ca} \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc} \geq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó, ta có $a^3 + 2abc \geq b^3 + 2abc \geq c^3 + 2abc > 0 \Rightarrow \frac{1}{c^3+2abc} \geq \frac{1}{b^3+2abc} \geq \frac{1}{a^3+2abc} > 0$

Áp dụng bổ đề trên với $x = \frac{1}{a^3+2abc}$, $y = \frac{1}{b^3+2abc}$, $z = \frac{1}{c^3+2abc}$ ta suy ra được

$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc} \geq 0$. Vậy (1) đúng.

* Chứng minh $\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a^2+2bc} \geq 1$ (2). Ta có (2) $\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^2}{a^2+2bc} - \frac{a}{a+b+c} \right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{a(ab+ac-2bc)}{a^2+2bc} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{ac(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(c-a)}{a^2+2bc} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{ca(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{\text{cyc}} \frac{bc(a-b)}{b^2+2ca} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab) \geq 0$

Đặt $S_a = a(2ab+2ca-bc)(a^2+2bc)$; $S_b = b(2ab+2bc-ca)(b^2+2ca)$;

$S_c = c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab)$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_a, S_b \geq 0$.

Dễ thấy $b(b^2+2ca) \geq c(c^2+2ab) \geq 0$ nên

$S_b + S_c \geq c(c^2+2ab)(2ab+2bc-ca+2bc+2ca-ab) = c(c^2+2ab)(ab+4bc+ca) \geq 0$.

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta suy ra ngay (đpcm).

Bài 24. Cho $a, b, c \geq 0$ và $p \geq 3 + \sqrt{7}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{pa^2+bc} + \frac{1}{pb^2+ca} + \frac{1}{pc^2+ab} \geq \frac{9}{(p+1)(ab+bc+ca)}$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{(p+1)(ab+bc+ca)}{pa^2+bc} - 3 \right) &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(3pa + (p-2)c)(b-a) + (3pa + (p-2)b)(c-a)}{2(pa^2+bc)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a-b) \left(\frac{3pa + (p-2)c}{pa^2+bc} - \frac{3pb + (p-2)c}{pb^2+ca} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2 \frac{3p^2ab + p(p-5)c(a+b) - (p-2)c^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ca)} \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương với.

$$\sum_{cyc} (a-b)^2 (3p^2 ab + p(p-5)c(a+b) - (p-2)c^2)(pc^2 + ab) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 ((3p^2 + p-2)ab + (p^2 - 6p + 2)c(a+b))(pc^2 + ab) + (p-2)(a-b)(b-c)(c-a) \sum_{cyc} (a-b)(pc^2 + ab) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 ((3p^2 + p-2)ab + (p^2 - 6p + 2)c(a+b))(pc^2 + ab) - (p+1)(p-2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

Chú ý rằng $a \geq b \geq c, p \geq 3 + \sqrt{7}$ nên

$$a^2 b^2 \geq (a-c)^2 (b-c)^2, 3p^2 + p - 2 \geq (p+1)(p-2) > 0, p^2 - 6p + 2 \geq 0$$

$$\text{Do đó } \sum_{cyc} (a-b)^2 ((3p^2 + p-2)ab + (p^2 - 6p + 2)c(a+b))(pc^2 + ab)$$

$$\geq (3p^2 + p-2) \sum_{cyc} (a-b)^2 ab (pc^2 + ab) \geq (3p^2 + p-2) \sum_{cyc} (a-b)^2 a^2 b^2$$

$$\geq (3p^2 + p-2)(a-b)^2 a^2 b^2 \geq (3p^2 + p-2)(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2 \geq (p+1)(p-2)(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2$$

Nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$, riêng trong trường hợp $p=3+\sqrt{7}$ đẳng thức còn xảy ra tại $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 25. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $xy + yz + zx + xyz = 4$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3k \geq (k+1)(x+y+z)$$

Giải

Cho $x = y = \sqrt{2}, z = \sqrt{2} - 1$, ta suy ra được $k \leq 2\sqrt{2} + 1$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với giá trị vừa tìm được: $x^2 + y^2 + z^2 + 3(2\sqrt{2} + 1) \geq 2(\sqrt{2} + 1)(x + y + z)$ (*)

Từ giả thiết $xy + yz + zx + xyz = 4$, dẫn tới: $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} = 1$

$$\text{Do đó, ta có thể đặt } m = \frac{1}{x+2}, n = \frac{1}{y+2}, p = \frac{1}{z+2} \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=1 \\ 0 < m, n, p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow m, n, p$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Do đó, tồn tại các số dương a, b, c sao cho $m = b+c, n = c+a, p = a+b$. Khi đó, từ cách đặt, ta có

$$x = \frac{1-2m}{m} = \frac{n+p-m}{m} = \frac{2a}{b+c}; y = \frac{1-2n}{n} = \frac{p+m-n}{n} = \frac{2b}{c+a}; z = \frac{1-2p}{p} = \frac{m+n-p}{p} = \frac{2c}{a+b}$$

$$\text{Bất đẳng thức (*) trở thành } \sum_{cyc} \frac{4a^2}{(b+c)^2} + 3(2\sqrt{2} + 1) \geq 2(\sqrt{2} + 1) \sum_{cyc} \frac{2a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{4a^2}{(b+c)^2} - \frac{4(\sqrt{2}+1)a}{b+c} + (2\sqrt{2}+1) \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{4a^2 - 4(\sqrt{2}+1)a(b+c) + (2\sqrt{2}+1)(b+c)^2}{(b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{[2a - (2\sqrt{2}+1)b - (2\sqrt{2}+1)c](a-b)}{(b+c)^2} - \sum_{cyc} \frac{[2a - (2\sqrt{2}+1)b - (2\sqrt{2}+1)c](c-a)}{(b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{[2a - (2\sqrt{2}+1)b - (2\sqrt{2}+1)c](a-b)}{(b+c)^2} - \sum_{cyc} \frac{[2b - (2\sqrt{2}+1)c - (2\sqrt{2}+1)a](a-b)}{(a+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a^2 - b^2)^2 [2a^2 + 2b^2 + (1-2\sqrt{2})c^2 + (1-2\sqrt{2})ab + (3-2\sqrt{2})c(a+b)] \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_{a^2} = 2b^2 + 2c^2 + (1-2\sqrt{2})a^2 + (1-2\sqrt{2})bc + (3-2\sqrt{2})a(b+c)$$

$$S_{b^2} = 2c^2 + 2a^2 + (1-2\sqrt{2})b^2 + (1-2\sqrt{2})ca + (3-2\sqrt{2})b(c+a)$$

$$S_{c^2} = 2a^2 + 2b^2 + (1-2\sqrt{2})c^2 + (1-2\sqrt{2})ab + (3-2\sqrt{2})c(a+b)$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$S_{a^2}(b^2 - c^2)^2 + S_{b^2}(c^2 - a^2)^2 + S_{c^2}(a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó, ta có

$$S_{b^2} = 2c^2 + 2a^2 + (1-2\sqrt{2})b^2 + (1-2\sqrt{2})ca + (3-2\sqrt{2})b(c+a)$$

$$\geq 2c^2 + 2b^2 + (1-2\sqrt{2})b^2 + (1-2\sqrt{2})cb + (3-2\sqrt{2})b(c+b)$$

$$= 2(\sqrt{2}-1)^2 b^2 - 4(\sqrt{2}-1)bc + 2c^2 = 2[(\sqrt{2}-1)b - c]^2 \geq 0$$

$$S_{c^2} = 2a^2 + 2b^2 + (1-2\sqrt{2})c^2 + (1-2\sqrt{2})ab + (3-2\sqrt{2})c(a+b)$$

$$\geq 4ab + (1-2\sqrt{2})c^2 + (1-2\sqrt{2})ab + (3-2\sqrt{2})c(a+b)$$

$$= (5-2\sqrt{2})ab + (1-2\sqrt{2})c^2 + (3-2\sqrt{2})c(a+b) \geq (5-2\sqrt{2})c^2 + (1-2\sqrt{2})c^2 + 2(3-2\sqrt{2})c^2$$

$$= (6-4\sqrt{2})c^2 + 2(3-2\sqrt{2})c^2 = 4(\sqrt{2}-1)^2 c^2 \geq 0$$

$$S_{a^2} + S_{b^2} = (\sqrt{2}-1)^2 (a^2 + b^2) + 2(\sqrt{2}-1)ab - 4(\sqrt{2}-1)c(a+b) + 4c^2$$

$$= (\sqrt{2}-1)^2 (a+b)^2 - 4(\sqrt{2}-1)c(a+b) + 4c^2 = [(\sqrt{2}-1)(a+b) - 2c]^2 \geq 0$$

$$\text{Do đó } S_{a^2}(b^2 - c^2)^2 + S_{b^2}(c^2 - a^2)^2 + S_{c^2}(a^2 - b^2)^2 \geq (S_{a^2} + S_{b^2})(b^2 - c^2)^2 \geq 0$$

Suy ra (*) đúng. Vậy $k_{\max} = 2\sqrt{2} + 1$.

IV. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}$

Bài 2. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} \geq 6$$

Bài 3. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 12$$

Bài 4. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2abc}{3(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{31}{18}$$

Bài 5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}.$$

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Bài 7. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{2a^2+b^2} + \frac{b^3}{2b^2+c^2} + \frac{c^3}{2c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$

Bài 8. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c \geq 0$:

$$\frac{ab}{(a+b)^2+kc^2} + \frac{bc}{(b+c)^2+ka^2} + \frac{ca}{(c+a)^2+kb^2} \leq \frac{3}{4+k}$$

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

Bài 10. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$

Bài 11. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

Bài 12. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt[3]{9(a^3+b^3+c^3)}}{2}$$

Bài 13. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9abc}{2(a+b+c)^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

Bài 15. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3abc}{2(a + b + c)} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Bài 16. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab - c^2)(a + b - c)^3 + (bc - a^2)(b + c - a)^3 + (ca - b^2)(c + a - b)^3 \geq 0$$

Bài 17. Cho $a, b, c \geq 0, k \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^k}{b} + \frac{b^k}{c} + \frac{c^k}{a} \geq \frac{2a^k}{b + c} + \frac{2b^k}{c + a} + \frac{2c^k}{a + b}$$

Bài 18. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a^2 + 2bc)}{b + c} + \frac{b(b^2 + 2ca)}{c + a} + \frac{c(c^2 + 2ab)}{a + b} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2}$$

Bài 19. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}$$

Bài 20. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

Bài 21. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Bài 22. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{12 - bc - 4a^2} + \frac{1}{12 - ca - 4b^2} + \frac{1}{12 - ab - 4c^2} \geq \frac{3}{7}$$

Bài 23. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\frac{a}{a + b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b + c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c + a}\right)^2 + k \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq k + \frac{3}{4}$$

Bài 24. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{a + 2b} + \frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2a} + \frac{kabc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 1 + \frac{k}{8}$$

Bài 25. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\frac{a}{a + b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b + c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c + a}\right)^3 + \frac{kabc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq \frac{3 + k}{8}$$