

NHỮNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG COSI.

Cho n nguyên và $n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

$$A = \underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ số } \frac{x}{n}} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n \frac{1}{x^n}} \geq \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{n} = \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x = \sqrt[n+1]{n}$

Giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$



Cho n nguyên và $n \geq 2$ và $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

Với $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$

$$f(x) \geq f(k) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x^n} - k - \frac{1}{k^n} \geq 0 \Leftrightarrow x - k + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - k) \left[1 - \frac{1}{xk} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - k)}{xk} \left[xk - \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \right] \geq 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \leq \frac{n}{k^{n-1}} < \frac{n}{\sqrt[n+1]{n^{n-1}}} = \sqrt[n+1]{n^2} < xk$$

Suy ra $f(x) \geq f(k)$ đúng với mọi $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$

Giá trị nhỏ nhất của $A = k + \frac{1}{k^n}$ khi $x = k$.

Cách 2 :

$$\text{Nháp : } A = \underbrace{\frac{x}{m} + \dots + \frac{x}{m} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ số } \frac{x}{m}, m > 0} + x - \frac{nx}{m} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{m}\right)^n \frac{1}{x^n}} + x \left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

Ta chọn m sao cho:
$$\begin{cases} x = k \\ \frac{x}{m} = \frac{1}{x^n} \end{cases} \Rightarrow m = x^{n+1} = k^{n+1}$$

Bài giải:
$$A = \underbrace{\frac{x}{k^{n+1}} + \dots + \frac{x}{k^{n+1}} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ so } \frac{x}{k^{n+1}}} + x - \frac{nx}{k^{n+1}} \geq (n+1) \sqrt[n]{\left(\frac{x}{k^{n+1}}\right)^n \frac{1}{x^n}} + x \left(1 - \frac{n}{k^{n+1}}\right)$$

Vì $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$ nên $n < k^{n+1}$ suy ra:
$$A \geq \frac{(n+1)}{k^n} + k \left(1 - \frac{n}{k^{n+1}}\right) = k + \frac{1}{k^n} = f(k)$$

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức:
$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2006

Giải:

Xét $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ (*).

Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$.

Ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} \Rightarrow u + v = u^2 + v^2 - uv \Rightarrow (u+v)^2 - (u+v) = 3uv \leq \frac{3(u+v)^2}{4}$.

$$\Rightarrow (u+v)^2 - 4(u+v) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u+v \leq 4$$

Khi đó:
$$A = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3 y^3} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 y^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = (u+v)^2 \leq 16.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v = 2$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right)$$

Đề thi Đại học khối B năm 2007

Giải:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$$

Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .

<http://www.maths.vn>

$$P = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz} \right) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \left(1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz} \right)$$

$$P \geq \frac{1}{2} 9 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 y^2 z^2}} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{9}{2}$

Đề thi Đại học khối A năm 2009

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2007

Giải:

$$P \geq \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}\sqrt{xyz}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}\sqrt{xyz}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{1}{9}(-2a + 4b + c) \\ y\sqrt{y} = \frac{1}{9}(a - 2b + 4c) \\ z\sqrt{z} = \frac{1}{9}(4a + b - 2c) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{-2a + 4b + c}{a} + \frac{a - 2b + 4c}{b} + \frac{4a + b - 2c}{c} \right) \geq \frac{2}{9} \left(-6 + 4 \left[\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \right] + \left[\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right] \right).$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{2}{9} (-6 + 4 \cdot 3 + 3) = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức của $P = 2$ khi $a = b = c = 1$.

Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Đề thi Cao đẳng khối B năm 2009

Giải:

Nhận xét: vai trò giống nhau (đối xứng) của x, y .

$$S = 12(x^3 + y^3) + 16x^2y^2 + 34xy = 12(x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 16x^2y^2 + 34xy$$

$$\text{Hay } S = 12(x + y)\left((x + y)^2 - 3xy\right) + 16x^2y^2 + 34xy = \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16}$$

$$\text{Vì } x, y \text{ không âm và thỏa mãn } x + y = 1 \text{ suy ra } 0 \leq xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq 4xy - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} \leq \frac{25}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $S = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của $S = 0$ khi $x = 0, y = 1$.

Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Đề thi Đại học khối B năm 2009

Giải:

$$\left. \begin{array}{l} (x + y)^3 + 4xy \geq 2 \\ (x + y)^2 \geq 4xy \end{array} \right\} \Rightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Rightarrow x + y \geq 1.$$

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{3}{2}(x^4 + y^4 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$A = \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{Mà } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^4) \Rightarrow x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$$

$$\text{Khi đó } A \geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \text{ hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{Đặt } t = (x^2 + y^2)^2, t \geq \frac{(x + y)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ xác định và liên tục trên nửa khoảng } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 \geq \frac{9}{4} - 1 > 0, t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên nửa khoảng } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Khi đó } \min A = \min_{t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } t = \frac{1}{2}$$

ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC COSI

Bài toán mở đầu : Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}.$$

Giải:

Lời giải 1. Ta có: $P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2+2ab+b^2+1} = \frac{4}{(a+b)^2+1} \geq \frac{4}{2} = 2$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=2ab \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+1=0 \\ a+b=1 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm. Vậy không tồn tại min P .

Lời giải 2. Ta có: $P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \geq \frac{4}{a^2+6ab+b^2+1} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a+b)^2+1+4ab} + \frac{1}{3ab}$

Mặt khác $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Vậy $P \geq \frac{4}{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{6\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{8}{3}$.

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=3ab \\ a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Lời bình: lời giải 1. và lời giải 2 gần như tương tự nhau, cùng áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Tại sao trong cùng một bài toán mà có đến hai đáp số? Do đâu mà lời giải 2 tại sao lại tách $\frac{1}{2ab} = \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab}$? **Đó chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.**

Các bất đẳng thức trong các đề thi đại học thông thường là đối xứng với các biến và ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau và xảy ra tại biên.

Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab$.

Giải:

Do P là biểu thức đối xứng với a, b , ta dự đoán min P đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Ta có: $P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 7$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Thao khảo hai lời giải khác :

Lời giải 1:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4ab} \geq 4 + 2 + \frac{1}{4ab} = 6 + \frac{1}{4ab}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}. \text{ Thay } a = b = \frac{1}{2} \text{ vào ta được } P \geq 7.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời bình 1:

Qua cách giải trên ta đã chọn đúng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$ nên dẫn đến việc tách các số hạng và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$ là đúng, nhưng bước cuối cùng ta đã làm sai, ví dụ

$$(1-a)^2 + a \geq a, \text{ đẳng thức xảy ra khi } a = 1 \Rightarrow \min \left[(1-a)^2 + a \right] = a?.$$

Lời giải 2:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab = \frac{4}{(a+b)^2} + \left(\frac{1}{2ab} + 4ab \right).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2ab} + 4ab \geq 2\sqrt{\frac{1}{2ab} \cdot 4ab} = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } P \geq 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \min P = 2(2 + \sqrt{2})$$

Lời bình 2:

Thoạt nhìn thấy bài toán đã giải đúng. Thực tế thì sao? Việc tách $\frac{1}{ab} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab}$ để làm xuất hiện đẳng

thức $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$.

$$\min P = 2(2 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{1}{2ab} = 4ab \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm. Đẳng thức không xảy ra, do đó không tồn tại } \min P.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned}
1. & a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}. \\
2. & \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}. \\
3. & \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.
\end{aligned}$$

Giải:

$$1. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}$$

Ta có thể phạm sai lầm: $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 6\sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}} = 6$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ nhưng khi đó $a + b + c = 3 > \frac{3}{2}$ (trái giả thiết).

Phân tích bài toán :

Từ giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung

binh nhân. $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $x = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$

Khi đó: $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Ta chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \alpha = x^2 = \frac{1}{4}$.

Bài giải:

$$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 3\left(4x + \frac{1}{x} - 3x\right) \geq 3.2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} - 9x = 12 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

$$2. \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Phân tích bài toán :

Từ giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung

binh nhân. $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $x = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Xét $x^2 + \frac{1}{x^2}$, chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{\alpha x^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x^4} = 16$.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16x^2}$ và số x^2 :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 16 \cdot \frac{1}{16x^2} \geq 17 \sqrt[17]{x^2 \left(\frac{1}{16x^2} \right)^{16}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17x^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17a^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17b^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17c^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \left(a^{\frac{-15}{17}} + b^{\frac{-15}{17}} + c^{\frac{-15}{17}} \right) \geq \frac{\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \cdot 3 \left(a^{\frac{-15}{17}} b^{\frac{-15}{17}} c^{\frac{-15}{17}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} (abc)^{\frac{-5}{17}} \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \cdot 2^{\frac{15}{17}} = \frac{3\sqrt[17]{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cách khác :

Chọn : $\vec{u} = \left(a; \frac{1}{a} \right), \vec{v} = \left(b; \frac{1}{b} \right), \vec{w} = \left(c; \frac{1}{c} \right)$

Dùng bất đẳng thức vecto $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\left(a + b + c \right)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \geq 3 \sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

Tương tự trên, ta đặt $x = \left(\sqrt[3]{abc} \right)^2 \leq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq 3\sqrt{x + \frac{1}{x}} = 3\sqrt{x + \frac{1}{16x} + \frac{15}{16x}} \geq 3\sqrt{2\sqrt{\frac{x}{16} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{15}{16x}}$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{16x}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4}} = \frac{3\sqrt[17]{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

$$3. \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2}.$$

Tương tự trên. Xét $x^2 + \frac{1}{y^2}$, chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{\alpha y^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x^2 y^2} = 16$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16y^2}$ và số x^2 :

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + 16 \cdot \frac{1}{16y^2} \geq 17 \sqrt[17]{x^2 \left(\frac{1}{16y^2} \right)^{16}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{\sqrt{17} x^{\frac{1}{17}} y^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{\sqrt{17} a^{\frac{1}{17}} b^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt{17} b^{\frac{1}{17}} c^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{17} c^{\frac{1}{17}} a^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \left(a^{\frac{1}{17}} b^{\frac{-16}{17}} + b^{\frac{1}{17}} c^{\frac{-16}{17}} + c^{\frac{1}{17}} a^{\frac{-16}{17}} \right) \geq \frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} (abc)^{\frac{-5}{17}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} 2^{\frac{15}{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}$$

Đề thi Đại học khối D năm 2007

Giải:

Cho các số không âm a, b, x, y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{2005} + b^{2005} \leq 1 \\ x^{2005} + y^{2005} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30} \leq 1$$

Toán tuổi thơ 2 – số 27

Giải:

Nhận xét : Các đa thức tham gia trong bài toán cùng bậc $2005 = 1975 + 30$, đồng thời số mũ của các biến tương ứng bằng nhau.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 1975 số a^{2005} và 30 số x^{2005}

$$\frac{1975.a^{2005} + 30.x^{2005}}{(1975 + 30)} \geq \sqrt[2005]{(a^{2005})^{1975} \cdot (x^{2005})^{30}} = a^{1975} \cdot x^{30} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1975.b^{2005} + 30.y^{2005}}{(1975 + 30)} \geq \sqrt[2005]{(b^{2005})^{1975} \cdot (y^{2005})^{30}} = b^{1975} \cdot y^{30} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 1975.(a^{2005} + b^{2005}) + 30.(x^{2005} + y^{2005}) \geq 2005.(a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30}) \quad (3)$$

$$\text{Từ } \begin{cases} a^{2005} + b^{2005} \leq 1 \\ x^{2005} + y^{2005} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 2005 \geq 1975.(a^{2005} + b^{2005}) + 30.(x^{2005} + y^{2005}) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 2005 \geq 2005.(a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30}) \Rightarrow a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30} \leq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^{1975} = x^{30}, b^{1975} = y^{30}$.

Tổng quát : Cho các số không âm a, b, x, y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{m+n} + b^{m+n} \leq 1 \\ x^{m+n} + y^{m+n} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^m \cdot x^n + b^m \cdot y^n \leq 1.$$

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Giải:

$$\text{Ta có : } A^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2(y^2 + z^2 + x^2).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\text{Ta được: } A^2 \geq (y^2 + z^2 + x^2) + 2(y^2 + z^2 + x^2) = 3(y^2 + z^2 + x^2) = 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy min } A = \sqrt{3} \text{ đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Phân tích bài toán :