Kỹ thuật hệ số không xác định (UCT)

Đây là một kĩ thuật khá là mạnh trong chứng minh bất đẳng thức. Ý tưởng của phương pháp này cũng chính là việc đánh giá đại diện theo từng biến . Nói như vậy thì nhiều bạn sẽ bảo là đã có kĩ thuật tiếp tuyến rồi chúng ta không cần tham khảo thêm nữa . Nhưng xin thưa rằng: Đánh giá tiếp tuyến đôi lúc không mang lại kết quả vì nó không luôn giữ dấu lớn hơn hoặc luôn giữ dấu bé hơn , nó sẽ biến thiên theo từng khoảng đang xét . Điều này khá là khó xử lý cho chúng ta . Xin cảm ơn anh Nguyễn Thúc Vũ Hoàng (hàng xóm của tác giả ở quê) đã cung cấp tài liệu và cho phép chúng tôi sử dụng tài liệu của mình trong quá trình biên soạn chuyên đề này . Xin phép trích dẫn phương pháp này cùng với một số bài tập minh họa của nhóm biên soạn gửi đến bạn đọc . Lưu ý khi đọc chương này, các bạn sẽ cảm thấy khó hiểu nhưng không sao, hãy đọc kĩ lại chúng ta sẽ thấy được nét đẹp của nó.

1

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\geq 5$$

Lời giải

Ta sử dụng bất đẳng thức sau đây

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\geq\frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2}\geq 0$$

Hiển nhiên đúng với a là số thực dương.
Sử dụng các bất đẳng thức tương tự với b và c. Ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Chắc chắn ngay khi đọc lời giải cho bài toán " đơn giản" này bạn có phần lúng túng và không hiểu tại sao lại có thể tìm ra bất đẳng thức phụ một cách "khó hiểu" như vậy. Phải chăng là dự đoán một cách "vô hướng". Hoặc cũng có người sẽ nghĩ bài toán trên được tạo ra từ chính bất đẳng thức phụ đó. Câu trả lời là hoàn toàn không phải. Tất cả đều đi theo 1 qui luật của nó. Ở các phần tiếp theo chúng tôi sẽ phân tích về một kỹ thuật phân tích giúp tìm ra các bất đẳng thức phụ và mở rộng vấn đề này theo chiều hướng khá mới mẻ. Kỹ thuật này có tên là **U.C.T**, là viết tắt của 3 chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh **Undefined Coefficient Technique**. Hay còn gọi là Kỹ Thuật Hệ số bất định. Đây là một kỹ thuật cơ bản và là nền tảng quan trọng trên con đường tìm kiếm lời giải cho những bất đẳng thức khó.

Chúng ta sẽ khởi đầu kỹ thuật này bằng việc đưa ra cách giải thích cho việc tìm ra bất đẳng thức phụ trên và nó cũng chính là cách giải thích cho các bài toán sau này của chúng ta.

Bài toán trên các biến trong cả 2 vế và điều kiện đều không ràng buộc nhau điều này khiến ta nghĩ ngay sẽ tách theo từng biến để chứng minh được đơn giản hơn nếu có thể. Nhưng rõ ràng ta chỉ từng đó thôi là không đủ. Nếu ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\geq\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}\geq 0$$

Rõ ràng không hoàn toàn đúng với a thực dương.
Đừng bỏ cuộc tại đây bởi vì ở cách trên ta chưa sử dụng điều kiện $a+b+c=3$.
Như vậy ta sẽ không đi theo đường lối suy nghĩ đơn giản ban đầu nữa mà sẽ đi tìm hệ số để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+ma+n \qquad (1)$$

Trong đó m và n là các hệ số chưa xác định.
Tương tự với biến b và c. Cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a+b+c)+3n=\frac{5}{3}+3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m và n phải thỏa mãn điều kiện $m+n=0\Leftrightarrow n=-m$. Thế vào (1) dẫn đến

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1) \qquad (2)$$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức (2) là đúng.
Chú ý ở bài toán này điểm cực trị đạt được tại $a=b=c=1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left(\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}-m\right)\ge0$$

Khi cho $a=1$ thì ta có $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}=-\frac{2}{3}$ từ đó ta dự đoán rằng $m=-\frac{2}{3}$ để tạo thành đại lượng bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Từ đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$$

Quá trình đi tìm bất đẳng thức phụ đã được phân tích cụ thể ở trên. Tuy nhiên đó không phải là cách duy nhất để ta tìm ra hệ số. Ta cũng có thể sử dụng tính chất của đường tiếp tuyến tại một điểm của đồ thị hay sử dụng đạo hàm. Nhưng có lẽ cách dự đoán trên là hữu hiệu và đơn giản về mặt trực quan cũng như thực hiện. Tuy nhiên tất cả cũng chỉ là sự dự đoán. Nó không đảm bảo rằng sau khi tìm ra bất đẳng thức phụ rồi thì bài toán sẽ được giải quyết. Một số dạng toán như vậy sẽ được đề cập trong các phần tiếp theo của chuyên đề này. Ở phần 1 này chúng ta sẽ chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản để hình thành trong đầu kỹ thuật qua đó thành thục trong việc phân tích. Ta tiếp tục đến với bài toán sau:

2

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge2$$

Lời giải

Ta sẽ xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2}{a^2+1}\ge1+m(a-1)\Leftrightarrow-\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1}\ge m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left(-\frac{a+1}{a^2+1}-m\right)\ge0$$

Khi $a=1$ ta sẽ có $-\frac{a+1}{a^2+1}=-1\Rightarrow m=-1$. Ta dự đoán bất đẳng thức sau đúng và thật vậy

$$\frac{2}{a^2+1}\ge2-a\Leftrightarrow\frac{a(a-1)^2}{a^2+1}\ge0$$

Tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.
Bình luận : Ta có thể sử dụng kỹ thuật "Côsi ngược dấu" để tìm ra bất đẳng thức phụ trên

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$$

3

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le1$$

Lời giải

Ở đây ta cần tìm m để bất đẳng thức dưới là đúng:

$$\frac{1}{a^2+b+c}=\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{1}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow-\frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)}\le m(a-1)$$

Tương tự như trên ta tìm dự đoán rằng với $m=-\frac{1}{9}$ thì bất đẳng thức phụ đúng. Thật vậy:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{4}{9}-\frac{a}{9}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2-a+3)}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2-a+3)}$$

4

Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng

$$2(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge 2+\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2+ab+ac+ad+bc+bd+dc}$$

Lời giải

Theo bài ra a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)^2=2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)=\sqrt{2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge 2+\frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau đúng

$$2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+m(a-1)\Leftrightarrow\frac{(2a+1)^2(a-1)}{2}\ge m(a-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m=\frac{9}{2}$. Ta sẽ chứng minh điều đó, thật vậy

$$2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+\frac{9(a-1)}{2}\Leftrightarrow 2(a-1)^2(a+2)\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Nhận xét. Bài toán này với hình thức khá "cồng kềnh" vì chứa căn thức. Tuy nhiên nếu nhận ra điểm mấu chốt của bài toán ta dễ dàng đưa về đơn lượng theo biến để giải quyết. Bài toán trên còn có thể giải quyết theo cách khác bằng cách chứng minh trực tiếp với 4 biến. Nhưng dù sao việc giải quyết theo từng biến riêng biệt vẫn dễ dàng hơn rất nhiều.

5

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5(a^2+b^2+c^2)\ge 27$$

Lời giải

Ta cần tìm hệ số m sao cho

$$\frac{4}{a}+5a^2\ge 9+m(a^3-1)\Leftrightarrow\frac{(a-1)(5a^2+5a-4)}{a}\ge m(a-1)(a^2+a+1)$$

Ta dễ dàng nhận ra đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Khi cho $a=1$ thì ta có thể dự đoán rằng $m=2$. Ta sẽ chứng minh rằng với $m=2$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{4}{a}+5a^2\ge 7+2a^3\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(-2a^2+a+4)}{a}\ge 0$$

Do $a \le \sqrt[3]{3} \Rightarrow -2a^2 + a + 4 \ge 0$. Vậy bất đẳng thức phụ trên là đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

6

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \le \frac{n}{8}$$

Lời giải

Ta sẽ tìm hệ số m sao cho

$$\frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \le \frac{1}{8} + m(a_i - 1) \Leftrightarrow \frac{(5 - 3a_i)(a_i - 1)}{8(3a_i^2 + 5)} \le m(a_i - 1)$$

Ta dự đoán rằng với $m = \frac{1}{32}$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy:

$$\frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \le \frac{1}{8} + \frac{(a_i - 1)}{32} \Leftrightarrow 0 \le \frac{(5 + a_i)(a_i - 1)^2}{32(3a_i^2 + 5)}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các biến bằng nhau và bằng 1.

Nhận xét. Qua các bài toán trên ta có thể thấy rằng bất đẳng thức không hề quan tâm đến số biến. Ta hoàn toàn có thể tổng quát với n biến mà không làm ảnh hưởng đến cách giải. Đây là một điểm thú vị của **U.C.T**.

Một cách tổng quát ta đưa ra cách giải quyết cho lớp bài toán có dạng sau

Bài toán tổng quát

Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $h(a_1) + h(a_2) + ... + h(a_n) = 0$ Chứng minh rằng:

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge 0$$

Lớp bài toán này có thể được giải quyết bằng cách phân tách để chứng minh theo từng biến. Vì các biểu thức mang tính đối xứng với nhau nên thường thì điểm cực trị đạt được tại các biến bằng nhau. Ta sẽ phải xác định hệ số m sao cho:

$$f(a_i) \ge m \times h(a_i)$$

Đúng với mọi biến thỏa mãn điều kiện đặt ra. Với cách giải này ta sẽ giải quyết được một lượng lớn các bất đẳng thức mà các biến không ràng buộc lẫn nhau một cách "mật thiết". Thường là một số dạng điều kiện như $\sum_{i=1}^{n} a_i^k = n$. Có thể khái quát tư tưởng của kỹ thuật này trong lớp bài toán trên như sau: Để chứng minh bài toán ta sẽ xác định hệ số trong các bất đẳng thức phụ theo từng biến riêng biệt sao cho:

$$f(a_i) \ge m \times h(a_i) \Leftrightarrow g(a_i)^{2k} p(a_i) \ge 0$$

Trong đó $g(a_i) = (a_i - x_k)$ với x_k là điểm cực trị của bất đẳng thức.

Bài toán sẽ được giải quyết nếu $p(a_i) \ge 0$. Trong trường hợp $p(a_i) \ge 0$ chỉ đúng trong một miền nghiệm nào đó thì ta sẽ tiến hành chia trường hợp để giải quyết bài toán. Tuy nhiên trong phần 1 này ta sẽ không đề cập đến những bài toán như vậy mà sẽ đề cập ở phần sau.

Sau khi đã tìm ra bất đẳng thức phụ. Với nhiều công cụ như đạo hàm, khảo sát hàm số hay đơn giản chỉ là phân tích nhân tử ta đều có thể giải quyết không quá khó khăn.

Trong phép chứng minh cho các bất đẳng thức phụ ở trên ta biến đổi và qui về việc phân tích nhân tử của đa thức

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Mà mục đích chủ đạo là qui về dạng tổng các bình phương. Việc nhân tích đa thức thành nhân tử là một vấn đề Đại số cơ bản nên xin không nêu ra ở đây.

Qua một vài ví dụ nho nhỏ hẳn phần nào các bạn đã hiểu được **U.C.T.** Ở các phần tiếp theo việc xác định hệ số sẽ được trình bày một cách sơ lược bởi vì những bài toán đó mang tính phức tạp nhiều hơn mà **U.C.T** chỉ đơn thuần là bước đệm để đi đến lời giải chứ không thể đưa ta cách chứng minh trực tiếP.

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một khoảng không gian mới với lớp bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến và kĩ thuật chuẩn hóa kết hợp với **U.C.T.**
Đa thức $f(a,b,c)$ đối xứng định nghĩa dưới dạng: $f(a,b,c)=f'(a',b',c')$ trong đó (a',b',c') là một hoán vị tùy ý của (a,b,c). Hay nói cách khác là

$$f(a,b,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)$$

Tính thuần nhất của một đa thức đối xứng ba biến trên miền D có nghĩa là
$f(ka,kb,kc)=k^nf(a,b,c)$ với mọi $k,a,b,c\in D, n=\text{const}$ chỉ phụ thuộc vào hàm $f(a,b,c)$. Hiểu một cách đơn giản đa thức thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Do một số tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt $a^n+b^n+c^n=k, abc=p, ab+bc+ca=r,...$ Đây là kỹ thuật rất quan trọng giúp ta đơn giản hóa và qui bất đẳng thức về chứng minh theo từng biến. Hãy cùng đến với một số bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến để thấy công dụng của **U.C.T**

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$.
Bài toán qui về việc chứng minh

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{2}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{3-a}\ge\frac{1}{2}+m(a-1)\Leftrightarrow\frac{3(a-1)}{2(3-a)}\ge m(a-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m=\frac{3}{4}$. Ta chứng minh bất đẳng thức với m như vậy thì luôn đúng

$$\frac{a}{3-a}\ge\frac{3a-1}{4}\Leftrightarrow\frac{3(a-1)^2}{4(3-a)}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng.
Sử dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.
Nhận xét: Bất đẳng thức Nesbit là một bất đẳng thức đại số cơ bản và có nhiều phép chứng minh. Lời giải trên là một lời giải đẹp và ngắn gọn cho bất đẳng thức này.

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\ge a^2+b^2+c^2$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2 + m(a-1)$$

Ta lại có

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} - a^2 = -\frac{(a-1)(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}$$

Từ đây dễ dàng dự đoán với $m=-6$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2 - 6(a-1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(6-a)a}{a^2-2a+3} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \in (0,3)$.

Tương tự với các biến còn lại. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

9

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Tương tự như trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} \leq \frac{21+9a}{25} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Có thể thấy rằng hai lời giải cho các bài toán mở đầu phần 2 rất đơn giản và ngắn gọn. Đây cũng có thể xem là một kỹ thuật chính thống. Giúp ta giải quyết một số bài toán "cùng loại" và đã rất quen thuộc sau.

10

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Bài toán cần chứng minh qui về dạng sau

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Dễ dàng dự đoán bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{a}{(3-a)^2} \geq \frac{2a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \in [0,3)$.

Sử dụng bất đẳng thức này cho b,c rồi cộng lại, ta có đpcm.

11

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\geq\frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\geq\frac{8a-7}{6}\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)}\geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $0\leq a\leq 3\Rightarrow 39-8a\geq 39-24=15>0$.

Tương tự với các biến còn lại ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

12

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\leq 8$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2}\leq 8$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}\leq\frac{12a+4}{3}\Leftrightarrow 0\leq\frac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2+(1-a)^2}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ta sẽ chuyển sang một kĩ thuật nâng cao hơn đó là phân tách trường hợp

Ở các phần trên ta đã làm quen với một số bài toán khi đưa về dạng

$$f(a_i)\geq m.h(a_i)\Leftrightarrow g(a_i)^{2k}.p(a_i)\geq 0$$

Thì có ngay điều phải chứng minh. Tuy nhiên không phải bao giờ nó cũng xuất hiện $p(a_i)\geq 0$. Trong trường hợp $p(a_i)\geq 0$ chỉ đúng với một miền nghiệm nào đó thì việc chứng minh sẽ phải đi qua một chiều hướng khác, đó là xét thêm trường hợp biến a_i ngoài miền xác định để $p(a_i)\geq 0$. Thường thì bước này phức tạp và đòi hỏi người làm phải có những đánh giá mang sự tinh tế nhiều hơn. Chúng ta sẽ đến với một số bài toán tiêu biểu cho kỹ thuật này.

13

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{c^2}{c^2+(b+a)^2}\geq\frac{3}{5}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$. Qui bất đẳng thức về dạng

$$\frac{a^2}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b^2}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c^2}{c^2+(3-c)^2}\geq\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a^2-6a+9}\geq\frac{3}{5}$$

Ta sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{12a-7}{25} \Leftrightarrow (8a-21)(a-1)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq 1 \geq c$.
Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. $c \geq \frac{21}{8} \Rightarrow 8a-21 \geq 8b-21 \geq 8c-21 \geq 0$.

+ Trường hợp 2. $\max\{a,b,c\} \leq \frac{21}{8}$

Khi đó ta có:

$$f(a)=\frac{a^2}{2a^2-6a+9}=\frac{1}{1+\left(\frac{3}{a}-1\right)^2} \geq \frac{49}{50} > \frac{1}{5}$$

Do $f(a)$ đồng biến trên $(0,3]$ nên điều này hiển nhiên đúng.
Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhau.

14

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=2$, Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2+1}+\frac{1}{3b^2+1}+\frac{1}{3c^2+1}+\frac{1}{3d^2+1} \geq \frac{16}{7}$$

Lời giải

Ta cần xác định hệ số để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{4}{7}+m(2a-1)$$

Dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{52-48a}{49} \Leftrightarrow \frac{3(2a-1)^2(12a-1)}{49(3a^2+1)} \geq 0$$

Tương tự với các biến còn lại.
Xét hai trường hợp sau đây
+ Trường hợp 1.

$$\min\{a,b,c,d\} \geq \frac{1}{12} \Rightarrow 12a-1 \geq 12b-1 \geq 12c-1 \geq 12d-1 \geq 0$$

+ Trường hợp 2.

$$d < \frac{1}{12} \Rightarrow 1+3d^2 < \frac{49}{48} \Rightarrow \frac{1}{1+3d^2} > \frac{48}{49}$$

Xét tương tự với các biến còn lại ta tìm ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

15

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+a^2+c^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+b^2+a^2} \geq 0$$

Lời giải

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+a^2+c^2}+\frac{1}{c^5+b^2+a^2} \leq \frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh trường hợp $a^2+b^2+c^2=3$ là đủ.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{2a^6}{a^2+1}\le\frac{2a^6}{2\sqrt{a^2}}=a^5$$

Đặt $a^2=x, b^2=y, c^2=z$ lúc đó ta có $x+y+z=3$ và do đó ta phải chứng minh

$$1\ge\frac{1}{\frac{2x^3}{x+1}-x+3}+\frac{1}{\frac{2y^3}{y+1}-y+3}+\frac{1}{\frac{2z^3}{z+1}-z+3}$$

$$\Leftrightarrow 1\ge\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}+\frac{y+1}{2y^3-y^2+2y+3}+\frac{z+1}{2z^3-z^2+2z+3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{3-x}{6}-\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{(x-1)^2(-2x^2+3x+3)}{6(2x^3-x^2+2x+3)}\right)\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z\Rightarrow x\ge 1\ge z$. Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1. $y+z\ge 1\Rightarrow x\le 2$ khi đó ta có

$$-2x^2+3x+3>0,-2y^2+3y+3>0,-2z^2+3z+3>0$$

Dẫn đến bài toán hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. $y+z\le 1\Rightarrow x\ge 2$ khi đó ta có

$$(2x^3-x^2+2x+3)-5(x+1)=2x^3-x^2-3x-2=x^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\ge x^3\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^3}\right)=\frac{x^3}{2}>0$$

Từ đó suy ra $\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}\le\frac{1}{5}$ như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{z+1}{2z^3-z^2+2z+3}+\frac{y+1}{2y^3-y^2+2y+3}\le\frac{4}{5}$$

Điều này luôn luôn đúng vì với $k\in[0,1]$ ta có

$$\frac{k+1}{2k^3-k^2+2k+3}\le\frac{2}{5}\Leftrightarrow 4k^3\ge(k+1)(2k-1)$$

Nếu $k\le\frac{1}{2}$ thì bài toán được giải quyết.

Nếu $k\ge\frac{1}{2}$ thì ta có

$$4k^3-(k+1)(2k-1)\ge 4k^3-2(2k-1)=2(2k^3-2k+1)$$
$$\ge 2(k^2-2k+1)=2(k-1)^2\ge 0$$

Từ $y+z\le 1\Rightarrow y,z\in[0,1]$.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Đây là một kết quả "mạnh hơn" cho bài toán 3 trong kì thi IMO 2005 của tác giả Vasile Cirtoaje. Bài toán gốc ban đầu là với điều kiện $abc\ge 1$. Điều kiện của bài toán trên chặt hơn vì theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\Rightarrow 3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 3\Rightarrow abc\ge 1$$

Chúng ta hãy đến với lời giải của chính tác giả bài toán trên, được trích từ quyển "Algebraic Inequalities, Old and New Method"

Ta qui về việc chứng minh bài toán sau:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2}\le 1$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. $a\le\sqrt{2}\Rightarrow a,b\le\sqrt{2}$. Ta sử dụng các bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}\le\frac{3-a^2}{6},\frac{1}{b^5+3-b^2}\le\frac{3-b^2}{6},\frac{1}{c^5+3-c^2}\le\frac{3-c^2}{6}$$

Lại có

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}-\frac{3-a^2}{6}=\frac{(a-1)^2(a^5+2a^4-3a^2-6a-3)}{6(a^5+3-a^2)}$$

Mặt khác

$$a^5+2a^4-3a^2-6a-3=a^2\left(a^3+2a^2-3-\frac{6}{a}-\frac{3}{a^2}\right)$$

$$\le a^2\left(2\sqrt{2}+4-3-3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=-a^2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)<0$$

+ Trường hợp 2. $a>\sqrt{2},a^2+b^2+c^2=3\Rightarrow b^2+c^2<1$ khi đó ta có

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2}<\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}$$

Lại có

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}<\frac{1}{2\sqrt{2}a^2+3-a^2}=\frac{1}{(2\sqrt{2}-1)a^2+3}<\frac{1}{(2\sqrt{2}-1)2+3}<\frac{1}{6}$$

Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu

$$\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}\le\frac{5}{6}$$

Thật vậy

$$\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}-\frac{5}{6}=\frac{9(b^2+c^2-1)-5b^2c^2}{6(3-b^2)(3-c^2)}\le 0$$

Như vậy bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=1$.

Lời giải của tác giả Vasile Cirtoaje ngay từ đầu cũng đã sử dụng **U.C.T** nhưng nó lại đưa ta đến cách xét trường hợp khá lẻ vì phải so sánh biến với $\sqrt{2}$. Đây là một bài toán đẹp với nhiều mở rộng thú vị.

16

Cho các số dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-3a+3}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-3b+3}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-3c+3}}\le 3$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c>0$.

Với mọi $x\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ta có

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}}\le x+1$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$(x-1)^2(x^2+x-1)\ge 0\ \text{(ñuùng)}$$

Từ đây, suy ra

+, Nếu $c\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sử dụng bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

+, Nếu $c \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, có 2 khả năng xảy ra

+, Nếu $b \le 1$, ta có

$$a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

$$b^2 - 3b + 3 = (b-1)^2 - b + 2 \ge 1$$

$$c^2 - 3c + 3 = (1-c)^2 - c + 2 \ge \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2 = \frac{16}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$$

Do đó

$$VT \le \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 < 3$$

+, Nếu $b \ge 1$, suy ra $2 \ge a \ge b \ge 1$, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$ với $1 \le x \le 2$, ta có

$$f''(x) = \frac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2 - 3x + 3)^{5/2}} < 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lõm, do đó theo bất đẳng thức Jensen,

$$f(a) + f(b) \le 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{(3-2t)^2 - 3(3-2t) + 3}} \le 3$$

Hay

$$\frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{4t^2 - 6t + 3}} \le 3$$

Hay

$$\frac{36(t-1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2 - 3t + 3)^2(4t^2 - 6t + 3)^2} \ge 0$$

Dễ dàng kiểm tra được bất đẳng thức này đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \le \frac{9}{10}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow a \ge \frac{1}{3} \ge c$. Xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. $c \ge -\frac{3}{4}$ ta có

$$\frac{9}{10} - \left(\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}\right) = \sum_{cyc}\left(\frac{18a}{25} + \frac{5}{30} - \frac{a}{a^2+1}\right) = \sum_{cyc}\frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \ge 0$$

+ Ttrường hợp 2. $c \le -\frac{3}{4}$ áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \le 1$$

Khi đó nếu $\frac{c}{c^2+1} \le -\frac{9}{10} \Leftrightarrow -5-2\sqrt{6} \le c \le -\frac{3}{4}$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét trường hợp: $-5-2\sqrt{6} \ge c$ khi đó ta có $3+\sqrt{6} \le a \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{5}$. Từ đây suy ra:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \le \frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1} \le \frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}<\frac{9}{10}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán gốc của đề toán này là với điều kiện của trường hợp 1. Tuy nhiên bài toán vẫn đúng với mọi số thực, đây là một điều rất lí thú. Có thể chứng minh bài toán trên với kỹ thuật dồn biến bằng hàm lồi.

Chúng ta sẽ chuyển sang xét một dạng biểu diễn khá thú vị như sau:

Ở đây chúng tôi muốn nói đến dạng biểu diễn theo tổng của 1. Đây là một tư tưởng tuy đơn giản nhưng sẽ giúp ta tìm ra nhiều lời giải ấn tượng. Bây giờ ta hãy chú ý đến đẳng thức sau đây

$$1=\frac{a^k+b^k+c^k}{a^k+b^k+c^k}=\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}+\frac{b^k}{a^k+b^k+c^k}+\frac{c^k}{a^k+b^k+c^k}$$

Đẳng thức tưởng chừng như là một điều hiển nhiên, không mang nhiều ý nghĩa nhưng lại có vai trò khá quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà chúng tôi sẽ nêu ra dưới đây. Ở phần này kỹ thuật xác định hệ số không còn có thể thực hiện như trước bởi vì ở đây xuất hiện lũy thừa p. Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp. Vì vậy công cụ mà chúng ta chọn ở đây sẽ là đạo hàm. Trước hết xin nhắc lại 2 định lí cơ bản sau đây

Định lí Fermat. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$ và có cực trị địa phương tại $x_0 \in [a,b]$. Khi đó nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$

Định lí Roll. Giả sử $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục và khả vi trong (a,b). Nếu $f(a)=f(b)$ thì tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $f'(x_0)=0$

18.

Tìm hằng số $k>0$ tốt nhất để bất đẳng thức sau là đúng với mọi số a,b,c là các số thực dương

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2+(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{kb^2+(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{kc^2+(a+b)^2}} \ge \frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

Lời giải

Cho $a=1, b=c=0$ ta có $k \le \frac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh đó là giá trị k tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Bất đẳng thức cần chứng minh.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{kc^2+(a+b)^2}} \ge 1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số k sao cho bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}} \ge \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}$$

Ở đây ta chuẩn hóa $b=c=1$ để việc việc xác định hệ số được đơn giản hơn. Khi đó ta cần xác định hệ số k sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \ge \frac{a^k}{a^k+2} \Leftrightarrow a^{k+2}-2a^{2k}+a^2 \ge 0$$

Đặt $f(a)=a^{k+2}-2a^{2k}+a^2$. Lại có $f(a) \ge 0, f(1)=0$ nên theo định lí Fermat ta có $f'(1)=0$. Tiến hành đạo hàm $f(a)$ suy ra

$$f'(a)=(k+2)a^{k+1}-4ka^{2k-1}+2a$$

Theo trên thì ta có

$$f'(1)=(k+2)-4k+2=0 \Leftrightarrow k=\frac{4}{3}.$$

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng

hạt nhân He bắn vào hạt nhân Be

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức phụ là đúng. Nên nhớ rằng bất đẳng thức phụ trên chỉ là dự đoán mà thôi, có thể nó sẽ không đúng hoặc ngược lại. Từng bài toán ta sẽ "tùy cơ ứng biến". Tất nhiên nhiều bài toán không thể áp dụng theo cách này. Chúng ta tiếp tục quay lại bài toán trên với phép chứng minh cho bất đẳng thức phụ.

Theo bất đẳng thức Holder ta có $\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\ge 2\sqrt[3]{\left(\frac{b+c}{2}\right)^4}$ từ đây ta sẽ phải chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8t^2}}\ge\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4}\ge\sqrt[3]{a}\sqrt{a^2+8t^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4}(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{t^2})^2\ge 0$$

Ở đây $t=\frac{b+c}{2}$. Vậy bất đẳng thức này hiển nhiên đúng .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=t>0, b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Quá trình tìm kiếm hệ số k có thể thông qua việc đánh giá theo bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}}\ge\frac{a^k}{a^k+2}\Leftrightarrow a^{k+2}-2a^{2k}+a^2\ge 0\Leftrightarrow a^{k+2}+a^2\ge 2a^{2k}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM thì $a^{k+2}+a^2\ge 2\sqrt{a^{k+4}}$. Như vậy ta có cần xác định k sao cho

$$2\sqrt{a^{k+4}}=2a^{2k}\Leftrightarrow a^{k+4}=a^{4k}\Leftrightarrow k+4=4k\Leftrightarrow k=\frac{3}{4}$$

19

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

Lời giải

Bằng cách làm tương tự, ta thiết lập được bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $b^{4/3}+c^{4/3}\ge 2b^{2/3}c^{2/3}=2t^{4/3}$, ta cần chứng minh

$$a^{\frac{4}{3}}+2t^{\frac{4}{3}}\ge a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^2+8t^2}$$

$$\Leftrightarrow 4t^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{2}{3}})^2\ge 0 \text{ (dung)}$$

Do đó, bất đẳng thức trên đúng. Sử dụng tương tự cho b,c rồi cộng lại, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $b\to 0, c\to 0$.

20

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$

Lời giải

Tương tự như trên ta có xác định được bất đẳng thức phụ sau:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\quad (*)$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức phụ trên theo nhiều cách:

Cách 1.

$$(*) \Leftrightarrow 2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2 \ge a(b+c)^3$$

Điều này hiển nhiên đúng, thật vậy

$$2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2 \ge a^2(b+c)^2+\frac{(b+c)^4}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)^6}{4}} = a(b+c)^3$$

Cách 2.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{1+k^3} = \sqrt{(1+k)(1-k+k^2)} \le \frac{(1+k)+(1-k+k^2)}{2} = 1+\frac{k^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \ge \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \ge \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Áp dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 biến bằng nhau hoặc có 2 biến dần về 0.

21

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3} \ge \frac{1}{3}$$

<u>Lời giải</u>

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$VT \ge \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\right)^2 \ge \frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Đa phần các bài toán xét đến ở trên đều có điều kiện mà các biến liên hệ với nhau ko quá chặt Thường là điều kiện ở dạng $a_1^k+a_2^k+...+a_{n-1}^k+a_n^k=n$. Tức là ta có thể tách ra theo từng biến để tìm bất đẳng thức phụ. Tuy nhiên với một số bài toán mà điều kiện thiết lập mối quan hệ "bền chặt" đại loại như $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^k$ thì việc tìm ra bất đẳng thức phụ tương đối khó khăn vì ta không thể đánh giá theo từng biến nữa. Và để áp dụng **U.C.T** trong những bài toán như vậy chúng ta phải dùng đến một số tính chất của hàm số.

22

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1}+\frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1}+\frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \ge \sqrt{2}$$

<u>Lời giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1}+\frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1}+\frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1}\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a(b+c+1)^2}{b+c}\right) \ge (a+b+c)^3$$

Do đó ta cần phải chứng minh

$$(a+b+c)^3 \ge 2\sum_{cyc}\frac{a(b+c+1)^2}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3\sum_{cyc}\frac{a}{b} + 3\sum_{cyc}\frac{b}{a} + 6 \geq 4\sum_{cyc} ab + 4\sum_{cyc} a + 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b} \geq \sum_{cyc} ab, \sum_{cyc}\frac{b}{a} \geq \sum_{cyc} ab, 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \leq \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a}$$

Từ đó ta có

$$VT - VP \geq \sum_{cyc} a^3 + \frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b} + \frac{5}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a} - 4\sum_{cyc} ab - 4\sum_{cyc} a + 6$$

$$\geq \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} ab - 4\sum_{cyc} a + 6 = \sum_{cyc}\left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2\right)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 + 2\ln x$ với $x > 0$ ta có

$$f'(x) = (x-1)\left(3x + 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

Nếu $x < 1$ thì $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$, nếu $x \geq 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x}$ do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Từ đó dễ dàng kiểm tra rằng $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x > 0$

Hay

$$x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 \geq -2\ln x, \forall x > 0$$

Như vậy ta có

$$\sum_{cyc}\left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2\right) \geq -2\sum_{cyc}\ln a = 0$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

23

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq 1$$

Lời giải

Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu trong ba số a, b, c tồn tại ít nhất một số không lớn hơn $\frac{1}{2}$. Giả sử số đó là a. Ta có $a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 3a^2 + (a-1)^2 \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. Cả ba số a, b, c đều không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ khi đó ta xét hàm số sau

Giống như các phần trước ta có cũng sẽ thiết lập một bất đẳng thức phụ dạng

$$\frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} + k\ln x$$

Ở đây ta có qui về hàm số mũ và chú ý $\ln x + \ln y + \ln z = 0$.

Tiếp tục quan sát thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Từ đó ta có phải xác định k sao cho $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{3}$$

Với $x > \frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$f'(x)=\frac{2(16x^4-16x^3-x+1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}=\frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}$$

Từ đây suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, do $x>\frac{1}{2}$

Dễ dàng kiểm tra được $f(x)\ge f(1)=0,\forall x>\frac{1}{2}$. Điều này tương đương với

$$\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}\ge\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln x,\forall x>\frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ trên theo từng biến a,b,c rồi cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\ge 1-\frac{2}{3}\sum_{cyc}\ln a=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, hoặc $a\to\infty,b\to\infty,c\to 0^+$ và các hoán vị.

Nhận xét. Bài toán trên còn một **Lời giải** rất ấn tượng của Vasile Cirtoaje. Xin trình bày lại **Lời giải** đó. Sử dụng bất đẳng thức phụ sau đây

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\ge\frac{1}{2a^3+1}\Leftrightarrow\frac{2a(a-1)^2}{(4a^2-2a+1)(2a^3+1)}\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng với mọi số thực không âm. Tương tự với các biến còn lại suy ra điều phải chứng minh.

24

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2...a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Lời giải

Xét hàm số sau với $x>0$

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$$

Khi đó ta có

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[2x^2+x-1-2x^2\sqrt{2(x^2+1)}\right]}{x\sqrt{2(x^2+1)}(\sqrt{2}x^2+\sqrt{x^2+1})}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

Qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f'(x)\le f(1)=0,\forall x>0$$

Điều đó có nghĩa là

$$\sqrt{x^2+1}\le x\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x,\forall x>0$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ này cho n biến và cộng vế theo vế ta có

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n)$$

$$=\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln\prod_{i=1}^{n}a_i$$

$$=\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=...=a_n=1$.

Nhận xét. Bài toán trên còn có thể giải quyết bằng một bất đẳng thức phụ quen thuộc

$$\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{2}(x-\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow 0\le(\sqrt{x}-1)^4,\forall x>0$$

Sử dụng bất đẳng thức trên lần lượt cho n biến cộng lại ta có

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)+\sqrt{2}\left(n-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)$$
$$\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Bất đẳng thức đã được giải quyết hoàn toàn.

25

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca)\ge 10(a+b+c)$$

Lời giải

Ta có cần xác định hệ số k sao cho bất đẳng thức sau là đúng

$$a^2+9bc=a^2+\frac{9}{a}\ge 10a+k\ln a$$

Tương tự các phần trước ta có tìm ra $k=-17$. Ta có sẽ chứng minh

$$f(a)=a^2+\frac{9}{a}-10a+17\ln a\ge 0$$

Thật vậy

$$f'(a)=2a-\frac{9}{a^2}-10+\frac{17}{a}=\frac{2a^3-10a^2+17a-9}{a^2}=\frac{(a-1)(2a^2-8a+9)}{a^2}$$
$$f'(a)=0\Leftrightarrow a=1$$

Từ đây, ta có thể dễ dàng thấy được $f(a)\ge f(1)=0,\forall a>0$ hay

$$a^2+\frac{9}{a}-10a\ge -17\ln a$$

Sử dụng tương tự với b,c rồi cộng lại vế theo vế, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Chúng ta tiếp tục mở rộng kĩ thuật này

Ngay từ đầu bài viết ta đã xét đến việc xác định hệ số m theo cách

$$h(a_i)\ge f(a_i)+ma^k+n$$

Với điều kiện xác định của bài toán là $a_1^k+a_2^k+...+a_n^k=n$

Tuy nhiên với cách xác định đó đối với một số bài toán lại không mang lại hiệu quả. Điều đó cũng không phải hoàn toàn là không tốt. Vì nó sẽ thôi thúc chúng ta tìm ra các dạng xác định hệ số khác. Một cách trực quan chúng ta sẽ phân tích một bài toán cụ thể để thấy được những gì đã được nêu ra ở trên. Và dĩ nhiên chúng tôi để riêng phần này cho các bạn đọc muốn tiếp xúc với bất đẳng thức hiện đại, còn về thi Đại Học sẽ không xuất hiện những bài toán dạng này.

26

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ac}\le\frac{3}{8}$$

Lời giải

Chắc hẳn ngay từ đầu khi đi vào chứng minh bài toán này bạn sẽ nghĩ ngay đến việc thiết lập một bất đẳng thức phụ dạng

$$\frac{8}{9-x}\le 1+mx+n\Rightarrow\frac{8}{9-x}\le 1+m(x-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m=\frac{1}{8}$. Nhưng rất đáng tiếc với m như vậy thì bất đẳng thức trên hoàn toàn không đúng kể cả tư tưởng chia trường hợp như ở phần 3 cũng không thể áp dụng được. Thật vậy

$$\frac{8}{9-x}\le\frac{7+x}{8}\Leftrightarrow 0\le-\frac{(x-1)^2}{8(9-x)}$$

Tuy nhiên **U.C.T** vẫn có tác dụng trong trường hợp này nhưng bằng một ý tưởng mới mẻ hơn. Hãy chú ý đến cách thiết lập bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{8}{9-x}\le 1+m(x^2-1)+n(x-1) \qquad (*)$$

Việc xác định hệ số trong bất đẳng thức trên đòi hỏi sự chặt chẽ trong lập luận vì đôi khi nới lỏng miền nghiệm của biến sẽ khiến cho bài toán không đúng. Có nhiều hệ số thỏa mãn để tạo thành đại lượng bình phương $(x-1)^2$ nhưng ta phải xác định sao cho dấu của bất đẳng thức là đúng. Ta có

$$(*)\Leftrightarrow 0\le(x-1)\left(m(x+1)+n-\frac{1}{9-x}\right)\ (**)$$

Từ phân tích trên rõ ràng ta phải xác định n theo m sao cho xuất hiện nghiệm $x=1$ để hình thành đại lượng $(x-1)^2$, tức là

$$m(x+1)+n-\frac{1}{9-x}=0\Leftrightarrow n=\frac{1}{9-x}-m(x+1)\Rightarrow n=\frac{1}{8}-2m$$

Từ đây thế vào (**) ta có

$$(**)\Leftrightarrow 0\le(x-1)\left(m(x+1)-2m+\frac{1}{8}-\frac{1}{9-x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0\le(x-1)^2(72m-8mx-1)$$

Dễ thấy rằng việc xác định hệ số ở đây không còn đơn giản như trước. Nó đòi hỏi ta phải tìm ra những ước lượng chặt chẽ để bất đẳng thức không đổi chiều. Ta hãy chú ý đến điều kiện của bài toán để tìm ra ước lượng "tốt nhất". Chú ý rằng $3>\max\{ab,bc,ca\}\ge 0$ tuy nhiên đó chưa phải là đánh giá "tốt nhất" vì ta còn có thể làm chặt hơn nữa là $\frac{9}{4}\ge\max\{ab,bc,ca\}\ge 0$. Tuy nhiên đối với bài toán này thì chỉ cần sử dụng điều kiện yếu hơn mà thôi.

Đầu tiên ra đưa ra một số nhận xét sau: Đầu tiên ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức trên đúng với $\forall x\in[0,3)$. Ta thấy trường hợp $m<0$ sẽ nhận được một bất đẳng thức ngược chiều nếu cho $x=0$, tất nhiên đây là điều ta mà không mong muốn. Vậy có thể dự đoán $m\ge 0$, do đó

$$72m-1-8mx\ge 72m-1-24=48m-1$$

Ta cần có $48m\ge 1\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{48}$. Vậy nên ta sẽ dự đoán $m=\frac{1}{48}\Rightarrow n=\frac{1}{12}$.

Công việc dự đoán đã hoàn tất. Bây giờ ta sẽ thử chứng minh xem nó có đúng thật không. Và thật vậy ta có bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{8}{9-x}\le\frac{x^2+4x+43}{48}\Leftrightarrow 0\le\frac{(x-1)^2(3-x)}{48(9-x)}$$

Điều này hiển nhiên đúng

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên với các biến ab,bc,ca ta có

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ac}\le\frac{1}{48}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4ab+4bc+4ca)+\frac{43}{16}$$

Ta cần phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4ab+4bc+4ca\le 15$$

Đặt $k=ab+bc+ca$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Schur ta có

$k\le 3, abc\ge\max\left\{0,\frac{4x-9}{3}\right\}$. Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu $4x\le 9$ thì

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4ab+4bc+4ca=(ab+bc+ca)^2+4(ab+bc+ca)-6abc$$
$$=k^2+4k-6abc\le\frac{81}{16}+9=\frac{225}{16}<15$$

+ Trường hợp 2. Nếu $4x\ge 9$ thì
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4ab+4bc+4ca=(ab+bc+ca)^2+4(ab+bc+ca)-6abc$$
$$=k^2+4k-6abc\le k^2+4k-2(4k-9)$$
$$=(k-1)(k-3)+15\le 15$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Qua quá trình nhận xét và phân tích ở trên hi vọng rằng các bạn đã hiểu được cách tìm ra hệ số. Ở các bài toán sau nếu không thật sự cần thiết, việc thiết lập bất đẳng thức phụ sẽ đưa ra một cách khái quát hơn. Chúng ta hãy đến với bài toán sau:

26

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$$

Lời giải

Với $0\le x\le\frac{3}{2}$, ta luôn có
$$\frac{3}{4-x}\le\frac{2x^2+x+12}{15}\Leftrightarrow 0\le\frac{(x-1)^2(3-2x)}{15(4-x)}$$

Lại có $\max\{ab,bc,ca\}\le\sqrt{\frac{3}{2}}<\frac{3}{2}$ nên ta có
$$\frac{3}{4-ab}+\frac{3}{4-bc}+\frac{3}{4-ca}\le\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+ab+bc+ca+36}{15}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schawrz ta có
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^4+b^4+c^4=3$$
$$ab+bc+ca\le\sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\le 3$$
Cộng các các bất đẳng thức phụ trên vế theo vế ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Nhận xét. Đây là một bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ và bất đẳng thức AM-GM.

Ta có
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}\right)\ge\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8-a^2-b^2}\right)\ge\frac{2}{8-2ab}=\frac{1}{4-ab},\forall a,b\in[0,2]$$
Qui bài toán về chứng minh
$$\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}\le 1$$
Sử dụng bất đẳng thức phụ sau
$$\frac{1}{4-a^2}\le\frac{a^4+15}{18}$$
Ngoài ra ta còn có một cách khá trực quan và dễ thực hiện đó là qui đồng và sử dụng bất đẳng thức Schur.

26

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab}\le 2$$

Lời giải

Đây là một bài toán khó vì vậy việc thiết lập hệ số phải cần những đánh giá chặt chẽ và suy luận hợp lí. Chúng ta hãy cùng phân tích con đường đi đến lời giải của bài toán này.

Ta sẽ xác định hệ số m, n sao cho

$$\frac{2}{3-x} \le 1 + m(x^2-1) + n(x-1), \forall \frac{8}{3\sqrt{3}} \ge x \ge 0$$

Như đã phân tích ở trên ta tìm ra $n = \frac{1}{2} - 2m$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x-1)^2(6m-1-2mx) \ge 0$$

Dễ dàng kết luận $m \ge 0$ do đó

$$6m-1-2mx \ge 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m$$

Ta cần có

$$6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m \ge 0 \Rightarrow m \ge \frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}}$$

Do $\sqrt{3} > \frac{5}{3}$ nên ta chỉ cần có $m \ge \frac{1}{6-\frac{16}{5}} = \frac{5}{14}$

Từ đây ta sẽ chọn $m = \frac{5}{14} \Rightarrow n = -\frac{3}{14}$ từ đó ta có bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{2}{3-x} \le \frac{5x^2-3x+12}{14} \Leftrightarrow 0 \le \frac{(x-1)^2(8-5x)}{14(3-x)}$$

Điều này hiển nhiên đúng với $\frac{8}{3\sqrt{3}} > \frac{8}{5} \ge x \ge 0$.

Sử dụng bất đẳng thức phụ trên và chú ý là $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \le \frac{8}{3\sqrt{3}}$ suy ra ta cần chứng minh.

$$5(a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2)-3(abc+bcd+cda+dab) \le 8$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng nhiều cách. Sau đây xin trình bày một cách dựa vào kỹ thuật hàm lồi.

Đặt $t^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, k^2 = \frac{c^2+d^2}{2}, x = ab, y = cd$ khi đó, ta có $t^2 \ge x, k^2 \ge y$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(x) = 10x^2k^2 + 10y^2t^2 - 3x\sqrt{2y+2k^2} - 3y\sqrt{2x+2t^2} - 8$$

Ta có

$$f''(x) = 20k^2 + \frac{3y}{\sqrt{(2x+2t^2)^3}} \ge 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, do đó

$$f(x) \le \max\left\{f\left(t^2\right), f(0)\right\}$$

Ta có

$$f(0) = \left(yt\sqrt{2}+1\right)\left(5yt\sqrt{2}-8\right) \le 0 \text{ do } yt\sqrt{2} \le \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$$

$$f(t^2) = 10y^2t^2 - 6yt + 10k^2t^2 - 3t\sqrt{2y+2k^2} - 8 = g(y)$$

Tương tự như trên ta cũng có $g(y)$ là hàm lồi nên

$$g(y) \le \max\{g(k^2), g(0)\}$$

Ta cũng có

$$g(0)=\left(kt\sqrt{2}+1\right)\left(5kt\sqrt{2}-8\right)\le 0 \text{ do } kt\sqrt{2}\le \frac{8}{3\sqrt{3}}<\frac{8}{5}$$

$$g(t^2)=4(kt-1)(5kt+1)\le 0 \text{ do } kt\sqrt{2}\le \frac{k^2+t^2}{2}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.
Ngay từ ban đầu chúng tôi đã nói đây là một bất đẳng thức không dễ và đòi hỏi những đánh giá chặt chẽ. **U.C.T** ở đây đóng vai trò là một bàn đạp quan trọng để đi đến lời giải.

27

Cho các số thực a,b,c,d thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}\le \frac{16}{3}$$

Lời giải

Tương tự các bài toán trước, ta thiết lập được bất đẳng thức sau với mọi $x\le \frac{1}{2}$

$$\frac{9}{1-x}\le 32x^2+10$$

Từ đây, ta suy ra được

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}\le \frac{32}{9}(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)+\frac{40}{9}$$
$$=\frac{32}{9}(a^2+c^2)(b^2+d^2)+\frac{40}{9}$$
$$\le \frac{8}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+\frac{40}{9}=\frac{16}{3}$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\pm\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này được đặt ra để "làm mạnh" bài toán sau của Phạm Văn Thuận

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}+\frac{1}{1-ac}+\frac{1}{1-bd}\le 8$$

với cùng giả thiết như trên.
Lời giải của tác giả cho bài toán này rất dài và phức tạp, trong khi dùng **U.C.T** mở rộng ta lại có được một **Lời giải** rất ngắn gọn và đơn giản!
Ngoài ra, chúng ta còn có một cách "làm mạnh" khác cho bài toán của Phạm Văn Thuận, ta có

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}\le 8$$

Bài toán này đã được bạn ZhaoBin, một sinh viên người Trung Quốc đưa ra một **Lời giải** rất đẹp bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một **Lời giải** khác theo tư tưởng **U.C.T**. Sử dụng bất đẳng thức trong bài, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\le 6$$

Thật vậy, ta có

$$(a+b)^4=2(a^4+b^4+6a^2b^2)-(a-b)^4\le 2(a^4+b^4+6a^2b^2)$$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta suy ra được

$$VT\le 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=6$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.
Thật tự nhiên, câu hỏi sau được đặt ra, liệu bất đẳng thức sau có đúng?

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2}\le\frac{16}{3}$$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức trên lại không đúng! Các bạn chỉ cần cho $a=b=0.4$, và $c=d=\sqrt{0.84}$.

28

Cho các số không âm a,b,c,d có tổng bằng 4, chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1$$

Lời giải

Ta có thể thiết lập được bất đẳng thức sau với mọi $2\ge x>0$

$$\frac{48}{5-x}\le x^2+x+10$$

Do đó

+, Nếu $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\le 2$ thì sử dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh

$$a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+abc+bcd+cda+dab\le 8$$

Bất đẳng thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng dồn biến hoặc dùng hàm lồi.

+, Nếu $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\ge 2$, không mất tính tổng quát, giả sử $abc\ge 2$, khi đó, chú ý rằng với mọi $x,y\ge 0, x+y\le 5$, ta có

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5-x-y}-\frac{1}{5-x}-\frac{1}{5-y}=\frac{xy(10-x-y)}{5(5-x)(5-y)(5-x-y)}\ge 0$$

Suy ra

$$\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}\le\frac{1}{5-x-y}+\frac{1}{5}$$

Và do đó, với mọi $x,y,z\ge 0, x+y+z\le 5$ ta có

$$\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}+\frac{1}{5-z}\le\frac{1}{5-x-y-z}+\frac{2}{5}$$

Chú ý rằng $\sum_{cyc}(a^2b^2c^2+abc)\le 8$ và $abc\ge 2$ nên $bcd+cda+dab<5$, do đó

$$\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le\frac{1}{5-d(ab+bc+ca)}+\frac{2}{5}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-d(ab+bc+ca)}\le\frac{3}{5}$$

Đặt $x=4-d$, do $abc\ge 2$ nên $4\ge x=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\sqrt[3]{2}$, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$abc\le\frac{1}{27}x^3, ab+bc+ca\le\frac{1}{3}x^2$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{5-\frac{1}{27}x^3}+\frac{1}{5-\frac{1}{3}x^2(4-x)}\le\frac{3}{5}$$

Hay

$$f(x)=x^6-4x^5-80x^3+360x^2-675\le 0$$

Ta có

$$f'(x) = 6x^4(x-4) + 4x^3(x-12) + 48x(15-4x) < 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến, do đó

$$f(x) \le f(3\sqrt[3]{2}) = 27(48\sqrt[3]{4} - 77) < 0$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Sau một quá trình tìm hiểu và phân tích cụ thể các bài toán, chắc hẳn rằng các bạn cũng đã phần nào cảm nhận được nét đẹp của **U.C.T** dù rằng thực ra đây là một kĩ thuật cực kì đơn giản và dễ hiểu. Chúng tôi không xem **U.C.T** là một phương pháp chính thống mà đơn giản nó là một kĩ thuật cần biết và cần nắm vững khi bạn học bất đẳng thức. Nhiều người quan niệm rằng **U.C.T** không có ý nghĩa gì nhưng theo bản thân chúng tôi nó nên được khái quát để sử dụng trong một số trường hợp. **U.C.T** là một bước đệm quan trọng và đôi khi mang nhiều ý nghĩa trên con đường đi tìm lời giải cho bài toán. Một kĩ thuật hay không nhất thiết nó là nó giải được tất cả các dạng toán mà là nó phải đưa ta đến những ý tưởng, đường đi sáng sủa, dễ nghĩ, dễ nhận thấy bằng mặt trực quan.

Trong chuyên đề này nhiều bài toán hình thức cồng kềnh như USAMO 2003, JMO 1997,... đều là những bài toán không hề khó, nhưng nếu không chọn đúng hướng làm thì sẽ dẫn đến những lời giải chỉ chấp nhận đúng về mặt toán học. Đó là những bài toán cơ bản đại diện cho **U.C.T** kết hợp với kĩ thuật chuẩn hóa. Tuy nhiên đó chưa phải là điểm dừng.

Ở phần tiếp theo, xuất hiện nhiều bài toán mang đậm bản sắc hơn tức là nếu chỉ sử dụng mỗi **U.C.T** thì sẽ không đi đích. Cách khắc phục duy nhất là phân chia trường hợp để giải quyết. Đây cũng chính là cơ sở để tìm ra các khoảng nghiệm cần xét của biến. Việc đánh giá ở đây đòi hỏi ở người làm sự tinh tế và khéo léo hơn ở các phần trước. Tuy nhiên nếu bạn có niềm tin mọi chuyện đều có thể được giải quyết.

Sau khi đã nắm trong tay những kiến thức nhất định về kỹ thuật chúng ta bước qua một khoảng không gian phức tạp hơn đó là dùng **U.C.T** để giải quyết những bài toán mà điểm cực trị đạt được tại 2 chỗ. Bao gồm 2 trường hợp đó là khi tất cả các biến bằng nhau và trường hợp có $(n-1)$ biến bằng nhau nhưng khác biến còn lại. Ở đây ta chú ý đến bất đẳng thức Vornicu Schur để khắc phục nhược điểm của **U.C.T** cơ bản.

Phần kĩ thuật phân tách theo tổng của 1 cũng là một dạng rất đẹp của kỹ thuật này, một số bài toán tiêu biểu cho dạng phân tách này là IMO 2001 và một số bài toán đã nêu ở trên. Dù **U.C.T** ở đây dùng theo một tư tưởng khác với các phần trước.

Như các bạn đã biết **U.C.T** thông thường được biết đến với các bài toán mà biến số độc lập không liên quan đến nhau. Tuy nhiên nếu chỉ xét với lớp bài toán như vậy thì chưa lột tả hết nét đẹp của kĩ thuật đơn giản này. Ta vẫn có thể sử dụng **U.C.T** để tìm ra những bất đẳng thức phụ với điều kiện liên quan mật thiết với nhau. Tức là không thể tách theo đơn lượng từng biến để giải quyết. **U.C.T** ở đây đòi hỏi bạn phải có những kiến thức cơ bản của hàm số để tìm ra các ước lượng chính xác.

Cuối cùng chúng ta sẽ đã đi đến một số bài toán khó mà theo nhiều người quan niệm là không thể giải quyết bằng **U.C.T**, điều này là một điểm yếu của kỹ thuật này. Khi việc thiết lập hệ số được thắt chặt hơn thì mọi chuyện sẽ khác. Như các bạn đã thấy ở trên **U.C.T** mở rộng mang những đặc điểm phức tạp hơn nhưng hiệu quả mang lại thì quả là bất ngờ. Một số bài toán rất khó đã được đưa về dạng đơn giản hơn để giải quyết theo một số phương pháp đã biết. Đó là một nét mới khá độc đáo của kỹ thuật này. Tuy nhiên chắc hẳn đó vẫn chưa phải là **U.C.T** "chặt" nhất. Còn rất nhiều điều nữa ở kỹ thuật này chờ các bạn khám phá. Chúng tôi xin kết thúc bài viết này tại đây. Hi vọng rằng với những dòng tâm sự cùng các bạn về bất đẳng thức đã phần nào gợi mở cho các bạn một cái gì đó giúp các bạn tìm thêm những ý tưởng sáng tạo mới, những hiểu biết mới. Và hãy luôn quan niệm rằng đằng sau **Lời giải** cho mỗi bài toán là cả một quá trình dự đoán, thử, sai và đúng. Hẹn gặp lại các bạn trong một ngày không xa.

Một số bài toán áp dụng :

Bài toán 1. Cho a,b,c,d,e là các số thực không âm thỏa mãn $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^2}{1-a^3}+\frac{b^2}{1-b^3}+\frac{c^2}{1-c^3}+\frac{d^2}{1-d^3}+\frac{e^2}{1-e^3}$$

Bài toán 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$$

Bài toán 3. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}$$

Bài toán 4. Cho a,b,c là các số thực dương nhỏ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3)+1\ge 5(a^2+b^2+c^2)$$

Bài toán 5. Cho a,b,c là các số thực dương nhỏ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\le\frac{27}{10}$$

Bài toán 6. Cho $a,b,c\in(1,2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\ge 1$$

Bài toán 7. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3$$

Bài toán 8. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1+a^2}+\frac{1+b}{1+b^2}+\frac{1+c}{1+c^2}+\frac{1+d}{1+d^2}\le 4$$

Bài toán 9. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\ge 1$$

Bài toán 10. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$$

Bài toán 11. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$ ta có

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+a}}\ge\frac{a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}}{\sqrt[3]{2}}$$

Phương pháp dồn biến

Đây là một phương pháp giải toán nâng cao đối với các bài toán bất đẳng thức 3,4 biến đối xứng . Trong giải toán bất đẳng thức, một việc làm rất được quan tâm đó là giảm biến . Khi đưa bài toán về 1 biến thì công việc của chúng ta khá là đơn giản . Nhưng nếu như với phương pháp đạo hàm đã được trình bày thì việc giảm biến phải có những đánh giá khó nhận biết thì phương pháp này đánh giá dễ nhận ra hơn , nhưng khối lượng tính toán đôi khi khá là phức tạp .

Vì đây là một phương pháp nâng cao, nên chúng tôi không cố gắng trình bày một cách chi tiết các kĩ thuật của phương pháp này . Chỉ xin nếu ngắn gọn như sau :

Để chứng minh một $f(a,b,c)\ge 0$ thì ta có thể cố gắng chứng minh rằng :

+ $f(a,b,c)\ge f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$. Sau đó kiểm tra $f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\ge 0$ là đủ . Cách dồn biến này áp dụng cho các bài toán có giả thiết là $a+b+c=k$ vì cách dồn như trên luôn đảm bảo cho chúng ta tổng $a+b+c$ là không đổi

Hoặc ta có thể chứng minh $f(a,b,c)\ge f(a,b+c,0)$, hoặc $f(a,b,c)\ge f\left(a,b+\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$. Nói chung có khá nhiều cách dồn mà tùy thuộc vào các đặc điểm giả thiết hoặc đẳng thức xảy ra để tiến hành cách dồn biến thích hợp .

+ $f(a,b,c)\ge f(a,b,0)$ hoặc $f(a,b,c)\ge f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$ cách dồn biến này áp dụng khi điều kiện giả thiết cho dạng $abc=k$. Ngoài ra chúng ta cần linh hoạt để chọn cách dồn biến hợp lý

Để minh họa cho những điều vừa nói, chúng ta sẽ xét một số ví dụ điển hình.

28

Cho ba số thực không âm x,y, z chứng minh rằng $x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}$

Lời giải

Cách 1:

$x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}\Leftrightarrow x+y+z-3.\sqrt[3]{xyz}\ge 0$, đặt $f(x,y,z)=x+y+z-3.\sqrt[3]{xyz}$

Ta đi chứng minh $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$ với $t=\frac{x+y}{2}$.

Ta có $t=\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\Rightarrow t^2\ge xy$.

Suy ra $f(x,y,z)-f(t,t,z)=x+y+z-3.\sqrt[3]{xyz}-\left[2t+z-3.\sqrt[3]{t^2z}\right]=3\left(\sqrt[3]{t^2z}-\sqrt[3]{xyz}\right)\ge 0$

$$\Rightarrow f(x,y,z)\ge f(t,t,z).$$

Ta đi chứng minh $f(t,t,z)=2t+z-3.\sqrt[3]{t^2z}\ge 0$.

Ta có: $f(t,t,z)\ge 0\Leftrightarrow 2t+z\ge 3.\sqrt[3]{t^2z}\Leftrightarrow (2t+z)^3\ge 27.t^2z\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\ge 0$ (đúng).

Vậy $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)\ge 0$ (điều phải chứng minh).

Cách 2:

$x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}\Leftrightarrow x+y+z-3.\sqrt[3]{xyz}\ge 0$,

Đặt $f(x,y,z)=x+y+z-3.\sqrt[3]{xyz}$

Ta đi chứng minh $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$ với $t=\sqrt{xy}$.

Ta có $t=\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\Rightarrow 2t\le x+y$.

Suy ra $f(x,y,z)-f(t,t,z)=x+y+z-3.\sqrt[3]{xyz}-\left[2t+z-3.\sqrt[3]{t^2z}\right]=x+y-2t\geq 0$

$\Rightarrow f(x,y,z)\geq f(t,t,z)$.

Ta đi chứng minh $f(t,t,z)=2t+z-3.\sqrt[3]{t^2z}\geq 0$.

Ta có: $f(t,t,z)\geq 0\Leftrightarrow 2t+z\geq 3.\sqrt[3]{t^2z}\Leftrightarrow (2t+z)^3\geq 27.t^2z\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\geq 0$ (đúng).

Vậy $f(x,y,z)\geq f(t,t,z)\geq 0$ (điều phải chứng minh)

2

Cho ba số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)-9(ab+bc+ca)\geq 0$.

Đặt $f(a,b,c)=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)-9(ab+bc+ca)$.

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$

Ta đi chứng minh $f(a,b,c)\geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$. (tức là dồn biến $t=\sqrt{ab}$).

Ta có $f(a,b,c)-f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\left[2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.c^2+4(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-9c\right]\geq 0$

(vì $c=\min\{a,b,c\}$)

$$\Rightarrow f(a,b,c)\geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$$

hay $f(a,b,c)\geq f(t,t,c)$

Ta đi chứng minh $f(t,t,c)=\left(t^2+2\right)^2c^2-18tc+\left(2t^4-t^2+8\right)\geq 0$.

Nhận xét: $f(t,t,c)$ là tam thức bậc hai theo biến c và có: $\Delta=-(t^2-1)^2(2t^4+11t^2+32)\leq 0$.

$$\Rightarrow f(t,t,c)\geq 0$$

Vậy $f(a,b,c)\geq f(t,t,c)\geq 0$ (điều phải chứng minh). Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

2

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa abc=1. Chứng minh rằng
$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 4(a+b+c-1)$.

Lời giải

Ta đi chứng minh $f(a,b,c)\geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$. (tức là dồn biến $t=\sqrt{bc}$).

Ta có $f(a,b,c)-f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})=(a^2+bc)(b-2\sqrt{bc}+c)+a(b^2-2bc+c^2)-4(b-2\sqrt{bc}+c)$

$$=(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\left[(a+b)(a+c)+2\sqrt{a}-4\right].$$

Vì $\geq 4\sqrt[4]{ab.ac}=4\sqrt[4]{a}\geq 4$ (vì $a\geq 1$) nên $f(a,b,c)-f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})\geq 0\Rightarrow f(a,b,c)\geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$

hay $f(a,b,c)\geq f(a,t,t)$.

Ta đi chứng minh $f(a,t,t)\geq 0$. Ta có $abc=1\Leftrightarrow a\sqrt{bc}.\sqrt{bc}=1\Leftrightarrow a.t.t=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{t^2}$

$$f(a,t,t)=f\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)=\frac{t^6-4t^4+4t^3-2t+1}{t^2}=\frac{(t-1)^2\left[(t^2-1)^2+2t^3+t^2\right]}{t^2}\geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy $f(a,b,c)\geq f(a,t,t)\geq 0$ (điều phải chứng minh). Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

4

Cho 3 số thực a,b,c không âm thoả: $a+b+c+abc=4$ .Chứng minh rằng:

$$a+b+c\ge ab+bc+ca$$

Lời giải

Để ý rằng ngoài điểm đẳng thức xảy ra là a=b=c=1 đẳng thức xãy ra còn có một điểm khác là a=b=2, c=0. Điều đó gợi cho ta giả sử c=min{a,b,c}và ta dồn biến để đưa hai biến a,b về bằng nhau và bằng một số t dương nào đó.

Trước tiên ta chọn bộ số (t,t,c) phải thỏa mãn: $ab+bc+ca+abc=4$ tức là

$t^2+2tc+t^2c=4$. Suy ra $t^2+2tc+t^2c=ab+bc+ca+abc$.

Ta có: $a+b+c-ab-bc-ca\ge 0$, đặt $f(a,b,c)=a+b+c-ab-bc-ca$

+ Trước tiên ta chứng minh: $f(a,b,c)\ge f(t,t,c)\Leftrightarrow a+b+c-ab-bc-ca\ge 2t+c-t^2-2tc$

$$\Leftrightarrow (a+b-2t)(1-c)+(t^2-ab)\ge 0 \text{ (*)}$$

Mặt khác: $t^2+2tc+t^2c=ab+bc+ca+abc\Leftrightarrow c(a+b-2t)=(c+1)(t^2-ab)$ (**)

Ta chứng minh $a+b-2t, t^2-ab$ là những số không âm.

Giả sử $a+b-2t<0$, từ (**) suy ra $t^2-ab<0\Rightarrow t^2<ab$. Khi đó ta có : $t>\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow t^2>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge ab$.

Suy ra $ab>ab$ vô lí. Vậy $a+b-2t, t^2-ab$ là những số không âm. Suy ra (*) đúng.

Hay $f(a,b,c)\ge f(t,t,c)$

Bây giờ ta đi chứng minh: $f(t,t,c)\ge 0$ hay $2t+c-t^2-2tc\ge 0$.

Từ $t^2+2tc+t^2c=4$ suy ra $c=\dfrac{2-t}{t}\ge 0$.

Khi đó $2t+c-t^2-2tc=\dfrac{(2-t)(t-1)^2}{t}\ge 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

5

Cho a,b,c là các số thực sao cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+6abc\ge -3$$

Lời giải

Khi giải bài toán này , chúng ta sẽ rất ngại bởi vì điều kiện ở đây là các số thức , chính điều này dẫn đến việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển trở nên khá khó khăn .Một điều nữa là chúng ta lại gặp một bất đẳng thức không đồng bậc, đương nhiên là chúng ta sẽ có thể đồng bậc hóa nhưng mà bất đẳng thức mới nhận được rất khó để chứng minh . Lúc này phương pháp dồn biến trở nên khá tiện dụng .

Nhưng mà một vấn đề gặp phải là ta chưa xác định được tính âm dương của các biến . Nhưng đừng lo, ta sẽ xét từng trường hợp, công việc này hết sức đơn giản .

Do $a+b+c=0$ nên ta cần xét các trường hợp sau :

TH1 : Tồn tại ít nhất một trong 3 số bằng 0. Lúc này bất đẳng thức là hiển nhiên .

TH2 :Tích $abc>0$ lúc này bất đẳng thức của chúng ta cũng hiển nhiên

TH3 :Có một số âm và 2 số còn lại đều dương .

Đây là trường hợp chính cần giải quyết .

Không mất tính tổng quát giả sử $c<0$ khi đó đặt $c'=|c|$

Xét hàm số $f(a,b,c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+6abc+3=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-6abc'+3$

Xét hiệu

$$f(a,b,c)-f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c)=c^2\left[a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{2}\right]+a^2b^2-\frac{(a+b)^4}{16}+6c'\left[\frac{(a+b)^2}{4}-ab\right]$$

$$=\frac{(a-b)^2}{4}\left\{c'^2+3c'-\frac{1}{2}\left[ab+\frac{(a+b)^2}{4}\right]\right\}$$

Thay $c' = a+b$ ta có ngay được $f(a,b,c) \ge f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c)$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c) = f(\frac{-c}{2}, \frac{-c}{2}, c) \ge 0$

Đây là bất đẳng thức một biến khá đơn giản . Phép chứng minh được kết thúc .

6

> Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ .Chứng minh rằng:
> $$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \le 27$$

<u>Lời giải</u>

Đặt $f(a,b,c) = (a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$. Bây giờ ta sẽ đi chứng minh khẳng định sau :

$$f(a,b,c) \ge f(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c)$$

Bằng biến đổi tương đương thì điều này tương đương với việc chỉ ra rằng :

$$(a-b)^2[(a+b)^2+4(a+b)+4ab-4] \ge 0$$

Muốn có điều này đúng thì ta phải giả sử rằng $c = \min(a,b,c)$.

Lúc này ta có : $a+b \ge 2 \Rightarrow (a+b)^2 \ge 4$ .Nên suy ra : $(a+b)^2+4(a+b)+4ab-4 \ge 0$

Bây giờ ta cần chứng minh $f\left(\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}, c\right) \ge 0$ với $c \in (0;1)$

Bằng khảo sát hàm số một biến ta có ngay điều phải chứng minh .

> Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng
> $$\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right) \le 13+abc.$$

<u>Lời giải</u>

Với bài toán này, nhiều bạn mắc sai lầm khi chỉ xét $a \ge b \ge c$ mà không xét trường hợp ngược lại Điều này không đúng vì đây là bất đẳng thức hoán vị . Nhưng thực tế ta cũng chỉ xét mỗi trường hợp này nhờ có bổ đề sau :

Bổ đề. Với $a \ge b \ge c$ thì $\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right) \ge \left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right).$

Thật vậy, ta sử dụng 2 đẳng thức sau: $\begin{cases} a^3b+b^3c+c^3a-\left(ab^3+bc^3+ca^3\right) = (a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c) \\ a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-\left(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\right) = (ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a) \end{cases}$

Vì $a+b+c=3$ nên ta có

$$a+b+c-(ab+bc+ca) = \frac{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)}{3}$$
$$= \frac{1}{6}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \ge 0.$$

Suy ra

$$a^3b+b^3c+c^3a-\left(ab^3+bc^3+ca^3\right) \ge a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-\left(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\right)$$
$$\Rightarrow \left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right) \ge \left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right) \text{ (dpcm).}$$

Từ nhận xét trên, ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $a \ge b \ge c.$ Gọi $f(a,b,c)$ là biểu thức vế trái của bất đẳng thức, ta có

$$f(a,b,c) = \left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right) - abc = a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2,$$

Khi đó

$$f(a,b,c)-f(a+c,b,c)=a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2-(a+c)^3b-(a+c)^2b^3$$
$$=b^3c+c^3a+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2-3a^2bc-3ac^2b-2acb^3-c^2b^3.$$

Do $a\ge b\ge c$ nên $b^3c\le acb^3, c^3a\le ac^2b, b^2c^3\le c^2b^3$.

Vì thế để chứng minh $f(a,b,c)\ge f(a+c,b,0)$ ta chỉ cần chứng minh tiếp $c^2a^3+a^2b^2c^2\le 3a^2bc$.

Nhưng điều này hiển nhiên đúng vì dễ thấy

$$3a^2bc-c^2a^3-a^2b^2c^2\ge bca^2(3-a-bc)=bca^2(b+c-bc)\ge 0.$$

Vậy $f(a,b,c)\ge f(a+c,b,0)=(a+c)^2b(a+c+b^2)$.

Công việc còn lại của chúng ta là chứng minh bất đẳng thức 2 biến: $x^2y(x+y^2)\le 13\ \forall x,y\ge 0, x+y=3$.

Thay vế trái bằng biểu thức x, ta có

$$f(x)=(9+x^2-5x)(3x^2-x^3)\le\frac{1}{4}(-x^3+4x^2-5x+9)^2$$
$$-x^3+4x^2-5x+9=(x-1)^2(2-x)+7\le 7+\frac{4}{27}.$$

Từ đó suy ra $f(x)\le 13$, đpcm.

8

Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tính giá trị nhỏ nhất của:

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$P=a(1+b^2+c^2)+b(1+a^2+c^2)+c(1+a^2+b^2)$$
$$\left(\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\right)P\ge(a+b+c)^2.$$

Xét biểu thức:

$$S_{a,b,c}=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$

Ta sẽ chứng minh $S_{a,b,c}\le\frac{1}{4}$. Thật vậy không mất tính tổng quát giả sử $c\ge b\ge a$.

Xét biểu thức

$$S_{a,b,c}-S_{a+b,c,0}=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-(a+b)^2c-c^2(a+b)$$
$$=ab(a+b-2c)\le 0.$$

Mặt khác:

$$S_{a+b,c,0}=(a+b)c(a+b+c)=(a+b)c\le\frac{1}{4}(a+b+c)^2=\frac{1}{4}.$$

Như vậy $P=a+b+c+S_{a,b,c}\le\frac{5}{4}$. Suy ra:

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\ge\frac{4}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=\frac{1}{2}, a=0$ hoặc các hoán vị

9

Chứng minh rằng nếu x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$ thì ta có bất đẳng thức: $7(xy+yz+zx)\le 12+9xyz$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z$.

Đặt $f(x,y,z)=7(xy+yz+zx)-9xyz=(7-9z)xy+7z(x+y)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x,y,z)\le f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},z\right).$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(7-9z)\left(xy-\frac{x^2+y^2}{2}\right)+7z(x+y)-\sqrt{2(x^2+y^2)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (9z-7)(x-y)^2\le\frac{14z(x-y)^2}{x+y+\sqrt{2(x^2+y^2)}}.$$

Do $x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$ nên ta cần phải chứng minh

$$(9z-7)\sqrt{2(x^2+y^2)}\le 7z\Leftrightarrow\left(9-\frac{7}{z}\right)\sqrt{2(3-z^2)}\le 7.$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $z\le 1$ nên $9-\frac{7}{z}\le 2$ và $\sqrt{2(3-z^2)}\le\sqrt{6}$.

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh bài toán khi $x=y$, nói cách khác là chứng minh

Với $t=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ thì $7(t^2+2zt)\le 12+9t^2z$.

Thay $z=\sqrt{3-2t^2}$ ta có bất đẳng thức $9t^2\sqrt{3-2t^2}-7t^2-14t\sqrt{3-2t^2}+12\ge 0$.

Đặt $r=\frac{1}{t^2}$ ta phải chứng minh

$$9\sqrt{3-\frac{2}{r}}-7-14\sqrt{3r-2}+12r\ge 0.$$

Công việc của chúng ta bây giờ là khảo sát hàm số trên,công việc này khá đơn giản.

Bình luận: Với điều kiện $x^2+y^2+z^2=k$ thì phép dồn biến trên bảo toàn được điều kiện. Như vậy bài tập của các bạn khi đọc đến đây đó là liệt kê ra các cách dồn biến tương ứng với từng cách cho điều kiện của bài làm Nhưng xin lưu ý cho là không có gì là tuyệt đối ở đây cả.

10 Chứng minh rằng với các số thực không âm a,b,c có tổng bằng 2 ta có bất đẳng thức

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\le 3.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a\ge b\ge c$.

Đặt $t=\frac{a+b}{2}\le 1,u=\frac{a-b}{2}$ Khi đó $a=t+u,b=t-u$ và ta sẽ chứng minh

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\le 3t^2(t^2+tc+c^2)^2 \qquad (*)$$

Thật vậy, ta có $a^2+ab+b^2=2t^2+2u^2+t^2-u^2=3t^2+u^2$

$$(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$$

$$=a^2b^2+abc(a+b+c)+c^4+c^2(a^2+b^2)+c^3(a+b)$$

$$=(t^2-u^2)^2+c(2t+c)(t^2-u^2)+c^4+2c^2(t^2+u^2)+2tc^3$$

$$=t^4+2tc(t^2+c^2)+3t^2c^2+c^4-u^2(2tc-c^2+2t^2-u^2).$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{3t^2}{a^2+ab+b^2}-1\ge\frac{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}{(t^2+tc+c^2)}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3t^2+u^2}\le\frac{2tc+2t^2-c^2-u^2}{(t^2+tc+c^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow(t^2+tc+c^2)^2\le(3t^2+u^2)(2tc+2t^2-c^2-u^2)$$

$$\Leftrightarrow t^4+3t^2c^2+c^4+2tc(t^2+c^2)\le 6t^2+6t^3c-3c^2t^2-u^2(t-c)^2-u^4$$

$$\Leftrightarrow 5t^4+4t^3c-6t^2c^2-2tc^3-c^4\ge u^2(t-c)^2+u^4.$$

Bởi vì $t\ge c,u$ nên ta có $5t^4+4t^3c-6t^2c^2-2tc^3-c^4\ge 5t^4-5t^2c^2=5t^2(t-c)(t+c)$

$$\ge 5(t-c)t^3\ge 2(t-c)^4\ge u^2(t-c)^2+u^4.$$

Và do đó $(*)$ được chứng minh. Cuối cùng ta sẽ chứng minh nếu $2t+c=2$ thì

$$3t^2(t^2+tc+c^2)\le 3\Leftrightarrow t(t^2+tc+c^2)\le 1.$$

Thay $c=2-2t$ vào bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh

$$(1-t)(1-3t+3t^2)\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

11

Chứng minh với mọi số thực không âm a,b,c ta luôn có

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge 4(a-b)(b-c)(c-a).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\ge 8(a-b)(b-c)(c-a)\quad(1)$$

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử $c=\min(a,b,c)$. Cố định các hiệu $a-b,b-c,c-a$ và giảm a,b,c cùng đi một lượng c (tức là thay a,b,c bởi a-c, b-c, 0) thì rõ ràng a-b, a-c, b-c không thay đổi còn a+b+c giảm đi. Vậy vế trái của (1) thì giảm đi còn vế phải của (1) thì không đổi. Do đó ta chỉ cần chứng minh bài toàn trong trường hợp $a,b\ge c=0$. Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$a^3+b^3\ge 4ab(b-a),$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$4a(b-a)\le b^2\Rightarrow 4ab(b-a)\le b^3\le a^3+b^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❑

Bài toán trên khá đơn giản nhưng thể hiện được rất rõ tư tưởng của phép chứng minh. Điểm cần chú ý nhất của lời giải này là nhận xét, nếu giảm các biến a,b,c đi cùng một lượng nhỏ hơn $\min(a,b,c)$ thì một vế không đổi, còn một vế thì giảm đi. Nhận xét được chứng minh rất dễ, vì bậc (xấp xỉ 0) của $(a-b)(b-c)(c-a)$ là 3 còn bậc (xấp xỉ) của $(a+b+c)\left((a-c)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$ bằng 2.

12

Chứng minh rằng nếu a,b,c không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Bây giờ ta sẽ dồn biến sao cho đảm bảo được điều kiện của bài toán. Để có được như vậy thì ta phải

Chọn số $t > 0$ sao cho:

$$t^2 + 2tc = ab + bc + ca = 1 \Rightarrow (t+c)^2 = (a+c)(b+c) = 1 + c^2.$$

Ta sẽ chứng mih

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge \frac{2}{t+c} + \frac{1}{2t}.$$

Dễ thấy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+c}} - \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2 \ge \frac{\left(\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}\right)^2}{2t(a+b)} \Leftrightarrow (a+c)(b+c) \le 2t(a+b).$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $a \ge t \ge b \ge c$. Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán khi $a = b \ge c$. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{2}{t+c} + \frac{1}{2t} \ge \frac{5}{2}$$

Với $2tc + t^2 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1-t^2}{2t}$.

Thay c vào bất đẳng thức trên rồi quy đồng mẫu số, bất đẳng thức trở thành $(1-t)(5t^2 - 4t + 1) \ge 0$, hiển nhiên đúng vì $t \le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị

13

Cho $a, b, c \ge 0$. CMR: $a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \ge \frac{27}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

Lời giải

Các bài toán trong những ví dụ chúng ta xét đến đều là các bất đẳng thức đối xứng với các biến và vì thế nên việc chứng minh bất đẳng thức điều kiện không phải là vấn đề quá khó khăn. Tuy nhiên không phải bao giờ cũng thế (nhất là với các bất đẳng thức hoán vị), như trong ví cụ này, việc chứng minh bất đẳng thức điều kiện sẽ là một công việc hết sức phức tạp khi các bạn thực hiện phép dồn biến về thông thường. Trong những trường hợp như thế này thì phương pháp dồn biến toàn miền sẽ là một sự lựa chọn hữu dụng. Ý tưởng chính của phương pháp này là sẽ đồng thời gia giảm các biến số đi một lượng nào đó và triệt tiêu một số biến về 0, khi đó số biến sẽ giảm đi và việc chứng minh còn lại đơn giản hơn rất nhiều so với bài toán ban đầu, để hiểu rõ hơn vấn đề này ta sẽ cùng đi tìm lời giải cho ví dụ trên.

Lời giải 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(a^2+b^2+c^2)\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right] \ge \frac{27}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a,b,c\}$.

Ta nhận thấy rằng nếu ta giảm cả 3 biến đi một lượng $0 \le x \le c$ thì ta có

$$\frac{27}{4}[(a-x)-(b-x)]^2[(b-x)-(c-x)]^2[(c-x)-(a-x)]^2 = \frac{27}{4}(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Tức là vế phải của bất đẳng thức không đổi, trong khi đó thì:

$$\begin{aligned}&[(a-x)^2+(b-x)^2+(c-x)^2]\left\{\left[(a-x)^2-(b-x)^2\right]^2+\left[(b-x)^2-(c-x)^2\right]^2+\left[(c-x)^2-(a-x)^2\right]^2\right\}\\ &=\left[(a-x)^2+(b-x)^2+(c-x)^2\right]\left[(a-x)^2(a+b-2x)^2+(b-c)^2(b+c-2x)^2+(c-a)^2(c+a-2x)^2\right]\\ &\le(a^2+b^2+c^2)\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa vế trái của bất đẳng thức sẽ giảm đi. Từ 2 điều trên ta đi đến việc chứng minh bất đẳng thức với $c = 0$ (tức ta đã giảm cả 3 biến đi một lượng $x = c$).

Với $c = 0$, bất đẳng thức cần chứng minh là:

$$a^6+b^6\ge\frac{27}{4}a^2b^2(a-b)^2 \text{ với } a,b\ge0$$

Bất đẳng thức trên tương đương: $a^6+b^6+\frac{27}{2}a^3b^3\ge\frac{27}{4}a^4b^2+\frac{27}{4}a^2b^4$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^6+\frac{27}{8}a^3b^3+\frac{27}{8}a^3b^3\ge3\sqrt[3]{a^6\left(\frac{27}{8}a^3b^3\right)^2}=\frac{27}{4}a^4b^2 \quad (1)$$

$$b^6+\frac{27}{8}a^3b^3+\frac{27}{8}a^3b^3\ge3\sqrt[3]{b^6\left(\frac{27}{8}a^3b^3\right)^2}=\frac{27}{4}b^4a^2 \quad (2)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$.
Như đã thấy ở ví dụ trên, khi ta gia giảm toàn bộ các biến cùng một lượng thì VT giảm dần còn VP không đổi, trong nhiều trường hợp khác, khi thực hiện phương pháp dồn biến toàn miền thì thậm chí ta còn có những nhận xét hơn là cả 2 vế cùng thay đổi, các bạn sẽ gặp phải các trường hợp đó trong phần bài tập cuối bài viết.

Có thể thấy rằng việc sử dụng phương pháp dồn biến toàn miền đã giải quyết bài toán một cách rất đơn giản và đẹp mắt. Đặc điểm nhận dạng những bài toán sử dụng phương pháp này là khi có sự chênh lệch giữa các đại lượng xấp xỉ bằng 0, một cách trực quan thì với các bài toán ba biến các bạn có thể hiểu là sự xuất hiện của các đại lượng đặc biệt $(a-b)(b-c)(c-a)$, chính điều này là chìa khóa để chúng ta giải quyết được bài toán bằng phương pháp dồn biến toàn miền. Nếu không sử dụng phương pháp này mà "chăm chỉ" theo lối "cày bừa" thì khó khăn chúng ta gặp phải quả thật rất lớn, bởi bất đẳng thức tương đương khi khai triển 2 vế là:

$$4\left(a^6+b^6+c^6\right)+54\sum_{cyc}^{a,b,c}a^4bc+54\sum_{cyc}^{a,b,c}a^3b^3+150a^2b^2c^2\ge27\sum_{sym}^{a,b,c}a^4b^2+54\sum_{sym}^{a,b,c}a^3b^2c$$

Nhìn rất "khủng khiếp" và thậm chí rất dễ gây nhầm lẫn.

Qua các ví dụ trên, ta thấy rằng "dường như" tất cả các bất đẳng thức đều xảy ra dấu đẳng thức khi một số biến bằng nhau. Quả thật thì chúng ta gặp điều đó quá nhiều và đôi khi khiến ta lầm tưởng rằng nó luôn phải như vậy. Nhưn trong thế giới muôn màu của bất đẳng thức còn bao nhiêu điều thú vị, ở đó có (và thậm chí là nhiều) những bất đẳng thức mà dấu đẳng thức xảy ra khi các biến … đôi một khác nhau. Để rõ hơn về điều này chúng ta cùng đi đến ví dụ sau đây:

14

Cho $a,b,c\in\left[\frac{1}{3};3\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{7}{5}$$

Lời giải

(Lời giải sau đây lấy theo ý của tác giả Vasile Cirtoaje)

Đặt $f(a,b,c)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\}$

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(a,b,c)\ge f\left(a,\sqrt{ac},c\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{a}{a+\sqrt{ac}}+\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}\geq \frac{a}{a+\sqrt{ac}}+\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}\geq \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$$

$$\Leftrightarrow (b-\sqrt{ac})^2(\sqrt{c}-\sqrt{a})\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $a = \min\{a, b, c\}$.

Giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$f(a,\sqrt{ac},c)\geq \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{c}{c+a}\geq \frac{7}{5}$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ thì $x\in[1,3]$ do $a,b,c\in\left[\frac{1}{3},3\right]$ và $a=\min\{a,b,c\}$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{x^2}{x^2+1}\geq \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{-2x^3+8x^2-7x+3}{5(x+1)(x^2+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3-x)(2x^2-2x+1)}{5(x+1)(x^2+1)}\geq 0 \text{ (Đúng do } x\in[1,3])$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn tất. Dấu bằng thức xảy ra khi

$$(a,b,c)=\left\{\left(\frac{1}{3},1,3\right),\left(3,\frac{1}{3},1\right)\left(1,3,\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Trên đây là một bài toán khá đặc biệt khi dấu đẳng thức xảy ra rất lệch nhau, và càng bất ngờ hơn nữa khi ta có thể giải nó bằng phương pháp dồn biến. Nhưng hãy suy cẩn trọng một chút, có thể bạn vừa nhận thấy một điều lạ lùng trong phép chứng minh trên. Trong các ví dụ mà chúng ta vừa xét trước đó, ta cố gắng "ép" cho hai biến lại gần nhau hoặc "đẩy" một biến ra biên, quan trọng hơn là trong các đánh giá của chúng ta phải bảo toàn điều mối liên hệ giữa các biến số (tổng, tích, tổng bình phương, ...), nhưng trong bài toán bạn vừa đọc, ta lại dồn biến theo một cách khá "khó hiểu" khi cố "ép" *b* tiến đến $\sqrt{ac}$, điều này hoàn toàn không đảm bảo một mối liên hệ nào về tổng, tích hay tổng bình phương ... của a, b, c và phải chăng ta đã vi phạm quy tắc dồn biến ?!?!

Hãy dừng lại một chút để suy ngẫm, việc dồn biến như vậy không có gì là khó hiểu cả. Thật vậy, sau khi đoán nhận được dấu đẳng thức của bài toán là $(a,b,c)=\left(\frac{1}{3},1,3\right)$, nếu tinh ý ta sẽ nhận thấy mối liên hệ giữa a, b, c đó là $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=3$ và $b=\sqrt{ac}$. Bây giờ ta thực hiện phép đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}$ thì bất đẳng thức ban đầu sẽ đạt dấu đẳng thức tại $x=y=3,z=\frac{1}{9}$. Đến đây chắc các bạn đã hiểu ra mấu chốt vấn đề, thực chất việc "ép" cho *b* tiến đến $\sqrt{ac}$ chính là việc dồn biến về tâm ("ép" cho $x=y$) và điều này hoàn toàn đảm bảo các quy tắc của dồn biến. Ví dụ trên cho ta một cách suy nghĩ thoáng hơn về dồn biến, khi mà đa số các bạn khi sử dụng phương pháp này đều khá máy móc trong việc lựa chọn phương pháp để bảo toàn các điều kiện của biến số.

Để tránh tư tưởng dồn biến đối với bài toán này ta còn một cách giải khác như sau:

Đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}$. Thế thì $xyz=1$ và $x,y,z\in\left[\frac{1}{9},9\right]$.

Bất đẳng thức đã cho viết lại thành: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq\frac{7}{5}$

Bất đẳng thức trên là đối xứng với x,y,z nên ta có thể giả sử $x=\min\{x,y,z\}$, thế thì $x\in\left[\frac{1}{9},1\right]$.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau với $yz \geq 1$:

$$\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{yz}}=\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

(Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương $\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{yz}-1\right) \geq 0$ (đúng))

Đặt $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$ vậy ta quy bài toán về việc chứng minh $\frac{2}{a+1}+\frac{a^2}{a^2+1} \geq \frac{7}{5}$ như cách giải trên.

(Ta cũng có $a \in [1,3]$ do $x \in \left[\frac{1}{9},1\right]$)

Bài toán được chứng minh hoàn tất. Dấu bằng thức xảy ra khi

$$(a,b,c)=\left\{\left(\frac{1}{3},1,3\right),\left(3,\frac{1}{3},1\right)\left(1,3,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

Để kết thúc chương này, xin được dẫn ra một ví dụ có thể nói là "kinh điển" của phương pháp dồn biến. Bài toán sau đây có thể đã là rất quen thuộc đối với nhiều người và cách giải chúng cũng đã xuất hiện ở rất nhiều tài liệu khác nhau. Người viết xin được trích dẫn chúng ra và mong rằng các bạn sẽ bình tĩnh để đọc – suy ngẫm – thấu hiểu hết nét tinh túy trong bài toán này. Tuy nhiên chúng tôi không yêu cầu các bạn phải hiểu lời giải bài toán này nhưng đôi lúc vượt qua giới hạn của bản thân là một điều nên làm.

15

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2}$$

Lời giải

Đây thực sự là một bài toán rất khó đối với những ai chưa được tiếp xúc từ trước (và thậm chí nó vẫn rất khó với những người đã xem qua **Lời giải**). Thật khó tưởng tượng khi biết rằng Max $P=\frac{11\sqrt{33}-45}{24}$ đạt được khi $a=b=\frac{\sqrt{33}-3}{2}, c=6-\sqrt{33}$ cùng các hoán vị. Điều này khá là ngạc nhiên bởi lẽ thông thường các bất đẳng thức chúng ta gặp phải hoặc có dấu đẳng thức tại tâm hoặc tại một số biến đạt giá trị ở biên. Nếu như chúng ta chỉ sử dụng các phương pháp dồn biến thông thường thì rất khó để có thể đánh giá được điểm rơi của dấu đẳng thức mà phải sử dụng phương pháp tinh tế hơn nhiều. Đây là lúc mà kĩ thuật dồn biến bằng hàm số được phát huy được khả năng của nó. Trước tiên để các bạn có thể làm quen và nắm bắt với kĩ thuật này xin được nêu lên ý tưởng chính như sau: chẳng hạn khi muốn thực hiện phép dồn biến và dẫn đến việc cần chứng minh bất đẳng thức $f(a,b,c) \geq f(t,t,c)$ với t là một đại lượng trung bình thích hợp sinh ra từ mối liên hệ giữa các biến số, ta sẽ xem xét hàm số $g(s)=f(t+s,t-s,c)$ và chứng minh rằng $g(s)$ là hàm tăng và khi đó thì ta sẽ có $g(s) \geq g(0)$ và ta suy ra được rằng $f(a,b,c) \geq f(t,t,c)$ (điều phải chứng minh). Tuy rằng ý tưởng xem qua tưởng chừng như rất đơn giản nhưng để có thể nắm vững và vận dụng một cách thành thục kỹ thuật này thì đòi hỏi các bạn phải có một quá trình dài khổ luyện chứ không thể vận dụng được ngay trong một sớm một chiều.

Lời giải cho bài toán sau đây của anh Phan Thành Nam đặc trưng cho kỹ thuật dồn biến bằng hàm số với những kết quả tính toán hết sức điêu luyện và không kém phần "khủng khiếp".

Lời giải chi tiết

Không làm mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a=s+t$, $b=s-t$ với $t \in [0,s-c]$ (Vì $a \geq b \geq c$)

Xét hàm số $f(t)=\frac{c(s-t)}{3+(s+t)^2}+\frac{c(s+t)}{3+(s-t)^2}+\frac{s^2-t^2}{3+c^2}$ với $t \in [0,s-c]$.

Ta có $f'(t)=\frac{-c}{3+(s+t)^2}-\frac{2c(s^2-t^2)}{\left[3+(s+t)^2\right]^2}+\frac{c}{3+(s-t)^2}+\frac{2c(s^2-t^2)}{\left[3+(s-t)^2\right]^2}+\frac{2t}{3+c^2}$

Đặt $u=3+(s+t)^2$ và $v=3+(s-t)^2$ ta có $f'(c)=\frac{4cst}{uv}+\frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2}-\frac{2t}{3+c^2}$

Ta cũng có $a+b=2s\Rightarrow s\in[1;1,5]$ (do giả sử $a\geq b\geq c$)

$$\Rightarrow cs=(3-2s)\leq\frac{(3-2s+s)^2}{4}=\frac{(3-s)^2}{4}\leq\frac{(3-1)^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$$

Mặt khác ta có $u=3+(s+t)^2\geq 3+(1+0)^2=4$ và

$v=3+(s-t)^2\geq 3+[s-(s-c)]^2=3+c^2$ (do $c\in[0,s-c]$)

Từ các điều kiện trên ta suy ra: $\frac{4cst}{uv}\leq\frac{1}{3+c^2}$ (*)

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$u^2v^2=\left[3+(s+t)^2\right]^2\left[3+(s-t)^2\right]\geq 4^4(s^2-t^2)\ (1)$$

$$8cs(u+v)(3+c^2)=4.4cs(3+s^2+t^2)(3+c^2)\leq 4\left(\frac{4cs+3+s^2+t^2+3+c^2}{3}\right)^3$$

Mặt khác ta có:

$$4cs+3+s^2+t^2+3+c^2\leq 4(3-2s)s+6+s^2+(3s-3)^2+(3-2s)^2=12+6(s-1)(s-2)\leq 12$$

(Do $c=3-2s$ và $t^2\leq s-c=3s-3$)

Từ đó suy ra $8cs(u+v)(3+c^2)\leq 4\left(\frac{12}{3}\right)^3=4^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{8cst(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2}=\frac{8cs(u+v)(3+c^2)}{(3+c^2)}\cdot\frac{(s^2-t^2)}{u^2v^2}\leq\frac{(s^2-t^2)}{4^4(s^2-t^2)}\cdot\frac{4^4}{(3+c^2)}=\frac{1}{3+c^2}\ (**)$$

Từ (*) và (**) ta có: $f'(t)\leq\frac{2}{3+c^2}-\frac{2t}{3+c^2}=\frac{2}{3+c^2}(1-t)\leq 0\ \forall t\in[0,s-c]$

Vậy f(t) là hàm nghịch biến trên $[0,s-c]$ suy ra $f(t)\leq f(0)\ \forall t\in[0,s-c]$

Giờ ta chỉ cần tìm Max $g(s)=f(0)=\frac{2cs}{3+s^2}+\frac{s^2}{3+c^2}=\frac{3s(3-2s)}{3+s^2}+\frac{s^2}{3+(3-2s)^2}$ trên $[0;1,5]$. Ta có

$$g'(s)=\frac{(6-8s)(3+s^2)-2s(6s-4s^2)}{(3+s^2)^2}+\frac{2s\left[3+(3-2s)^2\right]-s^2(8s-12)}{\left[3+(3-2s)^2\right]^2}$$

$$=\frac{108(s^2-3s+4)(s-1)^2(-s^2-3s+6)}{(3+s^2)^2\left[3+(3-2s)^2\right]^2}$$

Ta thấy: $s^2-3s+4=(s-1,5)^2+1,75>0\quad\forall s\in[0;1,5]$ và $-s^2-3s+6=\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}-s\right)\left(\frac{\sqrt{33}+3}{2}+s\right)$

Lập bảng biến thiên ta thấy ngay Max $g(s)=\frac{11\sqrt{33}-45}{24}$ khi $s=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$.

Vậy Max $p=\frac{11\sqrt{33}-45}{24}$ xảy ra khi $a=b=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$, $c=6-\sqrt{33}$ cùng các hoán vị.

Chúng tôi rất mong nhận được thêm những lời giải hay cho bài toán này từ phía bạn đọc.

3. Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \le \frac{1}{32}$$
Bài 2. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:
$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \ge 5(a + b + c)$$
Bài 3. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$. Chứng minh rằng:
$$a + b + c + 3abc \ge 6$$
Bài 4. Cho $a, b, c, d \ge 0$ thỏa mãn $(a - b)(c - d) \le 0$. Chứng minh rằng:
$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \ge 17(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)$$
Bài 5. Cho $a, b, c \in R$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc \ge 6\sqrt{2}(a - b)(b - c)(c - a)$$
Bài 6. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$abc + \frac{12}{ab + bc + ca} \ge 5$$
Bài 7. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 48(ab + bc + ca) \ge 25$$
Bài 8. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 9 \ge 10(a^2 + b^2 + c^2)$$
Bài 9. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \ge \frac{3}{2}$$
Bài 10. Cho $a, b, c, d \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:
$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \ge 16$$
Bài 11. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:
$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \ge 10(a + b + c)$$
Bài 12. Cho $a, b, c \in R$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^3 + b^3 + c^3) + 18 \ge 9(a^2 + b^2 + c^2)$$
Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \ge \frac{5}{2}$$
Bài 14. Cho $a, b, c \ge 0$ và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \ge \frac{10}{(a + b + c)^2}$$

Bài 15. Cho $a, b, c \ge 0$ và chỉ có tối đa một số bằng 0. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{\sqrt{a + b}} + \frac{b}{\sqrt{b + c}} + \frac{c}{\sqrt{c + a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a + b + c}$$
Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{3 + a^2 + b^2} + \frac{1}{3 + b^2 + c^2} + \frac{1}{3 + c^2 + a^2} \le \frac{3}{5}$$
Bài 17. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
$$2(a^3 + b^3 + c^3) + a^2 + b^2 + c^2 + 13abc \ge 1$$
Bài 18. Cho $a, b, c, d \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd + cda + dab \ge 8$$
Bài 19. Cho $a, b, c \in R$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:
$$3(a^3b + b^3c + c^3a) + 16(ab + bc + ca) \le 57$$
Bài 20. Cho $a, b, c, d \ge 0$. Chứng minh rằng:
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abcd + 1 \ge ab + bc + cd + da + ac + ad$$

Dùng nguyên lý Drichle để giải toán Bất Đẳng Thức

Như ta đã biết về nguyên lí thú vị này, nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một con thỏ.

Từ đó ta có: muốn nhốt 3 chú thỏ vào 2 cái lồng thì có ít nhất một chiếc lồng có ít nhất 2 chú thỏ. Sự liên qua ở đây chính là: **Trong 3 số x,y,z bất kì, luôn có ít nhất 2 số cùng dấu (có tích không âm).**

Cách sử dụng: Khi đã dự đoán điểm rơi $a=b=c=k$ trong BĐT đối xứng 3 biến, ta sẽ có: trong ba số $a-k, b-k, c-k$ có ít nhất 2 số có tích không âm, giả sử là $a-k$ và $b-k$. Khi đó:

$$(a-k)(b-k)\ge 0$$

Bắt đầu từ đây ta sẽ đi tiếp!

1

[IMO 1984] Cho a,b,c là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$$

Lời giải

Bài toán số 8 trong phần về BĐT Schur, và bây giờ sử dụng nguyên lí Dirichlet như sau:

Trong 3 số $x-\frac{1}{3};y-\frac{1}{3};z-\frac{1}{3}$ có ít nhất 2 số có tích không âm. Giải sử đó là $x-\frac{1}{3}$ và $y-\frac{1}{3}$ khi đó:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)\ge 0\Rightarrow xy+\frac{1}{9}\ge\frac{1}{3}(x+y)\Rightarrow xyz+\frac{z}{9}\ge\frac{1}{3}z(x+y)\Rightarrow -2xyz\le\frac{2z}{9}-\frac{2}{3}z(x+y)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx-2xyz\le\frac{2}{9}z+\frac{1}{3}z(x+y)+xy$$

Mà ta có:

$$\frac{2}{9}z+\frac{1}{3}z(x+y)+xy\le\frac{2}{9}z+\frac{1}{3}z(x+y)+\frac{(x+y)^2}{4}=$$

$$=\frac{2}{9}z+\frac{1}{3}z(1-z)+\frac{1}{4}(1-z)^2=-\frac{1}{12}\left(z-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{27}\le\frac{7}{27}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Nhân tiện, để giải kết thúc bài toán này, xin được đưa ra lời giải được cho là ngắn gọn hơn cả của nó:

Ta có BĐT:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc\Leftrightarrow(1-2a)(1-2b)(1-2c)\le abc$$

Mà

$$abc\le\frac{(a+b+c)^3}{27}=\frac{1}{27}\Rightarrow(1-2a)(1-2b)(1-2c)\le\frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow 1+4(ab+bc+ca)-2(a+b+c)-8abc\le\frac{1}{27}\Rightarrow ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$$

Điều phải chứng minh.

Cũng một tưởng sử dụng BĐT trên: $(1-2a)(1-2b)(1-2c)\le abc$ ta có ngay $9abc+1\ge 4(ab+bc+ca)$. Đó cũng là một lời giải cho bài toán mở đầu BĐT Schur, vậy bài toán đó theo hướng sử dụng nguyên lí Dirichlet như thế nào:

2

Cho a,b,c là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh: $9abc+1\ge 4(ab+bc+ca)$

Lời giải

Trong 3 số $a-\frac{1}{3};b-\frac{1}{3};c-\frac{1}{3}$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mấtt tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-\frac{1}{3};b-\frac{1}{3}$. Khi đó ta có: $\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)\geq 0\Rightarrow 9ab+1\geq 3a+3b\Rightarrow 9abc\geq 3(bc+ca)-c$

Ta chỉ cần chứng minh: $3(bc+ca)-c\geq 4(ab+bc+ca)$. Thật vậy:

BĐT $\Leftrightarrow 1\geq 4ab+bc+ca+c\Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 4ab+bc+ca+z$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+z(x+y+z)-z\geq 0\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ luôn đúng!

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

3

Cho a,b,c là các số không âm có tổng bằng 6. Chứng minh rằng:

$$3(ab+bc+ca)-abc\leq 28$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $a-2;b-2;c-2$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-2;b-2$. Khi đó ta có:

$(a-2)(b-2)\geq 0\Rightarrow ab+4\geq 2(a+b)\Rightarrow -abc\leq 4c-2c(a+b)$

$\Rightarrow 3(ab+bc+ca)-abc\leq 3ab+c(a+b)+4c$

Lại có: $3ab+c(a+b)+4c\leq \frac{3}{4}(a+b)^2+c(6-c)+4c=\frac{3}{4}(6-c)^2+c(6-c)+4c$

$=-\frac{1}{4}c^2+c+27=-\left(\frac{c}{2}-1\right)^2+28\leq 28\Rightarrow 3(ab+bc+ca)-abc\leq 28$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=2$

Vậy ta có đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

4

Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2(a+b+c)$$

Lời giải

Trong 3 số $a-1;b-1;c-1$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-1;b-1$. Khi đó ta có:

$$(a-1)(b-1)\geq 0$$

$$\Rightarrow ab+1\geq a+b\Rightarrow 2ab+2c+2\geq 2(a+b+c)$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2ab+2c+2\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1\geq \frac{2}{c}+\frac{2}{ab}\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-1\right)^2\geq 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

5

Cho a,b,c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8\geq 5(a+b+c)$$

Lời giải

Trong 3 số $a-1;b-1;c-1$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-1;b-1$.

Khi đó: $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab \ge a+b-1 \Rightarrow abc \ge ac+bc-c$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+abc+8 \ge 2(a^2+b^2+c^2)+ac+bc-c+8$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2)+ac+bc-c+8 \ge 5(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(a+c)^2+\frac{1}{4}(b+c)^2+\frac{7}{4}(a^2+b^2)+\frac{3}{2}c^2+8 \ge 5(a+b)+6c$$

Ta có: $\left(\frac{1}{2}(a+c)^2+2\right)+\left(\frac{1}{2}(b+c)^2+2\right)+\frac{3}{2}(a^2+1)+\frac{3}{2}(b^2+1)+(c^2+1) \ge$

$$\ge 2(a+c)+2(b+c)+3a+3b+2c = 5a+5b+6c$$

Vậy BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

6

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2+abc=4$.
Chứng minh rằng:
a) **[USA 2001]** $ab+bc+ca-abc \le 2$
b) **[Iran 2002]** $a+b+c \le 3$

Lời giải

a) Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $a-1; b-1; c-1$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-1; b-1$. Khi đó ta có: $(a-1)(b-1)\ge 0$

$\Rightarrow ab+1 \ge a+b \Rightarrow abc+c \ge c(a+b) \Rightarrow ab+bc+ca-abc \le ab+c$

Ta chỉ cần chứng minh: $ab+c \le 2$ thì bài toán được chứng minh. Thật vậy, ta có:

$4 = a^2+b^2+c^2+abc \ge 2ab+c^2+abc \Rightarrow 4-c^2 \ge ab(c+2) \Rightarrow 2-c \ge ab \Rightarrow ab+c \le 2$ đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Trong hầu hết các tài liệu bài toán này sử dụng BĐT phụ, một BĐT quen thuộc với một **Lời giải** rất đẹp khi sử dụng nguyên lí Dirichlet cần lưu ý:

Nếu a,b,c là các số thực dương thì:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca)$$

[Câu 10 – Phần BĐT Schur]

Chứng minh:

Từ $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab+1 \ge a+b \Rightarrow 2abc+2c \ge 2c(a+b)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge a^2+b^2+c^2+2c(a+b)-2c+1$

Lại có: $a^2+b^2+c^2+2c(a+b)-2c+1 \ge 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2 \ge 0$

Áp dụng vào bài toán, từ BĐT trên ta có:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca) \Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+2abc+1 \ge (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2+abc)+1 \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow 9 \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow \text{Đpcm!}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Tuy nhiên, nếu chưa kịp lưu ý BĐT phụ trên, **Lời giải** sau đây là hoàn toàn tự nhiên:
Theo tư tưởng như những bài trên, chắc hẳn ta sẽ đi theo hướng này:
Từ $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab+1 \ge a+b$ suy ra $ab+c+1 \ge a+b+c$.
Giờ ta sẽ cố gắng từ giả thiết để chứng minh $ab+c \le 2$ thì bài toán được chứng minh!
Điều này đúng! Nhưng nó khiến ta khá đắn đo.

Đầu tiên cần tìm ra giá trị của a,b,c khi đẳng thức xảy ra. Thấy a,b bình đẳng nên $a=b$. Thay vào giả thiết kết hợp đẳng thức thu được đẳng thức xảy ra tại $a=b=2-c$. Thì sao?

Ta phải đặt $2-c=k\Rightarrow c=2-k$. Ta chuyển về bài toán mới giả thiết gồm ẩn a,b,k. Chứng minh: $ab\le k$. Điều này đơn giản hơn:

Ta có, giả thiết bài toán trở thành:

$$a^2+b^2+(2-k)^2+ab(2-k)=4$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+(2-k)^2+ab(2-k)=4\Leftrightarrow (a+b)^2+k^2=4k+abk$$

Lại có:

$$(a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow 4k+abk\ge 4ab+k^2\Rightarrow (k-ab)(4-k)\ge 0$$

Do $2-c=k$ mà c dương nên $k<2$. Suy ra $k-ab\ge 0$ đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

[VMO 1996] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.
Chứng minh rằng: $a+b+c\ge ab+bc+ca$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $a-1;b-1;c-1$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-1;b-1$. Khi đó ta có: $(a-1)(b-1)\ge 0$

$$\Rightarrow ab+1\ge a+b\Rightarrow abc+c\ge c(a+b)\Rightarrow ab+abc+c\ge ab+bc+ca$$

Ta sẽ chứng minh: $ab+abc\le a+b$ thì bài toán được chứng minh.

Thấy c là biến độc lập, ta rút c từ giả thiết: $c=\dfrac{4-ab}{a+b+ab}$. Thay vào ta cần chứng minh:

$$ab+\frac{ab(4-ab)}{a+b+ab}\le a+b\Leftrightarrow 1+\frac{\frac{4}{ab}-1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{4}{ab}-1\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-1\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{ab}-1\le\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2-1\Leftrightarrow\dfrac{4}{ab}\le\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$ luôn đúng. Vậy ta có đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1$$

Lời giải

Sử dụng BĐT phụ sau:

Với mọi a,b dương ta có: $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\ge\dfrac{1}{1+ab}$

Chứng minh: Khai triển BĐT trên ta có:

BĐT $\Leftrightarrow (ab+1)\left[(a+1)^2+(b+1)^2\right]\ge (a+1)^2(b+1)^2$

$\Leftrightarrow ab(a^2+b^2)+1\ge a^2b^2+2ab\Leftrightarrow ab(a-b)^2+(ab-1)^2\ge 0$ (luôn đúng với a,b dương)

Nhân tiện, xin nêu ra một lớp bài toán có dạng đẹp tương tự và ứng dụng của chúng thì hết sức quan trọng:

1. Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab}$$

2. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn: $ab \ge 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

3. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn: $0 \le ab \le 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a,b,c \ge 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

5. Cho x,y,z là các số thực dương thuộc đoạn $[0;1]$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\le\frac{3}{1+xyz}$$

6. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$$

7. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$$

8. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}$$

9. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\le\frac{1}{6abc}$$

Và còn nhiều BĐT nữa, những BĐT trên ta sẽ chứng minh sau bài toán này!

__Trở lại bài toán__: Sử dụng BĐT phụ trên để đánh giá đồng thời kết hợp Dirichlet đưa về chứng minh 1 biểu thức chỉ có 1 biến c có giá trị bằng 1 hoặc hàm số đó đạt cực tiểu là 1.

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $a-1;b-1;c-1$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $a-1;b-1$. Khi đó ta có: $(a-1)(b-1)\ge 0$

$$\Rightarrow ab+1\ge a+b\Rightarrow a+b\le\frac{c+1}{c}\Rightarrow\frac{1}{a+b+c+1}\ge\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}$$

Lại có từ BĐT phụ ta có: $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\ge\dfrac{1}{1+ab}=\dfrac{c}{c+1}$

Suy ra:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=$$

$$\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=\frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

*****Chứng minh các BĐT trên:**

2. Nếu a,b thỏa mãn $ab\ge 1$ thì $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Chứng minh: BĐT $\Leftrightarrow\left(\sqrt{ab}+1\right)(a+b+2)\ge(a+1)(b+1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(1-\sqrt{ab}\right)\le 0$

BĐT cuối đúng vì $ab\ge 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

3. Nếu a,b thỏa mãn $ab\le 1$ thì $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Chứng minh tương tự trên

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

4. Nếu a,b,c thỏa mãn: $a,b,c\ge 1$ thì $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$

Chứng minh: Ta có: $a,b,c\ge 1\Rightarrow\sqrt[3]{abc}\ge 1$. Áp dụng BĐT 2 ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\text{ và }\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2}{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}$$

$$=2\left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}\right)\ge\frac{4}{1+\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{c}.\sqrt[3]{abc}}}=\frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Suy ra đpcm! Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

5. Cho x,y,z là các số thực dương thuộc đoạn $[0;1]$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\le\frac{3}{1+xyz}$$

Chứng minh: Với $a,b\in[0;1]$ ta có: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}$

Suy ra: $\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}+\frac{1}{1+xyz}\le\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}+\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}\le\frac{4}{1+xyz}$

Suy ra đpcm!

6. Với a,b,c là các số dương thì: $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$

Đặt $abc = k^3$ ta luôn chứng minh được tồn tại các số x,y,z sao cho: $a = \frac{kx}{y};\ b = \frac{ky}{z};\ z = \frac{kz}{x}$

Khi đó, BĐT đã cho $\Leftrightarrow \frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{3}{k+1}$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz, ta có: $\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+kz)+y(z+kx)+z(x+ky)} \geq$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{k+1}$$

7, Với a,b,c là các số dương thì: $\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{abc+1}$

Chỉ cần sử dụng kết quả của BĐT **5,** ta sẽ chứng minh

$\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)} \geq \frac{3}{abc+1} \Leftrightarrow abc+1 \geq \sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{abc}-1\right)^2\left(\sqrt[3]{abc}+1\right) \geq 0$ đúng với mọi a,b,c dương.

8, $\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1} + \frac{1}{b+\frac{1}{c}+1} + \frac{1}{c+\frac{1}{a}+1} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}$

Lời giải Chứng minh:

Ta có:

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1} + \frac{1}{b+\frac{1}{c}+1} + \frac{1}{c+\frac{1}{a}+1} = 1 - \frac{abc+\frac{1}{abc}-2}{\left(a+\frac{1}{b}+1\right)\left(b+\frac{1}{c}+1\right)\left(c+\frac{1}{a}+1\right)}$$

Áp dụng BĐT Holder ta được:

$$\left(a+\frac{1}{b}+1\right)\left(b+\frac{1}{c}+1\right)\left(c+\frac{1}{a}+1\right) \geq \left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1\right)^3$$

Suy ra

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1} + \frac{1}{b+\frac{1}{c}+1} + \frac{1}{c+\frac{1}{a}+1} \geq 1 - \frac{abc+\frac{1}{abc}-2}{\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1\right)^3}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$ ta sẽ chứng minh:

$$1 - \frac{t^3+\frac{1}{t^3}-2}{\left(t+\frac{1}{t}+1\right)^3} = \frac{3}{t+\frac{1}{t}+1} \Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}+1\right)^3 - \left(t^3+\frac{1}{t^3}\right) + 2 = 3\left(t+\frac{1}{t}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3\left(t+\frac{1}{t}\right)(t+1)\left(\frac{1}{t}+1\right) = 3\left[t^2+\frac{1}{t^2}+1+2\left(t+\frac{1}{t}+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right)(t+1)\left(\frac{1}{t}+1\right) = t^2+\frac{1}{t^2}+2+2\left(t+\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}+2\right) = \left(t+\frac{1}{t}\right)^2 + 2\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Suy ra:

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

9. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\le\frac{1}{6abc}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}=\frac{1}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(c+a)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c+a}\right)\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

Tương tự cho 2 biến còn lại. Cộng vế theo vế các BĐT ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ca}{2abc}\le\frac{(a+b+c)^2}{6abc}=\frac{1}{6abc}$$

9

[APMO] Cho a,b,c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge3(a+b+c)^2$$

Lời giải

Nhìn bài toán này thì khó đoán thật, lời giải ở **Bài toán số 17** phần BĐT Schur chắc hẳn cũng chính là 1 lời giải tốt trong trường hợp này bởi mấu chốt của hướng đi khai triển ra chính là sử dụng BĐT quen thuộc $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge2(ab+bc+ca)$.

Tuy nhiên, sử dụng Dirchlet trong trường hợp này, ta hướng đến một hướng đi khác như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwwarz ta có:

$$(a+b+c)^2\le\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)=\left(a^2+b^2+1\right)\left(c^2+2\right)$$

Đưa ra một lượng chung với VT và thực hiện đánh giá biểu thức chứa 2 biến còn lại qua kết quả $(a-1)(b-1)\ge0$

Thật vậy: Ta chỉ cần chứng minh: $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\ge3\left(a^2+b^2+1\right)\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\ge0$

Điều này hiển nhiên đúng với $(a-1)(b-1)\ge0$. BĐT được chứng minh.

10

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn: $x+y+z+2=xyz$. Chứng minh rằng:

$$2(x+y+z)\le xy+yz+zx$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$xyz=2+x+y+z\ge2+3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{xyz}-2\right)\left(\sqrt[3]{xyz}+1\right)^2\ge0\Rightarrow\sqrt[3]{xyz}\ge2$$
$$\Rightarrow xyz\ge8\Rightarrow x+y+z\ge6$$

Ta có: Trong 3 số $x-2;y-2;z-2$ có ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử là $y-2$ và $z-2$:

$$\Rightarrow(y-2)(z-2)\ge0\Rightarrow yz+4\ge2(y+z)\Rightarrow2x+yz+4\ge2(x+y+z)$$

Ta cần chứng minh: $xy + zx \geq 2x + 4$

Ta có:

$$x+y+z+2 = xyz \leq x.\frac{(y+z)^2}{4} \Leftrightarrow (y+z+2)\left[x(y+z)-2x-4\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow x(y+z)-2x-4 \geq 0 \Rightarrow xy+zx \geq 2x+4$$

Vậy $2(x+y+z) \leq xy+yz+zx$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$

11

[Japan MO 1997] Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta đều có:

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Lời giải

BĐT đối xứng thuần nhất, chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2+(1-a)^2}+\frac{(2b-1)^2}{b^2+(1-b)^2}+\frac{(2c-1)^2}{c^2+(1-c)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz dạng Engle ta có:

$$\frac{(2b-1)^2}{b^2+(1-b)^2}+\frac{(2c-1)^2}{c^2+(1-c)^2} \geq \frac{(2b+2c-2)^2}{2(b^2+c^2)-2(b+c)+2} = \frac{2a^2}{b^2+c^2+a}$$

Trong 3 số $a-\frac{1}{3};b-\frac{1}{3};c-\frac{1}{3}$ có ít nhất 2 số cùng dấu.Không mất tính tổng quát, giả sử là

$$b-\frac{1}{3};c-\frac{1}{3} \Rightarrow \left(b-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow b^2+c^2 \leq \left(b+c-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9} = \left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}$$

Suy ra

$$\frac{(2b-1)^2}{b^2+(1-b)^2}+\frac{(2c-1)^2}{c^2+(1-c)^2} \geq \frac{2a^2}{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}+a} = \frac{18a^2}{9a^2-3a+5}$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{(2a-1)^2}{a^2+(1-a)^2}+\frac{18a^2}{9a^2-3a+5} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow (3a-1)^2(17a^2-8a+5) \geq 0$ (luôn đúng)

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Một hướng đi nhìn có vẻ khó khăn nhưng thực chất là những tư duy đơn thuần chỉ việc áp dụng vào!

12

[Trần Nam Dũng] Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2(x^2+y^2+z^2)+xyz+8 \geq 5(x+y+z)$$

Lời giải

Trong 3 số $x-1;y-1;z-1$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 số đó là $x-1;y-1$. Khi đó ta có: $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy+1 \geq x+y \Rightarrow xyz \geq zx+yz-z$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+xyz+8 \geq 2(x^2+y^2+z^2)+zx+yz-z+8$$

Ta chỉ cần chứng minh: $2(x^2+y^2+z^2)+zx+yz-z+8 \geq 5(x+y+z)$ đúng. Thật vậy:

BĐT $\Leftrightarrow (y+z-2)^2+(z+x-2)^2+3(x-1)^2+3(y-1)^2+2(z-1)^2 \geq 0$ luôn đúng!

BĐT được chứng minh! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Kĩ thuật p,q,r trong các bài toán bất đẳng thức đối xứng

Chúng ta đã được biết việc biểu diễn một đa thức 2 biến x,y đối xứng như thế nào rồi và hiệu quả của nó trong việc chứng minh các bài toán với 2 biến. Như vậy một câu hỏi đặt ra thì với 3 biến thì như thế nào ? Câu trả lời là với 3 biến ta sẽ quy về được theo 3 ẩn mới $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Chúng ta sẽ áp dụng cách đặt này trong các bài toán bất đẳng thức . Việc kết hợp cách đặt p,q,r cùng với bất đẳng thức Schur là một phương pháp cực kì hữu hiệu trong các bài toán bất đẳng thức. Mặc nhiên rằng bất đẳng thức Schur không có trong chương trình phổ thông nhưng việc chứng minh lại nó khá đơn giản. Nên với việc trang bị một phương pháp khá đẹp này sẽ giúp các bạn tự tin hơn trong giải toán.

Chúng ta phát biểu lại bất đẳng thức Schur:

Với mọi số thực a,b,c,k thì ta có bất đẳng thức sau đúng:

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\geq 0$$

Hai trường hợp hay được sử dụng nhất đó là với $k=1,2$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0$$

Ta quay lại xét vấn đề biểu diễn một đa thức đối xứng theo 3 biến p,q,r.

Chúng ta tự hỏi là liệu tồn tại một biểu diễn dưới dạng p,q,r cho một đa thức đối xứng hay không ? Câu trả lời là có, và ta có một mệnh đề sau:

Mệnh đề: Mọi đa thức đối xứng $H(a,b,c)$ đều được biểu diễn dưới dạng $T(p,q,r)$

Phép chứng minh của định lý này nằm ngoài chương trình toán sơ cấp nên xin phép không đề cập trong cuốn sách này. Nhưng tại sao tôi lại đề cập đến mệnh đề này. Đó là khẳng định luôn tồn tại biểu diễn.Mà theo chúng tôi, niềm tin trong giải toán là cực kì quan trọng.

Bây giờ, chúng ta có một số biểu diễn cơ bản như sau:

$\boxed{1}$ $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r$

$\boxed{2}$ $(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$

$\boxed{3}$ $ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)=p^2q-2q^2-pr$

$\boxed{4}$ $(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)=p^2+q$

$\boxed{5}$ $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$

$\boxed{6}$ $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$

$\boxed{7}$ $a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$

$\boxed{8}$ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2pr$

$\boxed{9}$ $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=q^3-3pqr+3r^2$

$\boxed{10}$ $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=q^4-4pq^2r+2p^2r^2+4qr^2$

Nếu đặt $L=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r$

Khi đó

$$a^2b+b^2c+c^2a=\frac{pq-3r\pm\sqrt{L}}{2}$$

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\sqrt{L}$$

Bây giờ ta sẽ nói đến một số liên hệ về bất đẳng thức giữa p,q,r.

$\boxed{1}$ $p^2 \geq 3q$

$\boxed{2}$ $p^3 \geq 27r$

$\boxed{3}$ $q^2 \geq 3pr$

$\boxed{4}$ $pq \geq 9r$

$\boxed{5}$ $2p^3 + 9r \geq 7pq$

$\boxed{6}$ $p^2q + 3pr \geq 4q^2$

$\boxed{7}$ $p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q$

Để làm quen với phương pháp các bạn hãy tập chứng minh lại các bất đẳng thức trên.
Nhưng các bất đẳng thức trên khá là "lỏng", ta cần một số đánh giá chặt hơn.
Từ bất đẳng thức Schur, ta có:

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9}$$

$$r \geq \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}$$

Như vậy ta đã có những đánh giá khá chặt cho r. Bây giờ ta thử ứng dụng để giải một số bài toán căn bản.

1

Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2+b^2+c^2)+abc \geq 10$$

Lời giải

Dạng đối xứng của bất đẳng thức đã cho nên chúng ta dễ dàng áp dụng kĩ thuật pqr.
Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$, giả thiết tương đương với $q+r=4$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$3p^2-6q+r \geq 10 \Leftrightarrow 3p^2-7q-6 \geq 0 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Schur, thì ta có: $p^3+9r \geq 4pq \Rightarrow p^3+9(4-q) \geq 4pq \Rightarrow q \leq \dfrac{36+p^3}{4p+9}$

Thay vào (1), ta cần chứng minh:

$$3p^2-7q-6 \geq 3p^2-7\frac{36+p^3}{4p+9}-6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-3)(5p^2+42p+102) \geq 0$$

Dễ dàng kiểm tra được là $p \geq 3$ vì nếu ngược lại thì ta có $ab+bc+ca+abc \leq 4$ (vô lý). Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$

2

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \geq 18$$

Lời giải

Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có $p^2-2q=3$.

Và ta cần chứng minh: $5p+\dfrac{3}{r} \geq 18$

Nếu áp dụng bất đẳng thức Schur thì ta sẽ ngược chiều với bất đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý rằng: $q^2 \geq 3pr \Rightarrow r \leq \dfrac{q^2}{3p} = \dfrac{\frac{(p^2-3)^2}{4}}{3p} = \dfrac{p^4-6p^2+9}{12p}$. Như vậy ta chỉ ra được:

$$\frac{3}{r} \geq \frac{36p}{p^4-6p^2+9}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh: $5p+\dfrac{36p}{p^4-6p^2+9}\geq 18$

Điều này tương đương với: $(p-3)^2(5p^3+12p^2-3p-18)\geq 0$

Mặt khác ta có: $p^2=2q+3\Rightarrow p\geq\sqrt{3}$ Lại có $p\leq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=3$

Nên ta có $5p^3+12p^2-3p-18\geq 5(\sqrt{3})^3+12.3-3.3-18\geq 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh

3

Cho $a,b,c\geq 0$.Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\dfrac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 5$

Lời giải

Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$. Chuẩn hóa $p=1$

Ta cần chỉ ra rằng: $\dfrac{1-3q+3r}{q-r}+9\dfrac{q}{1-2q}\geq 5\Leftrightarrow\dfrac{1}{q}+\dfrac{9q}{1-2q}\geq 8$

Ta để ý $\dfrac{1}{q}+\dfrac{9q}{1-2q}=2+\dfrac{1-2q}{q}+\dfrac{9q}{1-2q}\geq 8$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x,x,0\right)$

Bình luận: Ở đánh giá trên ta đã làm mất r nhờ việc dự đoán được đẳng thức xảy ra thì $r=0$. Qua những ví dụ trên ta thấy việc sử dụng pqr thật sự là một công cụ mạnh và cho **Lời giải** hết sức ấn tượng.

4

Cho $x,y,z\geq 0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4(x+y)(y+z)(z+z)}{x^3+y^3+z^3}\geq 5$$

Lời giải

Trước hết ta chuẩn hóa $p=1$. Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$.

Ta cần chứng minh:

$$\frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}\geq 5\Leftrightarrow\frac{1-3q+4r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}\geq 4$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. **Lời giải** quá ấn tượng phải không ?

5

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$ th

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1$$

Lời giải

Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh:

$49-8(ab+bc+ca)+(a+b+c)abc\leq 64-16(ab+bc+ca)+4(a+b+c)abc-a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow 16+3(a+b+c)abc\geq a^2b^2c^2+8(ab+bc+ca)$

Áp dụng bất đẳng thức Schur và giả thiết $a^4+b^4+c^4=3$ ta có:

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)(a+b+c)\geq(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 3+3abc(a+b+c)\geq(ab+bc)^2+(bc+ca)^2+(ca+ab)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(ab+bc)^2+(bc+ca)^2+(ca+ab)^2+12\ge 8(ab+bc+ca)\Rightarrow 15+3abc(a+b+c)\ge 8(ab+bc+ca)$$

Mặt khác ta lại có $1\ge a^2b^2c^2$ vậy ta có đpcm.

6

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+7abc\ge 10$$

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức Schur, ta có:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc\ge (ab+bc+ca)(a+b+c)=pq=3p$$

Và $r\ge \dfrac{p(4q-p^2)}{9}=\dfrac{p(12-p^2)}{9}$

Vậy ta cần chứng minh $3p+\dfrac{p(12-p^2)}{9}\ge 10\Leftrightarrow \dfrac{(p-3)[(16-p^2)+3(4-p)+2]}{9}\ge 0$ (đúng)

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

7

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$ Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+abc}}{ab+c}+\frac{\sqrt{b^2+abc}}{bc+a}+\frac{\sqrt{c^2+abc}}{ca+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Lời giải

Ta có bổ đề: $r\le \dfrac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\left[\sum\frac{\sqrt{a^2+abc}}{(b+c)(b+a)}\right]^2\le\left[\sum\frac{a}{(a+b)(b+c)}\right]\left(\sum\frac{a+c}{b+c}\right)=\frac{\sum a^2+\sum ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum\frac{a+c}{b+c}\right)$$

Ta có: $\sum\dfrac{a+c}{b+c}=\sum\dfrac{1}{b+c}-\sum\dfrac{b}{b+c}\le\sum\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{(a+b+c)^2}{\sum a^2+\sum ab}$ nên cần chứng minh:

$$\frac{\sum a^2+\sum ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left[\frac{1}{b+c}-\frac{1}{\sum a^2+\sum ab}\right]\le\frac{1}{4abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-q}{q-r}\left(\frac{1+q}{q-r}-\frac{1}{1-q}\right)\le\frac{1}{4r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(1-q^2)}{q-r}-4\le\frac{q-r}{r}\Leftrightarrow\frac{4(1-q^2)}{q-r}-\frac{q}{r}\le 3$$

Sử dụng bổ đề, ta có:

$$VT\le\frac{4(1-q^2)}{q-\dfrac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}}-\frac{q}{\dfrac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}}=3-\frac{q(1-3q)(5-7q)}{(1-q)(4-7q+q^2)}\le 3$$

8

Cho a,b,c không âm. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Lời giải

Ta có $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\dfrac{8}{9}(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge\dfrac{8}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a+b+c)$

Đặt $x=\frac{2a}{b+c}, y=\frac{2b}{c+a}, z=\frac{2c}{a+b}$ Ta có $xy + yz + zx + xyz = 4$ Bất đẳng thức trở thành:

$$x^2+y^2+z^2+5xyz\ge 8$$

Biểu diễn theo pqr, bất đẳng thức tương đương với:

$$p^2-2q+5r\ge 8$$
$$\Leftrightarrow p^2-7q+12\ge 0$$

Nếu $4\ge p$ sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có:

$$r\ge\frac{p(4q-p^2)}{9}\Rightarrow 4\ge q+\frac{p(4q-p^2)}{9}\Leftrightarrow q\le\frac{p^3+36}{4p+9}\Rightarrow p^2-\frac{7(p^3+36)}{4p+9}+12\ge 0\Leftrightarrow (p-3)(p^2-16)\le 0$$

Điều này đúng vì $4\ge p\ge\sqrt{3q}\ge 3$

Nếu $p\ge 4$ ta có $p^2\ge 16\ge 4q$

$$p^2-2q+5r\ge p^2-2q\ge\frac{p^2}{2}\ge 8$$

Ta có điều phải chứng minh.

9

Cho $a,b,c>0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3a}{a^2+2bc}+\frac{3b}{b^2+2ca}+\frac{3c}{c^2+2ab}$$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{a}, b=\frac{1}{b}, c=\frac{1}{c}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum a\ge 3abc\sum\frac{1}{2a^2+bc}\Leftrightarrow\sum\frac{a(a^2-bc)}{2a^2+bc}\ge 0\Leftrightarrow 3\sum\frac{a^3}{2a^2+bc}\ge\sum a$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\sum\frac{a^3}{2a^2+bc}\ge\frac{(\sum a^2)^2}{2\sum a^3+3abc}$$

Đến đây ta cần chứng minh: $3\left(\sum a^2\right)^2\ge\left(\sum a\right)\left(2\sum a^3+3abc\right)$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$, đưa về dạng p,q,r ta có:

$$3(1-2q)^2\ge 2-6q+9r.$$

Từ $q^2\ge 3r$, ta có:

$$3(1-2q)^2\ge 2-6q+3q^2\Leftrightarrow 3-12q+12q^2\ge 2-6q+3q^2\Leftrightarrow(1-3q)^2\ge 0$$

Phép chứng minh kết thúc tại đây

Bây giờ ta tìm cách chứng minh cho một bất đẳng thức rất nổi tiếng sau, đó là Bất Đẳng Thức IRAN 1996

10

Chứng minh rằng nếu $x,y,z>0$ thì ta có:

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

Lời giải

Biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng pqr

$$q\left[\frac{(p^2+q)^2-4p(pq-r)}{(pq-r)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

Rút gọn ta có điều này tương đương với:

$$4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow pq\left(p^3-4pqr+9r\right)+q\left(p^4-5p^2q+4q^2+6pr\right)+r\left(pq-9r\right)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo bất đẳng thức Schur bậc 3 và bậc 4.

Nhận xét: Cách áp dụng pqr kết hợp bất đẳng thức Schur thực sự là một phương pháp rất mạnh. Có thể khẳng định hầu như những bài toán đối xứng 3 biến đều có thể giải được theo bài toán này.

Một số bài toán luyện tập:

Bài 1: Cho các số thực a,b,c không âm. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)$

Bài 2: Chứng minh rằng với các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c)-abc\leq 10$$

Bài 3: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$2(a^2+b^2+c^2)+12\geq 3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)$$

Bài 4: Cho 3 số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c+3abc\geq 6$$

Bài 5: Cho a,b,c thỏa mãn $2\leq a,b,c\leq 1$ Chứng minh rằng:

$$6a^2(b+c)+6b^2(c+a)+6c^2(a+b)\leq 33abc$$

1

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+2b+3c\geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$L=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{a\frac{4}{a}}=4\Rightarrow\frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)\geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2$

$b+\frac{9}{b}\geq 2\sqrt{b\frac{9}{b}}=6\Rightarrow\frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right)\geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=3$

$c+\frac{16}{c}\geq 2\sqrt{c\frac{16}{c}}=8\Rightarrow\frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right)\geq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=4$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều, thu được $\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 8$ (1)

Mặt khác, do $a+2b+3c\geq 20$ nên $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\geq 5$ (chia hai vế cho 4)

Cộng (1) và (2), vế đối vế, ta được $L=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 13.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=3,c=4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức L bằng 13, đạt được khi $a=2,b=3,c=4$.

2

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$a^2+b^2+c^2+4\ge\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(c+2)^2\ge\frac{1}{4}(a+b+c+2)^2$$

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le\frac{1}{2}(a+b)(a+b+4c)=\frac{1}{6}(3a+3b)(a+b+4c)$$

$$\le\frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

Suy ra $T\le\dfrac{8}{a+b+c+2}-\dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$.

Đặt $a+b+c=t$, $t>0$. Khi đó $T\le\dfrac{8}{t+2}-\dfrac{27}{2.t^2}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{8}{t+2}-\dfrac{27}{2.t^2},\forall t>0$ ta có

$$f'(t)=-\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow(t-6)(8t^2+21t+18)=0\Rightarrow t=6,f(6)=\frac{5}{8}$$

Bảng biến thiên

t	0		6		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	

Theo bảng biến thiên ta thấy $T\le f(t)\le\dfrac{5}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $\dfrac{5}{8}$ khi $a=b=c=2$

Cho ba số a,b,c,d là các số thực bất kỳ.Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{c-d}{c+d}+\frac{ad+bc}{ac-bd}\right|\ge\sqrt{3}$$

Lời giải

Đặt $x=\dfrac{a-b}{a+b};y=\dfrac{c-d}{c+d};z=\dfrac{ad+bc}{ac-bd}$ và $T=xy+yz+zx$

$$T=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{c-d}{c+d}\right)+\left(\frac{c-d}{c+d}\right)\left(\frac{ad+bc}{ac-bd}\right)+\left(\frac{ad+bc}{ac-bd}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$$

$$T=\frac{(a-b)(c-d)(ac-bd)+(ad+bc)[(a-b)(c+d)+(c-d)(a+b)]}{(a+b)(c+d)(ac-bd)}$$

$$T=\frac{(ac-bd)[(a-b)(c-d)+2(ad+bc)]}{(a+b)(c+d)(ac-bd)}=\frac{(a+b)(c+d)(ac-bd)}{(a+b)(c+d)(ac-bd)}=1$$

$$|x+y+z|\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow|x+y+z|^2\ge3\Leftrightarrow(x+y+z)^2\ge3(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge0$$

Như vậy, ta có đpcm

4

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $y^2 \ge xz$ và $z^2 \ge xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{3z}{z+x}.$$

Lời giải

Đây là một bài toán thuộc họ của câu khối A-2011. Loạt bài tập như thế này yêu cầu kĩ năng đánh giá để có thể đưa về một biến. Và hãy nhớ: Biến dồn về chính là biến có dạng bất đối xứng, cụ thể ở đây là biến c.

Ta có: $P = \dfrac{1}{1+\frac{y}{x}} + \dfrac{1}{1+\frac{z}{y}} + \dfrac{3}{1+\frac{x}{z}}$, đặt $a = \dfrac{y}{x}; b = \dfrac{z}{y}; c = \dfrac{x}{z}$ kết hợp với giả thiết ta suy ra

$$\begin{cases} a \ge b \ge c > 0 \\ abc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < c \le 1 \\ ab \ge 1 \end{cases}.$$

Khi đó $P = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{3}{1+c}$

Ta có $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right) \ge 0$ (đúng do $ab \ge 1$.)

Suy ra $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \ge \dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$

hay $P \ge \dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1} + \dfrac{3}{c+1} \ge \dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1} + \dfrac{3}{\sqrt{c}+1} = \dfrac{3+2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$ vì $0 < c \le 1 \Rightarrow c \le \sqrt{c}$

Đặt $t = \sqrt{c} \Rightarrow 0 < t \le 1$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t+3}{t+1}$ với $0 < t \le 1$. Ta có hàm số $f(t)$ liên tục trên $(0;1]$,

$$f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} < 0, \forall t \in (0;1).$$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$. Suy ra $f(t) \ge f(1) = \dfrac{5}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = z$.

5

Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn: $xyz = 2\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^8+y^8}{x^4+y^4+x^2y^2} + \frac{y^8+z^8}{y^4+z^4+y^2z^2} + \frac{z^8+x^8}{z^4+x^4+z^2x^2} \ge 8$$

Lời giải

+) Để làm bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn ta Đặt $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, từ giả thiết ta có: $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a.b.c = 8$

Do $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ nên $a^2+b^2+ab \le \dfrac{3(a^2+b^2)}{2}$ Dấu "=" có $\Leftrightarrow$ a=b

+) Ta có: $\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab} \ge \dfrac{a^4+b^4}{\frac{3}{2}(a^2+b^2)}$. Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{a^4+b^4}{\frac{3}{2}(a^2+b^2)} \ge \dfrac{1}{3}(a^2+b^2)$ (1).

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow 2(a^4+b^4) \ge (a^2+b^2)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Do đó ta được: $\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}\ge\dfrac{1}{3}(a^2+b^2)$ Dấu"="có $\Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$

+) Áp dụng BĐT trên ta có: $\dfrac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}\ge\dfrac{1}{3}(b^2+c^2)$ Dấu"=" có $\Leftrightarrow b=c$

$$\dfrac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge\dfrac{1}{3}(c^2+a^2) \text{ Dấu"="có } \Leftrightarrow c=a$$

Cộng các vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca}\ge\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) \quad (2)$$

Dấu"="có $\Leftrightarrow a=b=c$

+) Theo BĐT Cô-si ta có: $\dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\ge 2.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=8$.

Dấu"="có $\Leftrightarrow$ a=b=c

Do đó ta có ĐPCM. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |x|=|y|=|z|=\sqrt{2}$

6

Cho x.y là các số thực. Tìm GTNN củabiểuthức

$$P=\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+|y-2|$$

Lời giải

Ta có

$$P=\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1+x)^2+y^2}+|y-2|$$

Xét $\vec{u}=(1-x;-y),\vec{v}=(1+x;-y)\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=(2;-2y))$

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1+x)^2+y^2}\ge\sqrt{4+4y^2}\ge 2\sqrt{1+y^2}$$

Dấu = khi $\vec{u};\vec{v}$ cùnghướng

$$\Leftrightarrow 1-x=1+x\Leftrightarrow x=0$$

$$P\ge 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$$

Đặt $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|=\begin{cases}2\sqrt{1+y^2}+y-2 \text{ Khi } y\ge 2\\ 2\sqrt{1+y^2}+2-y \text{ Khi } y<2\end{cases}$

Xét

$$y\ge 2\Rightarrow f(y)=2\sqrt{1+y^2}+y-2\Rightarrow f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+1>0$$

$$\Rightarrow \min f(y)=f(2)=2\sqrt{5}$$

Xét $y<2$ ta có

$$f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1\Rightarrow f'(y)=0\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=2y\Leftrightarrow 1+y^2=4y^2\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn !

Bình luận: Với những bài toán có yếu tố bình phương chứa trong căn thức thì vecto là một phương pháp khá hữu hiệu để tiếp cận

Cho các số thực a,b,c không âm, đôi một khác nhau thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử: $a>b>c\ge 0$. Đặt $a=c+x; b=c+y$

$$P=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{(x^2+y^2-xy)^2}{x^2y^2(x-y)^2}$$

Chú ý rằng:

$$1=(a+b+c)^2=(3c+x+y)^2\ge(x+y)^2$$

Do đó

$$P\ge(x+y)^2\frac{(x^2+y^2-xy)^2}{x^2y^2(x-y)^2}=\left(\frac{x^2+y^2-xy}{xy}+3\right)\left(\frac{x^2+y^2-xy}{xy}\right)^2\frac{1}{\frac{x^2+y^2-xy}{xy}-1}$$

Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2-xy}{xy}$ Ta đưa được về hàm số theo t. Đến đây mọi chuyện trở nên đơn giản.

Bình luận: Đối với những bài toán đẳng thức xảy ra tại biên như thế này (có một biến bằng 0) thì ta thường sử dụng cách đặt như trên hay còn gọi là cách dồn biến về biên.

8

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\frac{3}{4}(a+b)^2.$$

Lời giải

Dự đoán rằng ta sẽ dồn về biến c và nhận thấy sự đối xứng ở 2 số hạng đầu tiên nên ta tìm cách đánh giá 2 số hạng này Một cách tự nhiên nhất ta sẽ dùng BDT AM-GM để đánh giá đại lượng dạng tích xy

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}\ge\frac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5}{4}(b+c)^2}=\frac{4a^2}{9(b+c)^2}.$$

Tương tự, ta có $\dfrac{b^2}{(c+a)^2+5ca}\ge\dfrac{4b^2}{9(c+a)^2}.$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}\ge\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}\right)\ge\frac{2}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)^2$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{ab+c(a+b)+c^2}\right)^2\ge\frac{2}{9}\left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4}+c(a+b)+c^2}\right)^2=\frac{2}{9}\left(\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}\right)^2.$$

Vì $a+b+c=1\Leftrightarrow a+b=1-c$ nên

$$P\ge\frac{2}{9}\left(\frac{2(1-c)^2+4c(1-c)}{(1-c)^2+4c(1-c)+4c^2}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2.$$

Xét hàm số $f(c)=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$ với $c\in(0;1)$.

Ta có $f'(c)=\frac{16}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right).\frac{2}{(c+1)^2}-\frac{3}{2}(c-1)$;

$f'(c)=0\Leftrightarrow(c-1)\left(64-(3c+3)^3\right)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

c	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(c)\ge-\frac{1}{9}$ với mọi $c\in(0;1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\ge-\frac{1}{9}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{9}$, đạt khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

9

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức: $(x+y+z)^2\ge3(xy+yz+zx)\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ ta có:

$$(ab+bc+ca)^2\ge3abc(a+b+c)=9abc>0\Rightarrow ab+bc+ca\ge3\sqrt{abc}$$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c)\ge(1+\sqrt[3]{abc})^3, \forall a,b,c>0$. Thật vậy:

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc\ge1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc=(1+\sqrt[3]{abc})^3$$

Khi đó: $P\le\frac{2}{3(1+\sqrt{abc})}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q$ (1).

Đặt $\sqrt[6]{abc}=t$; vì $a, b, c>0$ nên $0<abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$

Xét hàm số $Q=\frac{2}{3(1+t^3)}+\frac{t^2}{1+t^2}, t\in(0;1]\Rightarrow Q'(t)=\frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2}\ge0, \forall t\in(0;1]$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1]\Rightarrow Q=Q(t)\le Q(1)=\frac{5}{6}$ (2). Từ (1) và (2): $P\le\frac{5}{6}$.

Vậy $\max P=P_{max}=\frac{5}{6}$, đạt được khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.

10

Cho 3 số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}.$$

Lời giải

Ta có:

$$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}\Rightarrow \frac{1}{a^2+bc}\le\frac{1}{2a\sqrt{bc}}$$

$$b^2+ca\ge 2b\sqrt{ca}\Rightarrow \frac{1}{b^2+ca}\le\frac{1}{2b\sqrt{ca}}$$

$$c^2+ab\ge 2c\sqrt{ab}\Rightarrow \frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2c\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2a\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b\sqrt{ca}}+\frac{1}{2b\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}}{abc}\le\frac{\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}}{2abc}=\frac{a+b+c}{2abc}$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

11

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$$

Lời giải

Nhận xét: có thể áp dụng B.C.S để tách riêng từng biến ở mẫu.

$$(x+x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge(\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{z}}.\sqrt{z})^2=16$$

$$\Rightarrow\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{16}{2x+y+z}\qquad(1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{16}{x+2y+z}\qquad(2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\ge\frac{16}{x+y+2z}\qquad(3)$$

Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta có

$$4(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge 16(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z})$$

Suy ra điều phải chứng minh.

12

Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $(\frac{12}{5})^x+(\frac{15}{4})^x+(\frac{20}{3})^x\ge 3^x+4^x+5^x$

Lời giải

Nhận xét nếu đặt $3^x=a$, $4^x=b$, $5^x=c$ thì biểu thức trở thành $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c$

Vì a, b, c > 0 nên chia hai vế cho abc ta được: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy theo cặp

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{2}{ab};\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2c^2}}=\frac{2}{ac};\ \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{b^2c^2}}=\frac{2}{bc}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

Vậy đpcm.

13

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq 3\sqrt{3}$$

Lời giải

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq xy(x+y)$$

$$\rightarrow 1+x^3+y^3=xyz+x^3+y^3\geq xy(x+y+z)\qquad (1)$$

Tương tự

$$1+y^3+z^3\geq yz(x+y+z)\qquad (2)$$

$$1+z^3+x^3\geq zx(x+y+z)\qquad (3)$$

Từ (1), (2), và (3) suy ra

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\geq \sqrt{x+y+z}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)\ (*)$$

Áp dụng Cauchy cho 3 số dương

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}=3\quad (4)$$

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3\quad (5)$$

Từ (*), (4) và (5) ta được đpcm.

14

Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nh
thức sau

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Lời giải

Nhận xét: để dễ nhìn ta đặt $a=\sqrt{x},\ b=\sqrt{y},\ c=\sqrt{z}$

ta cũng có $abc=1$ và $a,b,c>0$.

$$\Rightarrow P=\frac{a^4(b^2+c^2)}{b^3+2c^3}+\frac{b^4(c^2+a^2)}{c^3+2a^3}+\frac{c^4(a^2+b^2)}{a^3+2b^3}\geq\frac{2a^4bc}{b^3+2c^3}+\frac{2b^4ca}{c^3+2a^3}+\frac{2c^4ab}{a^3+2b}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{2a^3}{b^3+2c^3}+\frac{2b^3}{c^3+2a^3}+\frac{2c^3}{a^3+2b^3}$$

Đặt $m=b^3+2c^3;\ n=c^3+2a^3;\ p=a^3+2b^3$

$$\Rightarrow a^3=\frac{p+4n-2m}{9};b^3=\frac{m+4p-2n}{9};c^3=\frac{n+4m-2p}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{2a^3}{b^3+2c^3}+\frac{2b^3}{c^3+2a^3}+\frac{2c^3}{a^3+2b^3}=2\left(\frac{p-2m+4n}{9m}+\frac{m-2n+4p}{9n}+\frac{n-2p+4}{9p}\right.$$

$$\Rightarrow\frac{2a^3}{b^3+2c^3}+\frac{2b^3}{c^3+2a^3}+\frac{2c^3}{a^3+2b^3}=\frac{2}{9}\left(\frac{p}{m}+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}+\frac{4p}{n}+\frac{n}{p}+\frac{4m}{p}-6\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{p}{m}+\frac{m}{n}+\frac{n}{p}\ge 3 \text{ và } \frac{4n}{m}+\frac{4p}{n}+\frac{4m}{p}\ge 12$$

Suy ra $\frac{2a^3}{b^3+2c^3}+\frac{2b^3}{c^3+2a^3}+\frac{2c^3}{a^3+2b^3}\ge 2$

Vậy $\min P=2$ khi $x=y=z=1$.

15

Cho $a\ge b>0$. Chứng minh $(2^a+\frac{1}{2^a})^b\le(2^b+\frac{1}{2^b})^a$

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=\frac{\ln(t+\frac{1}{t})}{\ln t}=\frac{\ln(t^2+1)-\ln t}{\ln t}=\frac{\ln(t^2+1)}{\ln t}-1$ với $t>1$

Đạo hàm $f(t)=\frac{\frac{2t}{t^2+1}.\ln t-\frac{1}{t}\ln(t^2+1)}{(\ln t)^2}=\frac{t^2\ln t^2-(t^2+1)\ln(t^2+1)}{(t^2+1)(\ln t)^2}<0$ với mọi $t>1$

Do đó $f'(t)$ nghịch biến với $t>1$.

Ta có $f\left(2^a\right)\le f\left(2^b\right)$ với $a\ge b>0$

Do đó $\frac{\ln(2^a+\frac{1}{2^a})}{\ln 2^a}\le\frac{\ln(2^b+\frac{1}{2^b})}{\ln 2^b}\Rightarrow\frac{1}{a\ln 2}(2^a+\frac{1}{2^a})^b\le\frac{1}{b\ln 2}(2^b+\frac{1}{2^b})^b$

Vậy điều phải chứng minh.

16

Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$

Lời giải

Nhận xét: có thể đưa P về hàm số một ẩn.

$$P=\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}=\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}$$

Nếu $y=0$ thì $P=2$

Nếu $y\ne 0$ thì đặt $x=ty$

$$P=\frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3}$$

Xét hàm số $P=f(t)$

Lấy đạo hàm

$$f'(t)=\frac{(4t+12)(t^2+2t+3)-(2t+2)(2t^2+12t)}{t^2+2t+3}=\frac{-8t^2+12t+36}{t^2+2t+3}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{-3}{2}\\t=3\end{array}\right.$$

Khi đó ta có:

$f\left(\frac{-3}{2}\right)=-6$ và $f(3)=3$

Các giới hạn $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=2$

Như vậy $\min f(t) = -6$ khi $t = \frac{-3}{2}$; $\max f(t) = 3$ khi $t = 3$

Vậy $\min P = -6$ khi $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ hay $(x;y) = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ hoặc $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

$\max P = 3$ khi $\begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ hay $(x;y) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ hoặc $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

Bình luận: Nếu một bài toán là đồng bậc thì chúng ta có thể giảm biến bằng cách đặt như trên. Lý do thì chúng ta đã được biết khi làm quen với dạng bài toán Hệ phương trình đẳng cấp. Ở đây chúng ta thấy ngay mối liên hệ rõ ràng giữa bài toán cực trị và bài toán giải hệ phương trình. Có phải chăng là việc chứng minh một bất đẳng thức gần giống với việc giải một hệ phương trình gồm giả thiết và điều cần chứng minh (ở dạng đẳng thức)

17

Cho a, b, c là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Lời giải

Câu hình tích của 2 số và chứa căn gợi ý ngay cho chúng ta cách áp dụng AM-GM. Nhưng chú ý rằng ta phải đảm bảo được dấu bằng xảy ra. Từ phân tích này ta đề xuất **Lời giải** như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \le a + \frac{1}{2}.\frac{a+4b}{2} + \frac{1}{3}.\frac{a+4b+16c}{4} = \frac{4}{3}(a+b+c)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 4b = 16c$.

Suy ra $P \ge \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$. Đặt $t = a+b+c$, $t > 0$

Khi đó ta có $P \ge \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0

Do đó $\min_{t>0} f(t) = -\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $t = 1$. Suy ra $P \ge -\frac{3}{2}$.

Vậy GTNN của *P* bằng $-\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ a = 4b = 16c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$.

18

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$$

Lời giải

Khi gặp những biểu thức có dạng bậc 2 trên bậc 1 hoặc bậc 3 trên bậc 2, thì chúng ta cố gắng làm gọn chúng. Để hy vọng từ đó có thể đưa bài toán về đánh giá một biến đơn giản hơn.

Ta có: $3y^2+4xy+7x+4y-1=(x+2y)^2+(x+2y)-\left(x^2+y^2-6x-2y+5\right)+4=(x+2y+1)(x+2y)+4$

Nên $P=x+2y+\dfrac{4}{x+2y+1}=t-1+\dfrac{4}{t}\geq 2\sqrt{t.\dfrac{4}{t}}-1=3$

$\min(P)=3$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x+2y+1=2\\x^2+y^2-6x-2y+5=0\end{cases}$ có nghiệm $(1;0)$ hoặc $\left(\dfrac{-6}{5};\dfrac{17}{5}\right)$

19

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $5(a^2+b^2+c^2)=6(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=\sqrt{2(a+b+c)}-(a^2+b^2)$$

Lời giải

Quan sát biểu thức M nếu như ta đánh giá được biểu thức trong căn thức với một đại lượng liên quan đến a,b thì ta có thể dễ dàng đưa về hàm số hơn.

Ta có

$$\frac{5}{2}(a+b)^2+5c^2\leq 5(a^2+b^2)+5c^2=6(ab+bc+ca)\leq\frac{6}{4}(a+b)^2+6c(a+b)$$

$$\Rightarrow 5c^2-6c(a+b)+(a+b)^2\leq 0\Leftrightarrow\frac{a+b}{5}\leq c\leq a+b\Rightarrow a+b+c\leq 2(a+b)$$

Khi đó: $M=\sqrt{2(a+b+c)}-(a^2+b^2)\leq\sqrt{2(a+b+c)}-\dfrac{1}{2}(a+b)^2\leq\sqrt{4(a+b)}-\dfrac{1}{2}(a+b)^2$

Đặt $t=\sqrt{a+b}\Rightarrow t\geq 0$ và $M\leq 2t-\dfrac{1}{2}t^4$

Xét hàm số: $f(t)=2t-\dfrac{1}{2}t^4$ với $t\geq 0$, có $f'(t)=2-2t^3\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Lập bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ BBT suy ra $f(t)\leq\dfrac{3}{2},\forall t\geq 0$, dấu "=" $t=1\Rightarrow M\leq\dfrac{3}{2},\forall a,b,c\geq 0$

20

Với mọi số thực x,y thỏa mãn điều kiện $2\left(x^2+y^2\right)=xy+1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^4+y^4}{2xy+1}$.

Lời giải

Đặt $t=xy$. Ta có: $xy+1=2\left[(x+y)^2-2xy\right]\geq -4xy\Rightarrow xy\geq -\dfrac{1}{5}$

Và $xy+1=2\left[(x-y)^2+2xy\right]\geq 4xy \Rightarrow xy\leq \frac{1}{3}$ nên $-\frac{1}{5}\leq t\leq \frac{1}{3}$.

Suy ra $P=\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{2xy+1}=\frac{-7t^2+2t+1}{4(2t+1)}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{-7t^2+2t+1}{4(2t+1)}$ với $-\frac{1}{5}\leq t\leq \frac{1}{3}$.

Có $f'(t)=\frac{7(-t^2-t)}{2(2t+1)^2}; f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1(l)\end{array}\right.$

$f\left(-\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}; f(0)=\frac{1}{4}$

Vậy GTLN của *P* bằng $\frac{1}{4}$, GTNN của *P* bằng $\frac{2}{15}$

Bình luận: Xử lý những bài toán 2 biến thường khá đơn giản, không cần nhiều kĩ thuật rắc rối. Chú ý tìm cách để đưa về các biểu thức đối xứng dạng Vi-et

21

Cho $a^2+b^2-2a-4b+4=0$. Chứng minh rằng:

$$A=\left|a^2-b^2+2\sqrt{3}ab-2(1+2\sqrt{3})a+(4-2\sqrt{3})b+4\sqrt{3}-3\right|\leq 2$$

Lời giải

Biến đổi điều kiện $a^2+b^2-2a-4b+4=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2=1$.

Ở đây chúng ta nhận ra có dấu hiệu của dạng lượng giác. Nên ta sẽ giải tiếp như sau:

Đặt $\left\{\begin{array}{l} a-1=\sin\alpha \\ b-2=\cos\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1+\sin\alpha \\ b=2+\cos\alpha \end{array}\right. \Rightarrow A=\left|\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right|$

$$A=\left|\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\right|=2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right|=2\left|\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})\right|\leq 2 \quad \text{(dpcm)}$$

Bình luận: Kĩ thuật lượng giác trong BĐT có một sức mạnh cực kì khủng khiếp. Để nắm bắt được dấu hiệu của sử dụng các phép biến đổi lượng giác, xin các em học sinh hãy đọc lại thật kĩ các công thức và đẳng thức lượng giác đã được học ở chương trình phổ thông. Chúng tôi có gợi ý một bảng công thức như sau:

Biểu thức đại số	Biểu thức lượng giác	Công thức lượng giác
$1+x^2$	$1+tg^2t$	$1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 t}$
$4x^3-3x$	$4\cos^3t-3\cos t$	$4\cos^3t-3\cos t=\cos 3t$
$2x^2-1$	$2\cos^2t-1$	$2\cos^2t-1=\cos 2t$
$\frac{2x}{1-x^2}$	$\frac{2tgt}{1-tg^2t}$	$\frac{2tgt}{1-tg^2t}=tg2t$
$\frac{2x}{1-x^2}$	$\frac{2tgt}{1-tg^2t}$	$\frac{2tgt}{1+tg^2t}=\sin 2t$
$\frac{x+y}{1-xy}$	$\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$	$\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=tg(a+b)$
x^2-1	$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$	$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=tg^2a$
...	....	......

22

Cho a, b thỏa mãn: $|5a + 12b + 7| = 13$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 2(b-a)^3 \ge -1$

Lời giải

Biến đổi BĐT: $a^2 + b^2 + 2(b-a) \ge -1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 \ge 1$

Đặt $\begin{cases} a-1 = R\sin\alpha \\ b+1 = R\cos\alpha \end{cases}$ với $R \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = R\sin\alpha + 1 \\ b = R\cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2$

Ta có:

$$|5a + 12b + 7| = 13 \Leftrightarrow |5(R\sin\alpha + 1) + 12(R\cos\alpha - 1) + 7| = 13$$

$$\Leftrightarrow |5R\sin\alpha + 12R\cos\alpha| = 13 \Leftrightarrow 1 = R\left|\frac{5}{13}\sin\alpha + \frac{12}{13}\cos\alpha\right| = R\left|\sin\left(\alpha + \arccos\frac{5}{13}\right)\right| \le R$$

Từ đó $\Rightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2 \ge 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2 \ge 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2(b-a)^3 \ge -1$

Điều phải chứng minh.

23

Chứng minh rằng: $A = \left|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + \sqrt{3}\left(ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\right| \le 2$

Lời giải

Từ ĐK: $1 - a^2 \ge 0$; $1 - b^2 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \le 1$; $|b| \le 1$ Đặt $a = \sin a, b = \sin b$ với $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó $A = |\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)| =$

$= |\sin(\alpha+\beta) - \sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)| = 2\left|\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\beta)\right| = 2\left|\sin\left[(\alpha+\beta) - \frac{\pi}{3}\right]\right| \le 2$

24

CMR: $y\sqrt{x^2-1} + 4\sqrt{y^2-1} + 3 \le xy\sqrt{26}\quad \forall |x|;|y| \ge 1$

Lời giải

BĐT $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{4\sqrt{y^2-1}}{y} + \frac{3}{y}\right) \le \sqrt{26}$ (1)

Do $|x|;|y| \ge 1$ nên đặt $x = \frac{1}{\cos\alpha}$; $y = \frac{1}{\cos\beta}$ với $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow S = \sin a + \cos a(4\sin b + 3\cos b) \le \sqrt{26}$

Ta có:

$$S \le \sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{(4^2+3^2)(\sin^2\beta + \cos^2\beta)} = \sin\alpha + 5\cos\alpha$$

$$\le \sqrt{(1^2+5^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \sqrt{26} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

25

Chứng minh rằng: $\left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \le \frac{1}{2}\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Lời giải

Đặt a = tga, b = tgb Khi đó $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| = \left|\dfrac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}\right|$

$$= \left|\cos^2\alpha\cos^2\beta.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.\frac{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}\right|$$

$$= |\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)| = \frac{1}{2}|\sin[2(\alpha+\beta)]| \le \frac{1}{2}$$

Điều phải chứng minh.

26

Chứng minh rằng: $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \dfrac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \ge \dfrac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}$ $\forall a,b,c$

Lời giải

Đặt a = tgα, b = tgβ, c = tgγ. Khi đó ta có

BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{|tg\alpha-tg\beta|}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} + \dfrac{|tg\beta-tg\gamma|}{\sqrt{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}} \ge \dfrac{|tg\gamma-tg\alpha|}{\sqrt{(1+tg^2\gamma)(1+tg^2\alpha)}}$

$\Leftrightarrow \left|\cos\alpha\cos\beta.\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\right| + \left|\cos\beta\cos\gamma.\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}\right| \ge \left|\cos\gamma\cos\alpha.\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma.\cos\alpha}\right|$

$\Leftrightarrow |\sin(\alpha-\beta)|+|\sin(\beta-\gamma)| \ge |\sin(\gamma-\alpha)|$.

Biến đổi biểu thức vế phải, ta có

$|\sin(\gamma-\alpha)| = |\sin[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)]| = |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)| \le$

$|\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)|+|\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)| = |\sin(\alpha-\beta)||\cos(\beta-\gamma)|+|\sin(\beta-\gamma)||\cos(\alpha-\beta)|$

$\le |\sin(\alpha-\beta)|.1 + |\sin(\beta-\gamma)|.1 = |\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)|$

$\Rightarrow$ đpcm

27

Cho x, y, z > 0 vµ zy + yz + zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3(x+y+z)$$

Lời giải

GÕ LẠI

Từ $0<x, y, z<1$ nên ta đặ $t = tg\frac{\alpha}{2}$; $y = tg\frac{\beta}{2}$; $z = tg\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do xy + yz + zx = 1 nên ta có

$$\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{\alpha}{2}\left(tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right) = 1 - tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}}{1-tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow tg\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \cot g\frac{\alpha}{2}.$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi$$

$$S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3(x+y+z)=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}-3\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$S=\left(\cot g\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\cot g\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)+\left(\cot g\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)-2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$S=2(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma)-2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$S=(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta-2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2})+(\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma-2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})+(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta-2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2})$$

Để ý rằng: $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}=\dfrac{2\sin\gamma}{2\sin\alpha.\sin\beta}=\dfrac{2\sin\gamma}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

$$\geq\frac{2\sin\gamma}{1-\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\gamma}{1+\cos\gamma}=\frac{4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}=2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\cot g\alpha+\cot g\beta-2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geq 0$$

Từ đó suy ra $S\geq 0$. Với $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\operatorname{Min}S=0$

Bình luận: Chúng ta hệ thống lại một chút về lý thuyết các phép đặt lượng giác hóa liên quan đến dạng bài này:

a) Nếu $\begin{cases}x;y;z>0\\x^2+y^2+z^2+2xyz=1\end{cases}$ thì $\exists\Delta ABC:\begin{cases}A;B;C\in(0;\frac{\pi}{2})\\x=\cos A;y=\cos B;z=\cos C\end{cases}$

b) Nếu $\begin{cases}x;y;z>0\\x+y+z=xyz\end{cases}$ thì $\exists\Delta ABC:\begin{cases}A;B;C\in(0;\frac{\pi}{2})\\x=\operatorname{tg}A;y=\operatorname{tg}B;z=\operatorname{tg}C\end{cases}$

c) Nếu $\begin{cases}x;y,z>0\\xy+yz+zx=1\end{cases}$ thì $\exists\Delta ABC:\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A;B;C\in(0;\frac{\pi}{2})\\x=\cot gA;y=\cot gB;z=\cot gC\end{cases}\\\begin{cases}A;B;C\in(0;\pi)\\x=\operatorname{tg}\frac{A}{2};y=\operatorname{tg}\frac{B}{2};z=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\end{cases}\end{array}\right.$

Các lời giải bằng phép lượng giác hóa thường rất đẹp mắt, song các bạn cần phải luyện tập nhiều và có khả năng biến đổi lượng giác tốt Một cách chủ quan mà nhận xét thì ở phổ thông, việc làm việc với các biểu thức lượng giác tương đối dễ hơn so với các biểu thức đại số. Dù cho nhìn thì có vẻ các biểu thức đại số ít cồng kềnh và dễ hiểu hơn rất nhiều. Với xu hướng thay đổi cách ra đề thi gần đây gắn với các ứng dụng. Thì việc áp dụng lượng giác trong các bài toán HPT hay BĐT là điều hoàn toàn khả thi.

28

Cho $0<x,\ y,\ z<1$ và thỏa mãn $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x^2+y^2+z^2$

Lời giải

Do $0<x,y,z<1$ nên ta đặt $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$; $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2x}{1-x^2}$; $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{2x}{1-x^2}$; $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{2x}{1-x^2}$ và đẳng thức ở giả thiết

$\Leftrightarrow\dfrac{2x}{1-x^2}+a,b,c>0++\dfrac{2x}{1-x^2}=\dfrac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma$

$$\Leftrightarrow \ tg\alpha + tg\beta = -tg\gamma(1-tg\alpha.tg\beta) \Leftrightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta} = -tg\gamma \Leftrightarrow tg(\alpha+\beta) = tg(-\gamma)$$

Do $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\alpha + \beta = \pi - \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$. Khi đó ta có

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 1.$$

Mặt khác

$$(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow S = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1. \text{ Với } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

thì MinS = 1

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

29 Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $S = \dfrac{x}{x+yz} + \dfrac{y}{y+zx} + \dfrac{z}{z+xy} \leq \dfrac{9}{4}$

Đặt $\sqrt{\frac{yz}{x}} = tg\frac{\alpha}{2}$; $\sqrt{\frac{xz}{y}} = tg\frac{\beta}{2}$; $\sqrt{\frac{xy}{z}} = tg\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do $\sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{yz}{x}} = x + y + z = 1$

$$\text{nên} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-yz}{x-yz} + \frac{y-zx}{y+zx} + \frac{z-xy}{z+xy}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(-\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos + \cos\beta + \cos\gamma) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}[(\cos\alpha + \cos\beta).1 - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha + \sin\beta)] + \frac{3}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}((\cos\alpha + \cos\beta)^2 + 1) + \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - \cos\alpha\cos\beta\right] + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

(đpcm)

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow tg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = cotg\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow tg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$S = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2x}{x+yz} - 1\right) + \left(\frac{2y}{y+zx} - 1\right) + \left(\frac{2z}{z+xy} - 1\right)\right] + \frac{3}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}((\cos\alpha + \cos\beta)^2 + 1) + \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - \cos\alpha\cos\beta\right] + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \text{ (đpcm)}$$

Để nắm rõ hơn kĩ thuật lượng giác hóa. Các bạn hãy thử sức với các bài toán sau:

Bài toán $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ CMR: $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài toán Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$ CMR: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \dfrac{3}{2}$

Bài toán Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ CMR: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} \geq \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$

30 Cho các số thực $a,b,c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{a^2+b^2+2ab}{c^2+4(ab+bc+ca)}$

Lời giải

P được viết lại dưới dạng tương đương là

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2+4c(a+b)+4ab} \ge \frac{(a+b)^2}{c^2+4c(a+b)+(a+b)^2} = M$$

Do $a,b,c \in [1;2]$ nên $a+b \ne 0$, nên chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$$M = \frac{1}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a+b}\right)+1} = \frac{1}{t^2+4t+1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}$$

Với $a,b,c \in [1;2] \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{4};1\right]$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{t^2+4t+1}$ trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$

Ta có $f'(t) = \dfrac{-2(t+2)}{(t^2+4t+1)^2} < 0,\ \forall\ t \in \left[\frac{1}{4};1\right] \Rightarrow f'(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$

Do đó $\forall\ t \le 1 \Rightarrow f(t) \ge f(1) = \dfrac{1}{6}$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1 \Leftrightarrow (a;b;c) = (1;1;2)$

Vậy Min $P = \dfrac{1}{6}$ khi $(a;b;c) = (1;1;2)$

Bình luận: Đánh giá $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$ là một chiếc chiếc khóa Vàng để giải các bài toán BĐT, Chúng ta đã thấy được điều này qua 2 bài toán BĐT trong Đề thi ĐH khối A,B năm 2014! Điều đáng nói là cả 2 bài toán này đều được giải nhờ đánh giá trên. Hãy nhớ một điều: Lời giải một bài toán phức tạp luôn luôn bắt đầu từ những đánh giá cơ bản nhất ! Tác giả đã cố gắng che dấu đi bản chất một cách lắt léo và phức tạp hóa. Nên hãy bình tĩnh để gỡ rối. Bình tĩnh và biết xuất phát từ những điều đơn giản là điều cần thiết khi đứng trước một bài toán BĐT.

31 Cho ba số thực x,y,z thoả mãn: $x^2+y^2+z^2 \le 2x-4y-1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = 2(x+z)-y$

Lời giải

$$x^2+y^2+z^2 \le 2x-4y-1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 \le 4 \qquad (1)$$

Ở đây ta thấy xuất hiện một biểu thức na ná mặt cầu và biểu thức T có dạng một phương trình đường thẳng nên ta thử tiếp cận nó bằng hình học thử xem:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz . Xét mặt cầu:

$(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 4$. Có tâm $I(1;-2;0)$,bán kính $R = 2$.

Xét $mp(\alpha): 2x-y+2z-T = 0$

G/s $M(x;y;z)$. Từ (1) có điểm M nằm bên trong (S) và kể cả trên mặt cầu (S)

$$\Rightarrow d(I,(\alpha)) \le R$$

- $\Leftrightarrow \dfrac{|4-T|}{3} \le 2 \Leftrightarrow -2 \le T \le 10$ Với $T = -2$ thì M là giao điểm của $mp(\beta)$: $2x-y+2z+2 = 0$

Và đường thẳng Δ đi qua I và $\perp(\beta)$.

$$\Delta:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \Rightarrow M\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

Với $T=10$. Tương tự $M\left(\frac{7}{3};-\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$

Vậy $\min T = -2$ khi $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = z = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$\max T = 10$ khi $\begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = -\dfrac{8}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Yêu cầu: Các bạn hãy giải bài toán này bằng phương pháp đại số.

32

Cho x,y ∈ R và x, y > 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$

Lời giải

Đặt $t = x+y$; $t > 2$. Áp dụng BĐT $4xy \le (x+y)^2$ ta có $xy \le \dfrac{t^2}{4}$

$P = \dfrac{t^3-t^2-xy(3t-2)}{xy-t+1}$. Do 3t - 2 > 0 và $-xy \ge -\dfrac{t^2}{4}$ nên ta có

$$P \ge \frac{t^3-t^2-\dfrac{t^2(3t-2)}{4}}{\dfrac{t^2}{4}-t+1} = \frac{t^2}{t-2}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t-2}; f'(t) = \dfrac{t^2-4t}{(t-2)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4$.

t	2		4		$+\infty$
f'(t)	‖	-	0	+	
f(t)	‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

Do đó min P = $\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)$ = f(4) = 8 đạt được khi $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

33

Cho ba số thực dương a, b, c; tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+2b}{b+\sqrt{ab}} + \frac{b+2c}{c+\sqrt{bc}} + \frac{c+2a}{a+\sqrt{ca}}$$

Lời giải

Ta có bđt: $\dfrac{x^2+2}{x+1} \ge \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)^2}{4(x+1)} \ge 0$ => đúng với mọi x >0. (1)

Dấu "=" xảy ra khi x = 1

* Áp dụng (1), ta có: $\dfrac{a+2b}{b+\sqrt{ab}} = \dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2+2}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}+1} \ge \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \dfrac{5}{4}$, mọi a, b > 0

Tương tự ta có: $\dfrac{b+2c}{c+\sqrt{bc}} \ge \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{b}{c}} + \dfrac{5}{4}$ và $\dfrac{c+2a}{a+\sqrt{ca}} \ge \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{c}{b}} + \dfrac{5}{4}$, mọi a, b, c >0

Cộng ba bđt ta được: $P \ge \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right) + \dfrac{15}{4} \ge \dfrac{3}{4} + \dfrac{15}{4} = \dfrac{9}{2}, \quad \forall a,b,c > 0$

Vậy minP = 9/2, đạt được khi a = b = c.

Bình luận: Khi biểu thức là đồng bậc chúng ta hoàn toàn đưa biểu thức đó về một ẩn . Tư tưởng này chính là tư tưởng giải HPT đẳng cấp mà học sinh nào cũng đã được học .Sau khi giải xong bài toán này , một câu hỏi đặt ra là làm thế nào để ta có thể tìm ra được đánh giá đại diện như trong lời giải trên . Câu trả lời xin dành cho bạn đọc

34

Cho các số thức $a,b,c \in [0;1]$ .và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $\sqrt{a^2-4a+5} + \sqrt{b^2-4b+5} + \sqrt{c^2-4c+5}$

Lời giải

Việc đầu tiên chúng ta dự đoán dấu bằng xảy ra. Điều này không khó để dự đoán điểm rơi cực trị đạt tại biên nghĩa là có một số =0 và 2 số kia bằng nhau .Mà với tường mình thì $a=b=1, c=0$

Bây giờ ta có một cái nhìn tổng quát là $P = f(a)+f(b)+f(c)$. Nghĩa là chúng ta có thể kiểm soát được mỗi f(a),f(b) mà không bị rang buộc gì các biến còn lại . Nhưng trong một số trường hợp khó khăn , việc kiểm soát này cần đến công cụ chia để trị nhưng trong chương trình thi ta không cần quan tâm vấn đề này . Ok bây giờ ta phải kiểm soát được độ thay đổi của f(a) . Trong cuộc sống cũng thế, chúng ta phải biết kiểm soát dc độ biến thiên của bản thân qua từng ngày.

Vậy ta mong muốn có một đánh giá kiểu như là :

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x+5} \le mx+n$$

Mà dấu đẳng thức xảy ra tại 2 điểm 0 và 1 . Vậy chỉ cần thay x=0,1 vào ta có ngay được :

$$f(x) \le (\sqrt{2}-\sqrt{5})x + \sqrt{5}$$

Bây giờ ta chứng minh điều này nhưng điều này khá đơn giản . Công việc giờ đây khá đơn giản áp dụng đánh giá trên với lần lượt a,b,c rồi công lại với nhau ta có ngay KQ .

35

Cho $x,y,z>0$ và $xyz=8$ .Tìm GTLN của biểu thức :

$$P = \frac{1}{2x+y+6} + \frac{1}{2y+z+6} + \frac{1}{2z+x+6}$$

Lời giải

Bài toán này liên quan đến kĩ năng sử dụng giả thiết của học sinh , thông thường các bạn quen với kiểu giả thiết xyz=1 nhưng thực ra thì xyz=8 hay bằng bao nhiêu về bản chất là một . Nhưng để tìm dc chút gì quen thuộc ta đặt x=2a,y=2b,z=2c để có abc=1 .

Lúc này $P=\frac{1}{2}(\frac{1}{2a+b+3}+\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{2c+a+3})$

Lúc này ta có nhận xét điểm xảy ra đẳng thức là $a=b=c=1$

Và để xử lý max của một biểu thức dạng như trên thì ta nghĩ ngay đến gì ? Nhớ lại buổi 1 , ta có :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$$

Vậy ta có : $P\leq\frac{1}{4}(\sum\frac{1}{a+b+1}+\sum\frac{1}{a+2})$

Bây giờ ta sẽ đi CM : $\sum\frac{1}{a+b+1}+\sum\frac{1}{a+2}\leq 2$

Tách thành 2 BDT nhé , cụ thể ta CM : $\begin{cases}\sum\frac{1}{a+b+1}\leq 1\\ \sum\frac{1}{a+2}\leq 1\end{cases}$

2 BĐT trên có thể chứng minh đơn giản bằng cách nhân tung tóe lên rồi biến đổi tương đương . Nhưng cũng có thể cách xử lý khác như sau :

Đặt $a=x^2$ tương tự với b,c .

Thì $xyz\geq 1$

Ta cần cm : $\sum\frac{1}{x^2+y^2+1}\leq 1$

Theo BCS thì ta có : $\frac{1}{x^2+y^2+1}=\frac{z^2+2}{(x^2+y^2+1)(1+1+z^2)}\leq\frac{z^2+2}{(x+y+z)^2}$

Thiết lập tương tự thêm 2 BĐT nữa rồi cộng lại ta có dpcm .

36

Cho ba số thực dương *a*, *b*, *c* thỏa mãn $a+b+c=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $P=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+3}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{b+3}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{c+3}}$

Bây giờ làm thế nào để có thể đi đến **Lời giải** ? Ta sẽ dùng điểm rơi AM-GM để giải quyết (vì sao lại như vậy, xin dành cho bạn đọc)

Áp dung bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a+3}}+\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a+3}}+\frac{a+3}{16}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{64}}=\frac{3b}{4}$$

Tương tự $\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{b+3}}+\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{b+3}}+\frac{b+3}{16}\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{64}}=\frac{3c}{4}$; $\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{c+3}}+\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{c+3}}+\frac{c+3}{16}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}}=\frac{3a}{4}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+3}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{b+3}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{c+3}}+\frac{a+b+c+9}{16}\ge\frac{3}{4}(a+b+c)\Leftrightarrow P\ge\frac{3}{2}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c=1$

37

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện sau

$$a^2b^2c^2+(1+a)(1+b)(1+c)\ge a+b+c+ab+bc+ac+3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\frac{a^3}{(b+2c)(2c+3a)}+\frac{b^3}{(c+2a)(2a+3b)}+\frac{c^3}{(a+2b)(2b+3c)}$.

Lời giải

$a^2b^2c^2+(1+a)(1+b)(1+c)\ge a+b+c+ab+bc+ac+3$

$\Leftrightarrow (abc)^2+abc-2\ge 0$

$\Leftrightarrow (abc+2)(abc-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow abc\ge 1$

Như vậy là ta đã tạm thời xử lý được giả thiết cồng kềnh rồi. Bây giờ ta thử quan sát biểu thức S. Dễ thấy các biểu thức hơn kém nhau 1 bậc. Gợi ý cho chúng ta sử dụng điểm rơi AM-GM:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{a^3}{(b+2c)(2c+3a)}+\frac{b+2c}{45}+\frac{2c+3a}{75}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+2c)(2c+3a)}.\frac{b+2c}{45}.\frac{2c+3a}{75}}=\frac{a}{5}(1)$$

CM tương tự có:

$$\begin{cases}\frac{b^3}{(c+2a)(2a+3b)}+\frac{c+2a}{45}+\frac{2a+3b}{75}\ge\frac{b}{5}(3)\\ \frac{c^3}{(a+2b)(2b+3c)}+\frac{a+2b}{45}+\frac{2b+3c}{75}\ge\frac{c}{5}(2)\end{cases}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có : $S+\frac{2(a+b+c)}{15}\ge\frac{a+b+c}{5}\Leftrightarrow S\ge\frac{1}{15}(a+b+c)$

Mà $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3$

Vậy $S\ge\frac{1}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy S đạt GTNN là $\frac{1}{5}$ khi $a=b=c=1$

38

Cho x,y,z là các số dương thay đổi thỏa mãn $x+y+2z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x^2+y^2+4z^2+\frac{xy+2yz+2zx}{x^2y+2y^2z+4z^2x}.$$

Lời giải

Ta có

$$3(x^2+y^2+4z^2)=(x+y+2z)(x^2+y^2+4z^2)=x^3+y^3+8z^3$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+4z^2 \ge x^2y+2y^2z+4z^2x \Rightarrow P \ge x^2+y^2+4z^2+\frac{xy+2yz+2zx}{x^2+y^2+4z^2}$$

$$\Rightarrow P \ge x^2+y^2+4z^2+\frac{2(xy+2yz+2zx)}{2(x^2+y^2+4z^2)}=x^2+y^2+4z^2+\frac{(x+y+2z)^2-(x^2+y^2+4z^2)}{2(x^2+y^2+4z^2)}$$

$$\Rightarrow P \ge x^2+y^2+4z^2+\frac{9-(x^2+y^2+4z^2)}{2(x^2+y^2+4z^2)}$$

Đặt $t=x^2+y^2+4z^2$. Do $3^2=(x+y+2z)^2 \le 3(x^2+y^2+4z^2) \Rightarrow t \ge 3$

$$\Rightarrow P \ge t+\frac{9-t}{2t}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{9-t}{2t}, t \ge 3$

Ta có $f'(t)=\frac{8t^2+8}{4t^2}>0 \Rightarrow \underset{t\ge 3}{\operatorname{Min}} f(t)=f(3)=4 \Leftrightarrow t=3$

$$\Rightarrow x+y+2z=3 \Rightarrow x=y=1, z=\frac{1}{2}.$$

Vậy $\operatorname{Min}P=4 \Leftrightarrow x=y=1, z=\frac{1}{2}$

39

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a+b+c+48\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\right)$.

Lời giải

Trước hết ta có dự đoán dấu đẳng thức xảy ra. Dễ thấy đẳng thức xảy ra tại a=2,b=3,c=5 . Cũng thấy được quan hệ $c=a+b$. Nên gợi ý cho ta cách xử lý điều kiện như sau

Ta có $5(a+b+c)=(a+b)^2+c^2 \ge \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \Rightarrow 0<(a+b+c)\le 10$.

Bây giờ,ta mong là sẽ dồn được về biến $t=a+b+c$ .Nhưng trước hết, ta hãy làm mất căn thức , đây là thao tác bất di bất dịch trong việc giải toán BĐT. Để làm được điều này , ta thử áp dụng BĐT AM-GM:

$$2\sqrt{\frac{a+10}{3}} \le \frac{1}{6}(a+22); \quad 3\sqrt[3]{b+c} \le \frac{1}{4}(c+b+16)$$

$$Q=a+b+c+48\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+10}{3}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}\right) \ge a+b+c+48\left(\frac{12}{a+22}+\frac{12}{b+c+16}\right)$$

$$\ge a+b+c+576\left(\frac{4}{a+b+c+38}\right)=a+b+c+\frac{2304}{a+b+c+38}$$

Xét $f(t)=t+\frac{2304}{t+38}$ với $t\in(0;10]$. $f'(t)=1-\frac{2304}{(t+38)^2}\le 0$ với $t\in(0;10]$

Do đó hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $(0;10]$, suy ra $f(x)\ge f(10)=58$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của Q bằng 58. khi a=2, b=3, c=5

40

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{a+c-b}}+\sqrt{\frac{c}{b+a-c}}\ge 3$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức *Cauchy* ta có

$$2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}\le\frac{b+c-a}{a}+1=\frac{b+c}{a}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\frac{2a}{b+c}$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{b}{a+c-b}}\ge\frac{2b}{a+c};\ \sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\ge\frac{2c}{a+b}$$

Mặt khác:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

41

Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x^3+y^3=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x^2+y^2}{(1-x)(1-y)}.$$

Lời giải

Đặt $S=x+y;P=xy$

Ta có

$$x^3+y^3=1\Leftrightarrow S^3-3PS=1\Rightarrow P=\frac{S^3-1}{3S}\Rightarrow S>1$$

Mặt khác $(x+y)^3\le 4(x^3+y^3)=4\Rightarrow S\le\sqrt[3]{4}$.

Ta có $A=\dfrac{x^2+y^2}{(1-x)(1-y)}=\dfrac{S^2-2P}{P+1-S}=\dfrac{S^3+2}{(S-1)^3}$.

Xét hàm số $f(S)=\dfrac{S^3+2}{(S-1)^3}$ với $1<S\le\sqrt[3]{4}$. Ta có $f'(S)=\dfrac{-3(S^2+2)}{(S-1)^4}<0$ nên hàm f(S) nghịch biến trên $\left(1;\sqrt[3]{4}\right]$.

Suy ra $f(S)\ge f\left(\sqrt[3]{4}\right)=\dfrac{6}{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)^3}$.

Vậy GTNN của A bằng $\dfrac{6}{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)^3}$, đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

42

Cho x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xy+yz+zx}$$

Lời giải

Vế trái của BĐT (1) cho ta nhớ lại về bài TST 2006. Kết quả đó là:

$$6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\le(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Do đó $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ (2)

* Dễ chứng minh được $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\le\frac{5}{2}$ (3) (có thể dùng Cauchy-Sch

* Từ (2) và (3) ta được:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{2}{3}\sum_{x,y,z}\frac{x}{y+z}+\frac{1}{3}\sum_{x,y,z}\frac{x}{y+z}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}-\frac{xy+yz\cdots}{x^2+y^2\cdots}\right.$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{xy+yz+zx}{3(x^2+y^2+z^2)}$$

* Vậy chỉ cần chứng minh bước cuối cùng là BĐT sau:

$$\frac{3}{xy+yz+zx}+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{4}{3}\quad(4)$$

BĐT (4) được chứng minh rất đơn giản bằng cách đặt $t=xy+yz+zx$.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét: Đây là một bài toán khá hay, có lẽ nó được sáng tác dựa trên BĐT TST năm 2006. Trc minh BĐT TST 2006 cũng chỉ cần giả thiết x,y,z là 3 cạnh một tam giác mà x+y+z=3. Có lẽ phé toán này chỉ có một kịch bản là phải dựa vào bài TST 2006 mà thôi.

43

Xét các đa thức $P(x)=x^3-6x^2+mx-n$ với $m,n\in R$ có 3 nghiệm thuộc đoạ Tìm đa thức sao cho m đạt GTNN.

Lời giải

Đây là dạng bài đã quá quen thuộc về việc đánh giá các hệ số của một đa thức thông qua các ngh đó. Vơi dạng toán này ta phải sử dụng định lý Viets và đánh giá trên các nghiệm.

Gọi ba nghiệm của P(x) là $x_1,x_2,x_3\in[1;3]$. Theo định Viet ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=m\end{cases}$$

Bổ đề: *Cho ba số* $a,b,c\in[0;2]$ *thỏa mãn* $a+b+c=3$. *Khi đó* $ab+bc+ca\ge2$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(0;1;2)$ *và các hoán vị.*

Trở lại bài toán: Áp dụng bổ đề với ba số $x_1-1,x_2-1,x_3-1\in[0;2]$ ta được:

$$(x_1-1)(x_2-1)+(x_2-1)(x_3-1)+(x_1-1)(x_3-1)\ge2$$

Suy ra $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\ge2(x_1+x_2+x_3)-1\Rightarrow m\ge11$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x_1,x_2,x_3)=(1;2;3)$.

Vậy m=11 và khi đó $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$

44

Giả sử a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=$ lớn nhất của biểu thức $P=a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}$

Lời giải

Đặt $P(a,\ b,\ c)=a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}$.

Ta nhận xét rằng nếu (a, b, c) thỏa mãn điều kiện $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$ thì (-a, -b,-c) c kiện này và $P(-a,-b,-c)=-P(a,\ b,c)$. Do đó, dễ thấy, GTLN của P phải là một số > 0. Vì a trong ba số a, b, c, sẽ có hai số cùng dấu. Nếu hai số cùng dấu này là số dương thì $P < 0$ nên ta không xét. Ta xét trường hợp có 2 số âm, một số dương. Giả sử $b, c < 0$. Đặt $b = -x$, $c = -y$ thì ta có $x > 0$, $y > 0$, $a = x + y$ và ta có

1) $x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$

2) $P = (x+y)^{2011} - x^{2011} - y^{2011}$

Từ 1), áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $\frac{3}{4}(x+y)^2 \le x^2 + y^2 + xy$ ta suy ra $x + y \le \frac{2}{\sqrt{6}}$ dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Tiếp theo, sử dụng đánh giá $x^n + y^n \ge \frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$ (có thể chứng minh dễ dàng bằng quy nạp hoặc bất đẳng thức Holder), ta có

$$P \le (2^{2010}-1)(x+y)^{2011}/2^{2010} \le \frac{2^{2011}-2}{(\sqrt{6})^{2011}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy $P_{max} = \frac{2^{2011}-2}{(\sqrt{6})^{2011}}$.

45

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right)\left(\frac{b}{c} - \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ca}\right).$$

Lời giải

Trước hết ta tìm cách đơn giản đi biểu thức P

$$P = \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right)\left(\frac{b}{c} - \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ca}\right)$$

$$= \left[\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right)\right]\left[\frac{c}{b}\left(\frac{b}{c} - \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}\right)\right]\left[\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{ca}\right)\right] = \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$

Suy ra $P = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1)$.

Giả thiết đã cho trở thành: x, y, z dương và $x + y + z = 3$.

Bây giờ ta có BĐT đối xứng 3 biến có giả thiết tổng $x + y + z = 3$ nên ta sẽ tư duy tự nhiên là dồn về $x, y+z$.

Để làm được điều này ta dùng một kĩ thuật khá mới đó là Nguyên lý Drichle.

Dễ thấy trong 3 số: $x - 1$, $y - 1$, $z - 1$ tồn tại 2 số có tích không âm. Giả sử $(y-1)(z-1) \ge 0$.

khi đó:

$$(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) = yz(y-1)(z-1) + y^2 + z^2 - y - z + 1$$

$$\ge (y^2 + z^2) - y - z + 1 \ge \frac{1}{2}(y+z)^2 - (y+z) + 1 > 0$$

Suy ra:

$$P = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \ge (x^2 - x + 1)\left[\frac{1}{2}(y+z)^2 - (y+z) + 1\right]$$

$$= (x^2 - x + 1)\left[\frac{1}{2}(3-x)^2 - (3-x) + 1\right] = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 5)$$

Ta chứng minh $(x^2-x+1)(x^2-4x+5)\geq 2$ (1)

Thực vậy, biến đổi (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$x^4-5x^3+10x^2-9x+3\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-3x+3)\geq 0$ luôn luôn đúng với mọi x.

Dấu = xẩy ra khi $x=1$. Từ đó suy ra $P\geq 1$, có dấu "=" khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy GTNN của P bằng 1 khi $a=b=c$.

Bình luận: Với BĐT dạng $f(x).f(y).f(z)\geq k$ thì việc đánh giá đại diện trở nên khá là vô dụng. Nên ta hãy chú ý lấy ra 2 đại diện và đánh giá chúng bằng Bunhiacopxki hoặc là dồn biến.

46

Với mọi số a,b,c không âm. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Với dạng bài này ta có thể dùng nguyên lí Drichlet quen thuộc:

Trong 3 số $1-a;1-b;1-c$ tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử $(1-a)(1-b)\geq 0 \Rightarrow 2c(1-a)(1-b)\Rightarrow 2abc\geq 2ac+2bc-2c$.

Do đó

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq a^2+b^2+c^2+1+2ac+2bc-2c$$
$$=(a-b)^2+(c-1)^2+2(ab+bc+ca)\geq 2(ab+bc+ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Một số bài toán tương tự :

1. (APMO 2004) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

2. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

3. (Hello summer 2007) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức

$$xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\geq 5(x+y+z)$$

47

Cho a,b,c thực. Chứng minh rằng $\dfrac{b^2-a^2}{2a^2+1}+\dfrac{c^2-b^2}{2b^2+1}+\dfrac{a^2-c^2}{2c^2+1}\geq 0$.

Lời giải

BĐT tương đương với

$$\frac{2b^2-2a^2}{2a^2+1}+\frac{2c^2-2b^2}{2b^2+1}+\frac{2a^2-2c^2}{2c^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2b^2+1}{2a^2+1}+\frac{2c^2+1}{2b^2+1}+\frac{2a^2+1}{2c^2+1}\geq 3.$$

BĐT này là hiển nhiên theo AM-GM.

Bình luận: Việc làm việc với các BĐT đối xứng được so sánh với 0 khá là rắc rối phức tạp. Để tránh được điều này, khi gặp những bài như vậy chúng ta cộng vào một lượng là hằng số thích hợp để chứng minh một BĐT khác tương đương (song có vẽ dễ thao tác hơn)

48

Cho *x*, *y*, *z* là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1$$

Lời giải

Quan sát ở mẫu số , ta thấy có một điều ta có thể đó là có xuất hiện lần lượt x,y,z nên ta sẽ đánh giá để hy vọng lấy ra được số hạng $x+y+z$.Điều này làm được nhờ bất đẳng thức BCS

Ta có

$$(y+\sqrt{zx}+z)^2=(\sqrt{y}.\sqrt{y}+\sqrt{x}.\sqrt{z}+\sqrt{z}.\sqrt{z})^2\le(y+x+z)(y+z+z)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}\ge\frac{1}{(x+y+z)(y+2z)}\Leftrightarrow\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}\ge\frac{2x^2+xy}{(x+y+z)(y+2z)}$$

$$=\frac{1}{(x+y+z)}\left(\frac{2x^2+xy}{y+2z}+x-x\right)=\frac{1}{(x+y+z)}\left(\frac{2x^2+2xy+2xz}{y+2z}-x\right)$$

$$=\frac{2x}{y+2z}-\frac{x}{x+y+z}.$$

Tương tự, cộng lại ta được

$$VT(1)\ge\frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}-1$$

Điều này đúng theo BĐT Nesbbit .

49

Cho các số nguyên dương *x,y,z* thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2012$. Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $M=xy+yz+zx$.

Lời giải

Bài toán này đặc biệt ở chỗ giả thiết cho các số nguyên dương , nên cách làm là dựa trên nguyên lý cực hạn . Đại khái nói dễ hiểu là chúng ta sẽ chứng minh nếu nó đạt cực trị thì các biến của chúng ta sẽ lệch nhau không quá 1 . Tư duy này là một tư duy nâng cao dành cho các bạn học sinh chuyên toán hoặc muốn học giỏi các cấu trúc tin học

Không mất tính tổng quát, coi $x\ge y\ge z$ thì $1\le z\le 670$.

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức BCS đối với bộ số $x,y,z+1$, ta được

$$2013^2=[x+y+(z+1)]^2\ge 3[xy+y(z+1)+(z+1)x],$$

Nên suy ra :

$$2013^2\ge 3(M+x+y)=3(M+2012-z)\ge 3(M+2012-670).$$

Suy ra

$$M\le\frac{2013^2}{3}-(2012-670)]=1349381.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=671,z=670$. Vậy $\max M=1349381$.

$M(x,y,z)=xy+yz+zx$ với các biến $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện $x\ge y\ge z$ và $x+y+z=2012$.

Nhận xét rằng, nếu $z\ge 2$, thì

$$M(x+1,y,z-1)=(x+1)y+y(z-1)+(z-1)(x+1)=M(x,y,z)+z-x-1<M(x,y,z)$$

Vậy nên $M(x,y,z)>M(x+z-1,y,1)$ ứng với mọi $z>1$.

Tương tự, khi $y\ge 2$, thì

$$M(x+1,y-1,1)=(x+1)(y-1)+y-1+x+1=xy+x+y+(y-x-1)<xy+x+y=M(x,y,1)$$

Vậy nên $M(x,y,z)>M(2010,1,1)$ ứng với mọi $z>1$ hoặc $y>1$.

Suy ra $\min M=M(2010,1,1)=4021$.

50

Cho x,y thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=x^2(x+2)+y^2(y+2)+3(x+y)(xy-4)$$

Lời giải

Ta có

$$(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) = 4 \Rightarrow -2 \le x+y \le 2$$

Khi đó

$$M = x^2(x+2)+y^2(y+2)+3(x+y)(xy-4)$$
$$= (x+y)^3 - 12(x+y)+4$$

Đặt $t = x+y \Rightarrow t \in [-2;2]$

Ta có $f(t) = t^3 - 12t + 4; f'(t) = 3t^2 - 12 \le 0 \forall t \in [-2;2]$

Do đó f(t) giảm

$$\max M = \max_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = 20 \Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow x = y = -1$$

$\min M = \min_{[-2;2]} f(t) = f(2) = -12 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

Nhận xét: Bài này giả thiết và biểu thức M được cho dưới dạng đối xứng hai biến. Nên ta sẽ giải bài toán này bằng cách đổi biến t=x+y hoặc đặt t=xy sau đó khảo sát hàm số f(t) . Sau đây là các bài toán có định hướng tương tự.

Bài toán: Cho x,y thực thỏa mãn $x^2(2x^2-1)+y^2(2y^2-1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2(x^2-4)+y^2(y^2-4)+2(x^2y^2-4)$

Bài toán: Cho x,y thực thỏa mãn $(x^2+y^2)^2 - 3(x^2+y^2)+2 = -x^2-3x^2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x^2+2y^2-3x^2y^2$

Bài toán: Cho $x,y \ne 0$ thỏa mãn $xy(x+y) = x^2+y^2-x-y+2$. Tìm min $P = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

51

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh:

$$1 = (a^2+b^2+c^2)^2 \ge 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Do đây là 1 bất đẳng thức hoán vị vòng quanh nên ta sẽ xét 2 trường hợp:

Nếu $a \ge b \ge c$. Lúc đó hiển nhiên ta có điều phải chứng minh:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 0 \ge 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

- Nếu $a \le b \le c$. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$4(a+b+c)(b-c)(c-b)(c-a) \le \left[(a+b+c)(b-a)+(c-a)(c-b)\right]^2$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2 \ge (a+b+c)(b-a)+(c-a)(c-b)$$
$$\Leftrightarrow a(2a+2c-b) \ge 0$$

Yêu cầu: Các em hãy giải bài toán trên bằng cách sử dụng phương pháp hàm số !

52

Cho x, y, z>0 và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy} \ge \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Lời giải

Nhân giả thiết cho $\sqrt{xyz}$ ta có: $\sqrt{xyz}=\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}$

Ta dễ dàng chứng minh được $\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{z}+\sqrt{\frac{xy}{z}}$

$$\Leftrightarrow z+xy\ge z+\frac{xy}{z}+2\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow z+xy\ge z+xy(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y})+2\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\ge 2\sqrt{xy}$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức AM-GM vậy bài toán được chứng minh

53

Cho các số thực dương x,y,z . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}.$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=\frac{36}{12\sqrt[12]{(xy)^2(xz)^2(yz)^2.1.1.1.1.1.1.1.1.1}}$$

$$\ge\frac{36}{12.\frac{[(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2+9]}{12}}=\frac{36}{x^2y^2+x^2z^2+z^2y^2+9}\text{(dpcm)}$$

Bình luận: Đôi lúc áp dụng AM-GM kết hợp với điểm rơi sẽ cho chúng ta những Lời giải rất bất ngờ .

54

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z\le 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=4x+3y+24z+\frac{19}{x}+\frac{25}{3y}+\frac{8}{3z}.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM và Cauchy-Schwarz

$$P=4x+3y+24z+\frac{19}{x}+\frac{25}{3y}+\frac{8}{3z}.$$

$$\left(4x+\frac{1}{x}\right)+\left(3y+\frac{1}{3y}\right)+\left(24z+\frac{2}{3z}\right)+2\left(\frac{9}{x}+\frac{4}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 4+2+8+72=86$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$a=\frac{1}{2};b=\frac{1}{3};c=\frac{1}{6}$$

55

Cho 3 số thực a,b,c $\in[\alpha;\beta]$ mà $\beta-\alpha\le 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ca+1}>a+b+c.$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{ab+1}\ge\sqrt{ab+(\frac{a-b}{2})^2}=|\frac{a+b}{2}|$.

Tương tự $\begin{cases}\sqrt{bc+1}\ge\sqrt{bc+\left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2}=|\dfrac{b+c}{2}| \\ \sqrt{ac+1}\ge\sqrt{ac+\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2}=|\dfrac{a+c}{2}|.\end{cases}$

Cộng lại rồi sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $|x|+|y|+|z|\ge|x+y+z|$ ta có điều cần chứng minh.

56

Cho x,y,z là ba số thực dương có tổng bằng 3.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3(x^2+y^2+z^2)-2xyz.$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}P&=3[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]-2xyz\\&=3[9-2(xy+yz+zx)]-2xyz\\&=27-6x(y+z)-2yz(x+3)\\&\ge27-6x(3-x)-\frac{(y+z)^2}{2}(x+3)\\&=\frac{1}{2}(-x^3+15x^2-27x+27)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+15x^2-27x+27$, với 0<x<3

$$f'(x)=-3x^2+30x-27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=9\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên suy ra MinP=7 $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

57

Giả sử *x, y, z* là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-\frac{x^3y^3+y^3z^3}{24x^3z^3}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}=\frac{xy}{(z^2+x^2)+(z^2+y^2)}+\frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)}$$

$$\le\frac{xy}{2\sqrt{(z^2+x^2)(z^2+y^2)}}+\frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{z^2+x^2}+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{z^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{2yz}+\frac{y^2}{2xy}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{y}{2z}+\frac{y}{2x}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right).$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $x^3y^3+y^3z^3\ge\frac{1}{4}(xy+yz)^3$ nên

$$\frac{x^3y^3+y^3z^3}{z^3x^3}\ge\frac{(xy+yz)^3}{4z^3x^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)^3.$$

Suy ra $P \le \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{96}\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)^3$.

Đặt $t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x}$, khi đó $t > 0$ và $P \le -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{8}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$, vì $t > 0$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{12}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \le \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{12}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bình luận: Việc thay thế một hằng số bằng giả thiết của bài toán là công việc thường hay được sử dụng khi giải các bài toán về bất đẳng thức đại số .

58

Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn $3(x+y)^2 = 4\left(x^2 + y^2 + 1\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+2y}{x^2+2y^2} + \frac{2x+y}{2x^2+y^2}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x+2y}{x^2+2y^2} - \frac{1}{x+y} = \frac{xy}{(x^2+y^2)+y^2}\cdot\frac{3}{x+y} \le \frac{xy}{2xy+y^2}\cdot\frac{3}{x+y} = \frac{x}{2x+y}\cdot\frac{3}{x+y}.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{2x+y}{2x^2+y^2} - \frac{1}{x+y} \le \frac{y}{x+2y}\cdot\frac{3}{x+y}.$$

Mặt khác, ta có $\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y} \le \frac{2}{3}$, vì bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{x^2+y^2+4xy}{2x^2+2y^2+5xy} \le \frac{2}{3}, \text{ hay } (x-y)^2 \ge 0.$$

Từ đó ta có $P - \frac{2}{x+y} \le \left(\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{x+2y}\right)\cdot\frac{3}{x+y} \le \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{x+y} = \frac{2}{x+y}$. Suy ra $P \le \frac{4}{x+y}$. (1)

Từ giả thiết ta lại có $3(x+y)^2 = 4(x^2+y^2) + 4 \ge 2(x+y)^2 + 4$.

Suy ra $(x+y)^2 \ge 4$, hay $x + y \ge 2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \le 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2, đạt được khi $x = y = 1$.

Bình luận: Hãy thử giải bài toán này bằng cách khai triển trực tiếp và đưa về các biểu thức $S = x + y, P = xy$

59

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $a+b+c\geq 3$ .Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^3-c^2}{(c+a)^2}\geq 0$$

Lời giải

Cộng thêm 3 vào vế trái, ta cần chỉ ra rằng :

$$\sum\frac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2}\geq 3$$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có :

$$\left(a^3+2ab+b^2\right)\left(a+2ab+b^2\right)\geq (a+b)^4$$

Vậy suy ra : $\dfrac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2}\geq\dfrac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}$

Tương tự , ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{b^3+2bc+c^2}{(b+c)^2}\geq\dfrac{(b+c)^2}{b+2cb+c^2}\\ \dfrac{c^3+2ac+a^2}{(a+c)^2}\geq\dfrac{(c+a)^2}{c+2ca+a^2}\end{cases}$$

Áp dụng BCS, ta có : $\dfrac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}+\dfrac{(b+c)^2}{b+2cb+c^2}+\dfrac{(c+a)^2}{c+2ca+a^2}\geq 3$

Vậy ta kết thúc chứng minh ở đây , dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

60

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$ .Chứng minh rằng :

$$\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}+\sqrt{2(c^2+1)}\leq 1+\frac{5}{3}(a+b+c)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\sqrt{2(a^2+1)}\leq\dfrac{a^2+1}{a+1}+\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{3(a+1)}{2}-\dfrac{2a}{a+1}$

Tương tự, ta suy ra: $\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}+\sqrt{2(c^2+1)}\leq\dfrac{3(a+b+c)}{2}+\dfrac{9}{2}-2.\left(\sum\dfrac{a}{a+1}\right)$

Ta cần chứng minh: $2.\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\right)+\dfrac{a+b+c}{6}\geq\dfrac{7}{2}$

Mặt khác ta có: $\dfrac{2a}{a+1}+\dfrac{a}{6}\geq\dfrac{2\ln a}{3}+\dfrac{7}{6}$ (1)

Suy ra: $2.\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\right)+\dfrac{a+b+c}{6}\geq\dfrac{2\ln a}{3}+\dfrac{2\ln b}{3}+\dfrac{2\ln c}{3}+\dfrac{7}{2}=\dfrac{7}{2}$

Phép chứng minh được hoàn tất .

Bình luận: Chắc hẳn các bạn đang thắc mắc là tại sao lại có đánh giá (1) . Hãy xem kĩ chương Kĩ thuật hệ số bất định trong cuốn sách này nhé.

61

Cho a,b,c là các số thực dương thõa mãn $ab\geq\frac{7}{3}$ và $3a+57b+7c=3abc+\frac{100}{a}$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=a+b+c\ .$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $P \geq \frac{35}{3}$.

Từ điều kiện của đề bài và áp dụng AM-GM, ta có:

$$7P = 3abc - 50b + \left(\frac{100}{a} + 4a\right) \geq 3abc - 50b + 40$$

Ta sẽ tính được $c = \frac{3a^2 + 57ab - 100}{a(3ab-7)}$.

Ta cần chỉ ra được: $3abc - 50b \geq \frac{125}{3}$

Để ý thấy $3abc - 50b - \frac{125}{3} = \frac{150b + 27a^2b + 63ab^2 - 375ab + 875}{3(3ab-7)}$

Vậy nên, ta cần chứng minh: $f(a,b) = 150b + 27a^2b + 63ab^2 - 375ab + 875 \geq 0 \quad (1)$

Nếu $b > \frac{60}{7}$ thì $63ab^2 - 375ab = ab(63b - 375) > 0$ nên (1) đúng.

Nếu $b \leq \frac{60}{7}$ thì $f(a,b) = \frac{b(18a + 21b - 125)^2}{12} + \frac{7(60-7b)(3b-5)^2}{12} \geq 0$

Vậy (1) đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = c = 5; b = \frac{5}{3}$.

62

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + 6z^2 = 4z(x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{y(x+z)^2} + \frac{y^3}{x(y+z)^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Lời giải

Bài toán cho điều kiện khá rắc rối nhưng khá may mắn là nó đồng bậc nên cách xử lý khá quen thuộc.

Từ giả thiết, ta có: $(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 + 6 = 4(\frac{x}{z} + \frac{y}{z})$

Đặt $\frac{x}{z} = a, \frac{y}{z} = b \Rightarrow a^2 + b^2 + 6 = 4(a+b) \Rightarrow \begin{cases} 4(a+b) = a^2 + b^2 + 6 \geq 2ab + 6 \\ 4(a+b) = a^2 + b^2 + 6 \geq 2(a+b) + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b) \geq ab + 3 \\ a + b \geq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$P = \frac{a^3}{b(a+1)^2} + \frac{b^3}{a(b+1)^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{a^3}{b(a+1)^2} + \frac{b^3}{a(b+1)^2} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}} \geq Q + \sqrt{2}$$

Xét Q, áp dụng AM-GM, ta có:

$$\frac{a^3}{b(a+1)^2} + \frac{a+1}{8} + \frac{ab+b}{8} \geq \frac{3a}{4}; \frac{b^3}{a(b+1)^2} + \frac{b+1}{8} + \frac{ab+a}{8} \geq \frac{3b}{4}$$

Cộng 2 bất đẳng thức lại, ta có:

$$Q \geq \frac{a+b}{2} - \frac{ab}{4} - \frac{1}{4} \geq \frac{a+b}{2} - \frac{2(a+b)-3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

63

Cho a,b là các số thực dương và thõa mãn $a^2+b^2=a+b$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=3a+2b+\frac{16}{\sqrt{a+3b}}+\frac{16}{\sqrt{3a+1}}$$

Lời giải

Viết biểu thức đã cho lại thành : $P=\left(a+3b+\frac{16}{\sqrt{a+3b}}\right)+\left(3a+1+\frac{16}{\sqrt{3a+1}}\right)-(a+b)-1$

Từ giả thiết, ta có : $a+b=a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}\Leftrightarrow a+b\leq 2$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có :

$$\begin{cases} a+3b+\frac{16}{\sqrt{a+3b}}=a+3b+\frac{8}{\sqrt{a+3b}}+\frac{8}{\sqrt{a+3b}}\geq 12 \\ 3a+1+\frac{16}{\sqrt{3a+1}}=3a+1+\frac{8}{\sqrt{3a+1}}+\frac{8}{\sqrt{3a+1}}\geq 12 \end{cases}$$

Suy ra $P\geq 24-2-1=21$ .Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$

64

Cho các số thực thõa mãn $x,y,z>0$ và thõa mãn $x=y+z+xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(z+z\sqrt{xy})^2}{(x+y)(z^2+1)}+\frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} P=\frac{z(z+xyz+2z\sqrt{xy})}{(x+y)(z^2+1)}+\frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}} \\ P=\frac{z(x-y+2z\sqrt{xy})}{(x+y)(z^2+1)}+\frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có :

$$x-y+2z\sqrt{xy}=\sqrt{\left[(x-y).1+2\sqrt{xy}.z\right]^2}\leq\sqrt{\left[(x-y)^2+4xy\right](1+z^2)}=(x+y)\sqrt{z^2+1}$$

Vì thế, ta có

$$P\leq\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{2z}{\sqrt{z^2+1}}\left(1-\frac{z^2}{z^2+1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\leq\frac{3z}{\sqrt{z^2+1}}-\frac{2z^3}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Khảo sát hàm số $f(t)=3t-2t^3$ với $0\leq t=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta thấy $P\leq f(t)\leq\sqrt{2}$. Dấu bằng xaye ra khi và chỉ khi $x=\sqrt{2}+1, y=\sqrt{2}-1, z=1$

65

Cho $a\geq b\geq c>0$ .Chứng minh rằng: $P=\frac{(3ab+bc)^2}{b^4}+\frac{121b^2}{a^2+b^2+c^2+8ac}\geq 27$

Lời giải

Đặt

$$x=\frac{a}{b},y=\frac{c}{b},x\ge 1\ge y;P=(3x+y)^2+\frac{121}{x^2+y^2+8xy+1};$$

Ta có

$$x^2+y^2+8xy+1=t;(3x+y)^2=6x^2+x^2+2x^2+6xy+y^2\ge 6+x^2+8xy+y^2=t+5$$

$$P\ge t+5+\frac{121}{t}=f(t)$$

$$f(t)\ge 27\Leftrightarrow (t-11)^2=0 => P=27\Leftrightarrow a=b=c$$

Vậy $\min P=27$

66

Cho các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$ .Chứng minh rằng :

$$P=\frac{4x}{y(2\sqrt{1+8y^3}+4x-2)}+\frac{4y}{z(2\sqrt{1+8z^3}+4y-2)}+\frac{4z}{x(2\sqrt{1+8x^3}+4z-2)}$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sqrt{1+8y^3}=\sqrt{(1+2y)(4y^2-2y+1)}\le 2y^2+1$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{y\left(2\sqrt{1+8y^2}+4x-2\right)}\ge\frac{x}{y\left(y^2+x\right)}=\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+x}\ge\frac{1}{y}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Từ đây suy ra :

$$P\ge\sum\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\sum\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^2+\frac{3}{2}\sum\frac{1}{\sqrt{x}}-3$$

$$\sum\frac{1}{\sqrt{x}}\ge\frac{9}{\sum\sqrt{x}}\ge\frac{9}{3\sqrt{\frac{x+y+z}{3}}}=3$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{3}{2};P=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1.$$

67

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x\le z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{2+\frac{2x^2}{(x+y)^2}-\frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}}+\frac{3z}{z+x}$$

Lời giải

Viết P lại dưới dạng dễ nhìn hơn

$$P=\sqrt{2(\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2})}+\frac{3z}{z+x}\ge\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{3z}{z+x}$$

Bây giờ, ta thấy bất đẳng thức là thuần nhất bậc, và cách giải quyết là khá quen thuôc:

Đặt $\frac{x}{y}=a,\frac{z}{y}=b(a\le b)$

Như vậy thì ta có: $P\ge\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{3b}{a+b}=f(a,b)$

Biểu thức 2 biến không có điều kiện gì bấu víu thì ta có thể tính đạo hàm hoặc chứng minh trực tiếp bằng biến đổi tương đương, mà cụ thể:

$$f(a,b)-\frac{5}{2}=\frac{(b-a)(3ab+a+b+3)}{2(a+b)(a+1)(b+1)}\ge 0\Rightarrow P=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=y=z$$

Lời giải được hoàn tất.

68

Cho $a,b,c\geq 0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$ Chứng minh rằng:

$$\frac{-3}{\sqrt{18}}\leq (a-b)(b-c)(c-a)\leq \frac{-3}{\sqrt{18}}$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với việc chứng minh :

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\leq \frac{1}{108}.$$

Không giảm tổng quát , giả sử $a\geq b\geq c$.

Một điều đặc biệt ở đât là đẳng thức xảy ra tại một điểm là 0 nên chúng ta hoàn toàn có thể mạnh dạn đánh giá như sau để triệt đi biến c :

$$\begin{cases}(b-c)^2\leq b^2\\ (a-c)^2\leq a^2\end{cases}$$

Ta cần chứng minh : $4a^2b^2(a-b)^2\leq \frac{1}{27}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM , ta có :

$$4a^2b^2(a-b)^2=(2ab)(2ab)(a^2-2ab+b^2))\leq \frac{(a^2+2ab+b^2)^3}{27}=\frac{(a+b)^6}{27}\leq \frac{(a+b+c)^6}{27}=\frac{1}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}c=0\\ a+b=1\\ a^2+b^2-4ab=0\end{cases}\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},0\right)$

Và các hoán vị tương ứng.

Bình luận: Xu hướng ra đề thi dồn về biên đang là một xu hướng những năm gần đây của Bộ giáo dục, các em học sinh cần thao tác kĩ dạng bài này.

69

Cho $a,b,c\geq 0$ và thỏa mãn $a+b+c=1$ Chứng minh rằng:

$$\frac{-3}{\sqrt{18}}\leq (a-b)(b-c)(c-a)\leq \frac{-3}{\sqrt{18}}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{4}{3}-\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{4}{3}-\frac{1}{c^2-c+1}\geq 1\Leftrightarrow \sum\frac{(2a-1)^2}{3(a^2-a+1)}\geq 1$$

Theo BCS : $\sum\frac{(2a-1)^2}{3(a^2-a+1)}\geq \frac{[2((a+b+c)-3)]^2}{3[a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+3]}$

Nên ta cần chứng minh rằng :

$$(a+b+c)^2+6(ab+bc+ac)\geq 9(a+b+c)$$

Điều này khá đơn giản nếu để ý rằng $ab+bc+ca\geq 3$

70

Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq 2(a+b+c+d)-4$$

Lời giải

Đây là một bài toán khá phức tạp . Ta cần phải có một đánh giá trung gian để làm mấy đi căn thức ở vế trái . Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\le\frac{a^2+b^2}{a+b}\Leftrightarrow(a-b)^4\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0\ \text{(luôn đúng)}$$

Suy ra: $\sum\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\le\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}$

Bây giờ mọi chuyện trở nên khá đơn giản và chúng ta không phải làm việc với căn thức nữa

Ta có:

$$2\sum a-\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}=2\sum\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ge 2.\frac{4^2}{\sum\frac{1}{a}}=4$$

Do đó : $\sum\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\le\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}\le 2\sum a-4$

Đây là điều phải chứng minh .

Bình luận: Thực ra không có một giải thích nào cho việc tìm ra đánh giá như trên cả. Bởi như vậy không còn là toán học nữa . Hãy nâng cao cảm giác toán học của mình bằng tỉ mĩ quan sát và mạnh dạn đánh giá thử và sai.

Với a,b,c là các số thực dương thõa mãn : $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$ .Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra : $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\le 2$ (1)

Bây giờ nhìn vào bài toán ta thấy sự xuất hiện của số hạng tự do đã làm bài toán trở nên không đồng bậc, vì các hạng tử còn lại đều là bậc 2 . Như vậy ta phải đồng bậc 2 , và chú ý ở đây là (1) có bậc 2 nên ta tìm cách thay số 1 với biểu thức này . Vì vậy ta đề xuất **Lời giải** như sau :

Do đó ta đi chứng minh BĐT mạnh hơn là

$$\frac{2ab+\sum a^2+\sum ab}{(a+b)^2}+\frac{2bc+\sum a^2+\sum ab}{(b+c)^2}+\frac{2ca+\sum a^2+\sum ab}{(c+a)^2}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\ge 3$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo AM-GM.

Cho $a,b,c>0$ thõa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}$$

Lời giải

Nếu như áp dụng trực tiếp Bất Đẳng Thức AM-GM thì ta sẽ bị ngược dấu, lúc này ta cần phải vượt qua điều này bằng kĩ thuật quen thuộc đó là AM-GM ngược dấu

Ta có :

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\geq 1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geq 3-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{2}=3-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-a-b-c}{4}$$

Ta cần chứng minh : $\frac{15}{4}-\frac{(\sum\sqrt{a})^2}{4}\geq\frac{9}{2(\sum\sqrt{a})}$

Đặt $t=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.Để ý rằng : $\sqrt{a+b+c}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3(a+b+c)}$

Nên $\Rightarrow \sqrt{3}<t\leq 3$ Bất đẳng thức được viết lại thành :

$$\frac{15}{4}-\frac{t^2}{4}\geq\frac{9}{2t}\Leftrightarrow(t-3)\left(t-\frac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}\right)\leq 0$$

Dễ thấy : $\sqrt{3}>\frac{\sqrt{33}-\sqrt{3}}{2}$ nên ta có ngay đpcm

Bình luận: Kĩ năng áp dụng AM-GM ngược dấu sẽ giúp bạn tìm được **Lời giải** một cách khá bất ngờ. Thông thường khi ở mẫu chưa các cấu hình $1+x^2;1+xy;a^2+2+2ab+3b^2$ ....thì ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức AM-GM .

3

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{19}{12}\geq\frac{6(a^4+b^4+c^4)}{7}$$

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức rất là chặt nên mọi đánh giá chúng ta cần phải cân nhắc. Và thêm một điều lưu ý là điều kiện ở đây chính là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Để làm mất đi điều kiện này, chúng ta thường sử dụng phép thế Ravi . $a=y+z,b=z+x,c=x+y$

Chú ý rằng:

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\geq 0$$

$$\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)^2\geq 2(a^4+b^4+c^4)$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{19}{12}\geq\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{7}$$

Đặt $a=y+z,b=z+x,c=x+y\Rightarrow x,y,z\geq 0;x+y+z=\frac{3}{2}$

Bất đẳng thức trở thành: $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}+\frac{19}{12}\geq\frac{12\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2}{7}$

Đặt $4(xy+yz+zx)=t\Rightarrow 3\geq t>0$

Ta có : $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)=\frac{9-t}{4}$

Nhân cả 2 vế với x+y+z và chú ý rằng (ý tưởng nhân vào này khá là cơ bản và quen thuộc)

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)=3+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq 3+\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=1+\frac{9}{t}$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{9}{t}+\frac{27}{8}\geq\frac{9(9-t)^2}{56}$$

$$\Leftrightarrow t^3-18t^2+6t-56\leq\Leftrightarrow(t-2)^2(t-14)\leq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow x+y+z=\frac{3}{2}; xy+yz+zx=\frac{1}{2}; xyz=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

Ta có thể chứng minh bằng cách khác như sau:

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên tồn tại x,y,z sao cho :

$$2a=y+z, 2b=z+x, 2c=x+y.$$

Khi ấy $x+y+z=3$ và Bất đẳng thức đã cho trở thành : $16\sum\frac{1}{y+z}+\frac{38}{3}\geq\frac{3}{7}\sum(y+z)^4.$

Đổi biến : $xy+yz+zx=q, xyz=r$, ta có $r\geq 0, 0\leq q\leq 3$ và Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\frac{8(9+q)}{3q-r}+\frac{19}{3}\geq\frac{3}{7}(81-18q+q^2-12r).$$

Vì $r>0$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{8(9+q)}{3q}+\frac{19}{3}\geq\frac{3}{7}(81-18q+q^2).$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$\frac{3(2-q)^2(14-q)}{7q}\geq 0$$

Bình luận: Một lần nữa chúng ta thấy được sức mạnh của phương pháp pqr . Các bạn có thể luyện tập nhiều về kĩ thuật này để xem nó như là một "vũ khí hạng nặng" khi giải các bài toán về 3 biến đối xứng . Ở đây khi biết được đẳng thức xảy ra khi có một số bằng 0 nên chúng ta đã mạnh dạn làm mất đi r như **Lời giải** ở trên. Mọi thứ không phải là ngẫu nhiên mà luôn có những liên quan ẩn sau nó .**Lời giải** dần dần trở nên rất tự nhiên

74

Cho các số thực dương a,b,c .Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{3}\right)\geq\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{3}\right).$$

Lời giải

Với các bài toán chứng minh một biểu thức tích dạng xyz thì phương pháp ln 2 vế kết hợp với đạo hàm là một phương pháp được dùng khá phổ biến . Bạn đọc lưu ý điều này nhé !

Lấy logarit 2 vế, ta cần CM :

$$\ln\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{3}\right)\geq\ln\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{3}\right)$$

Bây giờ thì có một điều đặc biệt đó là dạng hàm số xuất hiện khá rõ ràng

Như vậy ta sẽ chứng minh hàm số:

$$f(x)=\ln\left(\frac{a^x}{b^x+c^x}+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{b^x}{c^x+a^x}+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{c^x}{a^x+b^x}+\frac{1}{3}\right) \text{ đồng biến với } a,b,c,x>0$$

Ta có: $f'(x)=\sum\frac{3a^x\left[\ln a(b^x+c^x)-\ln b.b^x-\ln c.c^x\right]}{(b^x+c^x)(3a^x+b^x+c^x)}=\sum\frac{3a^xb^x(a^x-b^x)(\ln a-\ln b)(a^x+b^x-c^x)}{(3a^x+b^x+c^x)(3b^x+c^x+a^x)(b^x+c^x)(a^x+c^x)}$

$$f'(x)=\frac{3a^x\left[\ln a(b^x+c^x)-\ln b.b^x-\ln c.c^x\right]}{(b^x+c^x)(3a^x+b^x+c^x)}+\frac{3b^x\left[\ln b(c^x+a^x)-\ln c.c^x-\ln a.a^x\right]}{(c^x+a^x)(3b^x+c^x+a^x)}$$

$$+\frac{3c^x\left[\ln c(a^x+b^x)-\ln a.a^x-\ln b.b^x\right]}{(a^x+b^x)(3c^x+a^x+b^x)}$$

$$=\frac{3a^xb^x(a^x-b^x)(\ln a-\ln b)(a^x+b^x-c^x)}{(3a^x+b^x+c^x)(3b^x+c^x+a^x)(b^x+c^x)(a^x+c^x)}+\frac{3b^xc^x(b^x-c^x)(\ln b-\ln c)(c^x+b^x-a^x)}{(3b^x+c^x+a^x)(3c^x+a^x+b^x)(c^x+a^x)(a^x+b^x)}$$

$$+\frac{3c^xa^x(c^x-a^x)(\ln c-\ln a)(c^x+a^x-b^x)}{(3c^x+a^x+b^x)(3a^x+b^x+c^x)(a^x+b^x)(b^x+c^x)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử : $a\geq b\geq c$

Ta có:

$$\left(a^x-c^x\right)(\ln a-\ln c)=\left(a^x-b^x+b^x-c^x\right)(\ln a-\ln b+\ln b-\ln c)$$

$$=\left(a^x-b^x\right)(\ln a-\ln b)+\left(a^x-b^x\right)(\ln b-\ln c)+\left(b^x-c^x\right)(\ln a-\ln b)+\left(b^x-c^x\right)(\ln b-\ln c)$$

$$\geq\left(b^x-c^x\right)(\ln b-\ln c)$$

Do đó:

$$f'(x)\geq\frac{3b^xc^x\left(b^x-c^x\right)(\ln b-\ln c)\left(c^x+b^x-a^x\right)}{\left(3b^x+c^x+a^x\right)\left(3c^x+a^x+b^x\right)\left(c^x+a^x\right)\left(a^x+b^x\right)}+\frac{3c^xa^x\left(b^x-c^x\right)(\ln b-\ln c)\left(c^x+a^x-b^x\right)}{\left(3c^x+a^x+b^x\right)\left(3a^x+b^x+c^x\right)\left(a^x+b^x\right)\left(b^x+c^x\right)}$$

$$=\frac{3c^x\left(b^x-c^x\right)(\ln b-\ln c)\left[b^x\left(c^x+b^x-a^x\right)\left(b^x+c^x\right)\left(3a^x+b^x+c^x\right)+a^x\left(c^x+a^x-b^x\right)\left(3b^x+a^x+c^x\right)\left(a^x+b^x\right)\right]}{\left(a^x+b^x\right)\left(b^x+c^x\right)\left(c^x+a^x\right)\left(3a^x+b^x+c^x\right)\left(3b^x+c^x+a^x\right)\left(3c^x+a^x+b^x\right)}$$

Đặt $x=a^x,y=b^x,z=c^x$

Ta có:

$$y(y+z-x)(3x+y+z)(y+z)+x(z+x-y)(3y+z+x)(z+x)$$
$$\geq y(y+z-x)(3x+y+z)(y+z)+y(z+x-y)(3y+z+x)(y+z)>0$$

Vậy $f(x)$ đồng biến.

Ta có ngay điều phải chứng minh

75

Cho $a,b,c\geq 0$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải

Chuẩn hóa: $a^2+b^2+c^2=3$.

Cần chứng minh $VT\geq 3$.

Theo BCS: $VT\geq\dfrac{\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{2(a+b)}$

Ta phải chứng minh :

$$\left(\sum\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\geq 6(a+b+c)\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)+2\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\geq 6(a+b+c)$$

Lại theo BCS: $\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

Do đó ta cần chứng minh :

$$2(a^2+b^2+c^2)+2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\geq 6(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2+9=(a+b+c)^2+3(a^2+b^2+c^2)\geq 6(a+b+c)$$

Đúng theo AM-GM

76

Cho $x,y,z\geq 0$ sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0 .Chứng minh rằng :

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{\sqrt{yz}}{y+z}\geq 2$$

Lời giải

Đầu tiên ta đi chứng minh: $\dfrac{xy}{x+y}\geq\dfrac{2xy}{(x+y)^2}$

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow(x+y)^2\sqrt{xy}\geq(x+y).2xy\Leftrightarrow\sqrt{xy}(x+y-2\sqrt{xy})\geq 0$ (đúng)

Dấu đẳng thức xảy ra khi 1 trong 2 số x,y bằng 0 hoặc $x=y$

Tương tự: $\dfrac{\sqrt{yz}}{y+z} \geq \dfrac{2yz}{(y+z)^2}$

Bây giờ ta suy ra được :

$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{\sqrt{yz}}{y+z} \geq \frac{2xy}{(x+y)^2}+\frac{2yz}{(y+z)^2}$$

Vậy ta cần chỉ ra rằng :

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{2xy}{(x+y)^2}+\frac{2yz}{(y+z)^2} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{4xy}{(x+y)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{4yz}{(y+z)^2} \geq 4$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 2$$

Thật vậy:

$$(**) \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{2(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}+\frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}+\frac{4xy}{(x+y)^2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 4\left[1-\frac{xy}{(x+y)^2}\right] \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 4\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2(x+y)^2 \geq 4(xy+yz+zx)(x^2+xy+yz)$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx+x^2+xy+y^2)^2 \geq 4(xy+yz+zx)(x^2+xy+y^2)$$

Bất đẳng thức cuối thực chất là bất đẳng thức : $(a+b)^2 \geq 4ab$

Thiết lập thêm bất đẳng thức tương tự, ta có đpcm

Cho các số thực dương x,y,z. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{24}{13x+12\sqrt{xy}+16\sqrt{yz}}-\frac{3}{\sqrt{x+y+z}}$$

Lời giải

Cấu hình $\sqrt{xy}$ gợi nhắc cho chúng ta dùng bất đẳng thức AM-GM Vấn đề là chúng ta cần xác định điểm rơi để có thể áp dụng một cách chính xác AM-GM .Bằng tính toán ta có thể nhẩm được đẳng thức xảy ra tại $x=4y=16z$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có :

$$12\sqrt{xy}=12.2.\sqrt{\frac{x}{4}.y} \leq 12(\frac{x}{4}+y)$$

$$16\sqrt{yz}=16.2.\sqrt{\frac{y}{4}.z} \leq 16.(\frac{y}{4}+z)$$

$$\Rightarrow 13x+12\sqrt{xy}+16\sqrt{yz} \leq 16(x+y+z) \Rightarrow P \geq \frac{24}{16(x+y+z)}-\frac{3}{\sqrt{x+y+z}} \geq \frac{-3}{2}$$

Vậy $MinP=\dfrac{-3}{2}$ đạt được khi $x=\dfrac{16}{21};y=\dfrac{4}{21};z=\dfrac{1}{21}$

Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$, ta có :

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc} \leq 9$$

Lời giải

Ta có biến đổi sau: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)\ge 27-3.8abc=27-24abc$

Như vậy suy ra: $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{\dfrac{27-24abc}{3}}+8\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{9-8abc}+8\sqrt[3]{abc}$

Đặt $t=\sqrt[3]{abc}$, ta có $0<t\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=1\Rightarrow 0<t\le 1$

Xét hàm $f(t)=\sqrt[3]{9-8t}+8\sqrt[3]{t}$ trên $(0;1)$

$$f'(t)=\frac{8}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{(9-8t)^2}}\right]\ge 0\ \forall t\le 1$$

Vậy nên: $f(t)\le f(1)=9$

79

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)$$

Lời giải

Cách 1: Chúng ta có thể sử dụng đánh giá đại diện như sau:

$$\sqrt{a^2+b^2}\ge\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

Tương tự rồi cộng lại, ta có đpcm.

Cách 2: Theo bất đẳng thức Mincopxki:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+(b+c+a)^2}=\sqrt{2}(a+b+c)$$

80

Cho x,y,z là các số thực dương thõa mãn $x+y+z=xyz$ .Chứng minh rằng :

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)\le\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}$$

Lời giải

Ta đặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}$ .Giả thiết đã cho trở thành : $ab+bc+ca=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-b^2\right)\le abc\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}$$

Mặt khác : $\begin{cases}a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)\\ b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(a+b)(b+c)\\ c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+b)(a+c)\end{cases}$

Bất đẳng thức trở thành:

$$\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)\le abc(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Leftrightarrow\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)\le(ac+bc)(ab+ac)(bc+aa)$$
$$\Leftrightarrow\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)\le(1-ab)(1-bc)(1-ac)$$

Ta dùng kĩ thuật ghép đối xứng để chứng minh bất đẳng thức này :

Ta lại có : $\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\le(1-ab)^2\Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$

Vậy nên bất đẳng thức được chứng minh .

Bình luận: Hãy thử giải bài toán này bằng phương pháp lượng giác hóa . Dấu hiệu lượng giác ở đây chính là $ab+bc+ca=1$.

81

> Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+2b-c>0, a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
> $$P=\frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1}-\frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}$$

Lời giải

Bài này tương tự đề khối A-2014 nên ý tưởng giải tương tự như vậy .
Áp dụng BĐT AM - GM chúng ta có:

$$ab+bc+ac+2=a^2+b^2+c^2\ge a^2+2bc\Leftrightarrow 2ab+2ac+2\ge a^2+bc+ab+ac$$

Lúc này thì:

$$2(ab+ac)+2\ge(a+b)(a+c)\Leftrightarrow a(b+c)+a+b+1\ge\frac{(a+b)(a+c+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+c+2}{a(b+c)+a+b+1}\le\frac{2}{a+b}$$

Bây giờ để ý số hạng còn lại ở mẫu có tổng sẽ triệt tiêu c .Điều này cổ vũ chúng ta áp dụng AM-GM để đánh giá
Mặt khác, lại có:

$$(a+c)(a+2b-c)\le\frac{1}{4}(a+c+a+2b-c)=(a+b)^2\Leftrightarrow\frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)}\ge\frac{a+b+1}{(a+b)^2}$$

Vậy suy ra được :

$$P\le\frac{2}{a+b}-\frac{a+b+1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+b}\right)^2\le\frac{1}{4}$$

Vậy GTLN $P=\frac{1}{4}$

82

> Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$ .Chứng minh rằng:
> $$\sum\frac{1}{1+(ab)^2}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$$

Lời giải

Bài toán này là một áp dụng khá tường minh cho kĩ thuật AM-GM ngược dấu.
Ta sử dùng kĩ thuật AM-GM ngược dấu để giải bài toán này.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $3-\sum\frac{a^2b^2}{1+a^2b^2}\ge\frac{9}{a+b+c}$

Lại có: $3-\sum\frac{a^2b^2}{1+a^2b^2}\ge3-\sum\frac{a^2b^2}{2ab}=3-\sum\frac{ab}{2}=3-\frac{(a+b+c)^2-3}{4}$

Như vậy, ta cần chứng minh: $3-\frac{(a+b+c)^2-3}{4}\ge\frac{9}{a+b+c}$

Đặt $p=a+b+c\Rightarrow\sqrt{3}<p\le3$.
Việc kết thúc chứng minh xin phép được dành cho bạn đọc .

83

> Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn : $x^3+8y^3+z\left(x^2+4y^2\right)=6xyz$. Tìm GTNN:
> $$P=\frac{x}{2y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$$

Lời giải

Điều kiện của bài toán cho khá phức tạp, ta thử làm đơn giản hóa nó một chút .

Đặt $x=a;2y=b;z=c$. Điều kiện trở thành : $\Rightarrow a^3+b^3+c(a^2+b^2)=3abc$.

Áp dụng AM-GM để có được: $a^2-ab+b^2\ge ab$ ta suy ngay ra được $c\ge a+b$.

Bây giờ P viết lại thành:

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{(a+b)^2}{2ab+c(a+b)}+\frac{2c}{a+b}\ge\frac{(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}+\frac{2c}{a+b}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{2(a+b)}{a+b+2c}+\frac{2c}{a+b}=2.\frac{1}{1+\frac{2c}{a+b}}+\frac{2c}{a+b}$$

Đặt $t=\frac{2c}{a+b}\ge 2$. Ta được ngay một hàm số, việc của chúng ta chỉ cần khảo sát hàm $f(t)$

Kết quả: $\text{Min}P=\frac{8}{3}$

Bình luận: Hãy nhớ rằng một biểu thức điều kiện khá rối rắm bao giờ cũng đưa được về dạng gọn hơn rất nhiều qua 1 phép biến đổi. Chú ý khi gặp bất đẳng thức dạng phân thức không đối xứng . Thì một công cụ rất mạnh đó là việc áp dụng bất đẳng thức BCS kết hợp với công cụ đạo hàm . Chúng ta sẽ áp dụng BCS cho những số hạng đối xứng nhau sau đó tìm cách ép về một biến.

84

Cho $a,b,c>0$ và thõa mãn $2a+4b+3c^2=68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^2+b^2+c^3$$

Lời giải

Ta dùng kĩ thuật chọn điểm rơi để giải bài toán này.

Giả sử dấu bằng xảy ra khi $a=x,b=y,c=z$. Khi đó ta có theo AM-GM: $\begin{cases}a^2+x^2\ge 2ax\\ b^2+y^2\ge 2by\\ \frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+\frac{z^3}{2}\ge\frac{3c^2z}{2}\end{cases}$

Để khai thác được giả thiết thì ta cần phải có: $\begin{cases}2x+4y+3z^2=68\\ \frac{2x}{2y}=\frac{1}{2}\\ \frac{4x}{3z}=\frac{2}{3}\end{cases}$

Giải ra ta được $x=2,y=z=4$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

85

Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{bc}{(a+c)(a+b)}-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải

Nhận thấy sự thuần nhất bậc, cũng có thể các em tự xem là động bậc cũng được (dù không đúng về mặt toán học)

Nên ta nghĩ ngay đến cách đặt sau :

Đặt $x=\frac{a}{b}, y=\frac{a}{c} (x,y>0)$

Ta có: $P=\frac{1}{(x+1)(y+1)}\left(1-\frac{4xy}{x+y}\right)$.

Bất đẳng thức 2 biến thì việc đánh giá khá là đơn giản

Theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$(x+y)(x+1)(y+1)=(x^2y+4y)+(xy^2+4x)+(x^2+y^2)+2xy-3(x+y)\ge 12xy-3(x+y)$$

Suy ra : $1-\frac{4xy}{x+y}\ge -\frac{1}{3}(x+1)(y+1)$

Vậy $P\ge -\frac{1}{3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=2 <=> c=b=\frac{a}{2}$

Ta có thể tiếp cận bằng cách khác mang nhiều tính chất "nâng cao" hơn như sau, lời giải được đề xuất bởi một học sinh tại lớp LTĐH Hè 2014:

Nếu $b+c\ge 4a$ thì $P\ge 0$.

Nếu $b+c<4a$ thì:

$$P\ge \frac{bc}{(a+c)(a+b)}-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{(a+b+c)(4a-b-c)(b-c)^2}{(2a+b+c)^2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=-\frac{(b+c)(4a-b-c)}{(2a+b+c)^2}=\frac{4(a-b-c)^2}{3(2a+b+c)^2}-\frac{1}{3}\ge\frac{-1}{3}$$

Bình luận: Bạn có suy nghĩ gì về lời giải này không? Tại sao lại có được cách chia trường hợp như vậy là các câu hỏi bạn cần phải giải quyết.

86

Cho a,b,c là các số thực không âm thõa mãn $a+b+c=1$ .Tìm GTNN của biểu thức :

$$P=\sqrt{\frac{a+bc}{1+\sqrt{bc}}}+\sqrt{\frac{b+ca}{1+\sqrt{ca}}}+\sqrt{2c+5}$$

Lời giải

Ta có đánh giá như sau :

$$a+bc\ge a(a+b+c)\ge a^2+2a\sqrt{bc}\ge a^2\left(1+\sqrt{bc}\right)\Rightarrow\sqrt{\frac{a+bc}{1+\sqrt{bc}}}\ge a$$

Tương tự ta có : $\sqrt{\frac{b+ca}{1+\sqrt{ca}}}\ge b$

Vậy nên $P\ge a+b+\sqrt{2c+5}=1-c+\sqrt{2c+5}$

Xét hàm số $f(c)=\sqrt{2c+5}-c+1;\quad c\in[0;1]$.

Dễ dàng có $f(c)$ nghịch biến .Vậy $f(c)\ge f(1)=\sqrt{7}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=0, c=1$

87

Cho $a,b,c>0$ thõa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{a+c}-\frac{2ab}{c^2}-\frac{\sqrt{7c^2-3ab}}{c}$$

Lời giải

Giả thiết bài toán tương đương với: $\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$

Bây giờ, ta có: $A=\dfrac{4\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}+\dfrac{4\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}-2.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}-\sqrt{7-3\frac{a}{c}.\frac{b}{c}}$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=x>0\\ \dfrac{b}{c}=b>0\end{cases}\Rightarrow(x+1)(y+1)=4$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$(x+1)(y+1)=4\Leftrightarrow 3=xy+x+y\ge xy+2\sqrt{xy}\Rightarrow 0<xy\le 1\Rightarrow\begin{cases}0<xy\le 1\\ x+y\ge 2\end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}A&=\frac{4x}{y+1}+\frac{4y}{x+1}-2xy-\sqrt{7-3xy}\\&=\frac{4x(x+1)+4y(y+1)}{(x+1)(y+1)}-2xy-\sqrt{7-3xy}\\&=x^2+y^2+x+y-2xy-\sqrt{7-3xy}\\&=(x+y)^2+x+y+xy-5xy-\sqrt{7-3xy}\ge 4+3-5xy-\sqrt{7-3xy}\\&\Rightarrow A\ge 7-5xy-\sqrt{7-3xy}\end{aligned}$$

Đặt $t=xy\Rightarrow t\in(0;1]$

Suy ra : $A\ge 7-5t-\sqrt{7-3t},t\in(0;1]$

Xét hàm $f(t)=7-5t-\sqrt{7-3t},t\in(0;1]$

$$f'(t)=\frac{3}{2\sqrt{7-3t}}-5<0\ \forall t\in(0;1]$$

Suy ra: $f(t)\ge f(1)=0$

Vậy nên $A\ge 0$, dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$

Bình luận: Hãy tự rút ra nhận xét chung khi xử lý giải thiết có dạng đồng bậc . Liên tưởng đến bài Bất Đẳng Thức trong đề toán khối A-2013 để có được câu trả lời.

88

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz+x+z=y$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Lời giải

Ý tưởng tự nhiên nhất là rút thế để hy vọng giảm được số biến . Cụ thể rút $y=\dfrac{x+z}{1-xz}$ (vì $xz\ne 1$)

Bây giờ thay vào biểu thức ta được :

$$P=\frac{-2z(z+2x-x^2z)}{(1+x^2)(1+z^2)}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Bây giờ ta sẽ tìm cá z ch dồn về biến nghĩa là đánh giá những biến nào có x để đưa nó về z .

Vậy chúng ta cần đánh giá để có được điều sau đây :

$$-2z(z+2x-x^2z)\le(1+x^2).f(z)\text{ hay }x^2z-z-2x\le\frac{(1+x^2)f(z)}{2z}$$

Để đánh giá và tạo ra ràng buộc tích của 2 biến thì cách thường làm nhất đó là dùng BCS

Áp dụng BCS , ta có :

$$x^2z-z-2x=z(x^2-1)-2x\le\sqrt{\left[(x^2-1)^2+4x^2\right](z^2+1)}=(x^2+1)\sqrt{z^2+1}$$

Vậy , ta có :

$$P\le\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Mọi việc đến đây khá dễ dàng cho chúng ta .

Bình luận: Để đánh giá rút ra được biểu thức dạng $ab+cd$ thì cách tốt nhất đó là dụng bất đẳng thức BCS .

89

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy\ge1$ và $z\ge1$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{z^3+2}{3(xy+1)}$$

Lời giải

Trước hết viết P lại dưới dạng sau:

$$P=(x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)+\frac{z^3+1}{3(xy+1)}-2$$

Bây giờ nhận thấy $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)$ khá quen thuộc , ta hay đánh giá số hạng này như thế nào nhỉ ?

Áp dụng bổ đề: Với $x,y>0$ thỏa mãn $xy\ge1$ thì ta có : $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{cases}x+y+1\ge2\sqrt{xy}+1\\ z^3+2=z^3+1+1\ge3z\ge3\end{cases}$$

Suy ra $P\ge(2\sqrt{xy}+1)\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy+1}-2$

Đặt $t=\sqrt{xy}\Rightarrow t\ge1$

Ta có :

$$P\ge\frac{2(2t+1)}{t+1}+\frac{1}{t^2+1}-2=\frac{2t}{t+1}+\frac{1}{t^2+1}=f(t)$$

$$f'(t)=\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{2t}{(t^2+1)^2}=\frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\ge0\quad\forall t\ge1$$

Do đó $f(t)\ge f(1)=\frac{3}{2}$

Suy ra: $P\ge\frac{3}{2}$

Vậy $\min P=\frac{3}{2}$

Bình luận : Ta thử đánh giá bài này bằng cách áp dụng BCS cho 2 số hạng đầu nhé !

90

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$ .Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{4-\sqrt{ab}}+\frac{1}{4-\sqrt{bc}}+\frac{1}{4-\sqrt{ca}}\le1$$

Lời giải

Quan sát, ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Để ý một cách tổng quát hơn thì số hạng của biểu thức cần chứng minh có dạng tổng quát $\frac{1}{4-\sqrt{x}}$. Chính điều này gợi ý cho chúng ta sử dụng phương pháp đánh giá đại diện bằng phương pháp hệ số bất định.

Ta sẽ tìm một đánh giá dạng:

$$\frac{1}{4-\sqrt{x}}\le k(x-1)+m$$

Ta tìm k,m để cho đánh giá này là đúng

Đương nhiên ta phải có $m=\frac{1}{3}$, để tìm k ta sẽ dùng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2. Qua tính toán ta có $k=\frac{1}{18}$.

Vậy ta sẽ chứng minh điều dự đoán này:

$$\frac{1}{4-\sqrt{x}}\le\frac{1}{18}(x-1)+\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{-(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}-2)}{18(4-\sqrt{x})}$$

Điều này đúng với điều kiện của bài toán.

Vậy ta có: $P\le\frac{1}{18}(ab+bc+ca-1)+1\le\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2-1)+1\le 1$

T a có một cách tiếp cận khác như sau:

Ta có $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ nên $a+b+c\le 3$

Xét $\frac{1}{4-\sqrt{ab}}\le\frac{1}{4-\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{4-a+4-b}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-a}+\frac{1}{4-b}\right)$

Vì vậy $P\le\frac{1}{4-a}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-c}$

Đặt $M=\frac{1}{4-a}+\frac{1}{4-b}+\frac{1}{4-c}$

Ta có:

$$3-M=1-\frac{1}{4-a}+1-\frac{1}{4-b}+1-\frac{1}{4-c}=\frac{3-a}{4-a}+\frac{3-b}{4-b}+\frac{3-c}{4-c};$$
$$3-M=\frac{(3-a)^2}{(4-a)(3-a)}+\frac{(3-b)^2}{(4-b)(3-b)}+\frac{(3-c)^2}{(4-c)(3-c)}\ge\frac{(9-a-b-c)^2}{39-7(a+b+c)}$$

Ta đi xét hàm $f(t)=\frac{(9-t)^2}{39-7t}, 0\le t\le 3$.

Hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0;3]$ nên $\max f(t)=2$.

Suy ra $P\ge 1$

91

Cho các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

Lời giải

Ta có:

$$\sum\frac{a}{b^2+1}=\sum\frac{a^3}{a^2b^2+a^2}\ge\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2}{1+\sum a^2b^2}\ge\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

Điều phải chứng minh.

92 Cho $a,b,c>0$ thõa mãn : $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}=5$ Tìm GTNN của biểu thức :

$$P=a\sqrt{a^2+1}+b\sqrt{b^2+1}+c\sqrt{c^2+1}$$

Lời giải

Ta sẽ dùng kĩ thuật tiếp tuyến để giải bài toán này, cụ thể là ta sẽ chứng minh nhận xét sau:

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{x^2+1}-\dfrac{41}{12}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{125}{36}$ với $x>0$

Ta có $f'(x)=\dfrac{24x^2-41x+12}{12\sqrt{x^2+1}}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{8}\\x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$

Lập bảng biên thiên ta có $\min f(x)=f(\frac{4}{3})=0$. Như vậy ta có:

$$x\sqrt{x^2+1}\ge\frac{41}{12}\sqrt{x^2+1}-\frac{125}{36}$$

Áp dụng, ta có:

$$P\ge\frac{41}{12}\left(a\sqrt{a^2+1}+b\sqrt{b^2+1}+c\sqrt{c^2+1}\right)-\frac{125}{12}=\frac{20}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{4}{3}$

Các bạn thử theo dõi lời giải sau và thử suy nghĩ xem có thể rút ra điều gì không nhé !

Đặt $x=\sqrt{a^2+1},y=\sqrt{b^2+1},z=\sqrt{c^2+1}$ suy ra $x,y,z\in(1;+\infty)$ và $x+y+z=5$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x\sqrt{x^2-1}+y\sqrt{y^2-1}+z\sqrt{z^2-1}$.

+ Giả sử $x\ge y\ge z>1$

Nếu $z\ge\dfrac{11}{10}\Rightarrow z^2(z^2-1)-\left(\dfrac{41}{12}z-\dfrac{125}{36}\right)^2=\dfrac{(3z-5)^2(144z^2+480z-625)}{1296}\ge0\Rightarrow z\sqrt{z^2-1}\ge\dfrac{41}{12}z-\dfrac{125}{36}$

Do đó $P\ge\dfrac{41}{12}(x+y+z)-\dfrac{125}{12}=\dfrac{20}{3}$

Nếu $y\le\dfrac{11}{10}\Rightarrow x\ge\dfrac{14}{5}$. Khi đó:

$$P\ge x\sqrt{x^2-1}+y^3-y+z^3-z\ge x\sqrt{x^2-1}+2(y+z)-4$$

$$=x\sqrt{x^2-1}+2(5-x)-4>\frac{13}{5}x+2(5-x)-4=\frac{3}{5}x+6\ge\frac{192}{25}>\frac{20}{3}$$

Nếu $y\ge\dfrac{11}{10}\ge z>1\Rightarrow P\ge\dfrac{41}{12}(y+z)-\dfrac{125}{18}+z\sqrt{z^2-1}>\dfrac{41}{12}(5-z)-\dfrac{125}{18}+z^3-z>\dfrac{20}{3}$

Tóm lại, $\min P=\dfrac{20}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{4}{3}$

93 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\left(a^5+\dfrac{2}{a}\right)\left(b^5+\dfrac{2}{b}\right)\left(c^5+\dfrac{2}{c}\right)\ge(a+b+c)^3$

Lời giải

Ta có: $a^5+\dfrac{2}{a}\ge a^3+2\Leftrightarrow(a-1)^2(a^4+a^3+a^2+a+2)\ge0$ (1)

Vậy ta chỉ cần chứng minh: $(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\ge(a+b+c)^3$

Đây là một bất đẳng thức đúng vì: '

$$\left(a^3+2\right)\left(b^3+2\right)\left(c^3+2\right)=\left(a^3+1+1\right)\left(1+b^3+1\right)\left(1+1+c^3\right)\geq(a+b+c)^3$$

Lời giải khác: Ta có thể chú ý đến đánh giá sau: $x^5+2^x\geq e^{x-1+\ln 3}$ luôn đúng với mọi $x\in R$ .Việc tìm ra đánh giá ở (1) khá tự nhiên. Vì đặc trưng của bài toán thì chúng ta sẽ nghĩ ngay đến việc đánh giá đại diện. Mà chúng ta phải đánh giá từng thừa số với một biểu thức bậc 3 vì lúc này ta mới đưa về được bất đẳng thức đồng bậc. Như vậy phải có số hạng a^3 số hạng còn lại, để đảm bảo dấu bằng thì phải là 2 hoặc $2a$ .Chúng ta có thể thử từng trường hợp để có đánh giá hợp lý.

98

Cho các số thực dương a,b,c thõa mãn $a+b+c=6$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c+a}}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT BCS, ta có:

$$\sqrt{\left(4+\frac{1}{4}\right)\left(a^2+\frac{1}{a+b}\right)}\geq 2a+\frac{1}{2\sqrt{a+b}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{17}}{2}\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}\geq 2a+\frac{1}{2\sqrt{a+b}}$$

$$\Rightarrow\sum\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}\right)\geq 2(a+b+c)+\frac{1}{2}\left(\sum\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)\geq 12+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{\sum\sqrt{a+b}}\right)$$

Áp dụng BCS một lần nữa: $\sum\sqrt{a+b}\leq\sqrt{3.2(a+b+c)}=6$

Như vậy , ta suy ra:

$$\sum\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}\right)\geq\frac{51}{4}\Leftrightarrow\sum\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

Bình luận: Chúng ta cũng có thể áp dụng trực tiếp Mincopxki.

99

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$ .Chứng minh rằng:

$$18(ab+bc+ca)+a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\leq 54$$

Lời giải

Ta sẽ giải quyết bài toán này bằng cách dồn biến cổ điển nhất. Và kĩ thuật này , có sức công phá với hầu hết các bài toán 3 biến đối xứng thuần nhất. Nhưng trở ngại khó khăn nhất đó là các phép tính toán quá cồng kềnh và phức tạp. Đầu tiên, ta đồng bậc hóa bất đẳng thức. Mà cụ thể là ta sẽ chứng minh:

$$20(a+b+c)^3\geq 60(a+b+c)(ab+bc+ca)+17\left(a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\right)\quad (1)$$

Xét hàm số $f=20(a+b+c)^3-60(a+b+c)(ab+bc+ca)-17\left(a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\right)$

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$.

Giả thiết rằng: $x=a-c\geq 0;y=b-c\geq 0$

Lúc này thì $f=26\left(x^2-xy+y^2\right)c+3x^3+34x^2y-17xy^2+3y^3$

Đánh giá như sau:

$$3x^3+34x^2y-17xy^2+3y^3=3x^3+y\left(34x^2+3y^2-17xy\right)\geq 3x^3+y\left(2\sqrt{102}xy-17xy\right)\geq 0$$

Vậy $f \ge 0$

Vậy (1) được chứng minh. Ta kết thúc lời giải ở đây

Ta cũng có thể giải bài toán này bằng một cách khác "tinh tế" hơn như sau:

Bất đẳng thức đã cho:

$$\Leftrightarrow 54-18(ab+ac+bc)-a(b-a)^2-b(b-c)^2-c(a-c)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 6(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)-a(a-b)^2-b(b-c)^2-c(c-a)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (3-a)(a-b)^2+(3-b)(b-c)^2+(3-c)(c-a)^2 \ge 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Một hạn chế ở lời giải này đó là việc phân tích một biểu thức bậc 3 đối xứng có điều kiện về dạng bình phương khá là phức tạp so với học sinh phổ thông. Mặc dù , với các thuật toán phân tích SOS (phân tích bình phương) việc phân tích này có thể làm được hoàn toàn bằng Mapple. Các bạn học sinh chuyên Tin hãy thử viết chương trình thực hiện điều này xem sao. Tưởng chừng như là một điều khá khó khăn nhưng quả thức chúng ta hoàn toàn làm được với kiến thức được trang bị ở phổ thông.

100

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm GTNN của $P=\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}-\sqrt{\frac{16a}{6a+3c}}$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho là thuần nhất bậc nên chúng ta hoàn toàn có thể đưa về 2 biến.Tư duy này đã rất quen thuộc trong cuốn sách này.

Viết lại Bất đẳng thức đqã cho dưới dạng

$$P=\frac{1}{1+\frac{2b}{a}}+\frac{1}{1+\frac{2c}{b}}-\frac{4}{\sqrt{6+\frac{3c}{a}}}$$

Ta đặt $x=\frac{b}{a}>0;y=\frac{c}{b}>0$.

Khi đó $P=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}-\frac{4}{\sqrt{6+3xy}}$

Ta có một đánh giá quen thuộc sau: $\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}\ge\frac{2}{2+xy}$

Điều này là đúng bởi vì: $\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}-\frac{2}{2+xy}=\frac{2(xy^2+x^2y+1-3xy)}{(1+2x)(1+2y)(2+xy)}\ge 0$

Vậy $P\ge\frac{2}{2+xy}-\frac{4}{\sqrt{6+3xy}}=Q$

Đặt $t=\sqrt{6+3xy}>0$

$$Q=\frac{6}{t^2}-\frac{4}{t}=\frac{2(t-3)^2}{3t^2}-\frac{2}{3}\ge-\frac{2}{3}$$
$$P\ge Q\ge-\frac{2}{3}$$

101

Cho các số thực x,y,z thuộc đoạn $[-1;1]$ và thỏa mãn $xy+yz+zx=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=y^2+z^2+4x-2y-2z$

Lời giải

Đối với bài toán không đối xứng mà điều kiện cho ở dạng tổng, thì chúng ta thường sẽ đi theo cách rút để giảm biến , sau đó tiến hành khảo sát. Đây là một lối mòn tư duy mà bạn đọc cũng nên ghi nhớ.

Xét $y+z=0$ thì giả thiết suy ra $y=z=0$ và $P=4x\geq 4.(-1)=-4$

Khi $y+z\neq 0$ thì suy ra $x=-\frac{yz}{y+z}$

$$P=y^2+z^2-2(y+z)-\frac{4yz}{y+z}\geq 2yz-2(y+z)-\frac{4yz}{y+z}$$

Đặt $y+z=a,yz=b$. Ta có $a\in[-2;2]-\{0\},b\in[-1;1],4b\leq a^2$

Lúc này $P\geq 2b-2a-\frac{4b}{a}=f(a,b)$.

Lấy đạo hàm theo biến a

$$f_a{}'=\frac{4b}{a^2}-2\leq 1-2=-1<0\Rightarrow f(a,b)\geq f(2,b)=2b-4-2b=-4$$

Vậy kết luận $\min P=-4\Leftrightarrow x=-1,y=z=0$ hoặc $x=-\frac{1}{2},y=z=1$

Bình luận: Với những bài toán cho giả thiết các biến thuộc một đoán $[a;b]$ thì tư duy đầu tiên cần nghĩ đến đó là đạo hàm từng biến.

102

Cho a, b, c dương và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}}=\frac{3a^2}{4}\ (1)$$

$$\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}}=\frac{3c^2}{4}\ (2)$$

$$\frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}}+\frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}}+\frac{a^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}}=\frac{3c^2}{4}\ (3)$$

Lấy (1) + (2) + (3) ta được:

$$P+\frac{a^2+b^2+c^2+9}{16}\geq\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)(4)$$

Vì $a^2+b^2+c^2=3$

Từ (4) $\Leftrightarrow P\geq\frac{3}{2}$ vậy giá trị nhỏ nhất $P=\frac{3}{2}$ khi a = b = c = 1.

103

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$

Lời giải

Để ý điều kiện cho không đối xứng nhưng mà P lại là một biểu thức đối xứng và khá dễ dàng nhận ra có thể viết gọn theo $t = x + y$. Vậy việc cần làm là chúng ta sẽ đánh giá điều kiện của t.

Theo BĐT Cauchy-Shwarz $(x+y)^2 = \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}\right)^2 \le 3(x+y)$

$$\Rightarrow 0 \le x+y \le 3$$

Đặt $t = x+y$ với $t \in [0;3]$

$$P = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2$ trên $[0;3]$

$$\Rightarrow f'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}} \ge 0, \forall t \in [0;3]$$

Vậy $\min P = f(0) = 18$ khi $x = 1, y = -1$; $\max P = f(3) = 25$ khi $x = 2, y = 1$.

Bài toán 104: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y+z)^3 - 36}{x+y+z}$$

Lời giải: Đầu tiên, ta thấy P có thể viết gọn theo $t = x + y + z$ chính vì vậy nên ta sẽ khảo sát hàm $f(t)$ muốn vậy ta phải tìm được điều kiện của t. Để liên kết được $x + y + z$ và giả thiết của bài toán, ta liên tưởng ngay đến cách dùng BCS.

Theo BĐT Cauchy-Shwarz $(x+y+z)^2 \le 6\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) \le 36$

$$\Rightarrow -6 \le x+y+z \le 6$$

Đặt $t = x+y+z$ với $t \in [-6;6]$

$$P = \frac{t^3 - 36}{t}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^3 - 36}{t}$ trên $[0;3]$

$$\Rightarrow f'(t) = 2t + \frac{36}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt[3]{18}$$

$$f(-6) = 42, f\left(-\sqrt[3]{18}\right) = \frac{54}{\sqrt[3]{18}}, f(6) = 30$$

Vậy $\max P = f(-6) = 42$ khi $x=-1, y=-2, z=-3$

Bài toán 105: Cho các số thực dương x, y, z.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{6\sqrt{xy}+7z+8\sqrt{zx}} - \frac{1}{9\sqrt{x+y+z}}$$

Giải

Theo BĐT AM-GM ta có $6\sqrt{xy} = 2\sqrt{x.(9y)} \le x+9y$, $8\sqrt{zx} = 4\sqrt{z.(4x)} \le 2(z+4x)$

$$\Rightarrow 6\sqrt{xy}+7z+8\sqrt{zx} \le 9(x+y+z)$$

Do đó $P \ge \dfrac{1}{9(x+y+z)} - \dfrac{1}{9\sqrt{x+y+z}}$

Đặt $t = \sqrt{x+y+z}$ với $t \in (0;+\infty)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{9t^2} - \dfrac{1}{9t}$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t) = -2\dfrac{2}{9t^3} + \dfrac{1}{9t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Lập bảng biến thiên, dựa vào BBT ta có $P \ge f(2) = -\dfrac{1}{36}$

106

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=6$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+36bc}\cdot\frac{b}{b+9ca}\cdot\sqrt{\frac{c}{c+4ab}} \le \frac{1}{27}$$

Lời giải

Ta có

$$VT = \frac{1}{1+\dfrac{36bc}{a}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{9ca}{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4ab}{c}}}$$

Đặt $\dfrac{36bc}{a} = \text{cotg}^2\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{9ca}{b} = \text{cotg}^2\dfrac{B}{2}$, $0 < A, B < \pi$

Từ giả thiết ta có: $6\sqrt{\dfrac{bc}{a}}3\sqrt{\dfrac{ca}{b}}2\sqrt{\dfrac{ab}{c}} = 6\sqrt{\dfrac{bc}{a}}+3\sqrt{\dfrac{ca}{b}}+2\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$

Suy ra, $2\sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \dfrac{\text{cotg}\dfrac{A}{2}+\text{cotg}\dfrac{B}{2}}{\text{cotg}\dfrac{A}{2}\text{cotg}\dfrac{B}{2}-1} = \text{tg}\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \text{cotg}\dfrac{C}{2}$

với A,B,C là ba góc của một tam giác

Vậy

$$VT=\frac{1}{1+\cot g^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{1+\cot g^2\frac{B}{2}}\sqrt{\frac{1}{1+\cot g^2\frac{C}{2}}}$$

$$=\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{4}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)2\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}\left(\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(2\sin\frac{C}{2}\right)}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

107

Cho $a,b,c>0$ Chứng minh rằng:

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\le 27abc+10\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\frac{3}{2}}\quad(1)$$

Phân tích: - BĐT đồng bậc

- Vai trò a,b,c giống nhau
- Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a=b=c
- Chuẩn hoá: $a^2+b^2+c^2=9$

Lời giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2(a+b+c)-abc\le 10$

$$VT=2(a+b+c)-abc=2a-abc+2(b+c)=a(2-bc)+2(b+c)$$

$$VT^2\le\left[a^2+(b+c)^2\right]\left[(2-bc)^2+4\right]$$

Giả sử $a\ge b\ge c$ do $a^2+b^2+c^2=9\Rightarrow a^2\ge 3$

Đặt $t=bc$ do $bc\le\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{9-a^2}{2}\le 3$

Nên $VT^2\le(9+2bc)\left[(2-bc)^2+4\right]=(9+2t)\left[(2-t)^2+4\right]=f(t)$ với $-3\le t\le 3$

Khảo sát $f(t)\Rightarrow f(t)\max\le f(t)=100\Rightarrow VT\le 10$ đpcm

108

Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ac}{b^2a+b^2c}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ac}{b^2(a+c)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{b+c}{bc}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{a+c}{ac}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$ với $x,y,z>0$ và $xyz=\frac{1}{abc}=1$

Khi đó: $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy ta có:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge 2.\sqrt{\frac{x^2}{z+y}\cdot\frac{y+z}{4}}=x\\ \frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\ge 2.\sqrt{\frac{y^2}{z+x}\cdot\frac{z+x}{4}}=y\\ \frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge 2.\sqrt{\frac{z^2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{4}}=z\end{cases}\Rightarrow P+\frac{x+y+z}{2}\ge x+y+z\Rightarrow P\ge\frac{1}{2}(x+y+z)\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xy}$$

vậy Min $P=\frac{3}{2}$; khi $x=y=z=1$.

109

Cho $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ u^2+v^2=25\\ xu+yv\ge 20\end{cases}$. Tìm Max (x+v)

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$20\le xu+yv\le\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}=\sqrt{20.25}=20$$

$$\Rightarrow xu+yv=20\Leftrightarrow\frac{x}{u}+\frac{y}{v}\Leftrightarrow xv=yu$$

Mặt khác $41=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)=(x^2+v^2)+(y^2+u^2)\ge x^2+v^2+2yu=x^2+v^2+$

$$\Rightarrow x+v=\sqrt{41}$$

$$Max(x+v)=\sqrt{41}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=16\\ u^2+v^2=25\\ u=y\\ xu+yv=20\end{cases}\Leftrightarrow y(x+v)=20\Rightarrow u=\frac{20}{x+v}=\frac{20}{\sqrt{41}}$$

$$y=\frac{20}{\sqrt{41}},\quad x=\frac{16}{\sqrt{41}},\quad z=\frac{25}{\sqrt{41}}$$

109

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+a}}+\frac{\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}$$

Lời giải

Ý tưởng vẫn là làm mất căn thức. Để làm được điều đó, ta có đánh giá sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}\geq\frac{2\sqrt{2}a}{2a+b+c}=\frac{2\sqrt{2}ab}{2ab+b^2+ac}$$

Tương tự rồi cộng lại ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+a}}\geq\frac{2\sqrt{2}ab}{2ab+b^2+ac}+\frac{2\sqrt{2}bc}{2bc+c^2+ab}+\frac{2\sqrt{2}ca}{2ca+a^2+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+a}}\geq\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$$

Lại có: $a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)\leq\frac{4(a+b+c)^2}{3}$

Suy ra: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+a}}\geq\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2}{2(a+b+c)^2}$

Đặt $t=\frac{\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}$.($t\leq\sqrt{2}$)

Ta đưa về khảo sát hàm số $f(t)=t+\frac{3\sqrt{2}}{t^2}$

Ta có $P\geq\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

110

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)=30$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{b+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}$

Lời giải

Một cách tự nhiên, ta đặt $x=\frac{b}{a}>0;y=\frac{c}{a}>0$. Điều kiện được viết lại thành:

$$\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)(3+2x+y)=30\quad(1)$$

Viết P lại dưới dạng: $P=x+2y-7\sqrt{72+y^2}$.

Bây giờ điều khó khăn là xử lý biểu thức căn thức. Làm thế nào để mất căn thức đi ? Ta sẽ áp dụng BCS:

$$\left(72+y^2\right)(8+1)\geq(24+y)^2$$

Vậy nên: $\sqrt{72+y^2}\geq\frac{y+24}{3}$

Suy ra $P \le x - \frac{y}{3} - 56$ .Bây giờ ta cần tìm đánh giá cho P .Thử nhìn lại giả thiết , gợi ý cho ta:

Ta có: $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 1\right)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + 1\right) \ge 9$

Kết hợp với (1): $30 \ge \dfrac{9(3+2x+y)}{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+1}$

Hay là $x - \frac{y}{3} \le 1$

Như vậy: $P \le x - \frac{y}{3} - 56 \le 1 - 56 = -55$

Dấu đẳng thức xảy ra tại: $a = 1; b = 2; c = 3$

112

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $c = \min(a,b,c)$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.Tìm giá trị lớn nhất của: $P = 2ab + 3bc + 3ca + \dfrac{6}{a+b+c}$

Lời giải

Định hướng đầu tiên là ta sẽ dùng hàm số. Nhưng vấn đề là dồn về biến nào. Quan sát kĩ thì có 2 cách dồn biến đó là dồn về biến c hoặc về biến $t = a + b + c$ Nếu dồn về biến c thì quả thức rất khó đánh giá kết nối biểu thức để quy về biến c.Ta cố dồn về $t = a + b + c$. Nghĩa là chúng ta phải tìm mối liên hệ giữa $2ab + 3bc + 3ca$ và $t = a + b + c$

Dấu đẳng thức của bài này đạt tại $a = b = c$. Nên đầu tiên, các bạn viết ra giấy nháp biểu thức: $2ab + 3bc + 3ca$ và $(a+b+c)^2$. Tại sao lại bình phương, lý do đơn giản chỉ là để cùng bậc thôi.

Bây giờ ta thấy $(a+b+c)^2$ chênh $2ab + 3bc + 3ca$ là 1 đơn vị(đang xét tại điểm (1;1;1)).

Như vậy ta thử kiểm tra điều này có đúng không ? Nếu không đúng ta tiếp túc làm chặt đánh giá của mình $2ab + 3bc + 3ca \le (a+b+c)^2 - 1$

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 - 1 - 2ab - 3bc - 3ca = 2 - bc - ca \\
&= 2 - c(a+b) \ge 2 - c\sqrt{2(a^2+b^2)} = 2 - c\sqrt{2(3-c^2)} \\
&= 2 - \sqrt{2c^2(3-c^2)} \ge 2 - \frac{2c^2+3-c^2}{2} = \frac{1-c^2}{2} \ge 0
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định của ta là đúng.

Áp dụng, ta suy ra: $P \le (a+b+c)^2 + \dfrac{6}{a+b+c} - 1$

Đặt $t = a+b+c, \left(\sqrt{3} < t \le 3\right)$

Khi đó $P \le f(t) = t^2 + \frac{6}{t} - 1$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{6}{t} - 1, t \in \left(\sqrt{3}; 3\right]$

Ta có $f'(t) = 2t - \frac{6}{t^2} > 0, \forall t \in \left(\sqrt{3}; 3\right] \Rightarrow P \le f(t) \le f(3) = 10$

Lời giải được hoàn tất dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$

Ta sẽ khảo sát thêm một hướng dồn biến khác:

Giả thiết suy ra: $3 = a^2 + b^2 + c^2 \le (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) = 9 \Rightarrow \sqrt{3} \le a+b+c \le 3$

Bây giờ ta có:

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$$

$$c(a+b)=\sqrt{c^2(a+b)(a+b)}\le\sqrt{c(a+b)(a+b)}\le\sqrt{\frac{(2a+2b+2c)^3}{54}}=\sqrt{\frac{4(a+b+c)^3}{27}}\ \text{(vì } c\le 1\text{)}$$

Khi đó:

$$P=2(ab+bc+ca)+c(a+b)+\frac{6}{a+b+c}\le\frac{2(a+b+c)^2}{3}+\sqrt{\frac{4(a+b+c)^3}{27}}+\frac{6}{a+b+c}$$

Công việc của chúng ta bây giờ là khảo sát hàm số: $f(t)=\frac{2t^2}{3}+\sqrt{\frac{4t^3}{27}}+\frac{6}{t}, t=a+b+c\in[\sqrt{3};3]$

Việc này khá đơn giản xin dành cho bạn đọc

113

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$P=\sqrt[3]{\frac{9a^2}{(b+c)^2+5bc}}+\sqrt[3]{\frac{9b^2}{(c+a)^2+5ca}}+\frac{a+b+c^2}{9}$$

Lời giải

Dùng bất đẳng thức AM-GM:

$$bc\le\frac{(b+c)^2}{4}$$

Ta đánh giá được:

$$P\ge\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{c^2+c+1}{9}$$

Ta có một đánh giá khá nổi tiếng và chặt sau:

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2-\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^3=\frac{a^2(a+4b+4c)(2a-b-c)^2}{(b+c)^2(a+b+c)^3}\ge 0$$

Vậy nên: $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3a}{a+b+c}$ (1)

Tương tự: $\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3b}{a+b+c}$

Vậy $P\ge\frac{3c+3}{2c+1}+\frac{c^2+c+1}{9}=\frac{7}{3}+\frac{(2c+7)(c-1)^2}{9(2c+1)}\ge\frac{7}{3}$

Vậy $\min P=\frac{7}{3}$ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bình luận: Bất đẳng thức (1) là một bổ đề rất quan trọng và có nhiều ứng dụng trong giải toán. Các em học sinh cần ghi nhớ.

114

Với các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+1=z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx}+\frac{z^3}{z+xy}+\frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

Lời giải

Hình thức của bài toán khiến ta nghĩ ngay đến phương pháp hàm số. Vấn đề là ta sẽ xác định dồn về biến nào? Nhận thấy có sự đối xứng của 2 biến x,y nên ta không thể dồn theo 2 biến này được. Vậy ta sẽ dồn Z. Bây giờ biến Z ta sẽ không đụng chạm gì nó, giữ nguyên. Ta sẽ cố đưa 2 biến còn lại về Z. Để ý điều kiện, việc đưa về Z đồng nghĩa với việc rút ra các biểu thức dạng $(x+y)$ hoặc các biểu thức có thể đánh giá được với $(x+y)$.

Để ý số hạng cuối có cấu hình $\sqrt{ab}$ nên ta có ngay đánh giá theo AM-GM:

$$\sqrt{(x+1)(y+1)} \le \frac{x+y+2}{2}$$

$$z+xy = x+y+1+xy = (x+1)(y+1) \le \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$$

Bây giờ ta khó khăn ở việc xử lý 2 số hạng đầu tiên , có một phương pháp rất mạnh để xử lý biểu đó là áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx} = \frac{x^4}{x^2+xyz}+\frac{y^4}{y^2+xyz}$$
$$\ge \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+(x^2+y^2)z} = \frac{x^2+y^2}{z+1} \ge \frac{(x+y)^2}{2(z+1)} = \frac{(z-1)^2}{2(z+1)}$$

Vậy suy ra: $P \ge \frac{(z-1)^2}{2(z+1)}+\frac{4z^3}{(z+1)^2}+\frac{28}{(z+1)^2}$

Khảo sát hàm số trên $z>0$ ta được $\text{Min}P = \frac{53}{8}$ đạt tại $x = y = \frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}$.

115

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$

Lời giải

Áp dụng BCS , ta có:

$$P = \frac{4a}{2a}+\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{3b}{3b}+\frac{4a+3c}{3b}+8\frac{(2a+3c)}{2a+3c}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}-11$$
$$= (4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3c}\right)-11$$
$$\ge (4a+3b+3c)\frac{(1+1+2)^2}{2a+3b+2a+3c}-11 = 16-11 = 5$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{3}{2}b = \frac{3}{2}c$.

116

Cho a,b,c dương và thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3}$$

Lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Lúc này để ý quan sát thì bất đẳng thức cần xấp xỉ bởi $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Như vậy gợi ý cho chúng ta sử dụng bất đẳng thức sau:

$$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$$

Vậy ta đề xuất lời giải như sau:

$$VT^2 \le 3\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4}\right]$$

$$=3\left[a+\frac{(b-c)^2+2(b+c)+4\sqrt{bc}}{4}\right]$$

$$\le 3\left[a+\frac{2(b+c)+2(b+c)}{4}\right]=3$$

117

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{8(a+b-3\sqrt{c^2+3}}{9c}$$

Lời giải

Mình sẽ tiếp tục đóng vai đi thi và hướng nháp để giải câu bất đẳng thức này. Đầu tiên, như kinh nghiệm mà mình đã nói nhiều là ta nên dừng lại quan sát giả thiết. Để từ đó phán đoán điểm rơi của bất đẳng thức. Giả thiết cho $a+b+c=3$ mà lại quan sát xuống biểu thức P ta lại thấy có xuất hiện của sự đối xứng giữa $a;b$, nhưng c lại độc lập rong biểu thức chứa căn do vậy ý tưởng ban đầu ta sẽ dồn về cái biến c. Lại quan sát tiếp có nhóm $(b+c);(a+c)$ mặt khác thấy nó nằm trong hai biểu thức con $\frac{(2a+b+c)}{2a^2+(b+c)^2};\frac{(2b+a+c)}{2b^2+(a+c)^2}$

Nên ta sẽ viết lại thành:

$$P=\frac{(a+3)^2}{2a^2+(a-3)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(b-3)^2}+\frac{8\left(3-c-3\sqrt{c^2+3}\right)}{9c}$$

Bây giờ để dồn về c được ta phải đánh giá cho bằng được 2 số hạng đầu tiên.

Bây giờ ta đi dự đoán điểm rơi cho nó. Dự đoán thế nào đây ? Nhìn vào biểu thức P thấy $a;b$ đối xứng nhau nên suy ra ngay được $a=b$ .Dễ có được $c=1$. Vậy điểm rơi là $a=b=c=1$

Hình dạng của 2 số hạng đầu, giúp ta nghĩ ngay đến đánh giá bằng tiếp tuyến.

$$f(x)=\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}\le m.x+n$$

Bằng tính toán, ta sẽ chứng minh: $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}\le\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

Vậy: $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}\le\frac{4}{3}(a+b)+\frac{8}{3}$

Như vậy ta đã đưa tất cả về được biến c . Công việc còn lại ,khá đơn giản.

Việc hoàn thiện lời giải, xin phép được dành cho bạn đọc xem như một bài tập.

118

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x>y$ và $xy+(x+y)z+z^2=1$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{1}{4(x-y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}$$

Lời giải

Điều kiện đã chon được viết gọn lại: $(x+z)(y+z)=1$. Bây giờ ta sẽ tìm cách liên kết để sử dụng giả thiết này

Dễ dạng nhận ra đó là thay tử số của mỗi số hạng bằng $(x+z)(y+z)$. Lúc này P được viết lại dưới dạng:

$$P=\frac{(x+z)(y+z)}{4[(x+z)-(y+z)]^2}+\frac{(x+z)(y+z)}{(x+z)^2}+\frac{(x+z)(y+z)}{(y+z)^2}$$

Đặt $t=\frac{y+z}{x+z}\in(0;1]$

Thì suy ra được: $P=\frac{t}{4(t-1)^2}+t+\frac{1}{t}$

Đến đây mọi việc khá đơn giản.

119

Cho các số thực không âm x,y thỏa mãn $x^2+y^2+xy+2=3(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{3x+2y+1}{x+y+6}$

Lời giải

Trước hết, chú ý điều kiện, nhận thấy giả thiết là hoàn toàn đối xứng với 2 biến x,y Tiếp theo, để ý đến cái biểu thức P. Rõ ràng, P là hàm bậc nhất chia bậc nhất Từ đó, mình nghĩ đến ý tưởng dùng hình học để giải quyết bài toán. Để thực hiện điều đó, điều quan trọng đầu tiên cần làm, là chuyển giả thiết về dạng quen thuộc, phương trình đường tròn. Còn cái biểu thức P kia thì đơn giản rồi, chỉ cần quy đồng chuyển vế chuyển về phương trình đường thẳng, rồi áp dụng công thức khoảng cách nữa là ổn.

Tuy nhiên, muốn chuyển P về dạng phương trình đường tròn, trước tiên cần phải loại bỏ ngay cái tích xy. Tuy nhiên điều này không quá khó khăn

Đặt: $\begin{cases}x+y=2a\\x-y=2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\x=a+b\\y=a-b\end{cases}$

Khi đó giả thiết trở thành:

$$(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2+2=6a\Leftrightarrow 3a^2+b^2+2=6a$$

$$\Rightarrow P=\frac{5a+b+1}{2a+6}$$

Do: $3a^2+b^2+2=6a\Rightarrow b^2=-3a^2+6a-2=1-3(a-1)^2\Leftrightarrow|b|=\sqrt{1-3(a-1)^2}$

Từ đó suy ra: $P=\frac{5a+b+1}{2a+6}\le\frac{5a+|b|+1}{2a+6}=\frac{5a+1+\sqrt{1-3(a-1)^2}}{2a+6}$

Đặt $a-1=t$ thì $t\in\left[\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Ta viết lại $P=\frac{5(t+1)+1+\sqrt{1-3t^2}}{2(t+1)+6}=\frac{5t+6+\sqrt{1-3t^2}}{2t+8}$

Đến đây thì đơn giản rồi, xét hàm đảm bảo ra ngay. Nhưng mà nhìn cái biểu thức thấy nản quá, đạo hàm ra chắc cũng mệt.

Ta sẽ CM cho GTLN của P bằng 1 với $t \in \left[\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Thật vậy, ta có: $\frac{5t+6+\sqrt{1-3t^2}}{2t+8} \le 1 \Leftrightarrow 2-3t \ge \sqrt{1-3t^2} \Leftrightarrow (2-3t)^2 \ge 1-3t^2 \Leftrightarrow 3(2t-1)^2 \ge 0$ (đúng).

Lời giải hoàn tất.Đẳng thức xảy ra khi $x=2;y=1$

Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng lượng giác:

Giả thiết đã cho tương đương với: $x^2+y^2+xy+2-3(x+y)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

Ý tưởng dùng lượng giác hiện ra khó rỏ ràng.

Đặt $x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}=\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos t$

$$\Rightarrow x=\sin t+1-\frac{\cos t}{\sqrt{3}}, y=1+\frac{2\cos t}{\sqrt{3}}$$

Thay vào biểu thức P , ta có:

$$P=\frac{3\sin t+\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+6}{\sin t+\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+8}$$

$$\Leftrightarrow (P-3)\sin t+\left(\frac{P}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos t=6-8P$$

Để phương trình này có nghiệm thì $(P-3)^2+\left(\frac{P}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \ge (6-8P)^2 \Leftrightarrow \frac{20}{47} \le P \le 1$

Ta có: $P=1 \Leftrightarrow 3\sin t+\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+6=\sin t+\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+8 \Leftrightarrow \sin t=1 \Rightarrow \cos t=0 \Rightarrow x=2, y=1$

120

Cho x,y,z là các số thực dương thõa mãn: $5\left(x^2+y^2+z^2\right)=6\left(xy+yz+zx\right)$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Lời giải

Cái khó chịu của bài này chính là giả thiết. Nhưng khá may mắn cho chúng ta đó là biểu thức đã cho có dạng đồng bậc . Nên chúng ta đã được học cách xử lý

Giả thiết tương đương với $5(x+y+z)^2=16(xy+yz+zx)$

Nên ta đặt $x=ka, y=kb, z=k, k=\frac{x+y+z}{4}$

Vậy suy ra $a+b+c=4$; $ab+bc+ca=5$

Ta sẽ tìm GTNN của $P=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{20}{abc}$

Vậy nên ta tìm cực đại của abc.

Ta có $abc=c(5-c(a+b))=c^3-4c^2+5c$

Lại có $c^2-4c+5=ab \le \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(4-c)^2}{4}$

Nên $\frac{2}{3} \le c \le 2$

Khảo sát hàm $f(c)=c^3-4c^2+5c; c\in\left[\frac{2}{3};2\right]$

Ta có kết quả: $Maxf(c)=2$ đạt tại $c=1$.

Vậy GTNN của $P=10$ đạt tại $x=2y=2z$

121

Cho các số thực dương thõa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\sqrt{abc}\left(\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}\right)-\frac{c}{c+ab}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{\frac{ab}{c}}=x;\sqrt{\frac{bc}{a}}=y;\sqrt{\frac{ca}{b}}=z\Rightarrow xy+yz+zx=1$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\Rightarrow P=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\frac{1}{y+\frac{1}{y}}-\frac{1}{z+\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}-\frac{z}{(z+x)(z+y)}=\frac{2xy}{(x+z)(y+z)(x+y)}=\frac{2xy}{(z^2+1)(x+y)}\le\frac{(x+y)}{2(z^2+1)}=$$ Vậy

$$=\frac{(x+y)}{2\left(\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2+1\right)}=\frac{(x+y)^2}{2(x^2+1)(y^2+1)}\le\frac{(x+y)^2}{2(x+y)^2}=\frac{1}{2}$$

ta có $Max_P=\frac{1}{2}$

122

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab-2bc+2ca=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$:

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$P=\frac{c^2}{ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Bây giờ ta sẽ dùng BCS để đánh giá và chú ý $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$

$$P=\frac{c^2}{2ab}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{2ab}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\frac{9c^2}{(a+b)^2+ab}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge\frac{36c^2}{5(a+b)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Từ giả thiết: $(a+b-c)^2=ab\Rightarrow\sqrt{ab}=a+b-c$

Từ đó suy ra $P\ge\frac{36c^2}{5(a+b)^2}+\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{36}{5}\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+1-\frac{c}{a+b}$

Chúng ta cũng sẽ có: $(a+b-c)^2=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{c}{a+b}\le\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta sẽ có:

$$\frac{36}{5}\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+1-\frac{c}{a+b}\ge\frac{36}{5}\frac{c}{a+b}-\frac{4}{5}-\frac{c}{a+b}=\frac{31}{5}\frac{c}{a+b}-\frac{4}{5}\ge\frac{23}{10}$$

Lời giải hoàn tất.

123

Cho các số thực không âm thõa mãn $c=\min(a;b;c)$.Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại biên, ở đây là $c=0$. Chính vì vậy gợi ý cho ta những đánh giá với 0, nghĩa là ta hoàn toàn có thể đánh giá để mất c. Ý tưởng này rất quan trọng và giải được một lớp khá nhiều các bài toán có đẳng thức xảy tại biên.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} b-c\le b \\ a-c\le a \end{array}\right.$

Vì vậy $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{a-c}\right)^2\ge\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$

Vậy nên ở vế phải ta cũng sẽ tìm cách làm mất c, nghĩa là ta làm sao đó thay được $c=0$ vào, để làm được điều này thì ta sẽ đạo hàm theo biến c.

Xét $f(c)=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca};c\ge 0$

Ta có $f'(c)=\dfrac{2abc+c^2a+c^2b-a^2b-b^2a-a^3-b^3}{(ab+bc+ca)^2}<0$ do $c=\min(a;b;c)$

Nên $f(c)\le f(0)=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

Vậy ta cần chỉ ra rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\ge\dfrac{a^2+b^2}{ab}(*)$

Áp dụng bất đẳng thức BCS: $VT_{(*)}\ge\dfrac{(a^2+b^2)^2}{2a^2b^2}\ge\dfrac{a^2+b^2}{ab}=VP_{(*)}$

Phép chứng minh được hoàn tất.

124

Cho các số thực dương a,b,c .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}\le\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}$$

Lời giải

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+2c+a}\ge\frac{4}{(a+3b)+(b+2c+a)}=\frac{2}{a+2b+c}$$
$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+2a+b}\ge\frac{4}{(b+3c)+(c+2a+b)}=\frac{2}{b+2c+a}$$
$$\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{4}{(c+3a)+(a+2b+c)}=\frac{2}{c+2a+b}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta có bất đẳng thức (5)

Đẳng thức xảy ra khi: $\left\{\begin{array}{l} a+3b=b+2c+a \\ b+3c=c+2a+b \\ c+3a=a+2b+c \end{array}\right.\Leftrightarrow a=b=c$

125

Hãy xác định dạng của tam giác ABC nếu các góc của nó luôn thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{1+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{4.\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}$$

Lời giải

Đặt $x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2}$ thì x, y, z dương và $xy+yz+zx=1$

Hệ thức trở thành: $\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}=\frac{1}{4xyz}$

Ta có:

$$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}=$$

$$=\frac{x}{(xy+yz)+(zx+yz)}+\frac{y}{(xy+zx)+(yz+zx)}+\frac{z}{(xy+yz)+(zx+xy)}\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{x}{xy+yz}+\frac{x}{zx+yz}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{y}{xy+zx}+\frac{y}{yz+zx}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{z}{xy+yz}+\frac{z}{zx+xy}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+z}{xy+yz}+\frac{x+y}{zx+yz}+\frac{y+z}{xy+zx}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{xy+yz+zx}{4xyz}=\frac{1}{4xyz}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z$ hay ΔABC đều.

126

Với x,y,z,t là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{x-t}{t+y}+\frac{t-y}{y+z}+\frac{y-z}{z+x}+\frac{z-x}{x+t}$$

Lời giải

$$A=\left(\frac{x-t}{t+y}+1\right)+\left(\frac{t-y}{y+z}+1\right)+\left(\frac{y-z}{z+x}+1\right)+\left(\frac{z-x}{x+t}+1\right)-4=$$

$$=\frac{x+y}{t+y}+\frac{t+z}{y+z}+\frac{y+x}{z+x}+\frac{z+t}{x+t}-4=(x+y)\left[\frac{1}{t+y}+\frac{1}{z+x}\right]+(t+z)\left[\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+t}\right]-4$$

$$\ge(x+y)\frac{4}{x+y+z+t}+(t+z)\frac{4}{x+y+z+t}-4=\frac{4(x+y+z+t)}{z+y+z+t}-4=0$$

Vậy MinA = 0 khi $x=y=z=t$

127

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$ Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge8(a^2+b^2+c^2)$$

Lời giải

Đặt $t=ab+bc+ca\Rightarrow0\le t\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$

Áp dụng điều kiện $a+b+c=1$, ta có:

$$\frac{t}{t^2-2abc(a+b+c)}\ge8\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{t}{t^2-2abc}\ge8(1-2t)$$

Bây giờ để ý một tí ta nhận ra đẳng thức xảy ra tại biên nó ta dễ dàng làm mất đi abc
Dễ thấy

$$\frac{t}{t^2-2abc} \geq \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$$

Do đó chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{t} \geq 8(1-2t) \Leftrightarrow 16t^2-8t+1 \geq 0 \Leftrightarrow (4t-1)^2 \geq 0$$

Vậy ta có đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=0 \\ t=ab+bc+ca=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ hoặc hoán vị.

128

Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ac}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab} \leq 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Ta có $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{bc}{a}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{ca}{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{c}{ab}}+\sqrt{\dfrac{ab}{c}}}$

Đặt $\sqrt{\dfrac{ab}{c}}=x, \sqrt{\dfrac{bc}{a}}=y, \sqrt{\dfrac{ac}{b}}=z$ thì ta có $xy+yz+zx=1$.

$$P=\frac{1}{1+z^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{x}{1+x^2}$$

Đến đây dấu hiệu lượng giác khá rõ ràng.

Tồn tại tam giác ABC sao cho $\tan\dfrac{A}{2}=x, \tan\dfrac{B}{2}=y, \tan\dfrac{C}{2}=z$

Khi đó $A=\dfrac{\sin A+\cos B+\cos C}{2}+1$

Ta có : $\cos B+\cos C=2\cos\dfrac{B+C}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2} \leq 2\cos\dfrac{B+C}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}$

Ta sẽ chứng minh: $\sin A+2\sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2t\sqrt{1-t^2}+2t \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(16t^2+16\sqrt{3}t+36) \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy ta có $A \leq 1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

129

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau: $\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}\ge\dfrac{1}{xy+1}$

Áp dụng, ta có: $VT\ge\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+cd}=\dfrac{2+ab+cd}{abcd+ab+cd+1}=1$

Bài toán được chứng minh.

130 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\sum\dfrac{a}{\sqrt{4a^2+5bc}}\le 1$

Lời giải

Đặt $\left(\dfrac{bc}{a^2},\dfrac{ca}{b^2},\dfrac{ca}{b^2}\right)\to(x,y,z)$,Suy ra được $xyz=1$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{\sqrt{4+5x}}+\frac{1}{\sqrt{4+5y}}+\frac{1}{\sqrt{4+5z}}\le 1$$

Giả sử $x\ge y\ge z$ thì $x\ge 1$ và $yz\le 1$. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

$$\frac{1}{\sqrt{4+5y}}+\frac{1}{\sqrt{4+5z}}\le\frac{2}{\sqrt{4+5\sqrt{yz}}}\quad(1)$$

Bổ đề hiển nhiên đúng khi $y=z$. Với $y>z$,ta đặt $s=\dfrac{y+z}{2};p=\sqrt{yz}$ thì $s>p,p\le 1$

Bình phương, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{4+5y}+\frac{1}{4+5z}-\frac{2}{4+5p}\le\frac{2}{4+5p}-\frac{2}{\sqrt{(4+5y)(4+5z)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-50p^2+50ps-40s+40p}{(4+5y)(4+5z)(4+5p)}\le\frac{2\left[(4+5y)(4+5z)-(4+5p)^2\right]}{(4+5p)\sqrt{(4+5y)(4+5z)}\left((4+5p)+\sqrt{(4+5y)(4+5z)}\right)}$$

Lại có: $-50p^2+50ps-40s+40p=10(s-p)(5p-4)$ .Nên rút gọn 2 vế cho $\dfrac{10(s-p)}{(4+5p)\sqrt{(4+5y)(4+5z)}}$, ta chỉ còn chứng minh:

$$\frac{5p-4}{\sqrt{(4+5y)(4+5z)}}\le\frac{8}{4+5p+\sqrt{(4+5y)(4+5z)}}$$

$$\Leftrightarrow 25p^2-16\le(12-5p)\sqrt{(4+5y)(4+5z)}$$

Điều này hiển nhiên đúng vì

$$\begin{aligned}&(12-5p)\sqrt{(4+5y)(4+5z)}-25p^2+16\\&=(12-5p)\sqrt{25p^2+40s+16}-25p^2+16>(12-5p)\sqrt{25p^2+40p+16}-25p^2+16\\&=2(8-5p)(5p+4)>0\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh, tiếp theo ta chỉ ra: $\dfrac{1}{\sqrt{4+5x}}+\dfrac{2}{\sqrt{4+5\sqrt{yz}}}\le 1$

Đặt $\sqrt{4+5\sqrt{yz}}=3t\Rightarrow\dfrac{2}{3}<t\le 1$ và $x=\dfrac{1}{yz}=\dfrac{25}{(9t^2-4)^2}$

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{9t^2-4}{3\sqrt{36t^4-32t^2+21}}+\frac{2}{3t}\le 1$$

$$\Leftrightarrow (2-3t)(\sqrt{36t^4-32t^2+21}-3t^2-2t)\le 0$$

Do $2-3t<0$ nên ta cần chỉ ra:

$$\sqrt{36t^4-32t^2+21}\ge 3t^2+2t \Leftrightarrow (t-1)^2\left(9t^2+14t+7\right)\ge 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bình luận: Chúng ta cần ghi nhớ bổ đề (1) và những bổ đề dạng liên quan với bổ đề (1).

131

Cho x,y là 2 số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+2y}\ge 4$$

Lời giải

Biến đổi tương đương, ta cần chứng minh:

$$x^3(x+2y)+9y^4\ge 4y^2(x+2y)$$

Ta đồng bậc hóa bất đẳng thức: $x^3(x+2y)+9y^4\ge 2y^2(x+2y)\sqrt{2(x^2+y^2)}$

$$\Leftrightarrow \left[x^3(x+2y)+9y^4\right]^2\ge\left[2y^2(x+2y)\sqrt{2(x^2+y^2)}\right]^2$$

Khai triển trực tiếp và thu gọn:

$$x^8+49y^8+4x^6y^2+4x^3y^5+10x^4y^4-40x^2y^6-32xy^7\ge 0$$

Đến đây, đặt $t=\frac{x}{y}>0$, ta được $t^8+4t^7+4t^6+10t^4+4t^3-40t^2-32t+49\ge 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^6+6t^5+14t^4+24t^3+43t^2+66t+49)\ge 0$$

Điều này luôn đúng và ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên lời giải này tính toán quá phức tạp, ta có một lời giải khác đơn giản hơn.

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có $\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+2y}\right)\left[x+(x+2y)\right]\ge\left(\frac{x^2}{y}+3y\right)^2$

Lại do $x^2+y^2=2$ nên $\frac{x^2}{y}+3y=\frac{2-y^2}{y}+3y=2\left(y+\frac{1}{y}\right)\ge 4$

Thêm vào đó, dễ dàng chứng minh được: $x+(x+2y)=2(x+y)\le 4$

Nên suy ra được $\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+2y}\ge\frac{4^2}{4}=4$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$

Ta xét thêm một lời giải sau cũng khá tiêu biểu cho cách giảm biến:

Ta có $\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+2y}\ge\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+y^2+1}$

Vì $x^2+y^2=2$ nên ta có: $\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+y^2+1}=\frac{x^3}{2-x^2}+\frac{9(2-x^2)}{x+3-x^2}$

Bây giờ, ta chỉ cần chỉ ra rằng:

$$\frac{x^3}{2-x^2}+\frac{9(2-x^2)}{x+3-x^2}\ge 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3(x+3-x^2)+9(2-x^2)^2-4(2-x^2)(x+3-x^2)}{(2-x^2)(x+3-x^2)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^5-6x^4-7x^3+16x^2+8x-12}{(2-x^2)(x+3-x^2)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x^3-4x^2-16x-12)}{(2-x^2)(x+3-x^2)} \le 0$$

Luôn đúng với $0 \le x \le \sqrt{2}$

132

Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $2x+4y+7z=2xyz$. Tìm GTNN của $P=x+y+z$

Lời giải

Từ giả thiết, ta có: $z=\frac{2x+4y}{2xy-7}$

Ta có

$$P=x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7}=x+\frac{11}{2x}+\frac{2xy-7}{2x}+\frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7} \ge x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{\frac{2xy-7}{2x}\cdot\frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7}}$$

$$=x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$$

Theo BCS, ta có:

$$\left(3+\frac{7}{x}\right)^2 \le (9+7)\left(1+\frac{7}{x^2}\right)=16\left(1+\frac{7}{x^2}\right) \Rightarrow 2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} \ge \frac{1}{2}\left(3+\frac{7}{x}\right)$$

Do đó: $P \ge x+\frac{11}{2x}+\frac{1}{2}(3+\frac{7}{x}) \ge \frac{3}{2}+(x+\frac{9}{x}) \ge \frac{15}{2}$

Vậy $\min P=\frac{15}{2}$ đạt tại $x=3; y=\frac{5}{2}; z=2$

132

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+ac+bc=2013abc$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1}{a(2013a-1)^2} \ge \frac{2013}{4}$$

Lời giải

Ta có $ab+bc+ca=2013abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2013$

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, ta có $x+y+z=2013$

Nên $\frac{1}{a(2013a-1)^2}=\frac{x}{(\frac{2013}{x}-1)^2}=\frac{x^3}{(2013-x)^2}=\frac{x^3}{(y+z)^2}$

$$A=\frac{x^3}{(y+z)^2}+\frac{y^3}{(x+z)^2}+\frac{z^3}{(x+y)^2} \ge \frac{2013}{4}$$

Bây giờ, bài toán trở nên khá quen thuộc, ta sẽ dùng kĩ thuật chọn điểm rơi AM-GM:

$$\frac{x^3}{(y+z)^2}+\frac{y+z}{8}+\frac{y+z}{8} \ge \frac{3}{4}x$$

Xây dựng thêm 2 bất đẳng thức tương tự, ta có:

$$A \ge \frac{1}{4}(x+y+z)=\frac{2013}{4}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{2013}{3} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{2013}$

133 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2>4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Lời giải

Do $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ nên tồn tại các số dương x,y,z sao cho:

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)} \\ b^2=\dfrac{xz}{(x+y)(y+z)} \\ c^2=\dfrac{xy}{(x+z)(y+z)} \end{cases}$$

Do đó bất đẳng thức đã cho được viết thành $\sum\dfrac{xy}{(x+z)(y+z)}\ge 4\sum\dfrac{xy^2z}{(x+z)^2(x+y)(y+z)}$

Quy đồng mẫu ta cần phải chứng minh: $\left[\sum xy(x+y)\right](x+y)(y+z)(z+x)\ge 4xyz\left[\sum x(x+y)(x+z)\right]$

Đây là một bất đẳng thức đồng bậc, vì vậy khai triển ta được:

$$\Leftrightarrow \sum x^2y^2(x+y)^2\ge 2xyz(x^3+y^3+z^3)+12(xyz)$$

Nhưng đây là một bất đẳng thức đúng do AM-GM:

$$\sum x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\ge 2xyz\left(x^3+y^3+z^3\right)$$

Và $\sum x^2y^2.2xy\ge 12(xyz)$

Ta có thể dùng lượng giác để giải quyết bài toán này như sau:

Với giả thiết đã chon luôn tồn tại một tam giác ABC sao cho $a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C$. Khi ấy ta có:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\ge 4(\cos^2A\cos^2B+\cos^2B\cos^2C+\cos^2C\cos^2A)$$

Ta thấy: $\cos^2A=\cot^2A.\sin^2A=\dfrac{\cot^2A}{\cot^2A+1}$

Đặt $x=\cot A,\ y=\cot B,\ z=\cot C$

$$\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1}\ge 4\left(\frac{x^2y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}+\frac{y^2z^2}{(y^2+1)(z^2+1)}+\frac{z^2x^2}{(z^2+1)(x^2+1)}\right)(1)$$

Ta có giả thiết mới $xy+yz+zx=1$ và $x^2+1=(x+y)(x+z)$

Bất đẳng thức (1) được viết lại dưới dạng

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}$$

$$\ge 4\left(\frac{x^2y^2}{(x+y)^2(y+z)(z+x)}+\frac{y^2z^2}{(y+z)^2(x+y)(z+x)}+\frac{z^2x^2}{(z+x)^2(x+y)(y+z)}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\ge 4\left(\frac{x^2y^2}{x+y}+\frac{y^2z^2}{y+z}+\frac{z^2x^2}{z+x}\right)$$

Bây giờ, áp dụng BCS, ta có $\dfrac{4x^2y^2}{x+y}\le\dfrac{x^2y^2}{x}+\dfrac{x^2y^2}{y}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

134

Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn:

$$a+b-c\ge 0, b+c-a\ge 0, c+a-b\ge 0, (a+b+c)^2=4(ab+bc+ca-1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S=\sqrt{\frac{b+a}{c}-1}+\sqrt{\frac{a+c}{b}-1}+\sqrt{\frac{c+b}{a}-1}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2}}$$

Lời giải

Nếu các số hạng đầu của S không có gì liên kết với giả thiết cả vì chỉ là những số hạng bậc 1. Để có thể có chút liên hệ gì đó với giả thiết thì chúng ta hãy nhân các số hạng đó lại với nhau.Theo Bất Đẳng Thức AM-GM, ta có:

$$S\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2}}$$

Ta có:

$$=3\sqrt[6]{\frac{-(a+b+c)^3+4(ab+bc+ca)(a+b+c)-8abc}{abc}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-2}}$$

Theo giả thiết thì: $(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca-1)\Leftrightarrow ab+bc+ca=\dfrac{(a+b+c)^2+4}{4}$

Thay vào ta được:

$$S=3\sqrt[6]{\frac{4(a+b+c)}{abc}-8}+\frac{4}{\sqrt{(a+b+c)^2-5}}\ge\sqrt[6]{\frac{27.4}{(a+b+c)^2}-8}+\frac{4}{\sqrt{(a+b+c)^2-5}}$$

Đặt $(a+b+c)^2=t, 5<t\le\dfrac{27}{2}$

Khi đó $S=f(t)=3\sqrt[6]{\dfrac{108}{t}-8}+\dfrac{4}{\sqrt{t-5}}$

$$\underset{t\in\left(5;\frac{27}{2}\right]}{f(t)}\ge f\left(\frac{27}{2}\right)=\frac{4\sqrt{34}}{17}$$

Vậy $\min S=\dfrac{4\sqrt{34}}{17}$ đạt được khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

135

Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+y=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{x^3+y^3+x+y+3xy}{x^3+y^3}+\frac{2}{xy.(x+y)^2}$$

Lời giải

Ta có

$$x+y=1\Rightarrow(x+y)^3=1\Rightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=1\Rightarrow x^3+y^3+3xy=1$$

$$\Rightarrow P=\frac{2(x^3+y^3)+6xy}{x^3+y^3}+\frac{2(x^3+y^3+3xy)}{xy}$$

$$=8+\frac{6xy}{x^3+y^3}+\frac{2(x^3+y^3)}{xy}\overset{Cosi}{\ge}8+2\sqrt{\frac{6xy}{x^3+y^3}.\frac{2(x^3+y^3)}{xy}}=8+4\sqrt{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases}\dfrac{6xy}{x^3+y^3}=\dfrac{2(x^3+y^3)}{xy}\\ x,y>0, x+y=1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}\right)\end{cases}\right. \text{ hoặc } \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}\right)\end{cases}$$

138

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+3}+\frac{b}{b^2+3}+\frac{c}{c^2+3}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Ta có $abc=1 \Leftrightarrow \ln a+\ln b+\ln c=0$

Đặt $\ln a=x;\ln b=y;\ln c=z \Rightarrow x+y+z=0$

Khi đó $VT=\frac{e^x}{(e^x)^2+3}+\frac{e^y}{(e^y)^2+3}+\frac{e^z}{(e^z)^2+3}$

Xét $f(x)=\frac{e^x}{(e^x)^2+3}$ (hàm lõm)

$$f(x)\le f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0)$$

Với $x_0=0$, ta có: $f(x)\le f'(0).(x-0)+f(0)=\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}$

Làm tương tự rồi cộng lại ta có $f(x)+f(y)+f(z)\le\frac{1}{8}(x+y+z)+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

Bình luận: Bạn có nhận xét gì về cách giải của bài toán trên, hãy thử giải lại bài toán trên bằng cách khác.

138

Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn $3xy+yz+2zx=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{4}{y^2+4}+\frac{3z}{9+z^2}$$

Lời giải

Nhìn vào biểu thức cần chứng minh ta thấy xuất hiện một hàm tan khá rõ rệt nhưng ở giả thiết thì chưa có dạng gì là lượng giác cả. Ta để ý là giả thiết có thể viết lại như sau:

Giả thiết tương đương với $\frac{xy}{2}+\frac{yz}{6}+\frac{zx}{3}=1$

Do đó tồn tại tam giác ABC sao cho $x=\tan\frac{A}{2},\frac{y}{2}=\tan\frac{B}{2},\frac{z}{3}=\tan\frac{C}{2}$

Lúc này ta có biến đổi sau:

$$P=\frac{1}{\tan^2\frac{A}{2}+1}+\frac{1}{\tan^2\frac{B}{2}+1}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{\tan^2\frac{C}{2}+1}$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)+\sin\frac{C}{2}\sqrt{1-\sin\frac{C}{2}}=1+\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$\le 1+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{C}{2}}$$

Xét $f(t)=t+t\sqrt{1-t^2}$ với $0<t<1$. Ta có

$$f(t)\le f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $P_{max}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{4}$ khi $\begin{cases} z=3\sqrt{3} \\ 2x=y=4-2\sqrt{3} \end{cases}$

Bình luận: Khi chứng minh các bất đẳng thức dạng lượng giác, một kĩ thuật rất hay được sử dụng đó là đưa về một góc rồi dùng hàm số. Sở dĩ điều này luôn làm được vì nếu như gặp phải biểu thức là hiệu của 2 góc thì ta luôn có tính chất sin hoặc cos trị tuyệt đối không vượt quá 1. Và tổng 2 góc luôn được biểu diễn qua góc còn lại.

140

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{4a}{b}\left(1+\dfrac{2c}{b}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1+\dfrac{c}{a}\right)=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=\dfrac{bc}{a(b+2c)}+2\left[\dfrac{ac}{b(a+c)}+\dfrac{ab}{c(2a+b)}\right]$

Lời giải

Giả thiết đã cho được viết lại như sau: $2\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2a.4c}{b^2}+2\dfrac{b}{2a}+\dfrac{b.4c}{(2a)^2}=6$

Đặt $x=b,y=2a,z=c$ thì giả thiết được việt lại dạng: $2\dfrac{y}{x}+2\dfrac{x}{y}+\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}=6$

Lúc đó ta có: $P=\dfrac{xz}{y(2x+z)}+\dfrac{yz}{x(2y+z)}+\dfrac{4xy}{z(x+y)}$

VIệc đánh giá biểu thức này khá quen thuộc, ta sẽ dùng bất đẳng thức BCS như sau:

$$P=\frac{xz}{y(2x+z)}+\frac{yz}{x(2y+z)}+\frac{4xy}{z(x+y)}\ge\frac{(xz+zy)^2}{2xyz(x+y+z)}+\frac{4xy}{z(x+y)}\ge\frac{3(xz+yz)^2}{2(xy+yz+zx)^2}+\frac{4xy}{z(x+y)}$$
$$=\frac{3}{2(\frac{xy}{zx+zy}+1)^2}+\frac{4xy}{z(x+y)}$$

Đặt $t=\dfrac{xy}{xz+zy}\Rightarrow P\ge\dfrac{3}{2(t+1)^2}+4t$

Bây giờ, điều cần thiết là tìm điều kiện của t

Theo giả thiết, ta có $6\ge 4+\dfrac{z(x+y)}{xy}\Rightarrow t\ge\dfrac{1}{2}$

Vậy ta có : $P\ge\dfrac{3}{2(t+1)^2}+4t=\dfrac{3}{2(t+1)^2}+\dfrac{4}{9}(t+1)+\dfrac{4}{9}(t+1)+\dfrac{28}{9}t-\dfrac{8}{3}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{4^2}{9^2}.\dfrac{3}{2}}+\dfrac{14}{9}-\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=2a=4c$

Bình luận: Ta cũng có thể khảo sát hàm $f(t)$ thay vì dùng bất đẳng thức AM-GM

141

Cho $x,y,z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{x^2y}{z^3}+\dfrac{y^2z}{x^3}+\dfrac{z^2x}{y^3}+\dfrac{4xyz}{x^2y+y^2+z^2x}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2y}{z^3}+\dfrac{z}{y}\ge 2\dfrac{x}{z} \\ \dfrac{y^2z}{x^3}+\dfrac{x}{z}\ge 2\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{z^2x}{y^3}+\dfrac{y}{x}\ge 2\dfrac{z}{y} \end{cases}$$

Vậy thì $\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3}\ge\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz}$

Lúc này ta có:

$$P\ge\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz}+\frac{4xyz}{x^2y+y^2z+z^2x}$$

Dễ thấy đây là tổng của 2 bất đẳng thức ngược chiều, nhưng nếu đánh giá trực tiếp bằng AM-GM, thì ta lại gặp 1 lỗi là không đảm bảo dấu bằng. Như vậy làm thế nào để đảm bảo dấu bằng ? Ta sẽ tách như sau:

$$P\ge\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz}+\frac{4xyz}{x^2y+y^2z+z^2x}=\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz}+\frac{9xyz}{x^2y+y^2z+z^2x}-\frac{5xyz}{x^2y+y^2z+z^2x}\ge 6-\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$$

Bình luận: Với việc để ý được $\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{xyz}$ gợi ý cho ta sử dụng cách đánh giá AM-GM như ở trên. Cách làm này với bất đẳng thức AM-GM là một cách làm hoàn toàn sơ cấp và tự nhiên đối với những học sinh vừa tiếp xúc với bất đẳng thức.

142

Cho $x,y,z\in(0;1]$ thỏa mãn $x+y-z\ge1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$B=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{xy+z^2}$$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $x+y-z\ge1\Leftrightarrow x+y\ge1+z$

Ta có

$$B=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{xy+z^2}=\frac{x^2}{x(y+z)}+\frac{y^2}{y(z+x)}+\frac{z}{xy+z^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$B\ge\frac{(x+y)^2}{2xy+z(x+y)}+\frac{z}{xy+z^2}(1)$$

Đặt $t=x+y$,theo giả thiết ta có $1+z\le t\le2;xy\le\frac{t^2}{4}(2)$

Theo (1) và (2), ta suy ra được: $B\ge\frac{2t^2}{t^2+2zt}+\frac{4z}{t^2+z^2}=f(t)$

Xét hàm $f(t)$ trên $[1+z;2]$ ta có:

$$f'(t)=4zt[\frac{t}{(t^2+2zt)^2}-\frac{2}{(t^2+4z^2)}]$$

Mặt khác do $t\ge z+1;z\le1$ nên $2zt\ge4z^2$

Suy ra $\frac{t}{(t^2+2zt)^2}\le\frac{2}{t^2+4z^2}$

$$\Rightarrow f(t)\text{ nghịch biến với mọi } t\in[z+1;2]\Rightarrow f(t)\ge f(2)=\frac{2}{1+z}+\frac{z}{z^2+1}=g(z)$$

Ta sẽ khảo sát hàm $g(z)$ trên $(0;1]$. Ta có $g'(z)=-\frac{2}{(1+z)^2}+\frac{1-z^2}{(z^2+1)^2}\le0$ với mọi $z\in(0;1]$

Suy ra $g(z)\ge g(1)=\frac{3}{2}$

Vậy $\mathrm{Min}B=\frac{3}{2}$ dấu đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=1$

Bình luận: Công cụ đạo hàm là một công cụ rất mạnh nhưng đôi lúc lời giải bằng đạo hàm khá phức tạp(nhưng là một giải pháp an toàn trong phòng thi). Chúng ta theo dõi một lời giải khác cho bài toán này như sau:

Ta có $xy+z^2 \le 1+z \le x+y$ .Chính vì thế nên:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{xy+z^2} \ge \frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

Đúng theo bất đẳng thức Nesbbit.

Việc sáng tạo ra một bất đẳng thức hay và đẹp là rất khó bởi vì khi đặt ra bài toán thì tác giả bài toán đó không hề nghĩ rằng người khác có thể giải được bài toán trong vòng mấy dòng. Có rất nhiều cách tiếp cận cho một bài toán, trong đó có những cách tiếp cận mang đến những lời giải sức bất ngờ. Việc làm đó cho chúng ta niềm tin và cảm nhận được vẻ đẹp của toán học.

143

Cho x,y,z là các số dương thoả mãn: $\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+2$ .Tìm GTLN của:

$$P=\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{2z^2}{y^2+z^2}-\frac{3z}{2x+z}$$

Lời giải

Đặt $t=\frac{z}{x}$. Theo AM-GM, ta có:

$$2+\frac{x}{z}=\frac{z}{x}+\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4 \ge \frac{z}{x}+\frac{2x^2}{z^2} \Leftrightarrow t+\frac{2}{t^2} \le 2+\frac{1}{t} \Leftrightarrow t^3-2t^2-t+2 \le 0 \Leftrightarrow t \in [1;2]$$

Viếtlại P dưới dạng tương đương: $P=4-\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{y^2+z^2}+\frac{3z}{2x+z}\right)=4-Q$

Thay vì tìm GTLN của P. Ta sẽ tìm GTNN của Q.

Dễ dàngcó: $\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{z}{y}\right)^2} \ge \frac{2}{1+\frac{z}{x}}$ (do $\frac{z}{x} \ge 1$).

Suyra: $Q \ge \frac{4}{1+\frac{z}{x}}+\frac{3.\frac{z}{x}}{2+\frac{z}{x}}=\frac{4}{t+1}+\frac{3t}{t+2}$. Xét hàm số: $f(t)=\frac{4}{t+1}+\frac{3t}{t+2};t \in [1;2]$

Ta tìm được GTNN của Q bằng $\frac{17}{6}$. Đạt được khi $t=2$.

Vậy GTLN của O bằng $\frac{7}{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{2}t \\ z=2t \end{cases}$

144

Cho $x,y,z>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{y+2x^2}{2x+1}+\frac{z+2y^2}{2y+1}+\frac{x+2z^2}{2z+1}+\frac{8}{x+y+z}$

Lời giải

Ta biến đổi:

$$P+\frac{3}{2}=\frac{y+2x^2}{2x+1}+\frac{1}{2}+\frac{z+2y^2}{2y+1}+\frac{1}{2}+\frac{x+2z^2}{2z+1}+\frac{1}{2}+\frac{8}{x+y+z}$$

Ta có:

$$\frac{y+2x^2}{2x+1}+\frac{1}{2}=\frac{2y+4x^2+2x+1}{2(2x+1)}=x+\frac{2y+1}{2(2x+1)}$$

Tương tự,

$$\frac{z+2y^2}{2y+1}+\frac{1}{2}=y+\frac{2z+1}{2(2y+1)},\ \frac{x+2z^2}{2z+1}+\frac{1}{2}=z+\frac{2x+1}{2(2z+1)}$$

$$\Rightarrow P+\frac{3}{2}=x+y+z+\frac{8}{x+y+z}+\frac{1}{2}\left(\frac{2y+1}{2x+1}+\frac{2z+1}{2y+1}+\frac{2z+1}{2x+1}\right)$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho các số dương ta có: $\begin{cases} x+y+z+\dfrac{8}{x+y+z}\ge 4\sqrt{2} \\ \dfrac{2y+1}{2x+1}+\dfrac{2z+1}{2y+1}+\dfrac{2z+1}{2x+1}\ge 3 \end{cases}$

Suy ra $P+\frac{3}{2}\ge 4\sqrt{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow P\ge 4\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=2\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $4\sqrt{2}$ đạt khi $x=y=z=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

145

Chứng minh rằng nếu $a,b,c\in[1;2]$ thì $\frac{10a}{bc}+\frac{11b}{ca}+\frac{12c}{ab}\le\frac{69}{2}$.

Lời giải

Cũng như bài toán trên ta coi một trong ba số a,b,c là một biến số của hàm số, chẳng hạn là a, khi đó ta đặt $x=a,\ x\in[1;2]$ và ta đi xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{11b}{c}+\frac{12c}{b}\right)+\frac{10}{bc}.x$, đặt

$$\alpha=\frac{11b}{c}+\frac{12c}{b}=\frac{11b^2+12c^2}{bc},\ \beta=\frac{10}{bc}.$$

Khi đó $f'(x)=-\frac{\alpha}{x^2}+\beta=\frac{\beta x^2-\alpha}{x^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Ta có $\alpha=\frac{11b^2+12c^2}{bc}\ge\frac{33}{bc}>3.\frac{10}{bc}=3\beta\Rightarrow x=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}>1$

Như vậy, ta luôn có $f(x)\le\max\{f(1),f(2)\}=\max\{g(b),h(b)\}$, trong đó $g(b)=f(1)=\frac{10}{bc}+\frac{11b}{c}+\frac{12c}{b}$ và:

$$h(b)=f(2)=\frac{20}{bc}+\frac{11b}{2c}+\frac{6c}{b}.$$

Ta xét tiếp $g(b)$ trên đoạn $[1;2]$ có $g'(b)=-\frac{1}{b^2}\left(\frac{10}{c}+12c\right)+\frac{11}{c}=\frac{-1}{b^2}A+B$, trong đó

$A=\frac{10}{c}+12c=\frac{10+12c^2}{c}$, $B=\frac{11}{c}$ và có $g'(b)=0\Leftrightarrow b=\sqrt{\frac{A}{B}}>1$

Như vậy, $g(b)\le\max\{g(1),g(2)\}=\max\left\{\frac{21}{c}+12c,\frac{27}{c}+6c\right\}$

Xét lần nữa $\varphi(c)=\frac{21}{c}+12c$ và $\phi(c)=\frac{27}{c}+6c$ trên đoạn $[1;2]$ có $\max\limits_{[1;2]}\{\varphi(c),\phi(c)\}\le\max\left\{\frac{69}{2},33\right\}=\frac{69}{2}$, từ đó suy ra $g(b)\le\frac{69}{2}$ với mọi $b,c\in[1;2]$.

Xét tương tự đối với $h(b)$ trên đoạn $[1;2]$ ta cũng có

$$h(b)\le\max\{h(1),h(2)\}=\left\{\frac{51}{2c}+6c,\frac{21}{c}+3c\right\}\le\left\{\frac{63}{2},24\right\}=\frac{63}{2}.$$

Vậy $\frac{10a}{bc}+\frac{11b}{ca}+\frac{12c}{ab}\le\frac{69}{2}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=2$.

146

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}\quad(1)$$

Lời giải

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow xy+z(x+y)-2z.xy\le\frac{7}{27}\Leftrightarrow(1-2z)xy+z(1-z)\le\frac{7}{27}.$$

$$\Leftrightarrow(2z-1)xy+z^2-z+\frac{7}{27}\ge0$$

Đặt $t=xy,0\le t\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{(1-z)^2}{4}$ và xét $f(t)=(2z-1)t+z^2-z+\frac{7}{27}$

Ta có $f(0)=z^2-z+\frac{7}{27}\ge0$

$$f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right)=\frac{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\left(2z+\frac{1}{3}\right)}{4}\ge0$$

$\Rightarrow f(t)\ge0,\forall t\in\left[0;\frac{(1-z)^2}{4}\right]$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Trong bài toán này, ta không biết được dấu của $2z-1$. Tuy nhiên, ta có thể kết luận được giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên đoạn $\left[0;\frac{(1-z)^2}{4}\right]$ chỉ đạt được tại hai đầu mút. Cách làm này tránh được việc phải xét nhiều trường hợp.

147

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+\frac{15}{4}abc\ge\frac{1}{4}\quad(2)$$

Lời giải

Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3+\frac{15}{4}c.ab-\frac{1}{4}\ge0$$

$$\Leftrightarrow(1-c)^3-3ab(1-c)+c^3+\frac{15}{4}c.ab-\frac{1}{4}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(9c-4)}{4}ab+c^2-c+\frac{1}{4}\ge0$$

Đặt $t=ab,\ 0\le t\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(1-c)^2}{4}$ và xét $f(t)=\frac{(9c-4)}{4}t+c^2-c+\frac{1}{4}$

Ta có $f(0)=c^2-c+\frac{1}{4}=\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\ge0$

$$f\left(\frac{(1-c)^2}{4}\right)=\frac{c(3c-1)^2}{16}\ge0$$

$$\Rightarrow f(t)\le0,\forall t\in\left[0;\frac{(1-c)^2}{4}\right].$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2};c=0$ và các hoán vị của nó. Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Trong các chứng minh trên, giả thiết $a+b+c=1$ là quan trọng. Vì vậy đối với những bất đẳng thức chưa cho giả thiết này mà có tính đồng bậc (thuần nhất) thì ta có thể chuẩn hóa để tạo ra chúng.

148

Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+z^2(x+y-z)\le 3xyz \quad (3)$$

Lời giải

Do BĐT là thuần nhất nên nhờ chuẩn hóa ta có thể giả thiết thêm $x+y+z=1$.

Thay $y+z=1-x$, $x+z=1-y$, $x+y=1-z$ vào (3) ta được

$$x^2(1-2x)+y^2(1-2y)+z^2(1-2z)\le 3xyz$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\le 2(x^3+y^3+z^3)+3xyz$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+z^2\le 2((x+y)^3-3xy(x+y)+z^3)+3xyz$$
$$\Leftrightarrow (1-z)^2-2xy+z^2\le 2((1-z)^3-3xy(1-z)+z^3)+3xyz$$
$$\Leftrightarrow (9z-4)xy+4z^2-4z+1\ge 0$$

Đặt $t=xy, 0\le t\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{(1-z)^2}{4}$ và xét $f(t)=(9z-4)t+4z^2-4z+1$

Ta có $f(0)=4z^2-4z+1=(2z-1)^2\ge 0$

$$f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right)=\frac{z(3z-1)^2}{4}\ge 0$$

$$\Rightarrow f(t)\ge 0, \forall t\in\left[0;\frac{(1-z)^2}{4}\right].$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$ hoặc $x=y=\frac{1}{2};z=0$ và các hoán vị của nó. Điều này tương đương với $a=b=c$ hoặc $a=b; c=0$ và các hoán vị của nó.

Bất đẳng thức được chứng minh.

149

Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\ge (xy+yz+zx)(x+y+z) \quad (4)$$

Lời giải

Do BĐT là thuần nhất nên nhờ chuẩn hóa ta có thể giả thiết thêm $x+y+z=1$.

Khi đó (4) $x^3+y^3+z^3+6xyz\ge xy+yz+zx \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3+(6z-1)xy-z(x+y)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (1-z)^3-3xy(1-z)+z^3+(6z-1)xy-z(1-z)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (9z-4)xy+4z^2-4z+1\ge 0.$$

Theo Bài 4 thì BĐT này là đúng.

150

Cho a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $a,b,c \in \left[-1;\frac{5}{3}\right]$.

Lời giải

Coi *c* như tham số, ta được hệ đối xứng loại (I) đối với *a*, *b*

$$\begin{cases} a+b=1-c \\ a^2+b^2=3-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1-c \\ (a+b)^2-2ab=3-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1-c \\ ab=c^2-c-1 \end{cases}$$

$$\exists a,b \Leftrightarrow (1-c)^2 \geq 4(c^2-c-1) \Leftrightarrow 3c^2-2c-5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq c \leq \frac{5}{3}$$

Chứng minh tương tự ta được $a;b \in \left[-1;\frac{5}{3}\right]$. Vậy $a;b;c \in \left[-1;\frac{5}{3}\right]$

151

Trong các nghiệm (x ; y) của hệ $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$, hãy tìm nghiệm sao cho x^2+y^2-xy đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Đặt $a=x+y-2$ thì hệ tương đương với $\begin{cases} x+y-2=a,\ a \leq 0 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x+y-2=a \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+a \\ (x+y)^2-xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+a \\ xy=(2+a)^2-3 \end{cases}$

Điều kiện đối với a để hệ có nghiệm (x ; y) là

$$(2+a)^2 \geq 4((2+a)^2-3) \Leftrightarrow (2+a)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện } a \leq 0\text{)}.$$

Khi đó $x^2+y^2-xy=x^2+y^2+xy-2xy=3-2((2+a)^2-3)=-2a^2-8a+1$

Xét hàm số $f(a)=-2a^2-8a+1,\ a \in [-4;0]$.

Lập bảng biến thiên của hàm số này trên đoạn $[-4;0]$ ta được

$\min(x^2+y^2-xy)=1$ khi $a=0$ hoặc $a=-4$, tức là khi $x=y=1$ hoặc $x=y=-1$

$\max(x^2+y^2-xy)=9$ khi $a=-2$, tức là khi $x=\sqrt{3};y=-\sqrt{3}$ hoặc $x=-\sqrt{3};y=\sqrt{3}$

152

(HSG Quốc gia năm 2005) Cho x, y thỏa mãn $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của x + y.

Lời giải

Đặt $x+y=S$. Bài toán trở thành: tìm S để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y \\ x+y=S \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\sqrt{x+1}=a;\ \sqrt{y+2}=b$ thì $a;b \geq 0$ và $x=a^2-1;\ y=b^2-2$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} a^2+b^2-3(a+b)=3 \\ a^2+b^2=S+3 \end{cases} \text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} S+3-3(a+b)=3 \\ (a+b)^2-2ab=S+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{S}{3} \\ ab=\dfrac{S^2-9S-27}{18} \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm (x ; y) khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm (a ; b) sao cho a ≥ 0, b ≥ 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{S}{3}\right)^2 \geq 4.\dfrac{S^2-9S-27}{18} \\ S \geq 0 \\ S^2-9S-27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \leq S \leq 9+3\sqrt{15}$$

Vậy $\max(x+y) = 9+3\sqrt{15}; \min(x+y) = \dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$

153

(Đề thi tuyển sinh đại học năm 2006 khối A)

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn: $(x+y)xy = x^2+y^2-xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$.

Lời giải

Ta có $(x+y)xy = x^2+y^2-xy \Leftrightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}$. Đặt $\dfrac{1}{x}=a; \dfrac{1}{y}=b$.

Bài toán trở thành: Cho a, b thay đổi và thỏa mãn $a+b=a^2+b^2-ab$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = a^3+b^3$. Ta có $A = a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) = (a+b)^2$.

Từ giả thiết $a+b = a^2+b^2-ab = \left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \Rightarrow a+b \geq 0$.

Đặt $a+b=S$ và xét hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b = a^2+b^2-ab \\ a+b=S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=(a+b)^2-3ab \\ a+b=S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=S \\ ab=\dfrac{S^2-S}{3} \end{cases}$$

$$\exists a,b \Leftrightarrow S^2 \geq \frac{4(S^2-S)}{3} \Leftrightarrow S^2-4S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4 \Rightarrow A=(a+b)^2 \leq 16.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=2 \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\max A = 16$.

153

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $bc \geq a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}.$$

Lời giải

Ta có $(b+c)^2 \geq 4bc \geq 4a^2 \Leftrightarrow \dfrac{b+c}{a} \geq 2$; $\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab} \geq \dfrac{(b+c)^2}{a(b+c)} = \dfrac{b+c}{a}$;

$$\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(b+c)^2}{2bc+a(b+c)} \geq \frac{(b+c)^2}{\dfrac{(b+c)^2}{2}+a(b+c)}$$

$$= \frac{2(b+c)}{b+c+2a} = \frac{2\dfrac{b+c}{a}}{\dfrac{b+c}{a}+2}$$

Đặt $t = \dfrac{b+c}{a}$ ta có $t \geq 2$ và $P \geq f(t) = t + \sqrt{\dfrac{1}{t}} + \sqrt{\dfrac{2t}{t+2}}$

Có $f'(t)=1-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}+\dfrac{2}{(t+2)\sqrt{2t(t+2)}}=\dfrac{2t\sqrt{t}-1}{2t\sqrt{t}}+\dfrac{2}{(t+2)\sqrt{2t(t+2)}}>0;\forall t\in(2;+\infty)$

$$\Rightarrow f(t)\ge f(2)=3+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $P\ge f(t)\ge 3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Rightarrow \min P=3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ khi $a=b=c$

154

Cho các số thực $a,b,c\in[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(a+b)^2}{c^2+4(ab+bc+ca)}$$

Lời giải

P được viết lại dưới dạng tương đương là:

$$P=\frac{(a+b)^2}{c^2+4c(a+b)+4ab}\ge\frac{(a+b)^2}{c^2+4c(a+b)+(a+b)^2}=M$$

Do $a,b,c\in[1;2]$ nên $a+b\ne 0$, nên chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$M=\dfrac{1}{\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2+4\left(\dfrac{c}{a+b}\right)+1}=\dfrac{1}{t^2+4t+1}$ với $t=\dfrac{c}{a+b}$. Với $a,b,c\in[1;2]\Leftrightarrow t\in\left[\dfrac{1}{4};1\right]$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t^2+4t+1}$ trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{-2(t+2)}{(t^2+4t+1)^2}<0,\ \forall\ t\in\left[\dfrac{1}{4};1\right]\Rightarrow f'(t)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$

Do đó $\forall\ t\le 1\Rightarrow f(t)\ge f(1)=\dfrac{1}{6}$

Đẳng thức xảy ra khi $t=1\Leftrightarrow(a;b;c)=(1;1;2)$

Vậy Min $P=\dfrac{1}{6}$ khi $(a;b;c)=(1;1;2)$

155

Cho a, b, x, y là bốn số dương thỏa mãn $a^5+b^5=2$ và $x,y\le 4$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2+2y^2+24}{xy(a^2+b^2)}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{cases}a^5+a^5+1+1+1\ge 5\sqrt[5]{a^5.a^5.1.1.1}=5a^2\\ b^5+b^5+1+1+1\ge 5\sqrt[5]{b^5.b^5.1.1.1}=5b^2\end{cases}$$

Suy ra: $2a^5+2b^5+6\ge 5(a^2+b^2)\Leftrightarrow a^2+b^2\le 2$

Do đó $P \ge \dfrac{x^2+2y^2+24}{xy.2} = \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{12}{xy}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{12}{xy}$ với $x \in (0;4]$ và y là tham số.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x^2-2y^2-24}{2x^2y} \le \dfrac{4^2-2.0^2-24}{2x^2y} = \dfrac{-8}{2x^2y} < 0\ \forall x, y \in (0;4]$

$\Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $(0;4] \Rightarrow f(x) \ge f(4)$

Suy ra: $P \ge f(4) = \dfrac{2}{y} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{5}{y} + \dfrac{y}{4} = g(y)$ với $y \in (0;4]$

Ta có: $g'(y) = -\dfrac{5}{y^2} + \dfrac{1}{4} \le -\dfrac{5}{16} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{16} < 0\ \forall y \in (0;4]$

$\Rightarrow g(y)$ nghịch biến trên $(0;4] \Rightarrow g(y) \ge g(4) = \dfrac{5}{4} + 1 = \dfrac{9}{4}$.

156

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c \ge 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a^3}{\sqrt{ab}+2\sqrt{1+c\sqrt{c}}} + \frac{b^3}{\sqrt{bc}+2\sqrt{1+a\sqrt{a}}} + \frac{c^3}{\sqrt{ac}+2\sqrt{1+b\sqrt{b}}}$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a},\ y = \sqrt{b},\ z = \sqrt{c} \Rightarrow x, y, z > 0,\ x^2+y^2+z^2 \ge 12$

và $S = \dfrac{x^6}{xy+2\sqrt{1+z^3}} + \dfrac{y^6}{yz+2\sqrt{1+x^3}} + \dfrac{z^6}{zx+2\sqrt{1+y^3}}$

Áp dụng BĐT *AM-GM* ta có: $2\sqrt{1+x^3} = 2\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \le 1+x+1-x+x^2 = x^2+2$;

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Tương tự: $2\sqrt{1+y^3} \le y^2+2,\ 2\sqrt{1+z^3} \le z^2+2$;

các dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y = 2,\ z = 2$

Áp dụng các kết quả trên và giả thiết ta được:

$$S \ge \frac{x^6}{xy+z^2+2} + \frac{y^6}{yz+x^2+2} + \frac{z^6}{zx+y^2+2} \ge \frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{xy+yz+zx+x^2+2+y^2+2+z^2+2}$$

$$\ge \frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{x^2+y^2+z^2+(x^2+2)+(y^2+2)+(z^2+2)} = \frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+6}$$

$$\ge \frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}} = \frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}{5\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Áp dụng BĐT *AM-GM* ta được: $\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{2}x^3 + 4 \ge 3x^2 \Rightarrow x^3 \ge 3x^2 - 4$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$.

Tương tự suy ra $x^3+y^3+z^3 \ge 3(x^2+y^2+z^2) - 12 \ge 3(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2) = 2(x^2+y^2+z^2)$

Suy ra $S \ge \dfrac{8\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{5(x^2+y^2+z^2)} = \dfrac{8(x^2+y^2+z^2)}{5} \ge \dfrac{96}{5}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Vậy $S_{min} = \dfrac{96}{5} \Leftrightarrow x = y = z = 2 \Leftrightarrow a = b = c = 4$.

157

Cho a,b,c là các số thực dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức: $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$, $\forall x,y,z\in\Re$ ta có:

$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=9abc>0\ \Rightarrow ab+bc+ca\ge 3\sqrt{abc}$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c)\ge(1+\sqrt[3]{abc})^3,\forall a,b,c>0$. Thật vậy:

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc\ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc=(1+\sqrt[3]{abc})^3$$

Khi đó: $P\le\dfrac{2}{3(1+\sqrt{abc})}+\dfrac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q$

Đặt $\sqrt[6]{abc}=t$; vì a, b, c > 0 nên $0<abc\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=1$

Xét hàm số $Q=\dfrac{2}{3(1+t^3)}+\dfrac{t^2}{1+t^2},t\in(0;1]\ \Rightarrow Q'(t)=\dfrac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2}\ge 0,\forall t\in(0;1]$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1]\Rightarrow Q=Q(t)\le Q(1)=\dfrac{1}{6}$ (2). Từ (1) và (2): $P\le\dfrac{1}{6}$.

Vậy $\max P=\dfrac{1}{6}$, đạt được khi và và chỉ khi: $a=b=c=1$.

158

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $28\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)=4\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)+2013$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ac+a^2}}.$$

Lời giải

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}$.

$$\Rightarrow 28(x^2+y^2+z^2)=4(xy+yz+zx)+2013\le 4(x^2+y^2+z^2)+2013$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le\frac{2013}{24}$$

Mặt khác ta lại có:

$$(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow(x+y+z)^2\le\frac{2013}{8}$$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+(a+b)^2}}\le\dfrac{\sqrt2}{3a+b}\le\dfrac{1}{8\sqrt2}\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{1}{8\sqrt2}(3x+y)$

Tương tự $\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+c^2}}\le\dfrac{1}{8\sqrt2}(3y+z),\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ac+a^2}}\le\dfrac{1}{8\sqrt2}(3z+x)$

Ta có $P \le \frac{4}{8\sqrt{2}}(x+y+z) \le \frac{\sqrt{2013}}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{\sqrt{4026}}{12}$ hay $a=b=c=\frac{12}{\sqrt{4026}}$

159

Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}-\sqrt[3]{\frac{3}{x+y+z}\left(\frac{x^3}{xy+2yz}+\frac{y^3}{yz+2xz}+\frac{z^3}{xz+2xy}\right)}-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\le -\frac{3}{4}$$

Lời giải

Đặt $P=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{x^3}{y(2z+x)}+\frac{y^3}{z(2x+y)}+\frac{z^3}{x(2y+z)}\right)$

Ta có $\begin{cases} \frac{x^3}{y(2z+x)}+\frac{y}{3}+\frac{2z+x}{9}\ge x \\ \frac{y^3}{z(2x+y)}+\frac{z}{3}+\frac{2x+y}{9}\ge y \\ \frac{z^3}{x(2y+z)}+\frac{x}{3}+\frac{2y+z}{9}\ge z \end{cases}$

Cộng vế ta được $\frac{x^3}{xy+2yz}+\frac{y^3}{yz+2xz}+\frac{z^3}{xz+2xy}\ge \frac{x+y+z}{3}$

Hay $P\ge 1$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Đặt $Q=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$

Ta có $x^2+y^2+z^2+1\ge \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(z+1)^2\ge \frac{1}{4}(x+y+z+1)^2$

Vì $a^2+b^2\ge \frac{1}{2}(a+b)^2$ dấu = khi a=b

$(x+1)(y+1)(z+1)\le \left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3$ dấu = khi x=y=z

Do đó $Q\le \frac{2}{x+y+z+1}-\frac{54}{(x+y+z+3)^3}$, đặt $t=x+y+z+1>1$

Ta được $Q\le f(t)=\frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}$ xét hsố f(t) trên $(1;+\infty)$

$$f'(t)=\frac{-2}{t^2}+\frac{162}{(t+2)^4}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1(l) \\ t=4(n)\end{array}\right.$$ Lập bảng biến thiên ta được $f(t)\le \frac{1}{4}=f(4)$

Vậy $Q\le \frac{1}{4}$ dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1 (**)

Từ (*), (**) suy đpcm

160

Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Lời giải

Ta có thể viết A thành dạng sau: $A=\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x+\frac{1}{2x}\ge\sqrt{2},y+\frac{1}{2y}\ge\sqrt{2},\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{xy}}\ge\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

Cộng theo vế ta được

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 3\sqrt{2}+2\Rightarrow A\ge 3\sqrt{2}+4$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\begin{cases}x=\frac{1}{2x};y=\frac{1}{2y};\frac{x}{y}=\frac{y}{x}\\ \frac{1}{x}=\frac{1}{y};x^2+y^2=1;x\ge 0;y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $3\sqrt{2}+4$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

161

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{ab(a+c)}-\frac{4(a+b+c)}{a}\ge c\left(\frac{4}{b}-\frac{5}{a+c}\right)$$

Lời giải

Đặt $a=xb,\ c=yb\quad (x,\ y>0)$.

BĐT $\Leftrightarrow \frac{(x+y+1)^3}{x(x+y)}-\frac{4(x+y+1)}{x}\ge 4y-\frac{5y}{x+y}$.

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\ P=xy\end{cases}$ với $S^2\ge 4P$

$$f(P)=(5-4S)P+(S^3-S^2-S+1)\ge 0,\ 0\le P\le\frac{S^2}{4}\ \text{(coi là hàm bậc nhất ẩn P)}$$

$$f(0)=(S-1)^2(S+1)\ge 0\ \text{do}\ S+1>0$$

$$f\left(\frac{S^2}{4}\right)=\frac{1}{4}(S-2)^2\ge 0$$

Suy ra BĐT luôn đúng.

Bình luận: Để hiểu rõ them lời giải bạn đọc xem "Sử dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức" trong cuốn sách này.

161

Cho x,y,z là ba số thực thỏa mãn: $2x+3y+z=40$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=2\sqrt{x^2+1}+3\sqrt{y^2+16}+\sqrt{z^2+36}$$

Lời giải

Ta có: $S=\sqrt{(2x)^2+2^2}+\sqrt{(3y)^2+12^2}+\sqrt{z^2+6^2}$ Trong hệ toạ độ OXY xét 3 véc tơ

$\vec{a}=(2x;2),\vec{b}=(3y;4),\vec{c}=(z;6),\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2x+3y+z;2+12+6)=(40;20)$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(2x)^2+2^2},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(3y)^2+12^2},\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(z)^2+6^2}\ ,\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=20\sqrt{5}$

Sử dụng bất đẳng thức về độ dài véc tơ :

$S=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\geq\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|\Rightarrow S\geq 20\sqrt{5}$.Đẳng thức xảy ra khi các véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng hướng

xét hệ điều kiện : $\frac{2x}{2}=\frac{3y}{12}=\frac{z}{6}\Rightarrow\frac{2x}{2}=\frac{3y}{12}=\frac{z}{6}=\frac{2x+3y+z}{20}=\frac{40}{20}=2$

$\Rightarrow x=2,y=8,z=12$

Với : $x=2,y=8,z=12$ thì $S=20\sqrt{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $20\sqrt{5}$ đạt được khi : $x=2,y=8,z=12$

163

Cho các số thực x,y,z thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=(xy+yz+2xz)^2-\frac{8}{(x+y+z)^2-xy-yz+2}$

Lời giải

Từ giả thiết $x^2+y^2+z^2=1$ (1) , ta có: $P=(xy+yz+2xz)^2-\frac{8}{xy+yz+2xz+3}$

Đặt $t=xy+yz+2xz\Rightarrow P=t^2-\frac{8}{t+3}$.

Ta luôn có $0\leq(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1+2(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\geq-\frac{1}{2}\Rightarrow xy+yz+2xz\geq-\frac{1}{2}+xz\geq-\frac{1}{2}-\frac{x^2+z^2}{2}=-1+\frac{y^2}{2}\geq-1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=-z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$. Vậy $t\geq-1$.

Do đó GTNN của P bằng GTNN của hàm $f(t)=t^2-\frac{8}{t+3}$ với $t\geq-1$.

Ta có $f'(t)=2t+\frac{8}{(t+3)^2}=2\frac{t^3+6t^2+9t+4}{(t+3)^2}=\frac{2(t+1)^2(t+4)}{(t+3)^2}>0,\forall t>-1$

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[-1;+\infty)\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[-1;+\infty)$ $\Rightarrow\min\limits_{t\in[-1;+\infty)}f(t)=f(-1)=-3$.

Vậy min P = - 3.

163

164: Cho các số dương *x, y, z* có tổng bằng 3.Chứng minh rằng

$$\frac{3x-x^2}{4-yz}+\frac{3y-y^2}{4-zx}+\frac{3z-z^2}{4-xy}\geq 2xyz$$

Lời giải

BĐT tương đương:

$$\frac{x(y+z)}{4-yz}+\frac{y(x+z)}{4-xz}+\frac{z(x+y)}{4-xy}\ge 2xyz$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y+z)}{yz(4-yz)}+\frac{(x+z)}{xz(4-xz)}+\frac{(x+y)}{xy(4-xy)}\ge 2$$

Ta có

$$\frac{(y+z)}{yz(4-yz)}\ge\frac{2\sqrt{yz}}{yz(4-yz)}=\frac{2}{\sqrt{yz}\left(2-\sqrt{yz}\right)\left(2+\sqrt{yz}\right)}\ge\frac{2}{2+\sqrt{yz}}$$

Do đó,

$$\frac{(y+z)}{yz(4-yz)}+\frac{(x+z)}{xz(4-xz)}+\frac{(x+y)}{xy(4-xy)}\ge 2\left(\frac{1}{2+\sqrt{yz}}+\frac{1}{2+\sqrt{zx}}+\frac{1}{2+\sqrt{xy}}\right)$$

$$\ge\frac{18}{6+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}\ge\frac{18}{6+x+y+z}=2$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

164

Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y=2\sqrt{x+2}+3\sqrt{y-2014}+2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=(x-1)^2+(y-1)^2+\frac{2015+2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$$

Lời giải

$$S=x^2-2x+1+y^2-2y+1+\frac{2015}{\sqrt{x+y+1}}+2xy$$

$$=(x+y)^2-2(x+y)+2+\frac{2015}{\sqrt{x+y+1}}$$

$$=(x+y+1)^2-4(x+y+1)+5+\frac{2015}{\sqrt{x+y+1}}.$$

Đặt $\sqrt{x+y+1}=t$ thì $S=t^4-4t^2+5+\frac{2015}{t}$. Ta tìm điều kiện cho t. Từ gia thiết, đặt $a=\sqrt{x+2}\ge 0$, $b=\sqrt{y-2014}\ge 0$ suy ra $x=a^2-2, y=b^2+2014$ ta được

$$a^2-2+b^2+2014=2a+3b+2012\Leftrightarrow a^2+b^2=2a+3b\le\sqrt{13(a^2+b^2)}$$

Suy ra $0\le a^2+b^2\le\sqrt{13}$, $x+y+1=a^2+b^2+2013\in[2013;2026]$

$$\Rightarrow t=\sqrt{x+y+1}\in\left[\sqrt{2013};\sqrt{2026}\right]=J$$

$$t=\sqrt{2013}\Leftrightarrow a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2014\end{cases}$$

$$t=\sqrt{2026}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=13\\\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2023\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=t^4-4t^2+5+\frac{2015}{t}$ liên tục trên J và có

$$f'(t) = 4t^3 - 8t^2 - \frac{2015}{t^2} = \frac{4t^4 - 8t^3 - 2015}{t^2} = \frac{4t^3(t-2) - 2015}{t^2} > 0 \forall t \in J$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $J \Rightarrow \min_{x \in J} = f(\sqrt{2013}) = 4044122 + \frac{2015}{\sqrt{2013}}$, $\max_{x \in J} = f(\sqrt{2026}) = 4096577 + \frac{2015}{\sqrt{2026}}$.

Vậy $\min S = 4044122 + \frac{2015}{\sqrt{2013}}$; $\max S = 4096577 + \frac{2015}{\sqrt{2026}}$

166

Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a^3 + 3b^3 + 2c^3 - 3b^2c}{(a+b+c)^3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số, ta có $3b^2c \le 2b^3 + c^3$ (*). Dấu "=" xẩy ra khi $b = c$.

$$(**) \Leftrightarrow 4\left(b^3 + c^3\right) \ge b^3 + c^3 + 3b^2c + 3bc^2 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - b^2c - bc^2 \ge 0 \Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 \ge 0,$$

luôn đúng $\forall b, c > 0$. Dấu "=" xẩy ra khi $b = c$.

Áp dụng (*) và (**) ta được

$$P \ge \frac{4a^3 + \frac{(b+c)^3}{4}}{(a+b+c)^3} = 4t^3 + \frac{1}{4}(1-t)^3 \text{, với } t = \frac{a}{a+b+c}, \; t \in (0;1).$$

Xét $f(t) = 4t^3 + \frac{1}{4}(1-t)^3$ với $t \in (0;1)$.

$$f'(t) = 12t^2 - \frac{3}{4}(1-t)^2, \; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$$

Suy ra, $f(t) \ge \frac{4}{25}$. Dấu "=" xẩy ra khi $t = \frac{1}{5}$.

$$\Rightarrow P \ge \frac{4}{25}. \text{ Dấu "=" xẩy ra khi } \begin{cases} b = c \\ \frac{a}{a+b+c} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2a = b = c.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{25}$ khi $2a = b = c$.

167

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a > b > c$ và $3ab + 5bc + 7ca \le 9$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4}$

Lời giải

Đặt $x = b - c; y = a - c$ ta có $P = \frac{32}{(x-y)^4} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}$

Ta thấy:

$$3ab \le 3ab + 5bc + 7ca \le 9$$
$$\Rightarrow xy \le ab \le 3$$

$$9P=\frac{32.9}{(x-y)^4}+\frac{9}{x^4}+\frac{9}{y^4}\geq\frac{32(xy)^2}{(x^2+y^2-2xy)^2}+\frac{(xy)^2}{x^4}+\frac{(xy)^2}{y^4}=\frac{32}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)^2}+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ $(t\geq 2)$ ta có $9P=\frac{32}{(t-2)^2}+t^2-2=f(t)$

$$f'(t)=2t-\frac{64}{(t-2)^3};$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 2t-\frac{64}{(t-2)^3}=0\Leftrightarrow t^4-6t^3+12t^2-8t-32=0$$

$$\Leftrightarrow(t-4)(t^3-2t^2+4t+8)=0\Leftrightarrow t=4\ (\text{do } t\geq 2)$$

Bảng biến thiên:

t	2		4		$+\infty$
f'(t)		-	0	+	
f(t)		↘	22	↗	

Từ BBT ta có GTNN của P là $\frac{22}{9}$

168

Tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+y+xy)+\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{x^2+y^2-xy}$$ biết x,y thỏa mãn $\begin{cases}x,y\in(0;1],(1)\\x+y=3xy,(2)\end{cases}$

Lời giải

Đặt $t=xy$ thì $Q=f(t)=\sqrt{3}.t+\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{9t^2-3t}$ .Kết hợp (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1$.

Vậy t thuộc tập giá trị khi chỉ khi hệ sau có nghiệm

$\begin{cases}x+y=3t\\xy=t\\x,y\in\left[\frac{1}{2};1\right]\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ Phương trình: $f(z)=z^2-3t.z+t=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $\frac{1}{2}\leq z_1\leq z_2\leq 1$

$$\begin{cases}\Delta=9t^2-4t\geq 0\\f(1)=1-2t\geq 0\\f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-2t}{4}\geq 0\\\frac{1}{2}\leq\frac{S}{2}\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{4}{9}\leq t\leq\frac{1}{2}.$$

Khảo sát hàm số $f(t)=\sqrt{3}.t+\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{9t^2-3t}$ trên đoạn $\left[\frac{4}{9};\frac{1}{2}\right]$ bằng đạo hàm, ta suy ra trên đoạn này hàm số $f(t)$ đồng biến, nên Min $f(t)=f\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}(4+\sqrt{2})}{9}$;Max$f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

169 Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ .Chứng minh $3x+4y\le 5$

Lời giải

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1; -1\le y\le 1$

Nếu $x\in[-1;0]$ hoặc $y\in[-1;0]$ hoặc $x=0, y=1$ hoặc $y=0, x=1$ BĐT hiển nhiên đúng.

Ta chỉ cần xét $0<x<1$ và $0<y<1$

Đặt $x=\cos\alpha, y=\sin\beta; \alpha,\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi đó từ giả thiết ta có $\cos^2\alpha+\sin^2\beta=\cos(\alpha\text{-}\beta)\le 1$

$$\cos^2\alpha\le 1-\sin^2\beta=\cos^2\beta\Rightarrow\cos\alpha\le\cos\beta \text{ do } \alpha,\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$3x+4y=3\cos\alpha+4\sin\beta\le 3\cos\beta+4\text{in}\beta=5\cos(\alpha-\varphi)\le 5, \varphi=\arccos\frac{3}{5}$ (đpcm)

Cho các số thực $a,b,c>0$

170 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$

Lời giải

Chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=3$.

$$(a+b+c)^2=3+2(ab+bc+ca); v\times a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right]$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc+(a+b+c)\left[3-(ab+bc+ca)\right]$$

Ta có $Q=\frac{5}{2}+\frac{2}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left[3-(ab+bc+ca)\right]-\frac{3}{2(ab+bc+ca)}$

Vì $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$. Đặt $t=ab+bc+ca\Rightarrow 0<t\le 3$ nên $Q\ge -2+\frac{2}{3}t+\frac{12}{t}$

Xét hàm số $f(t)=-2+\frac{2}{3}t+\frac{12}{t}, t\in(0;3]$; $f'(t)=\frac{2t^2-36}{3t^2}<0\Rightarrow \text{Min}f(t)=f(3)=4$.

Kết luận: giá trị nhỏ nhất của Q là 4 khi $a=b=c=1$.

171 Cho các số thực $x,y,z>0$ thỏa mãn $\begin{cases}xy+yz+zx=8\\ xyz=4\end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất ,giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=x^4+y^4+z^4$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}y+z=\frac{1}{x}\left(8-\frac{4}{x}\right)\\ yz=\frac{4}{x}\end{cases}$

Vì $\frac{1}{x^2}\cdot\left(8-\frac{4}{x}\right)^2\ge 4.\frac{4}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\left(8-\frac{4}{x}\right)^2\ge 16(\text{do } x>0)\Leftrightarrow x^3-4x^2+4x-1\le 0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-3x+1\right)\le 0$

Kết hợp với x > 0 ta được $x \in \left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Đặt s = x + y + z thì s= g(x) = $x+\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}$ với $x \in \left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Khảo sát hàm số g(x) với $x \in \left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ và chú ý s > 0 ta được $5 \le s \le \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$

Mặt khác $Q = f(s) = s^4 - 32s^2 + 16s + 128, s \in \left[5;\frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$.Dùng đạo hàm lập bảng biến thiên hàm số f(s),ta được MinQ = f(5) = 33; MaxQ = $f\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{271-75\sqrt{5}}{2}$.

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2 \quad (1)$$

Lời giải

Theo giả thiết $a,b,c>0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2<(a+b+c)^2=9$. Từ đó nếu có một trong ba số,giả sử a <1/3 thì

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>9>a^2+b^2+c^2 \text{ nên (1) đúng.}$$

Ta xét trường hợp $a,b,c \ge \frac{1}{3}$.Vì $a+b+c=3$,nên $a,b,c \le \frac{7}{3}$. Vậy $a,b,c \in \left[\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right]$.

$$\text{BĐT (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{b^2}-b^2+\frac{1}{c^2}-c^2 \ge 0, (2).$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ trên $\left[\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right]$.

Tiếp tuyến của đò thị hàm số $y=f(x)$ tại x =1 là y = -4x + 4.Ta có

$$f(x)-(-4x+4)=-\frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)}{x^2} \ge 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right]$$

(do $g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2 \le \left(\frac{4}{3}\right)^2-2<0$ trên $\left[\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right]$) hay $f(x) \ge -4x+4$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right]$.

Áp dụng cho các số $a,b,c \in \left[\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right]$ ta có $f(a)+f(b)+f(c) \ge -4(a+b+c)+4.3=0$.Vậy BĐT (1) được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Nhận xét cách giải: Tương tự bài toán trên, từ giả thiết bài toán ta mới chỉ có điều kiện $a,b,c \in (0;3)$.

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \le \frac{9}{10}, (1)$$

Lời giải

Đặt $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Khi đó BĐT (1) trở thành $f(a)+f(b)+f(c) \le \frac{9}{10}, (2)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên (ta đưa thêm vào một số giá trị như x = - 3, x = -1/3, x = 2 và giá trị $f(x)$ để so sánh)

x	$-\infty$	- 3	- 1	- 1/3	1	2	$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	-3/10	-1/2	-3/10	1/2	2/5	0

$$(f(-3)=f(-\frac{1}{3})=-\frac{3}{10}, f(2)=\frac{2}{5}).$$

Xét các trường hợp xảy ra :

1/ Có một số , giả sử $a\in(-\infty;-3] \Rightarrow b+c\geq 4$ nên có một số , giả sử $b\geq 2$. Khi đó ta có :

$$f(a)+f(b)+f(c)<0+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$$

2/ Có một số, giả sử $a\in\left(-3;-\frac{1}{3}\right]$. Khi đó $f(a)+f(b)+f(c)\leq -\frac{3}{10}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}<\frac{9}{10}$

3/ Cả ba số $a,b,c\in\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. Khi đó tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại $x=\frac{1}{3}$ có phương trình:

$$y=\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}.$$

Ta có $f(x)-\left(\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}\right)=\frac{x}{1+x^2}-\left(\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}\right)=-\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(1+x^2)}\leq 0, \forall x>-\frac{1}{3}$

Áp dụng BĐT này cho các số $a,b,c>-\frac{1}{3}$ và $a+b+c=1$ ta có

$$f(a)+f(b)+f(c)\leq\frac{18}{25}(a+b+c)+3.\frac{3}{50}=\frac{9}{10}.$$

Vậy trong mọi trường hợp BĐT (1) đều đúng.

bài toán được chứng minh,đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét: Đây là một bài toán khó,không thể sử dụng phương pháp hàm lồi để giải.

Chúng ta đã giải bài toán bằng cách phân chia trục số thành các khoảng $(-\infty;-3],\left(-3;-\frac{1}{3}\right],\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$ và sử dụng linh hoạt giả thiết $a+b+c=1$ để áp dụng tính chất của hàm số f(x) cùng với tiếp tuyến của nó tại điểm x = 1/3 một cách như mong muốn.

173

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\leq\frac{1}{2}.$$

Lời giải

Dễ thấy $a^2+1\ge 2a, b^2+1\ge 2b, c^2+1\ge 2c,$ suy ra

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\le\frac{a}{2(a+b+1)}+\frac{b}{2(b+c+1)}+\frac{c}{2(c+a+1)}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\le 1.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\ge 2\ (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}=\frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)}+\frac{(c+1)^2}{(c+1)(b+c+1)}+\frac{(a+1)^2}{(a+1)(c+a+1)}$$

$$\ge\frac{(a+b+c+3)^2}{(b+1)(a+b+1)+(c+1)(b+c+1)+(a+1)(c+a+1)}.$$

Nhưng vì $a^2+b^2+c^2=3$ nên ta có

$$(b+1)(a+b+1)+(c+1)(b+c+1)+(a+1)(c+a+1)$$

$$=3(a+b+c)+ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2+3=\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2.$$

Vậy $(*)$ được chứng minh, và do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

174

Giả sử a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi là 3. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{b+c-a}, y=\sqrt{c+a-b}, z=\sqrt{a+b-c}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=3.$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}.$$

Đặt $m=xy, n=yz, p=zx$ ta có bất đẳng thức tương đương

$$(m+n+p)(m^2+n^2+p^2+9)\ge 36\sqrt{mnp}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$m+n+p\ge 3\sqrt[3]{mnp},\ m^2+n^2+p^2+9\ge 12\sqrt[6]{mnp}.$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có *đpcm*.

175

Cho $x,y,z\in[-1,1]$ và $x+y+z=0.$ Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\ge 3.$$

Lời giải

Trước hết ta sẽ chứng minh rằng nếu $ab\ge 0; a,b,a+b\ge -1$ thì

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}.$$

Thật vậy, bình phương 2 vế bất đẳng thức trên

$$2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 2+a+b+2\sqrt{1+a+b}$$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)\ge 1+a+b \Leftrightarrow ab\ge 0.$$

Trong 3 số $x+y^2, y+z^2, z+x^2$ phải tồn tại ít nhất hai số hạng cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử $(x+y^2)(y+z^2)\ge 0$. Khi đó, theo nhận xét trên thì

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} &\ge 1+\sqrt{1+x+y^2+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\\ &=1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1+z}\right)^2+x^2}\\ &\ge 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+(x+y)^2}\\ &=1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2}\end{aligned}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2\ge 4$$

$$\Leftrightarrow 2z^2+2\sqrt{1-z^3}\ge 2 \Leftrightarrow 1-z^2\ge 1-2z^2+z^4 \Leftrightarrow z^2(z^2-1)\ge 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $-1\le z\le 1$, ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$.

Một số bài toán tương tự :

Bài toán 1. Cho các số thực $x,y,z,t\in[-1,1]$ thỏa mãn $x+y+z+t=0$. Chứng minh

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+t^2}+\sqrt{1+t+x^2}\ge 4.$$

Ngoài ra ta cũng có thêm một số kết quả cùng dạng

Bài toán 2. Cho các số thực $x,y,z\in[-1,1]$ thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}}+\sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}}\le 3.$$

Bài toán 3. Cho các số thực $x,y,z\in[-1,1]$ và $x+y+z=0$. Chứng minh

$$\sqrt{1+x+\frac{7y^2}{9}}+\sqrt{1+y+\frac{7z^2}{9}}+\sqrt{1+z+\frac{7x^2}{9}}\ge 3.$$

175

Chứng minh rằng với các số dương a,b,c và $abc=8$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}.$$

Lời giải

Dễ thấy rằng với $\forall x\ge 0$ thì $4(1+x^3)\le(x^2+2)^2$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $x^2(x-2)^2\ge 0$.

Sử dụng tính chất trên ta suy ra

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}$$
$$\geq\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}.$$

Đặt $x=\frac{a^2}{4},y=\frac{b^2}{4},z=\frac{c^2}{4}$, khi đó $xyz=1$. Ta phải chứng minh

$$\frac{x}{(1+2x)(1+2y)}+\frac{y}{(1+2y)(1+2z)}+\frac{z}{(1+2z)(1+2x)}\geq\frac{1}{3}.$$

Thật vậy, sau khi quy đồng mẫu số, bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(xy+yz+zx)+x+y+z\geq 9.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $xyz=1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=1 \text{ hay } a=b=c=2.$$

177

Giả sử a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geq\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải

Giả sử $c=\min(a,b,c)$. Dễ thấy rằng

$$b^2+c^2\leq\left(b+\frac{c}{2}\right)^2, a^2+c^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2, a^2+b^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2.$$

Vậy ta có

$$VT\geq\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}$$
$$\geq\frac{6}{(a+b+c)^2}-\frac{1}{2\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}$$
$$\geq\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

178

Chứng minh với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$ thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}-\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\geq\frac{3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}=\frac{1}{abc}\left(\frac{a^2c^2}{b+c}+\frac{a^2b^2}{c+a}+\frac{b^2c^2}{a+b}\right)$$
$$\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)2}\geq\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

179

Với a,b,c là các số thực dương cho trước, chứng minh rằng

$$\frac{1}{|a^2-b^2|}+\frac{1}{|b^2-c^2|}+\frac{1}{|c^2-a^2|}+\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{28}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$. Trước hết ta chứng minh vế trái nhỏ nhất nếu $c=0$. Thật vậy

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2-c^2}+\frac{1}{a^2-c^2}+\frac{8}{a^2+b^2+c^2}-\left(\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a^2+b^2}\right)$$
$$=c^2\left(\frac{1}{a^2(a^2-c^2)}+\frac{1}{b^2(b^2-c^2)}-\frac{8}{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2)}\right)\geq c^2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}-\frac{8}{(a^2+b^2)^2}\right)\geq 0.$$

Vì vế trái là hàm giảm của c nên ta chỉ cần chứng minh bài toán với $c=0$

$$\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a^2+b^2}\geq\frac{28}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{16ab}{a^2+b^2}+\frac{a+b}{a-b}\geq 18.$$

Có thể cho $a\geq b=1$. Ta phải chứng minh

$$2\left(a+\frac{1}{a}\right)+a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{16a}{a^2+1}+\frac{a+1}{a-1}\geq 18$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(a-1)^2}{a}+\frac{(a^2-1)^2}{a^2}-\frac{8(a-1)^2}{a^2+1}+\frac{a+1}{a-1}\geq 4$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(a-1)^3}{a(a^2+1)}+\frac{(a-1)^4(a+1)^2}{a^2(a^2+1)}+2(a-1)^2+\frac{a+1}{a-1}\geq 4.$$

Nếu $a\leq 5/3$ ta có ngay *đpcm*. Trường hợp ngược lại, ta có

$$2(a-1)+\frac{a+1}{a-1}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{2}}\geq 4.$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức không xảy ra

Bình luận : Kĩ thuật dồn biến ra biên đôi khi tỏ ra rất hữu hiệu với các bài toán khó . Vì bây giờ ta chỉ cần so sánh biểu thức đã cho với biểu thức lúc một biến bằng 0 . Đôi khi dồn biến mang đến cho chúng ta những **Lời giải** khá bất ngờ .

180

toán 180: Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$P=a(1+b^2+c^2)+b(1+a^2+c^2)+c(1+a^2+b^2)$$
$$\left(\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\right)P\geq(a+b+c)^2.$$

Xét biểu thức

$$S_{a,b,c}=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$

Ta sẽ chứng minh $S_{a,b,c}\le 1/4$. Thật vậy không mất tính tổng quát giả sử $c\ge b\ge a$.

Xét biểu thức

$$\begin{aligned}S_{a,b,c}-S_{a+b,c,0}&=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-(a+b)^2c-c^2(a+b)\\&=ab(a+b-2c)\le 0.\end{aligned}$$

Mặt khác $S_{a+b,c,0}=(a+b)c(a+b+c)=(a+b)c\le\frac{1}{4}(a+b+c)^2=\frac{1}{4}$.

Như vậy $P=a+b+c+S_{a,b,c}\le\frac{5}{4}$. Suy ra

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\ge\frac{4}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=1/2, a=0$ hoặc các hoán vị.

181

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\ge 2+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải

Giả sử $x=\max(x,y,z)$ và đặt $a=y+z>0$

Hiển nhiên $ax=1-z\le 1$. Xét hàm số sau

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\sqrt{\frac{2x+y+z+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{2x+a+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}$$

Mặt khác $$f'(x)=\frac{yz-x^2-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)^3(2x+a+2\sqrt{x^2+1})}}\le 0,$$

Nên $f(x)$ nghịch biến. Từ đó ta có

$$f(x)\ge f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a}{a^2+1}}$$

$$=\left(\sqrt{a}-1\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{2\sqrt{a(a^2+1)}+\sqrt{2}(a^2+1)}\right)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta dễ dàng chứng minh được: $\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{2\sqrt{a(a^2+1}+\sqrt{2}(a^2+1)}>0.$

Nên dễ thấy $f(x)\ge f(\frac{1}{a})\ge 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1, z=0$ hoặc các hoán vị

Bình luận: Đây là cách giải duy nhất cho bài toán này mà đến bây giờ chúng tôi có . Hy vọng s

Lời giải từ bạn đọc cho bài toán này . Chúng ta thấy đấy, nhiều khi hàm số như là một "cứu tinh

việc giải các bài toán khó .

182 Chứng minh rằng với các số thực a,b,c bất kì ta có bất đẳng thức
$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức hay, khó và khá quan trọng nên tác giả sẽ nêu ra 3 phương pháp thông thường cơ bản nhất để chứng minh

Cách 1. Ta có

$$4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left(\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)\right)$$
$$=\left(\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)-2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+6abc\right)^2 \ge 0.$$

Cách 2. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min(a,b,c)$. Đặt $b=a+x, c=a+y\,(x,y\ge 0)$. Bằng khai triển trực tiếp ta có

$$VT-VP=f(a,x,y)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$
$$=\left(x^2+y^2-xy\right)a^2+\left(x^3+y^3+4xy^2-5x^2y\right)a+x^4+y^4+2x^2y^2-3x^3y.$$

Gọi đây là 1 tam thức bậc 2 với a. Khi đó

$$\Delta_f=\left(x^3+y^3+4xy^2-5x^2y\right)^2-4\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^4+y^4+2x^2y^2-3x^3y\right)$$
$$=-3\left(x^3-x^2y-2xy^2-y^3\right)^2 \le 0.$$

Cách 3. Sử dụng phân tích sau đây

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-6\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$
$$=\left(a^2-2ab+bc-c^2+ca\right)^2+\left(b^2-2bc+ca-a^2+ab\right)^2+$$
$$+\left(c^2-2ca+ab-b^2+bc\right)^2 \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $(a,b,c)=\left(k\sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right), k\sinh^2\left(\frac{2\pi}{7}\right), k\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ hoặc các hoán vị với $k\in R$ tùy ý.

Bình luận: Có thể nói đây là một trong những bất đẳng thức khó và đẹp của toán sơ cấp. Những phân tích bình phương ở trên mang đầy tính thẩm mỹ của toán học . Trong những lần tái bản tiếp theo, hy vọng sẽ có thời gian để trao đổi với bạn đọc cách tìm ra những đẳng thức như vậy .

183 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)\le 13+abc.$$

Lời giải

Bổ đề. *Với* $a\ge b\ge c$ *thì* $\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)\ge\left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right).$

Thật vậy, ta sử dụng 2 đẳng thức sau

$$a^3b+b^3c+c^3a-\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)=(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c),$$
$$a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-\left(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\right)=(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Vì $a+b+c=3$ nên ta có

$$a+b+c-(ab+bc+ca)=\frac{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)}{3}$$
$$=\frac{1}{6}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0.$$

Suy ra

$$a^3b+b^3c+c^3a-\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)\geq a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-\left(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\right)$$
$$\Rightarrow\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)\geq\left(a^2+b\right)\left(b^2+c\right)\left(c^2+a\right)\quad (\text{Dpcm}).$$

Từ nhận xét trên, ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $a\geq b\geq c$. Gọi $f(a,b,c)$ là biểu thức vế trái của bất đẳng thức, ta có

$$f(a,b,c)=\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)-abc$$
$$=a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2,$$
$$f(a,b,c)-f(a+c,b,c)=a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2-(a+c)^3b-(a+c)^2b^3$$
$$=b^3c+c^3a+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2-3a^2bc-3ac^2b-2acb^3-c^2b^3.$$

Do $a\geq b\geq c$ nên $b^3c\leq acb^3, c^3a\leq ac^2b, b^2c^3\leq c^2b^3$.

Vì thế để chứng minh $f(a,b,c)\geq f(a+c,b,0)$ ta chỉ cần chứng minh tiếp

$$c^2a^3+a^2b^2c^2\leq 3a^2bc.$$

Nhưng điều này hiển nhiên đúng vì dễ thấy

$$3a^2bc-c^2a^3-a^2b^2c^2\geq bca^2(3-a-bc)=bca^2(b+c-bc)\geq 0.$$

Vậy $\quad f(a,b,c)\geq f(a+c,b,0)=(a+c)^2b\left(a+c+b^2\right).$

Công việc còn lại của chúng ta là chứng minh bất đẳng thức 2 biến

$$x^2y\left(x+y^2\right)\leq 13\ \forall x,y\geq 0,\ x+y=3.$$

Thay vế trái bằng biểu thức x, ta có

$$f(x)=\left(9+x^2-5x\right)\left(3x^2-x^3\right)\leq\frac{1}{4}\left(-x^3+4x^2-5x+9\right)^2$$
$$-x^3+4x^2-5x+9=(x-1)^2(2-x)+7\leq 7+\frac{4}{27}.$$

Từ đó suy ra $f(x)\leq 13$, *đpcm.*

184

Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{xy+1}+\frac{y}{yz+1}+\frac{z}{zx+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Lời giải

Ta sử dụng kĩ thuật Côsi ngược

$$\frac{x}{xy+1}=x-\frac{x^2y}{xy+1}\geq x-\frac{1}{2}x^{3/2}y^{1/2}.$$
$$\Rightarrow\frac{x}{xy+1}+\frac{y}{yz+1}+\frac{z}{zx+1}\geq 3-\frac{1}{2}\left(x^{3/2}y^{1/2}+y^{3/2}z^{1/2}+z^{3/2}x^{1/2}\right).$$

Theo bất đẳng thức VASC (Bài 182) ta có :

$$x^{3/2}y^{1/2}+y^{3/2}z^{1/2}+z^{3/2}x^{1/2}\leq\frac{1}{3}(x+y+z)^2=3.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z=1$.

185 Cho $a,b,c\ge 0$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức: $(2-ab)(2-bc)(2-ca)\ge 1$.

Lời giải

Đặt $x=2-ab, y=2-bc, z=2-ca$.

Ta phải chứng minh $xyz\ge 1$ nếu các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{(2-x)(2-y)}{2-z}+\frac{(2-y)(2-z)}{2-x}+\frac{(2-z)(2-x)}{2-y}=3.$$

Điều kiện trên có thể viết dưới dạng gọn hơn như sau

$$(2-x)(2-y)+(2-y)(2-z)+(2-z)(2-x)=3(2-x)(2-y)(2-z)$$
$$\Leftrightarrow 8(x+y+z)+3xyz=12+5(xy+yz+zx).$$

Phản chứng, giả sử rằng $xyz<1$. Ta sẽ chứng minh

$$8(x+y+z)+3xyz<12+5(xy+yz+zx).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $2\ge x\ge y\ge z$. Đặt $t=\sqrt{xy}\Rightarrow t\le 2$. Ta có

$$(8-5z)(x+y)+3xyz+8z=12+5xy\ge(8-5z)2t+3zt^2+8z$$
$$\Leftrightarrow 12+5t^2-16t\ge z(3t^2-10t+8)\Leftrightarrow(t-2)(5t-6)\ge z(t-2)(3t-4)$$
$$\Leftrightarrow 5t-6\le z(3t-4)\Leftrightarrow 6-4z\ge t(5-3z).$$

Do $t^2z\le 1$ nên $t\le\frac{1}{z}$. Vì $z\le 1$ nên dễ thấy

$$(6-4z)\sqrt{z}\ge 5-3z$$
$$\Leftrightarrow 0>(\sqrt{z}-1)^2(4\sqrt{z}+5).$$

Điều này vô lí dẫn tới kết quả bài toán. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bình luận: Phản chứng cũng là một tư duy giải toán quan trọng của toán học sơ cấp .

186 Cho 3 số thực x,y,z không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\ge 2.$$

Lời giải

Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề. Nếu a,b,c,d không âm thỏa mãn $a+b=c+d$ và $|a-b|\le|c-d|$ thì ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{c}+\sqrt{d}.$$

Chứng minh: Theo giả thiết suy ra

$$(a+b)^2-(a-b)^2\ge(c+d)^2-(c-d)^2\Rightarrow ab\ge cd.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a+b+2\sqrt{ab}\ge c+d+2\sqrt{cd}\Leftrightarrow ab\ge cd\quad\text{(đúng!)}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên suy ra

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}\ge x+y+\sqrt{z+y^2}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2} &\ge x+y+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{z+x^2}\\ &\ge x+y+\sqrt{\left(\sqrt{z}+\sqrt{z}\right)^2+(x+y)^2}\\ &=1-z+\sqrt{4z+(1-z)^2}=2.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1/3$ hoặc $x=1, y=z=0$ hoặc các hoạn vị

Bình luận: Các bạn hãy liệt kê và ghi nhớ những đánh giá cho căn thức như đánh giá trong bài toán trên .

187

Giả sử x,y,z là các số dương thỏa mãn hệ thức $2xyz=3x^2+4y^2+5z^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=3x+2y+z$.

Lời giải

Đặt $a=3x, b=2y, c=z$, khi đó

$$a+b+c=3x+2y+z,\ a^2+3b^2+15c^2=abc.$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$a+b+c\ge (2a)^{1/2}(3b)^{1/3}(6c)^{1/6},$$

$$a^2+3b^2+15c^2\ge (4a)^{1/4}\left(9b^2\right)^{3/9}\left(36c^2\right)^{15/36}=\left(4a^2\right)^{1/4}\left(9b^2\right)^{1/3}\left(36c^2\right)^{5/12}.$$

Nhân 2 vế bất đẳng thức trên cho ta

$$(a+b+c)\left(a^2+3b^2+15c^2\right)\ge 36abc \Rightarrow a+b+c\ge 36.$$

Giá trị nhỏ nhất của $3x+2y+z$ là 36, ứng với $x=y=z=6$.

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát như sau

Bài toán. Giả sử a,b,c là các số thực dương cho trước và $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn

a, Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực dương k sao cho

$$\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+a}}+\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+b}}+\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+c}}.$$

b, Chứng minh rằng khi đó ta có bất đẳng thức

$$x+y+z\ge\frac{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+a}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+b}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+c}\right)}{\sqrt{k}}.$$

CHỨNG MINH. Câu (a) rất đơn giản. Nhân $\sqrt{k}$ vào 2 vế và xét

$$f(k)=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+a}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+b}}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+c}}-\frac{1}{2}=0.$$

Vì $f(k)$ là hàm tăng của $k, f(0)=-1/2, \lim_{k\to\infty} f(k)=1$. Do tính liên tục nên phương trình $f(k)=0$ có nghiệm k duy nhất.

Câu (b) ta sử dụng phương pháp cân bằng hệ số.

Lấy m,n,p,m_1,n_1,p_1 là các số thực dương thỏa mãn

$$m+n+p=1, am_1+bn_1+cp_1=1.$$

Theo bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$x+y+z\ge\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n\left(\frac{z}{p}\right)^p,$$

$$ax^2+by^2+cz^2\ge\left(\frac{x^2}{m_1}\right)^{am_1}\left(\frac{y^2}{bn_1}\right)^{bn_1}\left(\frac{z^2}{p_1}\right)^{cp_1}$$

Nhân vế 2 bất đẳng thức trên cho ta

$$(x+y+z)(ax^2+by^2+cz^2)\ge \frac{x^{m+2am_1}y^{n+2bn_1}z^{p+2cp_1}}{m^m n^n p^p m_1^{am_1} n_1^{bn_1} p_1^{cp_1}}.$$

Bây giờ ta sẽ chọn m,n,p,m_1,n_1,p_1 thỏa mãn các điều kiện sau

- $m+2am_1=n+2bn_1=p+2cp_1=1.$
- $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p},\frac{x^2}{m_1}=\frac{y^2}{n_1}=\frac{z^2}{p_1}.$

Điều kiện (ii) tương đương với tồn tại số l để $\quad \frac{m^2}{m_1}=\frac{n^2}{n_1}=\frac{p^2}{p_1}=8l.$

Thay vào phương trình (i) suy ra

$$\exists m_2=\frac{1}{m},n_2=\frac{1}{n},p_2=\frac{1}{p},\frac{a}{4l}=m_2^2-m_2,\frac{b}{4l}=n_2^2-n_2,\frac{c}{4l}=p_2^2-p_2.$$

Khi đó $1=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}=\sum_{a,b,c}\frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l}+\sqrt{l+a}},$

Suy ra $\frac{1}{2\sqrt{l}}=\frac{1}{\sqrt{l}+\sqrt{l+a}}+\frac{1}{\sqrt{l}+\sqrt{l+b}}+\frac{1}{\sqrt{l}+\sqrt{l+c}}.$

Do tính duy nhất nên $l=k.$ suy ra

$$x+y+z\ge\frac{1}{m^m n^n p^p m_1^{am_1}n_1^{bn_1}p_1^{cp_1}}=\frac{8l}{mnp}=8lm_2n_2p_2$$

$$\Rightarrow x+y+z\ge\frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k+a})(\sqrt{k}+\sqrt{k+b})(\sqrt{k}+\sqrt{k+c})}{\sqrt{k}}.$$

Vậy $\min(x+y+z)=\frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k+a})(\sqrt{k}+\sqrt{k+b})(\sqrt{k}+\sqrt{k+c})}{\sqrt{k}}.$

Đạt được khi $\quad \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{mnp}{am^2+bn^2+cp^2},$

188

Chứng minh rằng với a,b,c là các số thực không âm tùy ý ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}+\frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 1.$$

Lời giải

Rõ ràng bất đẳng thức có thể chuyển về dạng tương đương là

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}+\frac{5}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge 1,$$

Với $x=b/a,y=c/b,z=a/c$ và $xuy=1$. Đặt

$$m=1-\frac{2}{1+x},n=1-\frac{2}{1+y},p=1-\frac{2}{1+z};\ m,n,p\in[-1,1].$$

Ta có $\quad (1+m)(1+n)(1+p)=(1-m)(1-n)(1-p)\Rightarrow m+n+p+mnp=0.$

Bất đẳng thức trở thành

$$(1-m)^3+(1-n)^3+(1-p)^3+5(1-m)(1-n)(1-p)\ge 8$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2)+5(mn+np+pm)\ge 3(m+n+p)+m^3+n^3+p^3$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2)+5(mn+np+pm)\ge m^3+n^3+p^3-3mnp.$$

Chú ý rằng nếu $mn+np+pm\ge 0$ thì $VT\ge 0,$ còn nếu $mn+np+pm\le 0$ thì ta cũng có:

$$VT=(m+n+p)^2-(mn+np+pm)\ge 0.$$

Vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $m+n+p\geq 0$.

Đặt $t=m+n+p$ và $u=mn+np+pm$, bất đẳng thức trở thành:

$$3(t^2-2u)+5u\geq t(t^2-3u)\Leftrightarrow t^2(3-t)+u(3t-1)\geq 0 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức *AM – GM* thì

$$m^2+n^2+p^2\geq 3|mnp|^{2/3}\geq -3mnp=3(a+b+c) \quad (2)$$

Bất đẳng thức sẽ được dễ dàng chứng minh nếu $u\geq 0$, ta chỉ cần xét khi $u\leq 0$ và $3t-1\geq 0$, thay (2) vào (1) ta chỉ cần chứng minh:

$$2t^2(3-t)+t(t-3)(3t-1)\geq 0\Leftrightarrow t(3-t)(1-t)\geq 0\Leftrightarrow t(3-t)(1+mnp)\geq 0.$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $m,n,p\in[-1,1]$. Đẳng thức xảy ra khi $m=n=p=0$ hoặc $m=n=1,p=-1$ hay $a=b=c$ hoặc $b/a=c/b=+\infty$ hoặc các hoán vị. Bất đẳng thức được chứng minh

189

Giả sử a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Hãy chứng minh rằng

$$\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}+\sqrt{c+3}\geq 6.$$

Lời giải

Phương pháp phản chứng ứng dụng rất rõ vào bài này. Ta chứng minh một bài toán khác chúng tương đương như sau

Nếu $a,b,c\geq 0$ và $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}+\sqrt{c+3}\geq 6$ thì $ab+bc+ca\leq 3$.

(chuyển kết luận $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}+\sqrt{c+3}\geq 6$ thành đẳng thức và chuyển giả thiết thành kết luận, đây chính là ý tưởng phản chứng).

Bất đẳng thức này rõ ràng là đơn giản hơn nhiều so với bất đẳng thức ban đầu. Ta có thể loại bỏ căn thức bằng cách đặt

$$x=\sqrt{a+3},y=\sqrt{b+3},z=\sqrt{c+3}\Rightarrow x+y+z=6.$$

Và ta phải chứng minh

$$(x^2-3)(y^2-3)+(y^2-3)(z^2-3)+(z^2-3)(x^2-3)\leq 3$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+24\leq 6(x^2+y^2+z^2) \quad (**)$$

Và bây giờ phép chứng minh sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức $(*)$, bạn đọc có thể sử dụng phương pháp dồn biến. Sau đây ta sẽ trình bày một lời giải sử dụng cách phân tích bình phương .Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(xy+yz+zx)^2\leq 6(x^2+y^2+z^2)-72+12(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)^2.$$

Chú ý rằng $x+y+z=6$ nên $xy+yz+zx\leq 12$, và do đó ta chỉ cần chứng minh

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(xy+yz+zx)^2\leq 6(x^2+y^2+z^2)-72++12(x^2+y^2+z^2)-12(xy+yz+zx)$$
$$+12(x^2+y^2+z^2)-12(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{x,y,z}(xy-xz)^2\leq 2\sum_{x,y,z}(x-y)^2+6\sum_{x,y,z}(x-y)^2$$
$$\Leftrightarrow (8-z^2)(x-y)^2+(8-y^2)(x-z)^2+(8-x^2)(y-z)^2\geq 0.$$

Từ giả thiết suy ra $x,y,z\geq\sqrt{3}$. Do đó $x,y,z\leq 6-2\sqrt{3}<2\sqrt{2}$. Bất đẳng thức vì vậy được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

190

Cho 3 số dương có a + b +c =1 .Chứng minh bất đẳng thức sau đây:

$$P=abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\frac{1}{81}\ (1)$$

Khi chưa tìm được cách giải ngay. Ta nên đưa bài toán về **trường hợp đặc biệt** bằng cách giảm số biến của bài toán. Ta đi đến xét:

191

Cho a và b là 2 số dương thay đổi thoã mãn: $a+b=1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$ab(a^2+b^2)\le\frac{1}{8}\ (2)$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2$

Ta có $P=ab\left[(a+b)^2-2ab\right]=ab(1-2ab)=\frac{1}{2}2ab(1-2ab)\le\frac{\left[2ab+1-2ab\right]^2}{4}=\frac{1}{4}$

Dấu "=" xẩy ra $\le\frac{\left[2ab+1-2ab\right]^2}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Ta sẽ tìm cách giải bài toán 1 bằng cách đưa về bài toán 2 đơn giản hơn cho 2 biến dương a và b tuỳ ý. Bằng cách đặt $a+b=M>0\Rightarrow\frac{a}{M}+\frac{b}{M}=1$. Từ đó từ bài toán 1 thay a và b lần lượt bởi $\frac{a}{M}$ và $\frac{b}{M}$ ta sẽ thu được bất đẳng thức :

$$\frac{a}{M}\text{ và }\frac{b}{M}\quad=\frac{1}{8}(a+b)^4\ (*).$$

Bây giờ ta giải bài toán 1. Ta có $P=abc(a^2+b^2+c^2)=c.ab(a^2+b^2)+c^3.ab$ Như vậy bất đẳng thức (2) là đúng.
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương) dấu "=" $a=b=c=1/3$

Bài toán 1 có thể giải bằng trực tiếp bằng phương pháp dồn biến trực tiếp.Song con đường đi từ bài Toán 2 sẽ tự nhiên hơn. Từ kết quả của 2 bài toán trên ta hy vọng rằng bài toán tổng quát sẽ đúng. Ta đi đến giải **bài toán tổng quát** sau với n biến dương. Tức là ta phải giải bài toán sau:

192

Bài toán 1:

" Cho n số dương $x_1,x_2,...x_n$: $x_1+x_2+...+x_n=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: "$P\le\frac{1}{n^{n+1}}$ ($n\ge2$) $P\le\frac{1}{n^{n+1}}$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n : $P\le\frac{1}{n^{n+1}}$ $P\le\frac{1}{n^{n+1}}$ (3)

Thật vậy với $n=2$ do kết quả bài toán 1 nên bất đẳng thức (3) đúng.

Giả sử (3) đúng với $n=k$.: T sẽ chứng minh bất đẳng thức (3) đúng cho n+1 số dương mà $x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}=1$. Thật vậy ta có . Nên theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\frac{x_1}{1-x_{n+1}}.\frac{x_2}{1-x_{n+1}}....\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\left[\frac{x_1^{\ 2}}{(1-x_{n+1})^2}+...+\frac{x_n^{\ 2}}{(1-x_{n+1})^2}\right]\le\frac{1}{n^{n+1}}\ (**)$$

Khi đó ta có:

$$P_{n+1}=x_1x_2...x_nx\left(x_1^{\ 2}+x_1^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}+x\right)=x.\left[x_1x_2...x_n\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}\right)\right]+x^3.(x_1x_2...x_n)$$

(ta gọi $x=x_{n+1}$) $P_{n+1}=x_1x_2...x_nx\left(x_1^{\ 2}+x_1^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}+x\right)=x.\left[x_1x_2...x_n\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}\right)\right]+x^3.(x_1x_2...x_n)$

$$\le\frac{x(1-x)^{n+2}}{n^{n+1}}+\frac{x^3(1-x)^n}{n^n}\text{ (theo giả thiết quy nạp (**) và theo bất đẳng thức AM-GM)}$$

$$=\frac{1}{n^{n+1}(n+1)}\left[(n+1)x-(n+1)x^2\right](1-x).(1-x)...(1-x).\left[\left[(n+1)x^2-2x+1\right]\right]$$

$$\le \frac{1}{n^{n+1}(n+1)}\left[\frac{(n+1)x-(n+1)x^2+n-1-(n-1)x+(n+1)x^2-2x=1}{n+1}\right]^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+2}}.$$

Tức là bất đẳng thức (3) đúng với $n+1$. Từ đó theo nguyên lý quy nạp (3) đúng với $\forall n \ge 2$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1} = \frac{1}{n}$. Như vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{(n+1)^{n+2}}$.

Bài toán 3 đã được giải quyết.

Bây giờ với n số dương tuỳ ý ta đặt .

Từ bài toán 3 ta thay $x_1, x_2 ... x_n$ lần lượt bởi $\frac{x_1}{M}, \frac{x_2}{M}, ... \frac{x_n}{M}$ ta thu được bất đẳng thức tổng quát ở bài toán 4 sau. Đây là một bất đẳng thức rất đẹp mà con đường đi đến lại là bất đẳng thức đơn giản đó là bất đẳng thức (1)

193

Cho n số thực dương ($n \ge 2$) $x_1, x_2 ... x_n$ ta có bất đẳng thức sau đây:

$$x_1x_2...x_n\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) \quad x_1x_2...x_n\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) \le \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^{n+2}}{n^{n+1}}.$$

Con đường tổng quát bài toán (1) chưa phải là kết thúc . Bây giờ ta mở rộng trên tập hợp các số m nguyên dương của các biến trong bài toán . Để dùng phép quy nạp có thể áp dụng được hay không theo kiểu ở trên ta phải lần lượt xét:

194

Bài toán 3 .Hãy tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $P_2^3 = ab\left(a^3 + b^3\right)$ Với a, b là 2 số dương thoả mãn . a +b = 1

b) $P_3^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$ Với a, b,c là 3 số dương thoả mãn a +b +c = 1

Để bài viết không quá dài trường hợp a) của bài toán xin dành cho bạn đọc tự giải. bằng cách tương tự như giải bài toán đầu tiên

Ở đó ta sẽ thu được kết quả là $\max P_2^3 = ab\left(a^3 + b^3\right) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x;y) = \left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3}); \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right) \\ (x;y) = \left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3}); (\frac{1}{6}(3+\sqrt{6})\right)\end{array}\right.$

Điều nhận thấy ở bài toán a) là mặc dù vai trò a,b trong bài toán là bình đẳng nhưng dấu " = " ở kết luận của bất đẳng thức thu được lại là các cặp (a; b) đối xứng mà không xảy ra khi 2 biến bằng nhau do đó để giải bài toán b) khó lòng đưa về trường hợp 2 biến . Sau đây là một lời giải cho bài toán b).

Lời giải

Giả sử c là số nhỏ nhất trong 3 số a,b, c suy ra $c \le \frac{1}{3}$. (*)

Ta có:

$$F = abc\left[(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3\right] = abc\{\left[(1-c)^3 - 3ab(1-c) + c^3\right]$$

$$= abc\left[1 - 3c + 3c^2 - 3ab(1-c)\right] = -3c(1-c)(ab)^2 + \left(1 - 3c + 3c^2\right)c.(ab)$$

$$= -3c(1-c)\left[ab - \frac{1-3c+3c^2}{6(1-c)}\right]^2 + \frac{\left(1-3c+3c^2\right)^2 c}{12(1-c)} \le \frac{\left(1-3c+3c^2\right)^2 c}{12(1-c)}$$

(1)

Xét hàm $f(c)=\dfrac{(1-3c+3c^2)^2c}{12(1-c)}$ với $c\in(0;\frac{1}{3}]$

$$f'(c)=\frac{-12c^3+21c^2-9c+1}{12(1-c)^2}(1-3c+3c^2)$$

Giải pt $f'(c)=0$ có 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm $c_0\in(0;\frac{1}{3}]$, $c_0\approx 0{,}17$

Lập BBT ta có $f(c)\le f(c_0)$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi đồng thời xảy ra ở (1) và (2) $\Leftrightarrow\begin{cases} ab=\dfrac{1-3c+3c^2}{6(1-c)} & (3)\\ c=c_0 & (4)\end{cases}$

Vì $c\in(0;\frac{1}{3}]$ nên ta dễ thấy $\dfrac{1-3c+3c^2}{6(1-c)}\in(0;1)$ và phương trình $t^2-(1-c_0)t+\dfrac{1-3c_0+3c_0^2}{6(1-c_0)}=0$ luôn có hai nghiệm $t\in(0;1)$ $\left(\Delta=\dfrac{1-3c_0+3c_0^2(1-c_0)}{3(1-c_0)}>0\right)$ suy ra luôn tồn tại a, b, c thỏa mãn giả thiết để có $f(c)=f(c_0)$.

Kết luận: GTLN của F là $f(c_0)$. Rõ ràng bài toán 13b) là một bài khá khó !

Nhận xét:

- Vì GTLN đạt được tại giá trị các biến "không đẹp" nên việc dựa vào các BĐT cổ điển là rất khó và phương pháp dồn biến là không thể thực hiện.
- Việc chọn c như ở (*) với mục đích hệ (3), (4) có nghiệm thuộc (0;1)

Bài toán mở I.1 Gọi $P_n^k=x_1x_2...x_n(x_1^k+x_2^k+...x_n^k)$ với n và là số tự nhiên ; Trong đó: $x_1+x_2+...+x_n=1$

Thì giá trị lớn nhất của P_n^k bằng bao nhiêu ?

Rõ ràng bài toán chỉ mới giải quyết được khi (k; n) = (2; n) ; (2;3) và (3;3)

Theo dõi kết quả của các bài toán trên ta thấy rằng bài toán tổng quát không thể giải quyết được bằng con đường quy nạp như ở chuỗi các bài toán đi từ bài toán trên Chính vì vậy 2 bài toán mở sau đây vẫn là câu hỏi chưa có câu trả lời.

Bài toán mở II. 2 n .là số tự nhiên (n lớn hơn hoặc bằng 2) và r là một số thực tuỳ ý . Với n số dương thay đổi thoả mãn: $x_1+x_2+...+x_n=1$

Gọi $P_n^r=x_1x_2...x_n(x_1^r+x_2^r+...+x_n^r)$ Thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức là bao nhiêu ?.

Trong thời gian hoàn thành cuốn sách này chúng tôi chưa tìm được lời giải nào cho 2 bài toán này, rất mong nhận được sự trao đổi của các thầy cô và bạn đọc gần xa.

Bình luận: Đôi lúc không nên học toán như một thứ mì ăn liền mà ta nên chậm lại ngẫm nghĩ và khám phá những bí mật ẩn sau nó là gì ? Biết đâu những khám phá dù nhỏ bé đang chờ các bạn . Và cũng nên nhớ rằng những sáng tạo lớn luôn từ những mãnh ghép của công việc sáng tạo bình thường và cải tiến các sáng tạo đó.

192

Giả sử các số thực $a,b,c>1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a^2-1}+\dfrac{1}{b^2-1}+\dfrac{1}{c^2-1}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1.$$

Lời giải

Ta sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* kết hợp với phương pháp chứng minh bằng phản chứng .Nói cách khác, ta sẽ chứng minh rằng, nếu các số thực $a,b,c>1$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1,$$

Thì bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}\ge 1.$$

Thật vậy, từ giả thiết suy ra

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}=0 \qquad (*)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4-a^2}{a^2-1}+\frac{4-b^2}{b^2-1}+\frac{4-c^2}{c^2-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-2}{a+1}.\frac{a+2}{a-1}+\frac{b-2}{b+1}.\frac{b+2}{b-1}+\frac{c-2}{c+1}.\frac{c+2}{c-1}\le 0.$$

Chú ý rằng nếu ta có $a\ge b\ge c$ thì

$$\begin{cases}\dfrac{a-2}{a+1}\ge\dfrac{b-2}{b+1}\ge\dfrac{c-2}{c+1}\\[2mm] \dfrac{a+2}{a-1}\le\dfrac{b+2}{b-1}\le\dfrac{c+2}{c-1}\end{cases}$$

Do đó ta chỉ cần áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 bộ ngược chiều nói trên và chú ý điều kiện $(*)$ ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Bình luận : Với các bất đẳng thức dạng $ax+by+cz$ để mang so sánh với 0 thì ta có thể nghĩ đến việc tư duy các bộ số đơn điệu (cùng tăng, hoặc cùng giảm) rồi kết hợp với bất đẳng thức *Chebyshev*.

193

Giả sử các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c+d=4.$ Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2}\le\frac{1}{3}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng tương đương

$$\frac{1}{11+a^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+b^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+c^2}+-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+d^2}-\frac{1}{12}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-1}{11+a^2}+\frac{b^2-1}{11+b^2}+\frac{c^2-1}{11+c^2}+\frac{d^2-1}{11+d^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1).\frac{a+1}{a^2+11}+(b-1).\frac{b+1}{b^2+11}+(c-1).\frac{c+1}{c^2+11}+(d-1).\frac{d+1}{c^2+11}\ge 0.$$

Chú ý rằng nếu $a\ge b\ge c\ge d$ thì ta luôn có

$$\frac{a+1}{a^2+11}\ge\frac{a+1}{a^2+11}\ge\frac{c+1}{c^2+11}\ge\frac{d+1}{d^2+11}.$$

Nếu áp dụng bất đẳng thức *chebyshev* cho bộ số trên và bộ $(a-1,b-1,c-1,d-1)$ ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1.$

194

Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$

Chứng minh bất đẳng thức:

$$2(a+b+c+d)\ge\sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}+\sqrt{d^2+3}.$$

Lời giải

(Rút ý từ lời giải của anh Phạm Kim Hùng)

Nếu nhìn thoáng qua về đề bài, các bạn sẽ cảm thấy khó khăn vì giả thiết của bài toán thật tường minh. Nếu bạn đã biết nhiều kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức thì lại càng dễ bị nhầm khi đi theo những phương pháp mạnh ví dụ như dồn biến chẳng hạn. Thật bất ngờ, bài toán trên được giải hoàn toàn đơn giản bằng bất đẳng thức *Chebyshev*, tất nhiên với một kĩ thuật áp dụng khá đặc biệt...

Ta trừ tương ứng từng số hạng của 2 vế và chú ý đẳng thức

$$2a-\sqrt{a^2+3}=\frac{3\left(a^2-1\right)}{2a+\sqrt{a^2+3}}\qquad(*)$$

Không thể áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* ngay được vì cả tử số và mẫu sô của biểu thức đều là các hàm đơn điệu tăng. Tuy nhiên hãy chú ý giả thiết

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=a+b+c+d\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(b-\frac{1}{b}\right)+\left(c-\frac{1}{c}\right)+\left(d-\frac{1}{d}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}+\frac{d^2-1}{d}=0.$$

Từ đẳng thức này bạn đọc có thể thấy một mối liên hệ với $(*)$, đó là chung tử số a^2-1. Đây chính là chìa khóa để giải bài toán. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{3\left(a^2-1\right)}{2a+\sqrt{a^2+3}}+\frac{3\left(b^2-1\right)}{2b+\sqrt{b^2+3}}+\frac{3\left(c^2-1\right)}{2c+\sqrt{c^2+3}}+\frac{3\left(d^2-1\right)}{2d+\sqrt{d^2+3}}\ge0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}+\frac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}+\frac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}}+\frac{\frac{d^2-1}{d}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{d^2}}}\ge0.$$

Lưu ý bất đẳng thức đã cho hoàn toàn đối xứng với 4 biến a,b,c,d và các hàm số

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x},\quad g(x)=\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}.$$

Đều là các hàm tăng trên R^+ nên theo bất đẳng thức *Chebyshev*

$$f(a)g(a)+f(b)g(b)+f(c)g(c)+f(d)g(d)\ge$$

$$\frac{1}{4}\big(f(a)+f(b)+f(c)+f(d)+g(a)+g(b)+g(c)+g(d)\big)=0.$$

Vì ta có $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

Bình luận : Như vậy ở đây qua vài ví dụ vừa được trình bày, chúng tôi đã cố gắng hình thành cho các bạn một lối tư duy để chứng minh các bất đẳng thức dạng phân thức lớn hơn (bé hơn) 0 . Mà như ở các chương trước ta đã trình bày đó là cách cộng thêm vào 1 hằng số rồi thao tác với bài toán dễ hơn thì ở đây ta thao tác trực tiếp nhờ sự hỗ trợ của bất đẳng thức *Chebyshev*. *Lưu ý , ở đây chỉ trang bị cho các bạn như một "vũ khí mạnh" để giúp chúng ta tự tin hơn khi giải toán chứ không nhằm hỗ trợ các bạn giải được đề thi Đại Học , nó chỉ cung cấp cho các bạn một cái nhìn tổng quát để từ đó, việc giải được đề thi ĐH như là một hệ quả tất yếu . Điều này cũng như Việc sáng tác ra một ca khúc hay chỉ vì đam mê về tiết tấu và nhạc lý, còn việc nó giúp chúng ta có khí thế khi ra trận đó là một hệ quả mang tính tất yếu . Chính vì vậy, hãy nên đọc kĩ những bài toán dạng này .*

Ở đây chúng tôi chốt lại cho các bạn như sau (trích từ bài giảng của PGS Nguyễn Vũ Lương cho lớp 10A1 Toán Khóa 2009-2012)

Để chứng minh $x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n \geq 0$ ta có thể chứng minh

$$\frac{y_1}{a_1}.(x_1a_1)+\frac{y_2}{a_2}.(x_2a_2)+...+\frac{y_n}{a_n}.(x_na_n)\geq 0,$$

Trong đó $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực mà ta phải tìm sao cho

$$\left(\frac{y_1}{a_1},\frac{y_2}{a_2},...,\frac{y_n}{a_n}\right) \quad , \quad (x_1a_1,x_2a_2,...,x_na_n),$$

Là các bộ đơn điệu cùng chiều để điều kiện bất đẳng thức *Chebyshev* được thỏa mãn. Khi đó việc chứng minh bất đẳng thức ban đầu sẽ được quy về chứng minh 2 bất đẳng thức đơn giản hơn là

$$\frac{y_1}{a_1}+\frac{y_2}{a_2}+...+\frac{y_n}{a_n}\geq 0,$$

$$x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n \geq 0.$$

Một dạng thường sử dụng của kĩ thuật này là áp dụng với dạng phân thức. Giả sử ta phải chứng minh bất đẳng thức dạng

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+...+\frac{x_n}{y_n}\geq 0.$$

Về lí thuyết thì ta luôn có thể đưa bất đẳng thức về dạng này, thậm chí có thể chọn $y_1,y_2,...,y_n \geq 0$. Khi đó ta đi tìm các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ sao cho

$$(a_1x_1,a_2x_2,...,a_nx_n),(a_1y_1,a_2y_2,...,a_ny_n)$$

là các bộ đơn điệu ngược chiều, khi đó bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu 2 điều kiện sau được thỏa mãn

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n \geq 0, \frac{1}{a_1y_1}+\frac{1}{a_2y_2}+...+\frac{1}{a_ny_n}\geq 0.$$

Thông thường đối với các bất đẳng thức, trong 2 dãy số $(x_1,x_2,...,x_n)$ và $(y_1,y_2,...,y_n)$ sẽ có một dãy dương nên khi chọn dãy $(a_1,a_2,...,a_n)$ dương thì chỉ cần chứng một trong 2 bất đẳng thức cuối. Trong nhiều trường hợp ta có được đẳng thức $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$ như trong bài toán trên

195

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{c^2+a+b}+\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+a+c}\leq 1,$$ Với các số thực không âm a,b,c tùy ý có tổng bằng 3

Lời giải

Lời giải dựa theo lời giải của tác giả bài toán đăng trên Crux

Hãy chú ý phân tích sau

$$\frac{1}{c^2+a+b}-\frac{1}{3}=\frac{1}{c^2-c+3}-\frac{1}{3}=\frac{c(1-c)}{3(c^2-c+3)}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{a(a-1)}{a^2-a+3}+\frac{b(b-1)}{b^2-b+3}+\frac{c(c-1)}{c^2-c+3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}}\geq 0.$$

Giả sử $a\geq b\geq c \Rightarrow a-1\geq b-1\geq c-1$. Vì $a+b+c=3$ nên $ab+bc+ca\leq 3$. Do đó

$$\Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}}\geq \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}}\geq \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 dãy trên ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

196

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge(xy+yz+zx)\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3}=\frac{2}{3}(x+y+z)$

Ta c/m BĐT: $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge\frac{2}{3}(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge 6xyz$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 6 số ta có ngay đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

197

Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{a^3(b^7+c+1)}{b^7(b+1)(c+1)}+\frac{b^3(c^7+a+1)}{c^7(c+1)(a+1)}+\frac{c^3(a^7+b+1)}{a^7(a+1)(b+1)}\ge\frac{9}{4}$$

Lời giải

Hình thức khá khủng bố nên ta đi vào biến đổi mỗi phân thức:

Ta có: $P=\sum\frac{a^3(b^7+c+1)}{b^7(b+1)(c+1)}=\sum\frac{a^3}{(b+1)(c+1)}+\sum\frac{a^3}{b^7(c+1)}$

Hướng đi đã quá quen thuộc, ta sẽ tách ra đi đánh giá $\sum\frac{a^3}{(b+1)(c+1)}$ và $\sum\frac{a^3}{b^7(c+1)}$ rồi kết hợp lại:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\sum\frac{a^3}{(b+1)(c+1)}+\sum\frac{b+1}{8}+\sum\frac{c+1}{8}\ge\frac{3}{4}(a+b+c)$

Suy ra $\sum\frac{a^3}{(b+1)(c+1)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}$ (1)

Lại có: $\sum\frac{a^3}{b^7(c+1)}+\sum\frac{c+1}{4}\ge\sum\sqrt{\frac{a^3}{b^7}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^7}\cdot\frac{b^3}{c^7}\cdot\frac{c^3}{a^7}}=3$ (vì $abc=1$)

Suy ra $\sum\frac{a^3}{b^7(c+1)}\ge\frac{9}{4}-\frac{1}{4}(a+b+c)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P\ge\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{3}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

Nhận xét: Bài làm tuy "khủng" nhưng hướng đi là hoàn toàn tự nhiên và khá nhẹ nhàng!

198

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm GTNN của: $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}c}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

Lời giải

Sử dụng BĐT vectơ. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy chọn: $\vec{u}\left(a;\frac{1}{b}\right)$; $\vec{v}\left(b;\frac{1}{c}\right)$; $\vec{w}\left(c;\frac{1}{a}\right)$

Từ $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$ suy ra:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}c}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2+\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2=9\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\right)\ge 18$$

Suy ra $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}c}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge 3\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Sử dụng kiến thức trên ta có thể đưa ra lời giải bài toán sau:

199

Cho x,y,z là các số thực dương và $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}}\ge\sqrt{82}$$

Lời giải

Ta có: $P=\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}\ge$

$$\ge\sqrt{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2+\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right)^2}=3.\sqrt{\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2}}$$

Đặt $\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2=t\,(t>0)\Rightarrow 1=x+y+z\ge 3\sqrt{t}\Rightarrow t\le\frac{1}{9}$

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t}$ với $t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$ có: $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}<0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]\Rightarrow f(t)$ giảm trên $\left(0;\frac{1}{9}\right]$.

$$\Rightarrow f(t)\ge f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{82}{9}.\ \text{Suy ra } P\ge 3\sqrt{\frac{82}{9}}=\sqrt{82}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

200

Cho x,y,z là các số thực thay đổi. Tìm GTNN của:

$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\ge\sqrt{4+4y^2}=2\sqrt{y^2+1}$

$A\ge 2\sqrt{y^2+1}+|y-2|$

Đến đây ta xét trường hợp $y\ge 2$ và $y<2\Rightarrow A\min=2+\sqrt{3}$

Dấu "=" có tại $x=0;y=\frac{1}{\sqrt{3}}$

201

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2-2b+3}+\frac{2b^3}{c^3+a^2-2a-3c+7}+\frac{3c^3}{a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Mục tiêu là đánh giá mẫu thức phức tạp các phân thức:

Ta có: $\dfrac{a^3}{b^2-2b+3}=\dfrac{a^3}{(b-1)^2+2}\le\dfrac{a^3}{2}$ (1).

Xét hàm số $f(c)=c^3+a^2-2a-3c+7$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(c)=3c^2-3=0$ tại $c=1$.

Lập bảng biến thiên hàm số suy ra $f(c)\ge f(1)=a^2-2a+5=(a-1)^2+4\ge 4$

$$\Rightarrow\frac{2b^3}{c^3+a^2-2a-3c+7}\le\frac{b^3}{2}\ (2)$$

Xét hàm số $g(b)=a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11$.

Lập bảng biến thiên suy ra $g(b)\ge g(1)=(b-1)^2+6\ge 6$

$$\Rightarrow\frac{3c^3}{a^4+b^4+a^2-2b^2-6a+11}\le\frac{c^3}{2}\ (3)$$

Từ (1); (2); (3) suy ra $VT\le\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2}=\dfrac{3}{2}$ đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

202

Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm GTNN của: $P=\max\left\{x;y;z;\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{y^2}+\dfrac{9}{z^3}\right\}$

Lời giải

Ta có:

- Nếu $x\ge 3$ hoặc $y\ge 3$ hoặc $z\ge 3$ thì $P\ge 3$
- Nếu $0<x;y;z<3$ thì $\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{y^2}+\dfrac{9}{z^3}>3$ suy ra $P>3$

Vậy GTNN của P bằng 3. Dấu "=" xảy ra tại $x=y=z=3$

202

Xét các số tực không âm x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2\le 3y$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$

Lời giải

Nhìn biểu thức P ta nghĩ ngay tới BĐT sau: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{8}{(a+b)^2}$. Vậy từ giả thiết ta sẽ suy ra điều gì đó giúp ích chi việc đánh giá mẫu thức:

Lời giải

Ta có: Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{2}{ab}\ge\dfrac{8}{(a+b)^2}\Rightarrow\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{y}{2}+1\right)^2}\ge\dfrac{8}{\left(x+\dfrac{y}{2}+2\right)^2}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{8}{\left(x+\dfrac{y}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge\frac{64}{\left(x+\dfrac{y}{2}+z+5\right)^2}$$

Ta có: $2x+y+2z=(2x+4y+2z)-3y\le(x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1)-3y\le 6$

Suy ra $P\ge\dfrac{64}{(3+5)^2}=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Vậy $P\min = 1$ tại $x=1; y=2; z=1$.

204

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm GTNN của:

$$P = 12\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

Ta có: $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Suy ra $P \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{27}{a+b+c}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{27}{2(a+b+c)}+\frac{27}{2(a+b+c)} \geq 3\sqrt[3]{4\left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{27}{2(a+b+c)}.\frac{27}{2(a+b+c)}}$$

$$\Rightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{27}{a+b+c} \geq 27 \Rightarrow P \geq 27$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Vậy $P\min = 27$ tại $a=b=c=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

205

Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn: $x^4+y^4+\frac{1}{xy}-\sqrt{2xy}=\frac{3}{2}$. Tìm GTLN của:

$$L=\frac{2}{x^2+1}+\frac{2}{y^2+1}-\frac{3}{1+2xy}$$

Lời giải

Ta đã có BĐT phụ giữa $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}$ và $\frac{2}{xy+1}$ thuộc loạt bài toán trong phần sử dụng nguyên lí Dirichlet. Bây giờ ta mong đợi thu được $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1} \leq \frac{2}{xy+1}$ để xét hàm số với ẩn xy.

Muốn vậy ta cần $0 \leq xy \leq 1$. Điều này sẽ được rút ra từ giả thiết, ta phải khia thác triệt để giả thiết để hỗ trợ quá trình xét hàm:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $2+xy \geq \frac{3}{2}+\sqrt{2xy} = x^4+y^4+\frac{1}{xy} \geq 2x^2y^2+\frac{1}{xy}$

Đặt $xy=t \Rightarrow t+2 \geq 2t^2+\frac{1}{t} \Rightarrow (t+1)(t-1)(2t-1) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$ (vì $t>0$)

Khi đó: $L \leq \frac{2}{xy+1}-\frac{3}{1+2xy}$. $\Rightarrow L \leq \frac{4}{t+1}-\frac{3}{2t+1}=\frac{5t+1}{2t^2+3t+1}$

$$=\frac{7}{6}-\frac{(2t-1)(7t-1)}{2t^2+3t+1}\le\frac{7}{6}\ (\text{vì } \frac{1}{2}\le t).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{1}{2}$

Vậy $L\max=\frac{7}{6}$ tại $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

206

Cho a.b.c là các số thực dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của:

$$J=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{2ab}$$

Lời giải

Nài toán đơn giản chỉ bị biến đổi một chút:

Ta có: $J\ge\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$

Theo phương pháp trên ta tìm được ngay BĐT phụ:

$$\frac{a}{1-a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\Leftrightarrow a\left(1-a^2\right)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $a^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge3\sqrt[3]{\frac{a^3}{27}}=a\Rightarrow\frac{2}{3\sqrt{3}}\ge a\left(1-a^2\right)$ đpcm!

Vậy ta có: $\sum\frac{a}{1-a^2}\ge\sum\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\Rightarrow J\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $J\min=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Sử dụng tư tưởng $\frac{2}{3\sqrt{3}}\ge a\left(1-a^2\right)$ ta có thể giải quyết BĐT Sau không cần tốn thời gian:

207

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}+\frac{b^5-2b^3+b}{c^2+a^2}+\frac{c^5-2c^3+c}{a^2+b^2}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Lời giải

Ta có: $\sum\frac{a^5-2a^3+a}{b^2+c^2}=\sum\frac{a\left(1-a^2\right)^2}{1-a^2}=a\left(1-a^2\right)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Tương tự cho 2 biến còn lại, cộng vế theo vế ta có đpcm.

208

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}}+\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4\left(c^3+a^3\right)}}$$

Lời giải

Ta chỉ cần chứng minh: $\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}\ge a+b$ thì bài toán được giải quyết!

Ở đây ta lại gặp lại ước lượng với $\frac{a}{a+b+c}$

209 Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn: $x+y+z=xyz$. Tìm min: $X=\dfrac{x-2}{z^2}+\dfrac{y-2}{x^2}+\dfrac{z-2}{y^2}$

Lời giải

Bài toán này đáng lưu ý, ta có:

$$X=\frac{(x-1)+(z-1)}{z^2}+\frac{(y-1)+(x-1)}{x^2}+\frac{(z-1)+(y-1)}{y^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=(x-1)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\right)+(y-1)\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)+(z-1)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq$$

$$\geq(x-1)\frac{2}{zx}+(y-1)\frac{2}{xy}+(z-1)\frac{2}{yz}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\text{(Áp dụng BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow X\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=1\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\sqrt{3\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)}=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow X\geq\sqrt{3}-2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$

210 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc\geq 13$$

Lời giải

Ý tưởng là ta sẽ đưa hết về 1 biến và xét hàm số

Ta có: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc=3\left[9-2(ab+bc+ca)\right]+4abc$

$$=27-6a(3-a)+2(2a-3)bc.$$

Lượng "bc" có thể được biểu diễn qua tổng $b+c$ cũng chính là $3-a$. Nhưng trước mắt muốn đánh giá dấu "lớn hơn" phải có $2a-3<0$:

Giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a\leq 1\Rightarrow 2a-3<0$. Khi đó:

$$2(2a-3)bc\geq\frac{1}{2}(2a-3)(b+c)^2=\frac{1}{2}(2a-3)(3-a)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4abc\geq 27-6a(3-a)+\frac{1}{2}(2a-3)(3-a)^2=a^3+\frac{3}{2}a^2+\frac{27}{2}$$

Mà $a^3-\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{27}{2}\geq 13\Leftrightarrow(2a+1)(a-1)^2\geq 0$ luôn đúng!

Vậy ta có đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

211 Chứng minh rằng với mọi số dương thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$.

Chứng minh rằng: $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\leq 5(y+z)^3$

Lời giải

Đây là một BĐT không chặt nên đánh giá VT khá dễ dàng:

Ta có: BĐT $\Leftrightarrow x^3+3x^2(y+z)+3x\left(y^2+z^2+yz\right)\leq 2(y+z)^3$

Bây giờ ta cần so sách x với y và z thì BĐT mới sẽ đối xứng 2 biến. Từ giả thiết ta có:

$$3yz = x(x+y+z) \ge 3x\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow x \le \sqrt{yz} \le \frac{1}{2}(y+z) \Rightarrow 2x \le y+z \text{ và } x^2 \le yz$$

Khi đó, ta có: $x^3+3x^2(y+z)+3x(y^2+z^2+yz) \le \frac{1}{8}(y+z)^3+3yz(y+z)+\frac{3}{2}(y+z)\left[(y+z)^2-yz\right]=$

$$=\frac{13}{8}(y+z)^3+\frac{3}{2}yz(y+z) \text{ mà } yz(y+z) \le (y+z)^3 \Leftrightarrow (y+z)(y-z)^2$$

$$\Rightarrow \frac{13}{8}(y+z)^3+\frac{3}{2}yz(y+z) \le 2(y+z)^3 \text{ suy ra đpcm!}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

212

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $abc=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1} \ge \frac{25}{4}$$

Đây là một bài toán khá hay sử dụng phương pháp dồn biến

Lời giải

Xét biểu thức $f(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}$

Ta sẽ chứng minh 2 bước: $f(a,b,c) \ge f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) \ge \frac{25}{4}$

Ta có:

$$f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{13}{a+2\sqrt{bc}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{bc}}\right)+13\left(\frac{1}{a+b+c+1}-\frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[\frac{1}{bc}-\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}\right]$$

Lại có: theo BĐT Cauchy: $\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)} \le \frac{13}{\left(3\sqrt[3]{abc}+1\right)\left(3\sqrt[3]{abc}+1\right)}=\frac{13}{16}<1$

Giả sử $a=\max\{a,b,c\} \Rightarrow a \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{bc} \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{bc}-\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}>0$

Khi đó ta có: $f(a,b,c) \ge f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$

Bây giờ bước tiếp theo:

$$f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) \ge \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{13}{a+2\sqrt{bc}+1} \ge \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+2\sqrt{a}+\frac{13}{a+\frac{2}{a}+1} \ge \frac{25}{4}$$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{a}}=t\,(t>0)$ ta có:

$$t^2+\frac{2}{t}+\frac{13t^2}{2t^3+t^2+1} \ge \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2+\frac{2}{t}-3\right)+13\left(\frac{t^2}{2t^3+t^2+1}-\frac{1}{4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(t+2)}{t}-\frac{13(t-1)^2(2t+1)}{4\left(2t^3+t^2+1\right)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(8t^4+20t^3-18t^2-9t+8\right) \ge 0 \text{ luôn đúng!}$$

Vậy ta có đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

213

Cho 2 số thực x,y khác 0 thay đổi thỏa mãn: $(x+y)xy = x^2+y^2-xy$. Tìm GTLN của:

$$A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$$

Lời giải

Ta có: $A = \dfrac{(x+y)(x^2+y-xy)}{x^3y^3} = \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2$.

Đặt $x+y=S;\ xy=P\left(S^2 \ge 4P\right)$.

Từ giả thiết $\Rightarrow SP = S^2-3P \ge S^2-\dfrac{3}{4}S^2 = \dfrac{1}{4}S^2 \Rightarrow 0 \le \dfrac{S}{P} \le 4 \Rightarrow A = \left(\dfrac{S}{P}\right)^2 \le 16$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

214

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Lời giải

Ta có: $P = \dfrac{32}{\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{2c}{a}\right)^3}+\dfrac{32}{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{3c}{b}\right)^3}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2}$

Đặt $x=\dfrac{a}{c};\ y=\dfrac{b}{c}$. Suy ra: $(x+1)(y+1)=4 \Rightarrow xy+x+y=3$. Khi đó:

$$P = 32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]-\sqrt{x^2+y^2}$$

Ta có BĐT: $4\left(a^3+b^3\right) \ge (a+b)^3 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0$ luôn đúng!

$$\Rightarrow P = 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

Đặt $xy=t \Rightarrow x+y=3-t$ và $3=x+y+xy \ge t+2\sqrt{t} \Rightarrow \left(\sqrt{t}-1\right)\left(\sqrt{t}+3\right) \le 0 \Rightarrow t \le 1$

Ta có:

$$P = 8\left(\frac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2} = 8\left(\frac{(3-t)^2-2t+3(3-t)}{t+3(3-t)+9}\right)^3-\sqrt{(3-t)^2-2t}$$

$$= 8\left(\frac{(t-9)(t-2)}{2(9-t)}\right)^3-\sqrt{t^2-8t+9} = (2-t)^3-\sqrt{(t-1)(t-7)+2} \ge 1-\sqrt{2}\ \text{(vì } t \le 1\text{)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

Vậy $P\min = 1-\sqrt{2}$ tại $x=y=1$

215.

Cho các số a,b,c dương thỏa mãn: $abc = 8$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2a+b+6} + \frac{1}{2b+c+6} + \frac{1}{2c+a+6}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{2a+b+6} = \frac{1}{(a+b)+2\left(\frac{a}{2}+1\right)+4} \le \frac{1}{2\sqrt{ab}+2\sqrt{2a}+4}$$

Tương tự cho 2 biến còn lại, cộng theoes theo vế các BĐT Suy ra:

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{ab}}{2}+\frac{\sqrt{2a}}{2}+1} + \frac{1}{\frac{\sqrt{bc}}{2}+\frac{\sqrt{2b}}{2}+1} + \frac{1}{\frac{\sqrt{ca}}{2}+\frac{\sqrt{2c}}{2}+1}\right) = \frac{1}{4}Q$$

Ứng với kết quả trên ta có ngay $Q = 1 \Rightarrow P \le \frac{1}{4}$

Vậy $P\max = \frac{1}{4}$ tại $a = b = c = 2$

216.

Cho các số a,b,c lớn hơn 1 thỏa mãn: $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\frac{\sqrt{a}}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sqrt{b}\left(\sqrt{c}+\frac{\sqrt{b}}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\frac{\sqrt{c}}{2}\right)}$

Lời giải

Để cho gọn ta sẽ Đặt $a^2 - 1 = x^2$; $b^2 - 1 = y^2$; $c^2 - 1 = z^2 \Rightarrow xyz = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{x^2+1};\ \sqrt{b} = \sqrt{y^2+1};\ \sqrt{c} = \sqrt{z^2+1}$$

Khi đó:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{y^2+1}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}\left(\sqrt{z^2+1}+\frac{\sqrt{y^2+1}}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{\sqrt{z^2+1}}{2}\right)}$$

Cấu hình dạng $(x^2+1)(y^2+1)$ gợi ý cho ta điều gì không ? Ở đây hiển nhiên ta rất muốn khử căn thức đúng không ?

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{y^2+1}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+\frac{1}{2}(x^2+1)} \le \frac{1}{xy+1+x}$$

Tương tự cho 2 biến còn lại, cộng vế theo vế suy ra:

$$P \le \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = 1$$

Vậy $P\max = 1$ tại $a = b = c = \sqrt{2}$

Bình luận: Một đẳng thức được khai thác rất nhiều trong các đề thi sơ cấp đó là: Với $xyz = 1$ thì ta luôn có :

$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = 1$. Bạn đọc nên ghi nhớ .

217

Cho các số x,y,z thỏa mãn: $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm GTLN của:

$$P=x^5+y^5+z^5$$

Lời giải

Với giả thiết như vậy, ta sẽ nghĩ đến đưa P về chỉ 1 ẩn x và thực hiện xét hàm:

$$P=x^5+y^5+z^5=x^5+\left(y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3\right)-y^2z^2\left(y+z\right)$$

$$=x^5+\left(1-x^2\right)\left[-x\left(1-x^2\right)+x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right]+x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(2x^3-x\right)$$

Bây giờ để xét hàm chỉ việc từ giả thiết tìm khoảng giá trị của x

Ta có:

$$0=\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2x\left(y+z\right)+2yz=1-2x^2+2yz\le 1-2x^2+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow 0\le 1-2x^2+1-x^2=2-3x^2\Rightarrow x\in\left[-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{5}{4}\left(2x^3-x\right)$ với $t\in\left[-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ dễ có $f\left(t\right)\le\frac{5\sqrt{6}}{36}$ suy ra

$$P\max=\frac{5\sqrt{6}}{36}\text{ tại } x=\frac{\sqrt{6}}{3};y=z=\frac{-\sqrt{6}}{6}$$

218

: Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta luôn có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{2\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 12$$

Lời giải

Rất nhanh gọn, ta có: BĐT $\Leftrightarrow\sum\left(\frac{1}{2ab}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$

Điều này hiển nhiên đúng vì $a^2+b^2+c^2>2ab>0$. Vậy BĐT được chứng minh

Bình luận: Phương pháp phân tích bình phương đôi khi tỏ ra rất có ích trong việc chứng minh các biểu thức 3 biến đối xứng . Mà cá nhân tác giả thấy rằng : Chúng ta tự hỏi các Bất đẳng thức xuất phát từ đâu, chả phải đó là từ bất đẳng thức cơ bản $x^2\ge 0$ ư? Cho nên ở đây phương pháp đưa về bình phương có lẽ là phương pháp tự nhiên nhất khi chứng minh bất đẳng thức .

219

Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x+y+z}$

Lời giải

BĐT trên đối xứng thuần nhất, chuẩn hóa $x+y+z=1$.

BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{y}-2x+y\right)+\left(\frac{y^2}{z}-2y+z\right)+\left(\frac{z^2}{x}-2z+x\right)\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x+y+z\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-y\right)^2}{y}+\frac{\left(y-z\right)^2}{z}+\frac{\left(z-x\right)^2}{x}\ge\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(\frac{1}{y}-1\right)+(y-z)^2\left(\frac{1}{z}-1\right)+(z-x)^2\left(\frac{1}{x}-1\right)\ge 0$$

Do $x+y+z=1 \Rightarrow 0<x,y,z<1 \Rightarrow \frac{1}{x}-1;\ \frac{1}{y}-1;\ \frac{1}{z}-1>0$

Suy ra ta có đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

220

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge 3+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Hẳn là BĐT Nesbit $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ đã quá quen thuộc với hơn 50 cách giải, BĐT trên chỉ thêm về hình thức hơn một đại lượng không âm. Hướng đi nghĩ tới đầu tiên, tự nhiên và có cơ sở và xác suất thành công cao là S.O.S, vì trong các cuộc thi mang tính chất chính thống đông đảo thí sinh tham dự, BĐT sẽ không quá khắt khe tới mức phải sử dụng các tiêu chuẩn nâng cao của phân tích bình phương , mà ta chỉ cần chỉ ra các hệ số đi kèm với biểu thức bình phương dương

Ta có:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right)\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\ge\sum\frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{1}{(a+c)(b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}\right)(a-b)^2\ge 0$$

Đặt $S_a=\frac{1}{(a+b)(c+a)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}$; $S_b=\frac{1}{(a+b)(b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}$; $S_c=\frac{1}{(b+c)(c+a)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}$

Bài toán này không khó, chỉ cần sử dụng tiêu chuẩn 1, ta sẽ chứng minh $S_a>0$ rất dễ dàng:

Ta có:

$$S_a>0\Leftrightarrow\frac{1}{(a+b)(c+a)}>\frac{1}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(c+a)<(a+b+c)^2\Leftrightarrow b^2+c^2+ab+bc+ca>0 \text{ luôn đúng!}$$

Vậy ta có: $S_a,S_b,S_c>0$ suy ra $\sum\left(\frac{1}{(a+c)(b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}\right)(a-b)^2\ge 0$ với mọi a,b,c dương.

Vậy ta có đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

221

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Ta có:

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}\le\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\right)(a-b)^2\ge 0$$

Đặt

$$S_a=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(a+b)(c+a)};\ S_b=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(a+b)(b+c)};\ S_c=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}$$

Ta dễ có: $(a+b)(c+a)<ab+bc+ca\Rightarrow S_a;S_b;S_c>0$ với mọi a,b,c. dương. Vậy ta có đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

222

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 27abc\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

Lời giải

BĐT cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3abc(a+b+c)}\ge\frac{9\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3abc(a+b+c)}-1\ge\frac{9\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)^3}-1$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{3c^2+(a+b)^2}{6abc(a+b+c)}(a-b)^2\ge\sum\frac{c+4a+4b}{(a+b+c)^3}(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum\left[\frac{3c^2+(a+b)^2}{6abc(a+b+c)}-\frac{c+4a+4b}{(a+b+c)^3}\right](a-b)^2\ge 0$$

Đặt $S_a=\dfrac{3a^2+(b+c)^2}{6abc(a+b+c)}-\dfrac{a+4b+4c}{(a+b+c)^3}$,

$S_b=\dfrac{3b^2+(c+a)^2}{6abc(a+b+c)}-\dfrac{b+4a+4c}{(a+b+c)^3}$,

$S_a=\dfrac{3c^2+(a+b)^2}{6abc(a+b+c)}-\dfrac{c+4a+4b}{(a+b+c)^3}$,

Ta sẽ chứng minh: $S_a>0$. Thật vậy: $S_a>0\Leftrightarrow(a+b+c)^2\left(3a^2+(b+c)^2\right)>6abc(a+4b+4c)^{(*)}$

Đặt $a=x$ và $b+c=y$. Ta có: BĐT $^{(*)}$ được viết lại là: $(x+y)^2\left(3x^2+y^2\right)>6abc(x+4y)$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $VP\le\frac{3}{2}xy^2(x+4y)$.

Ta sẽ chứng minh: $\frac{3}{2}xy^2(x+4y)<VT$. Thật vậy:

$$\frac{3}{2}xy^2(x+4y)<(x+y)^2\left(3x^2+y^2\right)\Leftrightarrow y^4-4y^3x+\frac{5}{2}x^2y^2+6yx^3+4x^4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2-2x\right)^2-\frac{3}{2}x^2\left(y^2-2x\right)+3yx^3+3x^4>0^{(1)}$$

Xét hàm số f(t)= $t^2-\frac{3}{2}x^2t+3yx^3+3x^4$ có: $\Delta=\frac{9}{4}x^4-4\left(3yx^3+3x^4\right)<0$

$\Rightarrow f(t)>0(\forall t)\Rightarrow$ BĐT $^{(1)}$ đúng $\Rightarrow$ BĐT $^{(*)}$ được chứng minh!

Từ đó ta có: $S_a>0$. Tương tự, $S_b>0$, $S_c>0$. $\Rightarrow\sum S_a(b-c)^2\ge 0$. BĐT được chứng minh xong!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Một số phân tích bình phương hay sử dụng :

1) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}$

3) $\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)=\frac{(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}$

4) $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2$

5) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

6) $a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

7) $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$

8) $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

9) $(a+b+c)^3-27abc=\frac{1}{2}(a+b+7c)(a-b)^2+\frac{1}{2}(7a+b+c)(b-c)^2+\frac{1}{2}(a+7b+c)(c-a)^2$

10) $a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)=a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2$

11) $a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)=\sum\frac{1}{2}\left[c^2+(a+b)^2\right](a-b)^2$

12) $(a^2+b^2+c^2)^2-3abc(a+b+c)=\sum\frac{1}{2}\left[3c^2+(a+b)^2\right](a-b)^2$

13) $9(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)^3=\sum(c+4a+4b)(a-b)^2$

14) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\sum\frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$

15) $3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2+(a+b)(a-b)^2$

Bạn đọc muốn nâng cao kĩ năng phân tích bình phương hãy làm bài tập nhỏ sau : Sưu tầm và giải 15 bài toán bất đẳng thức đối xứng 3 biến bằng kĩ thuật phân tích bình phương này .

224

Cho các số dương x,y,z thỏa mãn: $xy+yz+zx=3$. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 1$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz dạng Engle ta có:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x^3+8}+\sqrt{y^3+8}+\sqrt{z^3+8}}$$

Ta sẽ chứng minh $(x+y+z)^2\ge\sqrt{x^3+8}+\sqrt{y^3+8}+\sqrt{z^3+8}$

Ta có:

$$\sum\sqrt{x^3+8}=\sum\sqrt{x+2}.\sqrt{x^2-2x+4}\le\sum\frac{x^2-2x+4+x+2}{2}=\sum\frac{x^2-x+6}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x+y+z)+9$$

Ta có:

$$(x+y+z)^2 \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x+y+z)+9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)+\frac{1}{2}(x+y+z)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 6$$

Ta dễ có điều này vì $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ và $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

34

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn: $a^k+b^k+c^k\le 3\,(k\ge 2)$. Tìm GTLN:

$$K=\frac{a}{b^2+5}+\frac{b}{c^2+5}+\frac{c}{a^2+5}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\frac{a}{b^2+5}=\frac{a}{b^2+1+4}\le\frac{a}{2b+4}$

Tương tự, ta có: $\frac{b}{c^2+5}\le\frac{cb}{2c+4}$; $\frac{c}{a^2+5}\le\frac{c}{2a+4}$

Cộng vế theo vế các BĐT ta có: $\frac{a}{b^2+5}+\frac{b}{c^2+5}+\frac{c}{a^2+5}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\right)$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$. Thật vậy:

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow a(a+2)(c+2)+b(b+2)(a+2)+c(c+2)(b+2)\le(a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow(ab^2+bc^2+ca^2-abc)+2(a^2+b^2+c^2)\le 8$$

Từ $a^k+b^k+c^k\le 3(k\ge 2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 3$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2-abc\le 2$ với mọi a,b,c dương có: $a^2+b^2+c^2\le 3$

Thật vậy: Một kinh nghiệm là khi gặp chứng minh BĐT dạng $ab^2+bc^2+ca^2+kabc\le p$ ta thường chuyển vị:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$ suy ra:

$$ab^2+bc^2+ca^2-abc=b(a^2+c^2)+a(b-a)(b-c)\le b(a^2+c^2)$$

Mà $b(a^2+c^2)\le\frac{1}{2}(b^2+1)(a^2+c^2)\le\frac{1}{8}(b^2+1+a^2+c^2)\le\frac{1}{2}$ (sử dụng BĐT $(x+y)^2\ge 4xy$)

Suy ra đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy $P\max=\frac{1}{2}$ tại $a=b=c=1$.

34

Giả sử x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}-\frac{1}{x+y+z}$$

Lời giải

"Định hướng bài toán này sẽ đưa về sử dụng xét sự biến thiên hàm số hoặc khử hết $-\frac{1}{x+y+z}$. Vậy ta sẽ đánh giá tổng 3 phân thức đầu với $\frac{1}{x+y+z}$"

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz ta có:

$$\left(\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}\right)(y+z+x)\ge\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\right)^2$$

$$= 6+2\left(\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+\sqrt{y^2+1}\sqrt{z^2+1}+\sqrt{z^2+1}\sqrt{x^2+1}\right)$$

Lại có: Theo BĐT Cauchy Schwarz: $\sqrt{(x^2+1)(1+y^2)} \ge x+y$. Tương tự cho 2 căn thức còn lại, cộng vế theo vế các BĐT suy ra

$$\left(\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x}\right)(y+z+x) \ge 6+4(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{z}+\frac{z^2+1}{x} \ge 4+\frac{6}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow P \ge 4+\frac{5}{x+y+z} \ge 4+\frac{5}{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{17}{3}$$

Đẳng thứ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Vậy $P\min = \frac{17}{3}$ tại $x=y=z=1$.

35

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{a^2+abc}+\frac{1}{b^2+abc}+\frac{1}{2c\sqrt{ab}} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $3 = a+b+c \ge \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \le 1$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$P \ge \frac{1}{a^2+abc}+\frac{1}{b^2+abc}+\frac{1}{c^2+abc} \ge \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1} \ge$$

$$\ge = \left(1-\frac{a^2}{a^2+1}\right)+\left(1-\frac{b^2}{b^2+1}\right)+\left(1-\frac{c^2}{c^2+1}\right) = \left(1-\frac{a^2}{2a}\right)+\left(1-\frac{b^2}{2b}\right)+\left(1-\frac{c^2}{2c}\right)$$

$$= 3-\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2} \text{ ta có đpcm!}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

37

Cho a,b,c không âm. Chứng minh: $(a^2+b^2+c^2)^2 + abc(a+b+c) \ge 4abc\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$

Lời giải

Chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=1$. BĐT trên trở thành:

$1+abc(a+b+c) \ge 4abc\sqrt{3} \Leftrightarrow a+b+c+\frac{1}{abc} \ge 4\sqrt{3}$

Tới đây sử dụng điểm rơi trong BĐT Cauchy thì bài toán được giải quyết!

38

Cho x, y, z là các sô thực dương thỏa mãn: $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{9}{4}$$

Lời giải

Với giả thiết như thế và BĐT không rõ mối tương quan như thế ta thường đổi biến:

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}\Rightarrow ab+bc+ca=1$. BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{4}$$

Ta có: $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le a\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)$

Tương tự ta có: $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{2b}{\sqrt{4(b+c)(b+a)}}\le b\left(\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{a+b}\right)$

Và $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le c\left(\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{c+a}\right)$

Suy ra $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le a\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)+b\left(\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{a+b}\right)+c\left(\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{9}{4}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{\sqrt{15}}{7};\ y=z=\sqrt{15}$

39

Cho a,b,c là các số thực dương.Chứng minh rằng:

$$\frac{4a}{4a+4b+c}+\frac{4b}{4b+4c+a}+\frac{4c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}$$

Lời giải

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có:

BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{a}{3-c}+\frac{b}{3-a}+\frac{c}{3-b}\le\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3a(3-a)(3-b)+3b(3-b)(3-c)+3c(3-c)(3-a)\le(3-a)(3-b)(3-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\le 4.$$

Kinh nghiệm là khi BĐT có chứa biểu thức dạng $a^2b+b^2c+c^2a+kabc$, ta chuyển vị:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Suy ra $c(a-b)(b-c)\ge 0$

Ta chỉ cần chứng minh: $a^2b+bc^2+2abc\le 4$

BĐT $\Leftrightarrow b(a+c)^2\le 4\Leftrightarrow b(3-b)^2\le 4\Leftrightarrow(b-4)(b-1)^2\le 4$ luôn đúng vì $b<3$

BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

39

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=k(k\ge 0)$. Tìm GTLN của:

$$P=a^2b+b^2c+c^2a-abc$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$.

Ta có:

$$c(b-a)(b-c)\le 0\Rightarrow b^2c+c^2a\le abc+bc^2\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a-abc\le a^2b+bc^2$$

$$=b\left(a^2+c^2\right)=b\left(k-b^2\right)=\frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}-\left(x-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2\left(x+2\sqrt{\frac{k}{3}}\right)\le\frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{\frac{k}{3}}$ hoặc $a=0;b=\sqrt{\frac{2k}{3}};c=\sqrt{\frac{k}{3}}$ và các hoán vị của nó.

Vậy $P\max=\frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}$

39

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\frac{4}{27}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$.

Ta có:

$$c(b-a)(b-c)\le 0\Rightarrow b^2c+c^2a\le abc+bc^2\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\le abc+a^2b+bc^2=$$

$$=b\left(a^2+c^2+ac\right)\le b(a+c)^2=b(1-b)^2=\frac{1}{2}.2b.(1-b)(1-b)$$

$$\le\frac{1}{2}.\frac{(2b+1-b+1-b)^3}{27}=\frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=0;a=b=\frac{1}{2}$

Vậy BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và các hoán vị của nó

39

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Chuẩn hóa $a+b+c=1$

BĐT trở thành: $P=\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz ta có:

$$\left(\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\right)\left[(c+a)+(a+b)+(b+c)\right]\ge\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2P.(a+b+c)\ge\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2$$

Lại có:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2\ge 3\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}.\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)=3(a+b+c)$$

Suy ra $P\ge\frac{3}{2}$ đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Tại sao bạn ghét Toán ?

(Nguyễn Đình Thành Công, Đại Học Ngoại Thương Hà Nội)

Dạo này nghe đồn trên Facebook có nhiều hội lắm. Kiểu như: "Hội phát cuồng..." hay "hội chém gió...". Tôi cũng mon men lên tìm kiếm cái hội nào đó có liên quan đến Toán học xem sao. Kết quả không mấy bất ngờ, cái hội duy nhất tôi tìm được là: "Hội những người không thích học Toán":(Nói không bất ngờ là vì tôi là ...thầy dạy Toán, nên hình như biết học sinh bây giờ ghét Toán như thế nào. Điều an ủi duy nhất là mấy thành viên sau khi tham gia cái hội ấy đều có cùng suy nghĩ: *"làm quái j với cái hội này đây nhể?"*.

Sau khi điên cuồng tìm kiếm thì cuối cùng cũng tìm được một cái hội thích Toán. Hội này chỉ có một thành viên với cái tên rất thành thật: " Hội những người thích Toán mà Toán lại không thích họ"...

Tại sao nhiều học sinh lại ghét học Toán? Mình hỏi thử rồi, các em bảo: " Vì không hiểu!". Thật ra nguyên nhân đâu giản đơn thế. Rất nhiều cô gái từng nói với tôi là: "Những chàng trai càng lạnh lùng, khó hiểu thì lại càng cuốn hút". Nhân tiện nói thêm rằng tôi nghe câu nói này từ những cô gái đã từ chối tình cảm của tôi, có lẽ vì tôi nói ...dễ hiểu quá !:D. Vậy thì đâu là lý do chính. Nó đây! Ở lớp học, nếu bạn học kém môn lịch sử bạn vẫn ok. Nhưng nếu bạn dốt Toán, bạn không thể sống sót cho đến khi lết ra khỏi trường của bạn. Nhưng tại sao bạn lại dốt Toán?

Không phải vì bạn không thông minh đâu. Đa phần chúng ta thông minh đủ dùng rồi, và tôi biết rất nhiều người học giỏi toán mà chẳng cần thông minh lắm (và ngược lại). Nếu bạn không kiếm được bạn gái, bạn giải thích rằng vì nhà bạn không giàu và bạn không đẹp trai. Ơ, thế biết bao thằng xấu trai, nhà nghèo vẫn có người yêu đấy thôi (xinh nữa là đằng khác). Vấn đề là ở Niềm Tin! *Bạn phải tin tưởng vào bản thân mình và phấn đấu vì niềm tin đó.* (À mà chỉ cần nể phục mấy anh chàng đó thôi chứ về chuyện này thì tôi còn phải cố gắng nhiều...)

Trở lại câu chuyện học toán của bạn: Là như thế này, một lúc nào đó trong đời (xui nhất là năm lớp 1) bạn gặp một ông Thầy dạy Toán chẳng hiểu gì cả... Mình không có ý trách các Thầy ấy nhưng phải công nhận là không phải ai cũng giảng bài dễ hiểu. Câu chuyện sau đó không khó đoán lắm, bạn không hiểu, không biết làm bài tập, không biết gì hết...Và các Thầy cô không bao giờ đứng trước cả lớp mà nói rằng: *"Tụi em dốt Toán là do Thầy dạy dở"*. Thay vào đó họ sẽ nói: *" Trời ơi! Sao mà dốt thế, đơn giản thế mà cũng không hiểu à?"*

Thêm một điều không may nữa: bạn tin là bạn dốt Toán thiệt. Bạn về nhà trong tâm trạng thất vọng và chia sẻ điều này với ba của bạn. Ba bạn thốt lên: *"Di truyền! Chỉ có thể là di truyền!* Đúng là con của ba, ngày xưa ba cũng dốt Toán lắm."(Thật là một bằng chứng có trọng lượng chứng minh rằng nó đích thị là con mình).
Niềm tin đó lớn dần theo năm tháng cho đến một ngày bạn thậm chí còn không dám cho phép mình giỏi toán vì như thế sẽ phản bội lại niềm tin của chính mình và của...Ba của bạn nữa.

Một lý do quan trọng nữa là ở phương pháp học của bạn. Bạn nào xem phim "Anh hùng xạ điêu" chưa? Quách Tĩnh tư chất ngu muội, đến 7 vị sư phụ võ công cao cường dạy dỗ suốt mười mấy năm mà võ công chẳng ra sao. Đạo sĩ Mã Ngọc của phái Toàn Chân chỉ đến dạy cho cách hít thở lúc đi ngủ, cách học vừa thoải mái vừa phù hợp mà chỉ sau 2 năm nội công đã hơn 7 vị sư phụ của mình. Sau này biết thằng nhỏ nội công cao cường vị đại sư phụ chắc mẩm: "thằng này chắc chắn đã theo học bàng môn tà đạo rồi nên mới tiến bộ nhanh thế!":?

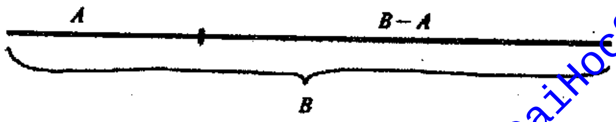
Các bạn tin tôi đi, niềm tin, phương pháp học và một vị sư phụ tốt là tất cả yếu tố để bạn giỏi Toán rồi. Tư chất thông minh chỉ có tác dụng thúc đẩy quá trình đó nhanh hơn mà thôi.

ĐẠO HÀM LÀ GÌ ?

Hà Nội,mùa thu 2014

Một hôm, có một em học sinh chặn tôi lại và bất chợt hỏi: "*Thưa Thầy, rốt cuộc thì đạo hàm là gì ạ?*" Tôi cảm thấy hơi lúng túng bèn trả lời em học sinh đó một cách vô thưởng vô phạt: "*À, trong tiếng hán thì Đạo có nghĩa là con đường, thế nên đạo hàm là khái niệm ám chỉ con đường vận động và biến đổi của hàm số...*". Về nhà nghĩ lại thì thấy trả lời kiểu đó cũng như không trả lời, vậy nên tôi quyết định viết bài này.

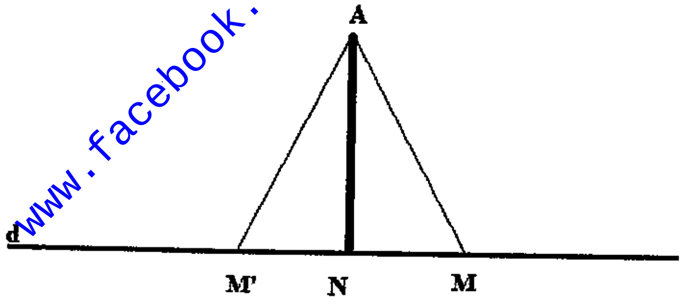
Nếu phải tóm tắt lại lịch sử phát triển hơn 200 năm của đạo hàm chỉ trong một câu thì tôi sẽ trích dẫn lời của tác giả Grabiner: "*Đạo hàm đầu tiên được sử dụng như công cụ, sau đó mới được phát minh, tiếp nữa là được mở rộng và phát triển, cuối cùng mới được định nghĩa.*" Thế nghĩa là thế nào? Nghĩa là trước khi được phát minh ra, người ta đã biết cách sử dụng nó như một công cụ đầy hiệu quả. Để hiểu đầu cua tai nheo thì chúng ta phải quay trở về những năm 1630 để tìm hiểu một phương pháp tìm cực trị mới mẻ mà Fermat đã nghĩ ra: Ông xét bài toán sau: Cho trước một đoạn thẳng, hãy chia nó thành 2 phần sao cho tích của 2 phần này là lớn nhất



Đáp án của bài toán này thì người ta đã biết từ trước (tích lớn nhất khi ta chia đoạn thẳng thành 2 phần bằng nhau) nhưng cách làm của Fermat thì lại rất mới. Gọi chiều dài đoạn ban đầu là B, chiều dài đoạn thứ nhất là A thì chiều dài đoạn thứ hai sẽ là:B-A và tích của 2 phần là: $A(B-A) = AB - A^2$

Nhà toán học Hi Lạp Pappus ở Alexandria trong một tác phẩm của mình có đưa ra một nguyên lý: "Một bài toán nào đó nói chung có 2 nghiệm thì nó sẽ đạt được giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) trong trường hợp chỉ có một nghiệm". Tôi sẽ dành một chút thời gian để minh họa nguyên lí này của Pappus bởi vì đây là một nguyên lí rất thú vị và có ích:

Xét bài toán đơn giản sau: Từ điểm A nằm ngoài đường thẳng d cho trước, hãy xác định điểm N trên d sao cho độ dài đoạn AN là nhỏ nhất?



Bây giờ chúng ta hãy giả vờ khờ khạo không biết điểm N cần tìm ở đâu, lúc này hãy giả sử chúng ta tìm được một điểm M nào đó nằm bên phải thỏa mãn yêu cầu đề bài (tức là làm cho đoạn AM nhỏ nhất). Khi đó nói chung luôn có một điểm M' nằm bên trái để cho AM = AM' cho nên nếu M là nghiệm của bài toán này thì M' cũng phải là nghiệm và bài toán sẽ luôn có 2 nghiệm. Nguyên lý Pappus phát biểu rằng, giá trị cực tiểu sẽ đạt được trong trường hợp chỉ có một nghiệm, mà muốn vậy thì $M \equiv M'$. Điều này chỉ xảy ra khi M chính là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống d và đây cũng chính là đáp án của bài toán này. Ví dụ này mặc dù khá tầm thường nhưng nguyên lí của Pappus thì lại rất hữu ích trong nhiều trường hợp tìm cực trị khác nhau. Nào bây giờ hãy trở lại với Fermat:

Ông giả sử rằng bài toán trên còn có thêm một đáp số thứ hai nữa (tức là có một cách chia khác để tích hai đoạn lớn nhất), với đáp số thứ hai này chúng ta sẽ gọi đoạn thứ nhất là $A+E$. Khi đó đoạn còn lại là: $B-A-E$. Tích của chúng lúc này bằng: $AB-A^2-2AE+BE-E^2$.

Bởi vì giá trị lớn nhất phải là duy nhất cho nên hai đáp số trên đều phải cho ra tích giống nhau, nghĩa là: $AB-A^2-2AE+BE-E^2=AB-A^2 \Leftrightarrow 2AE+E^2=BE$.
Rút gọn 2 vế cho E ta được: $2A+E=B$

Mặt khác theo nguyên lý Pappus thì 2 nghiệm này trong trường hợp đạt giá trị lớn nhất phải trở nên bằng nhau nên nói chung E không hề tồn tại. Thế là Fermat cho E = 0, từ đó ông thu được kết quả $A=\frac{B}{2}$, mà đây cũng chính là đáp số của bài toán trên. Cách làm của Fermat có cái gì đó vừa độc đáo vừa kì quái, ông giả sử rằng bài toán có 2 nghiệm và chúng khác nhau một lượng E. Lúc đầu ông xem E khác 0 và rút gọn E ở hai vế, sau đó ông ta vận dụng nguyên lí Pappus và nói rằng muốn đạt được cực trị thì nói chung E không nên tồn tại và thế là cho E = 0 cuối cùng lại thu được đáp số chính xác. Nếu bạn thấy cách làm này thật quái lạ thì bạn giống với đa số các nhà toán học thời kì đó, còn với thì hiện tại khi mà chúng ta đã học về đạo hàm tôi sẽ chỉ rõ để các bạn hiểu được rốt cuộc thì Fermat đã làm cái gì để giải được bài toán đó.

Bài toán mà Fermat giải là xác định A để hàm số $f(A)$ lớn nhất, và việc Fermat xem $f(A+E)=f(A)$ $\Leftrightarrow f(A+E)-f(A)=0$ sau đó rút gọn biểu thức cho E rồi cho $E=0$ nếu nói theo ngôn ngữ ngày nay là ông đã sử dụng đặc trưng sau đây của hàm số tại điểm cực trị của nó:

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0 \Leftrightarrow f'(A)=0$$

Nếu bạn đã học lớp 12 thì chắc đã được nghe đến định lí Fermat về điều kiện cần để hàm số đạt cực trị rồi chứ. Vâng, chính nó đấy! Nhưng vào thời điểm này Fermat chưa biết đạo hàm là gì đâu, dù vậy có một sự kiện lý thú là Fermat đã ứng dụng phương pháp này vào các bài toán vật lí và thu được những kết quả rất phù hợp. Cụ thể ông đã áp dụng trong quang học: Fermat phát biểu một nguyên lý về cách "hành xử" của ánh sáng (nguyên lý tác dụng tối thiểu): "Ánh sáng luôn đi theo con đường nhanh nhất". Theo nguyên lý này và khảo sát đường đi của ánh sáng ngang qua bề mặt phân cách của hai môi trường trong suốt đồng tính ông đã tìm con đường nhanh nhất của ánh sáng (bằng phương pháp mới ở trên), chính là con đường tuân theo định luật Snell về khúc xạ (vốn đã tìm ra trước đó bằng thực nghiệm.
Giai đoạn tiếp theo là thời điểm đạo hàm được phát minh. Đạo hàm ra đời lấy cảm hứng từ hai nguồn động lực chính. Động lực này đến từ nhu cầu phải giải quyết hai bài toán quan trong trong hai lĩnh vực khác nhau. Một đến từ hình học đó là bài toán xác định tiếp tuyến của đường cong và một đến từ vật lí là bài toán xác định vận tốc tức thời của chất điểm. Cùng tìm hiểu nhé...

Nếu các bạn đã học đạo hàm rồi thì sẽ thấy nó được định nghĩa như sau:

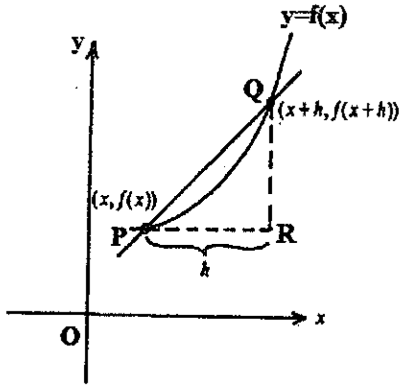
Đạo hàm của hàm $y=f(x)$ tại x_0 được xác định bằng giới hạn: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Và nếu bạn đặt: $h=x-x_0$ thì $x=x_0+h$ và đạo hàm được viết lại ở một dạng khác tương đương:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Vấn đề là tại sao nó lại được định nghĩa như thế? Tôi sẽ trả lời các bạn bằng cách chỉ ra cách mà người ta tìm ra để xác định được tiếp tuyến của một đường cong.

Xét đường cong có phương trình $y=f(x)$, đầu tiên chúng ta sẽ vẽ một đường thẳng cắt ngang đường cong này tại 2 điểm P và Q:



Chắc các bạn cũng biết là để viết phương trình một đường thẳng chúng ta cần xác định được hệ số góc của nó. Kiến thức lớp 7 nói rằng hệ số góc của đường thẳng là tan của góc tạo bởi đường thẳng đó với trục hoành Ox. Chẳng hạn, đối với đường thẳng PQ ở trên thì hệ số góc của nó sẽ là:

$$\tan\widehat{QPR} = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Bây giờ chẳng hạn ta muốn xác định tiếp tuyến của đường cong tại điểm P. Làm thế nào để đường thẳng PQ biến thành tiếp tuyến đây, các nhà toán học đã nghĩ ra một phương án thú vị: Họ cho điểm Q tiến dần về điểm P, lúc đó thì rõ ràng đường thẳng PQ từ chỗ cắt đường cong tại 2 điểm P, Q nay sẽ chỉ còn cắt tại một điểm P và thế là "trở thành" tiếp tuyến còn gì:). Mọi người có đồng ý là khi $Q \to P$ đồng nghĩa với việc $h \to 0$ không nào. Như vậy bằng cách cho $h \to 0$ trong công thức tính hệ số góc của đường PQ ở trên chúng ta sẽ thu được hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm. Ngặt nỗi, thời điểm đó người ta chưa phát minh ra lý thuyết về giới hạn (sau này đó là công lao của Cauchy). Và thế là mọi người bèn bắt chước theo cách mà Fermat đã làm: đầu tiên họ cứ xem h là khác 0 rồi tìm cách rút gọn nó đi ở tử và mẫu, sau đó rồi thì xem h bằng 0 rồi triệt tiêu nó đi...

Cách giải quyết kì lạ này lại thu được những thành công đến không ngờ, người ta đã giải quyết được bài toán xác định tiếp tuyến "khó nhằn" trước đó. Thế nhưng rất nhiều người khác gào lên bất mãn, thế là thế quái nào, sao lúc đầu xem h là khác 0 (để thoải mái rút gọn) rồi sau đó lại cho nó bằng 0, vậy rút cuộc nó là cái loại gì? Những người phát minh ra phương pháp này gọi h là "vô cùng bé", có người còn đặt cho nó một cái tên khá là ma quái: "bóng ma của những đại lượng đã mất".

Câu hỏi này đã ám ảnh giới toán học rất lâu, mãi cho tới sau này khi Cauchy xây dựng hoàn chỉnh lý thuyết giới hạn thì bức màn bí ẩn mới được vén lên rõ ràng. Để tìm hệ số góc của tiếp tuyến: việc chúng ta cần làm là cho h tiến dần về 0 (tiến dần về nghĩa là càng ngày càng gần 0 nhưng không bao giờ bằng 0 nhé) và quan sát xem tỉ số $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ đang tiến dần về giá trị nào. Cái giá trị mà tỉ số này đang "tiến về" chính là thứ chúng ta muốn tìm. Tất nhiên là để tìm giới hạn này cần những kĩ thuật phù hợp, và cách làm của Fermat ở một chừng mực nào đó có thể xem là "xài được".Newton và Leibniz được lịch sử công nhận là độc lập với nhau phát minh ra giải tích và khái niệm đạo hàm nói riêng. Leibniz xuất phát từ việc giải quyết bài toán tiếp tuyến đã đưa ra khái niệm "vi phân" và xây dựng đạo hàm theo khái niệm này (thật tiếc vì thời lượng bài viết không cho phép tôi nói chi tiết thêm về cách xây dựng của Leibniz). Trong khi đó Newton phát minh ra đạo hàm trong một hoàn cảnh rất đặc thù: ông phát minh ra giải tích chỉ như sáng tạo ra công cụ thích hợp để phục vụ cho các tính toán trong một lý thuyết vĩ đại mà sau này đã đặt nền móng cho cơ học cổ điển: Thuyết vạn vật hấp dẫn.

Đạo hàm được Newton phát minh ra giúp ông giải quyết được bài toán xác định vận tốc, gia tốc chất điểm. Và ở đây ông đã cho đạo hàm một ý nghĩa tổng quát và mang trong mình một sức mạnh to lớn không thể tưởng tượng: *Đạo hàm cho chúng ta biết được tốc độ biến thiên (tốc độ thay đổi) của một hàm số.* Các bạn có biết được điều này quan trọng thế nào không? Với đạo hàm, bất cứ ở đâu có sự thay đổi, ở đó chúng ta sẽ biết được nó thay đổi như thế nào: liệu đại lượng đó đang tăng hay đang giảm hay đang không thay đổi, nếu là đang tăng vậy tăng nhanh hay tăng chậm…

Vận tốc đặc trưng cho sự thay đổi của quãng đường đi được, gia tốc là đặc trưng cho sự thay đổi của vận tốc theo thời gian vậy thì có gì là khó hiểu không khi trong chương trình vật lí người ta nói với các bạn rằng: vận tốc là đạo hàm của hàm quãng đường theo thời gian, còn gia tốc là đạo hàm của hàm vận tốc.

Nhiều bạn chắc còn muốn hỏi thêm vì sao đạo hàm là có được ý nghĩa thú vị này? Thật ra thì không khó hiểu lắm đâu: Chẳng hạn với một hàm số bất kì $y = f(x)$: Khi có sự thay đổi xảy ra, cụ thể là: x_0 tăng lên một lượng h tức là trở thành $x_0 + h$. Và hàm số sẽ thay đổi tương ứng từ $f(x_0)$ thành $f(x_0 + h)$. Tức là hàm số y đã thay đổi một lượng là $f(x_0 + h) - f(x_0)$ tương ứng với khi biến x tăng một lượng là h. Như vậy tốc độ thay đổi của y theo x sẽ là tỉ số quen thuộc: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Tất nhiên tỉ số này chỉ mới cho ta biết tốc độ thay đổi trung bình của hàm số khi biến x tăng từ $x_0 \to x_0 + h$ mà thôi. Việc cho h tiến dần tới 0 sẽ giúp ta xác định được tốc độ biến thiên tức thời ngay tại thời điểm x_0. Và đó cũng chính là đạo hàm!

Thật là nhân văn phải không các bạn, mỗi khi gặp những trắc trở khó khăn biến động lớn lao trong cuộc đời làm chúng ta mất đi niềm tin vào cuộc sống. Nhiều người đã tìm được nguồn an ủi, hi vọng và sự tin tưởng vào "đạo", vào những đức tin chúng ta tín ngưỡng (riêng bản thân tôi rất có cảm tình với đạo phật). Cũng như vậy, mỗi khi nhà toán học phải đối diện với các hàm số đa dạng và phức tạp. Lo sợ trước sự biến thiên, thay đổi khó lường của chúng… họ tìm được niềm tin vững chắc bởi vì "đạo hàm" chưa bao giờ làm họ thất vọng.

Còn với mọi người trong chúng ta, nếu bạn là nhà kinh tế và muốn biết tốc độ tăng trưởng kinh tế nhằm đưa ra những quyết định đầu tư chứng khoán đúng đắn. Nếu bạn là nhà hoặc định chiến lược và muốn có những thông tin liên quan đến tốc độ gia tăng dân số ở từng vùng miền. Nếu bạn là nhà hóa học và muốn xác định được tốc độ phản ứng hóa học nào đó, hay nhà vật lí muốn tính toán vận tốc, gia tốc của một chuyển động… Đạo hàm sẽ là thứ mà chúng ta cần, rất đơn giản đầu tiên bạn cần có hàm số mô tả đại lượng đang được quan tâm, và sau đó chỉ cần đạo hàm nó. Còn tính đạo hàm như thế nào thì Sgk đã chỉ dẫn rõ ràng và chi tiết.

Để kết thúc câu chuyện tôi sẽ kể cho các bạn nghe về sự thật đằng sau việc công bố công trình vĩ đại của Newton: Newton có một thói quen kì lạ, ông không thích công bố những công trình phát minh của mình mặc dù ông biết rõ sự lớn lao của nó. Một hôm nhà thiên văn học Edmund Halley đến thăm Newton (lúc bấy giờ là viện sĩ nổi tiếng của viện hàn lâm khoa học hoàng gia Anh) để khoe với ông về một công trình tâm đắc của mình. Cụ thể là sau một thời gian miệt mài quan sát thiên văn Halley đã phát hiện ra được một sao chổi rất đặc biệt và thậm chí còn dự đoán được chu kì quỹ đạo của nó, ông tính được rằng 75 năm sau nó sẽ xuất hiện thêm lần nữa. Trái với sự chờ mong của Halley, Newton không thốt lên những lời trầm trồ khen ngợi, thay vào đó ông tạt cho Halley một gáo nước lạnh ngắt: Newton nói mấy cái phát hiện linh tinh này ông đã tìm ra từ mấy năm trước. Harley vô cùng cằm phẫn, cho rằng Newton muốn nuốt trôi công trình của mình nên ông quyết định sẽ "ăn thua đủ" nếu Newton không giải thích rõ ràng chuyện này.

Hết cách Newton đành phải tiết lộ cho Halley biết những phát minh của mình đã giúp ông tính toán được rất nhiều các quỹ đạo của những thiên thể khác nhau. Halley đòi xem chúng, Newton dẫn ống ta đến một thùng đựng đầy giấy lộn nhưng đã không tìm thấy mấy tờ giấy có ghi lại tính toán về quỹ đạo sao chổi Halley. (Có lẽ mấy tờ giấy đó đã cuốn theo những dòng nước vội vã sau một cơn đau bụng bất ngờ của Newton chăng?) Newton đành phải giải thích rõ ràng, nào là ông ta đã phát minh ra vạn vật tương tác hút nhau như thế nào, rồi thì phát minh ra giải tích giúp ông ta tính toán quỹ đạo ra sao. Biết lực tương tác sẽ xác định được gia tốc (định luật 2 newton), có gia tốc thì làm phép toán ngược với đạo hàm (nguyên hàm – tích phân) sẽ giúp ông tìm được vận tốc. Có vận tốc lại tìm được hàm quãng đường từ đó mà biết quỹ đạo… Quá kinh ngạc với phát minh vĩ đại này nên Halley đã tìm mọi biện pháp từ dụ dỗ tới cứng rắn buộc Newton phải công bố. Newton đã dành 2 năm để viết là công trình này và xuất bản trong cuốn sách nổi tiếng: "Những nguyên lý toán học của triết học tự nhiên" (cái tên thấy không liên quan gì). Nghe đồn rằng Newton cố tình viết thật khó hiểu đến nỗi không có tới 10 người thời điểm đó đọc hiểu được cuốn sách trên.

Việc công bố công trình của mình một cách trễ nãi đã khiến giới khoa học rơi vào một cuộc tranh luận đáng tiếc. Về thực chất, Newton phát minh ra đạo hàm trước nhưng ông lại công bố sau Leibniz. Mặc dù hai nhà toán học này độc lập với nhau xây dựng nên cơ sở của giải tích, tuy nhiên những người bạn của họ lại cho rằng người này ăn cắp ý tưởng của người kia và thế là có một cuộc cãi vã đầy xấu hổ trong lịch sử toán học…

Hình như bài viết đã quá dài rồi phải không? Tôi không chắc có nhiều độc giả đủ kiên nhẫn đọc đến khi tôi viết những dòng cuối cùng này. Dù sao nếu quả thật có ai đó như vậy, tôi thành thật gửi lời cảm ơn vì các bạn đã dành nhiều thời gian cho những chia sẻ của tôi. Chúc mọi người học toán thật thú vị và vui vẻ:)

Học toán như thế nào – Jo Boaler

Lược dịch theo bài giảng ở Đại Học Standford bởi Trần Quang Nghĩa, Nguyễn Thành Công

Phần 1: Giới thiệu

Chào mừng các bạn đến với khóa học đầu tiên có tên Học Toán Như Thế Nào.
Khóa học này dành riêng cho giáo viên, phụ huynh, người quản trị, và bất cứ ai đang dạy hay kèm cặp các em học toán.

Tại thời điểm này đã có 20,000 ngư ời đặng ký học giáo trình này trên Coursera. Có thể có một số bạn biết đến tôi hay đã từng đọc sách của tôi. Và cũng không ít người không biết tôi là ai.

Vâng, tôi là giáo sư môn giáo dục toán học tại Đại Học Standford. Nhưng trước khi là giáo sư tôi đã từng dạy toán ở nhiều cấp khác nhau.Chẳng hạn, ở Anhj, tôi đã dạy các học sinh trong độ tuổi từ 11 đến 18. Ở Mỹ tôi đã dạy toán từ lớp 7 đến lớp 8, và ở Stanford cho những sinh vien sau đại học. Như vậy là rất nhiều cấp độ.

Như đã nói, khóa học này dành cho giáo viên và phụ huynh, đó là bởi vì đây không phải là chỉ những kỹ thuật dạy với đầy đủ chi tiết, mặc dù cũng có nêu m ột số kỹ thuật.

Nhưng thật ra đây là một giáo trình phần nào có tính chất thực nghiệm với một số ý tưởng đóng góp của bản thân tôi.

Ta biết việc dạy họ là một quá trình thật phức tạp và trí tuệ, dù cho phần đông thường không nghĩ như th ế. Thử tưởng tượng bạn đang ở giữa một buổi thảo luận tại lớp và có một học sinh hỏi bạn một câu, và bạn cần phải phản hồi bằng một lời phán đoán hay gợi ý sáng tạo bằng một câu hỏi khác. Trong lúc đó,bạn phải nghe những gì các học sinh đã nói và đánh giá những tương tác của họ theo quỹ đạo toán học đang hình thành và phát triển, và tìm ra điều gì có thể giúp họ hiểu được vấn đề và đưa ra những gợi ý hầu giúp họ giải được theo hướng đi của họ chứ không phải theo hướng của mình.

Trong tích tắc đó bạn phải nhận vào những ý kiến và phác thảo từ học sinh và phải đưa ra những quyết định và phản hồi bằng một câu hỏi gợi ý và đánh giá. Đó là một công việc rất khó khăn và việc dạy học là một trong những công việc khó nhọc nhất trên thế giới.

Nó cũng là một trong những công việc quan trọng nhất. Và giờ đây ta biết những giây phút ngắn ngủi trao đổi với học trò và những thông điệp gởi đến họ là điều có thể tạo nên sự khác biệt.

Nhưng trước tiên, tôi muốn chúng ta nhìn lại một số dữ liệu mà tôi đã biết được trong năm vừa qua, làm tội khá sốc.

Thông tin đó là hiện giờ ta có 50% số sinh viên thuộc hệ cao đẳng 2 năm, và 70% trong số đó phải học lại môn toán. Cơ bản là học lại kiến thức toán ở trung học. Và chỉ một trong mười sinh viên hoàn tất được những khóa phụ đạo này. 90% còn lại bỏ hẳn toán và bỏ đại học không qua được ải toán học.

Dữ liệu này tôi nghĩ thật là đáng giật mình, báo cho biết một vấn nạn đang lan rộng và trầm trọng. Và tôi muốn các bạn nghĩ xem nguyên do ch ủ yếu của thực trạng này là từ đâu?

Có phải do phương pháp dạy toán ở trường phổ thông và đại học?

Hay có phải do học viên thiếu kiến thức nền tảng toán học khiến họ trượt dài trên con đường toán học?

Hay có phải do học viên không có khả năng học toán ở mức độ cao?

Hay do đại số là một vật cản không thể vượt qua?

Bạn hãy chọn một hay hai nguyên nhân mà theo ý bạn là nguyên nhân chính của thực trạng tồi tệ này.

Tôi đã trình bày với các bạn thực trạng đáng buồn của các sinh viên cao đẳng. Nhưng sự việc không dừng lại ở đó. Đối với những học sinh không đi vào đại học thực trạng còn tồi tệ hơn. Và những sinh viên hệ đại học bốn năm, theo tôi được biết, cũng có nhiều người khốn khổ vì môn toán. Tôi phát hành quyển sách nói về vấn đề này cách đây vài năm, với ấn bản ở Mỹ và Anh. Nhờ đó tôi có dịp di đến nhiều nơi và gặp một số lớn những người hoạt động trong ngành giáo dục có trình độ chuyên môn cao.

Nhiều phụ nữ trong số họ rất sợ toán học. Họ không ngại cho tôi thấy mức độ nghiêm trọng của các phản ứng tiêu cực của họ đối với toán học. Họ chia sẻ với tôi những câu chuyện mất mát của họ khi đến với toán trong những năm miệt mài ở đại học. Trớ trêu phải không khi giới thiệu mình là nhà giáo dục toán học mà chính mình lại tuyên bố rằng toán học là một ác mộng cho rất nhiều người.

Những người không làm công tác khoa học dốt và sợ toán đã đành. Mà những nhà khoa học có địa vị và đoạt nhiều giải thưởng cũng ngại khi đụng đến toán học.

Ý kiến của phần đông đều cho rằng ngườ nào làm toán tốt là người ấy thông minh, vì thế nếu bạn không thể làm toán tốt thì có nghĩa là bạn không thông minh.

Một số thành kiến tác hại sau đây đối với việc học toán:

1. Toán là môn chỉ dành riêng cho một loại người có năng khiếu. Nếu bạn không được trời ban cho năng khiếu ấy thì dù học chăm chỉ thế nào bạn cũng không thể nào khá hơn được.

2. Con trai lúc nào cũng làm toán tốt hơn con gái.

3. Dân Âu châu da trắng có khả năng tốt hơn so với dân da đen, châu Phi hay Mỹ La tinh . . .

4. Người Á châu, nhất là Nhật bản, thường giỏi toán. Do đó các học sinh Á châu lúc nào cũng chịu một áp lực lớn phải học giỏi toán cho xứng với thành kiến huyền thoại đó và làm vui lòng cha mẹ.

Những thành kiến rập khuôn này thật nguy hiểm, chúng đã được chứng minh trong các thí nghiệm tâm lý là sai lầm nghiêm trọng. Nó ngăn trở nỗ lực và làm nản lòng những người học toán và làm thui chột sáng tạo cũng như nhiệt tình của những người dạy toán về hiệu quả công việc của họ.Do đó việc đầu tiên cho những người dạy toán là đã phá những thành kiến tác hại và tiêu cực này để giúp những học sinh yếu toán thêm tin tưởng là mọi người đều có thể giỏi toán nếu được dạy hay học đúng cách.

Chúng ta cần nhà giáo, phụ huynh, các nhà quản lý trường học lên tiếng chống lại những thành kiến hủ lậu này để đem toán học trở về với toán học thực sự, cái toán học ứng dụng được và cái toán học bang bạc trong thế giới thực tại. Tất cả chúng ta có thể làm được điều ấy nếu chúng ta hợp tác. Mọi người đều có vai trò trong công việc chung quan trọng này.

Phần 2

Phần đông đều tin rằng giỏi toán hay không là do trời sinh. Và một trong nhữngthách thức lớn nhất cho giáo viên và phụ huynh là phá bỏ huyền thoại này, cho rằng chỉ có một số nhỏ học sinh là có thể giỏi toán mà thôi.

Các học sinh cũng thư ờng nghĩ thế. Nhưng khi tôi đưa ra những minh chứng mà tôi sắp sửa trình bày cho các bạn thì các em thực sự đã thay đ ổi lộ trình học tập của mình. Thế thì trước tiên, tại sao các tư tưởng chỉ có một số ít học sinh có thể giỏi toán lại phổ biến đến như vậy, nhất là ở các nước Anh và Mỹ và các nước phương Tây.

Trên TV, hàng ngày các học sinh bị dội bom bằng những thước phim trong đó các học sinh đều than thở, dò đầu bứt tay và dẩy nẩy khi cha mẹ bắt làm bài tập toán ở nhà. Thế là thành kiến cho rằng toán là khó đã hình thành nếp suy nghĩ hằn sâu trong trí não của các bé.

Hãy nhìn một vài phát hiện gần đây về bộ não con người. Và phát hiện chủ yếu là sự mềm dẻo của bộ não. Không như một số người thường nghĩ người này có năng khiếu học toán hay một môn nào đó và người kia thì không, thật ra sự phát triển của bộ não thật rất ấn tượng. Giờ đây ta biết rằng sự mềm dẽo của bộ não nằm trong năng lực thay đổi và tái tạo kéo dài đến suốt đời.

Trong những năm gần đây, có nhiều minh chứng đáng kinh ngạc cho thấy khả năng tái tạo những nơ-rôn thần kinh mới và các kết nối mới. Khi hoạt động học tập xảy ra, khớp thần kinh bắt đầu phát xung động. Các dòng điện phát động và tạo ra những nơ-rôn và điểm kết nối mới, và lộ trình của khớp thần kinh giống như những vết chân trên cát. Chúng chỉ trở thành con đường hằn sâu nếu được đi lại nhiều lần.

Còn nếu không, chúng sẽ mờ dần và biến mất. Bộ não rất linh hoạt và thay đổi từng phút một. Nó mất đi và tạo lại những kết nối một cách đáng phấn khởi.

Tôi lấy ví dụ về nghề tài xế taxi ở thủ đô Luân Đôn. Mọi tài xế ở đây phải thuộc 320 tuyến đường giúp họ nhớ và học đến 25.000 đường phố và 20. 000 dấu ấn và địa điểm quan trọng trong bán kính 6 dặm chung quanh Charing Crossing ở Luân Đôn. Việc này vô cùng phức tạp, và họ phải qua được bài kiểm tra được gọi là Kiến Thức.

Mọi tài xế taxi đen phải qua được bài kiểm tra Kiến Thức này. Phải cần đến hai đ ến bốn năm học tập để có thể qua được Ki ến Thức Toàn Luân Đôn.Và một khi bạn qua được, bạn có thể làm việc ở bất kỳ đâu trong thành phố Luân Đôn.

Các nhà nghiên cứu nhận thấy rằng trong thời gian từ khi các bác tài bắt đầu học tập và kết thúc khóa, bộ phận hippocampus của họ (cấu trúc nằm bên trong thuỳ thái dương của não bộ) đã phát triển lớn hơn. Khi họ về hưu hoặc thôi làm nghề lái xe, bộ phận này thoái hóa và teo hẳn lại. Họ cũng thấy rằng khi so sánh bộ não của c ánh tài xế taxi với tài xế xe buýt Luân Đôn vốn không cần học nhiều tuyến đường phức tạp, thì hippocampus của tài xế taxi lớn hơn của tài xế xe buýt. Chính quá trình học tập và sử dụng thông tin về mạng lưới giao thông phức tạp để đạt đến kỹ năng lái xe an toàn và hiệu quả này là tác nhân của sự phát triển hippocampus.

Một ví dụ thứ hai về sự phát triển não bộ là câu chuyện của một bé gái chín tuổi mà phân nửa bộ não đã bị cắt bỏ. E m bị chứng động kinh và họ phải cắt bỏ phân nửa não bộ của bé.

Lúc đầu toàn bộ phân nửa bên trái của thân thể bé bị tê liệt, nhưng bé đã làm các bác sĩ vô cùng kinh ngạc khi chỉ trong vài tuần các mối kết nối thần kinh của bé đã sống lại và chỉ trong một thời gian ngắn tất cả chức năng của bé đã phục hồi do sự phát triển nhanh chóng và không tin được của não bộ của em.

Và đây là một ví dụ thứ ba rất thú vị. Các nhà nghiên cứu của Học Viện Sức Khỏa Tâm Trí Quốc Gia tìm thấy rằng sau ba tuần tham gia, ba tuần làm việc khác biệt của những tình nguyện viên tham gia thí nghiệm, các cấu trúc bộ não của họ đã thay đổi.

Vì thế hiện giờ ta có thể kết luận rằng, chỉ trừ một số ít người bị bệnh thiểu năng trí tuệ, thì mọi học sinh đều có thể đạt thành tích cao nhất trong toán học, ở mọi cấp lớp trong thời kỳ trung học. Những quốc gia khác đều tin tưởng vào điều này nên các học sinh của họ đều làm tốt hơn học sinh chúng ta ở Anh và Mỹ. Chẳng hạn Nhật bản.

Thật là mỉa mai trong khi có trẻ phát triển được phân nửa bộ não hay thay đổi bộ não của mình một cách hiệu quả thì chúng ta lại cho rằng những con em chúng ta không thể phát triển một vài nơ-rôn cần thiết để học được đại số.

Các học sinh bước vào lớp toán một số thấy toán thật dễ dàng, một số thấy nó thực sự thử thách, nhưng điều đó không phản ảnh tiềm năng tương lai của chúng. Thật ra các học sinh này đều có những trải nghiệm khác nhau từ khi còn thơ và một số trải nghiệm này đã làm những khớp thần kinh khởi động hay tắt ngấm.

Vì thế trong vai trò là một giáo viên, trách nhiệm chúng ta là cắt đứt quỹ đạo của những học sinh đã không qua những trải nghiệm thử thách, và cung cấp cho mọi học sinh môi trường thử thách và phong phú nhất như có thể.

Nếu bộ não chúng ta có thể thay đổi trong ba tuần, bạn thử nghĩ trong một năm với giáo trình đúng đắn học sinh chúng ta sẽ phát triển đến thế nào.

Vậy thì, nhắc lại, các thí nghiệm cho ta biết một số điều. Thứ nhất mọi đứa trẻ có thể học giỏi toán từ cấp 1 đến cấp 3. Thứ nhì ta được biết về tiềm năng phát triển của bộ não, dù cho các học sinh đang đứng từ thứ bậc nào thì tiềm năng của chúng là rất lớn. Điều thứ ba là mọi quá trình học tập mới đều là m thay đổi năng lực của các bạn. Các giáo viên, các phụ huynh, và nhất là các học sinh cần phải loại bỏ quan niệm cứng nhắc là giỏi toán là bẩm sinh, là không thể thay đổi cũng như bộ não từ lúc sinh ra đến lúc chết là vẫn như cũ, bất di bất dịch, trái ngược với những gì các nhà khoa học đã phát hiện.
Khi Carol Dweck xuất bản quyển sách này năm 2007, nó mau chóng trở thành sách bán chạy nhất, và đã khởi xướng một cuộc cách mạng trong giáo dục.

Tôi chưa từng thấy có cuốn sách nào đã tạo nên một tiếng vang lớn đến vậy, trong đó tác giả báo cáo là có hai nếp suy nghĩ và người ta thuộc một trong hai nhóm. Nhóm thứ nhất gồm những người có nếp suy nghĩ bảo thủ cứng nhắc, tin rằng mọi người sinh ra đều có một vốn thông minh nhất định và do đó bạn không thể thay đổi khả năng làm toán của mình, năng khiếu toán là món quà bẩm sinh. Và nhóm thứ hai có nếp suy nghĩ theo hướng phát triển, tin rằng khả năng toán và sự thông minh phát triển với trải nghiệm.

Hai niềm tin này ảnh hưởng lớn lao đến định hướng học tập. Những người có đầu óc phát triển thường kiên trì, và biết học tập từ những sai lầm, và lấy những thành công của người khác làm nguồn động viên cho mình. Ngược lại những người có đầu óc cứng nhắc không thích thất bại, do đó không muốn bị người ta cho là không thông mi nh và thường tránh những công việc có tính thách đố với bất cứ giá nào. Họ rất sợ thất bại khi chọn những khóa học và nghề nghiệp.

Những học sinh mang một trong hai nếp suy nghĩ tích cực và tiêu cực ngay từ lúc lên ba, và một trong nguyên nhân hình thành là do cha mẹ quá khen con cái mình là thông minh. Mặc dù họ khen với dụng ý tốt, nhưng khi họ cứ mãi khen "Ôi, con mẹ giỏi quá!" chẳng mấy chốc đứa trẻ sẽ nghĩ mình là cực kỳ thông minh, là thần đồng. Nhưng sau đó khi gặp thất bại, các bé sẽ nghĩ là "Ôi, mình không thông minh cho lắm". Do đó điều quan trọng các phụ huynh nên nhớ là không nên khen con em mình mà chỉ khen những gì con em mình làm. Hãy nói chẳng hạn, "Wow, tốt lắm, con đã học được rồi đó", hay "Con đã học làm điều đó tốt lắm."

Quyển sách của Carol cho ta nhiều ý tưởng như vậy. Và như trong cuộc phỏng vấn, bà cho biết những lời khen ban cho bé trong ba năm đầu đời sẽ hình thành nếp nghĩ của đứa trẻ năm năm sau đó, vì thế điều này thực sự quan trọng. Thành ra những lời khen có thể tác động tức thời đến các học sinh. Một trong những nghiên cứu của Carol liên hệ đến 400 học sinh lớp năm, và các em được yêu cầu thực hiện một bài kiểm tra dễ, ngắn, và hầu hết các em đều làm tốt. Sau đó phân nửa các em được khen là thông minh còn phân n ửa còn lại được khen là đã cố gắng nhiều khi làm bài này. Sau đó, các em lại được yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra thứ hai bằng một trong hai cách: hoặc chọn làm một bài kiểm tra tương đối đơn giản hoặc chọn một bài kiểm tra th ử thách hơn nhưng có thể phạm nhiều lỗi hơn. 90% các em được khen ngợi là có cố gắng đều chọn bài kiểm tra khó hơn, t rong khi đa số các em được khen thông minh thì lại chỉ chọn bài kiểm tra dễ.

Do đó ta cần quan sát một số dữ kiện thực sự thú vị về những nếp nghĩ hình thành trong các học sinh.

Hãy nhìn vào đồ thị dưới đây, cho thấy điều gì xảy ra khi học sinh nhận một can thiệp từ bên ngoài. Kết quả là đối với các học sinh lớp 7 suốt bốn tháng học hành giảm cho đến khi có sự can thiệp thì hết giảm sút (đường gấp khúc).

Còn những học sinh không nhận được can thiệp thì vẫn tiếp tục giảm sút. Và chỉ những can thiệp để thay đổi nếp nghĩ mới tạo ra sự thay đổi. Các học sinh trong thí nghiệm đều học cùng một giáo viên với cùng một sách giáo khoa.

Các tác động của nếp suy nghĩ cũng rất công bình. Với sự can thiệp thay đổi của nếp suy nghĩ, các học sinh Mỹ Đa Đen cho thấy sự tiến bộ nhanh nhất về điểm số. Ta cũng nhận thấy rằng nếp suy nghĩ tích cực đã loại bỏ những cách biệt thành tựu giữa nam và nữ. Ngay cả ở mức độ SAT (một chứng chỉ khả năng toán cuối cấp ba) cao nhất, khi mà sự khác biệt giữa khả năng toán của nam và nữ hiện rõ, nhưng nếu chỉ xét các học sinh có đầu óc tích cực, sự khác biệt đã biến mất.

Sở hữu một đầu óc tích cực là điều chúng ta muốn tất cả học sinh và thầy giáo đều phải có.

Thông điệp lớn nhất là trí thông minh có tính linh hoạt. Nhưng các học sinh, giáo viên, trường học, và phụ huynh lại đối xử những người học toán như là những người có đầu óc tương đối cố định.

Hai bài tiếp theo sẽ cung cấp cho bạn những ý tưởng dạy như thế nào để được một đầu óc phát triển và cổ vũ cho phụ huynh và giáo viên suy nghĩ theo hư óng tích cực.

Phần 3

Phần ba này chỉ đào sâu một ý tưởng duy nhất, một ý tưởng lớn lao và quan trọng cho việc học dạy toán, xứng đáng được dành hẳn một chương. Ý tưởng đó là vai trò của lỗi lầm trong toán học.

Gần đây một nhà bình luận New York Times Peter Sims, đã viết một bài đầy ấn tượng về vai trò phản biện của lỗi lầm trong quá trình tư duy sáng tạo và thiết kế.

Ông ta phân tích những sự khác biệt giữa những nhà kinh doanh thành công nhiều ít và ông nhận ra rằng những người càng thành công về cơ bản lạ i phạm nhiều sai lầm hơn. Và họ học tập từ những lỗi lầm của mình, và chính những học tập đó đã đưa họ đến những thành tựu to lớn.

Một nhà bình luận khác cũng của báo New York Times, và là tác giả bán chạy nhất của quyển Better By Mistake, Alina Tugend, đã viết rất đúng theo quan điểm của tôi, là chúng ta đang dạy dỗ một thời đại học sinh rất sợ phạm lỗi, sợ thất bại, và sợ giây phút bối rối khi ngồi trong lớp mà không hiểu một lời giảng nào đó của thầy.

Theo Carol Dweck, mỗi lần một học viên phạm một lỗi lầm là trong não chúng xuất hiện một khớp thần kinh mới. Dĩ nhiên, lỗi lầm phạm phải ở đây phải là lỗi thuộc về phương pháp chứ không phải loại lỗi lầm về tính toán, và khi phạm lỗi lầm như thế, có đến hai xung điện phát kích. Xung điện thứ nhất khi họ nhận ra mình phạm lỗi, và xung điện thứ hai khi họ phân tích lỗi đã phạm.

Não bộ sẽ không có cơ hội phát triển nếu lúc nào chúng ta cũng làm đúng ngon lành.

Như vậy phạm lỗi là một sự kiện hữu ích chứ không phải là một tai họa. Vậy mà khi học toán, các học viên thường rất sợ đối mặt với sai lầm, chúng cảm thấy tự ty và sụp đổ, trong khi đáng lẽ đó là một trải nghiệm hữu ích.

Nhà tâm lý học Jason Moser và các cộng sự đã cho đăng trong tờ Khoa Học Tâm Lý kết quả một nghiên cứu cho thấy có sự thay đổi có ý nghĩa của não bộ khi các học viên phạm sai lầm. Họ cũng nhận thấy rằng sự phát triển não bộ lớn hơn một cách có ý nghĩa ở những học viên có đầu óc tích cực so với những học viên tiêu cực.

Lần nữa ta thấy rằng đáp ứng của những học viên có nếp nghĩ tích cực tạo ra mức phát triển lớn hơn, do họ có ý thức hơn về lỗi lầm của mình và học tập để rút kinh nghiệm sau đó.

Tóm lại chứng cứ khoa học mới về não bộ chỉ ra hai điều, là não bộ thực sự thay đổi khi ta phạm sai lầm. Và thứ hai là bộ não của những học viên có nếp nghĩ tích cực sẽ phát triển nhiều hơn.

Như vậy nhiệm vụ của giáo viên là tìm ra những phương cách nhằm tạo được những môi trường toán học thuận lợi cho việc học tập từ những sai lầm. Việc đầu tiên là những học viên cần được yêu cầu cao hơn, những bài toán thử thách hơn, không chỉ lúc nào cũng gặp những bài toán dễ và làm đúng trăm phần trăm. Vì như thế là tạo cho họ những vui thích giả tạo và lừa phỉnh họ. Bản thân tôi cũng đã từng thực hiện một nghiên cứu trong vò ng ba năm, trong đó tôi dạy học ở hai trường khác nhau. Một trường tôi dạy theo lối truyền thống trong đó giáo viên thuyết giảng, chứng minh và cho bài tập để học sinh thực tập theo hướng dẫn sâu sát của thầy. Còn ở trường kia, học viên được cho những vấn đề lớn và mở để họ tự tìm ra cách giải quyết, đây là phương pháp gọi là Học Tập Theo Vấn Đề.

Chúng thực sự chưa từng gặp những bài toán như thế bao giờ và thực sự chưa biết giải thế nào, đôi khi chúng cũng được lựa chọn những bài toán theo ý thích, và được khuyến khích chọn những bài toán khó hơn. Sau đó chúng sẽ tìm ra những ý tưởng để giải quyết những khó khăn gặp phải.

Như vậy phương pháp truyền thống là học sinh được truyền đạt phương pháp đóng gói rồi sau đó vận dụng phương pháp để giải các bài toán. Còn trong phương pháp Học Tập Theo Vấn Đề, các học viên được giao những dạng toán mới rồi tự mình sẽ tìm những phương pháp để giải chúng. Trong quá trình tìm kiếm chúng sẽ học tập những phương pháp mới với sự gợi ý và hướng dẫn của giáo viên theo yêu cầu của mình.

Hai nhóm học sinh của thí nghiệm bắt đầu với trình độ toán ngang nhau, nhưng cuối thời gian thí nghiệm, kết thúc đánh giá là hai nhóm cùng tham dự cuộc thi toán quốc gia. Các học sinh của phương pháp mở đạt được số điểm cao hơn một cách có ý nghĩa so với học sinh truyền thống. Điều quan trọng là chúng chỉ làm quen với những bài toán có dạng như nhữ ng bài thi trong đề toán quốc gia khoảng ba tuần trước khi thi. Tám năm sau, tôi theo dõi thì những học sinh này ra đời với những công việc chuyên nghiệp và cao cấp hơn. Khi tôi đặt câu hỏi tại sao có kết quả tốt đẹp này, họ trả lời là họ vẫn quen tiếp cận những vấn đề trong đời sống và công việc theo lối giải quyết vấn đề như khi họ học tập.

Như vậy rõ ràng văn hóa học tập trong đó học sinh được tưởng thưởng bằng những ý tưởng và sáng tạo cùng nỗ lực giải quyết những vấn đề mở, chứ không chỉ nhằm trả lời đúng, cho phép chúng đạt thành quả tốt hơn trong kỳ thi quốc gia và tốt hơn trong cuộc sống.

Mọi người đều có thể làm toán tốt hơn khi họ cố gắng. Giáo viên cần theo dõi sự tiến bộ của học viên và cho họ những phản hồi này, khuyến khích động viên họ và nhắc họ ôn tập những sai lầm và những biện pháp khắc phục để họ nhớ và làm tốt hơn mỗi ngày. Không bao giờ chỉ giao cho họ những bài tập dễ dãi vì như thế là họ vẫn chưa học đến nơi đế n chốn. Động viên họ tìm đến những bài toán càng lúc càng khó hơn, và dạy họ biết yêu thích những sai lầm mà mình phạm phải chứ không phải ghét bỏ hay xa lánh chúng. Dạy họ rằng những nỗ lực giải sẽ khiến học thông minh hơn và sai lầm là một phần tất yếu của quá trình học tập.

Ngoài sự hữu ích của việc học tập từ sai lầm, điều thứ hai quan trọng không kém là sự kiên trì. Các chủ doanh nghiệp lúc nào cũng phàn nàn những người trẻ mới tốt nghiệp từ trường vào làm việc đều thiếu tính kiên trì. Họ cố gắng, nhưng chỉ một thời gian ngắn là bỏ cuộc.

Ray Peacock, Giám Đốc Nghiên Cứu của Philips ở Anh, phát biểu rằng phần lớn người đến xin việc đều nghĩ rằng kiến thức của học là tất cả những gì công ty cần, nhưng điều đó không đúng vì kiến thức thì luôn biến đổi với tốc độ chóng mặt. Chúng tôi không thuê người chỉ dựa vào căn bản kiến thức. "Chúng tôi thuê người thực sự biết làm việc và biết giải quyết công việc. Nền tảng kiến thức đến từ sách vở, do đó cái tôi cần là sự mềm dẻo, tính học tập liên tục, sự kiên trì và kỹ năng làm việc theo nhóm, trong đó kỹ năng giao tiếp là rất quan trọng.

Từ khi còn ở nhà trường, các học sinh quen được các thầy "đút ăn" từng muỗng kiến thức và kỹ năng toán học, cho nên khi ra đời, đụng những vấn đề gai góc đòi hỏi tư duy táo bạo đột phá thì họ nản lòng và buông xuôi. Đây là kết quả của hợp đồng dạy học bất thành văn đã tồn tại hàng trăm năm, trong đó các ôn g thầy có nhiệm vụ hay thiên chức giảng dạy từng bước một, dắt tay, dìu bước các học trò của mình trên con đường học tập. Còn học trò, cũng theo hợp đồng này, lúc n ào gặp một chút khó khăn là có quyền yêu cầu thầy giúp đỡ và chỉ dẫn. Trong hợp đồ ng này, thầy trò cùng nhau dạy dỗ và học tập theo cùng cách tiêu diệt mọ i tương tác của quá trình học tập.

Chắc các bạn đã biết, sắp có một chương trình mới đang hình thành ứ ng dụng trên toàn nước Mỹ, trong đó việc cải tổ quan trọng nhất là Luyện Tập Toán Học được nhìn theo quan điểm tích cực. Theo đó, quá trình luyện tập của học sinh được đánh giá chứ không chỉ căn cứ vào kết quả cuối cùng. Trong quan điểm đó, học sinh bắt buộc phải suy nghĩ sâu xa hơn và kiên trì hơn. Các học sinh chỉ được hỗ trợ khi họ nhận những bài toán thử thách và mở ngỏ. Qua đó, học sinh được tập tành là phải chấp nhận thoải mái những lỗi lầm của mình và xem lỗi lầm là người bạn đồng hành chứ không phải là kẻ thù trên con đường học tập của mình.

Tại sao học sinh chúng ta rất sợ phạm lỗi. Theo tôi có hai nguyên nhân chính. Một là do nền giáo dục chúng ta đánh giá năng lực học trò chỉ dựa vào kết quả các bài trắc nghiệm ABCD. Lẽ dĩ nhiên, ta muốn các học sinh của mình đạt kết quả tốt trong những bài trắc nghiệm, nhưng không phải vì thế mà chúng ta làm quá nhiều bài trắc nghiệm như vẫn thường có thói quen đó. Các học sinh mà tôi nói ở phần đầu chỉ làm quen với trắc nghiệm trong ba tuần trước ngày thi nhưng đến bài trắc nghiệm quốc gia thì họ vẫn đạt được kết quả tốt đẹp. Các học sinh sợ mắc sai lầm, sợ làm những bài toán mới lạ, sợ phải sáng tạo, sợ nghĩ khác người ta. Chúng sợ giơ tay hỏi khi không biết đáp số, và phản ứng của chúng trước những bài toán khó là hỏi thầy cô thay vì thử những cách giải khác nhau, những cách giải có thể là sai. Những học sinh đó chính là nạn nhân của lòng ham muốn được xuất sắc. Người ta bây giờ nhận ra rằng sau một thời đại đua nhau làm trắc nghiệm, chúng ta đã lâm vào một tình trạng tồi tệ chưa từng có. Những trường học ở những xứ sở có thành tựu về toán học không làm trắc nghiệm bừa bãi, mà chỉ làm vào cuối năm. Còn trong các trường học của mình, chúng ta làm trắc nghiệm mỗi tuần, nhất là ở bậc trung học. Và như thế mỗi tuần các học sinh chúng ta nhận được những thông tin đối với chúng là có hại, nhất là khi kết quả của chúng chỉ là những thứ hạng D hay F (tức Yếu hay Kém).

Trong các phần tiếp theo, ta sẽ suy nghĩ cách thay thế những bài trắc nghiệm cuối bài bằng những bài đánh giá giá trị hơn.

Nguyên nhân thứ hai gây ra tình trạng học sinh sợ phạm lỗi là vai trò của tốc độ trong các giờ học toán. Một trong những thông điệp chính yếu của thần kinh học cho biết rằng năng lực toán học không dính dấp gì với tốc độ. Các nhà nghiên cứu đã tiến hành nhiều cuộc thí nghiệm trong những năm gần đây chứng tỏ rằng những trắc nghiệm có tính giờ và những bài thực hành toán học có tính giờ đã gây ra những triệu chứng tiên phát của lo âu khi học toán. Theo tôi sự lạm dụng những bài trắc nghiệm có tính giờ là một trong những điều tệ hại nhất trong hệ thống giáo dục nước Mỹ. Dù chúng được thực hiện trong ý hướng tốt của giáo viên và những nhà quản lý giáo dục, nhưng họ không biết rằng thần kinh học đã cho biết những trắc nghiệm tính giờ đã tạo ra trong học sinh những lo âu toán học trong học sinh có trình độ khác nhau. Beilock và các cộng sự của bà đã tiến hành quét bộ não để nghiên cứu những hiệu quả mà lo âu tác động đến hệ thần kinh, và họ khám phá rằng khi học sinh làm toán trong một bài trắc nghiệm tính giờ, sự lo âu làm quá trình sử dụng thông tin được lưu trữ trong bộ nhớ để giải toán bị chận lại khiến họ khó nhớ lại những sự kiện đã lưu trữ. Sự lo âu tác hại đến học sinh có năng lực nhớ tốt nhiều hơn học sinh có năng lực nhớ tồi.

Trong một cuộc thăm dò các học sinh lớp bốn, có đến 25% học sinh lo lắng trước mỗi bài trắc nghiệm tính giờ. Dù làm đúng cả 50 câu của bài họ cũng cảm thấy bất an.

Theo kinh nghiệm của tôi, các nhà toán học thường là những người chậm chạp nhất.
Nói thế không phải là sỉ nhục họ, mà lý do là họ luôn suy nghĩ chín chắn và sâu sắc trước mỗi câu hỏi toán học. Hãy nghe tâm sự của Laurent Schwartz, người được giải thưởng Field trong toán học, tương đương với giải Nobel trong khoa học. Suốt những năm trung học, ông luôn không tự tin vào năng lực toán học của mình. Đôi khi ông cho là mình ngu ngốc vì lúc nào cũng trả lời chậm chạ p trước mỗi câu hỏi của giáo viên. "Tôi chỉ trả lời mau mắn đối với những câu hỏi mà tôi đã quen thuộc trước. Tôi lo lắng vì sợ không sớm thì muộn khả năng toán học thực sự của mình sẽ bị lật tẩy ".

Cho đến cuối năm 11, ông mới vỡ lẽ ra rằng sự mau mắn không có mối liên quan gì đến trí thông minh. Điều quan trọng là hiểu sâu sắc những sự kiện cùng những tương quan giữa chúng. Đó mới chính là biểu hiện của trí thông minh. Vấn đề nhanh hay chậm không thực sự liên quan. Dĩ nhiên, mau mắn thì cũng có lợi, cũng như có trí nhớ tốt vậy. Nhưng đó không phải là điều kiện cần và đủ làm nên thành tựu về trí tuệ. Quá nhấn mạnh yếu tố thời gian khiến toán mất đi bản chất của nó. Đó không phải là thứ toán học mà các nhà toán học lao động. Đó không phải là thứ toán học cần thiết tại lớp học. Nhưng rất nhiều sinh viên ở Mỹ hay Anh đều có chung quan niệm sai lầm là ai làm toán nhanh là người đó giỏi toán. Cathy Seeley, cựu chủ tịch của NCTM (National Counsil of Teachers of Mathematics: Hội Đồng Quốc Gia Giáo Viên Toán) đã soạn một tác phẩm rất hay tựa đề Nhanh Hơn Không Hẳn là Thông Minh Hơn. Theo bà, tốc độ là kẻ thù của nền văn hóa thân thiết với lỗi lầm, vì vậy ta chỉ nên sử dụng tốc độ ở mức độ vừa phải hoặc không bao giờ.

Sau đây là vài chiến thuật tôi nghĩ có thể giúp học sinh trân trọng những lỗi lầm.

Nếu bạn là giáo viên hãy tuyên bố trước lớp là mình trân trọng những lỗi lầm học sinh mắc phải. Lỗi lầm là cần thiết vì ta có thể học hỏi từ lỗi lầm. Cho học sinh của bạn thời gian làm toán nhiều hơn và khuyến khích họ công khai trước lớp nội dung những lỗi lầm của mình để tất cả tham g ia phân tích chúng. Thứ hai là ngay đầu năm hoặc có dịp là bạn hãy giải thích cho lớp tại sao lỗi lầm là quan trọng trong quá trình học tập, trong đó có liên quan đến việc phát triển não bộ. Việc thứ ba là cho học sinh những công việc tạo ra những lỗi lầm. Nếu học sinh làm đúng tất cả những bài tập bạn đưa ra, điều chắc chắn là chúng chưa học tập được gì nhiều. Vì thế hãy cho chúng cơ hội nỗ lực và đẩy lùi biên giới của năng lực. Về phần phụ huynh, theo tôi điều quan trọng cốt lõi là phải xua tan những huyền thoại cũ rích đã nói. Hãy tìm ra cách giúp đỡ và hướng dẫn con cái mình. Trước tiên, khuyến khích mỗi khi chúng phạm lỗi. Và điều quan trọng là đừng chia sẻ với chúng những kinh nghiệm "thương đau" về toán của mình. Các thí nghiệm đều chứng tỏ rằng ngay sau khi các bà mẹ thổ lộ với con cái là mình từng dốt toán thuở còn đi học thì lập tức các điểm số toán của con gái họ liền đi xuống. Nếu bạn không mấy tự tin về khả năng toán của mình, tốt nhất là nên nói "Toán hả, hay lắm đấy, mẹ có thể học với con. Mẹ cũng chưa biết loại toán này, con có thể giúp mẹ mà. " Mỗi lần con bạn đem mớ bài tập toán về nhà, bạn phải tỏ ra phấn chấn. Nói mình thích làm toán, nhất là những bài toán mình khó lòng giải ra. Điều khuyên thứ tư là cách cho điểm, đặc biệt đối với giáo viên, phải chấm khác như hiện giờ hoặc không cần chấm điểm gì cả. Tôi sẽ trình bày nhiều hơn về vấn đề này trong các bài sau. Điều tôi nói bây giờ là cách bạn chấm điểm và cho phản hồi là thực sự quan trọng. Do đó, khi bạn cho điểm, nhớ phát lại bài làm các em và mọi lỗi lầm đều được tô đậm một cách tích cực.

Khuyến khích họ tự sửa lỗi và cho điểm những lỗi đã sửa được, có khi tăng số điểm gấp hai cũng nên. Điều khuyên cuối cùng là loại bỏ tốc độ ra khỏi việc học toán. Dĩ nhiên nếu học chậm thì học sinh sẽ có cơ hội suy nghĩ sâu hơn, tự lực hơn và kiên trì hơn, nhưng nội dung thì không được nhiề u. Nhưng thà học chắc còn hơn dàn trải. Ôm đồm mà nông cạn không có nghĩa là học được nhiều. Vì vậy phải giảm thiểu những bài trắc nghiệm tính giờ. Hãy từ từ, từ từ trình bày kiến thức toán như là một môn học thú vị, tạo hứng thú thị giác cho công thức, kết nối, đào sâu. Trình bày kiến thức toán nhanh quá không gặt hái được gì. Đối với những học sinh đã hoàn thành tốt bài tập lớp, hãy động viên chúng tìm ra những câu hỏi tương tự và giải quyết.

Tuyệt vời biết bao nếu con cái bạn hay học trò bạn bước vào lớp với niềm tin là mình có thể làm toán được và phấn chấn khi được giao những bài toán phức tạp đầy thách thức và không mất nhuệ khí khi những ý trưởng đầu tiên thất bại.

Khẩu hiệu sau đây cũng tốt nhưng có thể làm tốt hơn.

Mistakes are expected, respected and inspected.

Bạn thấy thế nào?

Jo Boaler
Đại học Stanford
Course: https://class.stanford.edu/courses/Education/EDUC115N/How_to_Learn_Math/about