

TRẦN VĂN HẠO
(Chủ biên)

NGUYỄN CAM
NGUYỄN MỘNG HY
TRẦN ĐỨC HUYỀN
CAM DUY LỄ
NGUYỄN SINH NGUYỄN
NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

BẤT ĐẲNG THỨC²



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)
NGUYỄN CAM - NGUYỄN MỘNG HY - TRẦN ĐỨC HUYỀN
CAM DUY LỄ - NGUYỄN SINH NGUYÊN - NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC BẤT ĐẲNG THỨC

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT NÂNG CAO HIỆN HÀNH

(Tái bản lần thứ sáu có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học** được biên soạn nhằm mục đích giúp các em học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tham khảo, nắm vững phương pháp giải các dạng bài toán cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hàng năm.

Nội dung bộ sách bám sát theo chương trình bộ môn Toán THPT nâng cao hiện hành và Hướng dẫn ôn tập thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bộ sách gồm 7 tập, tương ứng với 7 chuyên đề :

1. Đại số
2. Lượng giác
3. Hình học không gian
4. Hình học giải tích
5. Giải tích - Đại số tổ hợp
6. Khảo sát hàm số
7. Bất đẳng thức

Tập sách "**Chuyên đề luyện thi vào Đại học : Bất đẳng thức**" này, gồm 3 phần :

Phần I : Bất đẳng thức : có 2 chương.

Phần II : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : có 3 chương.

Mỗi chương gồm nhiều đơn vị kiến thức (§). Mỗi (§) được biên soạn thống nhất gồm các mục :

- A. Kiến thức cơ bản : Tóm tắt, hệ thống kiến thức trọng tâm.
- B. Ví dụ áp dụng : gồm nhiều ví dụ theo từng (§), có hướng dẫn giải. Mỗi ví dụ là một dạng bài tập cơ bản, thường gặp (hoặc đã ra) trong các đề thi tuyển sinh Đại học.
- C. Luyện tập : gồm nhiều bài tập, giúp học sinh tự rèn luyện kĩ năng giải toán.

Phần III : Câu hỏi trắc nghiệm ôn tập : Phần này gồm các câu hỏi trắc nghiệm ôn tập tổng hợp, có trả lời ; giúp học sinh tự kiểm tra, đánh giá kết quả giải bài tập của mình.

Phụ lục : Trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học (2005 – 2010). Đây là phần trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học đã ra từ 2005 đến 2010 – môn Toán, có liên quan đến phần Bất đẳng thức, có hướng dẫn giải, giúp học sinh làm quen với các dạng câu hỏi của đề thi tuyển sinh Đại học.

Tập thể tác giả trân trọng giới thiệu với các em học sinh 12 bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học**. Chúng tôi tin tưởng bộ sách này sẽ góp phần giúp các em học sinh 12 nâng cao chất lượng học tập và đạt được kết quả mỹ mãn trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Chủ biên

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG 2009, MÔN TOÁN^(*)

II. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 ĐIỂM)

Câu I (3 điểm) :

- Khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số.
- Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số : chiều biến thiên của hàm số. Cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng) ;...

Câu II (2 điểm) :

- Phương trình, bất phương trình ; hệ phương trình đại số ;
- Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu III (1 điểm) :

- Tìm giới hạn
- Tìm nguyên hàm, tính tích phân
- Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu IV (1 điểm) :

Hình học không gian (tổng hợp) : Quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay ; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay ; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu V (1 điểm) :

Bài toán tổng hợp.

II. PHẦN RIÊNG (3 ĐIỂM) :

Thí sinh chỉ được làm một trong 2 phần (phần 1 hoặc 2)

^(*) Theo tài liệu của Bộ Giáo dục và Đào tạo công bố năm 2009

1. Theo chương trình chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) :

Nội dung kiến thức : Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và trong không gian :

- Xác định tọa độ của điểm, vector.
- Đường tròn, elip, mặt cầu.
- Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.
- Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII. a (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

- Số phức
- Tổ hợp, xác suất, thống kê.
- Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) :

Nội dung kiến thức :

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng và trong không gian :

- Xác định tọa độ của điểm, vector.
- Đường tròn, ba đường conic, mặt cầu.
- Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.
- Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII.b (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

- Số phức
- Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ và một số yếu tố

liên quan.

- Sự tiếp xúc của hai đường conic.
- Hệ phương trình mũ và lôgarit.
- Tổ hợp, xác suất, thống kê.
- Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

BẤT ĐẲNG THỨC

Chương 1.

KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

§ 1. ĐỊNH NGHĨA BẤT ĐẲNG THỨC

- Giả sử A và B là hai biểu thức bằng chữ hoặc số.
 $A > B$ (hoặc $B < A$), $A < B$ (hoặc $B > A$) gọi là các bất đẳng thức;
 A, B là hai vế của một bất đẳng thức.
- $A \geq B$ (hoặc $B \leq A$), $A \leq B$ (hoặc $B \geq A$) gọi là các bất đẳng thức suy rộng.
- $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$; $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$.
- Một bất đẳng thức có thể đúng hoặc sai và ta quy ước: Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

§ 2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

- $\forall a \in \mathbf{R}, a \leq a$;
- $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$
- $\forall a, b, m \in \mathbf{R}: a \leq b \Leftrightarrow a \pm m \leq b \pm m$;
- $a \geq b + c \Leftrightarrow a - c \geq b$;
- $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$
- $\forall a, b \in \mathbf{R}: a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} am \leq bm & \text{khi } m > 0 \\ am \geq bm & \text{khi } m < 0 \end{cases}$
- $\forall a, b \in \mathbf{R}^+: a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{m} \leq \frac{b}{m} & \text{khi } m > 0 \\ \frac{a}{m} \geq \frac{b}{m} & \text{khi } m < 0 \end{cases}$

- Nếu $a > b > 0$ hay $0 > a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}^+ : \begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \Rightarrow ac \geq bd$
- $a \geq b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n \geq b^n \\ \sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b} \end{cases} ; \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$
- Nếu $x > y > 0$ và $a > 1$ thì $a^x > a^y$;
Nếu $x > y > 0$ và $0 < a < 1$ thì $a^x < a^y$.
- $a > b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^* ; a > b \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

§ 3. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

- $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbf{R} ; |a| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < a < \alpha$ (với $\alpha > 0$).
- $|a| > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a > \alpha \\ a < -\alpha \end{cases}$ (với $\alpha > 0$).
- $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (với mọi $a, b \in \mathbf{R}$).

§ 4. BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

- $\begin{cases} a > 1 \\ x_1 > x_2 \end{cases} \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} ;$
- $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x_1 > x_2 \end{cases} \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$
- $\begin{cases} a > 1 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_a c > \log_a d ;$
- $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_a c < \log_a d.$

§ 5. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI (CAUCHY)

- **Bất đẳng thức Cô-si đối với hai số không âm**

Cho a, b là hai số không âm. Ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a = b$.

Chứng minh : Với $a \geq 0, b \geq 0$, ta có :

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

- **Bất đẳng thức Cô-si đối với bốn số không âm**

Cho a, b, c, d là bốn số không âm. Ta có : $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a = b = c = d$.

Chứng minh : Với $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, suy ra $\frac{a+b}{2} \geq 0$ và

$\frac{c+d}{2} \geq 0$. Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si đối với hai số không âm, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \\ \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d.$$

- **Bất đẳng thức Cô-si đối với ba số không âm**

Cho a, b, c là ba số không âm. Ta có : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a = b = c$.

Chứng minh : Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si đối với hai số không

âm, ta có : $(a+b) + (c + \sqrt[3]{abc}) \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c \cdot \sqrt[3]{abc}}$. (*)

Lại áp dụng Bất đẳng thức Cô-si đối với hai số, ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc^4} &\geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{abc^4}} = \sqrt{\sqrt{ab} \sqrt[3]{abc^4}} \\ &= 2\sqrt[4]{a^4 b^4 c^4} = 2\sqrt[3]{abc}\end{aligned}$$

Thay vào (*) và áp dụng tính bắc cầu ta được :

$$(a+b) + (c + \sqrt[3]{abc}) \geq 4\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \quad (**)$$

Ta đã áp dụng Bất đẳng thức Cô-si đối với hai số không âm ba lần, vì thế đẳng thức trong (**) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a=b \\ c = \sqrt[3]{abc} \\ ab = \sqrt[3]{abc^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c^3 = abc \\ a^3 b^3 = abc^4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

- Bất đẳng thức Cô-si đối với n số không âm**

Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ta có :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

§ 6. BẤT ĐẲNG THỨC BU-NHI-A-CÓP-SKI

- Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cóp-ski đối với 4 số thực**

Với bốn số thực a, b, c, d . Ta có : $(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$. (*)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $ad = bc$.

Chứng minh : Ta có :

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow a^2 b^2 + 2abcd + c^2 d^2 \leq a^2 b^2 + a^2 d^2 + c^2 b^2 + c^2 d^2 \\ &\Leftrightarrow 2abcd \leq a^2 d^2 + c^2 b^2 \Leftrightarrow a^2 d^2 + c^2 b^2 - 2abcd \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (**)$$

Bất đẳng thức (**) luôn luôn đúng nên ta có bất đẳng thức (*) luôn luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$(ad - bc)^2 = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow ad = bc.$$

Nhận xét : Nếu $bd \neq 0$ thì : $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Như vậy, với bốn số thực a, b, c, d cùng khác 0, ta có :

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- **Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski đối với 6 số thực**

Với sáu số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ cùng khác 0, ta có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

- **Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski đối với $2n$ số thực**

Với $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ cùng khác 0, ta có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Chương 2.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

§ 7. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỊNH NGHĨA BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để chứng minh $A \geq B$, ta có thể sử dụng định nghĩa bằng cách chứng minh $A - B \geq 0$.

Để chứng minh $A - B \geq 0$, ta có thể dùng các phép biến đổi chuyển $A - B$ thành tổng của nhiều bình phương, tích của hai thừa số cùng dấu hoặc tích của nhiều thừa số không âm.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác với $a \leq b \leq c$ thì $(a + b + c)^2 \leq 9bc$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $a \leq b \Rightarrow (a + b + c)^2 \leq (2b + c)^2$. Do đó ta cần chứng minh :

$$(2b + c)^2 \leq 9bc.$$

$$\text{Ta có : } (2b + c)^2 - 9bc = 4b^2 + 4bc + c^2 - 9bc = 4b^2 - 5bc + c^2$$

$$= 4b^2 - bc - 4bc + c^2.$$

$$= b(4b - c) - c(4b - c) = (b - c)(4b - c).$$

Vì $b \leq c \Rightarrow (b - c) \leq 0$, $4b - c = 2b + b + b - c \geq 2b + b + a - c$ (do $b \geq a$) và trong một tam giác thì $b + a - c > 0$ nên $4b - c > 0$. Từ đó ta có :

$$(2b + c)^2 - 9bc \leq 0 \Leftrightarrow (2b + c)^2 \leq 9bc.$$

Đó là điều phải chứng minh (đpcm).

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x \cos a + 1}$ với tham số $a \in (0; \pi)$. Chứng minh rằng, với mọi x ta đều có $-1 \leq y \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Vì $-1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $1 - y^2 \geq 0, \forall x$.

$$\begin{aligned}
 \text{Lập hiệu : } 1 - y^2 &= 1 - \left[\frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x \cos a + 1} \right]^2 \\
 &= \frac{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2 - (x^2 \cos a - 2x + \cos a)^2}{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^2 - 2x \cos a + 1 - x^2 \cos a + 2x - \cos a)}{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2} \\
 &\quad \times (x^2 - 2x \cos a + 1 + x^2 \cos a - 2x + \cos a) \\
 &= \frac{[(1 - \cos a)x^2 + 2x(1 - \cos a) + 1 - \cos a]}{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2} \\
 &\quad \times [(1 + \cos a)x^2 - 2x(1 + \cos a) + 1 + \cos a] \\
 &= \frac{[(1 + \cos a)(x^2 - 2x + 1)][(1 - \cos a)(x^2 + 2x + 1)]}{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2} \\
 &= \frac{(1 - \cos^2 a)(x^2 - 1)^2}{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2} = \frac{\sin^2 a (x^2 - 1)^2}{(x^2 - 2x \cos a + 1)^2}
 \end{aligned}$$

Vậy : $1 - y^2 \geq 0$.

Ta thấy : $x = 1 \Rightarrow y = \frac{2 \cos a - 2}{2 - 2 \cos a} = -1; x = -1 \Rightarrow y = \frac{2 \cos a + 2}{2 + 2 \cos a} = 1$.

Vì $0 < a < \pi$ nên $\cos a + 1 > 0$. Do đó : $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1, \forall x$.

Ví dụ 3. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh :

$$\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu : } T &= \frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} - (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{x^2(y-z)}{z} + \frac{y^2(z-x)}{x} + \frac{z^2(x-y)}{y}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ giả thiết : } z \leq y \Rightarrow x^2(y-z) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2(y-z)}{z} \geq \frac{x^2(y-z)}{y};$$

$$z \leq x \Rightarrow y^2(z-x) \leq 0; y \leq x \Rightarrow \frac{y^2(z-x)}{x} \geq \frac{y^2(z-x)}{y}.$$

$$\text{Do đó : } T \geq \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{y}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow yT \geq x^2(y-x+x-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\ &= (x-y)(z^2-x^2) + (x-z)(x^2-y^2) \\ &= (x-y)(x-z)(y-z) \geq 0 \text{ (do } x \geq y \geq z \geq 0). \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh với mọi $x > \pi$ ta có : $\frac{\sin x}{x} > \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \frac{\sin x}{x} > \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2} \Leftrightarrow \sin x > \left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2} \right) x.$$

$$\text{Đặt : } y = x - \pi > 0 \Rightarrow x = y + \pi$$

$$\text{Ta có : } \sin x + \left(\frac{x^2 - \pi^2}{\pi^2 + x^2} \right) x = -\sin y + \frac{y^2 + 2\pi y}{y^2 + 2y\pi + 2\pi^2} (y + \pi)$$

$$= -\sin y + \frac{y^3 + 3\pi y^2 + 2\pi^2 y}{y^2 + 2y\pi + 2\pi^2}$$

$$= -\sin y + y + \frac{\pi y^2}{y^2 + 2y\pi + 2\pi^2} > 0, \forall y > 0. \text{ (Do } \sin y < y, \forall y > 0 \text{).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5. Cho $x, y, z \in \mathbf{R}$. Chứng minh :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Tp. HCM, năm 2000)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(y^2 - yz + z^2) + \frac{1}{2}(z^2 - zx + x^2) \\ &= \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ví dụ 6. Chứng minh với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$$

(Trích đề thi Đại học, Khối B, năm 2005)

Hướng dẫn giải

Ở Ví dụ 5 nếu lấy $x = \left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{a}{2}}$, $y = \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{a}{2}}$, $z = \left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{a}{2}}$ với $a \in \mathbf{R}$. Ta sẽ có bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 7. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

$$\text{Chứng minh : } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2005)

Hướng dẫn giải

Với $a, b > 0$ ta có : $4ab \leq (a+b)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Áp dụng kết quả trên, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự : } \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{x+y} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2x+2y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

C. LUYỆN TẬP

7.1 Chứng minh rằng với mọi x, y, z ta có :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$.

7.2 Chứng minh :

$$\text{a) } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2; \quad \text{b) } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2.$$

7.3 Chứng minh rằng với mọi m, n, p, q ta có :

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + 1 \geq m(n + p + q + 1).$$

7.4 Cho $x, y, z \in [0, 1]$. Chứng minh :

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$$

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1999)

§ 8. PHƯƠNG PHÁP DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể biến đổi bất đẳng thức (BĐT) cần chứng minh tương đương với BĐT đúng hoặc BĐT đã được chứng minh đúng.

Trong quá trình thực hiện các phép biến đổi tương đương, cần lưu ý các hằng đẳng thức sau :

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

• Chú ý các phép biến đổi tương đương về bất đẳng thức

i) $A \geq B \Leftrightarrow A \pm C \geq B \pm C$;

ii) Với $C > 0$: $A \geq B \Leftrightarrow AC \geq BC$;

iii) Với $C < 0$: $A \geq B \Leftrightarrow AC \leq BC$;

iv) Nếu $A, B > 0$ thì $A \geq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với x, y, z thoả mãn điều kiện :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ thì ta có } -\frac{1}{2} \leq xy + yz + zx \leq 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta cần chứng minh BĐT kép :

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned} \text{i) Ta có : } -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \\ &+ 2yz + 2zx \geq 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{BĐT (1) luôn luôn đúng nên ta có : } -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz + zx \quad (2)$$

ii) Mặt khác, ta có :

$$\begin{aligned} xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0. \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{BĐT (3) luôn đúng nên ta có : } xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$$

Từ (2) và (4) ta có đpcm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với 5 số a, b, c, d, e bất kì, bao giờ ta cũng có :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b + c + d + e) \\ &\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geq 4ab + 4ac + 4ad + 4ae \\ &\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + \\ &\quad + (a^2 - 4ae + 4e^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

BĐT cuối cùng luôn đúng nên ta có đpcm và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với 3 số dương a, b, c bất kì, ta luôn có :

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0. \quad (1)$$

BĐT (1) luôn đúng nên ta có : $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3}. \quad (2)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Tương tự, ta cũng có : $\frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{2b - c}{3}; \quad (3)$

$$\frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2c - a}{3}. \quad (4)$$

Cộng (2), (3) và (4) theo từng vế ta được đpcm và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4. Cho $a + b = 2$. Chứng minh $a^4 + b^4 \geq 2$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh BĐT : $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2. \quad (1)$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0.$

BĐT cuối cùng đúng nên ta có (1) đúng, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Áp dụng BĐT (1) ta có : $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2. \quad (2)$

Lại áp dụng (1) lần nữa với $x = a^2, y = b^2$ ta có :

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \geq 1 \text{ (theo (2)).}$$

Vậy $a^4 + b^4 \geq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu $0 < x \leq y \leq z$ thì ta có :

$$y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x + z).$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x + z)$
 $\Leftrightarrow (x + z)\frac{y}{xz} + (x + z)\frac{1}{y} - (x + z)^2 \cdot \frac{1}{xz} \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x + z)\left[\frac{y}{xz} + \frac{1}{y} - \frac{x + z}{xz}\right] \leq 0 \Leftrightarrow (x + z)\left[\frac{y^2 + xz - xy - yz}{xyz}\right] \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x + z)[y(y - x) + z(x - y)] \leq 0 \text{ (vì } xyz > 0 \text{)}.$
 $\Leftrightarrow (x + z)(x - y)(z - y) \leq 0.$

BĐT cuối cùng đúng vì $0 < x \leq y \leq z$ nên ta có đpcm.

Ví dụ 6. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 2000)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} &\geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b) \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (BĐT luôn đúng).}\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 7. a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính $R = 1$. Chứng minh rằng để tam giác đó nhọn (ba góc nhọn) thì cần và đủ là $a^2 + b^2 + c^2 > 8$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔABC , ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó : } a^2 + b^2 + c^2 > 8 &\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2 \\ &\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ nhọn (Ví dụ 2).}\end{aligned}$$

Ví dụ 8. Cho $x, y > 0$ thoả điều kiện $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$.
Chứng minh : $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \leq x + y \leq 2$.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 2000)

Hướng dẫn giải

$$\text{i) Ta có : } x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 \leq y^2 - y^3. \quad (1)$$

Từ giả thiết suy ra : $x^3 - x^2 \leq y^3 - y^4$, do đó để có (1) ta cần chứng minh : $y^3 - y^4 \leq y^2 - y^3$. Thật vậy :

$$y^3 - y^4 \leq y^2 - y^3 \Leftrightarrow y - y^2 \leq 1 - y \Leftrightarrow (y - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{ii) Ta có : } x^2 + y^2 \leq x + y \Leftrightarrow x - x^2 + y - y^2 \geq 0. \quad (2)$$

Theo giả thiết ta có : $x^2 - x^3 + y^3 - y^4 \geq 0$. Để chứng minh (2), ta chứng minh : $x - x^2 + y - y^2 \geq x^2 - x^3 + y^3 - y^4$.

Thật vậy : $x - x^2 + y - y^2 \geq x^2 - x^3 + y^3 - y^4$

$$\Leftrightarrow x(1 - 2x + x^2) + y(1 - y - y^2 + y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(1 - x)^2 + y(1 + y)(1 - y)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

iii) Ta chứng minh : $2 - x - y \geq x^2 - x^3 + y^3 - y^4$

$$\Leftrightarrow 1 - x - x^2 + x^3 + 1 - y - y^3 + y^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - x) - x^2(1 - x) + (1 - y) - y^3(1 - y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - x^2)(1 + x) + (1 - y)^2(1 + y + y^2) \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy : $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \leq x + y \leq 2$.

Ví dụ 9. a, b, c là 3 số tùy ý thuộc đoạn $[0 ; 1]$. Chứng minh :

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét : $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \geq 0$.

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT :

$$a^2(1 - b) + b^2(1 - c) + c^2(1 - a) \leq 1 \quad (1)$$

Vì $0 \leq a ; b ; c \leq 1$ nên $a^2 \leq a ; b^2 \leq b ; c^2 \leq c$. Do đó :

$$a^2(1 - b) + b^2(1 - c) + c^2(1 - a) \leq a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a).$$

Vì vậy để có (1) ta cần chứng minh :

$$a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \leq 1 \quad (2)$$

Ta có : $(2) \Leftrightarrow 1 - a - b - c + ab + bc + ca \geq 0$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) + abc \geq 0. \quad (3)$$

(3) đúng nên (2) đúng, từ đó suy ra (1) tức là có đpcm.

Ví dụ 10. a) Cho $ab \geq 1$. Chứng minh : $\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \geq \frac{2}{1 + ab}$.

b) Cho $a \geq b \geq c \geq 1$. Chứng minh : $\frac{1}{1 + a^3} + \frac{1}{1 + b^3} + \frac{1}{1 + c^3} \geq \frac{3}{1 + abc}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} &\geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(b-a)[a(1+b^2)-b(1+a^2)]}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0. \end{aligned}$$

BĐT cuối cùng đúng do $ab \geq 1$. Vậy, ta có đpcm.

$$\text{b)} \text{ Áp dụng câu 1) ta có : } \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}}. \quad (1)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} &\geq 2 \left(\frac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{abc^4}} \right) \\ &\geq \frac{4}{1+\sqrt[4]{a^4b^4c^4}} \text{ (theo 1)) } \geq \frac{4}{1+abc}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 11. Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Chứng minh :

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Vì $x, y, z \in [0; 1]$ nên :

$$\begin{aligned} (1-y^2)(1-z) + (1-z^2)(1-x) + (1-x^2)(1-y) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3 &\geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - (x^2y + y^2z + z^2x) \\ &\geq (x^3 + y^3 + z^3) + (x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \end{aligned}$$

(vì $x^2 \geq x^3$, $x \geq x^3$)

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3.$$

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi a, b ta có :

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \Leftrightarrow |a+b|(1+|a|+|b|) \leq (|a|+|b|)(1+|a+b|)$$

$$\Leftrightarrow |a+b| + |a+b||a| + |a+b||b| \leq |a| + |b| + |a+b||a| + |a+b||b|$$

$$\Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |b| \text{ (đúng).}$$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2 \Leftrightarrow ab \leq |ab|$ (đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , bao giờ ta cũng có :

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

a, b, c theo thứ tự là độ dài cạnh đối diện với góc A, B, C .

Hướng dẫn giải

Ta có : $A+B+C = \pi$ nên BĐT cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} - \frac{A+B+C}{3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(aA+bB+cC) - (a+b+c)(A+B+C)}{3(a+b+c)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (aA - aB - bA + bB) + (bB - bC - cB + cC) + (cC - cA - aC + aA) \geq 0 \text{ (vì } a+b+c > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(A-B) + (b-c)(B-C) + (c-a)(C-A) \geq 0.$$

BĐT cuối cùng đúng, vì trong tam giác cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn. Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 14. Cho $x \geq 0$. Chứng minh :

$$\log_2(1+2^x) > \log_3[3^x + (\sqrt{2})^x] \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \log_2(1+2^x) - x > \log_3[3^x + (\sqrt{2})^x] - x$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1+2^x}{2^x} \right) > \log_3 \left[\frac{3^x + (\sqrt{2})^x}{3^x} \right] \\ &\Leftrightarrow \log_2 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] > \log_3 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Vì $\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{2}}{3}$ và $x \geq 0$ nên $1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x > 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x$. Do đó :

$$\log_2 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] > \log_2 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x \right]. \quad (3)$$

Ta có :

$$\log_2 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x \right] = \frac{1}{\log_{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x} 2} > \frac{1}{\log_{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x} 3} = \log_3 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^x \right]. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng (đpcm).

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC có $\sin A + \sin C = 2 \sin B$. Chứng minh :

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\begin{aligned} \sin A + \sin C = 2 \sin B &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 \geq \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 \geq 4 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} \text{ (do (2))}$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{C}{2} \right)^2 \geq 0. \quad (3)$$

(3) hiển nhiên đúng nên (1) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \\ \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow A = C = 60^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 16. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý hàm số sin và cosin, ta có BĐT cần chứng minh tương đương với : $a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \geq 2\sqrt{3}ab \sin C$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab(\sqrt{3} \sin C + \cos C) \geq 0.$$

Vì $\sqrt{3} \sin C + \cos C \leq 2$ nên :

$$a^2 + b^2 - ab(\sqrt{3} \sin C + \cos C) \geq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0.$$

Ví dụ 17. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 1$ nên ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B+C) + \sin(A+C) + \sin(A+B) < 2\cos A + 2\cos B + 2\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B \cos C + \sin C \cos B + \sin A \cos C + \sin C \cos A$$

$$+ \sin A \cos B + \sin B \cos A < 2\cos A + 2\cos B + 2\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) + \sin B(\cos A + \cos C)$$

$$+ \sin C(\cos A + \cos B) < 2\cos A + 2\cos B + 2\cos C$$

$$\Leftrightarrow (\cos B + \cos C)(\sin A - 1) + (\cos A + \cos C)(\sin B - 1)$$

$$+ (\cos A + \cos B)(\sin C - 1) < 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có } \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} > 0 ;$$

$$\sin A - 1 \leq 0.$$

Do đó $(\cos A + \cos C)(\sin A - 1) \leq 0$ nên vế trái của (2) không dương. Mặt khác dấu đẳng thức không thể xảy ra vì không thể đồng thời có $\sin A = \sin B = \sin C$. Vậy ta có (2) tức là có đpcm.

Ví dụ 18. $\triangle ABC$ là tam giác bất kì, chứng minh :

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C.$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi nào ?

(Trích đề thi Đại học Dược Hà Nội, Năm 2000)

Hướng dẫn giải

- Nếu tam giác vuông hoặc tù thì :

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) > 0 \geq \cos A \cos B \cos C.$$

nên BĐT đúng.

- Nếu $\triangle ABC$ nhọn thì BĐT tương đương với :

$$\left(1 - \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \left(1 - \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) \left(1 - \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \geq \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2}. \quad (1)$$

$$(\text{với } x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}).$$

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow 2x^2 \cdot 2y^2 \cdot 2z^2 \geq (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}.$$

$$\text{Mà : } \tan A + \tan B = \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) + \cos(A+B)}$$

$$\geq \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{1 - \cos C} = 2 \cot \frac{C}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $A = B$.

$$\text{Tương tự : } \tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2} ; \tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}.$$

Cộng về theo về các BĐT trên ta có đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 19. Với tam giác ABC , đặt $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$. Chứng minh rằng ABC là tam giác có ba góc nhọn khi và chỉ khi $T > 2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } T = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C = 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\text{Vậy : } T > 2 \Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A > 0 \\ \cos B > 0 \\ \cos C > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ nhọn.}$$

Ví dụ 20. Chứng minh rằng nếu ABC không phải là tam giác tù thì :

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4.$$

(Trích đề thi Đại học Kỹ thuật Công nghệ, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\sin A \sin B \geq \sin A \sin B - \cos A \cos B = -\cos(A + B) = \cos C$

(vì $\triangle ABC$ không tù)

Tương tự : $\sin B \sin C \geq \cos A$; $\sin A \sin C \geq \cos B$.

Do đó : $(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C)$

$$\begin{aligned} &= 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A \sin^2 B \\ &\quad + \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 A + \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \\ &\geq 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &\quad + \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C > 4 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Ví dụ 21. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn $x(x + y + z) = 3yz$, ta có :

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$$

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có : $x(x + y + z) = 3yz \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \frac{3y}{x} \cdot \frac{z}{x}$

Đặt $u = \frac{y}{x} > 0$, $v = \frac{z}{x} > 0$, $t = u + v > 0$. Ta có :

$$1 + t = 3uv \leq 3 \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 = 3 \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(3t + 2) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$$

chia hai vế cho x^3 của bất đẳng thức cần chứng minh, ta được :

$$(1 + u)^3 + (1 + v)^3 + 3(1 + u)(1 + v)(u + v) \leq 5(u + v)^3$$

$$\Leftrightarrow (2 + t)^3 - 3(1 + u)^2(1 + v) - 3(1 + u)(1 + v)^2 + 3(1 + u)(1 + v)t \leq 5t^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 6(1+u)(1+v) \leq 5t^3 \Leftrightarrow (2+t)^3 - 6(1+u+v+uv) \leq 5t^3$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^3 - 6\left(1+t+\frac{1+t}{3}\right) \leq 5t^3 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 4t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t(2t+1)(t-2) \geq 0 \text{ đúng và } t \geq 2$$

C. LUYỆN TẬP

8.1 Cho a, b, c bất kì. Chứng minh :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;

b) $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm, năm 2000)

8.2 Cho a, b có $a + b \geq 0$. Chứng minh : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3 + b^3}{2}$.

(Trích đề thi Đại học Y Hà Nội, năm 2000)

8.3 Cho tam giác ABC . Chứng minh :

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right).$$

Hướng dẫn : Đặt $x = \cot \frac{A}{2}$, $y = \cot \frac{B}{2}$, $z = \cot \frac{C}{2}$ và $x + y + z = xyz$.

BĐT cần chứng minh tương đương với :

$$x + y + z \geq 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$$

8.4 Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

(Trích đề thi Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 1997)

Hướng dẫn : $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{4}(4x^2 + 4xy + 4y^2)$

$$= \frac{1}{4}[3(x+y)^2 + (x-y)^2] \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$$

Suy ra : $\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y)$.

8.5 Cho a, b, c, d tùy ý. Chứng minh :

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

8.6 Cho $a \geq c \geq 0$ và $b \geq c$. Chứng minh : $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

8.7 Chứng minh : $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn : Vế trái bằng : $x^2(x^2 - 1)^2 + (x^4 - 1)^2 \geq 0$.

8.8 Chứng minh : $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \geq 1 + \sqrt{1-t^2} \geq 2-t^2, \forall t \in [-1; 1]$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 2001)

§ 9. PHƯƠNG PHÁP DÙNG PHÉP CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giả sử cần phải chứng minh BĐT nào đó đúng, ta hãy giả sử BĐT đó sai và kết hợp với các giả thiết để suy ra kết quả vô lí. Điều vô lí có thể là điều trái giả thiết, có thể là điều trái với một điều đúng. Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh là đúng.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai :

$$a(1-b) > \frac{1}{4}; b(1-c) > \frac{1}{4}; c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử các bất đẳng thức trên đều đúng, khi đó nhân vế với vế các bất đẳng thức trên lại với nhau ta được :

$$a(1-a) b(1-b) c(1-c) > \frac{1}{64}. \quad (1)$$

Ta lại có : $a(1-a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - a + a^2 \right) = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

Tương tự : $b(1-b) \leq \frac{1}{4}$; $c(1-c) \leq \frac{1}{4}$.

Do $0 < a, b, c < 1$ nên $a(1-a) > 0$, $b(1-b) > 0$, $c(1-c) > 0$ và lúc đó ta có : $a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64}$. (2)

Từ (1) và (2) ta gặp mâu thuẫn. Vậy có ít nhất một trong các BĐT đã cho là sai.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng, nếu $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$; $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Giả sử cả hai phương trình đã cho vô nghiệm, khi đó $\Delta_1 = a_1^2 - 4b_1 < 0$ và $\Delta_2 = a_2^2 - 4b_2 < 0$. Do đó :

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 - 4b_1 - 4b_2 < 0 &\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 < 4(b_1 + b_2) \leq 2a_1a_2 \text{ (theo giả thiết)} \\ &\Rightarrow (a_1 - a_2)^2 < 0 \text{ (vô lí).} \end{aligned}$$

Vậy có ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 3. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 0$, $ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$. Chứng minh $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $a \leq 0$ thì từ $abc > 0 \Rightarrow a \neq 0$ do đó $a < 0$. Mặt khác $abc > 0$ và $a < 0$ nên suy ra $cb < 0$. Từ $ab + bc + ca > 0 \Rightarrow a(b+c) > -bc > 0$. Vì $a < 0$ mà $a(b+c) > 0 \Rightarrow b+c < 0$. Cuối cùng, ta có $a < 0$ và $b+c < 0$ nên suy ra $a+b+c < 0$ trái giả thiết $a+b+c > 0$. Vậy $a > 0$. Tương tự ta có $b > 0$, $c > 0$.

Ví dụ 4. Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $ac \geq 2(b+d)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai : $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$.

Hướng dẫn giải

Giả sử hai bất đẳng thức : $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$ đều đúng khi đó cộng các vế ta được : $a^2 + c^2 < 4(b + d)$ (1)

Theo giả thiết ta có : $4(b + d) \leq 2ac$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 + c^2 < 2ac$ hay $(a - c)^2 < 0$ (vô lí). Vậy trong hai bất đẳng thức $a^2 < 4b$ và $c^2 < 4d$ có ít nhất một bất đẳng thức.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng, nếu $a + b = 2cd$ thì ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đây là đúng :

$$c^2 \geq a ; d^2 \geq b$$

Hướng dẫn giải

Giả sử cả hai bất đẳng thức đều sai. Ta có :

$$\begin{cases} c^2 < a \\ d^2 < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 - a < 0 \\ d^2 - b < 0 \end{cases} \Rightarrow c^2 - a + d^2 - b < 0$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 - (a + b) < 0 \Rightarrow c^2 + d^2 - 2cd < 0 \Rightarrow (c - d)^2 < 0. \text{ Vô lí.}$$

Chứng tỏ hai bất đẳng thức không thể cùng sai

Vậy ít nhất một bất đẳng thức đúng.

C. LUYỆN TẬP

- 9.1** Cho $abc \neq 0$, chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm :

$$ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0.$$

- 9.2** Cho $a, b, c \in (0 ; 2)$, chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai : $a(2 - b) > 1$; $b(2 - c) > 1$; $c(2 - a) > 1$.

- 9.3** Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh rằng nếu :

$$x + y + z > \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

thì có một và chỉ một trong ba số x, y, z lớn hơn 1.

Hướng dẫn : Xét tích $(x - 1)(y - 1)(z - 1)$.

9.4 Chứng minh rằng trong ba BĐT sau đây có ít nhất một BĐT đúng :

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}; b^2 + c^2 \geq \frac{(c+a)^2}{2}; c^2 + a^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Hướng dẫn : Giả sử cả ba BĐT đều sai ta có :

$$a^2 + b^2 < \frac{(b+c)^2}{2}; b^2 + c^2 < \frac{(c+a)^2}{2}; c^2 + a^2 < \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được điều vô lí.

9.5 Chứng minh rằng nếu $a_1 a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì có ít nhất một trong hai phương trình : $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$; $x^2 + a_2 x + b_2 = 0$ có nghiệm.

§ 10. PHƯƠNG PHÁP DÙNG QUY NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để chứng minh bất đẳng thức đúng với $n \geq n_0$ ta thực hiện các bước sau :

- 1) Kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n = n_0$.
- 2) Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ (thay $n = k$ vào bất đẳng thức cần chứng minh và bất đẳng thức đó được gọi là giả thiết quy nạp).
- 3) Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ (thay $n = k + 1$ vào bất đẳng thức cần chứng minh rồi biến đổi để áp dụng giả thiết quy nạp)

Kết luận bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq n_0$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Với mọi $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, chứng minh :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Hướng dẫn giải

- Với $n=1$. Ta có : $1 > 2\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2}$ (BĐT đúng).
- Giả sử BĐT đúng với $n=k$, nghĩa là :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{k+1} - 2.$$

$$\text{Ta chứng minh : } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq 2\sqrt{k+2} - 2. \quad (1)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geq 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Để có (1) ta chứng minh : } 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} - 2. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : (2)} &\Leftrightarrow \sqrt{k+1}(2\sqrt{k+1}-2) + 1 > \sqrt{k+1}(2\sqrt{k+2}-2) \\ &\Leftrightarrow 2(k+1) - 2\sqrt{k+1} + 1 > 2\sqrt{k+1}\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow (k+1) + (k+2) - 2\sqrt{k+1}\sqrt{k+2} > 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})^2 > 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (3) luôn luôn đúng nên ta có (2) đúng. Từ đó suy ra bất đẳng thức (1) đúng, tức là bất đẳng thức đúng với $n=k+1$.

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 2. a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác vuông với c là cạnh huyền. Chứng minh : $a^{2n} + b^{2n} \leq c^{2n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)

Hướng dẫn giải

- Với $n=1$: Theo Định lí Pi-ta-go ta có : $a^2 + b^2 = c^2$ nên bất đẳng thức xảy ra dấu bằng. Vậy bất đẳng thức đúng khi $n=1$.
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$, tức là ta có : $a^{2k} + b^{2k} \leq c^{2k}$.

- Với $n = k + 1$ ta chứng minh : $a^{2k+2} + b^{2k+2} \leq c^{2k+2}$.

Ta có : $c^{2k+2} = c^2 \cdot c^{2k} \geq (a^2 + b^2)(a^{2k} + b^{2k})$

$$\Rightarrow c^{2k+2} \geq a^{2k+2} + b^{2k+2} + a^2 b^{2k} + a^{2k} b^2 \geq a^{2k+2} + b^{2k+2}$$

Vậy BĐT đúng với $n = k + 1$.

Do đó, bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 3. Chứng minh $\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$, với $a \geq 0$.

Hướng dẫn giải

- Với $n = 1$ ta có : $\sqrt{a} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} < 1 + \sqrt{4a+1}$

$$\Leftrightarrow 4a < 1 + 4a + 1 + 2\sqrt{4a+1} \Leftrightarrow 0 < 2 + 2\sqrt{4a+1} \text{ (đúng)}.$$

- Đặt : $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}}$. Giả sử bất đẳng thức đúng với

$n = k$, tức là : $x_k < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$. Ta có $x_{k+1} = \sqrt{a + x_k}$ nên :

$$x_{k+1}^2 = a + x_k < a + \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2} = \frac{2a + 1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Từ đó suy ra :

$$x_{k+1}^2 < \frac{4a + 2 + 2\sqrt{4a+1}}{4} = \left(\frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2} \right)^2 \Rightarrow x_{k+1} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Do đó bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 4. Cho $x_i > 1, i = \overline{1, n}$. Chứng minh :

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{1}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

Hướng dẫn giải

- Khi $n = 1$: Vế trái bằng vế phải và bằng $\frac{1}{1+x_1}$. Vậy bất đẳng thức đúng.

- Giả sử BĐT đúng đến n , tức là ta có : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$.
- Ta chứng minh bất đẳng thức đúng đến $n+1$, tức là chứng minh :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n+1}{1+\sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x_{n+1}}}.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i} + \frac{n-1}{1+\sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x_{n+1}}} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+x_{n+1}} + \frac{n-1}{1+\sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x_{n+1}}} \\ &\geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} + \frac{n}{1+\sqrt[n]{(x_1 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n+1}} x_{n+1}^{\frac{2n}{n+1}}}} \geq \frac{2n}{1+\sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x_{n+1}}}. \end{aligned}$$

Vậy : $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n+1}{1+\sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x_{n+1}}}$, suy ra đpcm.

Ví dụ 5. Chứng tỏ nếu a, b là hai số tùy ý, thỏa mãn điều kiện $a+b \geq 0$, thì với mọi số nguyên dương n , ta đều có :

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

- Với $n=1$, BĐT đúng
- Giả sử BĐT đúng với $n=k$, nghĩa là :

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^k \leq \frac{a^k + b^k}{2} \quad (*)$$

- Ta cần chứng minh BĐT đúng với $n=k+1$. Nhân 2 vế (*) với $\frac{a+b}{2} \geq 0$, ta được :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1} &\leq \left(\frac{a^k + b^k}{2} \right) \left(\frac{a+b}{2} \right) = \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + a^k b + a b^k}{4} \\ &= \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \frac{a^{k+1} + b^{k+1} - a^k b - a b^k}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \frac{(a-b)(a^k - b^k)}{4}$$

Ta chứng minh được $(a-b)(a^k - b^k) \geq 0$

$$\text{Nên } \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$$

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n .

C. LUYỆN TẬP

10.1 Chứng minh rằng với n số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta có :

$$\sum_{k=1}^n a_k^3 \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2.$$

10.2 Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$. Chứng minh :

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}}.$$

10.3 Chứng minh rằng với mọi $k = 1, 2, \dots, n$, ta có : $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{1+k^2} \cdot C_{2n}^{n+k} < 0$.

§ 11. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CẠNH CỦA TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi gặp bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các biểu thức trong bất đẳng thức cần chứng minh có liên quan đến độ dài các cạnh của tam giác thì ta nên xuất phát từ các bất đẳng thức về cạnh của tam giác để biến đổi đưa đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $a, b, c > 0$ và $|b-c| < a < b+c$; $|a-c| < b < a+c$; $|a-b| < c < a+b$.

B. VÍ DỤ ỨP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì ta có : $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Hướng dẫn giải

a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên ta có :

$$0 < a < b + c \Rightarrow a^2 < a(b + c);$$

$$0 < b < a + c \Rightarrow b^2 < b(a + c);$$

$$0 < c < a + b \Rightarrow c^2 < c(a + b).$$

Cộng vế với vế các BĐT trên, ta được :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 2. Gọi r, R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC có các cạnh là a, b, c . Chứng minh :

a) $(a + b - c)(b + c - a)(a + c - b) \leq abc$; b) $R \geq 2r$.

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1.** Ta có : $a > |b - c| \Rightarrow a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 > 0$;

$$b > |a - c| \Rightarrow b^2 \geq b^2 - (c - a)^2 \geq 0$$

$$c > |a - b| \Rightarrow c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 > 0.$$

Nhân vế với vế các BĐT trên, ta được :

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &\geq [a^2 - (b - c)^2][b^2 - (c - a)^2][c^2 - (a - b)^2] \\ &\geq (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)(b + a - c) \times (c + a - b)(c + b - a) \\ &\geq (a + b - c)^2 (b + c - a)^2 (c + a - b)^2 \end{aligned}$$

Suy ra : $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Dùng phép biến đổi tương đương ta chứng minh được BĐT :

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \quad (\text{có thể áp dụng BĐT Cauchy}).$$

$$\text{Ta có : } (a+b-c)(b+c-a) \leq \left[\frac{(a+b-c) + (b+c-a)}{2} \right]^2 = b^2.$$

$$\text{Tương tự : } (b+c-a)(c+a-b) \leq c^2.$$

$$(c+a-b)(a+b-c) \leq a^2.$$

Các vế của ba BĐT trên đều dương nên khi nhân vế với vế thì được :

$$(a+b-c)^2 (b+c-a)^2 (c+a-b)^2 \leq a^2 b^2 c^2.$$

$$\text{Suy ra : } (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc \quad (\text{đpcm}).$$

b) Gọi S là diện tích của tam giác ABC , ta có công thức :

$$S = \frac{abc}{4R} = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} \text{ và } R = \frac{abc}{4S}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{R}{S} = \frac{pabc}{4S^2} = \frac{pabc}{4p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hêrông})$$

$$= \frac{2abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \geq 2 \quad (\text{theo câu a})$$

Suy ra $R \geq 2r$ (đpcm). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, tức là tam giác ABC đều.

Ví dụ 3. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với chu vi $2p$.

Chứng minh :

$$\text{a) } (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8};$$

$$\text{b) } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Hướng dẫn giải

a) Thay $p = \frac{a+b+c}{2}$ vào BĐT cần chứng minh thì được BĐT :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc,$$

Đây là kết quả của Ví dụ 2. – Trang 34.

b) Dùng phép biến đổi tương đương hoặc dùng BĐT Cô-si ta có BĐT :

$$\text{Với } x, y > 0 \text{ thì : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}. \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng (1) ta có : } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{2p-a-b} = \frac{4}{c};$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{2p-b-c} = \frac{4}{a}; \quad \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{2p-c-a} = \frac{4}{b}.$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên, ta được :

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài của các cạnh của một tam giác với $a \leq b \leq c$ thì : $(a+b+c)^2 \leq 9bc$.

Hướng dẫn giải

Vì $a \leq b$ nên $a+b+c \leq 2b+c$. Ta chứng minh : $(2b+c)^2 \leq 9bc$ (1)

$$\text{Ta có : (1)} \Leftrightarrow 4b^2 - 5bc + c^2 \leq 0 \Leftrightarrow (4b^2 - 4bc) + (c^2 - bc) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b(b-c) - c(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow (4b-c)(b-c) \leq 0. \quad (2)$$

(2) đúng vì $b \leq c$ và $4b-c \geq a+b-c+2b > 0$. Vậy ta có (1), từ đó suy ra : $(a+b+c)^2 \leq (2b+c)^2 \leq 9bc$ (đpcm).

Ví dụ 5. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right| < 1.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right) \right| = \left| \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b^2 - c^2}{bc} + \frac{c^2 - a^2}{ca} \right|$$

$$= \frac{1}{abc} \cdot |c(a^2 - b^2) + a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2)|.$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} & c(a^2 - b^2) + a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) = \\ & = c[(a^2 - c^2) + (c^2 - b^2)] + a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) \\ & = c(a^2 - c^2) + c(c^2 - b^2) + a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) \\ & = (a^2 - c^2)(c - b) + (c^2 - b^2)(c - a) = (a - c)(c - b)(a + c - c - b) \\ & = (a - c)(c - b)(a - b). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right| = \frac{|(a - c)(c - b)(a - b)|}{abc} < \frac{b \cdot a \cdot c}{abc} = 1.$$

(Vì $|a - c| < b$; $|c - b| < a$; $|a - b| < c$).

Ví dụ 6. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với $a < b < c$. Chứng tỏ rằng : $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$.

Hướng dẫn giải

Ta phân tích về trái (VT) của BĐT cần chứng minh ra thừa số :

$$\begin{aligned} VT &= a^3[(b^2 - a^2) + (a^2 - c^2)] + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \\ &= a^3(b^2 - a^2) + a^3(a^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(c^3 - a^3) + (a^2 - c^2)(a^3 - b^3) \\ &= (a - b)(a - c)[-(a + b)(a^2 + ac + c^2) + (a + c)(a^2 + ab + b^2)] \\ &= (a - b)(a - c)(b - c)(ab + bc + ca) < 0 \quad (\text{vì } a < b < c). \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta có : $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 &> a^3 + b^3 + c^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a + b)^2 - c^2] &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a(b+a-c)(b-c-a)+b(c+b-a)(c-a-b)+ \\
&\quad +c(a+b-c)(a+b+c)>0 \\
&\Leftrightarrow (a+b-c)(ab-ac-a^2-bc-b^2+ab+ac+bc+c^2)>0 \\
&\Leftrightarrow (a+b-c)(2ab-a^2-b^2+c^2)>0 \Leftrightarrow (a+b-c)[c^2-(a-b)^2]>0 \\
&\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)>0.
\end{aligned}$$

BĐT cuối cùng luôn đúng vì $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$ nên ta có đpcm.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC với $A \geq B \geq C$. Chứng minh :

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b},$$

trong đó h_a, h_b, h_c là độ dài của ba đường cao xuất phát từ A, B, C ;
 a, b, c là độ dài cạnh tam giác theo thứ tự đối diện với góc A, B, C .

Hướng dẫn giải

Ta có $a \geq b \geq c$ và $h_a = \frac{2S}{a}$; $h_b = \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$ với S là diện tích tam giác ABC . Ta cần chứng minh : $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

BĐT này tương đương với $(b-a)(b-c)(c-a) \geq 0$ (đúng).

C. LUYỆN TẬP

Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.
 Chứng minh :

$$11.1 \quad \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

$$11.2 \quad \sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b).$$

$$11.3 \quad 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0.$$

§ 12. PHƯƠNG PHÁP DÙNG PHÉP TÍNH TỔNG HOẶC TÍCH HỮU HẠN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dùng các tính chất BĐT để đưa một BĐT cần chứng minh về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

• **Phương pháp tính tổng hữu hạn.** Giả sử phải tính tổng

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Ta biểu diễn số hạng tổng quát u_k về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau $u_k = a_k - a_{k+1}$. Khi đó :

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

• **Phương pháp tính tích hữu hạn.** Giả sử phải tính tích

$$P = u_1 u_2 \dots u_n.$$

Ta biểu diễn thừa số tổng quát u_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau $u_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}$. Khi đó : $P = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \dots \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh các BĐT sau với n là số nguyên dương :

$$a) \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4};$$

$$b) 2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1 \quad (n > 1).$$

Hướng dẫn giải

a) Ta biến đổi số hạng tổng quát :

$$\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2 + 4k + 1} < \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Với $k=1$, ta có : $\frac{1}{9} < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right)$

Với $k = 2$, ta có : $\frac{1}{25} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$

Với $k = 3$, ta có : $\frac{1}{49} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$

...

Với $k = n$, ta có : $\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

Cộng về với về các BĐT trên, ta được :

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{4} \text{ (đpcm).}$$

b) $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$

Từ đó suy ra : $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$; (1)

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}). \quad (2)$$

Với (1) cho k lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., n rồi cộng lại ta được :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1). \quad (3)$$

Với (2) cho k lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., $n-1$ rồi cộng lại ta được :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - 1).$$

Suy ra : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1. \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi số hạng tổng quát của vế trái BĐT :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} = \sqrt{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sqrt{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) < \\ &< \sqrt{k} \cdot \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).$$

$$\text{Với } k=1, \text{ ta có : } \frac{1}{2} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\text{Với } k=2, \text{ ta có : } \frac{1}{3\sqrt{2}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

...

$$\text{Với } k=n, \text{ ta có : } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

$$\text{Do đó : } \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < 2 \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và x, y, z là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử AD là đường phân giác trong xuất phát từ A . Ta có :

$$\begin{aligned}S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}cx \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}bx \sin \frac{A}{2} \\ &\Rightarrow 2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = x(b+c) \sin \frac{A}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} < \frac{2bc}{b+c} \quad (0 < \cos \frac{A}{2} < 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right); \quad (2)$$

$$\frac{1}{z} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Ví dụ 4. Chứng minh $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Hướng dẫn giải

Trước hết, ta chứng minh bài toán tổng quát:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (n \geq 1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{2k-1}{2k} = \frac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{4k^2}} < \frac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{4k^2-1}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}. \quad (1)$$

Lần lượt cho $k=1, 2, \dots, n$ ta được n bất đẳng thức dạng (1), sau đó các bất đẳng thức đó vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdots \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\text{Với } n=50, \text{ ta có: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}. \quad (2)$$

Mặt khác ta có:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} \right)^2 = \frac{1^2 3^2 \cdots 99^2}{2^2 4^2 \cdots 100^2} > \frac{1^2 (3^2-1)(5^2-1) \cdots (99^2-1)}{2^2 4^2 \cdots 100^2}$$

$$\text{Suy ra : } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} \right)^2 > \frac{(2.4)(4.6) \cdots (98.100)}{2^2.4^2 \cdots 100^2} = \frac{1}{200} > \frac{1}{225}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} > \frac{1}{15}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra : } \frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}. \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 5. Cho n nguyên dương, chứng minh :

$$I_n = \frac{2^n 1.2 \cdots n}{1.3.5 \cdots (2n+3)} < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } 2n+3 = \sqrt{(2n+3)^2} = \sqrt{4n^2 + 12n + 9} > \sqrt{4n^2 + 12n + 8}.$$

$$\text{Hay : } 2n+3 > \sqrt{4(n^2 + 3n + 2)} = 2\sqrt{(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{Tương tự : } 2n+1 > 2\sqrt{n(n+1)} ; 3 = 2.1+1 > 2\sqrt{1.2}.$$

$$\text{Do đó : } I_n = \frac{2^n 1.2 \cdots n}{1.3.5 \cdots (2n+3)} < \frac{2^n 1.2 \cdots n}{2^n \sqrt{1.2} \sqrt{2.3} \sqrt{3.4} \cdots \sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

$$\text{Vậy : } I_n < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{(n+1)^2}} \Rightarrow I_n < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}.$$

C. LUYỆN TẬP

12.1 Chứng minh $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}.$

12.2 Chứng minh $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

(Trích đề thi Đại học Thái Nguyên, năm 2000)

12.3 Chứng minh $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2, \forall n \in \mathbb{Z}.$

12.4 Với mọi số tự nhiên $n > 1$. Chứng minh :

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}.$$

12.5 Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

§ 13. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Sử dụng Bất đẳng thức Cô-si là một trong những phương pháp hay dùng nhất và có hiệu quả nhất để chứng minh bất đẳng thức.

Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ta có BĐT :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh :

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Tp. HCM, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên có thể giả sử $a \leq b \leq c$. Áp dụng BDT Cô-si, ta có :

$$(a+b+1)(1-a)(1-b) \leq \left[\frac{(a+b+1) + (1-a) + (1-b)}{3} \right]^3 = 1.$$

$$\text{Suy ra : } (1-a)(1-b) \leq \frac{1}{a+b+1}; (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1-c}{a+b+1}.$$

Vì $a \leq b \leq c$ nên $\frac{a}{b+c+1} \leq \frac{a}{a+b+1}$ và $\frac{b}{a+c+1} \leq \frac{b}{a+b+1}$. Do đó :

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{c+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq \\ & \leq \frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{a+b+1} + \frac{c}{a+b+1} + \frac{1-c}{a+b+1} = \frac{a+b+1}{a+b+1} = 1 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho ΔABC có độ dài các cạnh là a, b, c và số đo các góc là A, B, C . Chứng minh :

$$a) ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(a+c-2b) \geq 0. \quad (1)$$

$$b) \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12. \quad (2)$$

Khi nào các dấu đẳng thức xảy ra ?

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có : } (1) \Leftrightarrow ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 6.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương rồi cộng lại ta được đpcm.
Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

$$b) \text{ Ta có : } (2) \Leftrightarrow \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq 9.$$

$$\text{Trong } \Delta ABC \text{ ta luôn có : } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có :

$$\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} & \geq 3 \sqrt{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} \\ & \Rightarrow \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Lại áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\left(\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \right)^2} \geq 9$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 3. Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$. Chứng minh :

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}.$$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\frac{2x}{1+x^2} \leq \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$;

Tương tự : $\frac{y}{1+y^2} \leq \frac{1}{2}$; $\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{1}{2}$.

Do đó : $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

b) Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \right) (1+x+1+y+1+z) \geq \\ & \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+y} \cdot \frac{1}{1+z}} \cdot 3 \sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 9 \end{aligned}$$

Suy ra : $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z} \geq \frac{3}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 4. Cho a, b, c thoả điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh :

$$8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c.$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2000)

Hướng dẫn giải

Đặt : $x = 2^a$, $y = 2^b$, $z = 2^c$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 2^{a+b+c} = 1$. Ta cần chứng minh : $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$. Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương, ta có : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$; $x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3} = 3x \Rightarrow x^3 \geq 3x - 2$.

Tương tự : $y^3 \geq 3y - 2$; $z^3 \geq 3z - 2$. Do đó :

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3(x + y + z) - 6 = x + y + z + 2(x + y + z - 3) \geq x + y + z.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Ví dụ 5. Cho $a, b, c > 0$ với $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$. Chứng minh :

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$. Khi đó :

$$\frac{a+b}{2a-b} = \frac{a + \frac{2ac}{a+c}}{2a - \frac{2ac}{a+c}} = \frac{a+3c}{2a} \quad \text{và} \quad \frac{c+b}{2c-b} = \frac{c + \frac{2ac}{a+c}}{2c - \frac{2ac}{a+c}} = \frac{c+3a}{2c}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} &= \frac{a+3c}{2a} + \frac{c+3a}{2c} = \frac{1}{2} + \frac{3c}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{3a}{2c} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 1 + \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 4. \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = c$.

Ví dụ 6. a, b, c là độ dài của một tam giác có diện tích S . Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. Trong trường hợp nào thì xảy ra dấu đẳng thức ?

Hướng dẫn giải

Theo công thức Hê-rông ta có : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. (1)

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số không âm $p-a, p-b, p-c$ ta có :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \right]^3 = \frac{p^3}{27}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}.$

Mặt khác, ta lại có : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
 $\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)$
 $\leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ (có thể dùng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski).

Do đó : $S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$ Suy ra : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có các cạnh a, b, c và có diện tích bằng 1, thì $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16.$

Hướng dẫn giải

Theo công thức Hê-rông : $1 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$\Leftrightarrow 16 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \leq (a^2 + b^2 + 2ab - c^2).c^2$$

(vì $0 < c^2 - (a-b)^2 \leq c^2$)

Suy ra : $16 \leq (2a^2 + 2b^2 - c^2)c^2 = 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4$
 $\leq (a^4 + c^4) + (b^4 + c^4) - c^4 = a^4 + b^4 + c^4.$

Vậy $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c.$

• **Tổng quát :** Nếu diện tích tam giác là S thì theo Ví dụ 6 và BĐT Bu-nhi-a-côp-ski ta có :

$$3(a^4 + b^4 + c^4) = (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 48S^2$$

Suy ra : $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2 \Rightarrow S^2 \leq \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4).$ (1)

Chú ý. Ta có thể sử dụng công thức :

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

để chứng minh (1).

Ví dụ 8. Cho bốn số dương a, b, c, d . Chứng minh :

$$\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}.$$

(Trích đề thi Đại học Thủy lợi, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si cho 5 số dương, ta có :

$$\frac{a^2}{b^5} + \frac{a^2}{b^5} + \frac{a^2}{b^5} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{b^{15}}} = \frac{5}{b^3} \Rightarrow 3\frac{a^2}{b^5} \geq \frac{5}{b^3} - \frac{2}{a^3}.$$

$$\text{Tương tự : } 3\frac{b^2}{c^5} \geq \frac{5}{c^3} - \frac{2}{b^3}; \quad 3\frac{c^2}{d^5} \geq \frac{5}{d^3} - \frac{2}{c^3}; \quad 3\frac{d^2}{a^5} \geq \frac{5}{a^3} - \frac{2}{d^3}.$$

Cộng các BĐT này lại ta được đpcm.

Ví dụ 9. Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh :

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2bc} = 2a\sqrt{bc}$;

$$b^2 + ac \geq 2\sqrt{b^2ac} = 2b\sqrt{ac} ;$$

$$c^2 + ab \geq 2\sqrt{c^2ab} = 2c\sqrt{ab}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a\sqrt{bc}} + \frac{1}{b\sqrt{ac}} + \frac{1}{c\sqrt{ab}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{abc} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}}{abc} = \frac{a+b+c}{2abc}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 10. Cho $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2$. Chứng minh :

$$abc \leq \frac{1}{8}.$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2$ suy ra :

$$\frac{1}{1+a} \geq 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có : $\frac{1}{1+a} \geq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$

Tương tự : $\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$; $\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$.

Từ đó : $\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8 \cdot \frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$

$$\Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}. \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 11. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$a+2b+c \geq 4(1-a)(1-b)(1-c)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned} 4(1-a)(1-b)(1-c) &= [4(b+c)(1-c)](1-b) \\ &\leq (b+1)^2(1-b) = (1-b^2)(1+b) \leq 1+b = a+2b+c. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số thực x , ta có :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Hướng dẫn giải

Do $\left(\frac{12}{5}\right)^x > 0$, $\left(\frac{15}{4}\right)^x > 0$, $\left(\frac{20}{3}\right)^x > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, nên theo Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \left(\frac{12}{5}\right)^x} = \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 4}\right)^x} = 3^x. \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi : $\left(\frac{15}{4}\right)^x = \left(\frac{12}{5}\right)^x \Leftrightarrow x = 0$.

Cũng theo Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \left(\frac{20}{3}\right)^x} = 5^x ; \quad (2)$$

$$\frac{\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^x \left(\frac{12}{5}\right)^x} = 4^x. \quad (3)$$

Dấu đẳng thức trong (2), (3) xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Cộng (1), (2), (3) về theo về ta có đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 13. Cho $x, y, z, t \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Chứng minh :

$$\log_x \left(y - \frac{1}{4}\right) + \log_y \left(z - \frac{1}{4}\right) + \log_z \left(t - \frac{1}{4}\right) + \log_t \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 8 \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } x^2 \geq x - \frac{1}{4}, y^2 \geq y - \frac{1}{4}, z^2 \geq z - \frac{1}{4}, t^2 \geq t - \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Dấu đẳng thức trong 4 bất đẳng thức trên theo thứ tự xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}$. Do $x, y, z, t \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$ nên theo tính chất của lôgarit với cơ số dương và nhỏ hơn 1, từ (2) ta có :

$$\log_x y^2 \leq \log_x \left(y - \frac{1}{4} \right), \log_y z^2 \leq \log_y \left(z - \frac{1}{4} \right),$$

$$\log_z t^2 \leq \log_z \left(t - \frac{1}{4} \right), \log_t x^2 \leq \log_t \left(x - \frac{1}{4} \right).$$

Cộng 4 bất đẳng thức trên về theo về ta được :

$$\begin{aligned} \log_x \left(y - \frac{1}{4} \right) + \log_y \left(z - \frac{1}{4} \right) + \log_z \left(t - \frac{1}{4} \right) + \log_t \left(x - \frac{1}{4} \right) &\geq \\ &\geq 2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x). \end{aligned} \quad (3)$$

Dễ thấy $\log_x y, \log_y z, \log_z t, \log_t x > 0$ nên theo Bất đẳng thức Cô-si ta có : $\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x \geq 4\sqrt[4]{\log_x y \log_y z \log_z t \log_t x}$. (4)

Do $\log_x y \log_y z \log_z t \log_t x = \log_x y \cdot \frac{\log_x z}{\log_x y} \cdot \frac{\log_x t}{\log_x z} \cdot \frac{1}{\log_x t} = 1$ nên từ (3) và (4) suy ra đpcm. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 14. Cho n là số tự nhiên, $n \geq 2$. Chứng minh :

$$C_n^0 C_n^1 \cdots C_n^n \leq \left(\frac{2^n - 2}{n - 1} \right)^{n-1}.$$

Hướng dẫn giải

Vì $C_n^0 = C_n^n = 1$ nên ta có : $C_n^0 C_n^1 \cdots C_n^{n-1} C_n^n = C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^{n-1}$. (1)

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có : $\frac{C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^{n-1}}$. (2)

Mặt khác : $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} = (C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n) - (C_n^0 + C_n^n)$
 $= (1+1)^n - 2 = 2^n - 2$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $\left(\frac{2^n - 2}{n-1} \right)^{n-1} \geq C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^{n-1}$. (4)

Từ (1) và (4) suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$C_n^1 = C_n^2 = \cdots = C_n^{n-1} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3. \end{cases}$$

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} = 1$.

Chứng minh : $\tan \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{A+B}{2} = \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}.$$

Theo Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} &\leq \left(\frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \tan \frac{C}{2} &= 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \geq \frac{3}{4} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} = 1 \\ \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tức $\triangle ABC$ cân đỉnh C với A là góc thoả điều kiện $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 16. Giả sử ABC là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh :

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

b) $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $-\tan A = \tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$

$$\Rightarrow -\tan A(1 - \tan B \tan C) = \tan B + \tan C$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C \text{ (đpcm).}$$

b) Vì A, B, C nhọn nên $\tan A, \tan B, \tan C$ là các số dương. Áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \tan C &\geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} = 3\sqrt{\tan A + \tan B + \tan C} \\ &\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 \geq 27 \\ &\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ (đpcm).}\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.

Ví dụ 17. Chứng minh rằng nếu $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì $\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 8$.

Hướng dẫn giải

Chia tử và mẫu của BĐT cho $\cos^3 x$ và đặt $t = \tan x$ ($0 < t < 1$) ta có :

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)} = \frac{1+t^2}{t^2(1-t)} = \frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)}.$$

Ta có $\frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t} + t > 2$ (BĐT Cô-si và dấu “=” không xảy ra do $t \neq 1$)

và $\frac{1+t^2}{t(1-t)} \geq \left[\frac{2}{t+(1-t)}\right]^2 = 4$. Do đó $\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > \frac{2}{t(1-t)} \geq 8$ (đpcm).

Ví dụ 18. a) Trong mọi tam giác ABC , ta đều có :

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \leq \frac{1}{8}.$$

b) Nếu ABC không phải là tam giác tù, thì :

$$(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$.

Áp dụng BĐT Cô-si và áp dụng kết quả ở Ví dụ 3, ta được :

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &\leq \left(\frac{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}}{3} \right)^3 \\ &\leq \sin^3 \frac{A+B+C}{6} = \sin^3 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Suy ra : $8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ (đpcm).

b) Giả sử $0 < A, B, C \leq \frac{\pi}{2}$. Ta có :

$$1 - \sin A = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - A \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right).$$

Tương tự : $1 - \sin B = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \right)$; $1 - \sin C = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} \right)$.

Do đó : $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C)$

$$= 8 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} \right).$$

Ta có $\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}$; $\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}$; $\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} \in \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ nên áp dụng kết quả trên ta có :

$$\begin{aligned}\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} \right) &\leq \sin^3 \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{A+B+C}{2}}{3} = \sin^3 \frac{\pi}{12} \\ \Rightarrow 8 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} \right) \\ &\leq 8 \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^3 = 8 \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right)^3 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \quad (\text{đpcm}).\end{aligned}$$

Ví dụ 19. a) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta đều có :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin B} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin C} \right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3,$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra với tam giác đều.

b) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có 3 góc nhọn thì

$$\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos C}\right) \geq 27,$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra với tam giác đều.

Hướng dẫn giải

Trước hết, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta chứng minh kết quả tổng quát sau :

Cho ba số dương a, b, c có tổng $a + b + c \leq k$ thì

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{3}{k}\right)^3. \quad (1)$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = c = \frac{k}{3}$.

Thật vậy, ta có :

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 1 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{1}{abc}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có : $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{k^3}{27}$. Do đó :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{k} = \frac{9}{k}; \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \frac{3}{\frac{k^2}{9}} = \frac{27}{k^2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 1 + \frac{9}{k} + \frac{27}{k^2} + \frac{27}{k^3} = \left(1 + \frac{3}{k}\right)^3.$$

Vậy ta có (1) và dấu bất đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{k}{3}$.

Áp dụng (1) vào bài toán.

a) Ta có : $\sin A, \sin B, \sin C > 0$ và $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Do đó : } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

b) $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C > 0$. Ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy : $\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos C}\right) \geq (1+2)^3 = 27.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 20. Chứng minh rằng, nếu $\triangle ABC$ nhọn thì :

$$\tan^8 A + \tan^8 B + \tan^8 C \geq 9 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C.$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Trong mọi $\triangle ABC$ không vuông ta đều có :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$\triangle ABC$ nhọn nên $\tan A, \tan B, \tan C > 0$. Áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

$$\Rightarrow (\tan A \tan B \tan C)^2 \geq 27 \tan A \tan B \tan C$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}.$$

Theo BĐT Cô-si : $\tan^8 A + \tan^8 B + \tan^8 C \geq 3\sqrt[3]{\tan^8 A \tan^8 B \tan^8 C}.$

Do đó :

$$\begin{aligned} \tan^8 A + \tan^8 B + \tan^8 C &\geq 3 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C \sqrt[3]{\tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C} \\ &\geq 9 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 21. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} + \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \geq 6. \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 2000)

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có : (1)} &\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}} \\ &\quad + \frac{2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}} \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6.\end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương rồi cộng lại ta được đpcm.

Ví dụ 22. Chứng minh rằng nếu $0 \leq x, y, z \leq \pi$ thì :

$$\begin{aligned}\text{a)} & \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\left(\frac{x+y}{2}\right); \\ \text{b)} & \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right).\end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có : } \frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leq \sin\frac{x+y}{2}.$$

(Vì $0 < \frac{x+y}{2} < \pi$ nên $\sin\frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos\frac{x-y}{2} \leq 1$).

b) Với $x, y, z, t \in [0; \pi]$ và áp dụng a) hai lần ta có :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x + \sin y + \sin z + \sin t}{4} &= \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) + \frac{1}{2}(\sin z + \sin t)}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{z+t}{2}\right) \leq \sin\frac{x+y+z+t}{4}.\end{aligned}\quad (1)$$

Thay $t = \frac{x+y+z}{3} \in [0; \pi]$ vào (1) ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(\sin x + \sin y + \sin z + \sin \frac{x+y+z}{3} \right) \\ & \leq \sin \frac{x+y+z + \frac{x+y+z}{3}}{4} = \sin \frac{x+y+z}{3} \\ & \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z \leq 3 \sin \frac{x+y+z}{3} \\ & \Rightarrow \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin \frac{x+y+z}{3} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Ví dụ 23. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh :

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

(Trích đề thi Đại học, Khối D, năm 2005)

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương, ta có :

$$1+x^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}} = 3\sqrt{3}$$

Cộng (1), (2), (3) ta được bất đẳng thức phải chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$.

C. LUYỆN TẬP

13.1 Cho $a, b \geq 1$. Chứng minh : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$.

13.2 Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

13.3 Cho $a, b > 0$ và $a+b=1$. Chứng minh :

$$\text{a) } \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6; \quad \text{b) } \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} \geq 14.$$

Hướng dẫn : Áp dụng : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ($x, y > 0$).

13.4 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh :

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Hướng dẫn : Áp dụng $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

13.5 Cho $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh :

$$\text{a) } \sqrt[m+n]{m^2 n^2} \leq \frac{m^2 + n^2}{2}; \quad \text{b) } \left(\frac{m^2 + n^2 + p^2}{m+n+p} \right)^{m+n+p} \geq m^m n^n p^p.$$

Hướng dẫn :

a) Áp dụng BĐT Cô-si cho $m+n$ số gồm n số m^2 và m số n^2 .

b) Áp dụng BĐT Cô-si cho $m+n+p$ số gồm m số m , n số n và p số p .

13.6 Cho $a > 0$. Chứng minh : $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} \leq 1+a$.

13.7 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh :

$$\text{a) } (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+ab^2)(1+bc^2)(1+ca^2);$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1 + \sqrt[3]{abc}.$$

13.8 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh :

$$a) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2};$$

$$b) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{15}{1};$$

$$c) \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}; \quad d) \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Hướng dẫn :

a) Cộng hai vế cho 3 rồi áp dụng $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ (với $a, y, z > 0$).

b) Áp dụng a) và BĐT Cô-si cho hai số.

c) Cộng hai vế cho $\frac{a+b+c}{2}$ và áp dụng câu a).

$$d) \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

13.9 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

(Trích đề thi Đại học Thủy lợi, năm 1999)

Hướng dẫn : $a^3+b^3+abc = (a+b)(a^2+b^2-ab)+abc \geq ab(a+b+c)$.

13.10 Cho $a, y, z > 0$ và $xyz=1, n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh :

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n + \left(\frac{1+y}{2}\right)^n + \left(\frac{1+z}{2}\right)^n \geq 3.$$

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1997)

13.11 Chứng minh rằng : $\forall a \in \mathbb{R} : 3^{a^2-4} + 3^{4a+8} \geq 2$.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Quy Nhơn, năm 2000)

13.12 Cho $x, y, z > 0$ có $x+y+z=1$. Chứng minh : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{18}{xyz+2}$.

(Trích đề thi Đại học Tây Nguyên, năm 2000)

Hướng dẫn : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9 > \frac{18}{xyz+2}$.

13.13 Cho x, y, z là 3 số dương và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2003)

§ 14. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC BU-NHI-A-CÔP-SKI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giống như khi dùng Bất đẳng thức Cô-si, để có thể áp dụng được Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ứng với mỗi bất đẳng thức cần chứng minh phải lựa chọn ra hai bộ số thích hợp (không đòi hỏi điều kiện “không âm” như đối với Bất đẳng thức Cô-si).

Cho n cặp số bất kì $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Ta có bất đẳng thức :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $\exists k : a_i = kb_i$ (*) với $i = \overline{1, n}$.

(Nếu $b_i \neq 0, \forall i$ thì (*) được viết : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. a, b, c là các độ dài cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi.

Chứng minh : $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$.

(Trích đề thi Đại học Y Dược, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski cho sáu số : $1, 1, 1, \sqrt{p-a}, \sqrt{p-b}, \sqrt{p-c}$ ta được :

$$\begin{aligned} & (1 \cdot \sqrt{p-a} + 1 \cdot \sqrt{p-b} + 1 \cdot \sqrt{p-c})^2 \\ & \leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \cdot (p-a + p-b + p-c) = 3p. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}. \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

$$\text{Mặt khác : } \sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } p < p-a + p-b + p-c + 2\sqrt{(p-c)(p-b)} + \\ + 2\sqrt{(p-b)(p-c)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)}.$$

BĐT cuối cùng đúng nên ta có (2). Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 2. a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

(Trích đề thi Đại học Y Dược, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) (1^2 + 1^2 + 1^2) \geq \left(\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| \right)^2$$

$$\text{Suy ra : } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \left(\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| \right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

$$\text{vì : } \frac{1}{3} \left(\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| \right) \geq \sqrt[3]{\frac{abc}{abc}} = 1 \text{ và } \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{c} \right| + \left| \frac{c}{a} \right| \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng, nếu phương trình

$$x^4 + bx^3 + cx^3 + bx + 1 = 0 \text{ có nghiệm thì } b^2 + (c-2)^2 > 3.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $x^4 + bx^3 + cx^3 + bx + 1 = 0$.

$$\text{Chia hai vế cho } x_0^2 \neq 0, \text{ ta được : } x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + b \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right) + c = 0. \quad (1)$$

Đặt : $X_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$ thì $X_0^2 = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 2 \geq 4$ và (1) trở thành :

$$X_0^2 + bX_0 + c - 2 = 0.$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$X_0^4 = (bX_0 + c - 2)^2 \leq [b^2 + (c - 2)^2](X_0^2 + 1)$$

$$\text{Suy ra : } b^2 + (c - 2)^2 \geq \frac{X_0^4}{X_0^2 + 1} = X_0^2 - 1 + \frac{1}{X_0^2 + 1} > 4 - 1 = 3$$

Vậy : $b^2 + (c - 2)^2 > 3$ (đpcm).

Ví dụ 4. Chứng minh rằng, nếu phương trình

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (x + y)^2 = c^2$$

có nghiệm thì $(a + b)^2 \leq 3c^2$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm của phương trình đã cho. Khi đó :

$$(x_0 + a)^2 + (y_0 + b)^2 + (x_0 + y_0)^2 = c^2.$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= [(x_0 + a) + (y_0 + b) + (-x_0 - y_0)]^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)[(x_0 + a)^2 + (y_0 + b)^2 + (x_0 + y_0)^2] \end{aligned}$$

Suy ra : $(a + b)^2 \leq 3c^2$ (đpcm).

Ví dụ 5. Giả sử a, b, c, d là 4 số dương thoả mãn điều kiện :

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3. \quad (1)$$

Chứng minh : $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{1+a}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+d}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow [(1+a) + (1+b) + (1+c) + (1+d)]$$

$$\times \left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \right) \leq 4 + a + b + c + d \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski cho 8 số : $\sqrt{1+a}, \sqrt{1+b}, \sqrt{1+c},$

$\frac{\sqrt{a}}{1+a}, \frac{\sqrt{b}}{1+b}, \frac{\sqrt{c}}{1+c}, \frac{\sqrt{d}}{1+d}$, ta được :

$$[(1+a) + (1+b) + (1+c) + (1+d)] \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \right]$$

$$\geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \leq 4 + a + b + c + d$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd}) \leq 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 6 số ta được :

$$2 \geq 6 \sqrt[6]{\sqrt{a^3 b^3 c^3 d^3}} \Rightarrow \sqrt[4]{abcd} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 6. Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$\frac{a}{2b+2c-a} + \frac{b}{2c+2a-b} + \frac{c}{2a+2b-c} \geq 1.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski cho 6 số :

$$\sqrt{\frac{a}{2b+2c-a}}, \sqrt{\frac{b}{2c+2a-b}}, \sqrt{\frac{c}{2a+2b-c}},$$

$$\sqrt{a(2b+2c-a)}, \sqrt{b(2c+2a-b)}, \sqrt{c(2a+2b-c)}.$$

Sau đó dùng phép biến đổi tương đương chứng minh :

$$(a+b+c)^2 \geq 4ab+4bc+4ca-a^2-b^2-c^2.$$

Cách khác. Có thể đặt : $x = 2b + 2c - a$, $y = 2a + 2c - b$, $z = 2a + 2b - c$ rồi áp dụng BĐT Cô-si.

Ví dụ 7. Cho $a \geq 1$, $b \geq 1$. Chứng minh :

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}.$$

(Trích đề thi Đại học Y Dược Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski ta có :

$$(1 \cdot \sqrt{\log_2 a} + 1 \cdot \sqrt{\log_2 b})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\log_2 a + \log_2 b) = 2 \log_2 ab. \quad (1)$$

Theo BĐT Cô-si, ta có :

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \log_2 ab \leq 2 \log_2 \frac{a+b}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \leq 4 \log_2 \frac{a+b}{2}$. Do đó :

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 8. Cho các số x , y thoả điều kiện : $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x^3 + y^3 = 2$.

Chứng minh : $x^2 + y^2 \leq 2$.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1995)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$(x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y^3})^2 \leq (x + y)(x^3 + y^3) = 2(x + y)$$

$$\text{Do đó : } (x^2 + y^2)^4 \leq 4(1 \cdot x + 1 \cdot y)^2 \leq 8(x^2 + y^2) \Rightarrow (x^2 + y^2)^3 \leq 8$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Ví dụ 9. Cho x, y, z là ba số thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh :

$$S = xy + yz + 2zx \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$\begin{aligned} xy + yz &\leq \sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + y^2} \Rightarrow xy + yz \leq \sqrt{2(x^2 + z^2)} y^2 \\ &\Rightarrow xy + yz \leq \sqrt{2y^2(1-y^2)} \end{aligned} \quad (1)$$

(do $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

$$\text{Để thấy : } 2zx \leq x^2 + z^2 = 1 - y^2. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } S \leq \sqrt{2y^2(1-y^2)} + (1-y^2). \quad (3)$$

Dấu đẳng thức trong (3) xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} z = x \\ \frac{x}{z} = \frac{y}{y} \end{cases} \Leftrightarrow z = x.$

$$\text{Ta có : } \sqrt{2y^2(1-y^2)} + (1-y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4y^2 - 4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2) + \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Lại áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski với hai dãy $\sqrt{4y^2 - 4y^4}$; $(1-2y^2)$ và $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}$, ta có :

$$4y^2 - 4y^4 + (1-2y^2)^2 \geq \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4y^2 - 4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2) \right]^2.$$

$$\text{Hay : } \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4y^2 - 4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2).$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \frac{\sqrt{3}+1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4y^2 - 4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2) + \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra đpcm và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời xảy ra dấu đẳng thức trong (4) và (5), tức là :

$$\begin{cases} x = z \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{4y^2 - 4y^4} = 2(1 - 2y^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}} \end{cases}$$

Ví dụ 10. Cho n là số tự nhiên, $n \geq 1$. Chứng minh :

$$\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \dots + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski cho hai dãy $a_1 = \sqrt{C_n^1}$;

$a_2 = \sqrt{C_n^2}$; ... ; $a_n = \sqrt{C_n^n}$ và $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$, ta có :

$$\left(\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \dots + \sqrt{C_n^n} \right)^2 \leq (C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n)(1 + 1 + \dots + 1). \quad (1)$$

Vì $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n - 1 = 2^n - 1$ nên thay vào (1) ta được :

$$\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + \dots + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{(2^n - 1)n} \quad (\text{đpcm}).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $C_n^1 = C_n^2 = \dots = C_n^n \Leftrightarrow n = 1$.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có :

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq \sqrt{\cos \frac{A}{2}} + \sqrt{\cos \frac{B}{2}} + \sqrt{\cos \frac{C}{2}}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski cho hai dãy $\sqrt{\sin A}$; $\sqrt{\sin B}$

và 1 ; 1, ta có : $(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B})^2 \leq (\sin A + \sin B)(1 + 1)$. Ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} &\leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} \\ &= \sqrt{4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \leq 2 \sqrt{\cos \frac{C}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2 \sqrt{\cos \frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} \sin A = \sin B \\ \cos \frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$

Tương tự, ta có : $\sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 2\sqrt{\cos \frac{A}{2}} ; \quad (2)$

$$\sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin A} \leq 2\sqrt{\cos \frac{B}{2}} . \quad (3)$$

Dấu “=” trong (2), (3) tương ứng xảy ra khi và chỉ khi $B = C, C = A.$

Cộng (1), (2), (3) về theo về ta được đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời xảy ra dấu đẳng thức trong (1), (2), (3), tức là tam giác ABC đều.

Ví dụ 12. k, l, m là độ dài các trung tuyến của tam giác ABC , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh : $k+l+m \leq \frac{9R}{2}.$

Hướng dẫn giải

Giả sử k, l, m là độ dài các trung tuyến kẻ từ A, B, C . Ta có :

$$\begin{cases} 2k^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 \\ 2l^2 + \frac{b^2}{2} = a^2 + c^2 \\ 2m^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow k^2 + l^2 + m^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Mặt khác : $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$$= 4R^2(2 + 2\cos A \cos B \cos C) \leq 8R^2 \left(1 + \frac{1}{8}\right) \leq 9R^2$$

Do đó : $k^2 + l^2 + m^2 \leq \frac{27R^2}{4}.$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$(k+l+m)^2 \leq 3(k^2 + l^2 + m^2) \leq \frac{81R^2}{4} \Rightarrow k+l+m \leq \frac{9R}{2} \text{ (đpcm).}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 13. Cho α, β, γ là 3 góc tạo bởi đường chéo của hình hộp chữ nhật với ba cạnh xuất phát từ một đỉnh. Chứng minh :

a) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$;

b) $\sqrt{4\cos^2 \alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2 \beta + 1} + \sqrt{4\cos^2 \gamma + 1} \leq \sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\cos \alpha = \frac{a}{d}$; $\cos \beta = \frac{b}{d}$; $\cos \gamma = \frac{c}{d}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

b) Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski :

$$\begin{aligned} & \sqrt{4\cos^2 \alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2 \beta + 1} + \sqrt{4\cos^2 \gamma + 1} \leq \\ & \leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{4(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 3} = \sqrt{21} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

C. LUYỆN TẬP

14.1 a) Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}.$$

b) Cho $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh :

$$|u(x-y) + v(x+y)| \leq \sqrt{2}.$$

14.2 Cho x, y, z thoả $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{4}{3}$. Chứng minh :

$$x + y + z \leq 4.$$

14.3 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c)$

14.4 Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$; $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ là một hoán vị của $x_1, x_2, \dots,$

$$x_n. \text{ Chứng minh } \sqrt{\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Hướng dẫn : } (\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})^2 \leq n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

$$= n \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_{i_1}}} \cdot \sqrt{x_{i_1}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_{i_n}}} \cdot \sqrt{x_{i_n}} \right)^2 \leq n \left(\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}} \right) (x_{i_1} + \dots + x_{i_n}).$$

14.5 Cho $\triangle ABC$, chứng minh rằng nếu $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = 9$ thì $\triangle ABC$ đều.

(Trích đề thi Đại học KTQD, năm 1999)

Hướng dẫn : Chứng minh $\cot g \frac{A}{2} + \cot g \frac{B}{2} + \cot g \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$ và áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski.

14.6 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh : $\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}\right) \geq 27$.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Tp. HCM, năm 2000)

14.7 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh $3(\cos B + 2 \sin C) + 4(\sin B + 2 \cos C) \leq 15$.

14.8 Cho $\triangle ABC$ nhọn. Chứng minh :

a) $\tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81$;

b) Nếu $A \geq B \geq C$ và $p = \tan A \tan B$, $q = \tan A \tan C$ thì

$$(p-1)(q-1) \geq 4.$$

14.9 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

a) $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 4\sqrt{3}$;

b) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3 \left[\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right]$;

c) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp 1, năm 1999)

§ 15. PHƯƠNG PHÁP DÙNG VECTOR

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Sử dụng vector để chứng minh bất đẳng thức là một phương pháp hay dùng và rất có hiệu quả. Các bất đẳng thức có thể áp dụng được phương pháp này, nếu như bản thân các bất đẳng thức đó tiềm ẩn các dữ kiện của hình học giải tích.

Cần lưu ý các kết quả sau :

1. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng chiều với $\vec{v}$ hay $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k > 0$).

2. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh : $\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Ta có : $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét hai vector $\vec{u} = \left(a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và

$\vec{v} = \left(-a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó : $\vec{u} + \vec{v} = (1; \sqrt{3})$. Ta có : $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$.

Suy ra : $\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{a + \frac{1}{2}}{-a + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Leftrightarrow a = 0$.

Ví dụ 2. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

(Trích đề thi Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 1997)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2;$$

$$y^2 + yz + z^2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2; \quad z^2 + zx + x^2 = \left(z + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2.$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét các vectơ :

$$\vec{u} = \left(x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}y\right); \quad \vec{v} = \left(y + \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right); \quad \vec{w} = \left(z + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

$$\text{Khi đó : } \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(\frac{3}{2}(x + y + z); \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y + z)\right).$$

Từ $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ suy ra đpcm.

Ví dụ 3. x, y, z là ba số tùy ý. Chứng minh :

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2.x.\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2;$$

$$x^2 + xz + z^2 = x^2 + 2.x.\frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{3z^2}{4} = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2.$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét hai vectơ :

$$\vec{u} = \left(x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}y\right); \quad \vec{v} = \left(-x - \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } |\vec{u}| + |\vec{v}| &= \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \\
 &= \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} + \sqrt{\left(-x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \\
 &\geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2} - x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4}(y-z)^2 + \frac{3}{4}(y+z)^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + yz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Ví dụ 4. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh :

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq 3.$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2000)

Hướng dẫn giải

BĐT cần chứng minh tương đương với :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}} \geq 3.$$

Trong mặt phẳng Oxy xét ba vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{a}; \frac{\sqrt{2}}{b}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{b}; \frac{\sqrt{2}}{c}\right)$ và

$\vec{w} = \left(\frac{1}{c}; \frac{\sqrt{2}}{a}\right)$. Khi đó

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \sqrt{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\right) = (1; \sqrt{2})$$

(vì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$). Từ BĐT : $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ suy ra đpcm.

Ví dụ 5. Giả sử hệ $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh :

$$xy + yz + zx \leq 8.$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{u} = \left(y + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z; y + \frac{z}{2} \right)$ thì :

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}x^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{3} ;$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{3}{4}z^2 + \left(y + \frac{z}{2} \right)^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2} = 4.$$

Ta có : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx)$. Từ $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ suy ra $xy + yz + zx \leq 8$.

Ví dụ 6. Cho $a, b, c > 0$, trong đó $a > c$ và $b > c$. Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Hướng dẫn giải

Xét các vector : $\vec{u} = (\sqrt{a-c}; \sqrt{c})$, $\vec{v} = (\sqrt{c}; \sqrt{b-c})$. Khi đó :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}.$$

Ta có : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a-c} = k\sqrt{c} \\ \sqrt{c} = k\sqrt{b-c} \end{cases} \text{ với } k > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b-c}} \text{ (do } c > 0, a-c > 0, b-c > 0)$$

$$\Leftrightarrow (a-c)(b-c) = c^2 \Leftrightarrow ab = c(a+b) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Ví dụ 7. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh :

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2003)

Hướng dẫn giải

Chọn $\vec{u} = \left(x; \frac{1}{x}\right)$, $\vec{v} = \left(y; \frac{1}{y}\right)$, $\vec{w} = \left(z; \frac{1}{z}\right)$, ta có :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(x + y + z; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Rõ ràng : $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$. Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \\ &\geq \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ là các vector cùng phương, cùng hướng, tức là : $\begin{cases} \vec{u} = k_1 \vec{v} \\ \vec{v} = k_2 \vec{w} \end{cases}$ với $k_1, k_2 > 0$ (*).

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có : } &(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \\ &= 81(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 80(x + y + z)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Theo Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned} &81(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \\ &\geq 18(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 18 \cdot 9 = 162. \end{aligned} \quad (3)$$

Dấu đẳng thức trong (3) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 9(x + y + z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ giả thiết } 0 < x + y + z \leq 1 \text{ suy ra : } 80(x + y + z)^2 \leq 80. \quad (4)$$

Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra khi và chỉ khi : $x + y + z = 1$.

Từ (3), (4), (1) cho ta : $P \geq \sqrt{82}$ (đpcm). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời xảy ra dấu đẳng thức trong (3), (4) và (*), tức là :

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 8. Cho hệ
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 4 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 12 \end{cases}$$

chứng minh $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \geq 13$.

Hướng dẫn giải

Trong hệ toạ độ $Oxyz$, chọn :

$$A(a_1; b_1; c_1); \quad B(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2);$$

$$C(a_1 + a_2 + a_3; b_1 + b_2 + b_3; c_1 + c_2 + c_3).$$

$$\text{Khi đó } OA = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}; \quad AB = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2};$$

$$BC = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}; \quad OC = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

Ta luôn có : $OA + AB + BC \geq OC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2} \geq 13 \text{ (đpcm).}$$

C. LUYỆN TẬP

15.1 Chứng minh rằng với mọi x, y ta đều có :

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

15.2 Chứng minh :

$$a) \sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} \geq 5 \quad \forall x, y;$$

$$b) \sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geq 5;$$

$$c) \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cos \beta} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta)}$$

15.3 Tìm nghiệm nguyên dương của hệ :
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} = 2 \\ x + y + z \leq 11 \end{cases}$$

§ 16. PHƯƠNG PHÁP DÙNG DẤU TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương pháp này sử dụng các kết quả của tam thức bậc hai để chứng minh bất đẳng thức. Để làm được điều này ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa bất đẳng thức cần chứng minh thành dạng của tam thức bậc hai, hoặc là biệt thức của một tam thức bậc hai,...

Định lý về dấu tam thức bậc hai. Cho tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì ta có bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$af(x)$	+	0	-	0	+

Vậy : $af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

$$af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$$

Các dạng toán thường gặp

- Chứng minh $ax^2 \pm bx + c \geq 0; \forall x \in \mathbf{R} \quad (a \neq 0)$. Ta chứng minh $a > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.
- $x \in [a; b] \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. ABC là một tam giác bất kì. Chứng minh rằng với mọi số x ta đều có : $1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C)$.

Hướng dẫn giải

BĐT cần chứng minh tương đương với :

$$x^2 - 2(\cos B + \cos C)x + 2(1 - \cos A) \geq 0. \quad (1)$$

Ta có : $\Delta' = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A)$

$$\begin{aligned} &= 4\cos^2 \frac{B+C}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} - 4\sin^2 \frac{A}{2} \\ &= 4\sin^2 \frac{A}{2} \left(\cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) \leq 0, \text{ vì } \cos \frac{B-C}{2} \leq 1. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với mọi x .

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có :

$$x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta xem vế trái của BĐT cần chứng minh là một tam thức bậc hai đối với x có hệ số $a = 1 + \sin^2 y > 0$. Ta có :

$$\begin{aligned} \Delta' &= (\sin y + \cos y)^2 - (1 + \sin^2 y)(1 + \cos^2 y) \\ &= \sin^2 y + \cos^2 y + 2\sin y \cos y - 1 - \sin^2 y - \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 y \\ &= -\sin^2 y \cos^2 y + 2\sin y \cos y - 1 = -(\sin y \cos y - 1)^2. \\ &= -\left(\frac{1}{2}\sin 2y - 1\right)^2 < 0 \text{ (vì } \sin 2y \neq 2) \end{aligned}$$

Vậy (1) luôn đúng với mọi x, y .

Ví dụ 3. Các số a, b, c, d theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng nếu lấy số m sao cho $2m > |ad - bc|$ thì ta có với mọi x : $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + m^2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c, d lập thành một cấp số cộng nên ta có : $a + d = b + c$.

$$\begin{aligned} \text{Ta biến đổi : } (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) &= (x-a)(x-d)(x-b)(x-c) \\ &= [x^2 - (a+d)x + ad][x^2 - (b+c)x + bc] = (t+ad)(t+bc), \end{aligned}$$

$$\text{với } t = x^2 - (a+d)x = x^2 - (b+c)x.$$

Xét tam thức bậc hai :

$$f(t) = (t+ad)(t+bc) + m^2 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + (ad+bc)t + abcd + m^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \Delta &= (ad+bc)^2 - 4(abcd + m^2) \\ &= (ad-bc)^2 - 4m^2 \leq 0 \quad (\text{vì } |ad-bc| \leq 2m). \end{aligned}$$

Suy ra : $f(t) \geq 0$ với mọi t .

$$\text{Vậy : } (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + m^2 \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

Ví dụ 4. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ (1), với mọi p, q thoả mãn điều kiện $p+q=1$. Ngược lại, chứng tỏ rằng nếu a, b, c là ba độ dài thoả mãn (1) (với điều kiện đã nêu về p, q) thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Hướng dẫn giải

a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên :

$$a+b-c > 0 ; a+c-b > 0 ; b+c-a > 0. \quad (2)$$

Đặt : $S = pa^2 + qb^2 - pqc^2$, thay $q=1-p$ vào S ta được :

$$S = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2.$$

Xem S là tam thức bậc hai đối với p ta có :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 + 2bc) \\ &= [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) < 0 \quad (\text{theo (2)}). \end{aligned}$$

Suy ra : $S > 0$ với mọi p, q , do đó : $pa^2 + qb^2 > pqc^2$.

Ngược lại, nếu a, b, c là độ dài ba đoạn thẳng thoả mãn (1) thì $S > 0$ với mọi p . Do đó ta có :

$$\Delta < 0 \Rightarrow (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0 \Rightarrow (2).$$

Thật vậy, giả sử một trong ba thừa số ở vế trái BĐT trên dương, còn hai thừa số kia âm, chẳng hạn $a+b-c < 0$ và $b+c-a < 0$ khi đó : $2b = (a+b-c) + (b+c-a) < 0$. Vô lí ! Từ (2) suy ra a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Ví dụ 5. Cho các số a, b, c, d, p, q thoả mãn :

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0.$$

Chứng minh $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0 \Rightarrow (p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0.$$

Vậy trong hai số $p^2 - a^2 - b^2$ và $q^2 - c^2 - d^2$ phải có một số dương.

Ta có thể giả sử : $p^2 - a^2 - b^2 > 0$. Xét tam thức bậc hai :

$$\begin{aligned} f(x) &= (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2) \\ &= (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2. \end{aligned}$$

Từ giả thiết : $p^2 - a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow p^2 > a^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow p \neq 0$. Khi đó :

$$f\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{aq}{p} - c\right)^2 - \left(\frac{bq}{p} - d\right)^2 \leq 0 \Rightarrow (p^2 - a^2 - b^2)f\left(\frac{q}{p}\right) \leq 0.$$

Do đó $f(x) = 0$ luôn có nghiệm, tức là $\Delta' \geq 0$. Vậy :

$$\Delta' = (pq - ac - bd)^2 - (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq 0$$

Hay : $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$ (đpcm).

Ví dụ 6. Cho $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + zx = 4. \end{cases}$$

Chứng minh $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 - z^2 \\ xy = 4 - z(x + y) \end{cases} \quad (1)$$

(2)

$$\text{Do đó : } 8 - z^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 8 + 2z(x + y)$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 + 2z(x + y) + z^2 = 16 \Rightarrow x + y + z = \pm 4.$$

i) Với $x + y + z = 4$ hay $x + y = -z + 4$, từ (2) suy ra $xy = (z - 2)^2$.

Vậy x, y là nghiệm của phương trình :

$$\begin{aligned} X^2 - (4 - z)X + (z - 2)^2 &= 0 \Rightarrow \Delta = (4 - z)^2 - 4(z - 2)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow z(8 - 3z) &\leq 0 \Rightarrow 0 \leq z \leq \frac{8}{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

ii) Với $x + y + z = -4$ hay $x + y = -z - 4$, từ (2) suy ra $xy = (z + 2)^2$.

Vậy x, y là nghiệm của phương trình :

$$\begin{aligned} X^2 - (4 + z)X + (z + 2)^2 &= 0 \Rightarrow \Delta = (4 + z)^2 - 4(z + 2)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow z(3z + 8) &\leq 0 \Rightarrow -\frac{8}{3} \leq z \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được : $-\frac{8}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$.

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên : $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC . Chứng minh :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{2} \geq 0. \quad (2)$$

$$\text{Đặt : } t = \sin \frac{C}{2}. \text{ Khi đó (2) trở thành : } f(t) = 2t^2 - 2t \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ta có : $\Delta' = \cos^2 \frac{A-B}{2} - 1 \leq 0 \Rightarrow f(t) \geq 0, \forall t. (\text{đpcm}).$

Ví dụ 8. Cho $y > z > t$. Chứng minh :

$$(x + y + z + t)^2 > 8(xz + yt). \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2x(y + z + t) + (y + z + t)^2 - 8xz - 8yt > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(y - 3z + t) + (y + z + t)^2 - 8yt > 0. \quad (2)$$

(2) có dạng : $af(x) > 0$, trong đó :

$$a = 1 ; f(x) = x^2 + 2(y - 3z + t)x + (y + z + t)^2 - 8yt.$$

Ta có : $\Delta' = (y - 3z + t)^2 - (y + z + t)^2 + 8yt = -4z(2y - 2z + 2t) + 8yt$
 $= 8(z - t)(z - y) < 0$ (vì $y > z > t$).

Vậy : $f(x) > 0, \forall x$ (do $a = 1 > 0$).

Ví dụ 9. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) vô nghiệm và $a + b + c < 0$. Chứng minh $c < 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vì $\Delta < 0$ nên $af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có $f(1) = a + b + c < 0$ nên từ $af(1) > 0 \Rightarrow a < 0$.

Mặt khác : $af(0) > 0 \Rightarrow ac > 0 \Rightarrow c < 0$.

Ví dụ 10. Chứng minh :

$$(x + y)^2 - xy + 1 \geq (x + y)\sqrt{3}, \forall x, y \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

BĐT (1) tương đương với : $x^2 + y^2 + xy + 1 - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y \geq 0$.

Xem về trái là tam thức bậc hai đối với x , ta có :

$$f(x) = x^2 + (y - \sqrt{3})x + y^2 - \sqrt{3}y + 1.$$

Vì $\Delta = (y - \sqrt{3})^2 - 4(y^2 - \sqrt{3}y + 1) = -3y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = -(\sqrt{3}y - 1)^2 \leq 0$,
 với mọi y nên suy ra $f(x) \geq 0, \forall x, y$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
 $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 11. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng với mọi x ta đều có :

$$1 + \frac{x^2}{2} \geq \cos A + x(\cos B + \cos C).$$

Hướng dẫn giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x(\cos B + \cos C) + 1 - \cos A \geq 0$.

Đặt : $f(x) = \frac{x^2}{2} - x(\cos B + \cos C) + 1 - \cos A$. Ta có :

$$\begin{aligned} \Delta &= (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A) \\ &= 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} - 4 \sin^2 \frac{A}{2} = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \left(\cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Suy ra : $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (vì $a = \frac{1}{2} > 0$).

Ví dụ 12. Chứng minh : $4 \sin^2 63^\circ + \frac{15 - \cos 89^\circ}{4 \sin^2 63^\circ} < 8$.

Hướng dẫn giải

Do $\cos 89^\circ > 0$ nên ta có :

$$4 \sin^2 63^\circ + \frac{15 - \cos 89^\circ}{4 \sin^2 63^\circ} < 4 \sin^2 63^\circ + \frac{15}{4 \sin^2 63^\circ}. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh : $4 \sin^2 63^\circ + \frac{15}{4 \sin^2 63^\circ} < 8$. (2)

Thật vậy : (2) $\Leftrightarrow (4 \sin^2 63^\circ)^2 - 8(4 \sin^2 63^\circ) + 15 < 0$
 $\Leftrightarrow 3 < 4 \sin^2 63^\circ < 5$ (theo định lí về dấu tam thức bậc hai) (3)

Rõ ràng, $\sin^2 63^\circ < 1$ và $\sin^2 63^\circ > \sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$. Vậy (3) đúng. Do đó

(2) đúng. Kết hợp (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 13. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.
 Chứng minh :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Hướng dẫn giải

Với mọi số thực y , ta có :

$$(yf(x) + g(x))^2 \geq 0, \forall x \in [a; b]$$

$$\Rightarrow y^2 f^2(x) + 2yf(x)g(x) + g^2(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) y^2 + 2 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) y + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0, \forall y \in \mathbf{R} \quad (*)$$

Xem vế trái của (*) là tam thức bậc hai theo biến y . Từ (*), theo định lí về dấu tam thức bậc hai ta suy ra :

$$\begin{aligned} \Delta' \leq 0 &\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0 \\ &\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

C. LUYỆN TẬP

16.1 Chứng minh BĐT Bu-nhi-a-côp-ski :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Hướng dẫn : Xét $f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 \geq 0, \forall x$.

16.2 Cho ΔABC , chứng minh rằng với mọi x, y, z ta luôn có :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos C + 2yz \cos A + 2zx \cos B.$$

Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn : $f(x) = x^2 - 2x(y \cos C + z \cos B) + y^2 + z^2 - 2yz \cos A$;

$$\Delta' = -(y \sin C - z \cos B)^2 \leq 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

16.3 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác ; x, y, z là ba số thoả $ax + by + cz = 0$. Chứng minh :

a) $xy + yz + zx \leq 0$;

b) $ayz + bxz + cxy \leq 0$.

Hướng dẫn : Thay $z = -\frac{by+ax}{c}$ vào vế trái và xem chúng là các tam thức bậc hai theo x .

16.4 Cho ΔABC , chứng minh :

a) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$;

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$;

c) $\cos A + \cos B + \cos C \geq 12 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

§ 17. PHƯƠNG PHÁP DÙNG MIỀN GIÁ TRỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nếu bất đẳng thức cần chứng minh có dạng :

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta, \text{ với } x \in D.$$

ta có thể sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số chứng minh bất đẳng thức trên. Các bước thực hiện như sau :

• Gọi m là giá trị tùy ý của $f(x)$ trên miền D . Ta có phương trình ẩn

$$x \text{ sau có nghiệm : } \begin{cases} f(x) = m \\ x \in D. \end{cases} \quad (1)$$

• Tùy dạng của (1) mà ta có được điều kiện để (1) có nghiệm. Nói chung, các điều kiện này có dạng $\alpha \leq m \leq \beta$. Khi đó bất đẳng thức đã được chứng minh.

- Bằng cách giải các phương trình cụ thể $f(x) = \alpha$ (hoặc $f(x) = \beta$) ta có được điều kiện để có dấu đẳng thức bên trái (hoặc bên phải) trong bất đẳng thức cần chứng minh xảy ra.

Lưu ý :

- Phương pháp này thích hợp nhất đối với các bất đẳng thức có dạng $\alpha \leq \frac{P(x)}{Q(x)} \leq \beta$ hoặc $\alpha \leq \frac{a \sin x + b \cos x + c}{A \sin x + B \cos x + C} \leq \beta$, với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức của x .
- $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng với mọi α ta luôn luôn có :

$$4 \sin 3\alpha + 5 \geq 4 \cos 2\alpha + 5 \sin \alpha.$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & 4 \sin 3\alpha + 5 - 4 \cos 2\alpha - 5 \sin \alpha \\ &= 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) + 5 - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 5 \sin \alpha \\ &= -16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha + 1 \\ &= (1 - \sin \alpha)(16 \sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha + 1) \\ &= (1 - \sin \alpha)(4 \sin \alpha + 1)^2 \geq 0 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi a ta đều có :

$$\left| \frac{\cos 3x + a \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số : $y = \frac{\cos 3x + a \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$. Ta có y_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình $y_0 = \frac{\cos 3x + a \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$ (1) có nghiệm.

$$(1) \Leftrightarrow y_0(\cos 3x + 2) = \cos 3x + a \sin 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1)\cos 3x - a \sin 3x + 2y_0 - 1 = 0. \quad (2)$$

(2) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$(y_0 - 1)^2 + a^2 \geq (1 - 2y_0)^2 \Leftrightarrow 3y_0^2 - 2y_0 - a^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \leq y_0 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3}$$

Từ đó suy ra với mọi x ta có :

$$\left| \frac{\cos 3x + a \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3. Cho $x > 0$. Chứng minh : $x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \geq 2$.

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$, $x > 0$. Khi đó,

$$\text{hệ (ẩn } x \text{) sau đây có nghiệm : } \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = m \\ x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Hệ (1) tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} 0 < x \leq m \\ x^2 + \frac{1}{x} = (m - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq m \\ 2mx^2 - m^2x + 1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

(3) có nghiệm khi và chỉ khi : $m^4 - 8m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ (chú ý từ (2) có $m > 0$). Vì thế, khi $m \geq 2$ thì (3) có hai nghiệm dương x_1, x_2 với

$x_1 < x_2$. Vì $x_1 + x_2 = \frac{m}{2}$ nên suy ra $x_1 < x_2 < m$. Do đó, $m \geq 2$ chính

là điều kiện để hệ (2) và (3) có nghiệm. Từ đó suy ra với mọi $x > 0$, ta

$$\text{có } x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \geq 2.$$

Ví dụ 4. Cho x, y là các số thực thoả mãn điều kiện :

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Chứng minh : $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x, y) = x^2 + y^2$, với x, y thoả mãn điều kiện đề bài. Gọi m là giá trị tuỳ ý của $f(x, y)$ trên miền đã cho. Như vậy hệ sau (ẩn x và y)

$$\text{có nghiệm : } \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0. \end{cases} \quad (*) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ m^2 - 3m + 1 + 4x^2 = 0. \end{cases} \quad (**) \end{aligned} \quad (2)$$

Phương trình (4) (ẩn x) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$m^2 - 3m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \quad (5)$$

Với điều kiện (5) thì (4) có nghiệm.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } (3) &\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 4m \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 1 + 4y^2 = 4m \\ &\Leftrightarrow 4y^2 = m^2 + m + 1. \end{aligned}$$

Do $m^2 + m + 1 > 0$ với mọi m , nên nói riêng $m^2 + m + 1 > 0$ với mọi m thoả mãn (5).

Vậy, hệ (**) có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Nói

cách khác : $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào xin dành cho bạn đọc tự giải theo cách giải đã biết.

Ví dụ 5. Cho $x, y \in \mathbf{R}$ thoả $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Chứng minh :
 $-4\sqrt{3} - 3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $A = x^2 + xy + y^2 \Rightarrow 0 \leq A \leq 3$, $T = x^2 - xy - 3y^2$

* Nếu $y = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 3$, khi đó : $T = x^2 \Rightarrow 0 \leq T \leq 3$

* Nếu $y \neq 0$ thì $A \neq 0$

$$\Rightarrow T = x^2 - xy - 3y^2 = A \cdot \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = A \cdot \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1}$$

Đặt $a = \frac{x}{y}$. Xét hàm số $f(a) = \frac{a^2 - a - 3}{a^2 + a + 1}$

$$\text{có } f'(a) = \frac{2a^2 + 8a + 2}{(a^2 + a + 1)^2}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 8a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + \sqrt{3} \\ a = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

a	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(a)$	+	0	-	0	+
$f(a)$					
		$\nearrow \frac{-3+\sqrt{48}}{3}$	$\searrow \frac{-3-\sqrt{48}}{3}$	$\nearrow 1$	

$$\Rightarrow \frac{-3 - \sqrt{48}}{3} \leq f(a) \leq \frac{-3 + \sqrt{48}}{3} \text{ và do } 0 \leq A \leq 3 \text{ nên ta có :}$$

$$-3 - \sqrt{48} \leq T \leq -3 + \sqrt{48}$$

$$\text{Vậy } -4\sqrt{3} - 3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$$

C. LUYỆN TẬP

17.1 Chứng minh rằng, với mọi $x \in \mathbf{R}$ ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} \leq 2$.

17.2 Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có $\frac{2}{11} \leq \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \leq 2$.

§ 18. PHƯƠNG PHÁP DÙNG LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dùng phép đổi biến lượng giác thích hợp ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức chứa các biểu thức có dạng lượng giác. Dưới dạng này, bằng các phép tính lượng giác, bất đẳng thức dễ dàng chứng minh hơn.

Các bất đẳng thức có thể dùng được phương pháp này để chứng minh thường có dấu hiệu dễ nhận biết sau đây : Trong biểu thức của nó có chứa các đại lượng dạng $x^2 + y^2$, $1 + x^2$, Điều kiện của bất đẳng thức cho dưới dạng $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$; Biểu thức của nó gắn liền với một hệ thức lượng giác nào đó.

Các phép đổi biến lượng giác thường dùng :

1) Sử dụng điều kiện của biến $|x| \leq k$ ($k > 0$). Đặt $x = k \sin \alpha$ với

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ hoặc } x = k \cos \alpha \text{ với } \alpha \in [0; \pi].$$

2) Biến x, y của bất đẳng thức có điều kiện $x^2 + y^2 = k^2$ ($k > 0$).

$$\text{Đặt } x = k \sin \alpha; y = k \cos \alpha \text{ với } \alpha \in [0; 2\pi].$$

3) Sử dụng điều kiện của biến $x \geq k$ ($k > 0$).

$$\text{Đặt } x = \frac{k}{\cos \alpha} \text{ với } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$\text{Ta có : } x^2 - k^2 = k^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = k^2 \tan^2 \alpha \text{ và } \tan \alpha > 0.$$

4) BĐT có biểu thức : $x^2 + k^2$. Đặt $x = k \tan \alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó $x^2 + k^2 = k^2(1 + \tan^2 \alpha) = \frac{k^2}{\cos^2 \alpha}$ và $\cos \alpha > 0$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số a, b ta đều có :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $a = \tan \alpha, b = \tan \beta$ với $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } A &= \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta)}{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta)} \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}\right) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha + 2\beta). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } |A| = \frac{1}{2} |\sin(2\alpha + 2\beta)| \leq \frac{1}{2}. \text{ Vậy : } -\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ và n là một số nguyên lớn hơn 1 thì ta có bất đẳng thức : $(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n$.

Hướng dẫn giải

Với điều kiện $|x| < 1$, đặt $x = \cos t$. Với $x \neq \pm 1$, ta có $t \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Khi đó $(1+x)^n + (1-x)^n = (1+\cos t)^n + (1-\cos t)^n$

$$= \left(2 \cos^2 \frac{t}{2}\right)^n + \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^n$$

$$= 2^n \left(\sin^{2n} \frac{t}{2} + \cos^{2n} \frac{t}{2} \right) < 2^n \left(\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} \right) = 2^n$$

(Vì với $n \geq 2$, $\sin^{2n} x < \sin^2 x$ và $\cos^{2n} x < \cos^2 x$ với $x \neq k\frac{\pi}{2}$) (đpcm)

Ví dụ 3. Cho $a+b=2$. Chứng minh $a^4+b^4 \geq a^3+b^3$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $ab < 0$, chẳng hạn $b < 0$ thì $a > 2$: $a^4 > a^3$, $b^4 > b^3$.

b) Nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$. Đặt $a = 2\sin^2 \alpha$, $b = 2\cos^2 \alpha$. BĐT cần chứng minh tương đương với: $8\cos^2 2\alpha(\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \geq 0$ (đpcm).

Ví dụ 4. Cho $f(x) = \frac{(1-x^2)\sin a + 2x\cos a}{1+x^2}$. Chứng minh: $|f(x)| \leq 1$;

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \tan \alpha$, biến đổi đi đến $|f(x)| = |\sin(a+2\alpha)| \leq 1$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng từ bốn số cho trước luôn luôn có thể chọn ra được hai số x, y sao cho: $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

Hướng dẫn giải

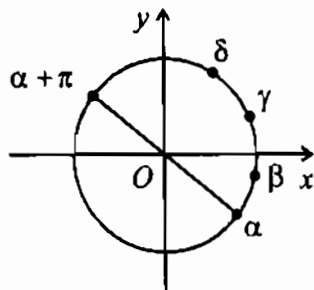
Giả sử bốn số đã cho là $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\tan \gamma$, $\tan \delta$ với:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \pi.$$

Các điểm β, γ, δ chia đoạn $[\alpha; \alpha + \pi]$ thành 4 đoạn. Có ít nhất một trong các đoạn đó có độ dài $\leq \frac{\pi}{4}$. Chẳng hạn $0 \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Khi đó:

$$0 \leq \tan(\beta - \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} \leq 1.$$



Lúc đó, chọn $x = \tan \beta$, $y = \tan \alpha$.

Trường hợp $(\alpha + \pi) - \delta \leq \frac{\pi}{4}$ thì : $\tan(\alpha + \pi - \delta) = \tan(\alpha - \delta)$.

Chọn $x = \tan \alpha$, $y = \tan \delta$.

Ví dụ 6. Cho $-2 \leq x \leq 2$. Chứng minh : $-2 \leq x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Do $-2 \leq x \leq 2$ nên đặt $x = 2 \sin \varphi$ với $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Khi đó :

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 \varphi} = \sqrt{4 \cos^2 \varphi} = 2|\cos \varphi| = 2 \cos \varphi.$$

(Vì khi $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \varphi \geq 0$).

$$\text{Vậy : } -2 \leq x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \varphi + 2 \cos \varphi \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sin \varphi + \cos \varphi \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1. \quad (1)$$

$$\text{Vi } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ nên suy ra : } -\frac{3\pi}{4} \leq \varphi - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra (1) đúng, do đó ta có đpcm. Dấu đẳng thức bên phải xảy ra khi và chỉ khi : $\varphi - \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$; dấu đẳng thức bên trái xảy ra khi và chỉ khi :

$$\varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -2.$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\left(1 + \tan \frac{A}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{B}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{C}{2} \right) \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2},$$

trong đó S là diện tích, p là nửa chu vi.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Trong mọi tam giác ta luôn có :

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } & \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 \\ & \geq 3 \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right) = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}. \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác, ta có : } r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}.$$

$$\text{Suy ra : } \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pr^3}{S^2} = \frac{S^2}{p^2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \tan \frac{A}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{B}{2} \right) \left(1 + \tan \frac{C}{2} \right) = 1 + \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \\ & \quad + \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right) \\ & \quad + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2};$$

$$\text{b) } \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội, năm 2000)

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}.$$

Tương tự : $\sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}$; $\sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}$.

Cộng các BĐT trên lại ta được :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

b) • Nếu tam giác vuông hoặc tù : Hiển nhiên.

• Nếu tam giác nhọn, ta có :

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \leq \frac{1}{2} (1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2}.$$

$$\text{Tương tự : } \cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2} ; \cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}.$$

Nhân các BĐT trên về theo về, ta được :

$$\cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện $2A + 3B = \pi$ thì các cạnh tương ứng của nó thoả mãn

$$a + b \leq \frac{5}{4}c.$$

Hướng dẫn giải

Từ : $2A + 3B = \pi$ suy ra $A = \frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2}$ và $C = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$. Do đó :

$$\sin A = \cos \frac{3B}{2} = \cos \frac{B}{2} \left(4 \cos^2 \frac{B}{2} - 3 \right) = \cos \frac{B}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{B}{2} \right) ;$$

$$\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} ; \sin C = \cos \frac{B}{2}.$$

Áp dụng định lí sin và tính chất tỉ lệ thức, ta có :

$$\frac{\frac{a}{\cos \frac{B}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{B}{2} \right)}}{\frac{b}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}} = \frac{c}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{a}{1 - 4\sin^2 \frac{B}{2}} = \frac{b}{2\sin \frac{B}{2}} = \frac{a+b}{-4\sin^2 \frac{B}{2} + 2\sin \frac{B}{2} + 1}.$$

Từ đó suy ra : $a+b = c \left(-4\sin^2 \frac{B}{2} + 2\sin \frac{B}{2} + 1 \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có : } -4\sin^2 \frac{B}{2} + 2\sin \frac{B}{2} + 1 &= -\left(4\sin^2 \frac{B}{2} - 4\sin \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \\ &= -\left(2\sin \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Vậy : $a+b \leq \frac{5}{4}c$ (đpcm).

Ví dụ 10. Chứng minh rằng với mọi tam giác có 3 cạnh a, b, c thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 \leq c^2$ thì ta luôn có : $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$, trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp, h là độ dài đường cao hạ xuống cạnh c .

Hướng dẫn giải

Ta có : $S = pr = \frac{1}{2}ch \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$, mà $a+b > c$ nên :

$$\frac{r}{h} < \frac{c}{2c} = 0,5.$$

Mặt khác : $c^2 \geq a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 \Rightarrow a+b \leq c\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{r}{h} \geq \frac{c}{c(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}-1 > 0,4$$

Ví dụ 11. Gọi R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC ; h, l là độ dài đường cao và phân giác trong xuất phát từ cùng một đỉnh của tam giác ấy. Chứng minh $\frac{h}{l} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

Hướng dẫn giải

Gọi h , l là độ dài đường cao và phân giác xuất phát từ đỉnh A . Ta có :

$$\begin{aligned}\frac{h}{l} &= \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{h^2}{l^2} = \sin^2\left(B + \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2B + A)] \\ &= \frac{1}{2}[1 + \cos(B - C)] = \cos^2 \frac{B - C}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác : } \frac{r}{R} &= \frac{(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}{2abc} \\ &= \frac{(\sin A + \sin B - \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin C + \sin A - \sin B)}{2 \sin A \sin B \sin C} \\ &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2} - 2 \sin^2 \frac{A}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } \frac{h^2}{l^2} \geq \frac{2r}{R} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{B - C}{2} \geq 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2} - 4 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A \Leftrightarrow b + c = 2a.$$

C. LUYỆN TẬP

18.1 Chứng minh :

$$\text{a) } |a\sqrt{9 - a^2} + 4a| \leq 15 ; \quad \text{b) } -1 \leq 6a\sqrt{1 - a^2} + 8a^2 \leq 9.$$

$$18.2 \text{ Chứng minh : } \left| a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{3} \left[ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} \right] \right| \leq 2.$$

$$18.3 \text{ Cho } x^2 + y^2 = 1. \text{ Chứng minh : } \frac{1}{4} \leq x^6 + y^6 \leq 1.$$

$$18.4 \text{ Cho } |a| \geq 1. \text{ Chứng minh : } -2 \leq \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{3}}{a} \leq 2.$$

$$18.5 \text{ Chứng minh : } -\frac{1}{4} \leq \frac{(a^2 - b^2)(1 - a^2b^2)}{(1 + a^2)^2(1 + b^2)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

18.6 Cho $x^2 + y^2 > 0$. Chứng minh : $-2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2} \leq 2\sqrt{2} - 2$.

Hướng dẫn : $y \neq 0$. Đặt : $\tan \alpha = \frac{x}{2y}$.

18.7 Cho tam giác ABC . Chứng minh :

a) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$;

b) $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$;

c) $\frac{3}{4} \leq \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} < 1$;

d) $2 < \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

18.8 Chứng minh rằng trong mọi $\triangle ABC$, ta luôn có :

a) $\cot \frac{A}{2} + \cot B + \cot C \geq \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$;

b) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq \sqrt{\cos \frac{A}{2}} + \sqrt{\cos \frac{B}{2}} + \sqrt{\cos \frac{C}{2}}$.

18.9 Tam giác ABC nhọn. Chứng minh :

a) $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$;

b) $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} + \sqrt{\tan C} \geq \sqrt{\cot \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot \frac{C}{2}}$.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1995)

Hướng dẫn : Chứng minh $\sqrt{\tan A} + \sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt[4]{\tan A \tan B} \geq 2\sqrt{\cot \frac{C}{2}}$.

18.10 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}}.$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn :

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \geq \frac{2}{\sin A \sin B} \geq \frac{2}{\left(\frac{\sin A + \sin B}{2}\right)} \geq \frac{2}{\cos^2 \frac{C}{2}}.$$

18.11 Chứng minh rằng nếu các góc A, B, C của $\triangle ABC$ thỏa điều kiện $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -1$ thì : $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn :

Chứng minh : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$.

Từ giả thiết suy ra $\cos A \cos B \cos C \leq 0$. Suy ra $\triangle ABC$ không nhọn.

Gọi C là góc lớn nhất, ta có :

$$90^\circ \leq C < 180^\circ \Rightarrow \cos \frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin C \leq \\ &\leq 2 \cos \frac{C}{2} + \sin C \leq \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông cân.

18.12 Cho $\triangle ABC$ có các cạnh a, b, c và l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong của $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$\frac{1}{c}(l_a + l_b) + \frac{1}{b}(l_a + l_c) + \frac{1}{a}(l_a + l_c) \leq 3\sqrt{3}.$$

(Trích đề thi Học viện Quân sự, năm 1997)

Hướng dẫn : Áp dụng công thức :

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \text{ và } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

§ 19. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giả sử phải chứng minh BĐT : $f(x) > 0 ; \forall x \in (a ; b)$. Xét hàm số $f(x)$ trên $(a ; b)$.

- $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a ; b) \Rightarrow f$ tăng trên $(a ; b)$.
- $f(x) > f(a) = 0, \forall x \in (a ; b)$.

Lưu ý : Nhiều khi để chứng minh $f'(x) > 0, \forall x \in (a ; b)$ ta lại phải chứng minh $f''(x) > 0, \forall x \in (a ; b)$.

B. VÍ DỤ ỨNG DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta đều có : $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = x - \sin x$ với $x \geq 0$. Ta có : $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow f$ đồng biến trên $[0 ; +\infty)$.

Với $x > 0$ ta có $f(x) > f(0) = 0$. Vậy : $x > \sin x, \forall x > 0$. (1)

Lại đặt : $g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$, với $x \geq 0$. Ta có :

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \Rightarrow g''(x) = -x + \sin x < 0, \forall x > 0 \text{ (theo (1))}.$$

Suy ra $g'(x)$ nghịch biến trên $[0 ; +\infty) \Rightarrow g'(x) < g'(0) = 0, \forall x > 0$.

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$. Ta lại có : $g(0) = 0$.

Vậy, với $x > 0$ thì $g(x) < g(0) = 0$ suy ra :

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x < 0 \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}} + 1$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương $2^{2\sin x}$ và $2^{2\tan x}$ ta có :

$$2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{2\sin x + \tan x}} = 2.2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2}}.$$

Ta cần phải chứng minh : $2\sin x + \tan x > 3x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(2\cos x + 1)(1 - \cos x)^2}{\cos^2 x} > 0, \end{aligned}$$

vì với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$. Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ mà $f(0) = 0$ nên $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ta có : $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x > 0$ (đpcm).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng, nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2^{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có : $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x + \tan x}}$. Ta chứng minh :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2^{\sin x + \tan x}} \geq 2^{x+1} &\Leftrightarrow 2^{\sin x + \tan x} \geq 2^{2x} \\ &\Leftrightarrow \sin x + \tan x \geq 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt : $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có :

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2.$$

Vì $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos x \geq \cos^2 x$. Do đó :

$$f'(x) \geq \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 0, \quad (\text{vì } \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2 \text{ (BĐT Cô-si)})$$

Suy ra : f tăng trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, mà $f(0) = 0$ nên :

$$f(x) > f(0) \Rightarrow \sin x + \tan x > 2x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy ta có (1) tức là đpcm.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn.

a) Chứng minh rằng : $(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > 2$

b) Bất đẳng thức trên còn đúng không nếu $\triangle ABC$ vuông ? Vì sao ?

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội 2, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C = 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 2 + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Do $\triangle ABC$ nhọn nên ta có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$. Mặt khác, $0 < \sin^2 A < 1$ và $\sin B < 1$ nên : $(\sin^2 A)^{\sin B} > (\sin^2 A)^1 = \sin^2 A$ (vì hàm số $y = (\sin^2 A)^x$ giảm trên $\mathbf{R}$).

Tương tự : $(\sin^2 B)^{\sin C} > \sin^2 B$; $(\sin^2 C)^{\sin A} > \sin^2 C$. Do đó :

$$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2.$$

b) Giả sử $A = 90^\circ$ ta có : $(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} =$

$$= 1 + (\sin^2 B)^{\sin C} + \sin^2 C > 1 + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$= 1 + \cos^2 C + \sin^2 C = 2.$$

Vậy BĐT trên vẫn đúng nếu $\triangle ABC$ vuông.

Ví dụ 5. Cho n là số nguyên và $n \geq 3$. Chứng minh :

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n. \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 2000)

Hướng dẫn giải

Ta có : $n^{n+1} \geq (n+1)^n \Leftrightarrow (n+1) \ln n \geq n \ln(n+1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n}$.

Xét hàm số : $y = \frac{x}{\ln x}$ với $x \geq 3$. Ta có : $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0, \forall x \geq 3$ suy

ra hàm số $y = \frac{x}{\ln x}$ tăng trên $[3; +\infty)$. Do đó với $n \geq 3$, ta có :

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} \geq \frac{n}{\ln n} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 6. Cho ΔABC có $0 < A \leq B \leq C < 90^\circ$. Chứng minh :

$$\frac{2 \cos 3C - 4 \cos 2C + 1}{\cos C} \geq 2. \quad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Mở – Địa chất, năm 2000)

Hướng dẫn giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 2(4 \cos^3 C - 3 \cos C) - 4(2 \cos^2 C - 1) + 1 \geq 2 \cos C$

$$\Leftrightarrow 8 \cos^3 C - 8 \cos^2 C - 8 \cos C + 5 \geq 0.$$

Từ giả thiết suy ra $60^\circ \leq C \leq 90^\circ \Rightarrow 0 < \cos C \leq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \cos C$ thì

$t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ và xét hàm số : $y = 8t^3 - 8t^2 - 8t + 5, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Ta có :

$$y' = 24t^2 - 16t - 8; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = 8t^3 - 8t^2 - 8t + 5$ nghịch

biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ nên có :

$$\min y = y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

t	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y'	0	-	0	0
y			↘	

Vậy : $8\cos^3 C - 8\cos^2 C - 8\cos C + 5 \geq 0$ (đpcm).

Ví dụ 7. Cho $a \leq 6$, $b \leq -8$, $c \leq 3$. Chứng minh rằng với mọi $x \geq 1$ ta đều có : $x^4 - ax^2 - bx \geq c$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = x^4 - ax^2 - bx - c$. Ta chứng minh $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 1$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 2ax - b$. Để xét dấu $f'(x)$ ta xét :

$$f''(x) = 12x^2 - 2a = 2(6x^2 - a) \geq 2(6 - a) \geq 0 \text{ (vì } x \geq 1 \text{ và } a \leq 6).$$

Vậy $f'(x)$ tăng trên $[1; +\infty)$, suy ra :

$$f'(x) \geq f'(1) = 4 - 2a - b \geq 4 - 12 + 8 = 0, \forall x \geq 1 \text{ (vì } a \leq 6, b \leq -8).$$

Vậy : f tăng trên $[1; +\infty)$. Do đó :

$$f(x) \geq f(1) = 1 - a - b - c \geq 1 - 6 + 8 - 3 = 0; \forall x \geq 1.$$

Hay : $x^4 - ax^2 - bx \geq c$, $\forall x \geq 1$ (đpcm).

Ví dụ 8. Chứng minh : $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ xác định trên $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

Dấu của $f'(x)$ là dấu của $h(x) = x \cos x - \sin x$. Ta có $h'(x) < 0$,

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ nên $h(x)$ nghịch biến. Do đó :

$$x > \frac{\pi}{6} \Rightarrow h(x) < h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1 \right] < 0.$$

Vì $f'(x) < 0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, do đó :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f(x) > f\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{3}{\pi} > \frac{\sin x}{x} > \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\pi} dx \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 9. Cho $I_n = \int_0^{\pi/4} x \tan^n x dx$ ($n \in \mathbb{Z}^+$). Chứng minh :

$$I_n > \frac{1}{n+2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}.$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0 \Rightarrow f \text{ tăng trên } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x) \geq f(0)$$

$$\Rightarrow \tan x \geq x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\text{Vậy : } I_n = \int_0^{\pi/4} x \tan^n x dx > \int_0^{\pi/4} x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} x^{n+2} \Big|_0^{\pi/4}$$

$$\Rightarrow I_n > \frac{1}{n+2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}.$$

Ví dụ 10. Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh : $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$ (1)

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2007)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow (4^a + 1)^b \leq (4^b + 1)^a \Leftrightarrow b \ln(4^a + 1) \leq a \ln(4^b + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(4^a + 1)}{a} \leq \frac{\ln(4^b + 1)}{b}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln(4^x + 1)}{x}$ (Với $x > 0$)

$$\text{Có: } f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x(4^x + 1)} < 0 \quad (\forall x > 0)$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ mà

$$a \geq b > 0 \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow \left[2^a + \frac{1}{2^a}\right]^b \leq \left[2^b + \frac{1}{2^b}\right]^a \quad (\text{đpcm})$$

C. LUYỆN TẬP

19.1 Chứng minh : $\cos \alpha + \alpha \sin \alpha > 1$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

19.2 Cho $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, chứng minh $\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta > 2(\cos \beta - \cos \alpha)$.

19.3 Chứng minh : $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

19.4 Cho $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh : $\frac{\tan \alpha}{\alpha} < \frac{\tan \beta}{\beta}$.

19.5 Cho ΔABC nhọn. Chứng minh :

$$\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$$

Hướng dẫn : Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$.

§ 20. PHƯƠNG PHÁP DÙNG CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giả sử phải chứng minh BĐT : $f(x) > 0 ; \forall x \in (a; b)$.

- Xét hàm số $f(x)$ trên $(a; b)$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số và tính giá trị cực trị.
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. a, b, c là ba số dương thoả mãn điều kiện : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh : $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có : $0 < a, b, c < 1$. BĐT cần chứng minh tương

đương với : $\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t(1-t^2) = -t^3 + t$ với $t \in (0; 1)$. Ta có :

$$f'(t) = -3t^2 + 1;$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (vì } t > 0 \text{)}.$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$f(t) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}; \forall t \in (0; 1).$$

t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
f'	0	+	0
f	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0

$$\text{Do đó : } 0 < a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b^2}{b(1-b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2; \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2. \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế và lưu ý : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ta được :

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = x^n + (c-x)^n$ trong đó $c > 0$ và n là một số nguyên dương lớn hơn 1.

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số đó.

b) Từ kết quả ấy, chứng minh bất đẳng thức : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$,
với a, b là hai số tùy ý thoả mãn điều kiện $a+b \geq 0$, còn n là số nguyên dương bất kì.

Hướng dẫn giải

a) Miền xác định : $D = \mathbf{R}$. Ta có : $f'(x) = n[x^{n-1} - (c-x)^{n-1}]$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{n-1} = (c-x)^{n-1}. \quad (1)$$

• Với n chẵn : $(1) \Leftrightarrow x = c-x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$.

• Với n lẻ : $(1) \Leftrightarrow |x| = |c-x| \Leftrightarrow \begin{cases} x = c-x \\ x = x-c \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{c}{2} \text{ (vì } c > 0 \text{)}.$

Vậy $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{c}{2}$. Ta có :

$$f''(x) = n(n-1)[x^{n-2} + (c-x)^{n-2}] ; f''\left(\frac{c}{2}\right) = 2n(n-1)\left(\frac{c}{2}\right)^{n-1} > 0.$$

Suy ra f đạt cực tiểu tại $x = \frac{c}{2}$ và $f\left(\frac{c}{2}\right) = 2\left(\frac{c}{2}\right)^n$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$\frac{c}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$2\left(\frac{c}{2}\right)^n$	$+\infty$

b) Dựa vào bảng biến thiên ở trên ta suy ra :

$$x^n + (c-x)^n \geq 2\left(\frac{c}{2}\right)^n. \quad (2)$$

Trong (2) chọn $x = a$, $c = a + b$ với $a + b > 0$ ta có :

$$a^n + b^n \geq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^n \Rightarrow \left(\frac{a^n + b^n}{2} \right) \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$$

BĐT cũng đúng khi $a + b = 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $n = 1$ hoặc $a = b$ hoặc khi $a = -b$ và n lẻ.

Ví dụ 3. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh :

$$x^n \sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}, \text{ với mọi } x \in (0; 1).$$

Hướng dẫn giải

BĐT cần chứng minh tương đương với : $x^{2n}(1-x) < \frac{1}{2ne}$.

Xét hàm số $f(x) = x^{2n}(1-x)$ với $0 < x < 1$. Ta có :

$$f'(x) = x^{2n-1} [2n - (2n+1)x] ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2n}{2n+1} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$f(x) \leq f\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}, \forall x \in (0; 1). \quad (1)$$

Ta chứng minh :

$$\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} < \frac{1}{2ne}. \quad (2)$$

Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} < \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n+1} > e \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n+1} > e.$$

Dễ thấy rằng dãy $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ là dãy giảm và có giới hạn là e .

Do đó : $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} > e, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Vậy ta có : $\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n+1} > e$, tức là có đpcm.

x	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$		↗ CĐ ↘	

Lưu ý. Nếu không nhớ tính chất dãy số $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ giảm và có

giới hạn là e khi $n \rightarrow \infty$ thì có thể chứng minh BĐT $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$

bằng cách sau : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \Leftrightarrow (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$. Với $x > 0$ ta

chứng minh $\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$ dựa vào tính đơn điệu của hàm số

$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ trên $[0; +\infty)$. Khi đó ta có :

$$(n+1) \ln(1+n) > (n+1) \cdot \frac{2n-1}{2n^2} = \frac{2n^2+n-1}{2n^2} > 1.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng thể tích V và diện tích xung quanh S của một hình nón tròn xoay tùy ý, luôn thỏa mãn BĐT :

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

Hướng dẫn giải

Gọi R và l tương ứng là bán kính đáy và đường sinh, ta có :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2} \quad (0 < R < l) ; \quad S = \pi R l.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $4R^4(l^2 - R^2) \leq \frac{8R^3 l^3}{3\sqrt{3}}$.

Chia hai vế cho $4R^3 l^3$ ta được : $\frac{R}{l} - \frac{R^3}{l^3} \leq 2 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Đặt : $x = \frac{R}{l}$ ($0 < x < 1$) ta chứng minh : $x - x^3 \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ với $x \in (0; 1)$.

Xét hàm số : $f(x) = x - x^3$ với $x \in (0; 1)$. Ta có : $f'(x) = 1 - 3x^2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{vì } x > 0) ;$$

$$f''(x) = -6x \Rightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0.$$

Suy ra : f đạt cực đại tại $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy : $f(x) \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \forall x \in (0; l)$ (đpcm).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\frac{R}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ tức là $l = R\sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng để $x^4 + px^3 + q \geq 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, điều kiện cần và đủ là $256q \geq 27p^4$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = x^4 + px^3 + q$. Ta tìm min $f(x)$ trên $\mathbf{R}$.

Ta có : $f'(x) = 4x^3 + 3px^2 = x^2(4x + 3p)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3p}{4} \end{cases}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\frac{3p}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(-\frac{3p}{4}\right)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có : $\min f(x) = f\left(-\frac{3p}{4}\right) = \frac{256q - 27p^4}{256}$.

Từ đó : $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 256q \geq 27p^4$ (đpcm).

Ví dụ 6. a) Chứng minh rằng bất phương trình $x^4 + px + q \geq 0$ thoả mãn với mọi x khi và chỉ khi : $256q^3 \geq 27p^4$ (1)

b) Chứng minh rằng nếu p, q thoả mãn (1) thì với mọi x ta cũng có : $qx^4 + px^3 + 1 \geq 0$ (2)

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = x^4 + px + q$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f\left(-\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 256q^3 \geq 27p^4.$$

b) • $x = 0$: (2) đúng.

• $x \neq 0$: Chia hai vế của (2) cho $x^4 \neq 0$ ta được : $t^4 + pt + q \geq 0$,
với $t = \frac{1}{x}$. (Điều này đúng suy ra từ (1)).

Ví dụ 7. Chứng minh rằng, với mọi ΔABC ta có :

$$\left(\tan \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}.$$

Hướng dẫn giải

Với mọi ΔABC , ta có : $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$. (1)

Áp dụng BĐT : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, ta có :

$$\begin{aligned} & \left(\tan \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \\ & \geq \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}\right)^{\sqrt{2}} \quad (x, y, z > 0). \end{aligned}$$

$$\text{Ta chứng minh : } \frac{x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Để chứng minh (2) ta chứng minh : $(1+x)^{\sqrt{2}} \geq 1 + \sqrt{2}x$ ($x > -1$).

Đặt : $f(x) = (1+x)^{\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2}x$;

$$f'(x) = \sqrt{2}(x+1)^{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy : $f(x) \geq 0, \forall x > -1$.

x	-1	0
$f'(x)$		- 0 +
$f(x)$		 0 

$$\text{Ta có : (2)} \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{3y}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{3z}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3$$

$$\text{Mà : } \left(\frac{3x}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{2x-y-z}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} \geq 1 + \sqrt{2} \left(\frac{2x-y-z}{x+y+z}\right).$$

$$\text{Tương tự : } \left(\frac{3y}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} \geq 1 + \sqrt{2} \left(\frac{2y-x-z}{x+y+z}\right);$$

$$\left(\frac{3z}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} \geq 1 + \sqrt{2} \left(\frac{2z-x-y}{x+y+z}\right).$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \left(\frac{3x}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{3y}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{3z}{x+y+z}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3.$$

Vậy ta có (2). Thay $x = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$, $y = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$, $z = \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}$ và áp dụng (1) ta có đpcm.

C. LUYỆN TẬP

20.1 Chứng minh : $x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}$, với $\forall x \in \mathbf{R}$.

20.2 Chứng minh : $\sqrt[4]{2} \leq \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 2$, $\forall x \in [-1; 1]$.

20.3 Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì : $3x - x^3 < \frac{2}{\sin 2x}$.

§ 21. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỊNH LÍ LAGRANGE

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong một số bất đẳng thức cần chứng minh, có thể dựa vào Định lí Lagrange để chứng minh sau khi gán bất đẳng thức với một hàm số thích hợp.

Định lí Lagrange. Hàm số f liên tục trên $[a; b]$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) là nhà toán học và nhà thiên văn người Ý – Pháp.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $0 < b < a$ thì : $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \ln x$. Khi đó f liên tục trên $[b; a]$ và khả vi trên $(b; a)$ nên theo Định lí Lagrange tồn tại $c \in (b; a)$ sao cho :

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = f'(c) = \frac{1}{c}. \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < b < c < a \text{ nên : } \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với hai số a, b bất kì ta đều có :

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b|.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử $a \leq b$ (vì a, b có vai trò như nhau).

i) Nếu $a = b$ thì BĐT đúng.

ii) Giả sử $a < b$. Xét $f(x) = \sin x$ với $x \in [a; b]$, ta có f liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$ nên theo Định lí Lagrange :

$$\left| \frac{\sin a - \sin b}{a - b} \right| = |f'(c)| = |\cos c| \leq 1, \text{ với } c \in (a; b).$$

Do đó : $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ (đpcm).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì : $\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Hướng dẫn giải

Đặt : $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x [\ln(x+1) - \ln x]$ ($x > 0$). Ta có :

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}.$$

Xét hàm số $g(t) = \ln t$ liên tục trên $[x; x+1]$ khả vi trên $(x; x+1)$ nên theo Định lí Lagrange, tồn tại $c \in (x; x+1)$ sao cho :

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = g'(c) = \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}.$$

Do đó $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0$, với $x > 0$ suy ra f tăng trên $(0; +\infty)$. Vậy : $f(x+1) > f(x)$. Từ đó suy ra :

$$(x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) > x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

$\forall x > 0$ (đpcm).

Ví dụ 4. Cho $0 \leq x < x+y \leq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh :

$$\sin(x+y) < \sin x + y \cdot \cos x.$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(t) = \sin t$ với $t \in [x; x+y]$. Ta có $f'(t) = \cos t$. Theo Định lí Lagrange, tồn tại $c \in (x; x+y)$:

$$f(x+y) - f(x) = (x+y-x) f'(c) \Rightarrow \sin(x+y) - \sin x = y \cdot \cos c.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x < c < x+y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > \cos c \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y \cdot \cos c < y \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) - \sin x < y \cdot \cos x \Rightarrow \sin(x+y) < \sin x + y \cdot \cos x.$$

C. LUYỆN TẬP

21.1 Cho $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh :

$$\frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} < \tan \alpha - \tan \beta < \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}$$

21.2 Chứng minh $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$, với $0 < y \leq x$ và $p > 1$.

§ 22. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Để chứng minh một bất đẳng thức, trong một số trường hợp người ta có thể đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức dạng

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx,$$

trong đó $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a; b]$ và dấu đẳng thức xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

• Ngoài ra, bằng cách sử dụng công thức tích phân tính diện tích hình phẳng S , sau đó nội tiếp trong hình S bằng các hình có thể dễ dàng tính diện tích, ta sẽ thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

• Đối với các bất đẳng thức có dạng tích phân cần lưu ý áp dụng các kết quả sau : Giả sử $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$

1) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2) Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ và nếu tồn

tại $x_0 \in [a; b]: f(x_0) \neq g(x_0)$ thì $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$;

3) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$;

4) Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

B. VÍ DỤ ỨNG DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng, với mọi $x > 0$, ta có : $x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng, với mọi $t \in [0; x]$, ta có :

$$\cos t \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \cos t dt < \int_0^x 1 dt \Rightarrow \sin t \Big|_0^x < x \Rightarrow \sin x < x. \quad (1)$$

Theo (1) thì ta có :

$$\begin{aligned} \sin t < t, \forall t > 0 \Rightarrow \int_0^x \sin t dt < \int_0^x t dt \Rightarrow -\cos t \Big|_0^x < \frac{t^2}{2} \Big|_0^x \\ \Rightarrow \cos x > 1 - x^2, \forall x > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Như vậy, theo (2) ta có :

$$\begin{aligned} \cos t > 1 - \frac{t^2}{2}, \forall t > 0 \Rightarrow \int_0^x \cos t dt > \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \Rightarrow \sin t \Big|_0^x > \left(t - \frac{t^3}{6}\right) \Big|_0^x \\ \Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có đpcm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdot 2^k} < 1 - \ln 2.$$

Hướng dẫn giải

Với mọi $0 < x < 1$, ta có :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} < \frac{1}{1-x}.$$

Vậy với mọi $0 < t < 1$, ta có :

$$\int_0^t (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})dx < \int_0^t \frac{dx}{1-x}$$

$$\Rightarrow t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{t^n}{n} < -\ln(1-t). \quad (1)$$

Vì (1) đúng với mọi $0 < t < 1$, nên ta lại có : Với mọi $0 < z < 1$, thì

$$\int_0^z \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{t^n}{n} \right) dt < - \int_0^z \ln(1-t) dt. \quad (2)$$

Dễ thấy : $-\int_0^z \ln(1-t).dt = z + (1-z)\ln(1-z).$

Do đó, từ (2) suy ra : $\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \dots + \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} < z(1-z)\ln(1-z).$

Do $z > 0$ nên ta có : $\frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{2.3} + \dots + \frac{z^n}{n(n+1)} < 1 + \frac{1-z}{z} \cdot \ln(1-z). \quad (3)$

Vì (3) đúng với mọi $0 < z < 1$, nên với $z = \frac{1}{2}$ ta có :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1).2^k} < 1 - \ln 2 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 3. Cho $x < 1$. Chứng minh :

$$(x-1) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n+(p+1)(x-1)} < \ln x < (x-1) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n+p(x-1)}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = \sum_{p=0}^{n-1} \int_{p\left(\frac{x-1}{n}\right)+1}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t}.$

Chú ý rằng khi $1+p\left(\frac{x-1}{n}\right) < t < 1+(p+1)\frac{x-1}{n}$, ta có :

$$\frac{1}{1+p\left(\frac{x-1}{n}\right)} > \frac{1}{t} > \frac{1}{1+(p+1)\frac{x-1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+p(x-1)} > \frac{1}{t} > \frac{n}{n+(p+1)(x-1)}.$$

Từ đó :

$$\int_{1+p\frac{x-1}{n}}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{n}{n+p(x-1)} dt > \int_{1+p\left(\frac{x-1}{n}\right)}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} > \int_{1+p\left(\frac{x-1}{n}\right)}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{n}{n+(p+1)(x-1)} dt.$$

Vậy ta có : $\frac{n}{n+p(x-1)} \cdot \frac{x-1}{n} > \int_{1+p\left(\frac{x-1}{n}\right)}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} > \frac{n}{n+(p+1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{n}.$

Tức là : $\frac{x-1}{n+p(x-1)} > \int_{1+p\left(\frac{x-1}{n}\right)}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t} > \frac{x-1}{n+(p+1)(x-1)}.$ (*)

Vì (*) đúng với mọi $p = \overline{0, n-1}$, nên từ (*) suy ra :

$$(x-1) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n+p(x-1)} > \sum_{p=0}^{n-1} \int_{1+p\left(\frac{x-1}{n}\right)}^{1+(p+1)\frac{x-1}{n}} \frac{dt}{t}$$

$$> (x-1) \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n+(p+1)(x-1)} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 4. Cho $x \geq 0$. Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ta có :

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Hướng dẫn giải

Dùng phương pháp chứng minh quy nạp, ta có :

Với $0 \leq t \leq x$ thì : $e' \geq e^0 = 1 \Rightarrow \int_0^x e' dt = e' \Big|_0^x \geq \int_0^x 1 dt$

$$\Rightarrow e^x - 1 \geq x \Rightarrow e^x \geq x + 1.$$

Vậy, bất đẳng thức đúng khi $n=1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng khi $n=k$, ta có :

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}, \text{ với mọi } x \geq 0.$$

Do đó :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t dt &\geq \int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!}\right) dt \Leftrightarrow e^t \Big|_0^x \geq \left[t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^{k+1}}{(k+1)k!}\right] \Big|_0^x \\ &\Leftrightarrow e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng khi $n=k+1$ (đpcm).

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có :

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1; n+1]$. Gọi

S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=1$, $x=n+1$,

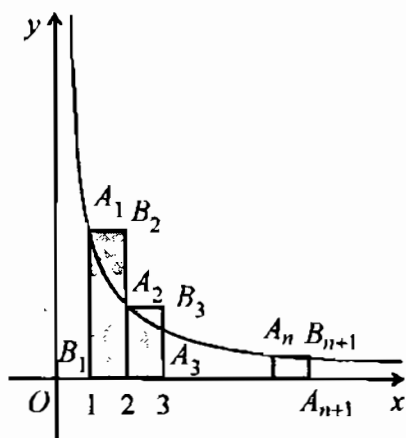
$y = \frac{1}{x}$, $y=0$. Ta có :

$$S = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1). \quad (1)$$

Gọi $A_i \left(i; \frac{1}{i}\right)$, $i = \overline{1, n}$ và

$$A_{n+1}(n+1; 0); B_i \left(i; \frac{1}{i-1}\right),$$

$i = \overline{2, n+1}$ và $B_1(1; 0)$. Gọi S_1 là diện tích đa giác $B_1A_1B_2A_2B_3A_3 \dots B_nA_nB_{n+1}A_{n+1}$. Dễ thấy :



$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Rõ ràng $S < S_1$, nên từ (1) và (2) ta có : $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Chứng minh : $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6} \quad (n=2, 3, \dots)$

Hướng dẫn giải

Ta có : $0 < 1-x^2 \leq 1-x^{2n} \leq 1$ (vì $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ và $n=2, 3, \dots$). Do đó :

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Suy ra : } \int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy : } \frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 7. Với mỗi số nguyên dương k , đặt : $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$. Xác định k để $I_k < e-2$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } I_k &= \int_1^e (\ln k - \ln x) dx = (e-1) \ln k - [x \ln x]_1^e + \int_1^e dx \\ &= (e-1) \ln k - 1 \text{ (tích phân từng phần).} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } I_k < e-2 \Leftrightarrow (e-1) \ln k - 1 < e-2 \Leftrightarrow (e-1)(\ln k - 1) < 0.$$

$$\text{Vì } e > 1 \text{ nên } \ln k < 1 = \ln e \Rightarrow 0 < k < e.$$

$$\text{Vì } k \text{ nguyên nên } k=1 \text{ hoặc } k=2.$$

Ví dụ 8. Cho $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$. Chứng minh :

$$\text{a) } I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n; \quad \text{b) } I_n < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

Hướng dẫn giải

a) Tính $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = -\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} d(1-x) = -\left[\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Với $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, đặt :

$$\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } I_n &= -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} x^n \Big|_0^1 + \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x} dx \\ &= \frac{2n}{3} I_{n-1} - \frac{2n}{3} I_n \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } I_n = \frac{3}{2n+2} \cdot \frac{2n}{3} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}.$$

b) Dùng phương pháp lùi dần các số hạng ta tính được I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2(n-1)}{2n+1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-1} \cdots \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot I_0 \\ &= \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2(n-1)}{2n+1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-1} \cdots \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-3} \cdots \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \\ &= \frac{2}{2n+3} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} < \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } (2k+1)^2 > 4k(k+1) = 2k(2k+2) \Rightarrow 2k+1 > \sqrt{2k} \cdot \sqrt{2k+2}.$$

$$\text{Do đó : } \frac{2k}{2k+1} < \frac{2k}{\sqrt{2k} \cdot \sqrt{2k+2}} = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{2k+2}}.$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} < \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{2k+2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Vậy : $I_n < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ (đpcm).

Ví dụ 9. Cho hai hàm số liên tục :

$$f : [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1] ; g : [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$$

Chúng minh : $\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết với mọi $x \in [0 ; 1]$, ta có :

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 0 \leq g(x) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x).g(x) \leq g(x) \\ 0 \leq f(x).g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \int_0^1 f(x).g(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx \\ 0 \leq \int_0^1 f(x).g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx. \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \int_0^1 f(x).g(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx \\ 0 \leq \int_0^1 f(x).g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx. \end{cases} \quad (2)$$

Lấy (1) nhân (2) về theo về, ta được :

$$\left[\int_0^1 f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \left(\int_0^1 g(x)dx \right) \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 10. Chứng minh rằng, nếu $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục xác định trên đoạn $[a ; b]$ thì ta có :

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $[t.f(x) + g(x)]^2 \geq 0 ; \forall t \in \mathbb{R}$ và $\forall x \in [a ; b]$. Từ đó suy ra :

$$t^2.f^2(x) + 2t.f(x).g(x) + g^2(x) \geq 0.$$

Do đó $t^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ (2)

i) Nếu $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ thì từ điều kiện f liên tục trên $[a ; b]$ và $f^2(x) \geq 0 ; \forall x \in [a ; b]$ ta suy ra $f(x) = 0, \forall x \in [a ; b]$ khi đó (1) hiển nhiên đúng.

ii) Nếu $\int_a^b f^2(x)dx > 0$ thì vế trái của (2) là tam thức bậc hai theo t không âm với mọi t nên có :

$$\Delta' = \left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - \left[\int_a^b f^2(x)dx \right] \left[\int_a^b g^2(x)dx \right] \leq 0,$$

tức là : $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ (đpcm).

Ví dụ 11. Chứng minh :

a) $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}} dx > \frac{4+\pi}{4}$;

b) $\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $e^x > 1+x$, với mọi x . Do đó :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1+x^2}} &> 1 + \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}} dx > \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Vậy : $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}} dx > \frac{4+\pi}{4}$. (đpcm)

b) Do $x \in (0;1)$ nên : $\frac{1}{2+x+x^2} < \frac{1}{2+x^2+x^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}$. Từ đó

suy ra : $\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{8}$ (đặt $x = \tan t$).

Vậy : $\int_0^1 \frac{dx}{2+x+x^2} < \frac{\pi}{8}$ (đpcm).

Ví dụ 12. a) Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x} dx$.

b) Chứng minh : $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot \sin x}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

a) Tính I . Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$. Ta có :

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 ; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} \text{ (đặt } t = \tan y \text{)}.$$

Tính J . Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx$. Ta có :

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 ; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy : } J = \int_0^1 \frac{dt}{1+(1-t)^2} = \int_0^1 \frac{d(t-1)}{1+(t-1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Cộng hai tích phân I và J :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x(1 + \cos^4 x + 1 + \sin^4 x)}{(1 + \sin^4 x)(1 + \cos^4 x)} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin x \cos x [2 + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x]}{(1 + \sin^4 x)(1 + \cos^4 x)} dx = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin x \cos x (3 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)}{(1 + \sin^4 x)(1 + \cos^4 x)} dx = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x (6 - 4 \sin^2 x \cos^2 x)}{(1 + \sin^4 x)(1 + \cos^4 x)} dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Do $6 - 4 \sin^2 x \cos^2 x = 6 - (\sin 2x)^2 \leq 6$ nên ta có :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \sin x}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx > \frac{\pi}{12} \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 13. Cho $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Chứng minh $\frac{\pi}{2(n+1)} < I_n^2 < \frac{\pi}{2n}$.

Hướng dẫn giải

Khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < 1$, do đó với $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ta có :

$$\sin^{n+1} x < \sin^n x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx \Rightarrow I_{n+1} < I_n. \quad (1)$$

Xét : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \cdot dx$. Đặt :

$$\begin{cases} u = \sin^{n+1} x \Rightarrow du = (n+1) \sin^n x \cdot \cos x \cdot dx \\ v = \int \sin x \cdot dx = -\cos x \end{cases}$$

Ta có : $I_{n+2} = -\sin^{n+1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin^2 x) \cdot dx$

$$= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot I_n. \quad (2)$$

Xét hàm số của đối số tự nhiên, xác định như sau :

$$f(n) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1} \Rightarrow f(n+1) = (n+2)I_{n+1} \cdot I_{n+2}.$$

Theo (2) ta có : $f(n+1) = (n+2)I_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot I_n = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}.$

Vậy : $f(n) = f(n+1), \forall n.$

Ta có $f(n) = f(0)$ và vì $f(0) = I_0 \cdot I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = \frac{\pi}{2}$ nên

$$\text{suy ra : } f(n) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Từ (1) suy ra : $(n+1)I_n \cdot I_{n+1} < (n+1)I_n^2.$

Vậy theo (3) ta có : $\frac{\pi}{2(n+1)} < I_n^2. \quad (4)$

Ta lại có : $f(n-1)n \cdot I_n \cdot I_{n-1} = \frac{\pi}{2} > n \cdot I_n^2 \Rightarrow I_n^2 < \frac{\pi}{2n}. \quad (5)$

Từ (4) và (5) ta suy ra : $\frac{\pi}{2(n+1)} < I_n^2 < \frac{\pi}{2n}$ (đpcm).

C. LUYỆN TẬP

22.1 Cho n là số nguyên dương. Chứng minh :

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

22.2 Cho $a > 1$. Chứng minh : $\ln(1+a) > \frac{2a}{1+a}$.

22.3 Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

22.4 Chứng minh :

$$\text{a) } \frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{10}; \quad \text{b) } \frac{2}{5} \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx < \frac{1}{2}.$$

22.5 Cho $I_n = \int_n^{n+1} \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} dx$ ($n \in \mathbb{Z}^+$). Chứng minh :

$$\text{a) } (I_n) \text{ bị chặn}; \quad \text{b) } I_{n-1} \geq I_n, \forall n \geq 2.$$

Hướng dẫn : a) $0 < I_n \leq 1, \forall n$;

b) Thay n bởi $n-1$ rồi đổi biến $t = x+1$.

22.6 Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh : $\int_n^{n+1} \frac{x}{x+1} dx \leq \int_{n+1}^{n+2} \frac{2x-1}{x+1} dx$.

Hướng dẫn : Đặt $t = x-1$.

22.7 Cho hàm f liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$,
 $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0; 1]$.

a) Chứng minh $0 < \int_0^1 f(x) dx < 1$.

b) Biết $c = \int_0^1 f(x) dx$ và mỗi $x \in [0; 1]$ đặt : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Chứng minh : $F(x) \leq x, \forall x \in [0; c], F(x) \leq c, \forall x \in [c; 1]$.

c) Chứng minh $\int_0^1 F(x) dx < c - \frac{c^2}{2}$.

d) Chứng minh $\frac{c^2}{2} < \int_0^1 xf(x) dx < c - \frac{c^2}{2}$.

22.8 Cho $I(t) = \int_0^t \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx \left(0 < t < \frac{\pi}{4} \right)$. Tính $I(t)$ và chứng minh bất

đẳng thức : $\tan \left(t + \frac{\pi}{4} \right) > e^{\frac{2}{3}(\tan^3 t + 3 \tan t)}$ với $t \in \left(0 ; \frac{\pi}{4} \right)$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn : Đặt $u = \tan x$. Ta có

$$I(t) = -\frac{\tan^3 t}{3} - \tan t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan t - 1}{\tan t + 1} \right|.$$

22.9 Chứng minh :

a) $e^x > 1 + x$ với $x \neq 0$; b) $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}} dx > 1 + \frac{\pi}{4}$.

22.10 Cho $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$; $J_n = \int_0^1 x (1-x^2)^n dx$ ($n \in \mathbb{N}$). Tính J_n

và chứng minh $I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 2000)

Hướng dẫn : $J_n = \frac{1}{2(n+1)}$; $I_n \leq J_n$.

§ 23. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nếu một bài toán chứng minh bất đẳng thức, mà bằng một phép biến đổi sơ cấp nào đó có thể quy về một trong các sự kiện hình học như đoạn thẳng, các cạnh của một hình đa giác,... thì ta nên dùng phương pháp sử dụng tính chất hình học để giải nó.

Dĩ nhiên phương pháp này chỉ thích hợp cho các bất đẳng thức mà trong nội dung của nó đã tiềm ẩn những yếu tố hình học mà thoát tiên ta chưa nhìn ra nó.

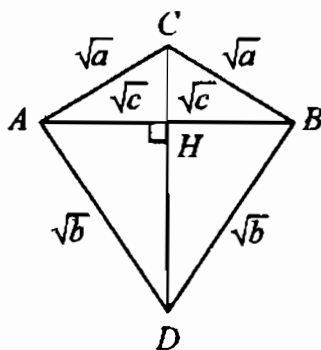
B. VÍ DỤ ỨNG DỤNG

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$ và $a \geq c, b \geq c$. Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Hướng dẫn giải

Dựng hai tam giác cân CAB và DAB có chung đáy $AB = 2\sqrt{c}$ và $AC = \sqrt{a}$, $AD = \sqrt{b}$. Gọi $H = CD \cap AB$ (nếu $a = c$ thì $C \equiv H$; nếu $b = c$ thì $D \equiv H$, với H là trung điểm của AB). Khi đó $CD \perp AB$ và $HA = HB = \sqrt{c}$.



$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S_{ACBD} &= \frac{1}{2} AB \cdot CD = \sqrt{c} (CH + HD) \\ &= \sqrt{c} (\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Do } S_{ACBD} = 2S_{CBD} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sin \widehat{CBD} \text{ nên suy ra : } S_{ACBD} \leq \sqrt{ab}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\sqrt{c} (\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}) \leq \sqrt{ab}$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\sin \widehat{CBD} = 1 \Leftrightarrow \widehat{CBD} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

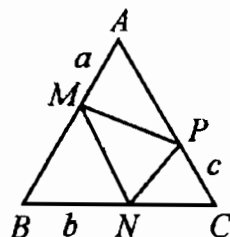
Ví dụ 2. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh :

$$a + b + c \leq 1 + ab + bc + ca.$$

Hướng dẫn giải

Dựng tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = a, BN = b, CP = c$. Ta có :

$$\begin{aligned} S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CNP} &\leq S_{ABC} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} [a(1-c) + b(1-a) + c(1-b)] &\leq \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Rightarrow a(1-c) + b(1-a) + c(1-b) &\leq 1 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow a+b+c \leq 1+ab+bc+ca \text{ (đpcm)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một trong các tam giác AMP , BMN , CNP trùng với tam giác ABC , tức là trong ba số a, b, c có một số bằng 1, một số bằng 0, còn số thứ ba tùy ý thuộc đoạn $[0; 1]$.

Ví dụ 3. Cho 4 số a, b, c, d thỏa điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$.

Chứng minh :

$$\sqrt{5-a-2b} + \sqrt{5-c-2d} + \sqrt{5-ac-bd} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2}. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(1; 2)$, trong đó a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$. Dễ thấy rằng A, B, C đều nằm trên đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 5$ với tâm tại gốc tọa độ O và bán kính bằng $R = \sqrt{5}$. Ta có :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(a-1)^2 + (b-2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(c-1)^2 + (d-2)^2}{2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{2}} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2} \\ &\Leftrightarrow AC + BC + AB \leq \frac{3\sqrt{30}}{2} \Leftrightarrow C_{\Delta ABC} \leq 3\sqrt{15}, \end{aligned} \quad (2)$$

ở đây $C_{\Delta ABC}$ là chu vi ΔABC . Mặt khác, ta biết rằng trong các tam giác cùng nội tiếp một đường tròn thì tam giác đều là tam giác có chu vi lớn nhất.

Tam giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \sqrt{5}$ có cạnh là $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$. Vậy (2) đúng (đpcm).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi A, B, C là 3 đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 5$.

Xét tam giác đều nội tiếp CPQ . Gọi $Q(x_0; y_0)$. Khi đó ta có :

$$CQ^2 = 15 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 15 \Leftrightarrow 2x_0 + 4y_0 = -5.$$

Như vậy, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 5 \\ 2x_0 + 4y_0 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \\ y_0 = \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \\ y_0 = \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy dấu “=” trong (1) xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a = d = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$ và $b = c = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$, hoặc $a = d = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ và $b = c = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$.

C. LUYỆN TẬP

23.1 Cho 4 số thực a, b, c, d thỏa điều kiện $c + d = 6$; $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh : $c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geq 18 - 6\sqrt{2}$.

23.2 Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{a^2 - ab\sqrt{2} + b^2} + \sqrt{b^2 - bc\sqrt{3} + c^2} \geq \sqrt{a^2 - ac\sqrt{2-\sqrt{3}} + c^2}.$$

23.3 Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. Chứng minh :

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (1-a_{i+1})^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2} \quad (\text{với } a_{n+1} \equiv a_1).$$

23.4 Cho $x + 2y + 3z = 2$. Chứng minh :

$$\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{1+y^2} + 3\sqrt{1+z^2} \geq 2\sqrt{10}.$$

§ 24. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CÁC DÃY ĐƠN ĐIỆU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Nếu hai dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ có tính chất sau :

$$a_i > a_j \Leftrightarrow b_i > b_j, \quad \forall i, j \text{ (hai dãy gọi là có cùng thứ tự)}$$

Khi đó ta có : $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n}$, trong đó $i_1, i_2, \dots, i_n$ là một hoán vị tùy ý của $1, 2, \dots, n$.

• Nếu hai dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ có tính chất sau :

$$a_i < a_j \Leftrightarrow b_i > b_j, \forall i, j \text{ (hai dãy gọi là ngược thứ tự với nhau)}$$

Khi đó ta có : $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \dots + a_nb_{i_n}$, trong đó $i_1, i_2, \dots, i_n$ là một hoán vị tùy ý của $1, 2, \dots, n$.

Sử dụng bất đẳng thức trên đây, trong nhiều trường hợp sẽ cho ta chứng minh bất đẳng thức một cách dễ dàng.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho ba số dương bất kì a, b, c . Chứng minh :

$$\frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2}{2b} \geq a + b + c.$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \end{cases}$.

Khi đó ta có : $a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$;

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b}.$$

Từ đó suy ra : $a + b + c \leq \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ và $a + b + c \leq \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b}$.

Do đó : $a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2}{2b}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh :

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \geq \frac{\alpha}{\beta} \tan \beta + \frac{\beta}{\gamma} \tan \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \tan \alpha.$$

Hướng dẫn giải

Để thấy rằng hàm số $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Do tính đồng biến của hàm số $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ ta suy ra

$$\frac{\tan \alpha}{\alpha} \leq \frac{\tan \beta}{\beta} \leq \frac{\tan \gamma}{\gamma}.$$

Vậy theo bất đẳng thức hoán vị ta có :

$$\alpha \cdot \frac{\tan \alpha}{\alpha} + \beta \cdot \frac{\tan \beta}{\beta} + \gamma \cdot \frac{\tan \gamma}{\gamma} \geq \frac{\alpha}{\beta} \tan \beta + \frac{\beta}{\gamma} \tan \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \tan \alpha$$

$$\text{Vậy : } \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \geq \frac{\alpha}{\beta} \tan \beta + \frac{\beta}{\gamma} \tan \gamma + \frac{\gamma}{\alpha} \tan \alpha \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3. Cho A, B, C là các góc của một tam giác. Chứng minh rằng nếu $\alpha > 0$, ta có bất đẳng thức sau :

$$\tan^{\alpha} \frac{A}{2} + \tan^{\alpha} \frac{B}{2} + \tan^{\alpha} \frac{C}{2} \geq \frac{\sin^{\alpha} \frac{A}{2}}{\cos^{\alpha} \frac{A}{2}} + \frac{\sin^{\alpha} \frac{B}{2}}{\cos^{\alpha} \frac{B}{2}} + \frac{\sin^{\alpha} \frac{C}{2}}{\cos^{\alpha} \frac{C}{2}}.$$

Hướng dẫn giải

Không giảm tính tổng quát, giả sử $A \leq B \leq C \Rightarrow 0 < \frac{A}{2} \leq \frac{B}{2} \leq \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta có :

$$0 < \sin \frac{A}{2} \leq \sin \frac{B}{2} \leq \sin \frac{C}{2} ; \quad (1)$$

$$\cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2} \geq \cos \frac{C}{2} > 0. \quad (2)$$

Do hàm số $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên từ (1) và (2) ta có :

$$\begin{cases} \sin^\alpha \frac{A}{2} \leq \sin^\alpha \frac{B}{2} \leq \sin^\alpha \frac{C}{2} \\ \frac{1}{\cos^\alpha \frac{A}{2}} \leq \frac{1}{\cos^\alpha \frac{B}{2}} \leq \frac{1}{\cos^\alpha \frac{C}{2}} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có :

$$\tan^\alpha \frac{A}{2} + \tan^\alpha \frac{B}{2} + \tan^\alpha \frac{C}{2} \geq \frac{\sin^\alpha \frac{A}{2}}{\cos^\alpha \frac{A}{2}} + \frac{\sin^\alpha \frac{B}{2}}{\cos^\alpha \frac{B}{2}} + \frac{\sin^\alpha \frac{C}{2}}{\cos^\alpha \frac{C}{2}}.$$

C. LUYỆN TẬP

24.1 Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Chứng minh :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

24.2 Cho a, b, c là ba cạnh và p là nửa chu vi của tam giác. Chứng minh :

$$\frac{ab}{p-c} + \frac{bc}{p-a} + \frac{ca}{p-b} \geq 4p.$$

24.3 Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là những số nguyên dương khác nhau. Chứng minh :

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

24.4 Cho $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Giả sử $z_1, z_2, \dots, z_n$ là một hoán vị bất kì của $y_1, y_2, \dots, y_n$. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

Phần II.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Chương 1.

KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

§ 25. ĐỊNH NGHĨA GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu :
 $M = \max_{x \in D} f(x)$ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

$$\begin{cases} \forall x \in D : f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M. \end{cases}$$

- Số m được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu :
 $m = \min_{x \in D} f(x)$ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

$$\begin{cases} \forall x \in D : f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m. \end{cases}$$

§ 26. CÁC TÍNH CHẤT CỦA GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ

Tính chất 1

Giả sử $f(x)$ xác định trên D và A, B là hai tập con của D , trong đó $A \subseteq B$. Giả thiết tồn tại $\max_{x \in A} f(x)$, $\max_{x \in B} f(x)$, $\min_{x \in A} f(x)$, $\min_{x \in B} f(x)$.

Khi đó ta có :

$$\text{a) } \max_{x \in A} f(x) \leq \max_{x \in B} f(x); \quad \text{b) } \min_{x \in A} f(x) \geq \min_{x \in B} f(x).$$

Tính chất 2

Giả sử $f(x)$ xác định trên D và tồn tại $\max_{x \in D} f(x)$ và $\min_{x \in D} f(x)$. Khi đó ta có :

$$\text{a) } \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} (-f(x)); \quad \text{b) } \min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D} (-f(x)).$$

Tính chất 3

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng xác định trên D và thỏa mãn điều kiện $f(x) \geq g(x), \forall x \in D$. Khi đó ta có :

$$\max_{x \in D} f(x) \geq \max_{x \in D} g(x).$$

Tính chất 4

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên D và $D = D_1 \cup D_2$. Nếu tồn tại $\max_{x \in D_i} f(x), \min_{x \in D_i} f(x)$ với $i = 1, 2$, thì ta có :

$$\text{a) } \max_{x \in D} f(x) = \max \left\{ \max_{x \in D_1} f(x), \max_{x \in D_2} f(x) \right\};$$

$$\text{b) } \min_{x \in D} f(x) = \min \left\{ \min_{x \in D_1} f(x), \min_{x \in D_2} f(x) \right\}.$$

Tính chất 5

Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ cùng xác định trên miền D

Đặt $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$. Nếu tồn tại $\max_{x \in D} f_i(x),$

$\min_{x \in D} f_i(x)$ với $i = 1, 2, \dots, n$, thì ta có :

$$\text{a) } \max_{x \in D} f(x) \leq \max_{x \in D} f_1(x) + \max_{x \in D} f_2(x) + \dots + \max_{x \in D} f_n(x);$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho :

$$\max_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0), \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{b) } \min_{x \in D} f(x) \leq \min_{x \in D} f_1(x) + \min_{x \in D} f_2(x) + \dots + \min_{x \in D} f_n(x).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho :

$$\min_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0), \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Tính chất 6

Giả sử $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ cùng xác định trên miền D và $f_i(x) > 0, \forall x \in D, i = \overline{1, n}$. Nếu tồn tại $\max_{x \in D} f_i(x), \min_{x \in D} f_i(x)$ với $i = 1, 2, \dots, n$ và $\max_{x \in D} f(x), \min_{x \in D} f(x)$, với $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$ thì ta có :

$$a) \max_{x \in D} f(x) \leq \left(\max_{x \in D} f_1(x) \right) \left(\max_{x \in D} f_2(x) \right) \cdots \left(\max_{x \in D} f_n(x) \right);$$

$$b) \min_{x \in D} f(x) \leq \left(\min_{x \in D} f_1(x) \right) \left(\min_{x \in D} f_2(x) \right) \cdots \left(\min_{x \in D} f_n(x) \right).$$

Tính chất 7

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng xác định trên miền D . Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$. Nếu tồn tại các GTLN, GTNN của các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ trên D . Khi đó ta có :

$$a) \max_{x \in D} h(x) \leq \max_{x \in D} f(x) - \max_{x \in D} g(x);$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho :

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0); \min_{x \in D} g(x) = g(x_0).$$

$$b) \min_{x \in D} h(x) \geq \min_{x \in D} f(x) - \min_{x \in D} g(x).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho :

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0); \max_{x \in D} g(x) = g(x_0).$$

Tính chất 8

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng xác định và dương khi $x \in D$. Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu tồn tại các GTLN, GTNN của các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ trên D . Khi đó ta có :

$$a) \max_{x \in D} h(x) \leq \frac{\max_{x \in D} f(x)}{\max_{x \in D} g(x)} ;$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho :

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0) ; \min_{x \in D} g(x) = g(x_0).$$

$$b) \min_{x \in D} h(x) \geq \frac{\min_{x \in D} f(x)}{\min_{x \in D} g(x)} .$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho :

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0) ; \max_{x \in D} g(x) = g(x_0).$$

Tính chất 9

a) Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên D . Khi đó, với mọi n nguyên dương, ta có :

$$\max_{x \in D} f(x) = \sqrt[n+1]{\max_{x \in D} (f^{2n+1}(x))} ;$$

$$\min_{x \in D} f(x) = \sqrt[n+1]{\min_{x \in D} (f^{2n+1}(x))} .$$

b) Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên D và $f(x) \geq 0, \forall x \in D$. Khi đó, với mọi n nguyên dương, ta có :

$$\max_{x \in D} f(x) = \sqrt[n]{\max_{x \in D} (f^{2n}(x))} ;$$

$$\min_{x \in D} f(x) = \sqrt[n]{\min_{x \in D} (f^{2n}(x))} .$$

Tính chất 10

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên D và tồn tại $\max_{x \in D} f(x)$, $\min_{x \in D} f(x)$. Khi đó, ta có :

$$\max_{x \in D} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|, \left| \min_{x \in D} f(x) \right| \right\} . \quad (1)$$

Chương 2.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

§ 27. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ DẠNG BÌNH PHƯƠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để tìm GTLN và GTNN của một biểu thức ta tìm cách (nếu được) đưa biểu thức về dạng $A^2 \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $A = 0$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho a là số cố định, còn x, y là những số biến thiên. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$(x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$$

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội, năm 2000)

Hướng dẫn giải

Đặt : $A = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$. Do $(x - 2y + 1)^2 \geq 0$ và $2x + ay + 5 \geq 0$ nên $A \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \min A = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + ay + 5 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \neq -4. \end{aligned}$$

b) Với $a = -4$. Khi đó $A = (x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2$. Đặt : $t = x - 2y + 1$. Ta có : $A = t^2 + (2t + 3)^2 = 5t^2 + 12t + 9$.

$$= 5 \left(t^2 + 2t \cdot \frac{6}{5} + \frac{36}{5} \right) - \frac{36}{5} + 9 = 5 \left(t + \frac{6}{5} \right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$$

Suy ra : $\min A = \frac{9}{5}$ khi $t = -\frac{6}{5}$.

$$\text{Vậy : min } A = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a \neq -4 \\ \frac{9}{5} & \text{nếu } a = -4. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}.$$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định với mọi $x \geq -1$. Ta có :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^3 + 1 + 2\sqrt{x^3 + 1} + 1} + \sqrt{x^3 + 1 - 2\sqrt{x^3 + 1} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} - 1)^2} = 1 + \sqrt{x^3 + 1} + |1 - \sqrt{x^3 + 1}| \\ &\geq 1 + \sqrt{x^3 + 1} + 1 - \sqrt{x^3 + 1} = 2. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $1 - \sqrt{x^3 + 1} \geq 0$ tức là $-1 \leq x \leq 0$.

Vậy : min $y = 2$ khi $-1 \leq x \leq 0$.

Ví dụ 3. α là một góc cố định cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \tan^2(x + \alpha) + \tan^2(x - \alpha)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng đẳng thức $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2$, ta có :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}[\tan(x + \alpha) + \tan(x - \alpha)]^2 + \frac{1}{2}[\tan(x + \alpha) - \tan(x - \alpha)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)} \\ &= \frac{\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha}{2\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)} = \frac{2(\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha)}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Từ số đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sin 2x = 0$, khi đó $\cos 2x = \pm 1$. Mẫu số đạt giá trị lớn nhất bằng $(1 + \cos 2\alpha)^2$ nếu $\cos 2\alpha \geq 0$, khi $\cos 2x = 1$ và bằng $(-1 + \cos 2\alpha)^2$ nếu $\cos 2\alpha \leq 0$ khi $\cos 2x = -1$.

i) Nếu $\cos 2\alpha \geq 0$ thì $\min y = \frac{2\sin^2 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)^2} = 2\tan^2 \alpha$;

ii) Nếu $\cos 2\alpha < 0$ thì $\min y = \frac{2\sin^2 2\alpha}{(1 - \cos 2\alpha)^2} = 2\cot^2 \alpha$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = \sqrt{3} \cos B + 3(\cos A + \cos C).$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } P &= \sqrt{3} \cos B + 6 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ &= \sqrt{3} \cos B + 6 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \leq \sqrt{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} \right) + 6 \sin \frac{B}{2} \\ &\leq -2\sqrt{3} \sin^2 \frac{B}{2} + 6 \sin \frac{B}{2} + \sqrt{3} \leq -2\sqrt{3} \left(\sin \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \leq \frac{5\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \max P = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ khi } \begin{cases} \cos \frac{A-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C = 30^\circ \\ B = 120^\circ. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Trong tất cả các tam giác nội tiếp trong cùng một đường tròn cho trước, hãy tìm tam giác có tổng các bình phương các cạnh là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn bán kính R cho trước. Ta tìm tam giác có $a^2 + b^2 + c^2$ lớn nhất.

Áp dụng định lí sin trong $\triangle ABC$, ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

Ta có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$. Do đó :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R(2 + 2\cos A \cos B \cos C) = 4R + 4R \cos A \cos B \cos C.$$

Bài toán đưa về việc tìm tam giác ABC để $\cos A \cos B \cos C$ lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \cos A \cos B \cos C &= \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cos C \\ &= \frac{1}{2} [-\cos C + \cos(A-B)] \cos C = -\frac{1}{2} \cos^2 C + \frac{1}{2} \cos C \cos(A-B) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos^2 C - 2 \cos C \cdot \cos(A-B) \times \frac{1}{2} + \frac{\cos^2(A-B)}{4} \right] + \frac{\cos^2(A-B)}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos C - \frac{1}{2} \cos(A-B) \right]^2 + \frac{\cos^2(A-B)}{8} \leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos C = \frac{1}{2} \cos(A-B) \\ \cos(A-B) = 1 \end{cases}$ hay

$\begin{cases} A = B \\ \cos C = \frac{1}{2} \end{cases}$ tức là $\triangle ABC$ đều. Vậy $a^2 + b^2 + c^2$ lớn nhất khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

C. LUYỆN TẬP

27.1 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số : $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

27.2 Xác định tam giác ABC để :

- $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$ lớn nhất ;
- $4 \cos A + 5 \cos B + 5 \cos C$ lớn nhất ;
- $\sin(B+C) + \sin(A+C) + \cos(A+B)$ lớn nhất.
- $\frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos \frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos \frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos \frac{C}{2}}}$ lớn nhất.

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 2000)

Hướng dẫn : Áp dụng BĐT $\left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \leq \frac{a^3 + b^3}{2}$.

§ 28. PHƯƠNG PHÁP DÙNG MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

$y_0 \in f(D) \Leftrightarrow$ Phương trình $y_0 = f(x)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow a \leq y_0 \leq b$ (Dấu bằng xảy ra được).

Khi đó : $\min y = a, \max y = b$.

Lưu ý : Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $c^2 \leq a^2 + b^2$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Xác định các tham số a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Hướng dẫn giải

Miền xác định : $D = \mathbf{R}$.

y_0 thuộc miền giá trị hàm số khi và chỉ khi phương trình sau có

nghiệm : $y_0 = \frac{ax+b}{x^2+1} \Leftrightarrow y_0 x^2 - ax + y_0 - b = 0$. (1)

• Nếu $y_0 = 0$ thì : (1) có nghiệm $\Leftrightarrow ax = -b$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ a \neq 0. \end{cases}$

• Nếu $y_0 \neq 0$ thì (1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(y_0 - b)y_0 \geq 0 \Leftrightarrow -4y_0^2 + 4by_0 + a^2 \geq 0.$$

y_0 phải thay đổi từ -1 đến 4, nghĩa là tam thức $-4y_0^2 + 4by_0 + a^2$ phải có nghiệm là -1 và 4 (vì $-4 < 0$).

Theo Định lí Vi-ét ta có : $\begin{cases} -\frac{a^2}{4} = -4 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy, với $a = 4$, $b = 3$ hoặc $a = -4$, $b = 3$ thì $\min y = -1$, $\max y = 4$.

Cách khác. Ta tìm a , b để $-1 \leq \frac{ax+b}{x^2+1} \leq 4$ (2), với mọi x và dấu

bằng xảy ra được. Ta có : (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0 \\ x^2 + ax + 1 + b \geq 0 \end{cases}$, với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = a^2 - 16(4-b) = 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4(1+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = 3. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$.

Hướng dẫn giải

Vì $\sin x$ và $\cos x$ không đồng thời bằng 1 nên hàm số xác định với mọi x .
 y_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình sau có

nghiệm : $y_0 = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2} \Leftrightarrow y_0 \sin x + (y_0 - 1) \cos x = 2(1 + y_0)$. (1)

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow 4(1 + y_0)^2 \leq y_0^2 + (y_0 - 1)^2 \Leftrightarrow 2y_0^2 + 10y_0 + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} \leq y_0 \leq \frac{-5 + \sqrt{19}}{2} \Rightarrow \max y = \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}.$$

Ví dụ 3. a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left[\frac{12x(x-a)}{x^2 + 36} \right]^{\frac{3}{4}}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = (\cos x + \sin x)^3 + \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số xác định khi $x(x-a) \geq 0$. Đặt : $z = \frac{12x(x-a)}{x^2 + 36}$ (1) thì

$y = \sqrt[4]{z^3}$ và $z \geq 0$. Ta tìm $\max z$.

z_0 thuộc miền giá trị của hàm số (1) khi và chỉ khi phương trình

$$z_0 = \frac{12x(x-a)}{x^2+36} \text{ có nghiệm hay phương trình}$$

$$(12-z_0)x^2 - 12ax - 36z_0 = 0 \quad (2) \text{ có nghiệm.}$$

i) $z_0 = 12$: (2) trở thành $ax = -36$ có nghiệm khi $a \neq 0$.

ii) $z_0 \neq 12$: (2) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta = 36a^2 + 36z_0(12-z_0) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 12z_0 - z_0^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z_0^2 - 12z_0 - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - \sqrt{36 + a^2} \leq z_0 \leq 6 + \sqrt{36 + a^2}.$$

Vì $z_0 \geq 0$ nên $0 \leq z_0 \leq 6 + \sqrt{36 + a^2}$.

$$\text{Vậy : } \max z = 6 + \sqrt{36 + a^2} ; \max y = \sqrt[4]{(6 + \sqrt{36 + a^2})^3}.$$

b) Ta có :

• $(\sin x + \cos x)^3 = 2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq -2\sqrt{2}$. Khi $x = \frac{5\pi}{4}$ thì xảy ra dấu bằng.

• $\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \geq 4$. Khi $x = \frac{5\pi}{4}$ thì cũng xảy ra dấu bằng.

Vậy $\min y = -2\sqrt{2} + 4$ (khi $x = \frac{5\pi}{4}$).

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \text{ trong khoảng } (-\pi ; \pi).$$

Hướng dẫn giải

y_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi phương trình

$$y_0 = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \quad (1) \text{ có nghiệm. Ta có :}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2y_0 - 1)\cos x - (y_0 + 2)\sin x = 3 - 4y_0. \quad (2)$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (3 - 4y_0)^2 \leq (2y_0 - 1)^2 + (y_0 + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 11y_0^2 - 24y_0 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y_0 \leq 2.$$

Vậy : $\max y = 2$; $\min y = \frac{2}{11}$.

Ví dụ 5. Tìm k để GTNN của hàm số $y = \frac{k \sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn -1 :

Hướng dẫn giải

y_0 thuộc miền giá trị hàm số khi và chỉ khi :

$$\frac{2 - \sqrt{1 + 3k^2}}{3} \leq y_0 \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3k^2}}{3}$$

Vậy : $\min y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3k^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow k^2 > 8 \Leftrightarrow |k| > 2\sqrt{2}.$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng hàm số :

$$y = \sin^2 x - 14 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x + 2\sqrt[3]{33}$$

chỉ nhận giá trị dương.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh $\min y > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - 7 \sin 2x - \frac{5(1 + \cos 2x)}{2} + 2\sqrt[3]{33} \\ &= -7 \sin 2x - 3 \cos 2x - 2 + 2\sqrt[3]{33}. \end{aligned}$$

Do $-7 \sin 2x - 3 \cos 2x \geq -\sqrt{58}$ (áp dụng :

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin u + b \cos u \leq \sqrt{a^2 + b^2})$$

nên : $\min y = 3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58}$.

Ta có : $\min y > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{33} > 2 + \sqrt{58}$

$$\Leftrightarrow 27.33 > 8 + 12\sqrt{58} + 6.58 + 58\sqrt{58}$$

$$\Leftrightarrow 297025 > 284200 \text{ (đúng)}$$

Vậy : $\min y > 0$ hay $y > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

C. LUYỆN TẬP

28.1 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$.

Đáp số : $\max y = 3 + 2\sqrt{2}$, $\min = 3 - 2\sqrt{2}$.

28.2 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}.$$

Hướng dẫn : Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$ ta có : $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 4$.

Đặt : $\sqrt{x+3} = 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2}$; $\sqrt{1-x} = 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$ với $t = \tan \frac{\varphi}{2} \in [0; 1]$.

Ta có $y = -\frac{7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$.

Vậy $\max y = \frac{9}{7}$ khi $x = -3$; $\min y = \frac{7}{9}$ khi $x = 1$.

28.3 Cho $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Tìm GTLN và GTNN của $T = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

Hướng dẫn : Từ $x^2 + y^2 = 1 + xy$ suy ra $-\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$. Ta có :

$$T = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 - x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1.$$

Đặt : $t = xy$. *Đáp số* : $\max T = \frac{3}{2}$; $\min T = \frac{1}{9}$.

§ 29. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Sử dụng đạo hàm để tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên miền D , ta làm như sau :

Tính $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ sao cho $f'(x) = 0$.

Lập bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$.

Chú ý :

1) Nếu $D = [a; b]$, thì không cần lập bảng biến thiên, chỉ cần :

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$ sao cho $f'(x) = 0$.

Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$

Khi đó : $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$;

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}.$$

2) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $D = [a; b]$. Ta có : Hàm f tăng (giảm) trên $(a; b)$ nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in [a; b]$. (Dấu “=” chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $D = [a; b]$). Từ đó suy ra :

Nếu f tăng trên $D = [a; b]$ thì :

$$\min_{x \in D} f(x) = f(a), \max_{x \in D} f(x) = f(b).$$

Nếu f giảm trên $D = [a; b]$ thì :

$$\min_{x \in D} f(x) = f(b), \max_{x \in D} f(x) = f(a).$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Với giá trị nào của đối số x thì hàm số sau đạt giá trị nhỏ nhất

$$y = \lg^2 x + \frac{1}{\lg^2 x + 2}.$$

Hướng dẫn giải

Miền xác định của hàm số $D = (0; +\infty)$. Đặt $t = \lg^2 x$, $t \geq 0$. Khi đó

$$y = t + \frac{1}{t+2}; y' = 1 - \frac{1}{(t+2)^2} = \frac{(t+2)^2 - 1}{(t+2)^2}$$

$$= \frac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2} > 0 \text{ với } t \geq 0.$$

Do đó $y(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$, suy ra $y(t) \geq y(0) = \frac{1}{2}$,
với $t \geq 0$. Vậy: $\min y = \frac{1}{2}$ khi $x = 1$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \text{ với } a, b \neq 0.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Ta có $|x| = \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2$ (vì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ cùng dấu nên $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right|$); $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = x^2 - 2$;

$$\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2.$$

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 2$, với $|x| \geq 2$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 10x + 1 = 2x(2x^2 - 5) + 1$.

- Nếu $x \geq 2$ thì

$$y' \geq 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 13 > 0;$$

- Nếu $x \leq -2$ thì

$$y' \leq 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 1 = -11 < 0.$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	$-$			$+$
y	$+\infty$			$+\infty$

Ta có bảng biến thiên ở hình bên.

Vậy: $\min y = -2$.

Ví dụ 3. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình :

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0.$$

Với giá trị nào của m thì $x_1^3 + x_2^3$

a) đạt giá trị lớn nhất ?

b) đạt giá trị nhỏ nhất ?

Hướng dẫn giải

Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là :

$$\Delta' = 9m^2 - 12 \left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \left(-m^2 + 16 - \frac{48}{m^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-m^4 + 16m^2 - 48}{m^2} \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq m^2 \leq 12 \Leftrightarrow 2 \leq |m| \leq 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m \in D = [-2\sqrt{3}; -2] \cup [2; 2\sqrt{3}].$$

Áp dụng Định lí Viét, ta có :

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = \frac{m}{2} \left[\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}}{4} \right] = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m}.$$

Bài toán trở thành : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$f(m) = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m} \text{ trên } D. \text{ Ta có : } f'(m) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2m^2} > 0.$$

$$f(-2\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}; f(2\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}; f(-2) = -\frac{1}{4}; f(2) = \frac{1}{4}.$$

Bảng biến thiên :

m	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	-2	2	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(m)$			+		+	
$f(m)$			$-\frac{1}{4}$		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	
		$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$		$\frac{1}{4}$		

Vậy : $\min_{m \in D} f = f(-2\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $\max_{m \in D} f = f(2\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Kết luận : Với $m = -2\sqrt{3}$ thì $x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị nhỏ nhất ;

Với $m = 2\sqrt{3}$ thì $x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + 3 \sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định với mọi x . Ta có :

$$y' = \cos x + 6 \cos 2x = 12 \cos^2 x + \cos x - 6 ; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{2}{3} \\ \cos x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

y đạt giá trị lớn nhất tại một điểm tại đó $y' = 0$.

Với $\cos x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. Khi đó :

$$y = \sin x + 6 \sin x \cos x = \pm \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Với $\cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{7\sqrt{7}}{8}$. Khi đó :

$$y = \sin x(1 + 6 \cos x) = \pm \frac{7\sqrt{7}}{8}.$$

Vậy : $\max y = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ khi $\cos x = \frac{2}{3}$, $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ví dụ 5. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số có chu kỳ $T = 2\pi$. Trong đoạn $[0 ; 2\pi]$ hàm số xác định. Vậy

tập xác định : $D = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Đặt : $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Vì

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Ta có $y^2 = t + \sqrt{2t^2 - 2} = f(t)$; $f'(t) = 1 + \frac{2t}{\sqrt{2t^2 - 2}} > 0$, $t \in [1 ; \sqrt{2}]$.

Do đó, với $t \in [1; \sqrt{2}]$ thì f tăng nên :

$$\min f = f(1) = 1; \max f = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}.$$

Vậy : $\min y = 1$ và $\max y = \sqrt[4]{8}$.

Ví dụ 6. Cho $a \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}.$$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xét :

$$Z = y^2 = 2a + \cos x + \sin x + 2\sqrt{a^2 + a(\cos x + \sin x) + \cos x \sin x}$$

Đặt : $t = \cos x + \sin x$ thì $|t| \leq \sqrt{2}$ và $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Khi đó :

$$Z = 2a + t + \sqrt{2(t^2 + 2at + 2a^2 - 1)}.$$

• Với $a = 1$ thì $t^2 + 2at + 2a^2 - 1 = (t + 1)^2$. Suy ra :

$$Z = 2 + t + \sqrt{2}|t + 1| \Rightarrow \min Z = 1 \Rightarrow \min y = 1 \text{ khi } t = -1.$$

• Với $a > 1$ ta có : $Z' = 1 + \frac{\sqrt{2}(t + a)}{\sqrt{t^2 + 2at + 2a^2 - 1}}$.

Đề lập bảng biến thiên của Z , ta tìm t để $Z' > 0$.

+ Nếu $t + a \geq 0 \Rightarrow t \geq -a$ thì rõ ràng $Z' > 0$.

+ Nếu $t + a < 0$: $Z' > 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 2at + 2a^2 - 1} > -\sqrt{2}(t + a)$
 $\Leftrightarrow t^2 + 2at + 2a^2 - 1 > 2(t^2 + 2at + a^2)$
 $\Leftrightarrow t^2 + 2at + 1 < 0 \Leftrightarrow -a - \sqrt{a^2 - 1} \leq t < -a.$

i) Nếu $-a - \sqrt{a^2 - 1} \leq -\sqrt{2}$ hay $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ thì $Z' > 0$ khi $t > -\sqrt{2}$,

lúc đó Z tăng trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ suy ra :

$$\min_{|t| \leq \sqrt{2}} Z = Z(-\sqrt{2}) \Rightarrow \min_{|t| \leq \sqrt{2}} y = y(-\sqrt{2}) = \sqrt{4a - 2\sqrt{2}}.$$

ii) Nếu $-\sqrt{2} < -a - \sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow a < \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Khi đó lập bảng biến thiên của hàm Z , ta có :

$$\min_{|t| \leq \sqrt{2}} Z = Z(-a - \sqrt{a^2 - 1}) = a + \sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow \min_{|t| \leq \sqrt{2}} y = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Kết luận : Nếu $1 \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ thì $\min y = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}}$.

Nếu $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ thì $\min y = \sqrt{4a - 2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

(Trích đề thi Đại học Ngoại ngữ Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = 1 - \sin 2x \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ suy ra y tăng trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Do

đó : $\max y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; $\min y = y(0) = 1$.

Ví dụ 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$$

(Trích đề thi Đại học, Khối D, năm 2010)

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -x^2 + 4x + 21 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$$

$$\text{Ta có : } y' = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x + 21}} - \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x + 21}} = \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}=\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{25-(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \\ (x-2)^2\left[\frac{49}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2[25-(x-2)^2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \vee x \geq 2 \\ \frac{49}{4}(x-2)^2=25\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \vee x \geq 2 \\ 7(x-2)=10\left(x-\frac{3}{2}\right) \\ 7(x-2)=10\left(\frac{3}{2}-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Khi đó : $y(-2)=3$; $y(5)=4$; $y\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}$

Vậy $\min y=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

C. LUYỆN TẬP

29.1 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các hàm số :

a) $y=\sin^2 x \cos x+\cos^2 x \sin x$;

b) $y=1+\cos x+\frac{1}{2} \cos 2x+\frac{1}{3} \cos 3x$; c) $y=\sin x-\cos^2 x+\frac{1}{2}$.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1997)

29.2 Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=\sin^{20} x+\cos^{20} x$.

(Trích đề thi Đại học Luật Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn : Xét trên $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]: y'=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

Đáp số : $\min y=\frac{1}{2^9}$; $\max y=1$.

- 29.3** Cho $f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 2 \sin 2x + m$. Tính theo m giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x)$. Từ đó tìm m sao cho : $f^2(x) \leq 3, \forall x$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn : Đặt $t = \sin x + \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Ta có :

$$f = -t^2(1-t)^2 + m + 3; \max f = m + 3;$$

$$\min f = m + 3 - 2(\sqrt{2} + 1)^2; -9 + 2(\sqrt{2} + 1)^2 \leq m \leq 3.$$

- 29.4** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $y = 2 \sin^8 x + \cos^4 2x$

(Trích đề thi Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, năm 2000)

- 29.5** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số : $y = 5 \cos x + \cos 5x$ trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

§ 30. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Nếu $a_1 a_2 \dots a_n = P$ không đổi thì $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ đạt giá trị nhỏ nhất là $n\sqrt[n]{P}$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt[n]{P}$.
- Nếu $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ không đổi thì $a_1 a_2 \dots a_n = P$ đạt giá trị lớn nhất là $\left(\frac{S}{n}\right)^n$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{S}{n}$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giả sử x, y, z là những số dương thay đổi vì thoả điều kiện $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1996)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x + y + z$ ta có $0 < t \leq \frac{3}{2}$. Áp dụng BĐT Cô-si ta có :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{t} \Rightarrow P \geq t + \frac{9}{t}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Xét hàm số $f(t) = t + \frac{9}{t}$ với $t \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$. Ta có : $f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} = \frac{t^2 - 9}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$. Suy ra f giảm trên $\left(0; \frac{3}{2}\right]$ nên $\min P = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

(Trích đề thi Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có : $0 \leq xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}$. Khi đó :

$$P = \frac{x^2 + x + y^2 + y}{xy + x + y + 1} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{xy + 2} = \frac{2 - 2xy}{2 + xy}.$$

Đặt : $t = xy$, ta có : $P = \frac{2-2t}{2+t}$ với $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$.

$$P' = \frac{-6}{(2+t)^2} < 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

Suy ra P là hàm số giảm trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Vậy : $\max P = P(0) = 1$ khi $x = 0; y = 1$ hoặc $x = 1; y = 0$.

Ví dụ 3. Cho x, y là hai số thay đổi thoả mãn điều kiện $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = (3-x)(4-y)(2x+3y).$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $A = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho 3 số không âm $6-2x$, $12-3y$,

$$2x+3y \text{ ta được : } A \leq \frac{1}{6} \left[\frac{(6-2x) + (12-3y) + (2x+3y)}{3} \right]^3 = 36.$$

Dấu “=” xảy ra khi $6-2x = 12-3y = 2x+3y$ hay $x=0$; $y=2$.

Vậy $\max A = 6$ khi $x=0$; $y=2$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc},$$

trong đó $a \geq 3$, $b \geq 4$, $c \geq 2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } F = \frac{\sqrt{c-2}}{c} + \frac{\sqrt{a-3}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b} \quad (a \geq 3, b \geq 4, c \geq 2).$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{c-2} &= \sqrt{\frac{(c-2).2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(c-2).2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(c-2)+2}{2} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{c-2}}{c} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi : $c-2 = 2 \Leftrightarrow c = 4$.

$$\text{Tương tự : } \frac{\sqrt{a-3}}{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi : } a-3 = 3 \Leftrightarrow a = 6.$$

$$\frac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } b-4 = 4 \Leftrightarrow b = 8.$$

$$\text{Vậy : } \max F = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \text{ khi } a = 6, b = 8, c = 4.$$

Ví dụ 5. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}.$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $P = 1 - \frac{1}{1+x} + 1 - \frac{1}{1+y} + 1 - \frac{1}{1+z} = 3 - \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right].$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$(x+1+y+1+z+1) \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right] \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{x+y+z+3} = \frac{9}{4}.$$

Suy ra : $P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$. Vậy : $\max P = \frac{3}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 6. Gọi m là số nhỏ nhất trong 6 số $x, \frac{y}{z}, \frac{z}{t}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, t$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của m khi x, y, z, t thay đổi trên tập số thực dương.

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Sau số dương $x, \frac{y}{z}, \frac{z}{t}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, t$ có tích bằng 1 nên có ít nhất một số nhỏ hơn hay bằng 1, suy ra $m \leq 1$. Vậy $\max m = 1$ khi $x = y = z = t = 1$.

Ví dụ 7. Cho 3 số dương a, b, c thoả $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{bc}{a^2b + a^2c} + \frac{ac}{b^2a + b^2c} + \frac{ab}{c^2a + c^2b}.$$

(Trích đề thi Đại học Nông nghiệp 1, năm 2000)

Hướng dẫn giải

Đặt : $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, ta có $xyz = 1$ và khi đó :

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta chứng minh : $P \geq \frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{3}{2}$.

Suy ra : $\min P = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 1$.

Ví dụ 8. Cho đường tròn bán kính $R = 1$. Trên tiếp tuyến tại một điểm A của đường tròn, lấy điểm T với $AT = 1$. Đường thẳng d quay quanh T cắt đường tròn tại B và C . Xác định góc nhọn α giữa đường thẳng d và tiếp tuyến AT sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Vì $TA = R = 1$ nên để đường thẳng d cắt đường tròn tại B và C ta phải có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ta có $B = C + \alpha$;

$$A = \pi - (B + C) = \pi - (\alpha + 2C).$$

Áp dụng định lí sin trong $\triangle ABC$

($R = 1$), ta có : $a = 2 \sin(\alpha + 2C)$;

$c = 2 \sin C$. Gọi S là diện tích $\triangle ABC$, ta có :

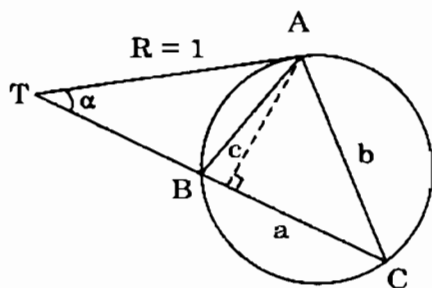
$$S = \frac{1}{2} BC \cdot TA \cdot \sin \alpha = \sin(\alpha + 2C) \cdot \sin \alpha$$

Áp dụng định lí sin trong $\triangle ATB$, ta có :

$$\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{AT}{\sin B} \Rightarrow \frac{2 \sin C}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha + C)}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin C \sin(\alpha + C) = \cos \alpha - \cos(\alpha + 2C)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + 2C) = \cos \alpha - \sin \alpha.$$



$$\begin{aligned}\text{Vì vậy : } S^2 &= \sin^2 \alpha \cdot \sin^2(\alpha + 2C) = \sin^2 \alpha [1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2] \\ &= 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } S^4 = 4 \sin^6 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 4 \sin^6 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha (3 - 3 \sin^2 \alpha) \leq \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 3 - 3 \sin^2 \alpha}{4} \right)^4 \text{ (BĐT Cô-si) } \leq \frac{27}{64}.\end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi : } \sin^2 \alpha = 3 - 3 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy : } \max S = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{2\sqrt[4]{4}} \text{ khi } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC , tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 - \cos 2C}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 - \cos 2C} \right) (2 + \cos 2A + 2 \\ + \cos 2B + 2 - \cos 2C) \geq 9\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } P \geq \frac{9}{6 + \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C}.$$

Đặt : $Q = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C$, ta có :

$$\begin{aligned}Q &= 2 \cos(A + B) \cos(A - B) - 2 \cos^2 C + 1 \\ &= -2 \left[\cos^2 C + \cos C \cdot \cos(A - B) + \frac{1}{4} \cos^2(A - B) \right] + \frac{1}{2} \cos^2(A - B) + 1 \\ &= -2 \left[\cos C + \frac{1}{2} \cos(A - B) \right]^2 + \frac{1}{2} \cos^2(A - B) + 1 \leq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \cos C = -\frac{1}{2} \cos(A-B) \\ \cos^2(A-B) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ. \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } P \geq \frac{9}{6+Q} \geq \frac{9}{6+\frac{3}{2}} = \frac{6}{5}.$$

Vậy : $\min P = \frac{6}{5}$ khi $A = B = 30^\circ, C = 120^\circ$.

C. LUYỆN TẬP

30.1 Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = 3^{x+1} + 3^{2-x}$.

30.2 Xét các số a, b, c, d thoả điều kiện $ad - bc = 1$. Tìm GTLN của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$.

30.3 Xét các số $x, y, z > 1$ thoả điều kiện $x + y + z = xyz$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{z-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}$.

30.4 M là một điểm nằm bên trong tam giác ABC . Đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Tìm vị trí của điểm M sao cho biểu thức $P = \frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1}$ đạt giá trị bé nhất.

30.5 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$.

30.6 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ trong đó x, y là các số không âm thoả mãn $x^3 + y^3 = 1$.

30.7 Cho 3 số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{bc}{a^2b + a^2c} + \frac{ac}{b^2c + b^2a} + \frac{ab}{c^2a + c^2b}$.

§ 31. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC BU-NHI-A-CÔP-SKI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Với $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ ($b_i \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$)

Lưu ý. Khi dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski thì có lúc ta chỉ có thể tìm được giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. α, β, γ là ba góc dương thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{1 + \tan \alpha \tan \beta} + \sqrt{1 + \tan \beta \tan \gamma} + \sqrt{1 + \tan \gamma \tan \alpha}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \cot \gamma$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1}{\tan \gamma} \Rightarrow \tan \alpha \tan \gamma + \tan \beta \tan \gamma = 1 - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\Rightarrow \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1.$$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có:

$$\begin{aligned} P^2 &= (1 \cdot \sqrt{1 + \tan \alpha \tan \beta} + 1 \cdot \sqrt{1 + \tan \beta \tan \gamma} + 1 \cdot \sqrt{1 + \tan \gamma \tan \alpha})^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(1 + \tan \alpha \tan \beta + 1 + \tan \beta \tan \gamma + 1 + \tan \gamma \tan \alpha) \\ &= 3(3 + 1) = 12. \end{aligned}$$

Do đó: $P \leq 2\sqrt{3}$. Dấu “=” xảy ra khi $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$.

Vậy: $\max y = 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 2. Ba đại lượng biến thiên x, y, z luôn thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$F = x^4 + y^4 + z^4.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$16 = (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

$$\text{Do đó : } x^2 + y^2 + z^2 \geq 4.$$

Cũng theo Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$16 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4) = 3(x^4 + y^4 + z^4).$$

$$\text{Do đó : } x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{3}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy : } \min F = \frac{16}{3} \text{ khi } x = y = z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 3. Tìm GTNN của hàm số :

$$y = \left| \log_{x^2+1} (3-x^2) + \log_{3-x^2} (x^2+1) \right|.$$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi :

$$\begin{cases} 3-x^2 > 0 \\ 3-x^2 \neq 1 \\ x^2+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x \neq \pm\sqrt{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{3}).$$

$$\text{Nhận xét rằng : } \log_{x^2+1} (3-x^2) = \frac{1}{\log_{3-x^2} (x^2+1)} \text{ nên } \log_{x^2+1} (3-x^2)$$

và $\log_{3-x^2} (x^2+1)$ là cùng dấu. Vậy :

$$y = \left| \log_{x^2+1} (3-x^2) \right| + \left| \log_{3-x^2} (x^2+1) \right|$$

$$\geq 2\sqrt{\left| \log_{x^2+1} (3-x^2) \right| \left| \log_{3-x^2} (x^2+1) \right|} = 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\left| \log_{x^2+1} (3-x^2) \right| = \left| \log_{3-x^2} (x^2+1) \right| \Leftrightarrow \log_{x^2+1} (3-x^2) = \pm 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x^2 = x^2+1 \\ 3-x^2 = \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{3}} \end{cases}.$$

Vậy : min $y = 2$.

Ví dụ 4. Cho M là điểm cố định thuộc tam diện vuông $Oxyz$. Mặt phẳng (α) qua M cắt Ox , Oy , Oz theo thứ tự tại A , B , C .

Gọi khoảng cách từ M đến các mặt là của tam diện là a , b , c . Tính OA , OB , OC để $(OA+OB+OC)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt : $OA = x, OB = y, OC = z$. Ta có : $V_{OABC} = \frac{1}{6}xyz$. Mặt khác :

$$V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOAC} \Rightarrow \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6}cxy + \frac{1}{6}ayz + \frac{1}{6}bxz$$

$$\Leftrightarrow xyz = cxy + ayz + bxz \Leftrightarrow 1 = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

$$\text{Do : } (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \left[\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{z}} \right]^2$$

$$\leq (x+y+z) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = x+y+z$$

Suy ra : $OA+OB+OC \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x+y+z = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} + \frac{z}{\sqrt{c}} = \frac{x+y+z}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ y = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ z = \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{cases}$$

Vậy : $\min(OA + OB + OC) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, đạt được khi :

$$\begin{cases} OA = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ OB = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ OC = \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{cases}$$

Ví dụ 5. Trong tam giác ABC có diện tích S ($S > 0$) cho trước, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$F = \frac{c^2}{(p-a)^2(p-b)^2} + \frac{b^2}{(p-a)^2(p-c)^2} + \frac{a^2}{(p-b)^2(p-c)^2}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right] [(p-a) + (p-b) + (p-c)] \geq 9 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p} \\ & \Leftrightarrow 4 \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right] \geq 3 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{3}{p} \right) \\ & \geq 3.4 \sqrt[4]{\frac{3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{12\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}. \end{aligned}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski cho biểu thức vế trái ta có :

$$\begin{aligned} F & \geq \frac{1}{3} \left[\frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{a}{(p-b)(p-c)} \right]^2 \\ & = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right]^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right]^2 \geq \frac{4}{3} \left[\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt{S}} \right]^2 = \frac{12\sqrt{3}}{S}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : $\min F = \frac{12\sqrt{3}}{S}.$

C. LUYỆN TẬP

31.1 Cho $x, y > 0$ thoả điều kiện $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$. Tìm GTNN của tổng $x + y$.

(Trích đề thi Đại học Y Hà Nội, năm 2000)

31.2 Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $A = 2x + 3y$ biết $2x^2 + 3y^2 \leq 5$.

31.3 Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

§ 32. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số bậc hai :

$$y = ax^2 + bx + c \ (c \neq 0) \text{ trên } [\alpha; \beta].$$

Đồ thị của hàm số bậc hai là parabol có hoành độ đỉnh $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

1) $a > 0$:

• Nếu $x_0 \in [\alpha; \beta]$ thì : $\min y = f(x_0)$; $\max y = \max \{f(\alpha), f(\beta)\}$.

• Nếu $x_0 \notin [\alpha; \beta]$ thì : $\max y = \max \{f(\alpha), f(\beta)\}$;

$$\min y = \min \{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

2) $a < 0$:

• Nếu $x_0 \in [\alpha; \beta]$ thì : $\max y = f(x_0)$; $\min y = \min \{f(\alpha), f(\beta)\}$.

• Nếu $x_0 \notin [\alpha; \beta]$ thì : $\max y = \max \{f(\alpha), f(\beta)\}$;

$$\min y = \min \{f(\alpha), f(\beta)\}.$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để tích xy là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt : $S = x + y$, $P = x.y$. Ta có : $S = 2a - 1$;

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = S^2 - 2P = a^2 + 2a - 3 &\Rightarrow P = \frac{1}{2}[(2a - 1)^2 - (a^2 + 2a - 3)] \\ &= \frac{1}{2}(3a^2 - 6a + 4). \end{aligned}$$

Trước hết tìm a để hệ có nghiệm.

Điều kiện để hệ có nghiệm là :

$$\begin{aligned} S^2 - 4P &\geq 0 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 - 2(3a^2 - 6a + 4) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -2a^2 + 8a - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Tìm a để $P = \frac{1}{2}(3a^2 - 6a + 4)$ đạt GTNN trên $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ta có hoành độ đỉnh của parabol : $a_0 = \frac{6}{2.3} = 1 < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Parabol có bề lõm quay lên do đó min P đạt được khi $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy với $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì xy đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$U = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 16xz - 24yz.$$

Hướng dẫn giải

Biến đổi U về tam thức bậc hai đối với x :

$$U = 19x^2 - 2(8z - 18y)x + 54y^2 + 16z^2 - 24yz$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \Delta_x &= (8z - 18y)^2 - 19(54y^2 + 16z^2 - 24yz) \\ &= -702y^2 + 168yz - 240z^2\end{aligned}$$

Xem Δ_x là tam thức bậc hai đối với y , ta có :

$$\Delta_y = (84z)^2 - 702 \cdot 240z^2 = -161424z^2 \leq 0, \forall z$$

Suy ra : $\Delta_x \leq 0, \forall y, z$ (vì $a = -702 < 0$). Do đó : $U \geq 0, \forall x, y, z$ (vì $a = 19 > 0$). Ta thấy : $U = 0$ khi $x = y = z = 0$.

Vậy : $\min U = 0$.

Ví dụ 3. Tìm tham số a để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 4ax + |-x^2 + 4x - 3|$$

lớn hơn 2.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } y = \begin{cases} x^2 + 4(a-1)x + 3 & \text{nếu } x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 4(a+1)x - 3 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } \min y = \min \{y(2-2a), y(1), y(3)\}$$

$$= \min \{-4a^2 + 8a - 1, 4a, 12a\}.$$

$$\text{Vậy : } \min y > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -4a^2 - 8a - 1 > 2 \\ 4a > 2 \\ 12a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$$y = \cos \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt : } u = \frac{2x}{1+x^2}, -1 \leq u \leq 1; t = \cos u, \cos 1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Khi đó : } y = 2t^2 + t \text{ với } \cos 1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Hoành độ đỉnh : } t_0 = -\frac{1}{4} < \cos 1.$$

$$\text{Do đó : } \min y = y(\cos 1) = 2\cos^2 1 + \cos 1 \text{ (tại } x = \pm 1);$$

$$\max y = y(1) = 3 \text{ (tại } x = 0).$$

Ví dụ 5. Tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x) = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt : } y = f^2(x) &= 6 + 4(\cos x + \sin x) \\ &\quad + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x| \end{aligned}$$

$$\text{Đặt : } t = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}. \text{ Khi đó :}$$

$$y = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1|.$$

$$\text{Ta có : } 2t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{i) Với } -\sqrt{2} \leq t \leq -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ hoặc } \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \text{ ta có :}$$

$$y = 6 + 4t + 2(2t^2 + 2t - 1) = 4t^2 + 8t + 4 = 4(t+1)^2.$$

Hoành độ đỉnh $t = -1$ nằm ngoài khoảng đang xét nên ta có :

$$m_1 = \min y = y\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = (\sqrt{3}-1)^2;$$

$$M_1 = \max y = y(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}+1)^2.$$

ii) Với $-\frac{\sqrt{3}+1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, ta có :

$$y = 6 + 4t - 2(2t^2 + 2t - 1) = -4t^2 + 8.$$

Hoành độ đỉnh $t = -1 \in \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$ nên ta có :

$$m_2 = \min y = y\left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right] = (\sqrt{3}-1)^2; \quad M_2 = \max y = y(0) = 8.$$

Tóm lại, trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ta có :

$$m = \min y = \min \{m_1, m_2\} = (\sqrt{3}-1)^2;$$

$$M = \max y = \max \{M_1, M_2\} = 4(\sqrt{2}+1)^2.$$

Vậy : $\min f = \sqrt{3}-1$ và $\max f = 2(1+\sqrt{2})$.

Ví dụ 6. Tùy theo giá trị của tham số m hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + m \sin x \cos x$

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi : $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + m \sin x \cos x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x.$$

Đặt $t = \sin 2x, |t| \leq 1$. Ta tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm bậc

hai $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{m}{2}t + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Đồ thị của hàm số $f(t)$ là parabol có bề lõm quay về hướng

$y < 0 \left(a = -\frac{1}{2} < 0 \right)$ và có hoành độ đỉnh $t_0 = \frac{m}{2}$.

i) Với $\left|\frac{m}{2}\right| \leq 1$ hay $|m| \leq 2$ thì $t_0 \in [-1; 1]$. Khi đó :

$$\max y = f\left(\frac{m}{2}\right) = 1 + \frac{m^2}{8} \text{ và } \min y = \min \{f(-1), f(1)\}.$$

So sánh $f(-1)$ và $f(1)$ ta có $f(-1) = \frac{1-m}{2}$; $f(1) = \frac{1+m}{2}$ và

$$f(1) - f(-1) = m, \text{ do đó : } \min y = \begin{cases} \frac{1-m}{2} & \text{nếu } m \geq 0 \\ \frac{1+m}{2} & \text{nếu } m \leq 0 \end{cases} = \frac{1-|m|}{2}.$$

ii) Với $\left|\frac{m}{2}\right| > 1$ hay $|m| > 2$ thì $t_0 \notin [-1; 1]$. Khi đó :

$$\min y = \min \{f(-1), f(1)\}; \max y = \max \{f(-1), f(1)\}.$$

Từ $f(1) - f(-1) = m$ suy ra :

• Với $m > 2$ thì : $\max y = f(1) = \frac{1+m}{2}$; $\min y = f(-1) = \frac{1-m}{2}$.

• Với $m < -2$ thì : $\max y = f(-1) = \frac{1-m}{2}$; $\min y = f(1) = \frac{1+m}{2}$.

$$\text{Vậy : } \min y = \frac{1-|m|}{2}; \max y = \begin{cases} \frac{1+|m|}{2} & \text{nếu } |m| > 2 \\ \frac{1+m^2}{8} & \text{nếu } |m| \leq 2. \end{cases}$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2a - 1|$ với $-2 \leq x \leq 3$. Xác định tham số a để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Để thấy rằng, hoành độ đỉnh của parabol $y = 3x^2 - 6x + 2a - 1$ là $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \notin (-2; 1)$ nên để tìm giá trị lớn nhất của y ta phải so sánh các giá trị $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$.

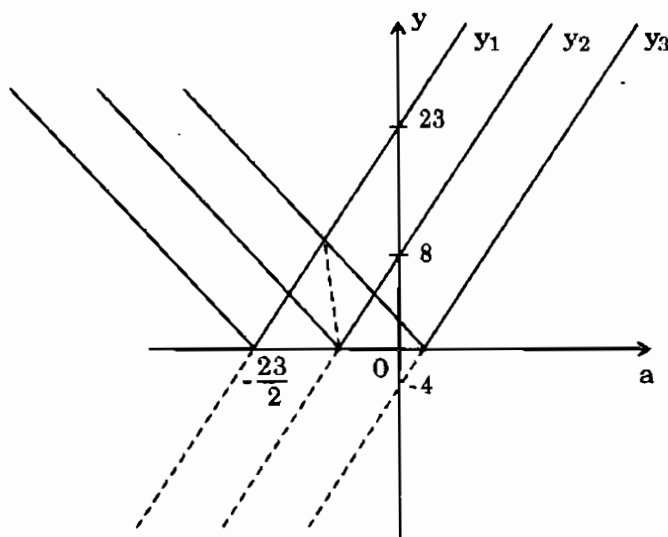
$$\text{Ta có : } \max y = \max \{|2a + 23|, |2a + 8|, |2a - 4|\}.$$

Chọn trục hoành Ox , ta vẽ đồ thị các hàm số : $y_1 = |2a + 23|$, $y_2 = |2a + 8|$, $y_3 = |2a - 4|$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

Hoành độ giao điểm của y_1 và y_3 là nghiệm của phương trình :

$$|2a + 23| = |2a - 4| \Leftrightarrow (2a + 23)^2 - (2a - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{19}{4}.$$

Dựa vào đồ thị ta có : $\max y = \begin{cases} 2a + 23 & \text{nếu } a \geq -\frac{19}{4} \\ 4 - 2a & \text{nếu } a \leq -\frac{19}{4} \end{cases}$



Vậy : Giá trị nhỏ nhất của $\max y$ đạt được tại $a = -\frac{19}{4}$.

Ví dụ 8. Xác định a để GTNN của hàm số $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ trên $[-2 ; 0]$ bằng 2.

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ là parabol có hoành độ đỉnh $x_0 = \frac{a}{2}$. Xét các trường hợp sau :

i) $x_0 < -2 \Leftrightarrow a < -4$: $\min_{[-2, 0]} y = y(-2) = a^2 + 6a + 16$;

$$\min y = 2 \Leftrightarrow a^2 + 6a + 14 = 0 : \text{ Vô nghiệm.}$$

$$\text{ii) } x_0 \in [-2; 0] \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 0: \min_{[-2; 0]} y = y\left(\frac{a}{2}\right) = -2a;$$

$$\min y = 2 \Leftrightarrow -2a = 2 \Leftrightarrow a = -1 \text{ (nhận).}$$

$$\text{iii) } x_0 > 0 \Leftrightarrow a > 0: \min_{[-2; 0]} y = y(0) = a^2 - 2a;$$

$$\min y = 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Chỉ có $a = 1 + \sqrt{3} > 0$ thoả mãn bài toán.

Vậy, với $a = -1$, $a = 1 + \sqrt{3} > 0$ thì $\min_{[-2; 0]} y = 2$.

C. LUYỆN TẬP

32.1 Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \frac{x}{(x+2008)^2}$, với $x > 0$.

32.2 Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}$.

32.3 Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = \frac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$.

32.4 Cho $x^2 + y^2 + xy = 1$, tìm GTLN, GTNN của biểu thức :

$$A = x^2 + 2y^2 - xy.$$

32.5 Cho $2x^2 + y^2 + xy \geq 1$, tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

§ 33. PHƯƠNG PHÁP DÙNG VECTOR

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi dùng vector để tìm GTLN và GTNN của một biểu thức ta cần lưu ý đến các kết quả sau :

- Cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Ta có :

(i) $|\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

(ii) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1b_1 \geq 0 \\ a_2b_2 \geq 0. \end{cases}$$

• Ta cũng có thể biến đổi $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$, kết hợp với các quy tắc vector, các hằng đẳng thức, các bất đẳng thức hiển nhiên để đánh giá. Chú ý các điểm: trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trung điểm,...

• Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

• Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng (Δ) :

$$Ax + By + C = 0 \text{ là: } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

• $AB + BC \geq AC$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi B thuộc đoạn AC .

• Các dạng phương trình đường thẳng, đường tròn trong mặt phẳng Oxy .

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{\cos^4 x + \cos^4 y} + \sin^2 x + \sin^2 y.$$

Hướng dẫn giải

Xét các vector $\vec{a} = (\cos^2 x; \cos^2 y)$, $\vec{b} = (\sin^2 x; 0)$, $\vec{c} = (0; \sin^2 y)$.

Khi đó: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1; 1)$. Ta có:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &\leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{\cos^4 x + \cos^4 y} + \sqrt{\sin^4 x} + \sqrt{\sin^4 y} \\ &\Rightarrow \sqrt{\cos^4 x + \cos^4 y} + \sin^2 x + \sin^2 y \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng hướng, tức là :

$$\begin{cases} x = k\pi \\ y = l\pi \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{2}$, đạt được khi và chỉ khi $x = k\pi$;
 $y = l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và M là điểm tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta có :

$$\begin{aligned} P &= MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}). \\ &\geq GA^2 + GB^2 + GC^2. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } M \equiv G. \end{aligned}$$

Vậy : $\min P = GA^2 + GB^2 + GC^2$ đạt được khi $M \equiv G$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = y - 2x + 5$ biết rằng x và y thoả mãn phương trình $36x^2 + 16y^2 = 9$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng : $P = 5 + \left[4y \cdot \frac{1}{4} - 6x \cdot \frac{1}{3} \right]$.

Xét hai vector $\vec{a} = (4y; -6x)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3} \right)$. Ta có :

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &\leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \Rightarrow \left[4y \cdot \frac{1}{4} - 6x \cdot \frac{1}{3} \right]^2 \leq [(4y)^2 + (-6x)^2] \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] \\ &= (16y^2 + 36x^2) \frac{25}{16 \cdot 9} = 9 \cdot \frac{25}{16 \cdot 9} = \frac{25}{16} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 16y^2 + 36x^2 = 9 \\ \frac{4}{3}y = -\frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{36}{225} \\ y = -\frac{9}{8}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{15} \\ y = -\frac{9}{20} \\ x = -\frac{6}{15} \\ y = \frac{9}{20} \end{cases}$$

Vậy : $\min P = \frac{15}{4}$, đạt được khi $x = \frac{6}{15}; y = -\frac{9}{20}$.

$\max P = \frac{25}{4}$, đạt được khi $x = -\frac{6}{15}; y = \frac{9}{20}$.

C. LUYỆN TẬP

33.1 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$y = \sqrt{4 + (1 - \cos x)^2} + \sqrt{4 + (2 + \cos x)^2}.$$

33.2 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Tìm GTNN

của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$

33.3 Tìm GTLN của biểu thức :

$$P = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10}, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

§ 34. PHƯƠNG PHÁP DÙNG LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bằng cách đặt ẩn phụ, một số bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số có thể đưa về dạng lượng giác để giải quyết sẽ thuận lợi hơn nhờ các công thức và bất đẳng thức quen thuộc. Khi sử dụng phương pháp này cần lưu ý :

- Giới hạn cung, góc, điều kiện.
- Dựa vào điều kiện, ta có thể đặt ẩn phụ như sau :

Nếu $x \leq 1$ thì đặt $x = \sin t$ hay $x = \cos t$.

Nếu $x \leq a$ thì đặt $x = a \sin t$ hay $x = a \cos t$.

Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$.

Nếu $x^2 + y^2 = a^2$ thì đặt $x = a \sin t$ và $y = a \cos t$.

Nếu $x \in \mathbf{R}$ thì đặt $x = \tan t$ hay $x = \cot t$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{1+x^6}{(1+x^2)^3}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$. Đặt $x = \tan t$, ta có :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 + \tan^6 t}{(1 + \tan^2 t)^3} = \frac{1 - \tan^2 t + \tan^4 t}{(1 + \tan^2 t)^3} = \frac{1 - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}{\frac{1}{\cos^4 t}} \\ &= \cos^4 t - \sin^2 t \cos^2 t + \sin^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 3\sin^2 t \cos^2 t \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2t. \end{aligned}$$

Vì $0 \leq \sin^2 2t \leq 1$ nên $\frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2t \leq 1$. Vậy, $\max y = 1$ đạt được khi và chỉ khi : $\sin^2 2t = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2t = 1 \Leftrightarrow t = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 2. Cho x, y thoả $x^2 + 2y^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Do đó, đặt $x = 2\cos t$,

$$\begin{aligned}\text{Khi đó : } P &= x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 2\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\sin t = 2\cos t - \sin t \\ &= \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin t \right).\end{aligned}$$

Ta lại có : $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ nên đặt $\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos u$ và $-\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin u$.

$$\text{Do đó : } P = \sqrt{5}(\cos t \cos u + \sin t \sin u) = \sqrt{5} \cos(t - u) \leq \sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi : } t - u = k2\pi \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{5}; y = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Vậy : } \max P = \sqrt{5}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, \forall x \in [-1; 1]$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $x = \cos 2\alpha, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{1+\cos 2\alpha} + \sqrt{1-\cos 2\alpha} \\ &= \sqrt{2\cos^2 \alpha} + \sqrt{2\sin^2 \alpha} = \sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha).\end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có : } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2};$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} \geq 1.$$

$$\text{Do đó : } \sqrt{2} \cdot 1 \leq y \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq y \leq 2.$$

Dấu “=” ở bên phải xảy ra khi và khi :

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 0$$

Dấu “=” ở bên trái xảy ra khi và chỉ khi :

$$\sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy : $\max_{-1 \leq x \leq 1} y = 2$; $\min_{-1 \leq x \leq 1} y = \sqrt{2}$.

Ví dụ 4. Tìm GTLN của biểu thức $P = 2x + y$ với x, y thoả mãn điều kiện : $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện :
$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x^2 + 2y^2 \neq 1. \end{cases}$$

- Nếu $x^2 + 2y^2 < 1$:

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \leq x^2+2y^2 < 1 \Rightarrow 2x+y < 1.$$

- Nếu $x^2 + 2y^2 > 1$:

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 2\left(y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) \leq \frac{9}{8} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{8}.$$

Với $\alpha \in \left[0; \frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$, đặt :
$$\begin{cases} x-1 = a \cos \alpha \\ \sqrt{2}\left(y - \frac{1}{4}\right) = a \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \alpha + 1 \\ y = \frac{1}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + y = \frac{9}{4} + a \left(2 \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right)$$

$$\Rightarrow 2x + y \stackrel{BCS}{\leq} \frac{9}{4} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(4 + \frac{1}{2}\right)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \Leftrightarrow 2x + y \leq \frac{9}{2}.$$

Tóm lại, ta luôn có : $2x + y \leq \frac{9}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{8} \\ a = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\cos \alpha}{2} = \sqrt{2} \sin \alpha \\ x = a \cdot \cos \alpha + 1 \\ y = \frac{1}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy : $\max P = \frac{9}{2}$, đạt được khi $x = 2$; $y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

(Trích đề thi Đại học, Khối B, năm 2008)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

Khi đó, $P = \frac{2(\cos^2 t + 6 \sin t \cdot \cos t)}{1 + 2 \sin t \cdot \cos t + 2 \sin^2 t} = \frac{\cos 2t + 6 \sin 2t + 1}{\sin 2t - \cos 2t + 2}$

Gọi m là giá trị của hàm số $y = \frac{\cos 2t + 6 \sin 2t + 1}{\sin 2t - \cos 2t + 2}$

Suy ra $m = \frac{\cos 2t + 6 \sin 2t + 1}{\sin 2t - \cos 2t + 2} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow (1+m)\cos 2t + (6-m)\sin 2t = 2m-1$

phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1+m)^2 + (6-m)^2 \geq (2m-1)^2$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 6m - 36 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 3.$

$$\text{Vậy } -6 \leq p \leq 3 \Rightarrow \text{Max } P = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}, y = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ x = \frac{-3}{\sqrt{10}}, y = \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\text{Min } P = -6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{13}}, y = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ x = \frac{3}{\sqrt{13}}, y = -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Ví dụ 6. Cho $x, y \geq 0$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

(Trích đề thi Đại học, Khối D, năm 2008)

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \tan a \\ y = \tan b \end{cases} \text{ với } 0 \leq a, b < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{(\tan a - \tan b)(1 - \tan a \cdot \tan b)}{(1 + \tan a)^2(1 + \tan b)^2}$$

$$= \frac{\sin(a-b) \cdot \cos(a+b)}{(1 + \sin 2a)(1 + \sin 2b)} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2a - \sin 2b}{(1 + \sin 2a)(1 + \sin 2b)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin 2b} - \frac{1}{1 + \sin 2a} \right)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 0 \leq \sin 2a \leq 1 \\ 0 \leq \sin 2b \leq 1 \end{cases} \text{ nên } -\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1, y = 0$$

$$\text{Min } P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0, y = 1$$

Ví dụ 7. Cho $x, y \geq 0$ thoả $x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

(Trích đề thi Đại học, Khối D, năm 2009)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$

Khi đó $A = (4\sin^4 t + 3\cos^2 t)(4\cos^4 t + 3\sin^2 t) + 25\sin^2 t \cos^2 t$

$$= 16(\sin t \cos t)^4 + 12(\sin^6 t + \cos^6 t) + 34(\sin t \cos t)^2$$

$$= \sin^4 2t + 12(1 - 3\sin^2 t \cos^2 t) + 34(\sin t \cos t)^2$$

$$= \sin^4 2t - \frac{1}{2}\sin^2 2t + 12.$$

Đặt $a = \sin^2 2t$ ($0 \leq a \leq 1$) $\Rightarrow A = a^2 - \frac{1}{2}a + 12$ ($0 \leq a \leq 1$)

$$\Rightarrow A' = 2a - \frac{1}{2} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên :

a	0	$\frac{1}{4}$	1
A'	-	0	+
A	12	$\frac{191}{16}$	$\frac{25}{2}$

Vậy $\text{Min } A = \frac{191}{16} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}, y = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{4}$

$$\text{Max } A = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

C. LUYỆN TẬP

34.1 Cho x, y, z thoả mãn điều kiện $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$.

Tìm GTNN của biểu thức : $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

34.2 Cho $u^2 + v^2 = 1$, tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right)^2 + \left(v^2 + \frac{1}{v^2}\right)^2.$$

34.3 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = (32x^5 - 40x^3 + 10x - 1)^2 + (16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1)^2.$$

34.4 Cho hai số thực a và b thoả điều kiện $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 16(a^5 + b^5) - 20(a^3 + b^3) + 5(a + b)$.

34.5 Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm GTLN, GTNN của : $P = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

$$\text{Gợi ý : } \max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y} (y \neq -1);$$

$$\min P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$$

§ 35. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA BIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Một số bài toán có tính đối xứng của các biến, ta có thể tìm GTLN, GTNN bằng cách

$$\text{Đặt } \begin{cases} S = x + y \\ P = x \cdot y \end{cases}, \text{ với điều kiện } S^2 \geq 4P$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho $x, y \neq 0$ thoả : $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. (1)

Tìm GTLN của $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2006)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \neq 0 \end{cases}$, với điều kiện $S^2 \geq 4P$ (*)

$$(1) \Leftrightarrow S.P = S^2 - 3P \Leftrightarrow P = \frac{S^2}{S+3} \quad (\text{Vì } S = -3 \text{ không thỏa (1)})$$

$$\text{Theo điều kiện (*), ta có: } \frac{4S^2}{S+3} \leq S^2 \Leftrightarrow \frac{S^2(S-1)}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 1 \\ S < -3 \end{cases}$$

(Vì $S \neq 0$)

$$\text{Khi đó: } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{(x+y)[(x+y)^2 - 3xy]}{x^3y^3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{S[S^2 - 3P]}{P^3} = \frac{(S+3)^2}{S^2}$$

$$\text{Suy ra: } A' = \frac{-6S^2 - 18S}{S^4} \Rightarrow A' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ S = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

S	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
A'	-				-
A	1			16	1

$$\text{Vậy } \text{Max } A = 16 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho $x, y \geq 0$ thỏa: $x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của:

$$A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

(Trích đề thi Đại học, Khối D, năm 2009)

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} S = x + y = 1 \\ P = x \cdot y \geq 0 \end{cases}, \text{ với điều kiện } S^2 \geq 4P \Rightarrow 0 \leq P \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Khi đó } A = 16(xy)^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$$

$$= 16P^2 + 12(1 - 3P) + 34P = 16P^2 - 2P + 12$$

$$\text{Suy ra } A' = 32P - 2 \Rightarrow A' = 0 \Leftrightarrow P = \frac{1}{16}$$

$$\text{Ta có : } A(0) = 12 ; A\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2} ; A\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } A = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Min } A = \frac{191}{16} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}, y = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Ví dụ 3. Cho } x, y, z > 0 \text{ thỏa điều kiện : } x(x + y + z) = 3yz \quad (1)$$

Chứng minh :

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3 \quad (*)$$

(Trích đề thi Đại học, Khối A, năm 2009)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 3 \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \frac{y}{x} \\ b = \frac{z}{x} \end{cases} \Rightarrow 1 + a + b = 3ab. \text{ Đặt } \begin{cases} S = a + b > 0 \\ P = ab > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + S = 3P$$

$$\text{Điều kiện : } S^2 \geq 4P \Rightarrow \frac{4}{3}(1 + S) \leq S^2 \Leftrightarrow 3S^2 - 4S - 4 \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 2$$

$$\text{Khi đó : } (*) \Leftrightarrow (1 + a)^3 + (1 + b)^3 + 3(1 + a)(1 + b)(a + b) \leq 5(a + b)^3$$

$$\Leftrightarrow (2 + a + b) \left[(2 + a + b)^2 - 3(1 + a)(1 + b) \right]$$

$$+ 3(1 + a + b + ab)(a + b) \leq 5(a + b)^3$$

$$\Leftrightarrow (2+S)\left[(2+S)^2 - 3\left(1+S+\frac{S+1}{3}\right)\right] + 3\left(1+S+\frac{S+1}{3}\right) \cdot S \leq 5S^3$$

$$\Leftrightarrow 4S^2 - 6S - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (3S^2 - 4S - 4) + (S^2 - 2S) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3S^2 - 4S - 4) + 3(S - 2) \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Dấu “=” xảy ra khi $S = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

Ví dụ 4. Cho $x, y \in \mathbf{R}$ thỏa : $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$ (*). Tìm GTNN của

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

(Trích đề thi Đại học, Khối B, năm 2009)

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x \cdot y \end{cases}$, với điều kiện $S^2 \geq 4P$

$$(*) \Leftrightarrow S^3 + 4P \geq 2 \Leftrightarrow 4P \geq 2 - S^3 \Rightarrow S^2 \geq 2 - S^3$$

$$\Leftrightarrow S^3 + S^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (S-1)(S^2 + 2S + 2) \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 1$$

Đặt $\begin{cases} S_1 = x^2 + y^2 \\ P_1 = x^2 \cdot y^2 \end{cases}$. Điều kiện : $S_1^2 \geq 4P_1$ và $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow 2S_1 \geq S^2 \Rightarrow S_1 \geq \frac{1}{2}$$

Khi đó : $A = 3[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2] - 2(x^2 + y^2) + 1$

$$= 3S_1^2 - 2S_1 + 1 - 3P_1 \geq 3S_1^2 - 2S_1 + 1 - \frac{3}{4}S_1^2 \Rightarrow A \geq \frac{9}{4}S_1^2 - 2S_1 + 1$$

Xét $y = \frac{9}{4}S_1^2 - 2S_1 + 1$ (Với $S_1 \geq \frac{1}{2}$)

$$\Rightarrow y' = \frac{9}{2}S_1 - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow S_1 = \frac{4}{9}$$

Bảng biến thiên :

S_1	$-\infty$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$
y'		0		$+$
y				

$\frac{9}{16}$

$$\Rightarrow y \geq \frac{9}{16} \left(\forall S_1 \geq \frac{1}{2} \right) \Rightarrow A \geq \frac{9}{16}. \text{ Vậy } \min A = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5. Cho $a, b, c \geq 0$, thỏa $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ac) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(Trích đề thi Đại học, Khối B, năm 2010)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = ab + bc + ac$, ta có :

$$1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \geq 3(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2t.$$

$$\text{Suy ra : } t^2 = (ab + bc + ca)^2 \leq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\text{Khi đó : } M \geq t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t}$$

$$\text{Xét } y = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3} \right)$$

$$y' = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1 - 2t}}, \quad y'' = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1 - 2t)^3}} < 0, \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{Suy ra } y' \text{ là hàm số giảm trên } \left[0; \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{mà } t \leq \frac{1}{3} \Rightarrow y'(t) \geq y'\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y'(t) \geq \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow y \text{ là hàm số tăng trên } \left[0; \frac{1}{3} \right] \Rightarrow y \geq y(0) = 2, \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{3} \right]$$

Vậy $M \geq 2 \Rightarrow \min M = 2 \Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 0; 1)$ và các hoán vị.

C. LUYỆN TẬP

35.1 Cho $x, y \geq 0$ thoả $x + y = 1$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

$$\text{Gợi ý : Max } A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

35.2 Cho $x, y \in \mathbf{R}$ thoả : $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$A = \sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}$$

$$\text{Gợi ý : Max } A = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Min } A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 0 \\ x = 0, y = -1 \end{cases}$$

35.3 Cho $x, y \in \mathbf{R}$ thoả : $x^2(2x^2-1) + y^2(2y^2-1) = 0$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$A = x^2(x^2-4) + y^2(y^2-4) + 2(x^2y^2-4)$$

$$\text{Gợi ý : Min } A = -11 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Max } A = -8 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Chương 3.

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

§ 36. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nhờ vào các bất đẳng thức Cô-si, Bu-nhi-a-côp-ski và một số bất đẳng thức đúng khác, việc giải một số phương trình, bất phương trình trở nên rất đơn giản và hiệu quả bằng cách đánh giá các biểu thức tham gia trong phương trình, bất phương trình đã cho.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải phương trình sau :

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 19} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $3x^2 + 6x + 19 = 3.(x^2 + 2x + 1) + 16 = 3.(x + 1)^2 + 16 \geq 16$;

$$5x^2 + 10x + 14 = 5(x + 1)^2 + 9 \geq 9.$$

Khi đó : $\sqrt{3x^2 + 6x + 19} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \geq 2 + 3 = 5.$

Mặt khác : $4 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x + 1) + 5 = -(x + 1)^2 + 5 \leq 5$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Do đó : $\sqrt{3x^2 + 6x + 19} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$ khi $x = -1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1.$

Ví dụ 2. Giải phương trình $x + \sqrt{2 - x^2} = 4y^2 + 4y + 3.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$x + \sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{x^2+(2-x^2)} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $x = 1$.

$$\text{Mặt khác : } 4y^2 + 4y + 3 = (2y+1)^2 + 2 \geq 2.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : } y = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó : } x + \sqrt{2-x^2} = 4y^2 + 4y + 3 = 2 \text{ khi } x = 1 \text{ và } y = -\frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Ví dụ 3. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= \frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\ &\geq \frac{x^2y^2 + y^2z^2}{2} + \frac{z^2y^2 + z^2x^2}{2} + \frac{x^2z^2 + y^2x^2}{2} \\ &\geq y^2xz + z^2xy + x^2yz \geq xyz \cdot (x + y + z) \end{aligned}$$

Vì $x + y + z = 1$ nên : $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = \frac{1}{3}$.

$$\text{Ví dụ 4. Giải hệ phương trình sau : } \begin{cases} |xy - 4| = 8 - y^2 & (1) \\ xy = 2 + x^2 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Từ phương trình (1) suy ra : $8 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{8}$

Từ phương trình (2) suy ra :

$$\begin{aligned}x^2 + 2 = |x| \cdot |y| \leq 2\sqrt{2}|x| &\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}|x| + \sqrt{2^2} \leq 0 \Leftrightarrow (|x| - \sqrt{2})^2 \leq 0 \\&\Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Nếu $x = \sqrt{2}$ thì $y = 2\sqrt{2}$.

Nếu $x = -\sqrt{2}$ thì $y = -2\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình : $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} = 2$

Hướng dẫn giải

Ta có : $2 - \sin^2 x \geq 1, \forall x \Rightarrow \sqrt{2 - \sin^2 x} \geq 1$

$$\Rightarrow \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \geq 1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Mặt khác, theo Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski, ta có :

$$(\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x})^2 \leq (1^2 + 1^2) [\sin^2 x + (\sqrt{2 - \sin^2 x})^2] = 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1} = \frac{\sqrt{2 - \sin^2 x}}{1} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sqrt{2 - \sin^2 x} = 1 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra : $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

C. LUYỆN TẬP

36.1 Giải phương trình : $\log_x(x+1) = \lg \frac{3}{2}$.

36.2 Giải phương trình : $\sin x - 2 \sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$.

36.3 Giải bất phương trình : $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} > 1$.

36.4 Giải bất phương trình : $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

36.5 Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 y + \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} = 8 + \frac{\sin y}{2} \\ \cos 2x + \sin y = 1. \end{cases}$$

§ 37. ỨNG DỤNG GTLN VÀ GTNN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

Mệnh đề 1. Phương trình $f(x) = \alpha$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{x \in D} f(x) \leq \alpha \leq \max_{x \in D} f(x)$$

Mệnh đề 2. (i) $f(x) \leq \alpha$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\min_{x \in D} f(x) \leq \alpha$.

(ii) $f(x) \leq \alpha$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi

$$\max_{x \in D} f(x) \leq \alpha.$$

Mệnh đề 3. (i) $f(x) \geq \alpha$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\max_{x \in D} f(x) \geq \alpha$

(ii) $f(x) \geq \alpha$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi

$$\min_{x \in D} f(x) \geq \alpha.$$

Lưu ý.

- α là biểu thức chứa tham số.
- Nếu α là một biểu thức độc lập thì ta áp dụng được ngay các mệnh đề trên, với D là điều kiện của bài toán (không phải khi nào việc tìm D cũng dễ dàng).
- Nếu tham số đồng bậc, thì ta nhóm các nhân tử đồng bậc này với nhau, có dạng $m^k h(x) \geq (\leq) g(x)$. Nếu chỉ ra $h(x)$ luôn dương (+) hoặc luôn âm (-) thì dễ dàng đưa về $m^k \geq \frac{g(x)}{h(x)}$ dạng sử dụng trực tiếp được mệnh đề.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(x+3)(6-x)} = m. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$, $x \in [-3; 6] \Rightarrow t \in [3; 3\sqrt{2}]$. Khi đó :

$$t^2 = 9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+3)(6-x)} = \frac{t^2 - 9}{2}.$$

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow f(t) = t - \frac{t^2 - 9}{2} = m, \quad t \in D = [3; 3\sqrt{2}]. \quad (2)$$

$$(2) \text{ có nghiệm trên } D \text{ khi và chỉ khi : } \min_{t \in D} f(t) \leq m \leq \max_{t \in D} f(t). \quad (3)$$

$$\text{Ta có : } f'(t) = -t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Để thấy rằng } f(t) \text{ nghịch biến trên } [1; +\infty), \text{ do đó suy ra : } \max_{t \in D} f(t) = f(3) \text{ và } \min_{t \in D} f(t) = f(3\sqrt{2}). \quad (4)$$

$$\text{Từ (4) ta có : } (3) \Leftrightarrow f(3\sqrt{2}) \leq m \leq f(3) \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 3.$$

$$\text{Vậy các giá trị của } m \text{ cần tìm là } m \in \left[\frac{6\sqrt{2}-9}{2}; 3 \right].$$

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$x + 3 = m\sqrt{x^2 + 4}. \quad (*)$$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy : $\sqrt{x^2 + 4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó : $(*) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} = m$

$$\text{Ta có : } f'(x) = \frac{4-3x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

$$f'(x) > 0 \text{ khi } x \in \left[-\infty; \frac{4}{3}\right]; f'(x) < 0 \text{ khi } x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

$$\text{Vậy : } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3} = mx. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định của phương trình : $D = [-3; 6]$.

Để thấy rằng $x = 0$ không là nghiệm của (1), do đó ta có :

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3}}{x} = m. \quad (2)$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = \frac{x-12}{2x^2\sqrt{6-x}} - \frac{x+6}{2x^2\sqrt{x+3}}.$$

Vì $x \in [-3; 6]$ nên $x-12 < 0$ và $x+6 > 0$. Do đó $f'(x) < 0$ khi $x \in [-3; 6]$. Vậy, (2) có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2} = \sqrt{16-x^4} + m(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}) + m.$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định của phương trình : $D = [-2; 2]$.

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}$, $t \in [2\sqrt{2}; 4]$. Khi đó :

$$t^2 = 8 + 2\sqrt{16-x^4} \Rightarrow \sqrt{16-x^4} = \frac{t^2-8}{2}.$$

Do đó, phương trình đã cho trở thành :

$$t = \frac{t^2-8}{2} + mt + m \Leftrightarrow m = \frac{-t^2+2t+8}{2(t+1)} = f(t), t \in [2\sqrt{2}; 4].$$

Vì $t \in [2\sqrt{2}; 4]$ nên $f'(t) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2(t+1)^2} < 0$. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{aligned} \min_{t \in [2\sqrt{2}; 4]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [2\sqrt{2}; 4]} f(t) &\Leftrightarrow f(4) \leq m \leq f(2\sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm với mọi $x \geq 3$:

$$\sqrt{x^2-3x+2} \geq m - \sqrt{x^2-3x+4}. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-3x+4} \geq m. \quad (2)$$

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương với : } m \leq \min_{x \geq 3} f(x). \quad (3)$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = (2x-3) \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+4}} \right) \geq 0, \forall x \geq 3.$$

$$\text{Do đó : } (3) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \geq 3} f(x) = f(3) = 2 + \sqrt{2}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là : $m \leq 2 + \sqrt{2}$.

C. LUYỆN TẬP

37.1 Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

a) $\sqrt{4x-x^2} = x+m$;

b) $\sqrt{1+x} + \sqrt{6-x} - (1+x)\sqrt{\frac{6-x}{1+x}} = m$;

c) $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \frac{m+x}{6}$.

37.2 Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

a) $m\sqrt{x^3-1} = x^2+2$;

b) $\sqrt{(x-1)(4-x)} + m(x^2-5x) + m+2 = 0$;

c) $(x+5)(2-x) + m = (m+1)\sqrt{x^2+3x}$.

37.3 Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$$

có nghiệm $(x; y)$ thoả mãn $3x+2y \leq 5$.

37.4 Định a để phương trình $5 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = a \cdot 36^x$ vô nghiệm.

37.5 Định a để hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos x + m \leq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Phần III.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

A. CÂU HỎI

1. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a < b \Rightarrow ac < bc$.

B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.

D. Cả A, B, C đều sai.

2. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. $|a+b| \leq |a|+|b|, \forall a, b$.

B. $|a-b| \geq |a|-|b|, \forall a, b$.

C. $a^2 > 0, \forall a$.

D. $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a$.

3. Cho $a, b, c > 0$. Xét các bất đẳng thức :

i) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; ii) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$; iii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Bất đẳng thức nào đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ ii) đúng.

C. Chỉ iii) đúng.

D. Cả i), ii), iii) đều đúng.

4. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$, $z = (a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $x < y < z$.

B. $y < x < z$.

C. $z < x < y$.

D. $x < z < y$.

5. Hai số a, b thoả bất đẳng thức $\frac{a^2+b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì :

A. $a < b$.

B. $a > b$.

C. $a = b$.

D. $a \neq b$.

6. Cho $a > b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}$, $y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?
- A. $x > y$. B. $x < y$.
C. $x = y$. D. Không so sánh được.
7. Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x; y; z)$ thỏa bất đẳng thức
- $$x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3 ?$$
- A. 0 B. 1
C. 2 D. Vô số
8. Cho $a, b > 0$ và $ab > a + b$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?
- A. $a + b = 4$. B. $a + b > 4$.
C. $a + b < 4$. D. Một kết quả khác.
9. Cho $x, y > 0$. Bất đẳng thức nào đúng trong các bất đẳng thức sau ?
- A. $(x + y)^2 \geq 4xy$. B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$.
C. $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2}$. D. Cả ba bất đẳng thức trên đúng.
10. Cho $x, y, z > 0$ và xét ba bất đẳng thức :
- i) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$; ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{9}{x + y + z}$; iii) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$
- Bất đẳng thức nào đúng ?
- A. Chỉ i) đúng. B. Chỉ i) và iii) đúng.
C. Cả ba đều đúng. D. Chỉ iii) đúng.
11. Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau đây với $a, b, c, d > 0$?
- A. $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$. B. $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.
C. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < \frac{c}{d}$.
D. Có ít nhất một trong ba mệnh đề trên sai.

12. Cho $a, b, c > 0$ và $P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $0 < P < 1$. B. $1 < P < 2$.
C. $2 < P < 3$. D. Một kết quả khác.

13. Cho $a, b, c, d > 0$ và

$$A = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{d}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $0 < A < 1$. B. $1 < A < 2$.
C. $2 < A < 3$. D. Một kết quả khác.

14. Cho $a, b, c, d > 0$ và

$$A = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$$

Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $0 < A < 1$. B. $1 < A < 2$.
C. $2 < A < 3$. D. Một kết quả khác.

15. Cho tam giác ABC và $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $0 < P < 1$. B. $1 < P < 2$.
C. $2 < P < 3$. D. Một kết quả khác.

16. Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. $|a-b| < c < a+b$. B. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.
C. $abc^3(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.
D. $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 < 0$.

17. Cho n là số nguyên dương và $P = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Kết quả nào sau đây đúng ?

A. $P < \frac{1}{2}$. B. $P < 1$.
C. $P > 2$. D. $P > 1$.

18. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Xét các bất đẳng thức :

i) $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$; ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$; iii) $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ ii) đúng.

C. Chỉ i) và ii) đúng.

D. Cả i), ii), iii) đều đúng.

19. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Xét các bất đẳng thức sau :

i) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$; ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$; iii) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \leq 6$.

Bất đẳng thức nào đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ ii) đúng.

C. Chỉ iii) đúng.

D. Chỉ i) và ii) đúng.

20. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Xét các bất đẳng thức :

i) $abc \leq \frac{1}{27}$; ii) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$; iii) $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq 64$.

Bất đẳng thức nào đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ ii) đúng.

C. Chỉ iii) đúng.

D. Chỉ i) và ii) đúng.

21. Cho $a \neq 0$, bất đẳng thức nào sau đây sai ?

A. $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

B. $a^2 > 0$.

C. $a^2 + 1 \geq 2|a|$.

D. $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$.

22. Cho $a > 1, b > 1$ và các bất đẳng thức :

i) $\frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 2$; ii) $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \geq ab$; iii) $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$.

Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ i) và ii) đúng.

B. Chỉ i) và iii) đúng.

D. Chỉ ii) và iii) đúng.

23. Mệnh đề nào sau đây sai ?
- A. $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$.
- B. $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$.
- C. $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$.
- D. Có ít nhất một trong ba mệnh đề trên sai.
24. Cho tam giác ABC và $P = \cos A + \cos B + \cos C$. GTLN của P là :
- A. $\max P = 1$.
- B. $\max P = \frac{2}{3}$.
- C. $\max P = \frac{3}{2}$.
- D. Một kết quả khác.
25. Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z \leq \frac{3}{2}$. GTNN của biểu thức $P = x+y+z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ là :
- A. $\min P = 6$.
- B. $\min P = \frac{15}{2}$.
- C. $\min P = 8$.
- D. Một kết quả khác.
26. Cho $x, y \geq 0$ và $x+y=1$. GTLN của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$ là :
- A. $\max P = \frac{2}{3}$.
- B. $\max P = 1$.
- C. $\max P = \frac{3}{2}$.
- D. Một kết quả khác.
27. Cho tam giác nhọn ABC và $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?
- A. $T = 2$.
- B. $T > 2$.
- C. $T < 2$.
- D. $T > \frac{9}{4}$.
28. Cho mệnh đề : “Với mọi $x \in A, x^2 > 0$ ”. Phủ định của mệnh đề trên là :
- A. Với mọi $x \in A, x^2 < 0$.
- B. Với mọi $x \in A, x^2 \leq 0$.
- C. Tồn tại $x \in A, x^2 > 0$.
- D. Tồn tại $x \in A, x^2 \leq 0$.

29. Cho $y = (x-a)^2 + (x-b)^2$, a và b là các hằng số. Với giá trị nào của x thì y đạt GTNN ?

A. $a+b$.

B. $\frac{a+b}{2}$.

C. $\sqrt{ab}$.

D. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

30. Cho $a > 0$ và $a > |x-4| + |x-3|$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có :

A. $0 < a < \frac{1}{100}$.

B. $\frac{1}{100} < a < 1$.

C. $0 < a < 1$.

D. $a > 1$.

31. Cho $0 < a < b$ và $T = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$, ta có T luôn luôn nhỏ hơn :

A. $\frac{(a+b)^2}{ab}$.

B. $\frac{(a-b)^2}{8a}$.

C. $\frac{(a-b)^2}{8b}$.

D. $\frac{(a-b)^2}{ab}$.

32. Cho tam giác ABC và $T = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$, ta có T không nhỏ hơn :

A. $2\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $3\sqrt{3}$.

33. Cho $\triangle ABC$, GTNN của biểu thức $T = \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}}$ là :

A. $\min T = 3\sqrt{3}$.

B. $\min T = 4$.

C. $\min T = 2\sqrt{3}$.

D. Một kết quả khác.

34. Cho $\triangle ABC$ và $T = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$. T không nhỏ hơn :

A. $\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

35. Với $x \geq 1$, giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{4x^2 + 8x + 13}{6(x+1)}$ là :
- A. 1. B. 2.
C. $\frac{25}{12}$. D. $\frac{13}{6}$.
36. Bất đẳng thức nào dưới đây thoả với mọi a, b, c, x, y, z mà $x < a, y < b, z < c$?
- i) $xy + yz + zx < ab + bc + ca$; ii) $x^2 + y^2 + z^2 < a^2 + b^2 + c^2$;
iii) $xyz < abc$.
- A. Cả i), ii), iii) đều sai. B. Chỉ có i) đúng.
C. Chỉ có ii) đúng. D. Chỉ có iii) đúng.
37. Tìm số nguyên n nhỏ nhất sao cho $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq n(x^4 + y^4 + z^4)$, với mọi $x, y, z \in \mathbf{R}$.
- A. 2. B. 3.
C. 4. D. Không có số n nào.
38. Cho $\triangle ABC$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}}$ là :
- A. 12. B. 9
C. 24. D. Một kết quả khác.
39. Cho $\triangle ABC$. Biểu thức $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ không lớn hơn :
- A. $\frac{4}{9}$. B. 2.
C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.
40. Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau ?
- A. $\sin 2x \leq 2 \sin x$. B. $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.
C. $1 \leq \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{8}$.
D. Có ít nhất một trong ba mệnh đề trên sai.

41. Bất đẳng thức nào sau đây sai, với A, B, C là ba góc tam giác ?
- A. $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. B. $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.
- C. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{9}{4}$. D. $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
42. Cho $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{\sin^2 x}{\cos x(\sin x - \cos x)}$ là :
- A. 2. B. 3.
- C. 4. D. Một kết quả khác.
43. Cho biểu thức $P = \frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)}$, với $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?
- A. $P > 8$. B. $P \leq 8$.
- C. $8 < P < 9$. D. $6 \leq P \leq 8$.
44. Cho $\triangle ABC$ và các bất đẳng thức :
- i) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$; ii) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$;
- iii) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
- Bất đẳng thức nào đúng ?
- A. Chỉ i) đúng. B. Chỉ ii) đúng.
- C. Chỉ iii) đúng. D. Chỉ i) và ii) đúng.
45. Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, xét các bất đẳng thức sau :
- i) $\sin x < x < \tan x$; ii) $\sin x + \tan x > 2x$; iii) $2 \sin x + \tan x < 3x$.
- Bất đẳng thức nào đúng ?
- A. Chỉ i) đúng. B. Chỉ ii) đúng.
- C. Chỉ iii) đúng. D. Chỉ i) và ii) đúng.
46. GTNN của hàm số $y = \frac{1}{\cos^4 x} - \tan^4 x$ là :
- A. 0. B. 1.
- C. 2. D. Một đáp số khác.

47. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ là :
- A. $\min y = 0$; $\max y = 2$. B. $\min y = \frac{1}{2}$; $\max y = 2$.
 B. $\min y = \frac{1}{2}$; $\max y = 1$. D. Một đáp số khác.
48. Cho $\triangle ABC$, GTNN của $M = \frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 + \cos 2C}$ là :
- A. 1. B. $\frac{6}{5}$.
 C. $\frac{5}{6}$. D. Không tồn tại $\min M$.
49. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số : $y = |\sin x| + |\cos x|$ là :
- A. $\min y = 0$; $\max y = 2$. B. $\min y = \frac{1}{2}$; $\max y = \sqrt{2}$.
 C. $\min y = 1$; $\max y = \sqrt{2}$. D. $\min y = 1$; $\max y = 2$.
50. GTNN của hàm số $y = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2$ là :
- A. 12. B. $\frac{25}{2}$.
 C. $\frac{27}{2}$. D. Một đáp số khác.
51. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sin x - \cos^2 x - \frac{1}{2}$ là :
- A. $\min y = -\frac{3}{4}$; $\max y = \frac{3}{2}$. B. $\min y = -\frac{4}{3}$; $\max y = \frac{2}{3}$.
 C. $\min y = -\frac{3}{4}$; $\max y = -\frac{1}{2}$. D. $\min y = -\frac{1}{2}$; $\max y = \frac{3}{2}$.
52. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin x \cos x$ là :
- A. $\min y = 0$; $\max y = 1$. B. $\min y = 0$; $\max y = \frac{9}{8}$.
 C. $\min y = 1$; $\max y = \frac{9}{8}$. D. Một kết quả khác.

53. Cho $\triangle ABC$, GTNN của biểu thức $\cot A + \cot B + \cot C$ là :
- A. 1. B. $\sqrt{3}$.
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. Một kết quả khác.
54. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ là :
- A. $\min y = 0$; $\max y = 1$. B. $\min y = 1$; $\max y = \sqrt[4]{8}$.
C. $\min y = 0$; $\max y = 2$. D. Một kết quả khác.
55. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$ là :
- A. $\min y = 0$; $\max y = 2$. B. $\min y = \frac{1}{2^9}$; $\max y = 2$.
C. $\min y = \frac{1}{2^9}$; $\max y = 1$. D. Một kết quả khác.
56. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$ là :
- A. $\min y = 0$; $\max y = 3$. B. $\min y = \frac{1}{9}$; $\max y = \frac{7}{2}$.
C. $\min y = \frac{1}{27}$; $\max y = 3$. D. Một kết quả khác.
57. Nếu $\triangle ABC$ có $\cot A + \cot C = 2 \cot B$ thì góc B không lớn hơn :
- A. 60° . B. 30° .
C. 45° . D. Một số khác.
58. Cho $x, y > 0$; $x + y = 1$. GTNN của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$ là :
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{3}$.
C. $\frac{2}{3}$. D. Một số khác.
59. Cho $\triangle ABC$ có góc tù và $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?
- A. $T = 2$. B. $T > 2$.
C. $T < 2$. D. $T > \frac{9}{4}$.

60. Cho $\triangle ABC$ nhọn và $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

- A. $T \leq 2$.
 B. $T \geq \frac{9}{4}$.
 C. $2 < T \leq \frac{9}{4}$.
 D. $T < 2$.

61. Cho $-3 \leq x \leq 5$, hàm số $y = (5-x)(x+3)$ đạt GTLN khi x bằng :

- A. 0.
 B. 1.
 C. 2.
 D. Một số khác.

62. Cho $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, hàm số $y = x(1-2x)$ đạt giá trị lớn nhất khi x bằng :

- A. $\frac{1}{4}$.
 B. $\frac{1}{3}$.
 C. $\frac{1}{2}$.
 D. Một số khác.

63. Cho $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$, hàm số $y = (3x-1)(1-2x)$ đạt GTLN khi x bằng :

- A. $\frac{2}{5}$.
 B. $\frac{5}{12}$.
 C. 0.
 D. Một số khác.

64. Cho $xy \neq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Xét các bất đẳng thức sau :

- i) $|x+y| \leq \sqrt{2}$; ii) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 4$; iii) $xy \leq \frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức nào đúng ?

- A. Chỉ i) đúng.
 B. Chỉ ii) đúng.
 C. Chỉ i) và iii) đúng.
 D. Cả i), ii), iii) đều đúng.

65. Cho các mệnh đề :

- i) Nếu $2x+3y=5$ thì $2x^2+3y^2 \leq 5$.
 ii) Nếu $a > c > 0$, $b > c > 0$ thì $\sqrt{c(b-c)} + \sqrt{c(a-c)} \geq \sqrt{ab}$.
 iii) Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ thì $x_0^2 < 1 + a^2 + b^2$
 Mệnh đề nào đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ ii) đúng.

C. Chỉ iii) đúng.

D. Cả ba đều đúng.

66. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}$ là :

A. $\min y = -\frac{4}{3}$; $\max y = 4$.

B. $\min y = -\frac{3}{2}$; $\max y = \frac{3}{4}$.

C. $\min y = \frac{3}{2}$; $\max y = -\frac{4}{3}$.

D. Một kết quả khác.

67. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $|m \cos x + \sin x| < m, \forall m$.

B. $|2 \cos x + \sin x| \leq \sqrt{3}$.

C. $|m \sin x + \cos x| \leq \sqrt{m^2 + 1}$.

D. $|\cos x + 2 \sin x| \leq \sqrt{3}$.

68. Cho $\triangle ABC$ không vuông, GTLN của $\frac{\tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C}{\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C}$ là :

A. 1.

B. $\sqrt{3}$.

C. 3.

D. Một số khác.

69. Cho $\triangle ABC$, giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$E = \sqrt{1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} + \sqrt{1 + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} + \sqrt{1 + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}} \text{ là :}$$

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

70. GTNN của biểu thức $T = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x + 16}$ là :

A. $2\sqrt{10}$.

B. 0.

C. 6.

D. Một kết quả khác.

71. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ là :

A. $\min y = \frac{1}{2}$; $\max y = 2$.

B. $\min y = -2$; $\max y = -\frac{1}{2}$.

C. $\min y = -3$; $\max y = -\frac{1}{3}$.

D. Một kết quả khác.

72. Cho $a \geq 2$, $b \geq 3$, $c \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$F = \frac{ab\sqrt{c-1} + bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt{b-3}}{abc} \text{ là :}$$

- A. $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.
 B. $\frac{1}{9} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$.
 B. $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.
 D. Một kết quả khác.

73. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \frac{7 + 3\cos x - \sin^2 x}{2 + \cos x}$ là :

- A. $\min y = 3$; $\max y = \frac{10}{3}$.
 B. $\min y = 3$; $\max y = 4$.
 C. $\min y = \frac{10}{3}$; $\max y = 4$.
 B. Một kết quả khác.

74. Hàm số $y = a \sin x + b \cos x + cx$ tăng trên $\mathbf{R}$ khi :

- A. $c^2 \leq a^2 + b^2$.
 B. $c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
 C. $c^2 \geq a^2 + b^2$.
 D. $c \geq \sqrt{a^2 + b^2}$.

75. Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $\cos A + \cos B + \cos C > \frac{3}{2}$.
 B. $\cos A + \cos B + \cos C > 1$.
 C. $\cos A + \cos B + \cos C < \frac{1}{2}$.
 D. $\cos A + \cos B + \cos C < 1$.

76. a, b, c là ba cạnh của một tam giác ; $p = \frac{a+b+c}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $E = \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}$ là :

- A. 3.
 B. 6.
 C. 9.
 D. Một kết quả khác.

77. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ là :

- A. $\min y = 1$; $\max y = 6$.
 B. $\min y = -6$; $\max y = -1$.
 C. $\min y = 2$; $\max y = 5$.
 D. $\min y = -5$; $\max y = -2$.

84. GTNN của $y = |x-1| + |x-2|$ là :
 A. 0. B. 1.
 C. 2. D. Một kết quả khác.
85. GTNN của $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ là :
 A. 0. B. 1.
 C. 2. D. Một kết quả khác.
86. Cho $x > 1$, GTNN của $y = x + \frac{1}{x-1}$ đạt được khi x bằng :
 A. 2. B. 3.
 C. $\frac{5}{2}$. D. Một số khác.
87. Cho $2x + 3y = 5$. GTNN của $E = 2x^2 + 3y^2$ là :
 A. $\frac{25}{13}$. B. 5
 C. $\frac{1}{5}$. D. Một kết quả khác.
88. GTNN của $y = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ là :
 A. 0. B. 2.
 C. 4. D. Một kết quả khác.
89. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 5$. GTNN của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ là :
 A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{4}{5}$.
 C. $\frac{3}{5}$. D. Một kết quả khác.
90. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. GTNN của $P = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ là :
 A. 8. B. 9.
 C. 7. D. Một kết quả khác.
91. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $A = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ là :

A. $\min A = \frac{1}{2}$; $\max A = 1$. B. $\min A = 1$; $\max A = 2$.

C. $\min A = \frac{1}{2}$; $\max A = 2$. D. Một kết quả khác.

92. Có bao nhiêu bộ số $(x; y; z)$ thoả bất đẳng thức

$$x + y + z + 4 \leq 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}?$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

93. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. GTNN của $P = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$ là :

A. 8.

B. 9.

C. 4.

C. Một kết quả khác.

94. Cho $a, b > 1$. GTNN của $E = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$ là :

A. 6.

B. 8.

C. 10.

D. Một kết quả khác.

95. Cho $a \leq x \leq 5$. GTNN, GTLN của hàm số $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$ là :

A. $\min y = 6$; $\max y = 10$.

B. $\min y = 0$; $\max y = 7$.

C. $\min y = 0$; $\max y = 10$.

D. Một kết quả khác.

96. Cho $\triangle ABC$, GTNN của $E = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c}$ là :

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. Một kết quả khác.

97. Cho tam giác ABC không vuông và $\tan A, \tan B, \tan C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Giá trị nhỏ nhất của góc B là :

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. Một kết quả khác.

98. Cho tam giác ABC không vuông và $\tan A, \tan B, \tan C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Nếu góc B nhọn thì giá trị nhỏ nhất của góc B là :

A. 30° .B. 45° .C. 60° .

D. Một kết quả khác.

99. Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Xét các bất đẳng thức sau :

$$\text{i) } \sin \frac{x+y}{2} \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}; \quad \text{ii) } \cos \frac{x+y}{2} \geq \frac{\cos x + \cos y}{2};$$

$$\text{iii) } \tan \frac{x+y}{2} \geq \frac{\tan x + \tan y}{2}.$$

Bất đẳng thức nào đúng ?

A. Chỉ i) đúng.

B. Chỉ ii) đúng.

C. Chỉ iii) đúng.

D. Chỉ i) và ii) đúng.

100. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. GTNN, GTLN của $P = a + b + c - ab - bc - ca$ là :

A. $\min P = -1$; $\max P = 1$.B. $\min P = 0$; $\max P = 1$.C. $\min P = 0$; $\max P = 2$.

D. Một kết quả khác.

B. TRẢ LỜI

1D	2C	3D	4A	5C	6A	7B	8B	9D	10B
11D	12B	13B	14C	15B	16D	17D	18D	19D	20D
21A	22C	23D	34C	25B	26C	27B	28D	29B	30D
31B	32D	33C	34B	35B	36A	37B	38A	39C	40D
41C	42C	43A	44D	45D	46B	47C	48B	49C	50B
51A	52B	53B	54B	55C	56C	57A	58C	59C	60C
61B	62A	63B	64D	65C	66B	67C	68C	69B	70C
71D	72A	73B	74D	75B	76B	77A	78C	79C	80C
81C	82A	83B	84B	85C	86A	87B	88C	89B	90B
91A	92B	93B	94B	95A	96B	97C	98C	99D	100B

Phụ lục

TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC
(2005 – 2010)

NĂM 2005
ĐỀ THI KHỐI A

Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh : $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Với $a, b > 0$, ta có :

$$4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Áp dụng kết quả trên ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right) \end{aligned} \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự : } \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{x+y} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Vậy : } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1.$$

Ta thấy trong các bất đẳng thức (1), (2), (3) thì dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy dấu “=” trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x}.$$

$$\text{Suy ra : } \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2 \cdot 3^x. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có : } \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2 \cdot 4^x. \quad (2)$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2 \cdot 5^x. \quad (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3), chia hai vế của bất đẳng thức nhận được cho 2 ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (1), (2), (3) là các đẳng thức, tức là $x = 0$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh :

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương, ta có :

$$1+x^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, ta có : } \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}; \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{xy} \cdot \frac{\sqrt{3}}{yz} \cdot \frac{\sqrt{3}}{zx}}.$$

$$\text{Suy ra : } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3\sqrt{3}. \quad (4)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) và (4) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (1), (2), (3) và (4) là các đẳng thức, tức là $x = y = z = 1$.

NĂM 2006

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$.

Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$. Ta có : $a + b = a^2 + b^2 - ab$. (1)

Khi đó : $A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)^2$.

Từ (1) suy ra : $a + b = (a+b)^2 - 3ab$.

Vì $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên :

$$a + b \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 \Rightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a + b \leq 4.$$

Với $x = y = \frac{1}{2}$ thì $A = 16$. Vậy giá trị lớn nhất của A là 16.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|.$$

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét $M(x-1; -y)$, $N(x+1; y)$.

Do $OM + ON \geq MN$ nên :

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2} = 2\sqrt{1 + y^2}.$$

Do đó : $A \geq 2\sqrt{1 + y^2} + |y-2| = f(y)$.

• Với $y \leq 2$, ta có : $f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 1}} - 1$;

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4y^2 = 1 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Do đó ta có bảng biến thiên như hình bên dưới.

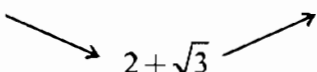
• Với $y \geq 2$, ta có :

$$f(y) \geq 2\sqrt{1+y^2} \geq 2\sqrt{5} > 2+\sqrt{3}.$$

Vậy : $A \geq 2+\sqrt{3}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

Khi $x=0$ và $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ thì

$A=2+\sqrt{3}$ nên giá trị nhỏ nhất của A là $2+\sqrt{3}$.

y	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2
$f'(y)$	$-$	0	$+$
$f(y)$			

NĂM 2007

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $x^2(y+z) \geq 2x\sqrt{x}$; $y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y}$; $z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z}$.

Từ đó suy ra : $P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$

Đặt $a = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}$, $b = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}$, $c = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$. Khi đó

$$x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9}, y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9}, z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } P &\geq \frac{2}{9} \left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a} \right) \\ &= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} (4.3 + 3 - 6) = 2. \end{aligned}$$

$$(\text{Vi } \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} = \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + 1\right) - 1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \geq 4 - 1 = 3,$$

$$\text{hoặc } \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}} = 3. \text{ Tương tự: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3).$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Vậy GTNN của P là 2.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}.$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx \text{ nên:}$$

$$P \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z}\right).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$ với $t > 0$. Lập bảng biến thiên của $f(t)$ ta suy ra $f(t) \geq \frac{3}{2}$, $\forall t > 0$. Do đó $P \geq \frac{9}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 4; 2)$.

$$B(-1; 2; 4) \text{ và đường thẳng } \Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}.$$

1) Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) .

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) Tọa độ trọng tâm : $G(0 ; 2 ; 2)$.

Ta có : $\overrightarrow{OA} = (1 ; 4 ; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-1 ; 2 ; 4)$.

Vectơ chỉ phương của d là : $\vec{n} = (12 ; -6 ; 6) = 6(2 ; -1 ; 1)$.

Phương trình đường thẳng d : $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

2) Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(1-t ; -2+t ; 2t)$. Do đó :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= [t^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2] \\ &+ [(-2+t)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2] = 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28. \end{aligned}$$

$MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = 2$. Khi đó $M(-1 ; 0 ; 4)$.

NĂM 2008

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có : } P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 3y^2 + 2xy}.$$

• Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 1$. Suy ra $P = 2$.

- Xét $y \neq 0$. Đặt $x = ty$, khi đó :

$$P = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3} \Leftrightarrow (P - 2)t^2 + 2(P - 6)t + 3P = 0. \quad (*)$$

– Với $P = 2$, phương trình (*) có nghiệm $t = \frac{3}{4}$.

– Với $P \neq 2$ phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = -2P^2 - 6P + 36 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3.$$

$$P = 3 \text{ khi } x = \frac{3}{\sqrt{10}}; y = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{\sqrt{10}}; y = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$P = -6 \text{ khi } x = \frac{3}{\sqrt{13}}; y = -\frac{2}{\sqrt{13}} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{\sqrt{13}}; y = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Giá trị lớn nhất của P bằng 3, giá trị nhỏ nhất của P bằng -6 .

TRÍCH ĐỀ THI KHỎI D

Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá

trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{(x - y)(1 - xy)}{(1 + x)^2(1 + y)^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } |P| &= \left| \frac{(x - y)(1 - xy)}{(1 + x)^2(1 + y)^2} \right| \leq \frac{(x + y)(1 + xy)}{[(x + y) + (1 + xy)]^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- Khi $x = 0$; $y = 1$ thì $P = -\frac{1}{4}$.

- Khi $x = 1$; $y = 0$ thì $P = \frac{1}{4}$.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{4}$, giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{4}$.

NĂM 2009

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI A

Cho $x, y, z > 0$ thoả điều kiện : $x(x+y+z) = 3yz$ (1)

Chứng minh :

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3 \quad (*)$$

(Xem bài giải của Ví dụ 21, §8, trang 29 hoặc cách giải khác của Ví dụ 3, §35, trang 191).

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Cho $x, y \in \mathbf{R}$ thoả : $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$ (*). Tìm GTNN của :

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

(Xem bài giải của Ví dụ 4, §35, trang 192)

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Cho $x, y \geq 0$ thoả : $x+y=1$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

(Xem bài giải của Ví dụ 7, §34, trang 188 hoặc cách giải khác của Ví dụ 2, §35, trang 191).

NĂM 2010

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI B

Cho $a, b, c \geq 0$, thoả $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ac) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(Xem bài giải của Ví dụ 5, §35, trang 193).

TRÍCH ĐỀ THI KHỐI D

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$$

(Xem bài giải của Ví dụ 8, §29, trang 159).

MỤC LỤC

Lời nói đầu.....	3
Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng 2009, môn Toán.....	5

Phần I.

BẤT ĐẲNG THỨC

Chương 1. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC.....	7
§ 1. Định nghĩa bất đẳng thức.....	7
§ 2. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức.....	7
§ 3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.....	8
§ 4. Bất đẳng thức liên quan đến hàm số mũ và hàm số Lôgarit.....	8
§ 5. Bất đẳng thức Cô-si (Cauchy).....	8
§ 6. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski.....	10
Chương 2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC.....	12
§ 7. Phương pháp dùng định nghĩa bất đẳng thức.....	12
§ 8. Phương pháp dùng phép biến đổi tương đương.....	17
§ 9. Phương pháp dùng phép chứng minh phản chứng.....	31
§ 10. Phương pháp dùng quy nạp toán học.....	34
§ 11. Phương pháp dùng bất đẳng thức về cạnh của tam giác.....	38
§ 12. Phương pháp dùng phép tính tổng hoặc tích hữu hạn.....	44
§ 13. Phương pháp dùng bất đẳng thức Cô-si.....	49
§ 14. Phương pháp dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski.....	67
§ 15. Phương pháp dùng vector.....	77
§ 16. Phương pháp dùng dấu tam thức bậc hai.....	83

§ 17. Phương pháp dùng miền giá trị hàm số.....	91
§ 18. Phương pháp dùng lượng giác.....	96
§ 19. Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số.....	106
§ 20. Phương pháp dùng cực trị của hàm số	112
§ 21. Phương pháp dùng định lí Lagrange	119
§ 22. Phương pháp dùng tích phân.....	122
§ 23. Phương pháp dùng tính chất hình học.....	134
§ 24. Phương pháp dùng bất đẳng thức về các dãy đơn điệu	137

Phần II.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Chương 1. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	141
§ 25. Định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.....	141
§ 26. Các tính chất của GTLN và GTNN của hàm số	141
Chương 2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	145
§ 27. Phương pháp đưa về dạng bình phương.....	145
§ 28. Phương pháp dùng miền giá trị của hàm số	149
§ 29. Phương pháp dùng đạo hàm	154
§ 30. Phương pháp dùng bất đẳng thức Cô-si	161
§ 31. Phương pháp dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-ski	168
§ 32. Phương pháp dùng tam thức bậc hai	172
§ 33. Phương pháp dùng vectơ.....	179
§ 34. Phương pháp dùng lượng giác.....	182
§ 35. Phương pháp dùng tính đối xứng của biến	189

Chương 3. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	195
§ 36. Ứng dụng bất đẳng thức giải phương trình, bất phương trình.....	195
§ 37. Ứng dụng GTLN và GTNN giải phương trình, bất phương trình	198

Phần III.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

A. CÂU HỎI	203
B. TRẢ LỜI	219
Phụ lục. TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2010)	220

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỖNH BÁ VÂN
Phó Tổng biên tập HUỖNH THÔNG

Biên tập lần đầu :

TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :

ĐẶNG VĂN TRÍ

Trình bày bìa :

MINH THU

Đơn vị liên doanh in và phát hành :

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC

BẤT ĐẲNG THỨC

Mã số : PTK3910 - LKT

In 2.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**,
Tp. HCM. Số QĐ xuất bản: **1707/QĐ-GD**, ngày 23.09.2010. Số ĐKKHXB:
114-2010/CXB/180-129/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 10-2010.

SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN, LÍ, HOÁ DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 12, ÔN THI VÀO ĐẠI HỌC

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN TOÁN (7 TẬP)

Tác giả : TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)

- ĐẠI SỐ
- GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP
- BẤT ĐẲNG THỨC
- KHẢO SÁT HÀM SỐ
- LƯỢNG GIÁC
- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN VẬT LÝ (3 TẬP)

Tác giả : NGUYỄN THANH HẢI

- ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN, DAO ĐỘNG CƠ HỌC, SÓNG CƠ
- DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ, DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
- SÓNG ÁNH SÁNG, LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG, SƠ LƯỢC VỀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP, HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ, TỬ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN HOÁ (2 TẬP)

Tác giả : NGÔ NGỌC AN

- HOÁ HỮU CƠ
- HOÁ VÔ CƠ

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM ẤN HÀNH

Số 41, đường 41, P. Thảo Điền, Quận 2 - TP. Hồ Chí Minh

Điện thoại : 08.38251527 - 08.38035929 Fax : 08.38227758



CD LTDH môn Toán - BDT



Giá : 32.000 đ