

P.GS – TS PHAN HUY KHẢI



Chuyên đề BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Giá trị lớn nhất
Giá trị nhỏ nhất

Dành cho học sinh lớp 12 ôn tập và
thi Đại học - Cao đẳng
Biên soạn theo nội dung và
cấu trúc đề thi của Bộ GD & ĐT



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nói riêng và bất đẳng thức nói chung là một trong những chủ đề quan trọng và hấp dẫn trong chương trình giảng dạy và học tập bộ môn Toán ở nhà trường phổ thông. Trong các đề thi môn Toán của các kì thi vào Đại học, Cao đẳng 10 năm gần đây (2002 – 2011) các bài toán liên quan đến việc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số thường xuyên có mặt và thường là một trong những câu khó nhất của đề thi.

Với lí do đó các cuốn sách chuyên khảo về chủ đề này luôn luôn thu hút sự chú ý và quan tâm của bạn đọc. Trong cuốn sách **“Các phương pháp giải toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất”** này, chúng tôi sẽ cung cấp cho bạn đọc những cách giải thông dụng nhất đối với những bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, cũng như biết cách áp dụng bài toán này để giải nhiều bài toán liên quan đến nó.

Nội dung của cuốn sách được trình bày trong 8 chương.

Chương 1 với tiêu đề **“Vài bài toán mở đầu về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số”** sẽ giới thiệu với bạn đọc bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số thông qua việc trình bày tính đa dạng của các phương pháp giải bài toán này. Bằng cách điểm lại những sự có mặt của các bài thi về chủ đề này có mặt trong các kì thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng các năm từ 2002 đến 2011, các bạn sẽ thấy được sự cần thiết của việc phải trang bị cho mình những kiến thức để giải quyết các bài toán ấy. Cuối chương 1 là cơ sở lí thuyết của bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Phần này giúp các bạn những kiến thức chuẩn bị cần biết để đọc tiếp các chương sau của cuốn sách.

Các phương pháp cơ bản và thông dụng nhất để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số được trình bày từ chương 2 đến chương 6.

Chương 2: Phương pháp bất đẳng thức tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Chương 3: Phương pháp lượng giác hóa tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Chương 4: Phương pháp chiều biến thiên hàm số tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Chương 5: Phương pháp miền giá trị hàm số tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Chương 6: Phương pháp đồ thị và hình học tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Ở mỗi chương, chúng tôi cố gắng truyền tải đến bạn đọc nội dung cơ bản của phương pháp, đưa ra các lớp bài toán mà phương pháp giải nó là thích hợp nhất. Thông qua việc phân tích, bình luận và đưa ra làm đối chứng nhiều phương pháp khác nhau giải cùng một bài toán sẽ giúp các bạn tìm được cho mình một phương pháp ưu việt nhất để giải bài toán gặp phải. Đó là điều mới mẻ của cuốn sách này. Chúng tôi luôn luôn giữ tinh thần chủ đạo ấy trong từng phần của cuốn sách.

Chương 7 dành để trình bày việc ứng dụng của bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong việc biện luận phương trình và bất phương trình có tham số. Xin lưu ý với các bạn rằng đây cũng là một chủ đề thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học – Cao đẳng những năm gần đây (2002 – 2011).

Phần đầu của chương 8 với tiêu đề “Một số bài toán khác tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số” đề cập đến bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của họ hàm số phụ thuộc tham số.

Cuốn sách này chủ yếu trình bày các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong Đại số và Giải tích.

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong số học, hình học tổ hợp, hình học không gian, hình học phẳng, lượng giác,... sẽ được chúng tôi trình bày trong một cuốn chuyên khảo khác (sắp xuất bản). Tuy nhiên trong phần hai của chương 8, chúng tôi vẫn dành một ít trang để điếm qua một số thí dụ tiêu biểu đặc sắc của các bài toán này.

Chúng tôi thiết nghĩ cuốn sách này sẽ đáp ứng được một số lượng lớn bạn đọc. Các bạn học sinh phổ thông, các thầy cô giáo dạy Toán đều có thể tìm được cho mình những điều bổ ích khi đọc nó.

Mặt dầu với tinh thần nghiêm túc, đầy trách nhiệm khi viết cuốn sách nhưng với một khối lượng lớn cần truyền tải, cuốn sách không thể tránh khỏi các khiếm khuyết.

Tác giả rất vui lòng nếu nhận được sự góp ý của bạn đọc, nhất là các bạn đồng nghiệp xa gần để quyển sách tốt hơn nữa trong các lần tái bản tiếp theo (vì chúng tôi nghĩ rằng chắc chắn cuốn sách này còn được tái bản nhiều lần).

Thư từ góp ý xin gửi về theo địa chỉ sau:

PHAN HUY KHẢI,

Viện Toán học, 18 Đường Hoàng Quốc Việt – Quận Cầu Giấy – Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

Tác giả

Chương 1.**MỞ ĐẦU VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT
VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ****§1. VÀI BÀI TOÁN MỞ ĐẦU**

Trong mục này chúng tôi giới thiệu vài bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Thông qua những bài toán này, chúng tôi muốn đề cập đến các phương pháp cơ bản nhất để giải các bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất sẽ được trình bày kỹ trong cuốn sách này.

Bài toán 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số này trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Cách 1: (Phương pháp bất đẳng thức)

Hàm số đã cho xác định khi $-2 \leq x \leq 2$.

Ta có $x \geq -2$; $\sqrt{4 - x^2} \geq 0 \quad \forall x \in [-2; 2]$

Do đó $f(x) \geq -2, \forall x \in [-2; 2]$ (1)

Lại có $f(-2) = -2$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $\min f(x) = -2$.

Ta sẽ chứng minh $f(x) \leq 2\sqrt{2} \quad \forall x \in [-2; 2]$ (3)

Thật vậy (3) $\Leftrightarrow x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2} - x$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 \leq (2\sqrt{2} - x)^2 \quad (\text{do } x \leq 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 \geq 0. \quad (4)$$

Từ (4) suy ra (3) đúng. Như vậy ta có $f(x) \leq 2\sqrt{2} \quad \forall x \in [-2; 2]$.

Lại có $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, nên $\max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Nhận xét:

1. Cách giải trên hoàn toàn dựa vào bất đẳng thức, nên người ta thường gọi là phương pháp bất đẳng thức.
2. Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski để giải như sau:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$(x \cdot 1 + \sqrt{4 - x^2} \cdot 1)^2 \leq [x^2 + (4 - x^2)](1^2 + 1^2)$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Vậy $\max y = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Cách 2: (Phương pháp chiều biến thiên hàm số)

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ với $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Rõ ràng khi $-2 \leq x \leq 0$, thì $f'(x) > 0$.

Xét khi $0 \leq x \leq 2$, ta có $(4-x^2) - x^2 = 4-2x^2$.

Do $4-2x^2 > 0$ khi $0 \leq x < \sqrt{2}$ và $4-2x^2 < 0$ khi $\sqrt{2} < x \leq 2$, nên ta có bảng biến thiên sau:

x	-2		0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$			+		+	0	-
$f(x)$							

$-2 \xrightarrow{\quad\quad\quad} 2\sqrt{2} \xrightarrow{\quad\quad\quad} 2$

Từ đó suy ra $\max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$;

$$\min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = \min\{f(-2); f(2)\} = \min(-2; 2) = -2$$

Nhận xét: Tên gọi của phương pháp hoàn toàn phản ánh đúng qua cách giải vừa trình bày ở trên.

Cách 3: (Phương pháp lượng giác hóa)

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ với $-2 \leq x \leq 2$

Do $-2 \leq x \leq 2$, nên đặt $x = 2\sin\varphi$ với $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Từ đó ta quy về xét hàm số

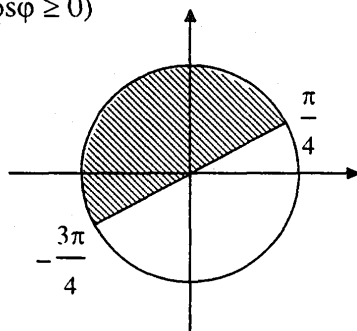
$$F(\varphi) = 2\sin\varphi + \sqrt{4(1-\sin^2\varphi)} = 2\sin\varphi + \sqrt{4\cos^2\varphi} = 2\sin\varphi + 2|\cos\varphi|$$

$$= 2\sin\varphi + 2\cos\varphi \text{ (do khi } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ thì } \cos\varphi \geq 0)$$

$$= 2\sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Do } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq \varphi - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$



$$\Rightarrow -2 \leq F(\varphi) \leq 2\sqrt{2} \quad \forall -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$F(\varphi) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2},$$

$$F(\varphi) = -2 \Leftrightarrow \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -2.$$

$$\text{Vậy } \max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = \max_{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}} F(\varphi) = 2\sqrt{2};$$

$$\min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = \min_{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}} F(\varphi) = -2.$$

Cách 4: (Phương pháp miền giá trị hàm số)

Giả sử m là một giá trị tùy ý của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \leq x \leq 2$.

Khi đó phương trình ẩn x sau đây $x + \sqrt{4 - x^2} = m$ (1) có nghiệm.

$$\text{Rõ ràng (1)} \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = m - x. \quad (2)$$

Bài toán trở thành: Tìm m để (2) có nghiệm.

(2) có nghiệm khi và chỉ khi đường cong $y = \sqrt{4 - x^2}$ và đường thẳng $y = m - x$ cắt nhau.

$$\text{Để thấy } y = m - x \Leftrightarrow x + y = m, \text{ còn } y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vậy ta cần tìm m để đường thẳng $x + y = m$ và nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ (phần nằm phía trên trục hoành cắt nhau).

Để thấy điều này xảy ra

khi và chỉ khi đường

thẳng $x + y = m$ nằm

giữa hai đường $x + y = -2$

và $x + y = 2\sqrt{2}$, tức là

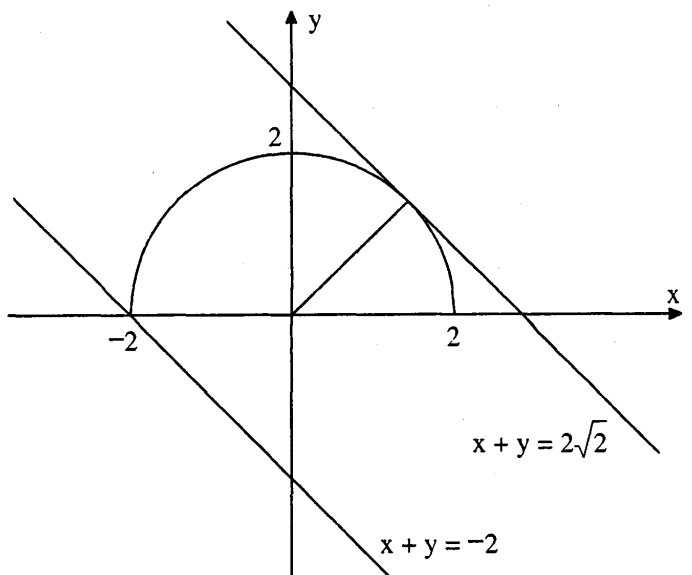
khi và chỉ khi $-2 \leq m \leq$

$$2\sqrt{2}. \quad (3)$$

Từ (3) suy ra

$$\max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = 2\sqrt{2};$$

$$\min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = -2.$$



Nhận xét: Cách giải trên dựa vào cách tìm giá trị của hàm số (ở đây có kết hợp thêm phương pháp sử dụng đồ thị và hình học), vì thế ta có thể nói rằng đã sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất nói trên.

Bình luận: Với bài toán 1, ta đã sử dụng bốn phương pháp khác nhau để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Mỗi phương pháp đều có những ưu điểm riêng của nó.

Bài toán 2: Cho $x \geq 0, y \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P =$

$$\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D)

Hướng dẫn giải

Cách 1: (Phương pháp bất đẳng thức)

Để thấy P có thể viết lại dưới dạng sau đây

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{y}{(1+y)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} - \frac{y}{(1+y)^2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{4x - (1+x)^2}{4(1+x)^2} - \frac{y}{(1+y)^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left[\frac{(x-1)^2}{4(1+x)^2} + \frac{y}{(1+y)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Do $y \geq 0$, nên từ (1) suy ra $P \leq \frac{1}{4}, \forall x \geq 0, y \geq 0. P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1; y = 0$.

Tương tự lại có

$$P = \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{1}{4} - \frac{y}{(1+y)^2} - \frac{1}{4} = \left[\frac{x}{(1+x)^2} + \frac{(y-1)^2}{4(1+y)^2} \right] - \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Do $x \geq 0$, nên từ (2) suy ra $P \geq -\frac{1}{4} \forall x \geq 0; y \geq 0. P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0; y = 1$.

Tóm lại $\max P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; \min P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0; y = 1$.

Cách 2: (Phương pháp bất đẳng thức)

$$\text{Ta có: } \left| \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \right| = \frac{|x-y||1-xy|}{(1+x)^2(1+y)^2}. \quad (1)$$

Do $x \geq 0; y \geq 0$, nên hiển nhiên ta có

$$|x-y||1-xy| \leq (x+y)(1+xy) \quad (2).$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow xy = 0$.

Từ (1) (2) suy ra $\left| \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \right| \leq \frac{(x+y)(1+xy)}{[(x+y)+(1+xy)]^2}$. (3)

Mặt khác dễ thấy $[(x+y)+(1+xy)]^2 \geq 4(x+y)(1+xy)$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x+y=1+xy$.

Từ (3) & (4) đi đến $\left| \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \right| \leq \frac{1}{4}$ hay $-\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$. (5)

Lại có $|P| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=1+xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=0, \text{ khi đó } P=\frac{1}{4} \\ x=0; y=1, \text{ khi đó } P=-\frac{1}{4} \end{cases}$

Tóm lại $\max P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x=1; y=0; \min P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=0; y=1$.

Cách 3: (Phương pháp bất đẳng thức)

$AB \leq \frac{(A+B)^2}{4}$, ta có: $\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \leq \frac{(x-y+1-xy)}{4(1+x)^2(1+y)^2}$. (1)

Lại có $\frac{(x-y+1-xy)^2}{4(1+x)^2(1+y)^2} = \frac{(1+x)^2(1-y)^2}{4(1+x)^2(1+y)^2} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{4y}{(1+y)^2} \right] \leq \frac{1}{4}$ (do $y \geq 0$)

Từ đó suy ra $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \geq 0; y \geq 0$

Mặt khác $P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$. Vậy $\max P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x=1; y=0$.

Do vai trò bình đẳng giữa x và y , nên ta có

$\frac{(y-x)(1-yx)}{(1+y)^2(1+x)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2} \geq -\frac{1}{4} \quad \forall x \geq 0, y \geq 0$.

Mặt khác $P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=0; y=1$. Vậy nên $P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=0; y=1$.

Nhận xét: Cùng sử dụng phương pháp bất đẳng thức, nhưng ta có 3 cách giải khác nhau bài toán trên.

Cách 4: (Phương pháp lượng giác hóa)

Ta có: $P = \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{y}{(1+y)^2}$ (xem cách 1).

Do $x \geq 0; y \geq 0$, nên đặt $x = \tan^2 \alpha, y = \tan^2 \beta, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}; 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} - \frac{\tan^2 \beta}{(1 + \tan^2 \beta)^2} = \tan^2 \alpha \cos^4 \alpha - \tan^2 \beta \cos^4 \beta \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha - \frac{1}{4} \sin^2 2\beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $-\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4} \quad \forall \alpha, \beta \in [0; \frac{\pi}{2})$.

$$\text{Lại thấy } P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 1 \\ \sin 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases};$$

$$P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $\max P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; \quad \min P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0; y = 1$.

Bình luận: Với bài toán trên ta có 4 cách giải khác nhau, trong đó có 3 cách cùng sử dụng phương pháp bất đẳng thức (ba cách này lại khác nhau). Qua đó ta thấy rõ tính đa dạng của phương pháp dùng để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Bài toán 3: Giả sử x, y là hai số thực sao cho $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Hướng dẫn giải

Cách 1: (Phương pháp miền giá trị hàm số)

$$\text{Do } x^2 + y^2 = 1, \text{ nên ta có: } P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}. \quad (1)$$

Xét hai khả năng sau:

1. Nếu $y = 0$ (khi đó $x = 1$). Lúc này $P = 2$.

$$2. \text{ Nếu } y \neq 0. \text{ Khi đó } P = \frac{2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6\frac{x}{y}\right]}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 3} = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}, \text{ ở đây } t = \frac{x}{y} \text{ và } t \in \mathbb{R}.$$

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số $f(t) = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}$, khi đó phương trình

sau đây (ẩn t)

$$\frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3} = m \quad (2) \text{ có nghiệm. Dễ thấy vì } t^2 + 2t + 3 > 0 \quad \forall t,$$

$$\text{nên (2)} \Leftrightarrow 2t^2 + 12t = m(t^2 + 2t + 3)$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)t^2 + 2(m - 6)t + 3m = 0. \quad (3)$$

* Nếu $m = 2$, khi đó $2(m - 6) \neq 0$, nên (3) có nghiệm. Vậy $m = 2$ là một giá trị của hàm số $f(t)$.

* Nếu $m \neq 2$, khi đó (3) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 3.$$

$$\text{Vậy (3) có nghiệm khi và chỉ khi } -6 \leq m \leq 3. \quad (4)$$

Do m là giá trị tùy ý của $f(t)$, nên từ (4) suy ra

$$\max_{y \neq 0} P = \max_{t \in \mathbb{R}} f(t) = 3 \text{ và } \min_{y \neq 0} P = \min_{t \in \mathbb{R}} f(t) = -6.$$

Kết hợp với $P = 2$ khi $y = 0$, ta đi đến kết luận:

Với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ thì $\max P = 3$, $\min P = -6$.

Cách 2: (Phương pháp miền giá trị hàm số)

Do $x^2 + y^2 = 1$, nên ta đặt $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, với $\alpha \in [0; 2\pi]$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{2\sin^2 \alpha + 12\sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha + 6\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2}. \quad (1)$$

Gọi m là giá trị tùy ý của P .

$$\text{Khi đó phương trình sau đây (ẩn } \alpha) \frac{1 - \cos 2\alpha + 6\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2} = m \quad (2)$$

có nghiệm. Do $|\sin 2\alpha + \cos 2\alpha| \leq \sqrt{2}$, $\forall \alpha \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2 > 0 \quad \forall \alpha \in [0; 2\pi].$$

$$\text{Từ đó (2)} \Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha + 6\sin 2\alpha = m(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2)$$

$$\Leftrightarrow (6 - m)\sin 2\alpha - (1 + m)\cos 2\alpha = 2m - 1. \quad (3)$$

$$(3) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow (6 - m)^2 + (1 + m)^2 \geq (2m - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 3. \quad (4)$$

Từ đó suy ra $\max P = 3$, $\min P = -6$ khi $x^2 + y^2 = 1$.

Cách 3: (Phương pháp chiều biến thiên hàm số)

$$\text{Ta có } P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} \quad (1) \quad (\text{xem cách 1}).$$

* Nếu $y = 0$, thì $P = 2$.

* Nếu $y \neq 0$, thì $P = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}$ với $t = \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}, t \in \mathbb{R} \text{ thì } f'(t) = \frac{-8t^2 + 12t + 36}{(t^2 + 2t + 3)^2} = -4 \frac{2t^2 - 3t - 9}{(t^2 + 2t + 3)^2}.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	3	$+\infty$			
$f'(t)$	-	0	+	0	-		
$f(t)$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Từ đó suy ra $\max_{t \in \mathbb{R}} f(t) = 3$ và $\min_{t \in \mathbb{R}} f(t) = -6$.

Vậy $\max P = 3$, $\min P = -6$ khi $x^2 + y^2 = 1$.

Bình luận: Tính đa dạng của các phương pháp giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cũng thể hiện rõ qua thí dụ này.

Bài toán 4: Cho $x \geq y$, $x \geq z$ và $x, y, z \in [1; 4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x}{2x + 3y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x}.$$

(Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A – 2011)

Hướng dẫn giải

Lời giải của bài toán này là sự kết hợp khéo léo của hai phương pháp bất đẳng thức và chiều biến thiên hàm số như sau:

$$\text{Viết lại biểu thức } P \text{ dưới dạng: } P = \frac{1}{2 + 3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}}. \quad (1)$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\text{Nếu } a > 0, b > 0 \text{ và } ab \geq 1, \text{ thì ta có: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Thật vậy (2)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \right) + \left(\frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab} - a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab} - b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{ab} - 1)}{(1+a)(1+b)(1+\sqrt{ab})} \geq 0. \quad (3)$$

Do $a > 0, b > 0, ab \geq 1$, vậy (3) đúng suy ra (2) đúng.

Áp dụng (2) với $a = \frac{z}{y}$; $b = \frac{x}{z}$. Khi đó $a > 0$, $b > 0$ và $ab = \frac{x}{y} \geq 1$ (do $x \geq y$),

nên ta có:
$$\frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \\ \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{yx} = z \\ x = y \end{cases}$

Từ (4) ta có $P \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}} \quad (5)$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{yx} = z \\ x = y \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$. Do $x \geq y$ và $x, y \in [1; 4]$ nên suy ra $1 \leq \frac{x}{y} \leq 4 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$. Khi đó

$$P \geq \frac{1}{2+\frac{3}{t^2}} + \frac{2}{1+t} \text{ hay } P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$ với $1 \leq t \leq 2$.

Ta có:
$$f'(t) = \frac{6t}{(2t^2+3)^2} - \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{(3t-6t^2)+(3t^3-4t^4)-9}{(2t^2+3)^2(1+t)^2}$$

Vì $t \geq 1 \Rightarrow f'(t) < 0 \quad \forall t \in [1; 2]$. Từ đó có bảng biến thiên sau:

t	1	2
f'(t)		-
f(t)		

Vậy $\min_{1 \leq t \leq 2} f(t) = f(2) = \frac{34}{33}$. Từ đó suy ra $P \geq \frac{34}{33}$,

$$P = \frac{34}{33} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \sqrt{yx} = z \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ \sqrt{yx} = z \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}.$$

Do $x, y, z \in [1; 4]$ nên $P = \frac{34}{33} \Leftrightarrow x = 4, y = 1, z = 2$.

Như thế $\min P = \frac{34}{33} \Leftrightarrow x = 4; y = 1; z = 2$.

Bài toán 5: Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{5-a-2b} + \sqrt{5-c-2d} + \sqrt{5-ac-bd}.$$

Hướng dẫn giải

Lời giải hay nhất và đặc sắc nhất cho bài toán này là phương pháp sử dụng hình học sau đây:

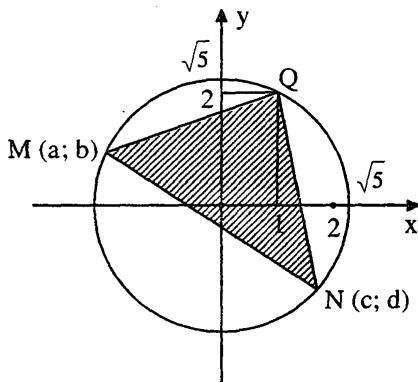
Ta thấy các điểm $M(a; b)$, $N(c; d)$ và $Q(1; 2)$ trong đó a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện đầu bài đều nằm trên đường tròn có tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Viết lại biểu thức P dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{(a-1)^2 + (b-2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(c-1)^2 + (d-1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(MQ + NQ + MN) = \frac{1}{\sqrt{2}}C_{MNQ}, \end{aligned} \quad (1)$$

ở đây C_{MNQ} là chu vi của tam giác MNQ .

Ta sử dụng kết quả quen biết trong hình học phẳng sau đây: Trong các tam giác nội tiếp trong một đường tròn bán kính R cho trước, thì tam giác đều là tam giác có chu vi lớn nhất. Mặt khác tam giác đều nội tiếp trong đường tròn có bán kính R có cạnh bằng $R\sqrt{3}$.



Vì vậy $C_{MNQ} \leq 3\sqrt{15}$. Từ (1) suy ra $P \leq \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{30}$.

Do đó $\max P = \frac{3\sqrt{30}}{2}$.

Qua 5 bài toán trên, chúng tôi đã giới thiệu với các bạn các phương pháp chính để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

- Phương pháp bất đẳng thức.
- Phương pháp chiều biến thiên hàm số.

- Phương pháp miền giá trị hàm số.
- Phương pháp lượng giác hóa.
- Phương pháp hình học hóa.

Các bạn cũng đã thấy được chúng ta có thể có nhiều phương pháp khác nhau để giải cùng một bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

§2. NHÌN LẠI CÁC BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRONG CÁC KÌ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

Các bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số thường xuyên xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm gần đây. Trong mục này chúng tôi xin giới thiệu các bài toán ấy kèm theo những bình luận cần thiết.

Bài 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A – 2011)

Cho x, y, z là các số thực sao cho $x \geq y, x \geq z$ và $x, y, z \in [1; 4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải trong bài toán 4, mục §1, chương 1 cuốn sách này.

Bình luận:

1. Mấu chốt để giải bài 1 là ở chỗ bằng cách sử dụng một bất đẳng thức

$$\text{phụ, để đưa về đánh giá } P \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}} \quad (1)$$

Đến đây bằng cách đưa vào ẩn phụ $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ với $t \in [1; 2]$ ta quy về đánh

$$\text{giá } P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{1}{1+t} = f(t).$$

Rõ ràng tiếp theo ta nghĩ ngay đến sẽ sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để tìm min $f(t)$ với $1 \leq t \leq 2$.

Từ đó kết hợp hai quá trình trên ta sẽ đi đến lời giải cho bài toán. Vấn đề là ở chỗ việc phát hiện ra (1) không phải là điều dễ dàng.

2. Thay cho việc sử dụng một bất đẳng thức phụ, ta có cách làm sau đây có vẻ “tự nhiên” hơn một chút.

Coi P như là một hàm số của z , xét hàm số ẩn z .

$$P = P(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \text{ với } z \in [1; x].$$

$$\text{Khi đó } P'(z) = 0 - \frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{x(y+z)^2 - y(x+z)^2}{(y+z)^2(z+x)^2} =$$

$$\frac{(x-y)(z^2 - xy)}{(y+z)^2(z+x)^2}. \quad (1)$$

* Nếu $x = y$, thì $P(z) = \frac{y}{5y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y} = \frac{6}{5} \quad \forall z \in [1; x]$

* Nếu $x > y$ (chú ý là $x \geq y$, nên khi $x \neq y$ thì $x > y$) thì $x - y > 0$ nên $P'(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - xy = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$.

Ta có bảng biến thiên sau (suy ra từ (1))

z	1	$\sqrt{xy}$	2
$P'(z)$		- 0 +	
$P(z)$			

Vậy với mọi $z \in [1; x]$, ta có: $P(z) \geq$

$$P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+x}$$

$$\Rightarrow P(z) \geq \frac{x}{2x+3y} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow P = P(z) \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$.

Đến đây ta tiếp tục giải như phần sau của bài 4, mục §1 với lưu ý rằng do $\frac{6}{5} > \frac{34}{33}$

$$\text{nên } \min P = \frac{34}{33}$$

Rõ ràng việc phát hiện ra (2) theo cách giải này “tự nhiên” hơn trong cách giải của bài 4, mặc dù nó phức tạp hơn về mặt tính toán!

Bài 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B – 2011)

Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Đưa P về dạng sau: $P = 4\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}\right] + 9\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\right]$

$$= 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 + 9\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 12\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 18. \quad (1)$$

Viết lại giả thiết dưới dạng sau: $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 = (a + b)\left(1 + \frac{2}{ab}\right). \quad (2)$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $1 + \frac{2}{ab} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}. \quad (3)$

Thay (3) vào (2) và có: $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}(a + b) = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right). \quad (4)$

Đặt $t = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2$.

Khi đó từ (4) ta có $2(t^2 - 2) + 1 \geq 2\sqrt{2}t$ hay $2t^2 - 2\sqrt{2}t - 3 \geq 0$
 $\Rightarrow (\sqrt{2}t + 1)(\sqrt{2}t - 3) \geq 0. \quad (5)$

Do $t \geq 2 \Rightarrow \sqrt{2}t + 1 > 0$, nên từ (5) suy ra

$$\sqrt{2}t - 3 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = t^2 - 2 \geq \frac{5}{2}. \quad (6)$$

Bài toán quy về:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = 4t^3 + 9t^2 - 12t - 18$ với $t \geq \frac{5}{2}$.

Ta có: $f'(t) = 12t^2 + 18t - 12 = 6(2t^2 + 3t - 2)$ và có bảng xét dấu sau:

t		-2		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	
$f'(t)$	+	0	-	0	+		+
$f(t)$							

Vậy $\min_{t \geq \frac{5}{2}} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$, tức là ta có $P \geq -\frac{23}{4}. \quad (7)$

Dấu bằng trong (7) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \\ 2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+1) \Leftrightarrow \\ a > 0; b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ 2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+1) \\ a > 0; b > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2; b = 1 \\ a = 1; b = 2 \end{cases}$$

Vậy $\min P = -\frac{23}{4}$ khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$ hoặc $a = 1, b = 2$.

Bình luận:

Việc đưa P về dạng (1) là lẽ tự nhiên. Cái khó là tìm miền xác định của biến

$$\text{mới } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Bằng cách kết hợp khéo léo giữa điều kiện và bất đẳng thức Côsi ta suy ra điều kiện (6). Còn lại dĩ nhiên là sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số hàm số để giải bài toán.

Bài 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2010)

Hướng dẫn giải

Rõ ràng ta có bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab + bc + ca)^2. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 1 - 2(ab + bc + ca). \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra

$$M \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi và chỉ khi có dấu bằng trong (1), tức là khi và chỉ khi $ab = bc = ca$.

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca. \text{ Ta có } 0 \leq t \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ (3) suy ra xét hàm số sau: } f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t} \quad \text{với } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2t + 3 + \frac{2}{\sqrt{1 - 2t}} \Rightarrow f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1 - 2t)^3}} \leq 0$$

(dấu bằng xảy ra chỉ tại $t = 0$), nên $f'(t)$ là hàm nghịch biến trên $[0; \frac{1}{3}]$.

Từ đó $f'(t) \geq f'(\frac{1}{3}) \forall t \in [0; \frac{1}{3}]$.

Do $f'(\frac{1}{3}) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t \in [0; \frac{1}{3}]$,

nhên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $t \in [0; \frac{1}{3}]$.

Từ đó suy ra $f(t) \geq f(0) = 2 \forall t \in [0; \frac{1}{3}]$.

Như thế ta có $M \geq 2 \forall t \in [0; \frac{1}{3}]$,

$M = 2$ khi và chỉ khi $ab = bc = ca$; $ab + bc + ca = 0$; $a + b + c = 1$ tức là khi và chỉ khi $(a; b; c)$ là một trong các bộ số $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ và $(0; 0; 1)$. Do đó giá trị nhỏ nhất của M là 2.

Bình luận: Việc xét đại lượng phụ thuộc vào biến $ab + bc + ca$ là một ý nghĩa hoàn toàn tự nhiên. Điều đó dẫn đến việc xét các hệ thức (1) và (2). Đến đây việc xét hàm số: $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$ với $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$

và sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải bài toán là một việc làm tự nhiên! Cách giải vừa trình bày rõ ràng là cách giải tối ưu nhất.

Bài 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D – 2010)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 21 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 7 \\ -2 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5 \quad (1)$$

Vì $(-x^2 + 4x + 21) - (-x^2 + 3x + 10) = x + 11 > 0$, (suy từ (1))

vậy $y > 0 \forall -2 \leq x \leq 5$,

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y^2 &= (-x^2 + 4x + 21) + (-x^2 + 3x + 10) - 2\sqrt{(-x^2 + 4x + 21)(-x^2 + 3x + 10)} \\ &= (x+3)(7-x) + (x+2)(5-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)} \\ &= (x+3)(5-x) + (x+2)(7-x) + 2 - \sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)} \\ &= \left(\sqrt{(x+3)(5-x)} - \sqrt{(x+2)(7-x)} \right)^2 + 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $y^2 \geq 2$. Do $y > 0$, nên có $y \geq \sqrt{2}$, $\forall x \in [-2; 5]$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow (a+3)(5-x) = (x+2)(7-x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra $\min y = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Bình luận:

- Việc phát hiện ra $y > 0 \forall x \in [-2; 5]$ là lẽ tự nhiên và đơn giản. Từ đó ta sử dụng tính chất cơ bản sau này:

Nếu $f(x) > 0 \forall x \in D$, thì $\min_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min_{x \in D} f^2(x)}$.

Việc phát hiện ra (2) là điều bình thường vì chỉ dùng các phép biến đổi đơn giản về căn thức đã học kĩ ở cấp 2.

Phương pháp bất đẳng thức áp dụng ở đây tuy đơn giản nhưng có hiệu quả lớn. Theo chúng tôi đó là cách giải hữu hiệu nhất đối với bài toán này.

- Ta hãy so sánh cách giải trên với cách giải khác sau đây (sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}} - \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}} \\ &= \frac{(4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} - (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}}{2\sqrt{-x^2+4x+21}\sqrt{-x^2+3x+10}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra dấu của y' là dấu của tử số.

$$T = (4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} - (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}. \quad (2)$$

Chú ý rằng hàm số y xác định với $-2 \leq x \leq 5$.

Ta nhận thấy khi $x > 2$ thì $4-2x < 0$; $3-2x < 0$,

khi $x < \frac{3}{2}$ thì $4-2x > 0$; $3-2x > 0$,

khi $\frac{3}{2} < x < 2$ thì $4-2x > 0$; $3-2x < 0$.

Trên cơ sở đó ta có ngay $T > 0$ khi $\frac{3}{2} < x < 2$, và

$$T = \begin{cases} (4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} - (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21} & \text{khi } -2 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ (2x-3)\sqrt{-x^2+4x+21} - (2x-4)\sqrt{-x^2+3x+10} & \text{khi } 2 < x \leq 5. \end{cases}$$

Dựa vào nhận xét sau nếu $A > B > 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$.

Vì thế ta có $(-x^2 + 3x + 10)(2x - 4)^2 - (-x^2 + 4x + 21)(2x - 3)^2 = -51x^2 + 104x - 29$ và có bảng xét dấu sau:

x	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{87}{51}$	5			
$-51x^2 + 104x - 29$		+	0	-	0	+	

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{87}{51}$	2	5
T		-	0	+	+	+
y'		-	0	+	+	+
y						

Như vậy ta có $\min_{-2 \leq x \leq 5} y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

Ta thu lại kết quả trên.

Về tính hiệu quả của hai phương pháp trong hai cách giải xin dành phần bình luận cho bạn đọc (về nguyên lí thì rất đơn giản chỉ cần xét dấu y' , nhưng tính toán thì quá phức tạp).

Bài 5: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2010)

Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $3x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \text{ do đó } A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{x(x+y)}} \text{ hay } \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} \geq \frac{4}{\sqrt{2x(x+y)}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+y} \Leftrightarrow 2x = x+y \Leftrightarrow x = y$.

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\sqrt{2x(x+y)} \leq \frac{2x(x+y)}{2} = \frac{3x+y}{2}$.

Từ đó thay vào (2) và có: $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+y} \geq \frac{8}{3x+y}. \quad (3)$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow 2x = x + y \Leftrightarrow x = y$.

Từ (1) (2) (3) suy ra $A \geq \frac{8}{3x + y}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2), (3) $\Leftrightarrow x = y$.
Theo giả thiết thì $0 < 3x + y \leq 1$, nên từ (4) có $A \geq 8$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}$

Như vậy $\min A = 8 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}$.

Bình luận: Phương pháp bất đẳng thức tỏ rõ sức mạnh của nó trong lời giải nói trên.

Bài 6: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối D)

Cho các số thực x, y không âm và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Hướng dẫn giải

Ta có $S = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy = 16x^2y^2 + 12(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 34xy$
 $= 16x^2y^2 + 12(x + y)[(x + y)^2 - 3xy] + 34xy$.

Do $x + y = 1$, nên ta có $S = 16x^2y^2 - 2xy + 12$. (1)

Đặt $xy = t$.

Do $x \geq 0; y \geq 0; x + y = 1$ nên $0 \leq xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{1}{4}$ (tức là $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$)

Vậy $\max S = \max_{0 \leq t \leq \frac{1}{4}} f(t); \min S = \min_{0 \leq t \leq \frac{1}{4}} f(t)$,

ở đây $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$, với $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$. Ta có $f'(t) = 32t - 2$, và có bảng

biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
f'(t)		-	0
f(t)	12	$\frac{191}{16}$	$\frac{25}{2}$

Vậy $\min_{0 \leq t \leq \frac{1}{4}} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$;

$$\max_{0 \leq t \leq \frac{1}{4}} f(t) = \max \left\{ f(0); f\left(\frac{1}{4}\right) \right\} = \max \left\{ 12; \frac{25}{2} \right\} = \frac{25}{2}.$$

Như thế $\min S = \frac{191}{16}$ đạt được

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}; y = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}; y = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{cases},$$

$$\max S = \frac{25}{2} \text{ đạt được } \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Bình luận: Rõ ràng phương pháp chiều biến thiên hàm số là thích hợp nhất để giải bài toán này.

Bài 7: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Viết lại } A \text{ dưới dạng } A &= \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + 3x^2y^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &= \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$ (2), và để ý đến (1) ta có

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ \Rightarrow A &\geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

Do $(x + y)^2 \geq 4xy$, nên từ giả thiết $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$, suy ra

$$\begin{aligned} (x + y)^3 + (x + y)^2 &\geq 2 \Leftrightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y - 1)[(x + y)^2 + 2(x + y) + 2] \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Do $(x + y)^2 + 2(x + y) + 2 = [(x + y) + 1]^2 + 1 > 0$, nên từ (4) có:

$$x + y - 1 \geq 0 \text{ hay } x + y \geq 1 \quad (5)$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, thì do $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$, nên từ (5) có $t \geq \frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra xét hàm số $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t \geq \frac{1}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0 \forall t \geq \frac{1}{2}$. Như vậy $\min_{t \geq \frac{1}{2}} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$.

Từ đó suy ra (dựa vào (3)): $A \geq \frac{9}{16}$ (6)

Để thấy dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ x = y \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Như thế ta có $\min A = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Bình luận: Việc đưa về xét biểu thức đối với $x^2 + y^2$ là một lẽ tự nhiên.

Bằng phương pháp bất đẳng thức ta đi đến đánh giá (3).

Công việc còn lại dĩ nhiên cần đến việc vận dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số.

Ta thấy việc kết hợp nhuần nhuyễn giữa hai phương pháp bất đẳng thức và chiều biến thiên hàm số đã dẫn đến sự thành công trong quá trình giải bài toán này.

Bài 8: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải (ba cách) trong bài toán 3, mục §1, chương 1 của sách này.

Bình luận: Bài toán có đến 3 lời giải khác nhau (hai cách sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số trong đó có kết hợp cả phương pháp lượng giác hóa, một cách sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số).

Bài 9: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối D)

Cho $x \geq 0; y \geq 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x - y)(1 - xy)}{(1 + x)^2(1 + y)^2}$.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải (bốn cách) trong bài toán 2, mục §1, chương 1 của cuốn sách này.

Bình luận: Đây là một trong các bài toán thể hiện rõ nhất tính đa dạng của việc sử dụng các phương pháp khác nhau để giải một bài toán về tìm giá trị lớn

nhất và nhỏ nhất của hàm số. Ưu thế của phương pháp sử dụng bất đẳng thức rõ nét qua thí dụ này.

Bài 10: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A)

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = 2(x + y)(x^2 + y^2 - xy) - 3xy = 2(x + y)(2 - xy) - 3xy$. (1)

Ta có: $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$. (2)

Thay (2) vào (1) rồi đặt $t = x + y$, ta có:

$$P = 2t \left(2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) - 3 \frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3.$$

Bây giờ ta tìm miền xác định của t :

$$2 = x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow (x + y)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 2.$$

Bài toán quy về: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3 \text{ với } -2 \leq t \leq 2$$

Ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6$ và có bảng biến thiên sau:

t	-2	1	2	
f'(t)		+	0	-
f(t)			$\frac{13}{2}$	
		-7		1

Vậy $\max P = \max_{-2 \leq t \leq 2} f(t) = f(1) = \frac{13}{2}$;

$\min P = \min_{-2 \leq t \leq 2} f(t) = \min \{f(-2); f(2)\} = \min \{-7; 1\} = -7$

$$\min P = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2;$$

$$\max P = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Bình luận:

- Việc quy về biểu thức đối với $x + y$ (mà ta sẽ đặt bằng t) rồi sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải là việc làm tự nhiên (giống như trong nhiều bài toán xét trước đây)
- Ta thử suy nghĩ điều kiện $x^2 + y^2 = 2$ gợi ý ta có nên sử dụng phương pháp “lượng giác hóa” hay không?

Vì $x^2 + y^2 = 2$, nên đặt $x = \sqrt{2} \sin \varphi$; $y = \sqrt{2} \cos \varphi$

Lúc này P có dạng sau:

$$\begin{aligned} P &= 4\sqrt{2} (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) - 6 \sin \varphi \cos \varphi \\ &= 4\sqrt{2} (\sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi \cos \varphi) - 6 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng công thức } \sin \varphi \cos \varphi = \frac{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2 - 1}{2}$$

$$\text{và đặt } t = \sin \varphi + \cos \varphi = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \text{ (do đó } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \text{),}$$

$$\text{ta có } P = 4\sqrt{2} t \left[1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right] - 6 \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Khi đó ta lại quy về bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số tương tự như đã làm trong phần trên. Vậy sử dụng “lượng giác hóa” chỉ là phần đầu, còn tiếp theo ta lại sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số như đã làm ở trên.

Bài 11: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Cho x, y, z là ba số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } S = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}. \quad (1)$$

$$\text{Hiển nhiên ta có: } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

$$\text{Từ (1) (2) ta có } S \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \right). \quad (3)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \text{ với } t > 0. \text{ Ta có } f'(t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 - 1}{t^2}$$

và có bảng biến thiên sau:

t	0	1
$f'(t)$	-	-
$f(t)$	↘	↗

Vậy $\min_{t>0} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$.

Từ đó suy ra $\forall x > 0, y > 0, z > 0$, ta có: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2}; \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \geq \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{2}$.

Từ (3) suy ra $S \geq \frac{9}{2} \quad \forall x > 0, y > 0, z > 0$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min S = \frac{9}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bình luận:

- Một lần nữa ta thấy sự kết hợp giữa phương pháp bất đẳng thức và phương pháp chiều biến thiên hàm số cho phép ta giải bài toán trên.
- Ta có thể sử dụng thuần túy phương pháp bất đẳng thức để giải bài toán này. Thật vậy ta sẽ chứng minh rằng khi $x > 0$, thì $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2}$. (5)

Thật vậy (5) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2}$. (5)

Thật vậy (5) $\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) \geq 0$. (6)

Rõ ràng (6) đúng $\forall x > 0 \Rightarrow$ (5) đúng $\forall x > 0$.

Từ đó suy ra $S \geq \frac{9}{2} \Rightarrow \min S = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Xem ra cách giải này quá đơn giản. Nhưng lời giải của nó không tự nhiên

ở chỗ: làm sao mà biết được vế phải của (5) là $\frac{3}{2}$.

Bài 12: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A)

Cho x, y là các số thực khác 0 và thỏa mãn điều kiện $xy(x + y) = x^2 - xy + y^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Hướng dẫn giải

Do $x \neq 0, y \neq 0$ nên $xy(x + y) = x^2 - xy + y^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}. \quad (1)$$

Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$ khi đó (1) có dạng: $X + Y = X^2 - XY + Y^2$. (2)

Lúc này $A = X^3 + Y^3 = (X + Y)(X^2 - XY + Y^2)$.
 Với điều kiện (2) thì $A = (X + Y)^2$. (3)

Khi đó bài toán đã cho trở thành:

Tìm giá trị lớn nhất của $A = (X + Y)^2$ với điều kiện (2).

Chú ý rằng (2) $\Leftrightarrow X + Y = (X + Y)^2 - 3XY$. (4)

Áp dụng bất đẳng thức quen biết $XY \leq \frac{(X + Y)^2}{4}$ nên từ (4) ta có

$$X + Y \geq (X + Y)^2 - \frac{3}{4}(X + Y)^2 \Leftrightarrow (X + Y)^2 - 4(X + Y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq X + Y \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (X + Y)^2 \leq 16.$$

Vậy ta có $A \leq 16$. (5)

Bình luận: Rõ ràng phương pháp bất đẳng thức sử dụng ở đây đầy hiệu quả để giải bài toán này

Bài 13: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|.$$

Hướng dẫn giải

Lấy $\vec{u} = (x-1; y)$, $\vec{v} = (-x-1; y) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-2; 2y)$.

Theo phép tính về vectơ ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ hay

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq 2\sqrt{1+y^2} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ cùng phương, cùng chiều

$$\Leftrightarrow x-1 = -x-1 \Leftrightarrow x=0.$$

Từ (1) suy ra $A \geq 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$ với $y \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(y) = \begin{cases} 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 & \text{nếu } y > 2 \\ 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y & \text{nếu } y < 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(y) = \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + 1 & \text{nếu } y > 2 \\ \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 & \text{nếu } y < 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + 1 & \text{nếu } y > 2 \\ \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} & \text{nếu } y < 2 \end{cases} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $f'(y) > 0 \quad \forall y > 2$.

Vì $2y > \sqrt{1+y^2}$ nếu $\frac{\sqrt{3}}{3} < y < 2$; $2y < \sqrt{1+y^2}$ nếu $y < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

nên ta có bảng biến thiên sau:

y	$\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \qquad \qquad 2$			
$f'(y)$	-	0	+	+
$f(y)$				

Từ đó suy ra $f(y) \geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 + \sqrt{3} \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Như vậy $A \geq 2 + \sqrt{3} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ và $A = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Từ đó ta có $\min A = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bình luận: Bằng phép tính vectơ ta có đánh giá (1). Sau đó sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải tiếp bài toán đặt ra.

Bài 14: (Đề thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng khối B)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}.$$

Do $x^2 > 0 \quad \forall x \in [1; e^3]$ nên ta có bảng biến thiên sau (dựa vào tính đồng biến của hàm số $y = \ln x$ khi $x > 0$)

x	1	e^2	e^3
$\ln x$		+	+
$2 - \ln x$	+	0	-
y'	+	0	-
y	0	$\frac{4}{e^2}$	$\frac{9}{e^3}$

Vậy $\max_{1 \leq x \leq e^3} f(x) = f(e^2) = \frac{4}{e^2}$; $\min_{1 \leq x \leq e^3} f(x) = \min \left\{ f(0); f(e^3) \right\} = \min \left\{ 0; \frac{9}{e^3} \right\} = 0$.

Bình luận: Phương pháp chiều biến thiên hàm số là cách giải duy nhất hợp lí với bài toán này.

Bài 15: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối D)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Vậy ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	1	2
y'		+	0
y	0	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

Từ đó suy ra $\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = f(1) = \sqrt{2}$;

$$\min_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = \min \left\{ f(-1); f(x) \right\} = \min \left\{ 0; \frac{3}{\sqrt{5}} \right\} = 0.$$

Bình luận:

- Với thí dụ trên sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải bài toán là hợp lí nhất.
- Ta có thể sử dụng phương pháp bất đẳng thức để giải bài toán trên như sau:

$$\text{Do } x \geq -1 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0 \quad \forall x \in [-1; 2].$$

Lại có $f(-1) = 0$. Từ đó suy ra $\min_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = 0$.

$$\text{Lại thấy } f^2(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x}{x^2+1}.$$

$$\text{Do } \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow f^2(x) \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{2}, \quad \forall x \in [-1; 2].$$

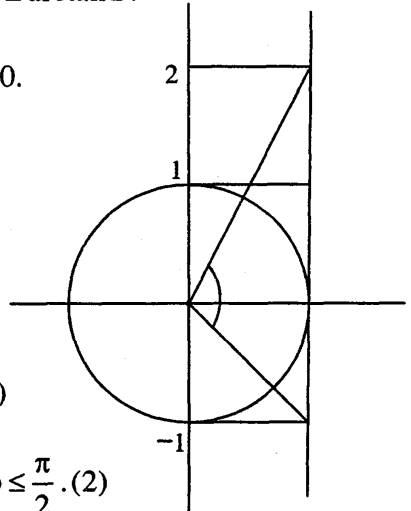
Mặt khác $f(1) = \sqrt{2}$, từ đó suy ra $\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = \sqrt{2}$.

3. Lại có thể sử dụng phương pháp lượng giác hóa như sau:

Do $-1 \leq x \leq 2$, nên đặt $x = \tan \varphi$ với $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctan 2$.

Chú ý rằng khi đó $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos \varphi > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1+\tan \varphi}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}} = \frac{\frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\cos \varphi}}{\frac{1}{\cos \varphi}} \\ &= \sin \varphi + \cos \varphi \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right). \end{aligned} \quad (1)$$



$$\text{Từ } -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctan 2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \arctan 2 \leq \frac{\pi}{4} - \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Như vậy với chú ý rằng $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \arctan 2 < 0$, nên từ (1) (2) suy ra

$$\min_{-1 \leq x \leq 2} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} \min\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right) = 0 \text{ khi } \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 2} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} \max\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right) = \sqrt{2} \text{ khi } \varphi = 0.$$

Điều đó có nghĩa là $\min f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\max f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1$.

Rõ ràng trong ba cách kể trên phương pháp sử dụng chiều biến thiên hàm số trong cách 1 là hiệu quả và hợp lí nhất.

Bài 16: (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải trong bài toán 1, mục §1, chương 1 cuốn sách này.

Bình luận: Đây là một trong các ví dụ đẹp nhất về tính đa dạng của các cách giải khác nhau dùng để giải một bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số (bài toán có đến 4 cách giải khác nhau sử dụng hầu hết các phương pháp cơ bản để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: phương pháp bất đẳng thức, phương pháp chiều biến thiên hàm số, phương pháp lượng giác hóa, phương pháp miền giá trị hàm số, phương pháp đồ thị và hình học).

§3. CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. Định nghĩa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa 1: Xét hàm số $f(x)$ với $x \in D$. Ta nói rằng M là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D , nếu như thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $f(x) \leq M, \forall x \in D$,
2. Tồn tại $x_0 \in D$, sao cho $f(x_0) = M$.

Khi đó ta kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.

Định nghĩa 2: Xét hàm số $f(x)$ với $x \in D$. Ta nói rằng m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D , nếu như thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $f(x) \geq m \forall x \in D$,
2. Tồn tại $x_0 \in D$, sao cho $f(x_0) = m$.

Khi đó ta kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

Như vậy định nghĩa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đều có hai phần. Cần lưu ý rằng cả hai phần này đều quan trọng như nhau, không được xem nhẹ phần 2.

Xét thí dụ sau đây:

Cho $x > 0, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Xét phép giải sau đây: } P = 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

$$\text{Ta có } x + \frac{1}{x} \geq 2; y + \frac{1}{y} \geq 2 \text{ và } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Từ đó suy ra $P \geq 8$, vậy $\min P = 8$.

Cách giải này sai ở chỗ là mới dựa vào phần 1 của định nghĩa giá trị nhỏ nhất. Ta xem phần 2 của định nghĩa có thỏa mãn hay không? Để ý rằng dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức $P \geq 8$ khi $x = y = 1$. Tuy nhiên khi đó $x^2 + y^2 = 2$ (không thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$). Vậy không thể xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức $P \geq 8$, tức là phần 2 của định nghĩa về giá trị nhỏ nhất không được thỏa mãn.

Vì thế kết luận $\min S = 8$ là sai.

Cách giải đúng như sau: Viết lại S dưới dạng:

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + \frac{1}{x} + y + \frac{y}{x} \\ &= \left(x + \frac{1}{2x}\right) + \left(y + \frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } x + \frac{1}{2x} \geq \sqrt{2}; \quad y + \frac{1}{2y} \geq \sqrt{2}; \quad (2)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}. \quad (4)$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 \geq 2xy, \text{ nên từ (4) ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}} = 2\sqrt{2}. \quad (5)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) và (5) suy ra } S \geq 3\sqrt{2} + 4. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3), (5)

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Như vậy tồn tại $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0^2 + y_0^2 = 1$ và $S = 3\sqrt{2} + 4$ khi $x = x_0$; $y = y_0$. Theo định nghĩa về giá trị nhỏ nhất, ta có $\min S = 3\sqrt{2} + 4$.

Qua thí dụ này ta thấy nếu không để ý đến điều kiện 2 trong định nghĩa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số có thể sẽ dẫn đến sai lầm.

B. Các tính chất của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Tính chất 1: Giả sử $f(x)$ xác định trên D và A, B là tập của D , trong đó $A \subseteq B$.

Giả sử tồn tại $\max_{x \in A} f(x); \max_{x \in B} f(x); \min_{x \in A} f(x); \min_{x \in B} f(x)$.

Khi đó ta có $\max_{x \in A} f(x) \leq \max_{x \in B} f(x)$, (1)

$\min_{x \in A} f(x) \geq \min_{x \in B} f(x)$. (2)

Chứng minh: Ta chứng minh (1) (còn (2) chứng minh hoàn toàn tương tự)

Giả sử $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$, với $x_0 \in A$. Do $x_0 \in A$ mà $A \subseteq B$ nên $x_0 \in B$.

Ta có $f(x_0) \leq \max_{x \in B} f(x) \Rightarrow \text{đpcm}$.

Tính chất 2: Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng xác định trên miền D và thỏa mãn điều kiện $f(x) \geq g(x) \forall x \in D$.

Giả sử cùng tồn tại $\max_{x \in D} f(x); \max_{x \in D} g(x)$, khi đó ta có $\max_{x \in D} f(x) \geq \max_{x \in D} g(x)$.

Chứng minh: Giả sử $\max_{x \in D} g(x) = g(x_0)$, với $x_0 \in D$.

Ta có $f(x) \geq g(x) \forall x \in D \Rightarrow f(x_0) \geq g(x_0)$.

Do $\max_{x \in D} f(x) \geq f(x_0) \geq g(x_0) = \max_{x \in D} g(x) \Rightarrow \text{đpcm}$.

Chú ý: Mệnh đề đảo nói chung không đúng, tức là nếu $\max_{x \in D} f(x) \geq \max_{x \in D} g(x)$

thì chưa thể kết luận được $f(x) \geq g(x) \forall x \in D$.

Xét hai hàm số $f(x) = 4 - x$ và $g(x) = x$ trên miền $D = \{x: 0 \leq x \leq 3\}$.

Rõ ràng $\max_{0 \leq x \leq 3} f(x) = 4$,

$\max_{0 \leq x \leq 3} g(x) = 3$.

Như vậy $\max_{0 \leq x \leq 3} f(x) > \max_{0 \leq x \leq 3} g(x)$.

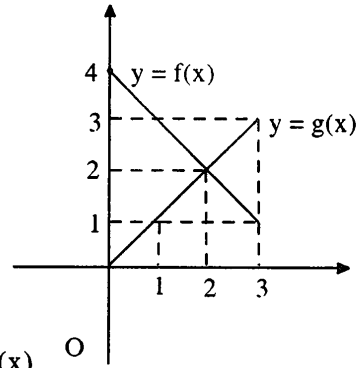
Tuy nhiên với mọi $2 < x \leq 3$ thì rõ ràng $f(x) < g(x)$.

Như vậy không thể suy ra được $f(x) \geq g(x) \forall x \in D$.

Tính chất 3: Giả sử $f(x)$ xác định trên miền D và $D = D_1 \cup D_2$.

Giả thiết tồn tại $\max_{x \in D_i} f(x), \min_{x \in D_i} f(x) \forall i = 1, 2$.

Khi đó ta có công thức sau: $\max_{x \in D} f(x) = \max \left\{ \max_{x \in D_1} f(x); \max_{x \in D_2} f(x) \right\}$, (1)



$$\min_{x \in D} f(x) = \min \left\{ \min_{x \in D_1} f(x); \min_{x \in D_2} f(x) \right\}. \quad (2)$$

Chứng minh:

Ta chỉ cần chứng minh (1) (còn (2) được chứng minh bằng một cách hoàn toàn tương tự). Vì $D_i \subseteq D$, $i = 1, 2$ nên theo tính chất 2, ta có:

$$\max_{x \in D_1} f(x) \leq \max_{x \in D} f(x); \max_{x \in D_2} f(x) \leq \max_{x \in D} f(x). \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) suy ra } \max \left\{ \max_{x \in D_1} f(x); \max_{x \in D_2} f(x) \right\} \leq \max_{x \in D} f(x). \quad (4)$$

Giả sử $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0)$, với $x_0 \in D$.

Vì $D = D_1 \cup D_2$ mà $x_0 \in D$ nên $x_0 \in D_1 \cup D_2$. Do vậy x_0 phải thuộc về ít nhất một trong hai tập D_1, D_2 . Từ đó có thể cho là (mà không làm giảm sự tổng quát) $x_0 \in D_1$.

Từ $x_0 \in D_1$ nên theo định nghĩa về giá trị lớn nhất, ta có:

$$f(x_0) \leq \max_{x \in D_1} f(x). \quad (5)$$

$$\text{Hiển nhiên } \max_{x \in D} f(x) \leq \max \left\{ \max_{x \in D_1} f(x); \max_{x \in D_2} f(x) \right\}. \quad (6)$$

$$\text{Từ (5), (6) suy ra } f(x_0) = \max_{x \in D} f(x) \leq \max \left\{ \max_{x \in D_1} f(x); \max_{x \in D_2} f(x) \right\}. \quad (7)$$

$$\text{Bây giờ từ (4), (7) đi đến: } \max_{x \in D} f(x) = \max \left\{ \max_{x \in D_1} f(x); \max_{x \in D_2} f(x) \right\}$$

$\Rightarrow$ Đó là đpcm.

Nhờ tính chất 3 nói trên cho phép ta có thể biến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một miền xác định phức tạp thành một dãy các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên các miền đơn giản hơn (các bài toán ấy đơn giản hơn các bài toán ban đầu)

Vì lí do ấy tính chất 3 còn hay gọi là NGUYÊN LÝ PHÂN RÃ.

Xét một ví dụ minh học sau đây:

Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y \leq 6$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2y(4 - x - y)$.

Đặt $D = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 6\}$,

$D_1 = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; 4 \leq x + y \leq 6\}$,

$D_2 = \{(x; y): x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 4\}$.

Khi đó rõ ràng $D = D_1 \cup D_2$.

Theo nguyên lí phân rã (tính chất 3), ta có :

$$\max_{(x;y) \in D} P = \max \left\{ \max_{(x;y) \in D_1} P; \max_{(x;y) \in D_2} P \right\}. \quad (1)$$

Với mọi $(x; y) \in D_1$ thì $4 - x - y \leq 0$ vì do $x \geq 0; y \geq 0$ nên $P \leq 0 \forall (x; y) \in D_1$.

Lại có $(2; 2) \in D_1$ và khi đó $P = 0$, nên $\max_{(x;y) \in D_1} P = 0$. (2)

Với mọi $(x; y) \in D_2$ thì $4 - x - y \geq 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$P = 4 \frac{x}{2} \frac{x}{2} y (4 - x - y) \leq 4 \left[\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + (4 - x - y)}{4} \right]^4 \quad \text{hay } P \leq 4 \forall (x; y) \in D_2.$$

$$\text{Mặt khác từ } \frac{x}{2} = y = 4 - x - y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rõ ràng } (2; 1) \in D_2 \Rightarrow \max_{(x;y) \in D_2} P = 4. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) suy ra } \max_{(x;y) \in D} P = \max\{0; 4\} = 4.$$

Tính chất 4: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên D và tồn tại $\max_{x \in D} f(x)$ và

$$\min_{x \in D} f(x). \text{ Khi đó ta có: } \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} (-f(x)); \min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D} (-f(x)).$$

Chứng minh: Giả sử $M = \max_{x \in D} f(x)$.

$$\text{Khi đó theo định nghĩa giá trị lớn nhất, ta có: } \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ f(x_0) = M, \text{ với } x_0 \in D. \end{cases}$$

$$\text{Từ hệ trên suy ra } \begin{cases} -f(x) \geq -M \quad \forall x \in D \\ -f(x_0) = -M. \end{cases}$$

Theo định nghĩa của giá trị nhỏ nhất, từ (*) suy ra $\min_{x \in D} (-f(x)) = -M$.

$$\text{Như vậy ta đi đến } \max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} (-f(x)) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Phần sau chứng minh hoàn toàn tương tự.

Nhận xét: Tính chất 2 cho phép ta chuyển bài toán tìm giá trị lớn nhất thành bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hoặc ngược lại. Điều này có ích trong nhiều trường hợp cụ thể sẽ xét sau này.

Xét thí dụ minh họa sau đây:

Cho $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x + y \leq 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2y(4 - x - y)$.

Kí hiệu D, D_1, D_2 như trong thí dụ minh họa của tính chất 3.

Theo tính chất 2 thì $\min_{(x,y) \in D} P = - \max_{(x,y) \in D} (-P)$. (1)

Ta có $-P = Q = x^2y(x + y - 4)$. Khi $(x; y) \in D_2 \Rightarrow x + y - 4 \leq 0 \Rightarrow Q \leq 0$.

Mặt khác $(2; 2) \in D_2$ và khi đó $Q = 0$ nên ta có $\max_{(x,y) \in D_2} Q = 0$. (2)

Khi đó $(x; y) \in D_1 \Rightarrow x + y - 4 \geq 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$Q = 4 \frac{x}{2} \frac{x}{2} y(x + y - 4) \leq 4 \left[\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + (x - y - 4)}{4} \right]^2 \text{ hay } Q \leq 4 \left(\frac{x + y - 2}{2} \right)^2 \leq 64$$

$$\forall (x; y) \in D_1$$

(do khi $(x; y) \in D_1$ thì $x + y \leq 6 \Rightarrow x + y - 2 \leq 4$).

Mặt khác do $(4; 2) \in D_1$ và khi đó $Q = 64$, nên ta có $\max_{(x,y) \in D_1} Q = 64$. (3)

Từ (2) (3) và theo tính chất 3 (nguyên lí phân rã), ta có :

$$\max_{(x,y) \in D} Q = \max\{0; 64\} = 64. \quad (4)$$

Bây giờ từ (1), (4) suy ra $\min_{(x,y) \in D} P = -64$.

Tính chất 5: Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ cùng xác định trên miền D .

Đặt $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$.

Giả sử tồn tại $\max_{x \in D} f(x), \min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f_i(x), \min_{x \in D} f_i(x)$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

Khi đó ta có: $\max_{x \in D} f(x) \leq \max_{x \in D} f_1(x) + \max_{x \in D} f_2(x) + \dots + \max_{x \in D} f_n(x)$, (1)

$\min_{x \in D} f(x) \geq \min_{x \in D} f_1(x) + \min_{x \in D} f_2(x) + \dots + \min_{x \in D} f_n(x)$. (2)

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\max_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0), \forall i = \overline{1, n}.$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\min_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0), \forall i = \overline{1, n}.$$

Chứng minh:

Ta chứng minh (1) (với (2) phép chứng minh hoàn toàn tương tự).

Lấy tùy ý $x \in D$. Theo định nghĩa của giá trị lớn nhất ta có :

$$f_i(x) \leq \max_{x \in D} f_i(x), \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức (3), ta có:

$$f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \leq \max_{x_1 \in D} f_1(x_1) + \dots + \max_{x_n \in D} f_n(x_n). \quad (4)$$

Vì bất đẳng thức (4) đúng với mọi $x \in D$ nên ta có

$$\max_{x \in D} f(x) \leq \max_{x_1 \in D} f_1(x) + \dots + \max_{x_n \in D} f_n(x). \quad (5)$$

Vậy (1) đúng. Bây giờ ta xét khả năng có dấu bằng trong (1).

Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ mà $\max_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0), \quad \forall i = \overline{1, n}.$

$$\text{Từ đó ta có } \max_{x \in D} f_1(x) + \dots + \max_{x \in D} f_n(x) = f_1(x_0) + \dots + f_n(x_0) = f(x_0). \quad (6)$$

Do $f(x_0) \leq \max_{x \in D} f(x)$, nên từ (6) suy ra

$$\max_{x \in D} f_1(x) + \dots + \max_{x \in D} f_n(x) \leq \max_{x \in D} f(x). \quad (7)$$

Từ (5), (7) suy ra trong trường hợp này xảy ra dấu bằng trong (1).

Phần đảo chứng minh hoàn toàn tương tự và xin dành cho bạn đọc.

Tính chất trên cho ta thấy rằng nói chung không thể thay việc tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của một tổng các hàm số bằng việc tìm tổng các giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của từng hàm số đơn lẻ. Tuy nhiên trong thực tế điều này sẽ thực hiện được nếu như trong các trường hợp tồn tại một điểm x_0 nên các hàm thành phần cùng đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) tại điểm ấy.

Xét thí dụ minh họa sau đây:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 \text{ với } x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Viết lại $f(x)$ dưới dạng sau

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x + \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \right) + 4 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 x \cos^4 x} + 4 \\ &= 5 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + 16 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 2x} = 5 + g(x) + h(x), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{với } g(x) = -\frac{1}{2} \sin^2 2x; h(x) = 16 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 2x}.$$

$$\text{Để thấy } \min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} g(x) = -\frac{1}{2}; \min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} h(x) = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8. \quad (2)$$

Do tồn tại $x_0 \neq \frac{k\pi}{2}$, mà $g(x_0) = -\frac{1}{2}$ và $h(x_0) = 8$ (thí dụ chọn $x_0 = \frac{\pi}{4}$),

tức là tồn tại x_0 mà $g(x_0) = \min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} g(x)$; $h(x_0) = \min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} h(x)$

Vì lẽ đó theo tính chất 5, ta có :

$$\min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} f(x) = \min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} g(x) + \min_{x \neq \frac{k\pi}{2}} h(x) + 5 = -\frac{1}{2} + 8 + 5 = \frac{25}{2}$$

Tính chất 6: Giả sử $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ cùng xác định trên miền D , và ta có $f_i(x) > 0 \quad \forall x \in D, \forall i = \overline{1, n}$. Giả thiết thêm tồn tại $\max_{x \in D} f_1(x), \max_{x \in D} f_2(x), \dots$

$\max_{x \in D} f_n(x)$ cũng như $\min_{x \in D} f_1(x), \dots, \min_{x \in D} f_n(x)$.

Đặt $f(x) = f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$. Khi đó ta có:

$$\max_{x \in D} f(x) \leq \left(\max_{x \in D} f_1(x) \right) \left(\max_{x \in D} f_2(x) \right) \dots \left(\max_{x \in D} f_n(x) \right), \quad (1)$$

$$\min_{x \in D} f(x) \geq \left(\min_{x \in D} f_1(x) \right) \left(\min_{x \in D} f_2(x) \right) \dots \left(\min_{x \in D} f_n(x) \right). \quad (2)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\min_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0), \quad \forall i = \overline{1, n},$$

Tương tự dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\min_{x \in D} f_i(x) = f_i(x_0) \quad \forall i = \overline{1, n},$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh của tính chất 5.

Tính chất 7: Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cùng xác định trên miền D . Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$. Giả sử tồn tại các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ trên D . Khi đó ta có: $\max_{x \in D} h(x) \leq \max_{x \in D} f(x) - \min_{x \in D} g(x)$, (1)

$$\min_{x \in D} h(x) \geq \min_{x \in D} f(x) - \max_{x \in D} g(x). \quad (2)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0); \min_{x \in D} g(x) = g(x_0),$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0); \max_{x \in D} g(x) = g(x_0),$$

Chứng minh: Ta chỉ cần chứng minh (1).

Ta có $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

Theo tính chất 5 ta có: $\max_{x \in D} h(x) \leq \max_{x \in D} f(x) + \max_{x \in D} (-g(x)),$ (3)

Theo tính chất 2, ta có: $\max_{x \in D} (-g(x)) = -\min_{x \in D} [-(-g(x))] = -\min_{x \in D} g(x),$ (4)

Thay (4) vào (3) ta có $\max_{x \in D} h(x) \leq \max_{x \in D} f(x) - \min_{x \in D} g(x).$ Vậy (1) đúng.

Vẫn theo tính chất 5 thì dấu bằng trong (3) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho ta có: $\max_{x \in D} f(x) = f(x_0); \max_{x \in D} (-g(x)) = -g(x_0).$

Nhưng $\max_{x \in D} (-g(x)) = -g(x_0) \Leftrightarrow -\min_{x \in D} g(x) = -g(x_0) \Leftrightarrow \min_{x \in D} g(x) = g(x_0)$

$\Rightarrow$ đó là đpcm.

Tương tự ta có tính chất sau (với cách chứng minh hoàn toàn tương tự)

Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và dương khi $x \in D$. Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

và giả thiết tồn tại các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số $h(x), f(x), g(x)$ trên D . Khi đó ta có:

$$\max_{x \in D} h(x) \leq \frac{\max_{x \in D} f(x)}{\min_{x \in D} g(x)}, \quad (1)$$

$$\min_{x \in D} h(x) \geq \frac{\min_{x \in D} f(x)}{\max_{x \in D} g(x)}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$, sao cho

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0); \min_{x \in D} g(x) = g(x_0)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$, sao cho

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0); \max_{x \in D} g(x) = g(x_0)$$

Tính chất 8:

1. Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên miền D . Khi đó với mọi n nguyên dương, ta có

$$\max_{x \in D} f(x) = 2^{n+1} \sqrt{\max_{x \in D} (f^{2^{n+1}}(x))}; \min_{x \in D} f(x) = 2^{n+1} \sqrt{\min_{x \in D} (f^{2^{n+1}}(x))}.$$

2. Nếu thêm vào giả thiết $f(x) \geq 0 \forall x \in D$. Khi đó với mọi n nguyên dương,

$$\text{ta có: } \max_{x \in D} f(x) = \sqrt[n]{\max_{x \in D} f^{2n}(x)}; \min_{x \in D} f(x) = \sqrt[n]{\min_{x \in D} f^{2n}(x)}.$$

Chứng minh tính chất này suy trực tiếp từ định nghĩa của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, cũng như các tính chất về lũy thừa của một bất đẳng thức.

Trong thực tế, người ta rất hay sử dụng một trường hợp riêng của tính chất 9 như sau:

$$\text{Nếu } f(x) \geq 0 \forall x \in D, \text{ thì } \max_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min_{x \in D} f^2(x)}; \min_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min_{x \in D} f^2(x)}.$$

Điều này rất có ích để giải các bài toán thuộc dạng. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số $f(x)$ khi chúng được cho dưới dạng căn bậc hai hoặc có chứa các biểu thức với dấu giá trị tuyệt đối.

Xét thí dụ minh họa sau đây:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}, x \in \mathbb{R}.$$

Do $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, nên theo tính chất 9 ta có

$$\max_{x \in D} f(x) = \sqrt{\max_{x \in D} f^2(x)}; \min_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min_{x \in D} f^2(x)}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f^2(x) = 2 + (\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \text{ và có } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hàm số } F(t) &= 2t + t + 2\sqrt{1 + t + \frac{t^2 - 1}{2}} = 2 + t + \sqrt{2}\sqrt{t^2 + 2t + 1} \\ &= 2 + t + \sqrt{2}|t + 1|, \text{ với } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên sau đây:

t	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
F(t)	$(1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}$	$(\sqrt{2} + 1)t + 2 + \sqrt{2}$	
F'(t)	$1 - \sqrt{2}$	$\sqrt{2} + 1$	
F'(t)	-	+	
F(t)			

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{\max_{|t| \leq \sqrt{2}} F(t)} = \sqrt{\max\{F(-\sqrt{2}); F(\sqrt{2})\}}$$

$$= \sqrt{\max(4 - 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2})} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}},$$

$$\min_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min_{|t| \leq \sqrt{2}} F(t)} = \sqrt{F(-1)} = 1.$$

Tính chất 9: Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên D . Khi đó nếu gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên miền D , thì:

$$\min |f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{nếu } Mm \leq 0 \\ \min\{|M|, |m|\}, & \text{nếu } Mm > 0. \end{cases}$$

Chứng minh:

1. Nếu $Mm \leq 0$, khi đó ta có $M \geq 0 \geq m$.

Dựa vào tính liên tục của $f(x)$ suy ra tồn tại $x_0 \in D$ mà $f(x_0) = 0$.

Ta có $|f(x)| \geq 0 \quad \forall x \in D$ và $|f(x_0)| = 0$. Từ đó suy ra $\min_{x \in D} |f(x)| = 0$.

2. Nếu $Mm > 0$. Không giảm tổng quát có thể cho là $M > m > 0$ (nếu $0 > M > m$ chứng minh tương tự). Do đó $f(1) > 0$. Từ đó ta có:

$$\min_{x \in D} |f(x)| = \min_{x \in D} f(x) = m = \min\{M, m\} = \min\{|M|, |m|\} \Rightarrow \text{đó là đpcm.}$$

Tính chất 10: Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên D và tồn tại $\max_{x \in D} f(x), \min_{x \in D} f(x)$. Khi đó ta có

$$\max_{x \in D} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \min_{x \in D} f(x) \right| \right\}. \quad (1)$$

Chứng minh: Áp dụng tính chất (4), thì hệ thức (1) có dạng tương đương sau:

$$\max_{x \in D} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right| \right\} \quad (2)$$

Lấy tùy ý $x_0 \in D$, khi đó xảy ra hai khả năng sau:

1. Nếu $f(x_0) \geq 0$. Khi đó ta có $|f(x_0)| = f(x_0) \leq \max_{x \in D} f(x) \leq \left| \max_{x \in D} f(x) \right|$. (3)

Từ (3) hiển nhiên suy ra $|f(x)| \leq \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right| \right\}$. (4)

2. Nếu $f(x_0) \leq 0$. Lúc này lại có:

$$|f(x_0)| = -f(x_0) \leq \max_{x \in D} (-f(x)) \leq \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right|.$$

$$\text{Vì vậy ta cũng có } |f(x_0)| \leq \max \left\{ \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right|; \left| \max_{x \in D} f(x) \right| \right\}. \quad (5)$$

Từ (4), (5) và để ý rằng x_0 là phần tử tùy ý của D , suy ra

$$|f(x_0)| \leq \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right| \right\}. \quad (6)$$

Không giảm tổng quát có thể cho là:

$$\max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right| \right\} = \left| \max_{x \in D} f(x) \right| \quad (7)$$

(Trường hợp ngược lại được chứng minh bằng một cách hoàn toàn tương tự)

$$\text{Giả sử } \left| \max_{x \in D} f(x) \right| = |f(x_0)|, x_0 \in D. \quad (8)$$

$$\text{Từ (2), (3) suy ra } |f(x_0)| = \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right| \right\} \quad (9)$$

Từ (6), (9) và theo định nghĩa giá trị lớn nhất của hàm số, ta có ngay

$$|f(x_0)| = \max \left\{ \left| \max_{x \in D} f(x) \right|; \left| \max_{x \in D} (-f(x)) \right| \right\}.$$

Tính chất 11: Xét hàm số $f(x)$ với $x \in D$ và giả sử tồn tại $\min_{x \in D_1} f(x), \max_{x \in D_2} f(x)$,

trong đó $D_1 = \{x \in D : f(x) > 0\}; D_2 = \{x \in D : f(x) \leq 0\}$.

$$\text{Khi đó ta có: } \min_{x \in D} |f(x)| = \min \left\{ \min_{x \in D_1} f(x); \left| \max_{x \in D_2} f(x) \right| \right\}.$$

Chứng minh: Vì $D_1 = \{x \in D \mid f(x) > 0\}$ nên $|f(x)| = f(x), \forall x \in D_1$.

$$\text{Theo giả thiết tồn tại } \min_{x \in D_1} |f(x)| \text{ và } \min_{x \in D_1} |f(x)| = \min_{x \in D_1} f(x). \quad (1)$$

Lại theo giả thiết thì tồn tại $\max_{x \in D_2} f(x)$, tức là $f(x) \leq \max_{x \in D_2} f(x), \forall x \in D_2$,

$$\text{hay } -f(x) \geq \min_{x \in D_2} f(x), \forall x \in D_2. \quad (2)$$

$$\text{Do } D_2 = \{x \in D \mid f(x) \leq 0\} \text{ nên từ (2) suy ra } |f(x)| \geq \left| \max_{x \in D_2} f(x) \right|, \forall x \in D_2. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác, giả sử } \max_{x \in D_2} f(x) = f(x_0), x_0 \in D_2 \text{ nên ta có } |f(x_0)| = \left| \max_{x \in D_2} f(x) \right| \quad (4)$$

Từ (3), (4) và theo định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số, ta thu được

$$\min_{x \in D_2} (|f(x)|) = \left| \max_{x \in D_2} f(x) \right|. \quad (5)$$

Áp dụng nguyên lý phân rã (tính chất 4) kết hợp với (1), (5) ta có

$$\min_{x \in D} |f(x)| = \min \left\{ \min_{x \in D_1} f(x); \min_{x \in D_2} |f(x)| \right\} = \min \left\{ \min_{x \in D_1} f(x); \left| \max_{x \in D_2} f(x) \right| \right\}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Chương 2.

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Phương pháp này sử dụng trực tiếp định nghĩa của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Để làm được điều này ta cần tìm các giá trị M, m để có bất đẳng thức $f(x) \leq M$ hoặc $f(x) \geq m \forall x \in D$, ở đây D là miền mà trên đó ta cần xác định giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số $f(x)$. Sau đó ta còn có nhiệm vụ là chỉ ra dấu bằng xảy ra nếu như chọn được $x_0 \in D$ để có $f(x_0) = M$ hoặc $f(x_0) = m$.

Vì có rất nhiều phương pháp để chứng minh bất đẳng thức (như sử dụng bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacopski, phương pháp xuất phát từ các bất đẳng thức đã biết, phương pháp nhóm hoặc thêm bớt các số hạng...).

Trong chương này chúng ta sẽ lần lượt xét các phương pháp cơ bản nhất sử dụng bất đẳng thức để giải bài toán đặt ra.

§1. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1.1. Sử dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản

Ta gọi hai bất đẳng thức thông dụng sau đây là các bất đẳng thức Côsi cơ bản:

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \text{ với mọi } a > 0, b > 0. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b.$$

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ với mọi } a > 0, b > 0, c > 0.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c.$$

Rất nhiều bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số quy về việc sử dụng hai bất đẳng thức nói trên.

Bài 1: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau:

$$P = 1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{y+1} + 1 - \frac{1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$[(x+1) + (y+1) + (z+1)] \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq 9. \quad (2)$$

Do $x + y + z = 1$, nên từ (2) suy ra $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4}$. (3)

Từ (1), (3) suy ra $P \leq \frac{3}{4}$. (4)

Mặt khác do dấu bằng trong (3) (tức là trong (2)) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Vậy dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Từ đó ta có $\max P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 2: Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản hai lần liên tiếp, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y+z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$.

Lí luận tương tự, có $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} \right)$, (2)

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} \right). \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2), (3) đều xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $P \leq \frac{1}{8} \left(\frac{4}{2x} + \frac{4}{2y} + \frac{4}{2z} \right)$.

Do $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \Rightarrow P \leq 1$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4} \text{ (kết hợp với điều kiện } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \text{)}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét: Thực chất bài toán tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A – 2005 có dạng sau: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

$$\text{Chứng minh bất đẳng thức } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Rõ ràng dưới dạng bất đẳng thức, bài toán dễ hơn ở chỗ là có định hướng (tức là bài toán tìm giá trị lớn nhất mà biết trước đáp số).

Bài 3: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y < 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2}{1-x} + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} + x + y.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng

$$P = (1+x) + \frac{x^2}{1-x} + (1+y) + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2 = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2 \quad (1)$$

Do $x > 0, y > 0$ và $x + y < 1 \Rightarrow 1 - x > 0, 1 - y > 0$.

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có

$$\begin{aligned} & [(1-x) + (1-y) + (x+y)] \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} \right) \geq 9 \\ \Rightarrow & \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow 1-x = 1-y = x+y \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$.

$$\text{Từ (1) (2) suy ra } P \geq \frac{5}{2}.$$

Chú ý rằng khi $x = y = \frac{1}{3}$ thì $x + y < 1$ và lúc đó $P = \frac{5}{2}$. Vậy $\min P = \frac{5}{2}$

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại biểu thức P dưới dạng:

$$\begin{aligned} P &= 1 - \frac{x+y+z}{2x+y+z} + 1 - \frac{x+y+z}{x+2y+z} + 1 - \frac{x+y+z}{x+y+2z} \\ &= 3 - (x+y+z) \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \right) \\ &= 3 - \frac{1}{4} [(2x+y+z) + (x+2y+z) + (x+y+2z)] \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\begin{aligned} &[(2x+y+z) + (x+2y+z) + (x+y+2z)] \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \right) \\ &\geq 9. \end{aligned} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow 2x+y+z = x+2y+z = x+y+2z \Leftrightarrow x=y=z$.

Từ đó thay vào (1) và có $P \leq \frac{3}{4}$. (3)

Kết hợp với $x+y+z=3$, suy ra $P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\max P = \frac{3}{4}$. Giá trị này đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 5: Cho $x > 0, y > 0$ và $x+y = \frac{4}{3}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3y}$

Hướng dẫn giải

Viết lại biểu thức P dưới dạng sau: $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3y}$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} \geq \frac{4}{x+3y}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x=3y$.

Lại theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{4}{2x} + \frac{4}{x+3y} = 4 \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+3y} \right) \geq \frac{16}{2x+(x+3y)}$$

$$\text{hay } \frac{4}{2x} + \frac{4}{x+3y} \geq \frac{16}{3x+3y}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow 2x = x + 3y \Leftrightarrow x = 3y$.

Từ (1) (2) (3) suy ra $P \geq \frac{16}{3(x+y)}$ và do $x + y = \frac{4}{3}$ nên suy ra $P \geq 4$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $\min P = 4$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = 1; y = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Xét cách giải khác cho bài toán trên như sau:

Từ $x + y = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} - y$. Do $x > 0, y > 0$ nên suy ra $\frac{4}{3} - y > 0 \Rightarrow y < \frac{4}{3}$.

Khi đó $P = \frac{3}{\frac{4}{3} - y} + \frac{1}{3y} = \frac{9}{4 - 3y} + \frac{1}{3y} = \frac{24y + 4}{-9y^2 + 12y}$.

Từ đó xét hàm số $f(y) = \frac{24y + 4}{-9y^2 + 12y}$ với $0 < y < \frac{4}{3}$.

Ta có $f'(y) = \frac{24(9y^2 + 3y - 2)}{(-9y^2 + 12y)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$		
f'(y)	0		-	0	+	
f(y)						

Vậy $\min P = \min_{0 < y < \frac{4}{3}} f(y) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = 3; y = 1$. Ta thu lại kết quả trên (với cách giải bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số). Cách giải này tính toán có phức tạp nhưng lời giải rất tự nhiên.

Bài 6: Cho bốn số thực dương x, y, z, t . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau:

$$P = \left(\frac{x-t}{t+y} + 1\right) + \left(\frac{t-y}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y-z}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z-x}{x+t} + 1\right) - 4.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+y}{t+y} + \frac{t+z}{y+z} + \frac{y+x}{z+x} + \frac{z+t}{x+t} - 4 = \left(\frac{x+y}{t+y} + \frac{y+x}{z+x} \right) + \left(\frac{t+z}{y+z} + \frac{z+t}{x+t} \right) - 4 \\
&= (x+y) \left(\frac{1}{t+y} + \frac{1}{z+x} \right) + (t+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t} \right) - 4. \quad (1)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có $\frac{1}{t+y} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{4}{t+y+z+x}$. (2)

$$\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t} \geq \frac{4}{y+z+x+t}. \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $P \geq \frac{4(x+y)}{x+y+z+t} + \frac{4(z+t)}{x+y+z+t} - 4$ hay $P \geq 0$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) và (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+y=z+x \\ y+z=x+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y>0 \\ z=t>0 \end{cases}$$

Vậy $\min P = 0$.

Bài 7: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$[(1+xy) + (1+yz) + (1+zx)] \left(\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \right) \geq 9. \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < (1+xy) + (1+yz) + (1+zx) = 3 + (xy + yz + zx) \leq 3 + (x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \Rightarrow 0 < (1+xy) + (1+yz) + (1+zx) \leq 6. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra } P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\text{Để thấy dấu bằng trong (3) xảy ra } &\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x=y=z=1.
\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta đi đến } \min P = \frac{3}{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 8: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3x-1}{x^2-1} + \frac{3y-1}{y^2-1} + \frac{3z-1}{z^2-1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{(2x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}. \quad (1)$$

Từ (1) và bằng các phép tính tương tự, ta đưa P về dạng sau

$$P = \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{y+1} + \frac{2}{z+1} \right) - \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \right).$$

Lại do $x + y + z = 1$, nên khi đó

$$P = \left(\frac{2}{2x+y+z} + \frac{2}{x+2y+z} + \frac{2}{x+y+2z} \right) - \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right). \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \geq \frac{4}{(x+y)+(y+z)} = \frac{4}{x+2y+z}.$$

Tương tự có $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{4}{x+y+2y}; \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{4}{2x+y+z}.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên rồi rút gọn, ta có:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{2}{2x+y+z} + \frac{2}{x+2y+z} + \frac{2}{x+y+2z} \text{ hay } P \leq 0. \quad (3)$$

Rõ ràng dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy từ (2) (3) suy ra

$\max P = 0$.

Giá trị lớn nhất đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 9: Giả sử x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}.$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, suy ra $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} = 3. \quad (1)$

Viết lại P dưới dạng sau: $P = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{y}} + \frac{1}{1+\frac{1}{z}}. \quad (2)$

Đặt $u = \sqrt{\frac{x}{yz}}; u = \sqrt{\frac{y}{zx}}; w = \sqrt{\frac{z}{xy}}$. Khi đó $u > 0, v > 0, w > 0$.

Lúc này (1) có dạng $u^2 + v^2 + w^2 = 3. \quad (3)$

Để ý rằng $uv = \frac{1}{z}$; $uw = \frac{1}{y}$; $vw = \frac{1}{x}$.

Khi đó từ (2) suy ra P có dạng $P = \frac{1}{1+uv} + \frac{1}{1+vw} + \frac{1}{1+uv}$ (4)

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P cho dưới dạng (4), với điều kiện (3)

Khi đó ta quy về bài 7. Từ đó ta có $\min P = \frac{3}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $u = v = w = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 10: Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{xy+x} + \frac{1}{yz+y} + \frac{1}{zx+z}$.

Hướng dẫn giải

Do $xyz = 1$, nên thực hiện phép đổi biến sau: $x = \frac{u}{v}$; $y = \frac{v}{w}$; $z = \frac{w}{u}$ với u, v, w

là các số dương (lúc đó rõ ràng $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ và $xyz = 1$).

$$P = \frac{1}{\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{w} + \frac{u}{v}} + \frac{1}{\frac{v}{w} \cdot \frac{w}{u} + \frac{v}{w}} + \frac{1}{\frac{w}{u} \cdot \frac{u}{v} + \frac{w}{u}} = \frac{vw}{uv+uw} + \frac{wu}{vw+vu} + \frac{uv}{wu+vw}. \quad (1)$$

Từ đó viết lại P dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{vw}{uv+uw}\right) + \left(1 + \frac{wu}{vw+uv}\right) + \left(1 + \frac{uv}{wu+vw}\right) - 3 \\ &= (uv+vw+wu) \left(\frac{1}{uv+uw} + \frac{1}{vw+uv} + \frac{1}{wu+vw} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} [(uv+uw) + (vw+uv) + (wu+vw)] \left(\frac{1}{uv+uw} + \frac{1}{vw+uv} + \frac{1}{wu+vw} \right) - 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản suy ra $P \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow uv = uw = vw \Leftrightarrow u = v = w \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Như vậy $\min P = \frac{3}{2}$. Giá trị nhỏ nhất này đạt được $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Bất đẳng thức: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ với mọi a, b, c > 0

được gọi là “Bất đẳng thức Nesbit” (cho ba số).

Nó là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Côsi cơ bản.

1.2. Phương pháp sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi

Phương pháp này thích hợp với những bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số mà có thể trực tiếp áp dụng ngay bất đẳng thức Côsi, hoặc sau những biến đổi sơ cấp đơn giản là có thể dùng được bất đẳng thức Côsi. Kỹ thuật chủ yếu là dựa vào biểu thức đầu bài cũng như các điều kiện đã cho chọn ra các số thích hợp để sau khi áp dụng bất đẳng thức Côsi với các số ấy sẽ cho ta đáp số của bài toán.

Bài 1: Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ } \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: } \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}. \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra} \Leftrightarrow \frac{y}{1+y} = \frac{z}{1+z} \Leftrightarrow y = z.$$

$$\text{Như vậy } \frac{1}{1+x} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}. \quad (2)$$

$$\text{Lập luận tương tự ta có: } \frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3), (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow x = z; x = y$.

Do các vế của (1) (2) (3) đều là số dương, nên nhân từng vế (1) (2) (3) và có

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 8 \frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}. \quad (5)$$

$$\text{Từ } (1+x)(1+y)(1+z) > 0, \text{ và từ (5) suy ra } P = xyz \leq \frac{1}{8}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ \frac{3}{1+x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Vì lẽ đó suy ra $\max P = \frac{1}{8}$.

Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 2: Cho x, y, z là các số thuộc khoảng $(0; 1)$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y} \cdot \frac{z}{1-z}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = 1 - x$; $v = 1 - y$; $w = 1 - z$.

Từ giả thiết suy ra $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$ và $u + v + w = 1$.

Lúc này biểu thức P có dạng

$$P = \frac{(1-u)(1-v)(1-w)}{uvw} = \frac{(v+w)(u+w)(u+v)}{uvw}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $v + w \geq 2\sqrt{vw}$; $u + w \geq 2\sqrt{uw}$;
 $u + v \geq 2\sqrt{uv}$.

Từ đó suy ra $(v + w)(u + w)(u + v) \geq 8uvw$ nên từ (1) ta có: $P \geq 8$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow u = v = w \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$.

Như vậy $\min P = 8$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Bài 3: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P =$

$$\frac{1}{2x^2 + y^2 + 3} + \frac{1}{2y^2 + z^2 + 3} + \frac{1}{2z^2 + x^2 + 3}.$$

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$2x^2 + y^2 + 3 = (x^2 + y^2) + (x^2 + 1) + 2 \geq 2xy + 2x + 2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{2x^2 + y^2 + 3} \leq \frac{1}{2xy + 2x + 2}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$.

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1}{2y^2 + z^2 + 3} \leq \frac{1}{2yz + 2y + 2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2z^2 + x^2 + 3} \leq \frac{1}{2xz + 2z + 2}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z = 1$; $z = x = 1$.

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} \right). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Do } xyz = 1, \text{ nên ta có } \frac{1}{yz + y + 1} = \frac{x}{xyz + xy + x} = \frac{x}{xy + x + 1}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{zx + z + 1} = \frac{xy}{(xyz)x + xyz + xy} = \frac{xy}{xy + x + 1}. \quad (6)$$

Thay (5) (6) vào (4) và có $P \leq \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra $\max P = \frac{1}{2}$.

Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy}$.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện $x + y + z = 1$, ta có $x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(x + z)$.

Tương tự, ta cũng có: $y + zx = (y + z)(y + x)$; $z + xy = (z + x)(z + y)$.

$$\text{Từ đó suy ra } P = \sqrt{(x + y)(x + z)} + \sqrt{(y + z)(y + x)} + \sqrt{(z + x)(z + y)}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, từ (1) có:

$$P \leq \frac{(x + y) + (x + z)}{2} + \frac{(y + z) + (y + x)}{2} + \frac{(z + x) + (z + y)}{2} \text{ hay } P \leq 2(x + y + z) = 2.$$

$$\text{Như vậy } P \leq 2. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x + z \\ y + z = y + x \\ z + x = z + y \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có } \max P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Bài 5: Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ giả thiết } x + y + z = xyz, \text{ ta có } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}; w = \frac{1}{z} \Rightarrow u > 0, v > 0, w > 0.$$

$$\text{Khi đó (1) có dạng } uv + vw + wu = 1 \quad (2)$$

Lúc này biểu thức P có dạng $P = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{w}{\sqrt{1+w^2}}.$ (3)

Từ điều kiện (2), ta có $u^2 + 1 = (u + v)(u + w)$

$$v^2 + 1 = (v + u)(v + w)$$

$$w^2 + 1 = (w + u)(w + v),$$

lúc này P có dạng: $P = \frac{u}{\sqrt{(u+v)(u+w)}} + \frac{v}{\sqrt{(v+w)(v+u)}} + \frac{w}{\sqrt{(w+u)(w+v)}}$

$$= \sqrt{\frac{u}{u+v}} \sqrt{\frac{u}{u+w}} + \sqrt{\frac{v}{v+w}} \sqrt{\frac{v}{v+u}} + \sqrt{\frac{w}{w+u}} \sqrt{\frac{w}{w+v}} \quad (1)$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u+v} + \frac{u}{u+w} + \frac{v}{v+w} + \frac{v}{v+u} + \frac{w}{w+u} + \frac{w}{w+v} \right) \text{ hay } P \leq \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} u = v = w \\ uv + vw + wu \end{cases}$

$$\Leftrightarrow u = v = w = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}.$$

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$. Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$

Nhận xét: Xét cách giải bằng phương pháp lượng giác hóa sau đây:

Do $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$ nên đặt $x = \cot A, y = \cot B; z = \cot C$

với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

khi đó ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1 \Leftrightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

$$\Leftrightarrow \tan A (\tan B + \tan C) = 1 - \tan B \tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A = \frac{1 - \tan B \tan C}{\tan B + \tan C} = \cot(B + C) \Leftrightarrow A + B + C = \frac{\pi}{2}.$$

Khi đó P có dạng:

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 B}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 C}} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Theo lượng giác, ta có $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{A + B + C}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy $P \leq \frac{3}{2}$ và dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Ta thu lại kết quả trên.

Bài 6: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} + \frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} + \frac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$.

Hướng dẫn giải

Do $x + y + z = 1$, nên $\frac{x+y}{\sqrt{xy+z}} = \frac{1-z}{\sqrt{xy+1-x-y}} = \frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$.

Tương tự, ta có $\frac{y+z}{\sqrt{yz+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}$; $\frac{z+x}{\sqrt{zx+y}} = \frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P = \frac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} + \frac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}} + \frac{1-y}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(1-z)(1-x)(1-y)}{(1-x)(1-y)(1-z)}} = 3.$$

Vậy $P \geq 3$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow 1-x = 1-y = 1-z \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$ (kết hợp với $x + y + z = 1$)

Như vậy $\min P = 3$. Giá trị nhỏ đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 7: Cho x, y, z là ba số thực dương và $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^2+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^2+x^2}}{zx}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P \geq \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^2}}}{xy} + \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{y^2z^2}}}{yz} + \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{z^2x^2}}}{zx} \text{ hay } P \geq \sqrt{\frac{3}{xy}} + \sqrt{\frac{3}{yz}} + \sqrt{\frac{3}{zx}}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$

$$\text{Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có: } \sqrt{\frac{3}{xy}} + \sqrt{\frac{3}{yz}} + \sqrt{\frac{3}{zx}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2y^2z^2}}}. \quad (2)$$

Do $xyz = 1$, nên từ (1) (2) suy ra $P \geq 3\sqrt{3}$ (3)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ nên kết hợp với trên suy ra dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (vì $xyz = 1$)

Như vậy từ (3) có $\min P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Bài thi tuyển sinh vào Đại học Cao đẳng khối D – 2005 ra dưới dạng bất đẳng thức sau đây:

Cho x, y, z là ba số thực dương và $xyz = 1$. Chứng minh $P \geq 3\sqrt{3}$ ở đây P có dạng như trên.

Rõ ràng ra dưới dạng này thực chất là bài toán trên nhưng “dễ hơn” vì biết trước đáp số.

Bài 8: Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ta đưa biểu thức P về dạng:

$$P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$2 = 2x^2 + (1-x^2) + (1-x^2) \geq 3\sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow 8 \geq 27.2x^2(1-x^2)^2 \Rightarrow \frac{4}{27} \geq x^2(1-x^2)^2. \quad (2)$$

$$\text{Vì } 0 < x < 1, \text{ nên từ (2) suy ra } x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{x(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \leq \frac{x}{1-x^2}. \quad (3) \text{ (do } x > 0)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra } \Leftrightarrow 2x^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (do } x > 0).$$

$$\text{Lập luận tương tự, có } \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \leq \frac{y}{1-y^2}, \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \leq \frac{z}{1-z^2}. \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) (5) tương ứng xảy ra } \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ và } z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Cộng từng vế (3) (4) (5) và do } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ nên có } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (6)$$

$$\text{Dấu bằng trong (6) xảy ra } \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5)}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } \min P = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất này đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét: Xét bài toán sau:

Cho x, y, z là ba số thực dương thuộc khoảng $(0; 1)$ và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

Với bài toán này ta sẽ phối hợp phương pháp “lượng giác hóa” và sử dụng bất đẳng thức Côsi như sau: Do $x > 0, y > 0, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$

nên đặt $x = \tan \frac{A}{2}; y = \tan \frac{B}{2}; z = \tan \frac{C}{2}$ với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Từ } \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Lại có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\tan A + \tan B + \tan C). \end{aligned} \quad (2)$$

Do A, B, C có thể coi là ba góc trong tam giác, nên ta có:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\text{Do } 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1 \Rightarrow \tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) (3) suy ra } (\tan A + \tan B + \tan C)^3 \geq 27(\tan A + \tan B + \tan C)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (2) (4) suy ra } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow \tan A = \tan B = \tan C = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 9: Cho $x > 0$; $y > 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$

Hướng dẫn giải

Do $x + y = 1$, ta có $1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Vì vậy biểu thức P có dạng mới sau đây:

$$P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy} = \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{xy} = 4 + \frac{3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3}{xy} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{3xy}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^3 + y^3}{xy}} = 2\sqrt{3}. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3xy}{x^3 + y^3} = \frac{x^3 + y^3}{xy} \Leftrightarrow \frac{xy}{x^3 + y^3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Kết hợp với $x + y = 1$, $x > 0$, $y > 0$ suy ra dấu bằng xảy ra trong (2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2}; y = \frac{1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2} \end{cases}$$

(Bạn đọc tự nghiệm lấy bằng cách giải hệ phương trình)

Từ đó kết hợp với (1) (2) suy ra $\min P = 4 + 2\sqrt{3}$.

Nhận xét: Xét cách giải khác bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số sau đây

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x + y)^2 - 3xy} + \frac{1}{xy}, \text{ hay}$$

$$P = \frac{1}{1 - 3xy} + \frac{1}{xy}. \quad (3)$$

$$\text{Đặt } xy = t. \text{ Do } xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \text{ nên suy ra } 0 < t \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Từ đó xét hàm số } f(t) = \frac{1}{1 - 3t} + \frac{1}{t} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{3}{(1 - 3t)^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{-6t^2 + 6t - 1}{t^2(1 - 3t)^2}.$$

Vậy có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$				

Như thế

$$\min P = \min_{0 < t \leq \frac{1}{4}} f(t) = f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{1 - \frac{3-\sqrt{3}}{2}} + \frac{6}{3-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 4 + 2\sqrt{3}$$

Ta thu lại kết quả trên.

Bài 10: Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } x + y = 1 \text{ nên } P = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: } \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{x} & (2) \\ \frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{y} & (3) \end{cases}$$

Cộng từng vế (2) (3) và để ý đến (1), ta có $P + \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$\Rightarrow P \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3)

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác cũng do } x + y = 1, \text{ nên } P = \frac{1-y}{\sqrt{y}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad (5)$$

$$\text{Cộng từng vế (4) (5) và có } 2P \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad (6)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{\frac{x+y}{2}}} = 2\sqrt{2}. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Từ (6) (7) suy ra $P \geq \sqrt{2}$. (8)

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)

$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Tóm lại $\min P = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét: Xét cách giải sau đây bằng cách sử dụng phương pháp “lượng giác hóa” kết hợp với “chiều biến thiên hàm số”

Do $x > 0, y > 0, x + y = 1$ nên đặt $x = \sin^2 \alpha; y = \cos^2 \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

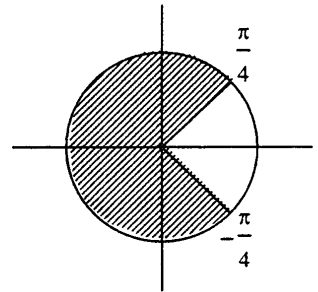
Khi đó P có dạng

$$P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (1)$$

$$\text{Do } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2}$$

nên nếu đặt $t = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ thì

$$P = \frac{t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right)}{\frac{t^2 - 1}{2}} = \frac{t(3 - t^2)}{t^2 - 1}. \quad (*)$$



$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 < t \leq \sqrt{2}.$$

Từ (*) suy ra xét hàm số $f(t)$ với $1 < t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-t^4 - 3}{(t^2 - 1)^2}$, nên có bảng biến thiên sau

t	1	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		-
$f(t)$		

$$\text{Vậy } \min P = \min_{1 \leq t \leq \sqrt{2}} f(t) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi:

$$t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Ta thu lại kết quả trên. Bạn thích cách giải nào hơn?

Bài 11: Cho $x > 1, y > 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau $P = \frac{x^2(x-1) + y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$. (1)

Từ $x > 1, y > 1$ nên theo bất đẳng thức Côsi và từ (1) ta có

$$P \geq \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}} = 2 \frac{x}{\sqrt{(x-1) \cdot 1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{(y-1) \cdot 1}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1}$. (3)

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\sqrt{(x-1) \cdot 1} \leq \frac{(x-1)+1}{2} = \frac{x}{2}$, (3)

$$\sqrt{(y-1) \cdot 1} \leq \frac{(y-1)+1}{2} = \frac{y}{2}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3) (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$ và $y = 2$.

Thay (3) (4) vào (2) và có $P \geq 2 \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{2y}{y} = 8$.

Mặt khác khi $x = y = 2$ thì (3) thỏa mãn, vậy ta có $P \geq 8$, và $P = 8 \Leftrightarrow x = y = 2$

Như vậy $\min P = 8$. Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow x = y = 2$

Bài 12: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2}$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi thì $1 + y^2 \geq 2y$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\frac{x}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.

Tương tự, ta có $\frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}$, (4)

$$\frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4), (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = 1$ và $x = 1$.

Cộng từng với (3) (4) (5) và có $P \geq (x + y + z) - \frac{1}{2}(xy + yz + zx)$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5)
 $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Mặt khác vẫn theo bất đẳng thức Côsi, ta có $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$.

Vì $x + y + z = 3 \Rightarrow xy + yz + zx \leq 3$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (6) (7) đi đến $P \geq \frac{3}{2}$. (8)

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)
 $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Như vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 13: Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{x}{y+z} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{y}{z+x} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{z}{x+y} + \frac{1}{2} \right).$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } P = \frac{(2x+y+z)(2y+z+x) + (2z+x+y)}{8(x+y)(y+z)(z+x)}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$2x + y + z = (x + y) + (x + z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}, \quad (2)$$

$$2y + z + x = (y + z) + (y + x) \geq 2\sqrt{(y+z)(x+y)}, \quad (3)$$

$$2z + x + y = (z + x) + (z + y) \geq 2\sqrt{(z+x)(z+y)}. \quad (4)$$

Nhân từng vế của (2) (3) (4) và từ (1) suy ra $P \geq 1$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x+z \\ y+z=y+x \\ z+x=z+y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z>0$$

Từ đó suy ra $\min P = 1$.

Bài 14: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $xyz = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{3}{x+y+z}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } P \text{ dưới dạng } P = \frac{x+y+z}{xyz} + \frac{3}{x+y+z}. \quad (1)$$

$$\text{Do } xyz = 1, \text{ nên } P = (x + y + z) + \frac{3}{x + y + z}. \quad (2)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3. \quad (3)$$

Từ đó viết lại (2) dưới dạng sau

$$\begin{aligned} P &= (x + y + z) + \frac{3}{(x + y + z)} - 4 + 4 = \frac{(x + y + z)^2 - 4(x + y + z) + 3}{x + y + z} + 4 \\ &= \frac{(x + y + z - 1)(x + y + z - 3)}{x + y + z} + 4. \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Do } x + y + z \geq 3, \text{ nên từ (4) suy ra } P \geq 4. \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra } \Leftrightarrow x + y + z = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1 \text{ (dựa vào (3))}$$

$$\text{Vậy } \min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Nhận xét:

1. Nếu từ (2) sử dụng bất đẳng thức

$$P = x + y + z + \frac{3}{x + y + z} \geq 2\sqrt{(x + y + z) \cdot \frac{3}{x + y + z}} = 2\sqrt{3} \quad (*)$$

Từ đó kết luận $\min P = 2\sqrt{3}$ là sai lầm. Lí do ở chỗ là dấu bằng trong (*) không xảy ra do $x + y + z = 1$ nên $x + y + z$ không thể bằng $\frac{3}{x + y + z}$

(nói cách khác phần 2 trong định nghĩa giá trị nhỏ nhất không thỏa mãn)

2. Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi từ (2) bằng cách nhóm thích hợp các số hạng (xem trong mục 1.3 dưới đây)

3. Ta có thể sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải như sau:

$$\text{Đặt } t = x + y + z.$$

$$\text{Từ (2) suy ra xét hàm số } f(t) = t + \frac{3}{t} \text{ với } t \geq 3.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{3}{t^2} = \frac{t^2 - 3}{t^2} > 0 \text{ (do } t \geq 3).$$

$$\text{Vậy } f(t) \text{ là hàm đồng biến khi } t \geq 3 \text{ nên } \min_{t \geq 3} P = \min_{t \geq 3} f(t) = f(3) = 4.$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi trong (3) có dấu bằng

$$\Leftrightarrow x + y + z = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Ta thu lại kết quả trên. Như vậy có ít nhất 3 phương pháp giải bài 14.

Bài 15: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y \geq 4$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2}.$$

Hướng dẫn giải

Đưa biểu thức P về dạng

$$P = \frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} + y = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8}\right) + \frac{x+y}{2}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 1, \quad (2)$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8} \geq 3\sqrt{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{8} \cdot \frac{y}{8}} = \frac{3}{4}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2.$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{y}{8} \Leftrightarrow y = 2.$

Từ (2) (3) và giả thiết $x + y \geq 4$, ta có (dựa vào (1)) $P \geq \frac{9}{2}. \quad (4)$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) và $x + y = 4$
 $\Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $\min P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = 2.$

1.3. Phương pháp thêm bớt hằng số

Để sử dụng được phương pháp này vấn đề mấu chốt là ở chỗ cần chọn hằng số như thế nào để có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi vào bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đặt ra. Xét các bài toán minh họa sau đây:

Bài 1: Cho $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau $P = \frac{xy\sqrt{z-4} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz}.$

Hướng dẫn giải

Đưa P về dạng sau $P = \frac{\sqrt{z-4}}{z} + \frac{\sqrt{x-2}}{x} + \frac{\sqrt{y-3}}{y}. \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{z-4} = \frac{1}{2}\sqrt{(z-4) \cdot 4} \leq \frac{1}{2} \frac{(z-4) + 4}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-4}}{z} \leq \frac{1}{4}, \quad (1)$$

$$\sqrt{x-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2) \cdot 2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x-2) + 2}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (2)$$

$$\sqrt{y-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(y-3) \cdot 3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(y-3) + 3}{2} = \frac{y}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-3}}{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (1) (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = 8; x = 4; y = 6$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$\Leftrightarrow x = 4; y = 6; z = 8$.

Vậy $\max P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) \Leftrightarrow x = 4, y = 6, z = 8$.

Bài 2: Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z = \frac{3}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+3z} + \sqrt[3]{z+3x}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt[3]{x+3y} = \sqrt[3]{(x+3y) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{x+3y+1+1}{3}, \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{y+3z} = \sqrt[3]{(y+3z) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{y+3z+1+1}{3}, \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{z+3x} = \sqrt[3]{(z+3x) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{z+3x+1+1}{3}. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $P \leq \frac{4(x+y+z)+6}{3}$. (4)

Do $x + y + z = \frac{3}{4}$ nên từ (4) suy ra $P \leq 3$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) và $x + y + z = \frac{3}{4}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ y+3z=1 \\ z+3x=1 \\ x+y+z=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{4}.$$

Từ đó ta có $\max P = 3$. Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{4}$.

Bài 3: Cho $x > 0; y > 0; z > 0$ và $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{(1-x) \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{(1-y) \cdot \frac{2}{3}} + \sqrt{(1-z) \cdot \frac{2}{3}} \right). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1-x+\frac{2}{3}}{2} + \frac{1-y+\frac{2}{3}}{2} + \frac{1-z+\frac{2}{3}}{2} \right) \text{ hay } P \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{5-(x+y+z)}{2} \right). \quad (2)$$

Do $x+y+z=1$, nên từ (2) suy ra $P \leq \sqrt{6}$.

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=\frac{2}{3} \\ 1-y=\frac{2}{3} \\ 1-z=\frac{2}{3} \\ x+y+z=1 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Từ đó ta có $\max P = \sqrt{6} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho x, y, z là các số dương sao cho $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } P \text{ dưới dạng sau } P = x + \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot 4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P \leq x + \frac{x+4y}{4} + \frac{x+4y+16z}{12} \text{ hay } P \leq \frac{4(x+y+z)}{3}. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y=16z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{21} \\ y=\frac{4}{21} \\ z=\frac{1}{21} \end{cases}. \quad (3)$$

Từ $x+y+z=1$ và (2) suy ra $P \leq \frac{4}{3}$.

Như vậy ta có $\max P = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x, y, z$ xác định bởi (3).

Bài 5: Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \geq y$, (1)

$$\frac{z^3}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq z. \quad (2)$$

Từ đó suy ra $x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \geq x + y + z$. (3)

Từ (3) suy ra $P + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \geq x + y + z$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ z^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 1. \quad (\text{do } y > 0)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có $x + y + z \geq \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Lại do $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ nên từ (4) (5) suy ra $P + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \geq 3$

$$\Rightarrow P \geq 3 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{11}{6}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Như vậy ta có $\min P = \frac{11}{6} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét:

1. Ta có thể viết $\min P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

2. Hoàn toàn tương tự ta có bài toán sau:

Cho x, y, z, t là các số thực dương sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 4$.

Xét đại lượng $P = x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{t^4}{4}$. Khi đó ta có $\min P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Các bạn thử giải xem có đúng như vậy không?

3. Bài toán 5 có các dạng tương đương sau:

a. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$,

b. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y} + \frac{1-z}{z} = 0.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}}$ (với bài toán này ta có

$$\text{đáp số } \max Q = \frac{6}{11}).$$

Bài 6: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 1 \geq \frac{3}{xy}$, (1)

$$\frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 1 \geq \frac{3}{yz}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} + 1 \geq \frac{3}{zx}. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $2P + 3 \geq 3 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ giả thiết $x + y + z = 3xyz \Leftrightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3$. (5)

Thay (5) vào (4) và có $2P + 3 \geq 9$ hay $P \geq 3$. (6)

Từ đó suy ra $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 7: Cho $0 \leq x \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = 13\sqrt{x^2(1-x^2)} + 9\sqrt{x^2(1+x^2)} = \frac{13}{2}\sqrt{4x^2(1-x^2)} + \frac{9}{6}\sqrt{9x^2 \cdot 4(1+x^2)} \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \sqrt{4x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2 + 4(1-x^2)}{2} = \frac{4-3x^2}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{9x^2 \cdot 4(1+x^2)} \leq \frac{9x^2 + 4(1+x^2)}{2} = \frac{13x^2 + 4}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) (3) và (1) suy ra } f(x) \leq \frac{13}{2} \left(\frac{4-3x^2}{2} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{13x^2 + 4}{2} \right) = 16. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - 4x^2 \\ 9x^2 = 4 + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max f(x) = 16 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Bài 8: Cho x, y, z là ba số dương và $x^4 + y^4 + z^4 = 48$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } x^4 + y^4 + z^4 + 2^4 \geq 4\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4 2^4} = 8xy^2 \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$.

$$\text{Lập luận tương tự ta có } y^4 + z^4 + z^4 + 2^4 \geq 8yz^2, \quad (2)$$

$$z^4 + x^4 + x^4 + 2^4 \geq 8zx^2. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z = 2$ và $z = x = 2$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) ta có $2(x^4 + y^4 + z^4) + 48 \geq 8P$

$$\text{hay do } x^4 + y^4 + z^4 = 48 \Rightarrow P \leq 24. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Như thế $\max P = 24$. Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Bài 9: Cho $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của hàm số } f(x) = \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{1+x} \cdot \sqrt[4]{1-x} \leq \frac{\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1+x} \cdot \sqrt[4]{1} \leq \frac{\sqrt[4]{1+x} + 1}{2}, \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1-x} \cdot \sqrt[4]{1} \leq \frac{\sqrt[4]{1-x} + 1}{2}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (1), (2), (3) xảy ra dễ thấy $\Leftrightarrow x = 0$.

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3), ta có } f(x) \leq 1 + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) $\Leftrightarrow x = 0$.

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\sqrt{1+x} = \sqrt{(1+x).1} \leq \frac{1+x+1}{2}$;

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{(1-x).1} \leq \frac{1-x+1}{2}.$$

Từ đó suy ra $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$. Từ (4) (5) suy ra $f(x) \leq 3$ (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) và (5) $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\max f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 10: Cho ba số dương x, y, z và thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} = 3$ (*)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^6}{y^3} + \frac{y^6}{z^3} + \frac{z^6}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{x^6}{y^3} + \frac{y^6}{z^3} + 1 \geq 3 \frac{x^2y}{z}, \quad (1)$$

$$\frac{y^6}{z^3} + \frac{z^6}{x^3} + 1 \geq 3 \frac{y^2z}{x}, \quad (2)$$

$$\frac{z^6}{x^3} + \frac{x^6}{y^3} + 1 \geq 3 \frac{z^2x}{y}. \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x^6}{y^3} = \frac{y^6}{z^3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ z = y^2 \end{cases}$$

$$\text{Tương tự dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ x = z^2 \end{cases}$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } 2P + 3 \geq 3 \left(\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \right). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) và thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ điều kiện (*) suy ra $2P + 3 \geq 9$ hay $P \geq 3$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Như vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 11: Cho ba số dương x, y, z sao cho

$$\frac{xy}{\sqrt[3]{(y+z)(z+x)}} + \frac{yz}{\sqrt[3]{(z+x)(x+y)}} + \frac{zx}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \quad (*)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{1}{2} \geq \frac{3xy}{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{(y+z)(z+x)}}}, \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} + \frac{1}{2} \geq \frac{3yz}{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{(z+x)(x+y)}}}, \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{x+y} + \frac{x^3}{y+z} + \frac{1}{2} \geq \frac{3zx}{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{(x+y)(y+z)}}}. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và để ý đến điều kiện (*), ta có

$$2P + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{9}{2} \text{ hay } P \geq \frac{3}{2}. \quad (4)$$

Để thấy dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Như vậy ta có $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 12: Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{2+4^x} + \sqrt{2+4^y} + \sqrt{2+4^z}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } P \text{ dưới dạng } P = \sqrt{1+1+4^x} + \sqrt{1+1+4^y} + \sqrt{1+1+4^z}. \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } 1+1+4^x \geq 3\sqrt[3]{4^x}, \quad (2)$$

$$1+1+4^y \geq 3\sqrt[3]{4^y}, \quad (3)$$

$$1+1+4^z \geq 3\sqrt[3]{4^z}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (2) (3) (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow x = 0; y = 0; z = 0$.

$$\text{Từ (1) (2) (3) ta có } P \geq \sqrt{3} \left(\sqrt[3]{4^x} + \sqrt[3]{4^y} + \sqrt[3]{4^z} \right). \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\sqrt[3]{4^x} + \sqrt[3]{4^y} + \sqrt[3]{4^z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{4^x} \cdot \sqrt[3]{4^y} \cdot \sqrt[3]{4^z}}$,

$$\text{hay } \sqrt[6]{4^x} + \sqrt[6]{4^y} + \sqrt[6]{4^z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt[6]{4^{x+y+z}}} \quad (6)$$

$$\text{Do } x + y + z = 0 \Rightarrow 4^{x+y+z} = 1, \text{ nên từ (6) có } \sqrt[6]{4^x} + \sqrt[6]{4^y} + \sqrt[6]{4^z} \geq 3 \quad (7)$$

$$\text{Dấu bằng trong (7) xảy ra } \Leftrightarrow 4^x = 4^y = 4^z \Leftrightarrow x = y = z = 0 \text{ (do } x + y + z = 0 \text{)}.$$

$$\text{Từ (5) (7) có } P \geq 3\sqrt{3}. \quad (8)$$

$$\text{Dấu bằng trong (8) xảy ra } \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (5), (7)}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

$$\text{Tóm lại } \min P = 3\sqrt{3}. \text{ Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi } x = y = z = 0.$$

$$\text{Bài 13: Cho } x > 0, y > 0 \text{ và thỏa mãn điều kiện } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} = 3.$$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = 27x^3 + 8y^3.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x^3}{8} + 1 + 1 \geq 3\frac{x}{2}, \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{27} + 1 + 1 \geq 3\frac{y}{3}, \quad (2)$$

$$\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27} + 1 \geq 3\frac{xy}{6}. \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) (2) (3) tương ứng xảy ra khi } x = 2; y = 3; x = 2; y = 3.$$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3), ta có } 2\left(\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27}\right) + 5 \geq 3\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6}\right).$$

$$\text{Do } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} = 3, \text{ ta có } \left(\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27}\right) \geq 2,$$

$$\Rightarrow P = 27x^3 + 8y^3 \geq 432. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra } \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) và thỏa mãn điều kiện}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} = 3 \Leftrightarrow x = 2; y = 3.$$

$$\text{Vậy } \min P = 432. \text{ Giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = 2; y = 3.$$

Nhận xét: Các bạn hãy thử tự giải bài toán tương tự sau:

$$\text{Cho } x > 0, y > 0 \text{ và } 2x + y + xy = 6.$$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = 8x^3 + y^3. \text{ Đáp số: } \min P = 16.$$

Hướng dẫn: Viết lại điều kiện $2x + y + xy = 6 \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} + \frac{xy}{2} = 3$ rồi giải như bài 13.

Bài 14: Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z + xyz = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi cho 4 số, ta có $x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 4xyz$, (1)

$$x^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4x, \quad (2)$$

$$y^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4y, \quad (3)$$

$$z^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4z. \quad (4)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) (4), và có

$$2(x^4 + y^4 + z^4) + 10 \geq 4(x + y + z + xyz). \quad (5)$$

Từ giả thiết $x + y + z + xyz = 4$, và từ (5) suy ra $P \geq 3$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) (4)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (chú ý rằng khi $x = y = z = 1$ thì $x + y + z + xyz = 4$)

Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 15: Cho $x > 0; y > 0$ và $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{xy}{4} = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4$.

Hướng dẫn giải

Viết lại giả thiết dưới dạng $2x + 2y + xy = 12$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 \geq 4.8x$, (2)

$$x^4 + y^4 + 2^4 + 2^4 \geq 4.4xy, \quad (3)$$

$$y^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 \geq 4.8y, \quad (4)$$

Cộng từng vế (1) (3) (4) và có $2P + 128 \geq 16(2x + 2y + xy)$. (5)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$ (chú ý khi $x = y = 2$ thì (1) thỏa mãn)

Vậy $\min P = 32$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = 2$.

Bài 16: Cho $x > 0; y > 0$ và $xyz^2 + xy + z^2 = 15$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + 2z^4$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $x^4 + y^4 + z^4 + z^4 \geq 4xyz^2$, (1)

$$x^4 + y^4 + 9 + 9 \geq 12xy, \quad (2)$$

$$z^4 + z^4 + 9 + 9 \geq 12z^2. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) suy ra } \frac{x^4 + y^4 + 2z^4}{4} + \frac{x^4 + y^4 + 2z^4}{12} + 3 \geq xyz^2 + xy + z^2. \quad (4)$$

$$\text{Từ giả thiết } xyz^2 + xy + z^2 = 15 \text{ và từ (4) suy ra } \frac{P}{4} + \frac{P}{12} + 3 \geq 15 \Rightarrow P \geq 36 \quad (5)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (5) xảy ra

$$\Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3} \text{ (chú ý khi đó } xyz^2 + xy + z^2 = 15)$$

$$\text{Vậy } \min P = 36 \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}.$$

Nhận xét: Ta có các bài toán tương tự sau:

1. Cho $x, y, z, t > 0$ và thỏa mãn điều kiện $xy + zt + xyz + yzt + xyt + xzxt = 7$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geq 4xyzt$

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 4xyz$$

$$y^4 + z^4 + t^4 + 1 \geq 4yzt$$

$$x^4 + z^4 + t^4 + 1 \geq 4xzt$$

$$x^4 + y^4 + t^4 + 1 \geq 4xyt$$

$$x^4 + y^4 + 1 + 1 \geq 4xy$$

$$z^4 + t^4 + 1 + 1 \geq 4zt.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên và có:

$$5P + 8 \geq 4(xy + zt + xyz + yzt + ztx + xyt + xzxt)$$

$$\Rightarrow 5P + 8 \geq 28 \Rightarrow P \geq 4 \quad (*)$$

Dấu bằng trong (*) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Vậy $\min P = 4$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = z = t = 1$.

2. Cho $x, y, z, t \in (0; 2)$ và $xy + zt + 2(xyz + yzt + ztx + xyt) + 3xyz = 13$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi như phần 1 của chú ý ta có

$$3xyz \leq 3 \frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{4},$$

$$2(xyz + yzt + ztx + xyt) \leq 2 \frac{3(x^4 + y^4 + z^4 + t^4)}{4},$$

$$xy + zt \leq \frac{x^4 + y^4 + z^4 + 4}{4}.$$

Từ đó suy ra $P \geq 4 \Rightarrow \min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

1.4. Phương pháp thêm bớt hạng tử

Phương pháp sử dụng trong mục này, cũng tương tự như phương pháp đã dùng trong mục 1.3. Điều khác nhau chỉ là ở chỗ thay cho việc thêm bớt hằng số, thì việc thêm bớt vào biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất ở đây là các hạng tử có chứa biến! Khi sử dụng phương pháp này cần chú ý điều kiện đẳng thức xảy ra khi nào để thêm hạng tử cho phù hợp.

Bài 1: Cho x, y, z là các số thực dương và $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}.$$

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+x)(1+y)} \cdot \frac{1+x}{8} \cdot \frac{1+y}{8}}, \quad (1)$$

$$\text{hay } \frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3x}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x^3}{(1+x)(1+y)} = \frac{1+x}{8} = \frac{1+y}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 8x^3 = (1+x)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$\text{Lập luận tương tự có } \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{1+z}{8} + \frac{1+x}{8} \geq \frac{3y}{4}, \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3z}{4}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = x = 1; x = y = 1$.

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } P + \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}(x+y+z). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ (5) (do $xyz = 1$)

$$\text{Từ đó suy ra } P + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{4}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (do $xyz = 1$).

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4), (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Như vậy ta có $\min P = \frac{3}{4}$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét: Ta giải thích chút ít về lí do vì sao lại thêm vào các hạng tử như đã làm ở trên.

Với hạng tử $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}$ ta cần thêm hạng tử đảm bảo có thể khử đi mẫu số.

Đơn giản nhất là các hạng tử thêm vào có dạng $\frac{1+y}{\alpha}; \frac{1+z}{\alpha}$ với α là số dương nào đó, sau đó áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số. Để xác định α ta chú ý đến điều kiện để dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức Côsi. Lại do tính đối xứng của biểu thức P nên ta biết trước dấu bằng thường xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vì thế từ
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} = \frac{1+y}{\alpha} = \frac{1+z}{\alpha}$$
 và thay $x = y = z = 1$, ta có $\alpha = 8$.

Đó chính là lí do vì sao ta thêm vào các hạng tử như trên!

Bài 2. Cho x, y là các số dương và thỏa mãn điều kiện $xy = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:
$$\frac{x^3}{1+y} + \frac{1+y}{4} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{1+y} \cdot \frac{1+y}{4} \cdot \frac{1}{2}},$$

$$\text{hay } \frac{x^3}{1+y} + \frac{1+y}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}x. \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x^3}{1+y} = \frac{1+y}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$\text{Lập luận tương tự, ta có } \frac{y^3}{1+x} + \frac{1+x}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}y. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) và có } P + \frac{1}{2} + \frac{x+y}{4} + 1 \geq \frac{3}{2}(x+y)$$

$$\Rightarrow P + \frac{3}{2} \geq \frac{5}{4}(x+y). \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$$\text{Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x+y \geq 2\sqrt{xy} = 2 \text{ (do } xy = 1\text{)}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P + \frac{3}{2} \geq \frac{5}{2}(x+y) \Rightarrow P \geq 1. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Nhận xét: Rõ ràng phụ thêm vào hạng tử $\frac{x^3}{1+y}$, ta phải thêm vào hạng tử có

dạng $\frac{1+y}{\alpha}$ và hằng số β (chú ý do ở đây x mũ ba, và $1+y$ ở mẫu số). Ta

biết rằng dấu đẳng thức xảy ra khi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số trên là $x = y = 1$ (dựa vào tính đối xứng của P)

Từ $\frac{x^3}{1+y} = \frac{1+y}{\alpha} = \beta$ và do $x = y = 1 \Rightarrow \alpha = 4$, còn $\beta = 2$.

Đó là lí do thêm vào các hạng tử và hằng số như đã làm ở trên.

Bài 3. Cho x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+t} + \frac{t^2}{t+x}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{4}} = x$

$$\text{hay } \frac{x^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq x \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+y} = \frac{x+y}{4} \Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Lập luận tương tự có: } \frac{y^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq y, \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{z+t} + \frac{z+t}{4} \geq z, \quad (3)$$

$$\frac{t^2}{t+x} + \frac{t+x}{4} \geq t. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (2) (3) (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z; z = t; t = x$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) (4) và có $P + \frac{x+y+z+t}{2} \geq x + y + z + t$,

$$\text{hay } P \geq \frac{1}{2} \quad (5) \quad (\text{do } x + y + z + t = 1)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z = t = \frac{1}{4} \quad (\text{do } x + y + z + t = 1).$$

Vậy $\min P = \frac{1}{2}$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{1}{4}$.

Bài 4. Giả sử $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx \geq 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{y^3}{\sqrt{z^2+3}} + \frac{z^3}{\sqrt{x^2+3}}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{y^2+3}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} \cdot \frac{y^2+3}{8}},$$

hay $\frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \frac{y^2+3}{8} \geq 3\frac{x^2}{2}. \quad (1)$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} = \frac{y^2+3}{8} \Leftrightarrow 8x^3 = (y^2+3)\sqrt{y^2+3}$

$$\Leftrightarrow 64x^6 = (y^2+3)^3 \Leftrightarrow 4x^2 = y^2+3.$$

Lập luận tương tự, có $\frac{y^3}{\sqrt{z^2+3}} + \frac{y^3}{\sqrt{z^2+3}} + \frac{z^2+3}{8} \geq 3\frac{y^2}{2}, \quad (2)$

$$\frac{z^3}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{z^3}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{x^2+3}{8} \geq 3\frac{z^2}{2}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra khi $4y^2 = z^2+3$ và $4z^2 = x^2+3$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $2P + \frac{x^2+y^2+z^2}{8} + \frac{9}{8} \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2). \quad (4)$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = y^2+3 \\ 4y^2 = z^2+3 \\ 4z^2 = x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Ta lại có $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \geq 3. \quad (5)$

Từ đó suy ra $2P + \frac{9}{8} \geq \frac{11}{8}(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{33}{8} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}. \quad (6)$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Bài 5. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z \leq \frac{3}{4}.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{z+3x}}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{x+3y}} + x + 3y \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x+3y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+3y}} (x+3y)}$$

hay $\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{x+3y}} + x + 3y \geq 3.$ (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+3y}} = x+3y \Leftrightarrow x+3y = 1.$

Lí luận tương tự, ta có $\frac{1}{\sqrt{y+3z}} + \frac{1}{\sqrt{y+3z}} + y + 3z \geq 3,$ (2)

$$\frac{1}{\sqrt{z+3x}} + \frac{1}{\sqrt{z+3x}} + z + 3x \geq 3. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y + 3z = 1$ và $z + 3x = 1.$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $2P + 4(x + y + z) \geq 9$

$$\Rightarrow 2P \geq 9 - 4(x + y + z). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ y+3z=1 \\ z+3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{4}.$$

Do $x + y + z \leq \frac{3}{4}$ nên từ (4) suy ra $2P \geq 6 \Rightarrow P \geq 3.$ (5)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (4) xảy ra

và $x + y + z = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{4}$

Từ đó đi đến kết luận sau $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{4}.$

Bài 6. Cho $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt[3]{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{z(x+y)}}.$$

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x(y+z)}} + \frac{x(y+z)}{2\sqrt[3]{2}} \geq 4\sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x(y+z)}} = \frac{x(y+z)}{2\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow [x(y+z)]^2 = 2^4 \Leftrightarrow x(y+z) = 2.$$

Lập luận tương tự, ta có
$$\frac{3}{\sqrt[3]{y(z+x)}} + \frac{y(z+x)}{2\sqrt[3]{2}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}, \quad (2)$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{z(x+y)}} + \frac{z(x+y)}{2\sqrt[3]{2}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng $\Leftrightarrow y(z+x) = 2; z(x+y) = 2$.

Cộng từng vế (1) (2) (3), ta có
$$3P + \frac{2(xy+yz+zx)}{2\sqrt[3]{2}} \geq \frac{12}{\sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^4}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow 3P \geq \frac{12}{\sqrt[3]{2}} - \frac{xy+yz+zx}{\sqrt[3]{2}}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+xz=2 \\ yz+xy=2 \\ xz+yz=2 \end{cases} \Leftrightarrow xy=yz=zx=1 \Leftrightarrow x=y=z=1 \text{ (do } x>0, y>0, z>0).$$

Ta có $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2=3$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Từ (4) (5) ta có $3P \geq \frac{12}{\sqrt[3]{2}} - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{9}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) (5)

$$\Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Như thế $\min P = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 7. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^6}{x^3+y^3} + \frac{y^6}{y^3+z^3} + \frac{z^6}{z^3+x^3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $X = x^3, Y = y^3, Z = z^3$.

Khi đó ta có $\sqrt{XY} + \sqrt{YZ} + \sqrt{ZX} = 1$. (1)

Lúc đó $P = \frac{X^2}{X+Y} + \frac{Y^2}{Y+Z} + \frac{Z^2}{Z+X}$. (2)

Bài toán đã cho trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của P (dưới dạng (2)) với điều kiện (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:
$$\begin{cases} \frac{X^2}{X+Y} + \frac{X+Y}{4} \geq X & (3) \\ \frac{Y^2}{Y+Z} + \frac{Y+Z}{4} \geq Y & (4) \\ \frac{Z^2}{Z+X} + \frac{Z+X}{4} \geq Z & (5) \end{cases}$$

Dấu bằng trong (3) (4) (5) tương ứng xảy ra khi $X = Y$; $Y = Z$; $Z = X$.

Cộng từng vế (3) (4) (5) và có $P + \frac{X+Y+Z}{2} \geq X+Y+Z$

$$\Rightarrow P \geq \frac{X+Y+Z}{2}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5)
 $\Leftrightarrow X = Y = Z$.

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$X+Y+Z \geq \sqrt{XY} + \sqrt{YZ} + \sqrt{ZX} = 1 \quad (\text{theo (1)})$$

$$(\text{dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow X = Y = Z = \frac{1}{3})$$

$$\text{Từ đó theo (6) suy ra } P \geq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Như vậy ta có $\min P = \frac{1}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Nhận xét: Xét bài toán tương tự:

Cho $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ và $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{x^3(y+z)} + \frac{2}{y^3(z+x)} + \frac{2}{z^3(x+y)}.$$

Lời giải như sau: Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$; $Z = \frac{1}{z}$.

Khi đó P có dạng

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\frac{1}{X^3}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right)} + \frac{2}{\frac{1}{Y^3}\left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{X}\right)} + \frac{2}{\frac{1}{Z^3}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right)} = \frac{X^3YZ}{Y+Z} + \frac{XY^3Z}{Z+X} + \frac{Z^3}{X+Y} \\ &= \frac{X^2}{Y+Z} + \frac{Y^2}{Z+X} + \frac{Z^2}{X+Y} \quad (\text{do } XYZ = 1) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:
$$\begin{cases} \frac{X^2}{Y+Z} + \frac{Y+Z}{4} \geq X & (1) \\ \frac{Y^2}{Z+X} + \frac{Z+X}{4} \geq Y & (2) \\ \frac{Z^2}{X+Y} + \frac{X+Y}{4} \geq Z & (3) \end{cases}$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) có $P + \frac{X+Y+Z}{2} \geq X+Y+Z$

$$\Rightarrow P \geq \frac{X+Y+Z}{2}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $X+Y+Z \geq 3\sqrt[3]{XYZ} = 3$ (do $XYZ = 1$)

Từ đó suy ra $P \geq \frac{3}{2}$ (5)

Để thấy dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 8. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $X = \frac{1}{x}; Y = \frac{1}{y}; Z = \frac{1}{z}$.

Từ giả thiết ta có $X > 0, Y > 0, Z > 0$ và $XY + YZ + ZX = 3$. (*)

Lúc này dễ thấy $P = \frac{X^3}{Y+2Z} + \frac{Y^3}{Z+2X} + \frac{Z^3}{X+2Y}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{9X^3}{Y+2Z} + (Y+2Z)X \geq 6X^2$, (1)

$$\frac{9Y^3}{Z+2X} + (Z+2X)Y \geq 6Y^2, \quad (2)$$

$$\frac{9Z^3}{X+2Y} + (X+2Y)Z \geq 6Z^2. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (1) (2) (3) tương ứng xảy ra khi và chỉ khi (do $X > 0, Y > 0, Z > 0$)

$$Y + 2Z = 3X; Z + 2X = 3Y; X + 2Y = 3Z.$$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } 9P + 3(XY + YZ + ZX) \geq 6(X^2 + Y^2 + Z^2). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \text{ (do (*))}$$

$$\text{Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có } X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX. \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (5) xảy ra } \Leftrightarrow X = Y = Z = 1.$$

$$\text{Từ (5) (4) và do } XY + YZ + ZX = 3 \text{ (theo (*)), suy ra } P \geq 1. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) (5)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy $\min P = 1$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 9. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^3}{y(z+x)} + \frac{y^3}{z(x+y)} + \frac{z^3}{x(y+z)}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{4x^3}{y(z+x)} + 2y + (z+x) \geq 6x, \quad (1)$$

$$\frac{4y^3}{z(x+y)} + 2z + (x+y) \geq 6y, \quad (2)$$

$$\frac{4z^3}{x(y+z)} + 2x + (y+z) \geq 6z. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (1) (2) (3) tương ứng xảy ra khi và chỉ khi

$$4x^3 = 2y^2(z+x); 2y = z+x$$

$$4y^3 = 2z^2(x+y); 2z = x+y$$

$$4z^3 = 2x^2(y+z); 2x = y+z$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \text{ (do } \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1).$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $4P + 4(x+y+z) \geq 6(x+y+z)$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x+y+z}{2} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$2323 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

$$\text{Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Từ (4) (5) suy ra } P \geq \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự, ta có bài toán sau:

$$\text{Cho } x > 0, y > 0, z > 0 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: } P = \frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Bằng cách sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{8x^3}{(y+z)^2} + (y+z) + (y+z) \geq 6x,$$

$$\frac{8y^3}{(z+x)^2} + (z+x) + (z+x) \geq 6y,$$

$$\frac{8z^3}{(x+y)^2} + (x+y) + (x+y) \geq 6z.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P \geq \frac{x+y+z}{4}. \quad (*)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản ta có } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

$$\forall \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3 \Rightarrow x+y+z \geq 3. \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } P \geq \frac{3}{4}. \quad (***)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (***) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{4}. \text{ Giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = y = z = 1.$$

Bài 10. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 3$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } P > 0 \text{ trên miền xác định của nó, nên } \min P = \sqrt{\min P^2}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } P^2 = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + 2 \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + 2 \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}} + 2 \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số, ta có:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + z \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^2}{y} \cdot \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} \cdot \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} \cdot z} = 4x$$

$$\text{hay } \frac{x^2}{y} + \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} + z \geq 4x. \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}} = z \Leftrightarrow x = y = z.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \frac{y^2}{z} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}} + x \geq 4y, \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{x} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + y \geq 4z. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) đều xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

$$\begin{aligned} &\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } P^2 + (x + y + z) \geq 4(x + y + z) \\ &\Rightarrow P^2 \geq 3(x + y + z). \end{aligned} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)
 $\Leftrightarrow x = y = z$

$$\text{Lại do } x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 3,$$

$$\text{nên từ (4) có } P \geq 9. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (do $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 3$)

$$\text{Từ đó có } \min P^2 = 9. \quad (6)$$

Từ (1) (6) suy ra $\min P = 3 \Leftrightarrow xyz = 1$

Bài 11. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x = y = z = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^5}{y^2} + \frac{y^5}{z^2} + \frac{z^5}{x^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x^5}{y^2} + xy^2 \geq 2x^3. \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x^5}{y^2} = xy^2 \Leftrightarrow x = y \text{ (do } x > 0, y > 0).$$

$$\text{Tương tự có } \frac{y^5}{z^2} + yz^2 \geq 2y^3, \quad (2)$$

$$\frac{z^5}{x^2} + zx^2 \geq 2z^3. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z; z = x$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $P + (xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 2(x^3 + y^3 + z^3)$,
hay $P \geq 2(x^3 + y^3 + z^3) - (xy^2 + yz^2 + zx^2)$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1 \quad (\text{do } xyz = 1)$$

Rõ ràng ta có $x^3 + y^3 + z^3 \geq xy^2 + yz^2 + zx^2$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Từ (4) (5) suy ra $P \geq x^3 + y^3 + z^3$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz = 3$ (do $xyz = 1$)

Từ đó theo (6) suy ra $P \geq 3$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra (dễ thấy) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = 3$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét:

1. Ta chứng minh (5) như sau:

$$\begin{aligned} \text{Theo bất đẳng thức Côsi, thì} \quad x^3 + y^3 + y^3 &\geq 3xy^2 \\ y^3 + z^3 + z^3 &\geq 3yz^2 \\ z^3 + x^3 + x^3 &\geq 3zx^2. \end{aligned}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên suy ra đpcm.

2. Tương tự ta có bài toán sau:

$$\text{Cho } x > 0, y > 0, z > 0 \text{ và } xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 3.$$

$$\text{Tìm giá trị bé nhất của biểu thức } P = \frac{x^5}{yz} + \frac{y^5}{zx} + \frac{z^5}{xy}.$$

Lời giải như sau:

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x^5}{yz} + xyz \geq 2x^3, \quad (1)$$

$$\frac{y^5}{zx} + xyz \geq 2y^3, \quad (2)$$

$$\frac{z^5}{xy} + xyz \geq 2z^3. \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } P + 3xyz \geq 2(x^3 + y^3 + z^3). \quad (4)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, thì } x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz. \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) (5) suy ra } P \geq x^3 + y^3 + z^3. \quad (6)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 3. \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) (7) có } P \geq 3. \quad (8)$$

Để thấy dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 12. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $xy + yz + zx = 9$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^5}{y^3} + \frac{y^5}{z^3} + \frac{z^5}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: } \frac{x^5}{y^3} + xy \geq \frac{2x^3}{y}, \quad (1)$$

$$\frac{y^5}{z^3} + yz \geq \frac{2y^3}{z}, \quad (2)$$

$$\frac{z^5}{x^3} + zx \geq \frac{2z^3}{x}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (1) (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow x = y; y = z; z = x$.

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } P \geq 2 \left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \right) - (xy + yz + zx). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3} \quad (\text{do } xyz = 3\sqrt{3})$$

$$\text{Lại áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x^3}{y} + xy \geq 2x^2,$$

$$\frac{y^3}{z} + yz \geq 2y^2,$$

$$\frac{z^3}{x} + zx \geq 2z^2.$$

$$\text{Từ đó suy } \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx).$$

Lại do $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, nên từ trên có

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq xy + yz + zx. \quad (5)$$

$$\text{Bây giờ từ (4) (5) suy ra } P \geq xy + yz + zx = 9 \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Tóm lại ta có $\min P = 9 \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Nhận xét: Bằng cách làm tương tự, xin mời các bạn hãy tự giải các bài toán sau:

1. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4}{xy^2} + \frac{y^4}{zx^2} + \frac{z^4}{xy^2}$.

Đáp số: $\min P = 3$. Hướng dẫn: Chứng minh $P \geq x + y + z$.

2. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^5}{y^2} + \frac{y^5}{z^2} + \frac{z^5}{x^2}$.

Đáp số: $\min P = 3$. Hướng dẫn: Chứng minh $P \geq \frac{9}{x + y + z}$.

3. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{x + 2y} + \frac{y^3}{y + 2z} + \frac{z^3}{z + 2x}$.

Đáp số: $\min P = \frac{1}{9}$. Hướng dẫn: chứng minh $P \geq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Bài 13. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $2(x + y + z) = xyz^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + 2y^4 + 32\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $x^4 + y^4 + z^4 + z^4 \geq 4xyz^2$, (1)

$$8x + \frac{32}{x} \geq 32, \quad (2)$$

$$8y + \frac{32}{y} \geq 32, \quad (3)$$

$$16z + \frac{64}{z} \geq 64. \quad (4)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) (4) và có $P + 8(x + y + 2z) \geq 4xyz^2 + 128$. (5)

Do $2(x + y + 2z) = xyz^2$, nên từ (5) suy ra $P + 4xyz^2 \geq 4xyz^2 + 128$
 $\Rightarrow P \geq 128$. (6)

Để thấy dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

(chú ý lúc $x = y = z = 2$, thì $xyz^2 = 2(x + y + 2z) = 16$)

Vậy $\min P = 128 \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Bài 14. Cho x, y, z là ba số dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} - \frac{2}{27}(xy + yz + zx).$$

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2 - 2y + 4}{27} \geq \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^3 + 8} \geq \frac{9x + y - y^2 - 6}{27}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^3}{y^3 + 8} = \frac{y+2}{27} = \frac{y^2 - 2y + 4}{27}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1; \frac{x^3}{y^3 + 8} = \frac{y+2}{27} \\ y=2; \frac{x^3}{y^3 + 8} = \frac{y+2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ y=2; x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

Lập luận tương tự, ta có $\frac{y^3}{z^3 + 8} \geq \frac{9y + z - z^2 - 6}{27}, \quad (2)$

$$\frac{z^3}{x^3 + 8} \geq \frac{9z + x - x^2 - 6}{27}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y=z=1 \\ z=2; y=\frac{4}{3} \end{cases}; \begin{cases} z=x=1 \\ x=2; z=\frac{4}{3} \end{cases}$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có:

$$\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} \geq \frac{10(x + y + z) - (x^2 + y^2 + z^2) - 18}{27}. \quad (4)$$

Do $x + y + z = 3$, nên từ (4) có

$$\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} \geq \frac{30 - [(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)] - 18}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} - \frac{2}{27}(xy + yz + zx) \geq \frac{1}{9},$$

hay $P \geq \frac{1}{9}. \quad (5)$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bài 15. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^4(y+1)(z+1)} + \frac{1}{y^4(z+1)(x+1)} + \frac{1}{z^4(x+1)(y+1)}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$; $Z = \frac{1}{z}$. Khi đó do $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$, nên ta có X, Y, Z

cũng là các số dương và $XYZ = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \frac{X^4YZ}{(Y+1)(Z+1)} + \frac{Y^4ZX}{(Z+1)(X+1)} + \frac{Z^4XY}{(X+1)(Y+1)} \\ &= \frac{X^3}{(Y+1)(Z+1)} + \frac{Y^3}{(Z+1)(X+1)} + \frac{Z^3}{(X+1)(Y+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \begin{cases} \frac{X^3}{(Y+1)(Z+1)} + \frac{Y+1}{8} + \frac{Z+1}{8} \geq \frac{3X}{4} \\ \frac{Y^3}{(Z+1)(X+1)} + \frac{Z+1}{8} + \frac{X+1}{8} \geq \frac{3Y}{4} \\ \frac{Z^3}{(X+1)(Y+1)} + \frac{X+1}{8} + \frac{Y+1}{8} \geq \frac{3Z}{4}. \end{cases}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên và có $P + \frac{X+Y+Z}{4} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}(X+Y+Z)$

$$\Rightarrow P \geq \frac{X+Y+Z}{2} - \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1$.

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $X + Y + Z \geq 3\sqrt[3]{XYZ} = 3$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1$.

$$\text{Từ (1) (2) có } P \geq \frac{3}{4}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

1.5. Phương pháp nhóm các số hạng

Khi sử dụng phương pháp bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số hoặc của một biểu thức ta thường sử dụng nhiều bất đẳng thức phụ. Để đảm bảo dấu bằng trong bất đẳng thức chính xảy ra ta cần đồng thời có dấu bằng trong các bất đẳng thức phụ. Việc nhóm các số hạng trong biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) phải đảm bảo được tiêu chí này. Các bài toán trình bày sau đây sẽ thể hiện rõ điều này và chia thành hai loại sau:

Loại 1: Các phép nhóm thông dụng

Bài 1. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x} + \frac{y}{z+x} + \frac{z+x}{y} + \frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{z}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại S dưới dạng sau:

$$S = \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right). \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2,$ (2)

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2, \quad (3)$$

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (2) (3) (4) tương ứng xảy ra khi $x = y$; $y = z$ và $z = x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} &= (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} [(y+z) + (z+x) + (x+y)] \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3. \end{aligned}$$

Từ đó theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow y+z = z+x = x+y \Leftrightarrow x = y = z$.

Cộng từng vế (2) (3) (4) và có $P \geq \frac{15}{2}.$ (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4) (5)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (do $x + y + z = 3$)

Từ đó $\min P = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét:

1. Trong lời giải trên đã sử dụng phép nhóm các số hạng rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi. Đó là một phép nhóm đúng.

2. Xét phép nhóm sau đây:

Ta có thể viết lại P dưới dạng sau:

$$P = \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z+x} + \frac{z+x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{z} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x} \geq 2,$ (7)

$$\frac{y}{z+x} + \frac{z+x}{y} \geq 2, \quad (8)$$

$$\frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{z} \geq 2. \quad (9)$$

Dấu bằng trong (7) (8) (9) tương ứng xảy ra khi

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y+z}{x} \Leftrightarrow x = y + z. \quad (10) \quad (\text{do } x, y, z > 0)$$

$$\frac{y}{z+x} = \frac{z+x}{y} \Leftrightarrow y = z + x \quad (11)$$

$$\frac{z}{x+y} = \frac{x+y}{z} \Leftrightarrow z = x + y \quad (12)$$

Cộng từng vế (7) (8) (9) và có $P \geq 6$. (13)

Dấu bằng trong (13) xảy ra nếu như đồng thời có dấu bằng trong (7) (8) (9)

Tuy nhiên từ (10) (11) (12) suy ra $x + y + z = 2(x + y + z) \Rightarrow x + y + z = 0$.

Điều này không thể xảy ra vì $x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 3$.

Vậy trong (13) không có dấu bằng. Từ đó không thể kết luận $\min P = 6$.

Phép nhóm trên là không thích hợp.

Bài 2. Cho $x > 0, y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (1+x) \left(1 + \frac{1}{y} \right) + (1+y) \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Hướng dẫn giải

Nhóm các số hạng của P để đưa P về dạng sau:

$$P = 1 + x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + \frac{1}{x} + y + \frac{y}{x} = \left(x + \frac{1}{2x}\right) + \left(y + \frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $x + \frac{1}{2x} \geq \sqrt{2}$; $y + \frac{1}{2y} \geq \sqrt{2}$. (2)

Dấu bằng xảy ra trong (2) $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có theo bất đẳng thức Côsi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x = y$.

Lại có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}} = 2\sqrt{2}$. (4)

(do $x^2 + y^2 = 1$)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Từ (1) (2) (3) (4) suy ra $S \geq 3\sqrt{2} + 4$. (5)

Dấu bằng xảy ra trong (5) $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3) (4) và

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có $\min S = 3\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét: Nếu thực hiện phép nhóm sau: $S = 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

Khi đó theo bất đẳng thức Côsi, mỗi biểu thức trong ngoặc đều lớn hơn hoặc bằng 2 và ta có $S \geq 8$ (6)

Dấu bằng xảy ra trong (6) $\Leftrightarrow x = y = 1$.

Tuy nhiên khi $x = y = 1$ thì $x^2 + y^2 = 2$ không thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Vậy dấu bằng trong (6) không thể xảy ra vì ta chỉ có $S > 8$, như vậy việc tìm giá trị nhỏ nhất của S không thể suy ra từ $S > 8$.

Phép nhóm trên là không đúng.

Bài 3. Cho $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{z-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, ta có $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. (1)

Nhóm lại P dưới dạng sau

$$\begin{aligned} P &= \frac{y-2+x}{x^2} + \frac{z-2+y}{y^2} + \frac{x-2+z}{z^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{(x-1)+(y-1)}{x^2} + \frac{(y-1)+(z-1)}{y^2} + \frac{(z-1)+(x-1)}{z^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= (x-1) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \right) + (y-1) \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right) + (z-1) \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} \right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Do $x > 1, y > 1, z > 1$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P \geq \frac{2(x-1)}{xz} + \frac{2(y-1)}{yx} + \frac{2(z-1)}{zy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 2$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=x \\ z=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3} \quad (\text{do (1)})$

Lại có $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = 3 \quad (\text{do (1)})$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{3}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$

Từ (3) (4) ta có $P \geq \sqrt{3} - 2$ (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4)

$$\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}.$$

Tóm lại $\min P = \sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$.

Bài 4. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \geq 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y + \frac{6}{x} + \frac{10}{y}$.

Hướng dẫn giải

Nhóm lại P dưới dạng $P = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3x}{2} + \frac{6}{x} + \frac{5y}{2} + \frac{10}{y}$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{3x}{2} + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{6}{x}} = 6,$ (2)

$$\frac{5y}{2} + \frac{10}{y} \geq 2\sqrt{\frac{5y}{2} \cdot \frac{10}{y}} = 10. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = 2$ còn dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{5y}{2} = \frac{10}{y} \Leftrightarrow y = 2.$

Theo giả thiết, thì $\frac{1}{2}(x + y) \geq 2.$ (4)

Từ (2) (3) (4) ta có $P \geq 18.$ (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)

$\Leftrightarrow x = y = 2.$ Vậy $\min P = 18 \Leftrightarrow x = y = 2.$

Nhận xét:

1. Phép nhóm trên là thích hợp vì đã đảm bảo dấu bằng trong (2) (3) (4) đồng thời xảy ra.

2. Xét phép nhóm sau $P = \left(2x + \frac{6}{x}\right) + \left(3y + \frac{10}{y}\right).$

Ta có $2x + \frac{6}{x} \geq 4\sqrt{3},$ (6)

$$3y + \frac{10}{y} \geq 2\sqrt{30}. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ còn trong (7) xảy ra } \Leftrightarrow 3y = \frac{10}{y} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}.$$

Tuy nhiên vì $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} < 4,$ vậy không thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 4,$ tức

là dấu bằng trong (6) (7) không đồng thời xảy ra. Phép nhóm trên là không thích hợp, nên không thể kết luận được $\min S = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{30}.$

Bài 5. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + 2y + 3z \geq 20.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z = \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z}.$

Hướng dẫn giải

Viết lại biểu thức P dưới dạng

$$P = \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{x}\right) + \left(\frac{1}{2}y + \frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{1}{4}z + \frac{4}{z}\right) + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z\right). \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{3}{4}x + \frac{3}{x} = \frac{3}{4}\left(x + \frac{4}{x}\right) \geq 3, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}y + \frac{9}{2y} = \frac{1}{2}\left(y + \frac{9}{y}\right) \geq 3, \quad (3)$$

$$\frac{1}{4}z + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}\left(z + \frac{16}{z}\right) \geq 2. \quad (4)$$

$$\text{Còn theo giả thiết, thì } \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}(x + 2y + 3z) \geq 5. \quad (5)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) (4) suy ra } P \geq 13. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4) (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 3; z = 4 \\ x + 2y + 3z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2; y = 3; z = 4$$

Từ đó ta có $\min P = 13$. Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow x = 2; y = 3; z = 4$.

Nhận xét: Phép nhóm $P = \left(x + \frac{3}{x}\right) + \left(y + \frac{9}{2y}\right) + \left(z + \frac{4}{z}\right)$ là sai lầm.

Các bạn có thể tự nghiệm lại điều đó với chú ý

$$x = \sqrt{3}; y = \sqrt{\frac{9}{2}}; z = 2 \text{ không thỏa mãn } x + 2y + 3z \geq 20.$$

Bài 6. Cho $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } f(x) \text{ dưới dạng } f(x) = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right) + \frac{8x}{9}. \quad (1)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x}{9} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{9} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 3. \quad (\text{do } x > 0)$$

$$\text{Từ giả thiết } x \geq 3, \text{ ta có } \frac{8x}{9} \geq \frac{8}{3}. \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra } \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Từ (2) (3) có } f(x) \geq \frac{10}{3}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \min_{x \geq 3} f(x) = \frac{10}{3}.$$

Nhận xét:

1. Rõ ràng không thể sử dụng $x + \frac{1}{x} \geq 2$,

$$\text{vì dấu bằng không thể xảy ra do } x \geq 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq \frac{10}{3}. \quad (*)$$

$$\text{Rõ ràng từ } (*) \text{ không thể chứng minh được } x + \frac{1}{x} \geq \frac{10}{3}.$$

2. Ta lí giải vì sao lại chọn cách nhóm trên như sau:

$$\text{Thông thường ta sẽ viết } A = kx + \frac{1}{x} + (1-k)x.$$

$$\text{Khi sử dụng bất đẳng thức Côsi } kx + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{k},$$

$$\text{dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow kx = \frac{1}{x} = \sqrt{k} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (**)$$

Mặt khác nói chung dấu bằng đạt được tại các đầu mút của điều kiện.

Ở đây $x \geq 3$ thì dấu bằng thường xảy ra khi $x = 3$.

$$\text{Thay lại vào } (**) \text{ có } k = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Vì vậy phân tích } f(x) = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right) + \frac{8x}{9} \text{ như trên}$$

3. Ta trình bày cách giải khác cho bài 6 như sau:

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ với } x \geq 3. \text{ Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \text{ khi } x \geq 3.$$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến khi $x \geq 3$.

$$\text{Do } x \geq 3 \text{ nên ta có } f(x) = x + \frac{1}{x} \geq f(3) = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \min_{x \geq 3} f(x) = \frac{10}{3}.$$

Cách giải này vừa tự nhiên, vừa gọn gàng và sáng sủa.

Bài 7. Cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } f(x) \text{ dưới dạng sau } f(x) = \left(\frac{x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{3x}{4}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{8} \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{4}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = 2$.

Từ giả thiết $x \geq 2 \Rightarrow \frac{3x}{4} \geq \frac{3}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$.

Từ (2) (3) suy ra $\min_{x \geq 2} f(x) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = 2$.

Nhận xét:

1. Ta viết $f(x) = (kx + kx + \frac{1}{x^2}) + (1 - 2k)x$. (*)

Sở dĩ viết $kx + kx + \frac{1}{x^2}$ để khi sử dụng bất đẳng thức Côsi thì sẽ triệt tiêu

được biến x . Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow kx = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow kx^3 = 1$.

Vì ta cho rằng dấu bằng thường xảy ra khi $x = 2$ (vì điều kiện cho là $x \geq 2$).

Thay vào (**) có $k = \frac{1}{8}$, vì lẽ đó từ (*) chọn cách nhóm như trong trong lời giải trên.

2. Giống như bài toán 6 ta có cách giải khác nhau như sau:

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ khi $x \geq 2$.

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} > 0$ khi $x \geq 2$, vậy $f(x)$ là hàm đồng biến khi $x \geq 2$.

Do $x \geq 2$, nên $f(x) = x + \frac{1}{x^2} \geq f(2) = \frac{9}{2} \Rightarrow \min_{x \geq 2} f(x) = \frac{9}{4}$.

Bài 8. Cho $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

Nhóm lại các số hạng của $f(x)$ như sau $f(x) = (8x + 8x + \frac{1}{x^2}) - 14x$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $8x + 8x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{8x \cdot 8x \cdot \frac{1}{x^2}} = 12$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow 8x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Lại do } x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 14x \leq 7. \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Từ đó và từ (1) suy ra } f(x) \geq 12 - 7 \Rightarrow f(x) \geq 5. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra } \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min f(x) = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét:

$$1. \text{ Nếu nhóm theo kiểu sau: } f(x) = x + x + \frac{1}{x^2},$$

$$\text{rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi: } x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3. \quad (5)$$

$$\text{Tuy nhiên khi đó dấu bằng trong (5) xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vì $x = 1 \notin \{x: 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$, nên trong (5) không thể xảy ra dấu bằng nên không thể kết luận $\min_{0 < x \leq \frac{1}{2}} f(x) = 3$ (mà thực tế điều này quả là không đúng)

Phép nhóm trên là sai lầm.

2. Ta giải thích vì sao lại nhóm như trên

$$\text{Ta sẽ nhóm } f(x) \text{ theo dạng } f(x) = (kx + kx + \frac{1}{x^2}) - (2k - 2)x.$$

$$\text{Ta biết dấu bằng trong bất đẳng thức } kx + kx + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{k^2}$$

$$\text{xảy ra } \Leftrightarrow kx = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{k}. \quad (*)$$

Mặt khác lẽ thường từ điều kiện $0 < x \leq \frac{1}{2}$, ta tiên đoán dấu bằng xảy ra

khi $x = \frac{1}{2}$. Khi $x = \frac{1}{2}$ từ (*) có $k = 8$.

$$\text{Vậy } f(x) \text{ được viết dưới dạng } f(x) = (8x + 8x + \frac{1}{x^2}) - 14x.$$

3. Ta lại có cách nhóm khác để đưa $f(x)$ về dạng sau

$$f(x) = x + x + \frac{1}{8x^2} + \frac{7}{8x^2}. \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi và có $x + x + \frac{1}{8x^2} \geq \frac{3}{2}$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{8x^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Lại do $0 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{8x^2} \geq \frac{7}{2}$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Từ (*) (6) (7) ta có $f(x) \geq 5$. (8)

Dấu bằng xảy ra trong (8) $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\min_{0 < x \leq \frac{1}{2}} f(x) = 5$. Ta thu lại kết quả trên.

Vì sao lại nhóm như thế. Các bạn thử lí giải xem.

4. Xét cách giải bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số như sau:

Ta có $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Khi đó $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$.

Vậy có bảng biến thiên sau:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'		-	0
f			

Từ đó suy ra $\min_{0 < x \leq \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$.

Có lẽ cách này hay nhất.

Bài 9. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + y \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Hướng dẫn giải

Xét phép nhóm để đưa P về dạng sau $P = 4x + 4y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 3(x + y)$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số, ta có:

$$4x + 4y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4\sqrt[4]{4x \cdot 4y \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = 8. \quad (2)$$

$$\text{Do } x + y \leq 1 \Rightarrow 3(x + y) \leq 3 \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow 4x = 4y = \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Khi $x = y = \frac{1}{2}$ thì dấu bằng trong (3) cũng xảy ra.

$$\text{Từ (1) (2) (3), ta có } P \geq 5 \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \min P = 5 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét:

1. Rõ ràng phép nhóm $P = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right)$ là sai! Bạn đọc thử lí giải vì sao?

2. Tương tự như bài 8, ta có thể nhóm P như sau:

$$P = x + y + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Bạn đọc tự làm tiếp để ra đáp số $\min P = 5$.

3. Xét cách giải bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số kết hợp với bất đẳng thức sau đây

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

$$\text{Do đó } P \geq x + y + \frac{4}{x+y}.$$

$$\text{Từ đó xét hàm số } f(t) = t + \frac{4}{t} \text{ với } 0 < t \leq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} < 0 \quad \forall 0 < t \leq 1.$$

$$\text{Vậy } f(t) \text{ là hàm nghịch biến trên } (0; 1]. \text{ Từ đó } \min P = \min_{0 < t \leq 1} f(t) = f(1) = 5.$$

Có lẽ cách giải này hay nhất!

Bài 10. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hướng dẫn giải

Nhóm lại P dưới dạng sau:

$$P = \left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8y} + \frac{1}{8y} + \frac{1}{8z} + \frac{1}{8z} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x} \geq 3 \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{8x} \cdot \frac{1}{8x}} = \frac{3}{4}$. (2)

Tương tự $y^2 + \frac{1}{8y} + \frac{1}{8y} \geq \frac{3}{4}$, (3)

$$z^2 + \frac{1}{8z} + \frac{1}{8z} \geq \frac{3}{4}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (2) (3) (4) tương ứng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}; z = \frac{1}{2}$.

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$. (5)

Do $x + y + z \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{9}{2}$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

Từ (1) (2) (3) (4) (5) (6), ta có $P \geq \frac{27}{4}$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra dễ thấy khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min P = \frac{27}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

Nhận xét:

1. Vì sao lại nhóm P như trên được lí giải như các bài trên. Các bạn hãy thử lại xem!
2. Ta có thể nhóm cách khác như sau

$$P = \left(8x^2 + 8y^2 + 8z^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \right) - 7(x^2 + y^2 + z^2).$$

Các bạn hãy giải tiếp để đi đến $\min P = \frac{27}{4}$.

3. Xét cách giải khác bằng cách kết hợp với phương pháp chiều biến thiên hàm số như sau:

Áp dụng các bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \quad \text{và} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad \text{ta có}$$

$$P \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} + \frac{9}{x+y+z}. \quad (8)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{9}{t}$ với $0 < t \leq \frac{3}{2}$. Ta có $f'(t) = \frac{2t}{3} - \frac{9}{t^2} = \frac{2t^3 - 27}{3t^2}$.

Do $0 < t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f'(t) < 0 \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{2}\right]$

Vì lẽ đó $\min P = \min_{0 < t \leq \frac{3}{2}} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$.

Có lẽ đây là cách giải hay nhất bài toán này!

Bài 11. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $xy + yz + zx = 13$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 21x^2 + 21y^2 + z^2$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng $P = (3x^2 + 3y^2) + \left(18x^2 + \frac{z^2}{2}\right) + \left(18y^2 + \frac{z^2}{2}\right). \quad (1)$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $3x^2 + 3y^2 \geq 6xy, \quad (1)$

$$18x^2 + \frac{z^2}{2} \geq 6xz, \quad (2)$$

$$18y^2 + \frac{z^2}{2} \geq 6yz. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $P \geq 6(xy + yz + zx).$ (4)

Từ $xy + yz + zx = 13$, và từ (4) suy ra $P \geq 78.$ (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1; z = 6$

(chú ý khi $x = y = 1; z = 6$ thì $xy + yz + zx = 13$).

Bài 12. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{3}{z^2}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại điều kiện đã cho dưới dạng $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3. \quad (1)$

Đặt $X = \frac{1}{x}; Y = \frac{1}{y}; Z = \frac{1}{z}.$

Khi đó ta có $X > 0, Y > 0, Z > 0$ và từ (1) có $XY + YZ + XZ = 3. \quad (2)$

Lúc này $P = 3X^2 + Y^2 + 3Z^2.$

Dưới dạng này nhóm lại P như sau

$$P = \left(2X^2 + \frac{Y^2}{2} \right) + \left(2Z^2 + \frac{Y^2}{2} \right) + (X^2 + Z^2). \quad (3)$$

Từ đó theo bất đẳng thức Côsi suy ra

$$P \geq 2XY + 2YZ + 2XZ \text{ hay } P \geq 6. \quad (4) \quad (\text{do (2)})$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Z = \frac{Y}{2} \\ X = \frac{\sqrt{15}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \frac{5}{\sqrt{15}} \\ y = \frac{10}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

$$\text{Như vậy } \min P = 6 \Leftrightarrow x = z = \frac{5}{\sqrt{15}}; y = \frac{10}{\sqrt{15}}.$$

Loại 2. Các phép nhóm đặc biệt

Bài 1. (Bài toán tổng quát)

Cho α, β, γ là các hằng số sao cho $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$.

Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x \geq \alpha$; $xy \geq \alpha\beta$ và $xyz \geq \alpha\beta\gamma$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau

$$P = x + y + z = \gamma \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \right) + (\beta - \gamma) \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \right) + (\alpha - \beta) \frac{x}{\alpha}. \quad (1)$$

Từ giả thiết suy ra $\beta - \gamma \geq 0$; $\alpha - \beta \geq 0$, nên theo bất đẳng thức CôSi, ta có:

$$\gamma \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \right) \geq \gamma \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}}, \quad (1)$$

$$(\alpha - \gamma) \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} \right) \geq (\beta - \gamma) \cdot 2 \sqrt{\frac{x}{\alpha} \frac{y}{\beta}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (1), (2) tương ứng xảy ra khi: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$; $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$.

$$\text{Từ giả thiết còn có: } (\alpha - \beta) \frac{x}{\alpha} \geq \alpha - \beta. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi: $x = \alpha$.

Cộng từng vế (1), (2), (3) và dựa vào giả thiết $x \geq \alpha$; $xy \geq \alpha\beta$; $xyz \geq \alpha\beta\gamma$,

ta có: $P \geq 3\gamma + 2(\beta - \gamma) + (\alpha - \beta) \Rightarrow P \geq \alpha + \beta + \gamma. \quad (4)$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2), (3)

$\Leftrightarrow x = \alpha$; $y = \beta$; $z = \gamma$ (lúc đó thỏa mãn giả thiết $x = \alpha$, $xy = \alpha\beta$, $xyz = \alpha\beta\gamma$)

Vậy $\min P = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow x = \alpha$; $y = \beta$; $z = \gamma$.

Nhận xét: Áp dụng với $\alpha = 3; \beta = 2; \gamma = 1$. Ta có bài toán sau:

Cho $x \geq 3; xy \geq 6; xyz \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Nếu không có bài toán tổng quát, thì nhóm lại P như sau:

$$P = \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z \right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \right) + \frac{x}{3},$$

rồi áp dụng bất đẳng thức CôSi.

Bài 2. Cho $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ và giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$0 < x \leq y \leq z; z \leq \gamma, yz \leq \gamma\beta, xyz \leq \alpha\beta\gamma.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y + z$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có phép nhóm: } \alpha + \beta + \gamma = x \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\beta}{y} + \frac{\alpha}{x} \right) + (y - x) \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\beta}{y} \right) + (z - y) \frac{\gamma}{z}. \quad (1)$$

Vì $x \leq y \leq z$, nên áp dụng bất đẳng thức CôSi, ta có:

$$x \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\beta}{y} + \frac{\alpha}{x} \right) \geq x \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{\gamma\beta\alpha}{zyx}}, \quad (1)$$

$$(y - x) \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\beta}{y} \right) \geq (y - x) 2 \sqrt{\frac{\gamma\beta}{zy}}. \quad (2)$$

$$\text{Do } z \leq \gamma \Rightarrow (z - y) \frac{\gamma}{z} \geq z - y. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) và sử dụng giả thiết, ta có:

$$\alpha + \beta + \gamma \geq 3x + 2(y - x) + (z - y),$$

$$\text{hay } \alpha + \beta + \gamma \geq P. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra để thấy khi và chỉ khi $x = \alpha; y = \beta; z = \gamma$.

Vậy $\max P = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow x = \alpha; y = \beta; z = \gamma$.

Nhận xét:

1. Trong bài này ta không nhóm biến mà nhóm biểu thức hằng số $\alpha + \beta + \gamma$.

2. Với $\alpha = 2; \beta = 3; \gamma = 4$, ta có bài toán sau:

Cho $0 < x \leq y \leq z; z \leq 4; yz \leq 12; xyz \leq 24$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Theo bài trên ta có $\max P = 9$.

Nếu không có bài trên, ta nhóm như sau:

$$2 + 3 + 4 = x \left(\frac{4}{z} + \frac{3}{y} + \frac{2}{x} \right) + (y - x) \left(\frac{4}{z} + \frac{3}{y} \right) + (z - y) \frac{4}{z},$$

rồi áp dụng bất đẳng thức CôSi.

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq 2$; $x \leq 4$; $xy \leq 12$; $xy \leq 6z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y - z$.

Hướng dẫn giải

Xét phép nhóm sau đây:

$$4 + 3 + z = 2\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{z}{2}\right) + (y-2)\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y}\right) + (x-y)\frac{4}{x}. \quad (1)$$

Ta có: $y - 2 \geq 0$; $x - y \geq 0$.

Theo bất đẳng thức Cô Si, thì:

$$2\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{z}{2}\right) \geq 2.3\sqrt[3]{\frac{12z}{2xy}}, \quad (2)$$

$$(y-2)\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y}\right) \geq 2(y-2)\sqrt{\frac{12}{xy}}, \quad (3)$$

$$(x-y)\frac{4}{x} \geq x - y. \quad (4) \text{ (do } 0 < x \leq 4)$$

Cộng từng vế (2), (3), (4) và do $xy \leq 12$; $xy \leq 6z$, ta có:

$$7 + z \geq 6 + 2y - 4 + x - y \text{ hay } 7 + z \geq 2 + x + y \Rightarrow x + y - z. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) dễ thấy khi $x = 4$; $y = 3$; $z = 5$.

Như vậy ta có $\max P = 5 \Leftrightarrow x = 4$; $y = 3$; $z = 5$.

Nhận xét: trong bài này biểu thức nhóm $4 + 3 + z$ chứa hằng số và cả biến (biến z). Qua bài này ta thấy rõ tính đa dạng của phép nhóm.

Bài 4. (Bài toán tổng quát)

Cho $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ là hằng số dương. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $z \leq \gamma$; $\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \leq 2$; $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Hướng dẫn giải

Ta nhóm P theo dạng sau:

$$P = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}\right) + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right)\frac{\gamma}{z}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức CôSi cơ bản, ta có:

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} \geq \frac{9}{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}}; \quad \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} \geq \frac{4}{\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}}. \quad (2)$$

Từ đó dựa vào giả thiết của bài toán, kết hợp (1), (2) ta có:

$$P \geq \frac{3}{\alpha} + 2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right) \text{ hay } P \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}. \quad (3)$$

Để thấy dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = \alpha; y = \beta; z = \gamma$.

$$\text{Vậy min } P = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

Nhận xét:

1. Khi $\alpha = 4; \beta = 3; \gamma = 2$, ta có bài toán sau:

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$z \leq 2; \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \leq 2; \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} \leq 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

$$\text{Theo bài trên, ta có: min } P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

Phép nhóm P ở đây như sau:

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{y} + \frac{2}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{2}{z}.$$

2. Bằng cách nhóm biểu thức chứa hằng số, ta có bài toán tương tự sau.

Giả sử $x \geq y \geq z \geq \gamma$ là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} \leq 2; \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} \leq 3, \text{ ở đây } \alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Lời giải như sau: Nhóm biểu thức hằng số $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ như sau:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)\frac{z}{\gamma}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{1}{x} \frac{9}{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \frac{4}{\frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right).$$

Từ đó theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{3}{x} + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq P. \quad (*)$$

Dấu bằng trong (*) xảy ra $\Leftrightarrow x = \alpha; y = \beta; z = \gamma$.

Từ đó ta có $\max P = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Các bạn hãy áp dụng với $\alpha = 4; \beta = 3; \gamma = 2$ và $x \geq y \geq z \geq 2$ để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Bài 5. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{9} + \frac{z}{16} \leq 3; \frac{y}{4} + \frac{z}{16} \leq 2; \frac{z}{16} \leq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } P \text{ dưới dạng sau: } P = 2\left(\sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{y}{9}} + \sqrt{\frac{z}{16}}\right) + \left(\sqrt{\frac{y}{9}} + \sqrt{\frac{z}{16}}\right) + \sqrt{\frac{z}{16}}. \quad (1)$$

Áp dụng các bất đẳng thức cơ bản sau:

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2); (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

$$\text{ta có: } \sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{y}{9}} + \sqrt{\frac{z}{16}} \leq \sqrt{3\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{9} + \frac{z}{16}\right)}, \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{y}{9}} + \sqrt{\frac{z}{16}} \leq \sqrt{2\left(\frac{y}{9} + \frac{z}{16}\right)}. \quad (3)$$

$$\text{Sử dụng giả thiết, từ (1), (2), (3) suy ra: } P \leq 2.3 + 2 + 1 = 9. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = 4; y = 9; z = 16$.

Như thế $\max P = 9$.

Giá trị lớn nhất đạt được khi $x = 4; y = 9; z = 16$.

Bài 6. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện:

$$x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \geq 3; \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \geq 2; \frac{z}{5} \geq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Hướng dẫn giải

Thực hiện phép nhóm P như sau:

$$P = \left(x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{15}\right) + 8\left(\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{15}\right) + 16\frac{z^2}{25}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}; a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}, \text{ và từ (1) ta có:}$$

$$P \geq \frac{\left(x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)^2}{3} + 8 \frac{\left(\frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)^2}{2} + 16. \quad (2)$$

$$\text{Do giả thiết từ (2) có } P \geq 3 + 8.2 + 16 = 35. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = 3; z = 5$.

Vậy min $P = 35 \Leftrightarrow x = 1; y = 3; z = 5$

Nhận xét: Sở dĩ có phép nhóm như trên do dựa vào giả thiết và để ý rằng $3^2 - 1^2 = 8; 5^2 - 3^2 = 16$.

Đó là lí do vì sao lại nhóm như vậy!

Bài 7. Cho $x > 0, y \geq 2$ và thỏa mãn điều kiện: $2x + y + xy \geq 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Nhóm lại } P \text{ như sau: } P = x^3 + \frac{y^3}{8} + 7\frac{y^3}{8}. \quad (1)$$

$$\text{Viết lại giả thiết: } 2x + y + xy \geq 6 \text{ dưới dạng } x + \frac{y}{2} + \frac{xy}{2} \geq 3. \quad (2)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: } x^3 + 1 + 1 \geq 3x, \quad (3)$$

$$\frac{y^3}{8} + 1 + 1 \geq 3\frac{y}{2}, \quad (4)$$

$$x^3 + \frac{y^3}{8} + 1 \geq 3\frac{xy}{2}. \quad (5)$$

$$\text{Cộng từng vế (3), (4), (5) và theo (1) suy ra: } 2P + 5 \geq 3\left(x + \frac{y}{2} + \frac{xy}{2}\right). \quad (6)$$

$$\text{Từ (2), (6) đi đến: } P \geq 2. \quad (7)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = 2$.

Vậy min $P = 2 \Leftrightarrow x = 1; y = 2$.

Nhận xét: Trong bài này ta đã sử dụng cả phép nhóm và phép thêm bớt hằng số rồi sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Bài 8. Giả sử x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện:

$$0 < x \leq y \leq 2 \text{ sao cho } y + 2x + 2 \geq 3xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3$.

Hướng dẫn giải

Viết lại điều kiện: $y + 2x + 2 \geq 3xy$

$$\text{dưới dạng: } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{xy} \geq 3. \quad (1)$$

Ta có phân tích sau: $9 = 1 + 8 = x^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} \right) + (y^3 - x^3) \frac{8}{y^3}$. (2)

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{1}{x^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{1}{x}, \quad (3)$$

$$\frac{8}{y^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{2}{y}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} + 1 \geq 3 \frac{2}{xy}. \quad (5)$$

Cộng từng vế (3), (4), (5), ta có: $2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} \right) + 5 \geq 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{xy} \right)$. (6)

Từ (1), (6) suy ra: $\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} \geq 2$. (7)

Dấu bằng trong (6) xảy ra dễ thấy $\Leftrightarrow x = 1; y = 2$.

Từ (2), (7) có: $9 \geq 2x^3 + (y^3 - x^3) + \frac{8}{y^3}$. (8)

Vì $y \leq 2$ nên từ 8 suy ra: $P = x^3 + y^3 \leq 9$. (9)

Dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = 2$.

Như thế $\max P = 9 \Leftrightarrow x = 1; y = 2$.

Bài 9. Cho $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$z \geq \gamma; \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} = 4; \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{yz}{\beta\gamma} = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3$.

(Áp dụng giải khi $\alpha = 1; \beta = 2; \gamma = 6$).

Hướng dẫn giải

Nhóm P dưới dạng sau:

$$P = \alpha^3 \left(\frac{x^3}{\alpha^3} + \frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3} \right) + (\beta^3 - \alpha^3) \left(\frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3} \right) + (\gamma^3 - \beta^3) \frac{z^3}{\gamma^3}. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô Si, ta có: $\frac{x^3}{\alpha^3} + 1 + 1 \geq \frac{3x}{\alpha}$,

$$\frac{y^3}{\beta^3} + 1 + 1 \geq \frac{3y}{\beta},$$

$$\frac{z^3}{\gamma^3} + 1 + 1 \geq \frac{3z}{\gamma},$$

$$\frac{x^3}{\alpha^3} + \frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3} \geq 3 \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}.$$

Từ đó dựa vào giả thiết $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma} = 4$, suy ra (sau khi cộng từng vế 4

bất đẳng thức trên)

$$2\left(\frac{x^3}{\alpha^3} + \frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3}\right) + 6 \geq 12 \Rightarrow \frac{x^3}{\alpha^3} + \frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3} \geq 3. \quad (2)$$

Tương tự lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{y^3}{\beta^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{y}{\beta},$$

$$\frac{z^3}{\gamma^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{z}{\gamma},$$

$$\frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3} + 1 \geq 3 \frac{yz}{\beta\gamma}.$$

Từ giả thiết: $\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{yz}{\beta\gamma} = 3$, ta có: $\frac{y^3}{\beta^3} + \frac{z^3}{\gamma^3} \geq 2. \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$P \geq 3\alpha^3 + 2(\beta^2 - \alpha^2) + (\gamma^3 - \beta^3) \text{ hay } P \geq \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3. \quad (4)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = \alpha; y = \beta; z = \gamma$.

Như vậy ta có: $\min P = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi: $x = \alpha; y = \beta; z = \gamma$.

Áp dụng: khi $\alpha = 1; \beta = 2; \gamma = 3$, ta có $\min P = 36$.

Bài 10. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho: $0 < x \leq y \leq z \leq 3$;

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{6}{xyz} \geq 4; \quad \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{6}{yz} \geq 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$36 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = x^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} + \frac{27}{z^3} \right) + (y^3 - x^3) \left(\frac{8}{y^3} + \frac{27}{z^3} \right) + (z^3 - y^3) \frac{27}{y^3}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $\frac{1}{x^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{1}{x}$

$$\frac{8}{y^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{2}{y}$$

$$\frac{27}{z^3} + 1 + 1 \geq 3 \frac{3}{z}$$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} + \frac{27}{z^3} \geq 3 \frac{6}{xyz}.$$

Cộng từng vế 4 bất đẳng thức trên, và theo giả thiết ta có:

$$2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} + \frac{27}{z^3}\right) + 6 \geq 12 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{8}{y^3} + \frac{27}{z^3} \geq 3. \quad (2)$$

Lập luận tương tự ta có: $\frac{8}{y^3} + \frac{27}{z^3} \geq 2. \quad (3)$

Từ (1) (2) (3) có: $36 \geq 3x^3 + 2(y^3 - x^3) + (z^3 - y^3) \Rightarrow 36 \geq P. \quad (4)$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = 2; z = 3$.

Vậy $\min P = 36 \Leftrightarrow x = 1; y = 2; z = 3$.

1.6. Phương pháp sử dụng kĩ thuật ngược dấu trong bất đẳng thức Côsi.

Đây là một trong các phương pháp dùng bất đẳng thức Côsi đặc biệt hữu hiệu với những bài toán nếu vội vàng áp dụng ngay bất đẳng thức Côsi từ đầu sẽ đi đến dạng sau: $A \leq B \geq C$.

Vì thế không thể kết luận gì về mối quan hệ bất đẳng thức giữa A và C. Sử dụng kĩ thuật Côsi ngược sẽ tránh được điều này.

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $1 + y^2 \geq 2y$, khi đó $\frac{xy^2}{1+y^2} \leq \frac{xy^2}{2y} = \frac{xy}{2}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\frac{x}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.

$$\text{Tương tự ta có } \frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}, \quad (4)$$

$$\frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4) (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = 1; x = 1$.

$$\text{Cộng từng vế (3) (4) (5) và có } P \geq x + y + z - \frac{xy + yz + zx}{2}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Do } x + y + z = 3 \Rightarrow 9 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 9 \geq (xy + yz + zx) + 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Từ đó kết hợp (6) (7), ta có } P \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bình luận: Nếu trong bài trên ngay từ đầu ta trực tiếp sử dụng bất đẳng thức

Côsi $1 + y^2 \geq 2y, 1 + z^2 \geq 2z, 1 + x^2 \geq 2x$, sẽ thu được

$$P \leq \frac{x}{2y} + \frac{y}{2z} + \frac{z}{2x} \quad (9)$$

$$\text{Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x}{2y} + \frac{y}{2z} + \frac{z}{2x} \geq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Như vậy ta có } P \leq \frac{x}{2y} + \frac{y}{2z} + \frac{z}{2x} \geq \frac{3}{2}. \quad (10)$$

Từ (10) ta không thu được so sánh giữa P và $\frac{3}{2}$.

Cách áp dụng bất đẳng thức Côsi sau khi biến đổi P như trên gọi tắt là kĩ thuật Côsi ngược dấu. Đây là kĩ thuật hay và khéo léo. Nhờ nó mà tránh được các hệ thức kiểu dạng (10).

Bài 2. Cho x, y, z, t dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 4$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x}{1+y^3z} + \frac{y}{1+z^2t} + \frac{z}{1+t^2x} + \frac{t}{1+x^2y}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x}{1+y^2z} = x - \frac{xy^2z}{1+y^2z}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $1+y^2z \geq 2y\sqrt{z}$.

Từ đó suy ra $\frac{x}{1+y^2z} \geq x - \frac{xy^2z}{2y\sqrt{z}}$ hay $\frac{x}{1+y^2z} \geq x - \frac{xy\sqrt{z}}{2}$. (1)

Ta lại có $xy\sqrt{z} = y\sqrt{x \cdot xz} \leq y \frac{x+xz}{2}$. (2)

Từ (1) (2) suy ra $\frac{x}{1+y^2z} \geq x - \frac{1}{4}(xy + xyz)$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = y^2z \\ x = xz \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 1$.

Tương tự ta có $\frac{y}{1+z^2t} \geq y - \frac{1}{4}(yz + yzt)$ (4)

$\frac{z}{1+t^2x} \geq z - \frac{1}{4}(zt + ztx)$ (5)

$\frac{t}{1+x^2y} \geq t - \frac{1}{4}(tx + txy)$. (6)

Dấu bằng trong (4) (5) (6) tương ứng xảy ra

$\Leftrightarrow z = t = 1; t = x = 1; x = y = 1$.

Cộng từng vế (3) (4) (5) (6) và có

$P \geq (x + y + z + t) - \frac{1}{4}(xy + yz + zt + tx + xyz + yzt + ztx + txy)$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5) (6)

$\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$xy + yz + zt + tx \leq \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2 = 4$, (8)

$xyz + yzt + ztx + txy \leq (x + y + z + t)^3 = 4$. (9)

Dấu bằng trong (8) (9) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Từ (7) (8) (9) suy ra $P \geq 2$. (10)

Dấu bằng trong (10) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (7) (8) (9)

$\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Như vậy ta có: $\min P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = t$

Nhận xét: Bài toán đã sử dụng kỹ thuật Côsi ngược.

Bài 3. Giả sử x, y, z, t là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + t^2} + \frac{t^3}{t^2 + x^2}.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{x^3}{x^2 + y^2} = x - \frac{xy^2}{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $x^2 + y^2 \geq 2xy$, do đó từ (1) có $\frac{x^3}{x^2 + y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2xy},$

$$\text{hay } \frac{x^3}{x^2 + y^2} \geq x - \frac{y}{2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$$\text{Lập luận hoàn toàn tương tự, có } \frac{y^3}{y^2 + z^2} \geq y - \frac{z}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{z^3}{z^2 + t^2} \geq z - \frac{t}{2}, \quad (4)$$

$$\frac{t^3}{t^2 + x^2} \geq t - \frac{x}{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (3) (4) (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z; z = t; t = x.$

$$\text{Cộng từng vế (2) (3) (4) (5), ta có } P \geq \frac{x + y + z + t}{2}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4) (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = t = 2 \quad (\text{do } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2).$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có } (x + y + z + t) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \geq 16$$

$$\Rightarrow x + y + z + t \geq 8. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t = 2.$

$$\text{Từ (6) (7) suy ra } P \geq 4. \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)

$$\Leftrightarrow x = y = z = t = 2.$$

Như vậy ta có $\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = t = 2.$

Bài 4. Cho $x, y, z \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{x + 2y^2} = x - \frac{2xy^2}{x + 2y^2}. \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } x + 2y^2 = x + y^2 + y^2 \geq 3\sqrt[3]{xy^4}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y^2$.

$$\text{Từ (1) (2) suy ra } \frac{x^2}{x + 2y^2} \geq x - \frac{2xy^2}{3\sqrt[3]{xy^4}} = x - \frac{2}{3}(xy)^{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y^2$.

$$\text{Hoàn toàn tương tự, ta có } \frac{y^2}{y + 2z^2} \geq y - \frac{2}{3}(yz)^{\frac{2}{3}}, \quad (4)$$

$$\frac{z^2}{z + 2x^2} \geq z - \frac{2}{3}(zx)^{\frac{2}{3}}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4) (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z^2; z = x^2$.

Cộng từng vế (3) (4) (5) và có

$$P \geq (x + y + z) - \frac{2}{3} \left[(xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = z^2 \\ z = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x + xy + y \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2}$

$$y + yz + z \geq 3\sqrt[3]{y^2z^2}$$

$$z + zx + x \geq 3\sqrt[3]{z^2x^2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } 2(x + y + z) + (xy + yz + zx) \geq 3 \left[(xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \right].$$

Dễ thấy dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Ta có: $9 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3. \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (7) (8) và kết hợp với $x + y + z = 1$, ta có

$$6 + 3 \geq 3 \left[(xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \right] \Rightarrow (xy)^{\frac{2}{3}} + (yz)^{\frac{2}{3}} + (zx)^{\frac{2}{3}} \leq 3 \quad (9)$$

$$\text{Từ (6) (9) đi đến } P \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \Rightarrow P \geq 1. \quad (10)$$

Dấu bằng trong (10) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (9)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Tóm lại ta đi đến $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Trong bài tập trên ta đã sử dụng kĩ thuật Côsi ngược!

Bài 5. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2}{x + 2y^3} + \frac{y^2}{y + 2z^3} + \frac{z^2}{z + 2x^3}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{x + 2y^3} = x - \frac{2xy^3}{x + 2y^3}. \quad (1)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, thì } x + 2y^3 = x + y^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{xy^6} = 3\sqrt[3]{x}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y^3$.

$$\text{Từ (1) (2) có } \frac{x^2}{x + 2y^3} \geq x - \frac{2xy^3}{3y^2\sqrt[3]{x}} = x - \frac{2}{3}y\sqrt[3]{x^2}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y^3$.

$$\text{Tương tự, có } \frac{y^2}{y + 2z^3} \geq y - \frac{2}{3}z\sqrt[3]{y^2}, \quad (4)$$

$$\frac{z^2}{z + 2x^3} \geq z - \frac{2}{3}x\sqrt[3]{z^2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4) (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z^3; z = x^3$

$$\text{Cộng từng vế (3) (4) (5) và có } P \geq (x + y + z) - \frac{2}{3} \left(z\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2} \right),$$

$$\text{hay } P \geq 3 - \frac{2}{3} \left(z\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2} \right). \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \quad x + xz + xz &\geq 3x\sqrt[3]{z^2} \\ y + yx + yx &\geq 3y\sqrt[3]{x^2} \\ z + zy + zy &\geq 3z\sqrt[3]{y^2}. \end{aligned}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên và có

$$(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) \geq 3 \left(x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2} + z\sqrt[3]{y^2} \right). \quad (7)$$

Lại do $9 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3. \quad (8)$$

Từ (7) (8) và do $x + y + z = 3$, suy ra $3 + 2.3 \geq 3 \left(x\sqrt[3]{z^2} + y\sqrt[3]{x^2} + z\sqrt[3]{y^2} \right)$

$$\Rightarrow x\sqrt[3]{y^2} + y\sqrt[3]{x^2} + z\sqrt[3]{y^2} \leq 3. \quad (9)$$

Bây giờ từ (6) và (9) đi đến $P \geq 1$. (10)

Để thấy dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$, nên dấu bằng trong (10) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6), (9) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 6. Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x+1}{y^2+1} = x+1 - \frac{(x+1)y^2}{y^2+1}$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $y^2 + 1 \geq 2y$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.

Từ (1) (2) suy ra $\frac{x+1}{y^2+1} \geq x+1 - \frac{(x+1)y^2}{2y} = x+1 - \frac{xy+y}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.

Lập luận tương tự, ta có $\frac{y+1}{z^2+1} \geq y+1 - \frac{yz+z}{2}$, (4)

$$\frac{z+1}{x^2+1} \geq z+1 - \frac{zx+x}{2}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4) (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = 1; x = 1$.

Cộng từng vế (3) (4) (5) và có $P \geq 3 + \frac{x+y+z-(xy+yz+zx)}{2}$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4) (5)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Do $9 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3 \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Do $x + y + z = 3$, nên từ (6) (7) đi đến $P \geq 3$.

(8)

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 7. Cho x, y, z là ba số thực dương và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}$. (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, thì $x^2 + 1 \geq 2x$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Từ (1) (2) suy ra $\frac{1}{x^2 + 1} \geq 1 - \frac{x^2}{2x} = 1 - \frac{x}{2}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Hoàn toàn tương tự, ta có $\frac{1}{y^2 + 1} \geq 1 - \frac{y}{2}$, (4)

$\frac{1}{z^2 + 1} \geq 1 - \frac{z}{2}$. (5)

Cộng từng vế (3) (4) (5) và có $P \geq 3 - \frac{x + y + z}{2} = \frac{3}{2}$ (do $x + y + z = 3$).

Từ đó suy ra $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Nếu áp dụng ngay từ đầu bất đẳng thức Côsi $x^2 + 1 \geq 2x$; $y^2 + 1 \geq 2y$;

$z^2 + 1 \geq 2z$, ta có: $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$. (6)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$ (7) (do $x + y + z = 3$)

Từ (6) (7) ta có $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{3}{2}$ (8)

Rõ ràng từ (8) không suy ra kết luận gì về mối liên hệ giữa P và $\frac{3}{2}$. Phép sử dụng phương pháp Côsi ngược là có hiệu quả rõ rệt trong bài toán 7, cũng như trong các bài toán từ 1 – 6.

§2. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

BUNHIACOPSKI

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT HÀM SỐ

Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cũng là một trong những phương pháp cơ bản để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất hàm số (cũng như để chứng minh bất đẳng thức nói chung).

Giống như khi sử dụng bất đẳng thức Côsi, để có thể áp dụng một cách hiệu quả phương pháp này, trong mỗi bài toán cụ thể cần lựa chọn một cách thích hợp hai bộ số rồi áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai bộ số này. Chú ý rằng hai bộ số cần lựa chọn không đòi hỏi tính không âm của các số hạng.

Bài 1. (Bất đẳng thức Svác xơ)

Cho $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$ trong đó b_1, b_2, b_3 là ba số dương. Chứng minh

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với hai dãy

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} + \frac{a_3}{\sqrt{b_3}} \text{ và } \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \sqrt{b_3}.$$

$$\text{Ta có: } \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \right) (b_1 + b_2 + b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)^2.$$

Do $b_1 + b_2 + b_3 > 0$, nên có: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$, suy ra đpcm

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}}{\sqrt{b_1}} = \frac{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}}{\sqrt{b_2}} = \frac{\frac{a_3}{\sqrt{b_3}}}{\sqrt{b_3}} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Nhận xét: Đặc biệt khi lấy $b_i = a_i c_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) ta có kết quả sau:

Cho 6 số a_1, a_2, a_3 và c_1, c_2, c_3 trong đó $a_i c_i > 0 \forall i = 1, 2, 3$

$$\text{Khi đó ta có: } \frac{a_1^2}{a_1 c_1} + \frac{a_2^2}{a_2 c_2} + \frac{a_3^2}{a_3 c_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3}.$$

Bài 2. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $xyz = 8$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau: $P = 3 - 3 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$. (1)

Đặt $x = \frac{2X}{Y}$; $y = \frac{2Y}{Z}$; $z = \frac{2Z}{X}$. Khi đó ta có: $X > 0$, $Y > 0$, $Z > 0$ (vì rõ ràng $xyz = 8$)

$$\begin{aligned} \text{Lúc này: } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{\frac{2X}{Y}+1} + \frac{1}{\frac{2Y}{Z}+1} + \frac{1}{\frac{2Z}{X}+1} \\ &= \frac{Y}{2X+Y} + \frac{Z}{2Y+Z} + \frac{X}{2Z+X} \\ &= \frac{Y^2}{2XY+Y^2} + \frac{Z^2}{2YZ+Z^2} + \frac{X^2}{2ZX+X^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ (Bài 1 – dạng đặc biệt của bất đẳng thức Bunhiacopski) ta có:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{2XY+Y^2+2YZ+Z^2+2ZX+X^2} = \frac{(X+Y+Z)^2}{(X+Y+Z)^2} = 1.$$

Từ đó theo (1) suy ra: $P \leq 0$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Vậy $\max P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Bài 3. Cho ba số thực dương x, y, z và $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xyz}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $xy + yz + zx = xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq xyz \frac{9}{x+y+z} = 9xyz$

$$\Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq \frac{9}{x+y+z}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Từ (1) ta có: $P \geq \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{9}{xy + yz + zx}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{9}{xy+yz+zx} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{xy+yz+zx} + \frac{1}{xy+yz+zx} + \frac{7}{xy+yz+zx}$$

Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{xy+yz+zx} + \frac{1}{xy+yz+zx} \geq \frac{(1+1+1)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx},$$

$$P \geq \frac{9}{(x+y+z)^2} + \frac{7}{xy+yz+zx} = 9 + \frac{7}{xy+yz+zx}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Lại có: $1 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow xy+yz+zx \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{xy+yz+zx} \geq 21. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Từ (3), (4) suy ra $P \geq 30$ vì dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Như vậy $\min P = 30$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+1)} + \frac{1}{z^3(x+y)}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{\frac{1}{x^2}}{x(y+z)} + \frac{\frac{1}{y^2}}{y(z+1)} + \frac{\frac{1}{z^2}}{z(x+y)}. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ từ (1) có:

$$P \geq \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{2(xy+yz+zx)} = \frac{(xy+yz+zx)^2}{2(xy+yz+zx)x^2y^2z^2}. \quad (2)$$

$$\text{Do } xyz = 1, \text{ nên từ (2) ta có: } P \geq \frac{xy+yz+zx}{2}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Lại theo bất đẳng thức Cô Si ta có:

$$xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3. \quad (4) \text{ (do } xyz = 1)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (3), (4) suy ra $P \geq \frac{3}{2}$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3)(4)
 $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 5. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1 + \frac{2}{y}} + \frac{y}{1 + \frac{2}{z}} + \frac{z}{1 + \frac{2}{x}}$.

Hướng dẫn giải

Xét phép đổi biến $x = \frac{X}{Y}$; $y = \frac{Y}{Z}$ và $z = \frac{Z}{X}$, với $X, Y, Z > 0$.

(chú ý là $xyz = 1$, nên có thể đổi biến như trên)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{\frac{X}{Y}}{1 + \frac{2Z}{Y}} + \frac{\frac{Y}{Z}}{1 + \frac{2X}{Z}} + \frac{\frac{Z}{X}}{1 + \frac{2Y}{X}} = \frac{X}{Y + 2Z} + \frac{Y}{Z + 2X} + \frac{Z}{X + 2Y} \\ &= \frac{X^2}{XY + 2XZ} + \frac{Y^2}{ZY + 2XY} + \frac{Z^2}{XZ + 2YZ}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có: } P \geq \frac{(X + Y + Z)^2}{2(XY + YZ + ZX)}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z$.

$$\text{Để thấy rằng } (X + Y + Z)^2 \geq 3(XY + YZ + ZX). \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z$.

$$\text{Từ (2), (3) có: } P \geq 1. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2)(3)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiascopki cho hai dãy số:

$$x^2, y^2, z^2$$

$$1, 1, 1,$$

Ta có:

$$(x^4 + y^4 + z^4)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow 3(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2$.

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiascopki cho hai dãy số:

$$x, y, z$$

$$z, x, y$$

$$\text{Ta có: } (x^2 + y^2 + z^2)(z^2 + x^2 + y^2) \geq (xy + yz + zx)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 16.$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = xz \\ z^2 = xy \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{3}.$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = y = z = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra min } P = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ hoặc là } x = y = z = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} = \frac{x^4}{xy+xz} + \frac{y^4}{yz+xy} + \frac{z^4}{xz+yz}. \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có: } P \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(xy + yz + zx)}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (do $x + y + z = 3$)

$$\text{Để thấy rằng: } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Từ (2), (3) ta có: } P \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}. \quad (4)$$

$$\text{Hiển nhiên ta có: } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Từ } x + y + z = 3, (4), (5) \text{ suy ra: } P \geq \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4), (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Nhận xét:

1. Ta có thể sử dụng phương pháp thêm bớt hạng tử và áp dụng bất đẳng thức Côsi để giải bài toán trên như sau:

$$\text{Ta có: } \frac{x^3}{y+z} + \frac{x(y+z)}{4} \geq x^2,$$

$$\frac{y^3}{z+x} + \frac{y(z+x)}{4} \geq y^2,$$

$$\frac{z^3}{x+y} + \frac{z(x+y)}{4} \geq z^2.$$

$$\text{Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta có: } P + \frac{xy + yz + zx}{2} \geq x^2 + y^2 + z^2. \quad (*)$$

Do $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, nên từ (*) suy ra:

$$P \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq \frac{(x + y + z)^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

Từ đó suy ra min $P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$. Ta thu lại kết quả trên.

2. Ta có bài toán tương tự sau:

Cho $x, y, z > 0$ vì $x + y + z = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}.$$

Lại giải như sau:

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có: } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Các bạn hãy so sánh cách giải này với cách dùng phương pháp thêm bớt hạng tử và bất đẳng thức Côsi.

Bài 8. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{x+2y+3z} + \frac{y^3}{y+2z+3x} + \frac{z^3}{z+2x+3y}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = \frac{x^4}{x^2+2xy+3xz} + \frac{y^4}{y^2+2yz+3xy} + \frac{z^4}{z^2+2zx+3yz}$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có:

$P \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mặc khác ta có $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$. (3)

Dấu bằng trong (3) $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Từ (2), (3) ta có: $P \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{6(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{6} = \frac{1}{6}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3)

$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 9. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x+2y^2} + \frac{y^2}{y+2z^2} + \frac{z^2}{z+2x^2}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau:

$P = \frac{x^4}{x^3+2x^2y^2} + \frac{y^4}{y^3+2y^2z^2} + \frac{z^4}{z^3+2x^2z^2}$.

Theo bất đẳng thức Svác-xơ, ta có:

$$P \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^3 + y^3 + z^3 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (do $x + y + z = 3$).

$$\text{Ta có VP (1)} = \frac{x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{x^3 + y^3 + z^3 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $x^4 + x^4 + x \geq 3x^3$
 $y^4 + y^4 + y \geq 3y^3$
 $z^4 + z^4 + z \geq 3z^3$.

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta có

$$2(x^4 + y^4 + z^4) + (x + y + z) \geq 3(x^3 + y^3 + z^3). \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta lại có: $x^3 + 1 + 1 \geq 3x$
 $y^3 + 1 + 1 \geq 3y$
 $z^3 + 1 + 1 \geq 3z$

Từ đó suy ra: $x^3 + y^3 + z^3 + 6 \geq 3(x + y + z)$.

Do $x + y + z = 3$, nên có: $x^3 + y^3 + z^3 + 2(x + y + z) \geq 3(x + y + z)$
 $\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$. (4)

Từ (3), (4) suy ra: $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3 + y^3 + z^3$. (5)

Dễ thấy dấu bằng trong (5) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (2), (5) có: VP (1) ≥ 1 . (6)

Từ (1), (6) suy ra $P \geq 1$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra dễ thấy $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy min $P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 10. Giả sử x, y, z là các số thực dương sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Cho a, b, c là ba hằng số dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{ax + by + cz} + \frac{1}{bx + cy + az} + \frac{1}{cx + ay + bz}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $S = a + b + c > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có:

$$\frac{a^2}{ax} + \frac{b^2}{bx} + \frac{c^2}{cz} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz} \Rightarrow \frac{1}{ax+by+cz} \leq \frac{1}{S^2} \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right). \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{a}{ax} = \frac{b}{bx} = \frac{c}{cz} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \quad \left(\text{do } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \right) \Leftrightarrow x = y = z = 3.$$

Tương tự có:
$$\frac{1}{bx + cy + az} \leq \frac{1}{S^2} \left(\frac{b}{x} + \frac{c}{y} + \frac{a}{z} \right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{cx + ay + bz} \leq \frac{1}{S^2} \left(\frac{c}{x} + \frac{a}{y} + \frac{b}{z} \right). \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2), (3) đều xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Cộng từng vế (1), (2), (3) và có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ax + by + cz} + \frac{1}{bx + cy + az} + \frac{1}{cx + ay + bz} \\ & \leq \frac{1}{S^2} \left[a \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + b \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + c \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] \end{aligned}$$

Từ giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ và $S = a + b + c$ suy ra:

$$\frac{1}{ax + by + cz} + \frac{1}{bx + cy + az} + \frac{1}{cx + ay + bz} \leq \frac{1}{a + b + c}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2), (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 3.$$

Vậy $\max P = \frac{1}{a + b + c} \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Áp dụng: Nếu $a = 2, b = 3, c = 6$ ta có kết quả sau:

$$\max \left(\frac{1}{2x + 3y + 6z} + \frac{1}{3x + 6y + 2z} + \frac{1}{6x + 2y + 3z} \right) = 1$$

nếu như $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ vì $x > 0, y > 0, z > 0$.

Bài 11. Cho x, y, z là các số dương.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y + 2z} + \frac{y}{z + 2x} + \frac{z}{x + 2y}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau:
$$P = \frac{x^2}{xy + 2xz} + \frac{y^2}{yz + 2xy} + \frac{z^2}{xz + 2yz}. \quad (1)$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$P \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy+2xz+yz+2xy+xz+2yz} \text{ hay } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}. \quad (2)$$

Rõ ràng $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, nên từ (2) suy ra: $P \geq 1$. (3)

Dễ thấy dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Nhận xét:

1. Cách giải trên là dựa vào bất đẳng thức Svác-xơ (một dạng đặc biệt của bất đẳng thức Bunhiacopski).

2. Xét cách giải sau đây dựa vào bất đẳng thức Côsi

Đặt $X = y + 2z$; $Y = z + 2x$; $Z = x + 2y$.

Khi đó ta có $X > 0$, $Y > 0$, $Z > 0$

$$\text{và } x = \frac{4Y+Z-2X}{9}; \quad y = \frac{4Z+X-2Y}{9}; \quad z = \frac{4X+Y-2Z}{9}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4Y+Z-2X}{9X} + \frac{4Z+X-2Y}{9Y} + \frac{4X+Y-2Z}{9Z} \\ &= \frac{4}{9} \frac{Y}{X} + \frac{1}{9} \frac{Z}{Y} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \frac{Z}{Y} + \frac{1}{9} \frac{X}{Y} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \frac{X}{Z} + \frac{1}{9} \frac{Y}{Z} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{Y}{Z} + \frac{Z}{Y} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{Z}{X} + \frac{X}{Z} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{Z} + \frac{Z}{Y} + \frac{X}{Z} \right) - \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, từ (*) suy ra: $P \geq \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 1 - \frac{2}{3}$ hay $P \geq 1$. (**)

Dễ thấy dấu bằng trong (**) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z > 0 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z$.

Do đó rõ ràng phương pháp giải sử dụng bất đẳng thức Svác-xơ là gọn gàng hơn cách sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Bài 12. Cho x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2zx$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$xy + yz \leq \sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sqrt{y^2 + y^2} \Rightarrow xy + yz \leq \sqrt{2(x^2 + z^2)} y^2. \quad (*)$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ nên từ } (*) \text{ suy ra: } xy + yz \leq \sqrt{2y^2(1-y^2)}. \quad (1)$$

$$\text{Dễ thấy: } 2zx \leq x^2 + z^2 = 1 - y^2. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } P \leq \sqrt{2y^2(1-y^2)} + (1-y^2). \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ \frac{x}{z} = \frac{y}{y} \end{cases} \Leftrightarrow z = x$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{2y^2(1-y^2)} + (1-y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2) + \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với hai dãy:

$$\sqrt{4y^2-4y^4} \cdot (1-2y^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{ta lại có: } \left[(4y^2-4y^4) + (1-2y^2)^2 \right] \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \geq \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2) \right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4} + \frac{1}{2}(1-2y^2) + \frac{1}{2}. \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) suy ra: } P \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \quad (6)$$

Dấu bằng xảy ra trong (6) $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng xảy ra trong (3), (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ \sqrt{2}\sqrt{4y^2-4y^4} = 2(1-2y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{Từ đó ta có: } \max P = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow x, y, z \text{ thỏa mãn hệ (7), (8).}$$

Bài 13. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 3$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2}{1+2y^3} + \frac{y^2}{1+2z^3} + \frac{z^2}{1+2x^3}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có: } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{3+2(x^3+y^3+z^3)}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x^3 + 1 + 1 \geq 3x$

$$y^3 + 1 + 1 \geq 3y$$

$$z^3 + 1 + 1 \geq 3z.$$

Từ đó và dựa vào giả thiết $x + y + z = 3$ suy ra: $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (1), (2) suy ra $P \geq 1$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 14. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y^2 + yz + z^2} + \frac{y^2}{z^2 + zx + x^2} + \frac{z^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng:

$$P = \frac{x^4}{x^2(y^2 + yz + z^2)} + \frac{y^4}{y^2(z^2 + zx + x^2)} + \frac{z^4}{z^2(x^2 + xy + y^2)} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có:

$$P \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2(y^2 + yz + z^2) + y^2(z^2 + zx + x^2) + z^2(x^2 + xy + y^2)}$$

$$\text{hay } P \geq \frac{x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + (xy)(yz) + (xy)(zx) + (yz)(zx)}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \quad (3)$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq (xy)(yz) + (xy)(zx) + (yz)(zx) \quad (4)$$

$$z^4 + z^4 + z \geq 3z^3.$$

$$\text{Từ (2), (3), (4) suy ra: } P \geq \frac{3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}{3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)} \text{ hay } P \geq 1. \quad (5)$$

Để thấy dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Bài 15. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 8xy}}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau:

$$P = \frac{x^2}{x\sqrt{x^2+8yz}} + \frac{y^2}{y\sqrt{y^2+8zx}} + \frac{z^2}{z\sqrt{z^2+8xy}}. \quad (1)$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Svác-xơ, ta có:

$$P \geq \frac{(x+y+z)^2}{x\sqrt{x^2+8yz} + y\sqrt{y^2+8zx} + z\sqrt{z^2+8xy}}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \sqrt{x^2+8yz} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} \sqrt{y^2+8zx} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{z} \sqrt{z^2+8xy} \right)^2 \leq \\ & (x+y+z) \left[x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy) \right] \\ & = (x+y+z)(x^3+y^3+z^3+24xyz). \end{aligned} \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz \\ &\geq x^3+y^3+z^3+27\sqrt{xyz} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2z^2} - 3xyz \\ &\text{hay } (x+y+z)^3 \geq x^3+y^3+z^3+24xyz. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Thay (3), (4) vào (2) và có: } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} = 1. \quad (5)$$

Để thấy dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Ta có bài toán tương tự sau:

Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x^2+8yz} + \frac{y}{y^2+8zx} + \frac{z}{z^2+8xy}.$$

$$\text{Ta giải như sau: } P = \frac{x^2}{x^3+8xyz} + \frac{y^2}{y^3+8xyz} + \frac{z^2}{z^3+8xyz}. \quad (*)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Svác-xơ, ta có: } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+z^3+24xyz}. \quad (**)$$

$$\text{Theo bài trên ta có: } (x+y+z)^3 \geq x^3+y^3+z^3+24xyz. \quad (***)$$

$$\text{Từ (**), (***) suy ra: } P \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} \text{ hay } P \geq \frac{1}{x+y+z} = 1.$$

$$\text{Vậy min } P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Bài 16. Giả sử x, y, z là ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 12.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y+z-x}{3x+y-z} + \frac{z+x-y}{3y+z-x} + \frac{x+y-z}{3z+x-y}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $X = y + z - x$; $Y = z + x - y$; $Z = x + y - z$.

Khi đó ta có $X > 0$, $Y > 0$, $Z > 0$.

Dễ thấy $x = \frac{Y+Z}{2}$; $y = \frac{Z+X}{2}$; $z = \frac{X+Y}{2}$.

Từ đó ta có:

$$P = \frac{X}{Y+2Z} + \frac{Y}{Z+2X} + \frac{Z}{X+2Y} = \frac{X^2}{XY+2XZ} + \frac{Y^2}{ZY+2XY} + \frac{Z^2}{XZ+2YZ}.$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Svác-xơ, ta có: $P \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{3(XY+YZ+ZX)} \geq 1$.

Dễ thấy $P = 1 \Leftrightarrow X = Y = Z \Leftrightarrow x = y = z = 4$. Vậy $\min P = 1$.

Giá trị nhỏ nhất khi x, y, z là cạnh của tam giác đều có chu vi bằng 12 (tính $x = y = z = 4$).

Bài 17. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\begin{aligned} (9+7)\left(1+\frac{7}{x^2}\right) &\geq \left(3+\frac{7}{x}\right)^2 \Rightarrow 16\left(1+\frac{7}{x^2}\right) \geq \left(3+\frac{7}{x}\right)^2 \\ \Rightarrow 4\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} &\geq 3+\frac{7}{x} \Rightarrow \sqrt{4\left(1+\frac{7}{x^2}\right)} \geq \frac{1}{2}\left(3+\frac{7}{x}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra} \Leftrightarrow \frac{3}{1} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{x}} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Từ (1) ta có: } x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1+\frac{7}{x^2}\right)} \geq x + \frac{11}{2x} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2x} = \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x}.$$

$$\text{Do } x + \frac{9}{x} \geq 6$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow x = 3. \text{ Từ đó suy ra: } f(x) \geq \frac{15}{2}.$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (1), (2)} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Vậy } \min f(x) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = 3.$$

Bài 18. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện:

$$x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{4}{3}.$$

Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Hướng dẫn giải

Viết lại giả thiết đã cho dưới dạng:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(x + y + z) + 4. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2). \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $(x + y + z)^2 \leq 3(x + y + z) + 4$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 3(x + y + z) - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x + y + z \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 4. \quad (3)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } P = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \frac{4}{3} \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Tương tự } P = -1 \Leftrightarrow x = y = z = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{4}{3}; \min P = -1 \Leftrightarrow x = y = z = -\frac{1}{3}.$$

§3. CÁC PHƯƠNG PHÁP THÔNG DỤNG KHÁC

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Phương pháp xuất phát từ một bất đẳng thức đã biết từ trước.

Phương pháp xuất phát từ một bất đẳng thức nào đấy đã đúng, sau đó biến đổi thành bất đẳng thức dạng $P \geq a$ (1) (hoặc $P \leq a$), ở đây P là biểu thức cần tìm giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất).

Sau khi chỉ ra phần tử đã cho ứng với phần tử đó thì P đạt giá trị a , ta sẽ suy ra kết luận min $P = a$ (hoặc $\max P = a$).

Như vậy điều cốt yếu khi sử dụng phương pháp này là cần lựa chọn các bất đẳng thức thích hợp với đề ra để có thể biến đổi về bất đẳng thức dạng (1).

Việc lựa chọn này được tiến hành bằng cách dựa vào cấu trúc của biểu thức P ban đầu cũng như các giả thiết của bài toán.

Bài 1. Cho x, y, z là ba số dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$.

Hướng dẫn giải

Hiển nhiên ta có bất đẳng thức sau: $x^2 - xy + y^2 \geq xy$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Vì $x > 0, y > 0$, nên từ (1) có $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq xy(x + y)$

$\Rightarrow x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$. (2)

Do $xyz = 1$, nên từ (2) có: $x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x + y) + xyz$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x + y + z)$

$\Rightarrow \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} \leq \frac{1}{xy(x + y + z)}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Tương tự ta có: $\frac{1}{y^3 + z^3 + 1} \leq \frac{1}{yz(x + y + z)}$, (4)

$\frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq \frac{1}{zx(x + y + z)}$. (5)

Dấu bằng trong (4), (5) tương ứng xảy ra khi $y = z; z = x$

Cộng từng vế (3), (4), (5) và có $P \leq \frac{x + y + z}{xyz(x + y + z)} = \frac{1}{xyz} = 1$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4), (5)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (do $xyz = 1$)

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Trong bài này ta đã sử dụng bất đẳng thức (1), đó là từ bất đẳng thức hiển nhiên $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$.

Bài 2. Cho x, y, z, t là bốn số thực dương sao cho $xyzt = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{x^4 + y^4 + z^4 + 1} + \frac{1}{y^4 + z^4 + t^4 + 1} + \frac{1}{z^4 + t^4 + x^4 + 1} + \frac{1}{t^4 + x^4 + y^4 + 1}$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh rằng với mọi x, y, z ta có:

$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$. (1)

Thật vậy: $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$

$\Rightarrow 2(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x^2y^2 + y^2z^2) + (y^2z^2 + z^2x^2) + (z^2x^2 + x^2y^2)$

$\geq 2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z).$$

Nhận xét được chứng minh: Để thấy dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Do $xyzt = 1$, nên từ (1) có:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq xyz(x + y + z) + xyzt \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq xyz(x + y + z + t).$$

Do $x, y, z, t > 0$, nên ta có:
$$\frac{1}{x^4 + y^4 + z^4 + 1} \leq \frac{1}{xyz(x + y + z + t)}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

Lập luận tương tự ta có:
$$\frac{1}{y^4 + z^4 + t^4 + 1} \leq \frac{1}{yzt(x + y + z + t)}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{z^4 + t^4 + x^4 + 1} \leq \frac{1}{ztx(x + y + z + t)}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{t^4 + x^4 + y^4 + 1} \leq \frac{1}{txy(x + y + z + t)}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (3), (4), (5) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z = t; z = t = x; t = x = y$.

Cộng từng vế (2), (3), (4), (5) và chú ý $xyzt = 1$, ta có: $P \leq (1). \quad (6)$

Để thấy dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Nhận xét: Ở đây ta dựa vào bất đẳng thức (1). Nó tuy không đơn giản như bất đẳng thức (1) trong bài 1 nhưng việc sử dụng nó cũng là lẽ tự nhiên vì dựa vào cấu trúc của biểu thức P.

Bài 3. Cho x, y, z là ba số dương và $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^7 + y^7} + \frac{y^2 z^2}{y^2 z^2 + y^7 + z^7} + \frac{z^2 x^2}{z^2 x^2 + z^7 + x^7}.$$

Hướng dẫn giải

Do x, y là các số dương nên ta có:

$$(x^3 - y^3)(x^4 - y^4) > 0 \Rightarrow x^7 + y^7 \geq x^3 y^3 (x + y). \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Từ (1) có: $x^2 y^2 + x^7 + y^7 \geq x^2 y^2 + x^3 y^3 (x + y)$

$$\Rightarrow \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^7 + y^7} \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^3 y^3 (x + y)}$$

hay
$$\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^7 + y^7} \leq \frac{1}{1 + xy(x + y)} = \frac{1}{xyz + xy(x + y)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^7 + y^7} \leq \frac{1}{xy(x + y + z)}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{y^2 z^2}{y^2 z^2 + y^7 + z^7} \leq \frac{1}{yz(x + y + z)}, \quad (3)$$

$$\frac{z^2 x^2}{z^2 x^2 + z^7 + x^7} \leq \frac{1}{zx(x + y + z)}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3), (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = z, z = x$.

Cộng từng vế từng vế (2), (3), (4) và có: $P \leq 1$. (5)

Dễ thấy dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Như thế ta có $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 4. Cho x, y, z là ba số thực $\in [-1; 2]$ và thỏa mãn $x + y + z = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Hướng dẫn giải

Do $x \in [-1; 2] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$.

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Tương tự, ta có: $y^2 + y - 2 \leq 0$,
 $z^2 + z - 2 \leq 0$.

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra

$\Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = 2; z = -1$ hoặc $z = 2$.

Cộng từng vế từng vế (1), (2), (3) và do $x + y + z = 0$, nên ta có: $P \leq 6$.

Dấu bằng trong (4) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2), (3) và $x + y + z = 0$

$\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có hai số bằng -1 , một số bằng 2 . (5)

Vậy $\max P = 6 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (5).

Nhận xét: Ở đây từ $x \in [-1; 2]$, ta suy ra (1) (dựa vào định lý về dấu của tam thức bậc hai).

Bài 5. Cho x, y, z là ba số thực $\in [0; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Hướng dẫn giải

Do $x, y, z \in [0; 2]$, ta có: $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0$. (1)

Tương tự có: $y^2 - 2y \leq 0$, (2)

$z^2 - 2z \leq 0$. (3)

Dấu bằng trong (1), (2), (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) \leq 0$.

Do $x + y + z = 4 \Rightarrow P \leq 8$.

Dễ thấy dấu bằng trong (4) xảy ra

$\Leftrightarrow$ trong 3 số có một số bằng 0, hai số bằng 2. (5)

Như thế $\max P = 8 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (5).

Nhận xét:

1. Có thể làm cách khác như sau:

Do $x, y, z \in [0; 2]$

$$\Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2) \leq 0 \Rightarrow xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow xyz - \left[(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \right] + 4(x+y+z) - 8 \leq 0. \quad (*)$$

Do $x + y + z = 4$, nên từ (*) suy ra:

$$xyz - (16 - P) + 16 - 8 \leq 0 \Rightarrow P \leq 8 - xyz. \quad (**)$$

$$\text{Do } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow xyz \geq 0, \text{ nên từ } (*) \text{ suy ra: } P \leq 8 \quad (***)$$

$$\text{Dấu bằng trong } (***) \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-2)(z-2) = 0 \\ xyz = 0 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có hai số = 2, một số = 0.

Vậy $\max P = 8 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (5). Ta thu lại kết quả trên

Như vậy có hai cách xuất phát từ bất đẳng thức ban đầu. Chú ý là trong cả hai cách này đảm bảo điều kiện dấu bằng xảy ra.

2. Bây giờ xét bài toán sau: Cho $x, y, z \in [0; 2]$ và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Với bài toán này cách giải bằng cách xuất phát từ bất đẳng thức:

$$(2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \quad (6)$$

là chấp nhận được. Thật vậy dễ thấy bằng cách làm như trên:

$$(6) \Leftrightarrow P \leq 5 - xyz \leq 5$$

$$P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ (2-x)(2-y)(2-z) = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có một số bằng 0, một số bằng 1, một số bằng 2.

Vậy $\max P = 5$ khi thỏa mãn (7)

Tuy nhiên cách giải từ các bất đẳng thức: $2x - x^2 \geq 0; 2y - y^2 \geq 0; 2z - z^2 \geq 0$ là không chấp nhận được.

Thật vậy từ (8) ta có: $P - 2(x + y + z) \leq 0 \Rightarrow P \leq 6$,

$$P = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 2y - y^2 = 0 \\ 2z - z^2 = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Tuy nhiên hệ (9) vô nghiệm, vì từ $x, y, z \in [0; 2]$ mà tổng $x + y + z$ là số chẵn, nên không thỏa mãn $x + y + z = 3$. Vì thế $P < 6$. Từ đó bài toán chưa được giải.

3. Bây giờ lại xét bài toán: Cho $x, y, z \in [-1; 2]$ và $x + y + z = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Các bạn hãy thử lại xem tại sao xuất phát từ bất đẳng thức:

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2) \leq 0 \text{ thì sẽ không giải được!}$$

Bình luận: Vấn đề cốt lõi là ở chỗ: Phải xuất phát từ bất đẳng thức ban đầu thích hợp sao cho trong bất đẳng thức $P \leq a$ (hoặc $P \geq a$) phải tồn tại điểm thuộc miền xác định của P để cho dấu đẳng thức xảy ra. Chỉ khi đó mới kết luận được $\max P = a$ (hoặc $\min P = a$)!.

- Bài 6.** Cho x, y, z là các số thực $\in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x).$$

Hướng dẫn giải

Do $x, y, z \in [0; 1]$, nên ta có:

$$(1 - x^2)(1 - y) + (1 - y^2)(1 - z) + (1 - z^2)(1 - x) \geq 0. \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } (1) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3. \quad (2)$$

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow x \geq x^2 \geq x^3; y \geq y^2 \geq y^3; z \geq z^2 \geq z^3. \quad (3)$$

Nên từ (2) ta có:

$$(x^3 + y^3 + z^3) + (x^3 + y^3 + y^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3 \Rightarrow P \leq 3. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 1 \\ x = y = 1; z = 0 \\ x = z = 1; y = 0 \\ x = 0; y = z = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Vậy $\max P = 3 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (4).

Nhận xét: Bất đẳng thức xuất phát (1), dựa vào điều kiện $x, y, z \in [0; 1]$ và dạng của biểu thức P đầu bài.

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xyz + 2(1 + x + y + z + xy + yz + zx)$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\Rightarrow |x| \leq 1; |y| \leq 1; |z| \leq 1 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz \geq 0. \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } \frac{(1+x+y+z)^2}{2} \geq 0. \quad (3)$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ nên từ (3) có: } 1 + x + y + z + xy + yz + zx \geq 0. \quad (4)$$

$$\text{Cộng từng vế (2), (4) và có } P \geq 0. \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (5) xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)(1+y)(1+z) = 0 \\ 1+x+y+z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{trong ba số } x, y, z \text{ có một số bằng } -1, 2 \text{ số bằng } 0. \quad (6)$$

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (6).

Bài 8. Cho x, y, z là các số thực $\in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 1], \text{ nên ta có: } \frac{x}{1+yz} \leq \frac{x+x}{1+yz+x}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy (1) } &\Leftrightarrow x + xyz + x^2 \leq 2x + 2xyz \Leftrightarrow x^2 - x - xyz \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 1 - yz) \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Do $x \leq 1; y \geq 0; z \geq 0 \Rightarrow x - 1 - yz \leq 0$. Lại do $x \geq 0$, nên (2) đúng, vậy (1) đúng.

Mặt khác dễ thấy: $1 + yz \geq y + z$ (vì nó tương đương với $(1-y)(1-z) \geq 0$).

$$\text{Từ đó từ (1) suy ra: } \frac{x}{1+yz} \leq \frac{2x}{x+y+z}. \quad (3)$$

$$\text{Lập luận hoàn toàn tương tự có: } \frac{y}{1+zx} \leq \frac{2y}{x+y+z}, \quad (4)$$

$$\frac{z}{1+xy} \leq \frac{2z}{x+y+z}. \quad (5)$$

$$\text{Cộng từng vế (3), (4), (5) và có: } P \leq 2. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4), (5)

$$\Leftrightarrow \text{trong ba số } x, y, z \text{ có hai số bằng } 1, \text{ một số bằng } 0. \quad (7)$$

Vậy $\max P = 2 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (7).

Bài 9. Cho x, y, z là các số thực $\in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y^2 + z^3 - (xy + yz + zx)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - xyz \geq x + y + z - (xy + yz + zx). \quad (2)$$

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow x + y + z \geq x + y^2 + z^3 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 1 - xyz \geq P \quad (4)$$

$$\text{Lại do } xyz \geq 0, \text{ nên có: } P \leq 1. \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (5) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1-y)(1-z) = 0 \\ y = y^2 \\ z = z^3 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{trong ba số } x, y, z \text{ có ít nhất một số bằng } 0, \text{ ít nhất một số bằng } 1 \quad (6)$$

$$\text{Vậy } \max P = 1 \Leftrightarrow x, y, z \text{ thỏa mãn (6).}$$

Bài 10. Cho x, y, z, t là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 2$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{x^3 + y^3 + z^3 + t^3}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức: } (x-y)(x^3-y^3) \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 \geq xy^3 + yx^3 \quad (2)$$

$$\text{Lập luận tương tự ta có: } x^4 + z^4 \geq xz^3 + zx^3 \quad (3)$$

$$x^4 + t^4 \geq xt^3 + tx^3 \quad (4)$$

$$y^4 + z^4 \geq yz^3 + y^3z \quad (5)$$

$$y^4 + t^4 \geq yt^3 + y^3t \quad (6)$$

$$z^4 + t^4 \geq zt^3 + z^3t. \quad (7)$$

Cộng từng vế (2) – (7) ta có:

$$3(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) \geq x(y^3 + z^3 + t^3) + y(z^3 + t^3 + x^3) + z(t^3 + x^3 + y^3) + t(x^3 + y^3 + z^3) \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) – (7)

$$\Leftrightarrow x = y = z = t = \frac{1}{2} \text{ (do } x + y + z + t = 2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (8) suy ra } 4(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) &\geq x(x^3 + y^3 + z^3 + t) + y(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) + \\ &\quad z(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) + t(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{x^3 + y^3 + z^3 + t^3} \geq \frac{x + y + z + t}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy min } P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = t = \frac{1}{2}.$$

2. Các bài toán khác sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Trong các bài toán ở mục này, ta kết hợp nhiều cách khác nhau để sử dụng bất đẳng thức trong việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Cái đích cần đi đến là đưa về các bất đẳng thức dạng $P \geq a$ ($P \leq a$) trong các bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức (giá trị lớn nhất của biểu thức P), rồi sử dụng định nghĩa của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đã biết. Qua các bài dưới đây các bạn sẽ thấy rõ thêm tính đa dạng của phương pháp sử dụng bất đẳng thức để giải bài toán tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của chúng ta.

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực $\in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(1-z).$$

Hướng dẫn giải

Do tính bình đẳng của các biến x, y, z nên không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Từ $x, y, z \in [0; 1]$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta có:

$$\frac{(1-y) + (1-z) + (1+y+z)}{3} \geq \sqrt[3]{(1-y)(1-z)(1+y+z)}$$

$$\Rightarrow 1 \geq (1-y)(1-z)(1+y+z). \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow 1-y = 1-z = 1+y+z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

Do $x \in [0; 1]$, nên từ (1) có: $1-x \geq (1-x)(1-y)(1-z)(1+y+z)$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1-x}{1+y+z}. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sử dụng: $x \geq y \geq z \geq 0$, ta có: $\frac{y}{1+x+z} \leq \frac{y}{1+y+z}$, (3)

$$\frac{z}{x+y+1} \leq \frac{z}{1+y+z}. \quad (4)$$

Viết lại (2) dưới dạng: $(1-x)(1-y)(1-z) + \frac{x}{1+y+z} \leq \frac{1}{1+y+z}$. (5)

Cộng từng vế (3), (4), (5) suy ra: $P \leq \frac{1+y+z}{1+y+z}$ hay $P \leq 1$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3), (4) (*)

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (*).

Nhận xét:

1. Các bạn hãy thử xem cụ thể (*) là gì?

Chúng tôi đưa ra vài trường hợp của (*)

Thí dụ: $x = y = z = 1$; hoặc $x = y = 1$; $z = 0$

2. Trong bài trên ta đã kết hợp các phương pháp: sử dụng tính bình đẳng của các biến, sử dụng bất đẳng thức Côsi, ước lượng bất đẳng thức... để giải bài toán.

Bài 2. Cho x, y là các số thực dương, thỏa mãn điều kiện $xy = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng: $P = \frac{x^4 + y^4 + x^3 + y^3}{x + 1 + y + xy} = \frac{x^4 + y^4 + (x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y + 2}$

(do $xy = 1$). Rõ ràng ta có: $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ và $x^2 - xy + y^2 \geq xy$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$ (do $xy = 1$).

Từ (1) và (2) suy ra: $P \geq \frac{2x^2y^2 + xy(x+y)}{x+y+2} \Rightarrow P \geq \frac{xy(x+y+2xy)}{x+y+2} = xy = 1$.

Như vậy $P \geq 1$ và dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy ta có $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Nhận xét: Xét cách giải khác sau đây:

$$\text{Do } xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow P = \frac{x^3}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3(1+x)} = \frac{x^4}{x+1} + \frac{1}{x^3(1+x)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^4 + 1}{x^3(x+1)} = \frac{(x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x^3(x+1)} \\
 &= x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \\
 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 \\
 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, khi đó do $x > 0$ nên ta có $t \geq 2$.

Từ (1) xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$, với $t \geq 2$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 2t - 2$, và có bảng biến thiên sau:

t	$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	2	
$f'(t)$	0	-	0	+
$f(t)$				

Từ đó suy ra $\min P = \min f(t) = f(2) = 1$

($t \geq 2$). Khi $t = 2$ thì $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Như thế $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$. Ta thu lại kết quả trên!.

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện

$$6\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{10x+y+z} + \frac{1}{x+10y+z} + \frac{1}{x+y+10z}$.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng ta có: $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{3} \geq 0 \Rightarrow 6\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 2 \quad (1)$$

Từ (1) và theo giả thiết ta có:

$$1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9. \quad (3)$

Từ (2), (3) suy ra: $x + y + z \geq 9. \quad (4)$

Ta có: $\frac{4}{10x + y + z} = \frac{4}{6x + (4x + y + z)} \leq \frac{1}{6x} + \frac{1}{4x + y + z} \quad (5)$

(Dựa vào bất đẳng thức Côsi cơ bản $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \geq \frac{4}{A+B}$ khi $A > 0, B > 0$).

Lại có:

$$\frac{1}{4x + y + z} = \frac{1}{3x + (x + y + z)} = \frac{4}{12x + 4(x + y + z)} \leq \frac{1}{12x} + \frac{1}{4(x + y + z)}. \quad (6)$$

Từ (5), (6) suy ra: $\frac{4}{10x + y + z} \leq \frac{1}{6x} + \frac{1}{12x} + \frac{1}{4(x + y + z)}$
 $\Rightarrow \frac{4}{10x + y + z} \leq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4(x + y + z)} \Rightarrow \frac{1}{10x + y + z} \leq \frac{1}{16x} + \frac{1}{16(x + y + z)}. \quad (7)$

Dấu bằng trong (7) xảy ra dễ thấy $\Leftrightarrow x = y = z$.

Lập luận tương tự, có: $\frac{1}{x + 10y + z} \leq \frac{1}{16y} + \frac{1}{16(x + y + z)}, \quad (8)$

$$\frac{1}{x + y + 10z} \leq \frac{1}{16z} + \frac{1}{16(x + y + z)}. \quad (9)$$

Dấu bằng trong (8), (9) xảy ra khi $x = y = z$.

Cộng từng vế (7), (8), (9) có: $P \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{3}{16(x + y + z)} \quad (10)$

Từ (2) và (4) suy ra: $P \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16 \cdot 9} = \frac{1}{12} \quad (11)$

Dấu bằng trong (11) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 3$. Vậy $\max P = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Nhận xét: Đây là bài toán tổng hợp sử dụng đến nhiều phương pháp:

Xuất phát từ một bất đẳng thức hiển nhiên để đi đến (1). Từ (1) sử dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản để xác định các điều kiện (2) và (4). Rồi lại áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản nhiều lần để có đánh giá (11).

Bài 4. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+y}{1-y} + \frac{1+z}{1-z} - 2 \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right)$.

Hướng dẫn giải

Viết lại biểu thức P dưới dạng:

$$\begin{aligned} P &= 1 + \frac{2x}{1-x} + 1 + \frac{2y}{1-y} + 1 + \frac{2z}{1-z} - 2\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) \\ &= 2x\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{z}\right) + 2y\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{x}\right) + 2z\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{y}\right) + 3. \end{aligned}$$

Do $x + y + z = 1$, nên ta có:

$$\begin{aligned} P &= 2x\left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{z}\right) + 2y\left(\frac{1}{z+x} - \frac{1}{x}\right) + 2z\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y}\right) + 3 \\ &= \frac{-2xy}{z(y+z)} - \frac{2yz}{x(z+x)} - \frac{2zx}{y(x+y)} + 3 \\ &= 3 - 2\left(\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{xy}{z(y+z)}}\sqrt{y+z} + \sqrt{\frac{yz}{x(z+x)}}\sqrt{z+x} + \sqrt{\frac{zx}{y(x+y)}}\sqrt{x+y}\right)^2 \\ &\leq \left[\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right] [(y+z) + (z+x) + (x+y)] \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng ta lại có: } \left(\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}\right)^2 \geq 3(x+y+z) \quad (3)$$

(Dựa vào bất đẳng thức hiển nhiên $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$).

$$\text{Từ (2), (3) suy ra: } 3(x+y+z) \leq 2\left[\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right](x+y+z).$$

$$\text{Từ } x+y+z=1, \text{ nên từ (4) có: } 2\left[\frac{xy}{z(y+z)} + \frac{yz}{x(z+x)} + \frac{zx}{y(x+y)}\right] \geq 3.$$

Thay (5) vào (1) và có: $P \leq 0$.

Để thấy dấu bằng trong (6) xảy ra

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \max P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Nhận xét: Đây cũng là bài toán tổng hợp. Trước khi sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta phải thực hiện phép nhóm các số hạng để đưa P về dạng (1). Trên cơ sở (1), mới thực hiện được phép sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski.

Bài 5. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 1 + \frac{1}{2}(x^4 + y^4 + z^4) - (x^3 + y^3 + z^3).$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 2P = 2 + (x^4 + y^4 + z^4) - 2(x^3 + y^3 + z^3) \quad (*)$$

Dựa vào giả thiết: $x + y + z = 2$, ta có:

$$\begin{aligned} 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^4 + y^4 + z^4) &= x^3(2-x) + y^3(2-y) + z^3(2-z) \\ &= x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) \\ &= xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Để thấy ta có bất đẳng thức sau:

$$xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) \leq (xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2). \quad (2)$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3 \\ &\leq (x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3) + xyz(x + y + z) \end{aligned} \quad (3)$$

Do (3) đúng vì $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$. Vậy (2) đúng.

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow xyz = 0$.

Ta có theo bất đẳng thức Côsi:

$$2(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) \leq \left[\frac{2(xy + yz + zx) + (x^2 + y^2 + z^2)}{2} \right]^2 = \frac{(x + y + z)^4}{4}$$

$$\text{Do } x + y + z = 2, \text{ nên ta có: } 2(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 4. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\text{Từ (1), (2), (4) suy ra: } 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^4 + y^4 + z^4) \leq 2. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) và (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có hai số = 1, một số = 0.

$$\text{Từ (*) có } 2P = 2 - [2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^4 + y^4 + z^4)] \quad (7)$$

$$\text{Từ (6), (7) suy ra: } P \geq 0. \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (6)

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (6).

Nhận xét: Việc sử dụng bất đẳng thức (2) là điều phải khéo léo mới nhận ra.

Bài toán là sự kết hợp nhuần nhuyễn giữa phương pháp sử dụng một bất đẳng thức đã biết trước với việc áp dụng bất đẳng thức Côsi.

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x \geq y \geq z \\ 32 - 3x^2 = z^2 = 16 - 4y^2. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = xy + yz + zx$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, ta có: $y^2 = \frac{16 - z^2}{4}$; $x^2 = \frac{32 - z^2}{3}$.

Do $y \geq z > 0 \Rightarrow y^2 \geq z^2 \Rightarrow \frac{16 - z^2}{4} \geq z^2 \Rightarrow 5z^2 \leq 16 \Rightarrow 0 < z \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$. (1)

Ta có: $x^2 - 3y^2 = \frac{32 - z^2}{3} - \frac{48 - 3z^2}{4} = \frac{5z^2 - 16}{12}$. (2)

Do $5z^2 \leq 16$, nên từ (2) suy ra: $x^2 - 3y^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3y^2$

$\Rightarrow x \leq y\sqrt{3}$ (do $x > 0, y > 0$)

$\Rightarrow xy \leq \sqrt{3}y^2$ (do $y > 0$) (3)

Ta có: $xz = \sqrt{3} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} z \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x^2}{3} + z^2 \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (y^2 + z^2)$, (4)

$yz \leq \frac{1}{2} (y^2 + z^2)$. (5)

Từ (3), (4), (5) có: $P \leq \sqrt{3}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2)$

$\Rightarrow P \leq \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) y^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) z^2$. (6)

Do $y^2 = \frac{16 - z^2}{4}$, nên từ (6) ta có:

$P \leq \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} \left(\frac{16 - z^2}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right) z^2 \Rightarrow P \leq 2(3\sqrt{3} + 1) + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{8} \right) z^2$. (7)

Do (1), nên từ (7) có: $P \leq 2(3\sqrt{3} + 1) + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{8} \right) \frac{16}{5} \Rightarrow P \leq \frac{32\sqrt{3} + 16}{5}$. (8)

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (1), (3), (4), (5) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = z \\ \frac{x}{\sqrt{3}} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ y = z = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{32\sqrt{3} + 16}{5} \Leftrightarrow x, y, z \text{ thỏa mãn (4).}$$

Bình luận: Đây là bài toán tổng hợp về việc sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức.

Dựa vào điều kiện và dùng nhiều bất đẳng thức phụ (1), (3), (4), (5) ta có đánh giá về P (xem (6)). Từ đó suy ra max P.

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực dương, thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét đại lượng: } Q = \frac{y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{x^3}{z^2 + zx + x^2}.$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} P - Q &= \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 - z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 - x^3}{z^2 + zx + x^2} \\ &= (x - y) + (y - z) + (z - x) = 0. \end{aligned}$$

Vậy $P = Q$. Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \\ &= (x + y) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} + (y + z) \frac{y^2 - yz + z^2}{y^2 + yz + z^2} + (z + x) \frac{z^2 - zx + x^2}{z^2 + zx + x^2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta nhận thấy: } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Thật vậy do $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow 3x^2 - 3xy + 3y^2 \geq x^2 + xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0. \quad (3)$$

Vì (3) hiển nhiên đúng nên (2) đúng. Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Tương tự, ta có: $\frac{y^2 - yz + z^2}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{1}{3}; \frac{z^2 - zx + x^2}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{1}{3}.$ (4)

Từ (1), (2), (4) suy ra: $2P \geq \frac{1}{3}(x+y) + \frac{1}{3}(y+z) + \frac{1}{3}(z+x) \Rightarrow P \geq \frac{x+y+z}{3}.$ (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z.$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản thì: $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$

Do $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \Rightarrow (x+y+z) \geq 3.$ (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Bây giờ kết hợp (5), (6) có $P \geq 1.$ (7)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (5), (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Tóm lại min $P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Bình luận: Rõ ràng đây là sự tổng hợp của các phương pháp từ biến đổi đại số, sử dụng bất đẳng thức cho trước (các bất đẳng thức (2), (4)), cho đến sử dụng bất đẳng thức Côsi dùng để giải bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của P đặt ra.

Bài 8. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$(x+y)(x+z) = \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right] \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{z})^2 \right] \geq (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow (x+y)(x+z) \geq (x + \sqrt{yz})^2. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra: $\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{x}{2x + \sqrt{yz}}.$ (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow y = z.$

Tương tự ta có: $\frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq \frac{y}{2y + \sqrt{zx}},$ (3)

$$\frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{z}{2z + \sqrt{xy}}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3), (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = x; x = y.$

Cộng từng vế (2), (3), (4) và có: $P \leq \frac{x}{2x + \sqrt{yz}} + \frac{y}{2y + \sqrt{zx}} + \frac{z}{2z + \sqrt{xy}}$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z}{x}}} + \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{x}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{z}}} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3), (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z.$$

Đặt $a = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z}{x}}$; $b = \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}}$; $c = \sqrt{\frac{x}{z}} \cdot \sqrt{\frac{y}{z}}$, thì $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $abc = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó VP(5)} &= \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \\ &= \frac{(2+b)(2+c) + (2+c)(2+a) + (2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)} \\ &= \frac{12 + 4(a+b+c) + (ab+bc+ca)}{8 + 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + abc} \\ &= \frac{9 + 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3}{9 + 4(a+b+c)(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)} \quad (6) \quad (\text{do } abc = 1) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi thì: $ab + bc + ca \geq 3\sqrt{(abc)^2} = 3$. (7)

Từ (6), (7) suy ra: $\text{VP(5)} \leq 1 \Rightarrow P \leq 1$. (8)

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Nhận xét:

1. Bài toán là sự kết hợp giữa việc sử dụng các bất đẳng thức Bunhiacopski, bất đẳng thức Côsi. Đó là một bài toán tổng hợp.
2. Ta còn có cách giải khác như sau:

Ta sẽ chứng minh với $x, y, z > 0$, thì: $\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ (8)

Thật vậy (8) $\Leftrightarrow x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + x\sqrt{z} \leq x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{(x+y)(x+z)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \sqrt{(x+y)(x+z)}$$

$$\Leftrightarrow x(y+z+2\sqrt{yz}) \leq x^2 + xz + xy + yz$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{yz} \leq x^2 + yz \Leftrightarrow 0 \leq (x - \sqrt{yz})^2. \quad (9)$$

Vì (9) đúng, vậy (8) đúng. Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{yz}$.

Lập luận tương tự, ta có:
$$\frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}, \quad (10)$$

$$\frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}. \quad (11)$$

Dấu bằng trong (10), (11) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = \sqrt{zx}; z = \sqrt{xy}$.

Cộng từng vế (8), (10), (11) ta có: $P \leq 1$ (12)

Dấu bằng trong (11) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (8), (10), (11)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{yz} \\ y = \sqrt{zx} \\ z = \sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z > 0.$$

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0$. Ta thu lại kết quả trên.

Bình luận: Cách giải này chỉ dựa vào các bất đẳng thức biết trước (8), (10), (11). Tuy nhiên nó không tự nhiên ở chỗ vì sao lại xuất phát từ các bất đẳng thức ấy!.

Bài 9. Cho x, y, z là ba số dương và $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^2 + 3xy + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^5 - y^2 + 3yz + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^5 - z^2 + 3xz + 6}}. \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^5 - x^2 + 6 - (3x + 3) &= x^5 - x^2 - 3x + 3 = x^2(x^3 - 1) - 3(x - 1) \\ &= (x - 1)[x^2(x^2 + x + 1) - 3] = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 - 3) \\ &= (x - 1)[(x^4 - 1) + (x^3 - 1) + (x^2 - 1)] = (x - 1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x + 3) \end{aligned} \quad (2)$$

Do $x > 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 3x > 0$, nên từ (2) suy ra: $x^5 - x^2 + 6 \geq 3x + 3$

$$\Rightarrow x^5 - x^2 + 6 + 3xy \geq 3(xy + x + 1) \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^2 + 6 + 3xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(xy + x + 1)}}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{1}{\sqrt{y^5 - y^2 + 3yz + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(yz + y + 1)}}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^5 - z^2 + 3xz + 6}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(zx + z + 1)}}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4), (5) xảy ra tương ứng $\Leftrightarrow y = 1, z = 1$.

Cộng từng vế (3), (4), (5) và có

$$P \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+1}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+1}} \right). \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4), (5)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \right) (1+1+1) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+1}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+1}} \right)^2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{xy+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+1}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+1}} \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow xy+x+1 = yz+y+1 = zx+z+1$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1 \text{ (do } xyz = 1 \text{)}.$$

$$\text{Từ (6), (7), ta có } P \leq \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}. \quad (8)$$

Vì $xyz = 1$, nên:

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} &= \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{1+xy+x} + \frac{xy}{x+1+xy} \\ &= \frac{1+x+xy}{xy+x+1} = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Thay (9) vào (8) và có: $P \leq 1$. (10)

Dấu bằng trong (10) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6), (7)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bình luận: Bài này là sự kết hợp giữa việc sử dụng một bất đẳng thức đã biết trước (trong bài này là các bất đẳng thức (3), (4), (5)) và bất đẳng thức Bunhiacopski. Cái khó ở đây là phát hiện ra (3), (4), (5).

Như vậy một lần nữa các bạn thấy để giải một bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất nhiều khi phải khéo léo kết hợp nhiều phương pháp khác nhau, chứ không đơn thuần chỉ dùng một phương pháp là đủ!

Bài 10. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (xy + yz + zx)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{9 - x^2 - y^2 - z^2}{2}.$$

Vậy P có dạng: $P = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{9 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}$

$$\Rightarrow 2P = x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) - 9. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 3x & (2) \\ y^2 + \sqrt{y} + \sqrt{y} \geq 3y & (3) \\ z^2 + \sqrt{z} + \sqrt{z} \geq 3z & (4) \end{cases}$$

Dấu bằng trong (2), (3), (4) tương ứng xảy ra khi $x^2 = \sqrt{x}$; $y^2 = \sqrt{y}$; $z^2 = \sqrt{z}$

$\Leftrightarrow x = 1$; $y = 1$; $z = 1$ (do $x, y, z > 0$).

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3(x + y + z) = 9. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (chú ý lúc đó thỏa mãn: $x + y + z = 3$).

Từ (1), (5) có: $P \geq 0$.

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán là đưa P về dạng (1), sau đó sử dụng phương pháp thêm bớt hạng tử khi dùng bất đẳng thức Côsi.

Bài 11. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện:

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x^2 + 2y + 3} + \frac{y}{y^2 + 2z + 3} + \frac{z}{z^2 + 2x + 3}$$

Hướng dẫn giải

Vì $x^2 + 1 \geq 2x$; $y^2 + 1 \geq 2y$; $z^2 + 1 \geq 2z$, nên ta có

$$P \leq \frac{x}{2(x + y + 1)} + \frac{y}{2(y + z + 1)} + \frac{z}{2(z + x + 1)}.$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ (khi đó thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$).

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x + y + 1} + \frac{y}{y + z + 1} + \frac{z}{z + x + 1} &= \left(1 - \frac{y + 1}{x + y + 1}\right) + \left(1 - \frac{z + 1}{y + z + 1}\right) + \left(1 - \frac{x + 1}{z + x + 1}\right) \\ &= 3 - \left(\frac{y + 1}{x + y + 1} + \frac{z + 1}{y + z + 1} + \frac{x + 1}{z + x + 1}\right). \end{aligned}$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y+1}{x+y+1} + \frac{z+1}{y+z+1} + \frac{x+1}{z+x+1} \right) \\ &\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \right]. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \geq \\ &\frac{(y+1+z+1+x+1)^2}{(y+1)(x+y+1) + (z+1)(y+z+1) + (x+1)(z+x+1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Để ý rằng do: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, nên ta có:

$$\begin{aligned} &(y+1)(x+y+1) + (z+1)(y+z+1) + (x+1)(z+x+1) \\ &= 3(x+y+z) + xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2 + 3 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 9 + 6x + 6y + 6z + 2xy + 2yz + 2zx) = \frac{1}{2}(x+y+z+3)^2 \quad (5) \end{aligned}$$

Từ (4), (5) suy ra: $\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)} \geq 2.$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Từ (3), (5) suy ra: $P \leq \frac{1}{2}$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (6)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $\max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Bình luận: Rõ ràng đây là bài toán kết hợp bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Svac-xơ cùng với nhiều phép biến đổi đại số.

Bài 12. Cho x, y, z là các số thực $\in [-1; 1]$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có nhận xét sau đây: Nếu $ab \geq 0$; a, b và $a + b$ đều ≥ -1 . Khi đó

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{1+a+b}$$

Thật vậy sau khi bình phương cả hai vế của (1), ta có:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow 2 + a + b + 2\sqrt{(1+a)(1+b)} &\geq 2 + a + b + 2\sqrt{1+a+b} \\ \Leftrightarrow (1+a)(1+b) &\geq 1 + a + b \Leftrightarrow ab \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2) đúng suy ra (1) đúng. Nhận xét được chứng minh.

Rõ ràng trong ba số $x + y^2$, $y + z^2$, $z + x^2$ có ít nhất hai số hạng cùng dấu. Vì thế có thể giả sử (mà không làm mất tính tổng quát) $(x + y^2)(y + z^2) \geq 0$.

Từ (2) và theo (1), ta có: $\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} \geq 1 + \sqrt{1+x+y^2+y+z^2}$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} &\geq 1 + \sqrt{1+x+y^2+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \\ \Rightarrow P &\geq \sqrt{1+(\sqrt{1-z+z^2})^2+y^2} + \sqrt{(\sqrt{1+z})^2+x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

(Chú ý: do $x + y = -z$ vì $x + y + z = 0$).

Áp dụng nhận xét sau đây: Với mọi số thực a, b, c, d ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}. \quad (*)$$

Từ đó ta có:

$$\sqrt{(\sqrt{1-z+z^2})^2+y^2} + \sqrt{(\sqrt{1+z})^2+x^2} \geq \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + (x+y)^2}. \quad (4)$$

Từ (3), (4) và do $x + y + z = 0$, nên có: $P \geq 1 + \sqrt{(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + z^2} \quad (5)$

Ta lại có: $(\sqrt{1-z+z^2} + \sqrt{1+z})^2 + z^2$

$$\begin{aligned} &= 1 - z + z^2 + 1 + z + 2\sqrt{(1-z+z^2)(1+z)} + z^2 \\ &= 2 + 2z^2 + 2\sqrt{1-z^2+z^2+z^3} = 2z^2 + 2 + 2\sqrt{1+z^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ta sẽ chứng minh: $2z^2 + 2 + 2\sqrt{1+z^3} \geq 4$. (7)

Thật vậy (7) $\Leftrightarrow z^2 + 1 + \sqrt{1+z^3} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+z^3} \geq 1 - z^2$.

Do $1 - z^2 \geq 0$ nên (7) $\Leftrightarrow 1 + z^3 \geq 1 - 2z^2 + z^4 \Leftrightarrow z^3 + 2z^2 - z^4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow z^2(z + 2 - z^2) \geq 0. \quad (8)$$

Do $z \in [-1; 1] \Rightarrow z - z^2 \geq -2 \Rightarrow z + 2 - z^2 \geq 0$, vậy (8) đúng $\Rightarrow$ (7) đúng.

Từ (5), (7) suy ra $P \geq 3$. (9)

Dấu bằng trong (9) xảy ra dễ thấy $\Leftrightarrow x = y = z = 0$ (các bạn tự nghiệm lại).

Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Bình luận: Bài toán thực sự là bài toán tổng hợp. Mấu chốt là dựa vào bất đẳng thức (1), để suy ra đánh giá (3). Lại dựa vào bất đẳng thức hiển nhiên (*), để có đánh giá (5). Sau đó lại dựa vào bất đẳng thức (7) để có đánh giá (9).

Bài 13. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện: $xyz = 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(1+y^3)(1+z^3)}} + \frac{z^2}{\sqrt{(1+z^3)(1+x^3)}}$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: $\forall a$ thì $4(1+a^3) \leq (a^2+2)^2$.

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow 4 + 4a^3 \leq a^4 + 4a^2 + 4 \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-2)^2 \geq 0$.

Do (2) đúng nên (1) đúng.

Áp dụng (1) ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4x^2}{\sqrt{4(1+x^3)4(1+y^3)}} + \frac{4y^2}{\sqrt{4(1+y^3)4(1+z^3)}} + \frac{4z^2}{\sqrt{4(1+z^3)4(1+x^3)}} \\ &\geq \frac{4x^2}{(2+x^2)(2+y^2)} + \frac{4y^2}{(2+y^2)(2+z^2)} + \frac{4z^2}{(2+z^2)(2+x^2)}. \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x^2}{4}; \quad b = \frac{y^2}{4}; \quad c = \frac{z^2}{4}.$$

Khi đó do $x, y, z > 0$ và $xyz = 8 \Rightarrow a > 0, b > 0, c > 0$ và $abc = 1$.

Lúc đó từ (3) suy ra.

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{16a}{(2+4a)(2+4b)} + \frac{16b}{(2+4b)(2+4c)} + \frac{4c}{(2+4c)(2+4a)} \\ \text{hay } P &\geq 4 \left[\frac{a}{(1+2a)(1+2b)} + \frac{b}{(1+2b)(1+2c)} + \frac{c}{(1+2c)(1+2a)} \right] \\ \Rightarrow P &\geq 4 \frac{a(1+2c) + b(1+2a) + c(1+2b)}{(1+2a)(1+2b)(1+2c)} \\ \Rightarrow P &\geq 4 \frac{a+b+c+2(ab+bc+ca)}{1+2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)+8abc} \quad (4) \end{aligned}$$

Ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$,

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3,$$

$$\Rightarrow a+b+c+2(ab+bc+ca) \geq 9 = 1+8abc$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+8abc) + [2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca)] \\ \leq 3[(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)]. \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (4), (5) suy ra: } P \geq \frac{4}{3}.$$

Dễ thấy dấu bằng trong (6) xảy ra

$$\Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=2.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x=y=z=2.$$

Bài 14. Cho x, y, z, t là các số dương và thỏa mãn điều kiện: $xyzt = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có nhận xét sau: Với mọi số dương a, b ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}. \quad (1)$$

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (2+2a+2b+a^2+b^2)(1+ab) \geq (1+2a+a^2)(1+2b+b^2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2+2(a+b)+a^2+b^2+2ab+2ab(a+b)+ab(a^2+b^2) \geq \\ &\quad 1+2b+b^2+2a+4ab+a^2+2ab(a+b)+a^2b^2 \\ &\Leftrightarrow 1+ab(a^2+b^2) \geq 2ab+a^2b^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Do $a > 0, b > 0$ nên $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$\Rightarrow 1+ab(a^2+b^2) \geq 2a^2b^2+1 \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Xét hiệu: $(2a^2b^2+1) - (2ab+a^2b^2) = a^2b^2 - 2ab + 1 = (ab-1)^2$.

$$\text{Vậy } 2a^2b^2+1 \geq 2ab+a^2b^2. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow ab = 1$.

Từ (2), (3), (4) suy ra (2) đúng, tức là (1) đúng

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4)

$$\Leftrightarrow a = b = 1.$$

$$\text{Áp dụng nhận xét (1), ta có: } P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zt}. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t = 1.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zt} = \frac{1+zt+1+xy}{(1+xy)(1+zt)} = \frac{2+xy+zt}{1+xy+zt+xyzt} = 1 \quad (\text{do } xyzt = 1).$$

$$\text{Vậy từ (4) có: } P \geq 1. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

Nhận xét: Quan trọng nhất là biết dùng bất đẳng thức phụ (1).

Bài 15. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng:

$$P = 1 - \frac{x}{x+1} + 1 - \frac{y}{y+1} + 1 - \frac{z}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} &= \frac{(y+1)(z+1) + (x+1)(z+1) + (x+1)(y+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)} \\ &= \frac{(xy + yz + zx) + 2(x + y + z) + 3}{xyz + (xy + yz + zx) + (x + y + z) + 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ giả thiết ta có: } x + y + z \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad (3)$$

$$\text{nhưng: } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{yz} + \frac{z^2}{zx} \geq \frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} \quad (4)$$

(theo bất đẳng thức Svac-xơ)

$$\text{Từ (3), (4) suy ra: } x + y + z \geq \frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} \Rightarrow 1 \geq \frac{x + y + z}{xy + yz + zx}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq x + y + z. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Ta lại có: } x + y + z \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{1}{3} \left(2\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{1}{3} \left(2\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{3} \left(2\frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right).$$

$$\text{Vi: } \frac{2\frac{x}{y} + \frac{y}{z}}{3} = \frac{\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}, \text{ nên tương tự ta có:}$$

$$\frac{1}{3} \left(2\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}; \quad \frac{1}{3} \left(2\frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

$$\text{Từ (6), (7) suy ra: } x + y + z \geq \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1.$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VP(2) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(xy + yz + zx) + 2(x + y + z) + 3}{xyz + (xy + yz + zx) + (x + y + z) + 1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 6}{3xyz + 3(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) + 3}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ (8) suy ra: } 3xyz + 3 \geq 6,$$

$$3(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) = 2(xy + yz + zx) + (xy + yz + zx) + 3(x + y + z).$$

Do (5) suy ra: $3(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) \geq 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z)$.

Thay (10), (11) vào (9) suy ra $VP(2) \leq \frac{3}{2}$, từ đó theo (2) có:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng trong (12) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (1), (12) ta có: $P \geq \frac{3}{2}$.

Dấu bằng trong (13) xảy ra

$\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong các bất đẳng thức (5), (6), (7), (8), (11)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bình luận: Rõ ràng đây là bài toán tổng hợp, sử dụng rất nhiều bất đẳng thức phụ, bất đẳng thức Cô-si, bất đẳng thức Svac-xơ, ... để giải bài toán.

Bài 16. Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3}} + \sqrt{\frac{y^3}{y^3 + (z+x)^3}} + \sqrt{\frac{z^3}{z^3 + (x+y)^3}}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có nhận xét sau: với mọi x, y, z là các số thực dương, ta có:

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3}} \geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\text{Thật vậy: (1) } \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3 + (y+z)^3} \geq \frac{x^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 [x^4 + 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2] \geq x^7 + x^4(x+z)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 \geq x(y+z)^3.$$

Theo bất đẳng thức Cô Si, ta có:

$$2x^2 + 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 \geq 2\sqrt{2x^2(y^2 + z^2)^3}.$$

$$\text{Rõ ràng: } 2(y^2 + z^2) \geq (y+z)^2.$$

$$\text{Từ (3), (4) suy ra: } 2x^2(y^2 + z^2) + (y^2 + z^2)^2 \geq \sqrt{x^2(y+z)^6} = x(y+z)^3.$$

Từ (4) suy ra (2) đúng, vậy (1) đúng. Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow y = z$.

Tương tự (1) ta có:

$$\sqrt{\frac{y^3}{y^3 + (z+x)^3}} \geq \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\sqrt{\frac{z^3}{z^3 + (x+y)^3}} \geq \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dấu bằng trong (6), (7) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = x; x = y$.

Cộng từng vế (1), (5), (6) và có: $P \geq 1$.

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (5), (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z > 0$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Bài 17. Cho $x, y, z \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{1+y^2+z^2} + \frac{y}{1+z^2+x^2} + \frac{z}{1+x^2+y^2}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left[x(1+y^2+z^2) + y(1+z^2+x^2) + z(1+x^2+y^2) \right] \left(\frac{x}{1+y^2+z^2} + \frac{y}{1+z^2+x^2} + \frac{z}{1+x^2+y^2} \right) \geq (x+y+z)^2.$$

(1)

Từ (1) và do $x + y + z = 1$, ta có:

$$P \geq \frac{1}{x(1+y^2+z^2) + y(1+z^2+x^2) + z(1+x^2+y^2)}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{Đặt } Q &= x(1+y^2+z^2) + y(1+z^2+x^2) + z(1+x^2+y^2) \\ &= (x+y+z) + xy(x+y) + yz(z+y) + zx(z+x) \\ &= 1 + xy(x+y) + yz(z+y) + zx(z+x) \\ &= 1 + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y). \end{aligned}$$

$$\text{Có thể thấy rằng: } x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \leq \frac{1}{4}$$

(bạn đọc thử nghiệm lại xem!)

$$\text{Từ đó có: } Q \leq \frac{5}{4}.$$

$$\text{Từ (2), (3) suy ra: } P \geq \frac{4}{5}. \text{ Vậy } \min P = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = y = \frac{1}{2}; z = 0.$$

Bài 18. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x^4 + y^4 + z^4 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^5y^5 + y^5z^5 + z^5x^5$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi (cho 4 số), ta có:

$$x^4 + y^4 + 1 + 1 \geq 4xy \Rightarrow x^4y^4(x^4 + y^4 + 2) \geq 4x^5y^5. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow |x| = |y|$.

$$\text{Tương tự, ta có: } x^4z^4(y^4 + z^4 + 2) \geq 4y^5z^5, \quad (2)$$

$$z^4x^4(z^4 + x^4 + 2) \geq 4z^5x^5. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2), (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow |y| = |z|; |z| = |x|$.

Cộng từng vế (1), (2), (3) và có:

$$4P \leq x^4y^4(x^4 + y^4 + 2) + y^4z^4(y^4 + z^4 + 2) + z^4x^4(z^4 + x^4 + 2). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1), (2), (3)

$$\Leftrightarrow |x| = |y| = |z|.$$

Đặt $a = x^4; b = y^4; c = z^4$, ta có $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ và $a + b + c = x^4 + y^4 + z^4 = 3$.

Khi đó $VP(4) = ab(a + b + 2) + bc(b + c + 2) + ca(c + a + 2)$

$$\begin{aligned} &= ab(5 - c) + bc(5 - a) + ca(5 - b) \quad (\text{do } a + b + c = 3) \\ &= 5(ab + bc + ca) - 3abc. \end{aligned} \quad (5)$$

Rõ ràng ta có bất đẳng thức sau: $(a + b - c)(b + c - a)(a + c - b) \leq abc$ (6)

$$\Rightarrow (3 - 2c)(3 - 2a)(3 - 2b) \leq abc$$

$$\Rightarrow 27 - 18(a + b + c) + 12(ab + bc + ca) - 8abc \leq abc$$

$$\Rightarrow 12(ab + bc + ca) - 9abc \leq 27 \Rightarrow 4(ab + bc + ca) - 3abc \leq 9. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$\text{Ta có: } ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$\text{Từ (6), (7) có: } 5(ab + bc + ca) - 3abc \leq 12. \quad (8)$$

$$\text{Từ (4), (5), (8) suy ra: } 4P \leq 12 \Rightarrow P \leq 3. \quad (9)$$

Dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6), (7), (8)

$$\Leftrightarrow a = b = c = 1$$

$$\Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = 1.$$

Vậy $\max P = 3 \Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = 1$.

Nhận xét:

1. Đây là bài toán tổng hợp sử dụng nhiều bất đẳng thức.
2. (6) Chứng minh như sau:

Ta chỉ xét khi $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0$ (vì $abc > 0$).

Chỉ có hai khả năng:

- a) Có hai thừa số âm, một thừa số dương. Giả sử

$$\begin{cases} a + b - c < 0 \Rightarrow 2b < 0 \Rightarrow b < 0 \text{ (vô lí vì } b \geq 0) \\ b + c - a < 0 \Rightarrow \text{không xảy ra trường hợp này.} \end{cases}$$

- b) Cả ba thừa số dương

$$\text{Đặt } X = a + b - c; Y = b + c - a; Z = c + a - b \Rightarrow X > 0; Y > 0; Z > 0$$

Ta có theo bất đẳng thức Côsi: $(X + Y)(Y + Z)(Z + X) \geq 8XYZ$

$$\Rightarrow 8abc \geq 8(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

$\Rightarrow$ (6) được chứng minh!.

Bài 19.

1. Cho $x, y \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
2. Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Hướng dẫn giải

$$1. \text{ Do } x, y \in [1; 2] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1; y = 2 \text{ còn } \frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = 2, y = 1 \right).$$

Từ (1) suy ra:

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{y} - 2 \right) \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y} \right)^2 - \frac{5}{2} \left(\frac{x}{y} \right) + 1 \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{x}{y} \right). \quad (2)$$

$$\text{Do vai trò bình đẳng giữa } x, y \text{ nên ta cũng có: } \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế (2), (3) và có: } \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right). \quad (4)$$

$$\text{Do } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 0, \text{ nên từ (4) có: } P = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{5}{2}. \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (5) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \end{cases}.$$

2. Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z nên ta có thể giả sử y là số hạng giữa trong ba số x, y, z . Khi đó ta có:

$$Q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq 1 + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}. \quad (7)$$

Thật vậy (7)

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{z} + 1 - \frac{x}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{xy - y^2 + yz - zx}{yz} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(y-z)}{yz} \geq 0. \quad (8)$$

Do y là số hạng giữa nên (8) đúng vậy (7) đúng

Theo phần 1. ta có $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$, vậy từ (7) suy ra: $Q \leq \frac{7}{2} \quad \forall x, y, z \in [1; 2]$.

Mặt khác chẳng hạn khi: $x=1; y=1; z=2$ thì $Q = \frac{7}{2}$.

Do đó $\max Q = \frac{7}{2}$.

Bài 20. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $|6x - 3y| \leq 9$ và $|x - 3y| \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2 + xy + y^2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } |6x - 3y| \leq 9; |x - 3y| \leq 1, \quad (1)$$

$$|2x - y| \leq 3; |2x - 6y| \leq 2. \quad (2)$$

Sử dụng tính chất sau đây của giá trị tuyệt đối:

$$|A + B| \leq |A| + |B| \text{ và dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow AB \geq 0.$$

Từ (1), (2) ta có:

$$|5x| = |(6x - 3y) + (3x - y)| \leq |6x - 3y| + |3x - y| \leq 9 + 1 = 10,$$

$$|5y| = |(2x - y) + (6y - 2x)| \leq |2x - y| + |2x - 6y| \leq 3 + 2 = 5.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } |x| \leq 2, \quad (3)$$

$$|y| \leq 1. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow (6x - 3y)(3y - x) \geq 0.$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow (2x - y)(6y - 2x) \geq 0$.

$$\text{Ta có } P = x^2 + xy + y^2 \leq x^2 + |xy| + y^2. \quad (5)$$

$$\text{Thay (3), (4) vào (5) và có: } P \leq 4 + 2 + 1 = 7. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 2; |y| = 1 \\ x, y \text{ cùng dấu} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max P = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = -2; y = -1. \end{cases}$$

Bài 21. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x(y + z) + z(x + y)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } P \text{ dưới dạng: } P = (xy + yz + zx) + xz. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } P_1 = xy + yz + zx; P_2 = xz. \text{ Khi đó từ (1) có: } P = P_1 + P_2. \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } (x + y + z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0 \\ \Rightarrow 1 + 2P_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow P_1 \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } \min P_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Lại có: } |P_2| = |xz| = |x||z| \leq \frac{1}{2}(x^2 + z^2) = \frac{1}{2}(1 - y^2) \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (4) suy ra: } \min P_2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Do hệ } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \\ x = -z \end{cases} \quad (6)$$

có nghiệm (chẳng hạn $x = \frac{\sqrt{2}}{2}; y = 0; z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ là nghiệm của hệ (6))

Vậy theo tính chất 5 của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (Xem bài 3 – chương 1 cuốn sách này), ta có:

$$\min P = \min P_1 + \min P_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Bài 22. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^4(x+y)} + \frac{1}{y^4(y+z)} + \frac{1}{z^4(z+x)}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng: $P = \frac{\frac{1}{x^4}}{x+y} + \frac{\frac{1}{y^4}}{y+z} + \frac{\frac{1}{z^4}}{z+x}.$ (1)

Theo bất đẳng thức Svac-sơ, ta có $P \geq \frac{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)^2}{(x+y) + (y+z) + (z+x)}$

$$\Rightarrow P \geq \frac{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)^2}{2(x+y+z)}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Rõ ràng ta có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (2) (3) suy ra $P \geq \frac{\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)^2}{2(x+y+z)}.$ (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Do $xyz = 1$, nên từ (4) rút gọn ta có $P \geq \frac{x+y+z}{2}.$ (5)

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$ (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (5) (6) có $P \geq \frac{3}{2}$ (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (5) (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Nhận xét:

1. Đây là bài toán tổng hợp, sử dụng đến nhiều bất đẳng thức Svac-xơ, Côsi,... trong quá trình giải toán.
2. Ta có cách giải khác như sau:

Đặt $x = \frac{1}{X}$; $y = \frac{1}{Y}$; $z = \frac{1}{Z}$ khi đó ta có X, Y, Z là các số thực dương và $XYZ = 1$ (do $xyz = 1$).

$$\text{Lúc đó } P = \frac{X^4XY}{X+Y} + \frac{Y^4YZ}{Y+Z} + \frac{Z^4ZX}{Z+X} = \frac{X^4}{(X+Y)Z} + \frac{Y^4}{(Y+Z)X} + \frac{Z^4}{(Z+X)Y}. \quad (8)$$

(do $XYZ = 1$)

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{X^4}{(X+Y)Z} + \frac{(X+Y)Z}{4} \geq X^2. \quad (9)$$

$$\text{Tương tự, có } \frac{Y^4}{(Y+Z)X} + \frac{(Y+Z)X}{4} \geq Y^2, \quad (10)$$

$$\frac{Z^4}{(Z+X)Y} + \frac{(Z+X)Y}{4} \geq Z^2. \quad (11)$$

Cộng từng vế (9) (10) (11) và có:

$$P + \frac{XY + YZ + ZX}{2} \geq X^2 + Y^2 + Z^2. \quad (12)$$

Dấu bằng trong (12) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (9) (10) (11)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1.$$

Do $X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$, nên ta có từ (12):

$$P \geq \frac{XY + YZ + ZX}{2}. \quad (13)$$

Dấu bằng trong (13) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1$.

$$\text{Lại theo bất đẳng thức Côsi thì } XY + YZ + ZX \geq 3\sqrt{(XYZ)^2} = 3. \quad (14)$$

Dấu bằng trong (14) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1$.

$$\text{Từ (13) (14) suy ra } P \geq \frac{3}{2}. \quad (15)$$

Dấu bằng trong (15) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (13) (14)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$. Ta thu lại kết quả trên.

Bài 23. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3 + 2z^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3 + 2x^3 + 6}}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với hai dãy

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}}; a_2 = \frac{1}{\sqrt{y^3 + 2z^3 + 6}}; a_3 = \frac{1}{\sqrt{z^3 + 2x^3 + 6}}$$

$b_1 = b_2 = b_3 = 1$, ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3 + 2z^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3 + 2x^3 + 6}} \right)$$

$$\leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{x^3 + 2y^3 + 6} + \frac{1}{y^3 + 2z^3 + 6} + \frac{1}{z^3 + 2x^3 + 6} \right)}$$

$$\text{hay } P \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{x^3 + 2y^3 + 6} + \frac{1}{y^3 + 2z^3 + 6} + \frac{1}{z^3 + 2x^3 + 6} \right)}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x^3 + 2y^3 + 6 = (x^3 + y^3 + 1) + (y^3 + 1 + 1) + 3 \geq 3xy + 3y + 3$$

$$\Rightarrow x^3 + 2y^3 + 6 \geq 3(xy + y + 1) \quad (2)$$

$$\text{Tương tự có } y^3 + 2z^3 + 6 \geq 3(yz + z + 1), \quad (3)$$

$$z^3 + 2x^3 + 6 \geq 3(zx + x + 1). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (2) (3) (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1; y = z = 1; z = x = 1$.

$$\text{Thay (2) (3) (4) vào (1), và có } P \leq \sqrt{\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1}}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Do $xyz = 1$, nên dễ thấy

$$\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} = \frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{xy + y + 1} + \frac{y}{xy + y + 1} = 1 \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) (6) suy ra } P \leq 1 \quad (7)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Vậy } \max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Nhận xét:

1. Cách giải trên là sự phối hợp giữa việc sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, bất đẳng thức Côsi và biến đổi đại số đơn giản.

2. Xét cách giải khác sau đây: Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1 + \frac{9}{x^3 + 2y^3 + 6} \geq \frac{6}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}}. \quad (8)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có

$$\begin{aligned} & \left[(x^3 + 2) + (y^3 + 2) + (y^3 + 2) \right] \left(\frac{1}{x^3 + 2} + \frac{1}{y^3 + 2} + \frac{1}{y^3 + 2} \right) \geq 9 \\ \Rightarrow & \frac{9}{x^3 + 2y^3 + 6} \leq \frac{1}{x^3 + 2} + \frac{2}{y^3 + 2} \\ \Rightarrow & 1 + \frac{9}{x^3 + 2y^3 + 6} \leq \frac{1}{x^3 + 2} + \frac{2}{y^3 + 2} + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Từ (8) (9) suy ra } \frac{6}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}} \leq \frac{1}{x^3 + 2} + \frac{2}{y^3 + 2} + 1. \quad (10)$$

Dấu bằng trong (10) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (8) (9) $\Leftrightarrow x = y$.

$$\text{Tương tự, ta có } \frac{6}{\sqrt{y^3 + 2z^3 + 6}} \leq \frac{1}{y^3 + 2} + \frac{2}{z^3 + 2} + 1, \quad (11)$$

$$\frac{6}{\sqrt{z^3 + 2x^3 + 6}} \leq \frac{1}{z^3 + 2} + \frac{2}{x^3 + 2} + 1. \quad (12)$$

Dấu bằng trong (11) (12) xảy ra $\Leftrightarrow$ tương ứng có $y = z; z = x$.

$$\text{Cộng từng vế (10) (11) (12) có } 6P \leq 3 \left(\frac{1}{x^3 + 2} + \frac{1}{y^3 + 2} + \frac{1}{z^3 + 2} + 1 \right). \quad (13)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{1}{x^3 + 2} + \frac{1}{y^3 + 2} + \frac{1}{z^3 + 2} \leq 1. \quad (14)$$

Thật vậy (14)

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (y^3 + 2)(z^3 + 2) + (x^3 + 2)(z^3 + 2) + (x^3 + 2)(y^3 + 2) \leq (x^3 + 2)(y^3 + 2)(z^3 + 2) \\ & \Leftrightarrow x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 4(x^3 + y^3 + z^3) + 12 \\ & \leq x^3y^3z^3 + 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) + 4(x^3 + y^3 + z^3) + 8 \\ & \Leftrightarrow x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \geq 3. \end{aligned} \quad (15) \quad (\text{do } xyz = 1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \geq 3x^2y^2z^2 = 3$

Vậy (15) đúng $\Leftrightarrow$ (14) đúng.

Dấu bằng trong (14) xảy ra (dễ thấy) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Từ (13) (14) ta có } P \leq 1. \quad (16)$$

Dấu bằng trong (16) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ đó ta có $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$. Ta thu lại kết quả trên

Bình luận: Cách giải này có điều không tự nhiên ở chỗ: làm sao ta lại biết có đánh giá (14).

Bài 24. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $y+z \geq 2\sqrt{yz} = 2\sqrt{\frac{1}{x}}$ (do $xyz = 1$).

Từ đó suy ra $x^2(y+z) \geq 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x}$.

$$\Rightarrow \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow y = z$.

$$\text{Lập luận tương tự, có } \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} \geq \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}, \quad (2)$$

$$\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = x; x = y$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có:

$$P \geq 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \right). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Đặt $X = x\sqrt{x}; Y = y\sqrt{y}; Z = z\sqrt{z}$ thì $X, Y, Z > 0$ và $XYZ = 1$.

$$\text{Khi đó (4) có dạng } P \geq 2 \left(\frac{X}{Y+2Z} + \frac{Y}{Z+2X} + \frac{Z}{X+2Y} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq 2 \left(\frac{X^2}{XY+2ZX} + \frac{Y^2}{YZ+2XY} + \frac{Z^2}{XZ+2YZ} \right). \quad (5)$$

$$\text{Từ (5) và theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có } P \geq 2 \frac{(X+Y+Z)^2}{3(XY+YZ+ZX)}. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Rõ ràng } (X+Y+Z)^2 \geq 3(XY+YZ+ZX). \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1$

Từ (6) (7) có $P \geq 3$ và $P = 3 \Leftrightarrow X = Y = Z = 1..$

Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Bài 25. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 6.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{y^3+1}} + \frac{y}{\sqrt{z^3+1}} + \frac{z}{\sqrt{x^3+1}}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{y^3+1} &= \sqrt{(y+1)(y^2-y+1)} \leq \frac{(y+1)+(y^2-y+1)}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{y^3+1} &\leq \frac{y^2+2}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } &\Leftrightarrow y+1 = y^2-y+1 \\ &\Leftrightarrow y^2-2y=0 \\ &\Leftrightarrow y=2. \quad (\text{do } y > 0) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) suy ra (do } x > 0) \quad \frac{x}{\sqrt{y^3+1}} \geq \frac{2x}{y^2+2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow y = 2.$

$$\text{Lập luận tương tự, ta có } \frac{y}{\sqrt{z^3+1}} \geq \frac{2y}{z^2+2}, \quad (3)$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^3+1}} \geq \frac{2z}{x^2+2}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3) (4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = 2; x = 2.$

$$\text{Cộng từng vế (2) (3) (4) và có } P \geq 2 \left(\frac{x}{y^2+2} + \frac{y}{z^2+2} + \frac{z}{x^2+2} \right). \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)
 $\Leftrightarrow x = y = z = 2.$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{2x}{y^2+2} + \frac{2y}{z^2+2} + \frac{2z}{x^2+2} \geq 2 \quad (6)$$

$$\text{Thật vậy (6) } \Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{y^2+2} \right) + \left(y - \frac{2y}{z^2+2} \right) + \left(z - \frac{2z}{x^2+2} \right) \leq 4$$

(do $x + y + z = 6$)

$$\Leftrightarrow \frac{xy^2}{y^2+2} + \frac{yz^2}{z^2+2} + \frac{zx^2}{x^2+2} \leq 4. \quad (7)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $2y^2 + 4 = y^2 + y^2 + 4 \geq 3\sqrt[3]{4y^4} = 3y\sqrt[3]{4y}$

$$\Rightarrow y^2 + 2 \geq \frac{3}{2}y\sqrt[3]{4y}. \quad (8)$$

$$\text{Tương tự có } z^2 + 2 \geq \frac{3}{2}z\sqrt[3]{4z}, \quad (9)$$

$$x^2 + 2 \geq \frac{3}{2}x\sqrt[3]{4x}. \quad (10)$$

Dấu bằng trong (8) (9) (10) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y = 2; z = 2; x = 2$.

$$\text{Từ (7) (8) (9) (10) suy ra } VT(7) \leq \frac{xy^2}{\frac{3}{2}y\sqrt[3]{4y}} + \frac{yz^2}{\frac{3}{2}z\sqrt[3]{4z}} + \frac{zx^2}{\frac{3}{2}x\sqrt[3]{4x}},$$

$$\text{hay } VT(7) \leq \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{2x \cdot xy \cdot xy} + \sqrt[3]{2y \cdot yz \cdot yz} + \sqrt[3]{2z \cdot zx \cdot zx} \right). \quad (11)$$

Dấu bằng trong (11) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt[3]{2x \cdot xy \cdot xy} \leq \frac{2x + xy + xy}{3}$$

$$\sqrt[3]{2y \cdot yz \cdot yz} \leq \frac{2y + yz + yz}{3}$$

$$\sqrt[3]{2z \cdot zx \cdot zx} \leq \frac{2z + zx + zx}{3}.$$

$$\text{Từ đó thay vào (11), ta có } VT(7) \leq \frac{1}{9} [2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx)] \quad (12)$$

Để thấy dấu bằng trong (12) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Mặt khác ta có $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 12 \quad (13) \quad (\text{do } x + y + z = 6)$$

Dấu bằng trong (13) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Từ đó suy ra $VT(7) \leq 4$.

Như vậy (7) đúng. Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Do (7) đúng nên (6) đúng và dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2$.

$$\text{Từ (5) và (6) có } P \geq 2 \quad (14)$$

Dấu bằng trong (14) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (5) và (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 2$$

Tóm lại $\min P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = 2$.

Nhận xét: Rõ ràng đây là bài toán tổng hợp sử dụng từ bất đẳng thức Côsi, đến dựa vào một bất đẳng thức biết trước (6).

Bài 26. Cho x, y, z là ba số dương và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 8y^2 + 14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{3y^2 + 8z^2 + 14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{3z^2 + 8x^2 + 14zx}}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có theo bất đẳng thức Côsi

$$\sqrt{3x^2 + 8y^2 + 14xy} = \sqrt{(x+4y)(3x+2y)} \leq \frac{(x+4y) + (3x+2y)}{2} = 2x+3y.$$

$$\text{Như vậy suy ra } \frac{x^2}{\sqrt{3x^2 + 8y^2 + 14xy}} \geq \frac{x^2}{2x+3y}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x+4y=3x+2y \Leftrightarrow x=y$.

$$\text{Tương tự, ta có } \frac{y^2}{\sqrt{3y^2 + 8z^2 + 14yz}} \geq \frac{y^2}{2y+3z}, \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{\sqrt{3z^2 + 8x^2 + 14zx}} \geq \frac{z^2}{2z+3x}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow y=z; z=x$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } P \geq \frac{x^2}{2x+3y} + \frac{y^2}{2y+3z} + \frac{z^2}{2z+3x}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x=y=z.$$

Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2x+3y} + \frac{y^2}{2y+3z} + \frac{z^2}{2z+3x} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{(2x+3y+2y+3z+2z+3x)} \\ \Rightarrow \frac{x^2}{2x+3y} + \frac{y^2}{2y+3z} + \frac{z^2}{2z+3x} &\geq \frac{1}{5}(x+y+z). \end{aligned} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

$$\text{Từ (4) (5) suy ra } P \geq \frac{1}{5}(x+y+z). \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4) (5)

$$\Leftrightarrow x=y=z$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$.

Do $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$, nên có $x + y + z \geq 9$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Từ (6) (7) ta có $P \geq \frac{9}{5}$. (8)

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (6) (7)
 $\Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Vậy $\min P = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = y = z = 3$.

Nhận xét: Bài toán là kết hợp của việc sử dụng bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Svac-xơ.

Bài 27. Cho x, y, z là ba số thực đôi một khác nhau trên đoạn $[0; 2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có nhận xét sau đây:

Nếu $a > 0, b > 0$ thì rõ ràng $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (a+b)^2 \geq 2 \frac{1}{ab} 4ab$

hay $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (a+b)^2 \geq 8$ (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z nên có thể giả sử $x > y > z$.

Áp dụng (1) cho cặp số $x - y > 0, y - z > 0$, ta có

$$\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} \right] [(x-y) + (y-z)]^2 \geq 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} \geq \frac{8}{(x-z)^2} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x - y = y - z$.

Từ (2) suy ra $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{8}{(x-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$,

hay $P \geq \frac{9}{(x-z)^2}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x - y = y - z$.

Do $x > y$ và $x, z \in [0; 2] \Rightarrow 0 < x - z \leq 2$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x - z = 2 \Leftrightarrow x = 2; z = 0$.

Từ (3) (4) có $P \geq \frac{9}{4}$. (5)

Với giả thiết $x > y > z$ thì dấu bằng trong (5) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = y - z \\ x = 2; z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2; y = 1; z = 0$$

Từ đó do tính bình đẳng của x, y, z ta có $\min P = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có một số bằng 2, một số bằng 1, một số bằng 0.

Bài 28. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Hướng dẫn giải

Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Vì $xyz = 1$, nên từ đó suy ra $x \geq 1$ và $yz \leq 1$.

$$\text{Hiển nhiên ta có } \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \right). \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} = \frac{2+y^2+z^2}{(1+y^2)(1+z^2)} = 1 + \frac{1-y^2z^2}{(1+y^2)(1+z^2)}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } (1+y^2)(1+z^2) &= 1+y^2+z^2+y^2z^2 \geq 1+2yz+y^2z^2 \\ \Rightarrow (1+y^2)(1+z^2) &\geq (1+yz)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Do $0 < yz \leq 1 \Rightarrow 1 - y^2z^2 \geq 0$, vì thế từ (2) (3) suy ra

$$\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq 1 + \frac{1-y^2z^2}{(1+yz)^2} = 1 + \frac{1-yz}{1+yz} = \frac{2}{1+yz}.$$

$$\text{Do } yz = \frac{1}{x} \text{ (vì } xyz = 1) \text{ nên } \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{2x}{1+x}. \quad (4)$$

$$\text{Bây giờ từ (1) (2) (4) có } \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq 2\sqrt{\frac{x}{1+x}}. \quad (5)$$

$$\text{Mặt khác, ta có do } x > 0: \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+x}. \quad (6)$$

Cộng từng vế (5) (6) và có $P \leq 2\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{\sqrt{2}}{1+x}$. (7)

Ta sẽ chứng minh $2\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{\sqrt{2}}{1+x} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$. (8)

Thật vậy (8) $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{1+x} + 2 \leq 3(1+x)$
 $\Leftrightarrow 1 + 3x - 2\sqrt{2x(1+x)} \geq 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{2x} - \sqrt{1+x})^2 \geq 0$. (9)

Vì (9) đúng, nên (8) đúng.

Từ (7) (8) suy ra $P \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$. (10)

Để thấy dấu bằng trong (10) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

(Bạn đọc tự nghiệm lấy điều này).

Như vậy ta đi đến $\max P = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp hài hòa giữa việc sử dụng nhiều bất đẳng thức, sử dụng tính bình đẳng của các biến,...

Bài 29. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Hướng dẫn giải

Do tính bình đẳng giữa x, y, z nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Kết hợp với $x + y + z = 3$ suy ra $0 < z \leq 1$.

Ta có $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$
 $= (x + y + z)^2 + xyz - 2(xy + yz + zx)$
 $= 9 + xy(z - 2) - 2z(y + x)$
 $= 9 + xy(z - 2) - 2z(3 - z)$. (1)

Hiển nhiên ta có $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-z}{2}\right)^2$.

Do $0 < z \leq 1 \Rightarrow z - 2 < 0$, vậy từ (1) có

$P \geq 9 + (z - 2)\left(\frac{3-z}{2}\right)^2 - 2z(3 - z)$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Ta có VP (2) $= 9 + \frac{3-z}{2} \left[(z-2)\frac{3-z}{2} - 4z \right] = 9 + \frac{3-z}{4} [(z-2)(3-z) - 8z]$

$$\begin{aligned}
 &= 9 + \frac{3-z}{4}[-z^2 - 3z - 6] \\
 &= \frac{1}{4}(z^3 - 3z + 18) = \frac{1}{4}[(z^2 - 3z + 2) + 16] \\
 &= \frac{1}{4}[(z-1)^2(z+2) + 16].
 \end{aligned} \tag{3}$$

Do $0 < z \leq 1$, nên từ (3) suy ra VP (2) $\geq 4 \Rightarrow P \geq 4$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vì lẽ đó ta có $\min P = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Lời giải của bài toán dựa vào tính bình đẳng giữa các biến kết hợp với các phép biến đổi đại số sơ cấp.

Bài 30. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz$.

Hướng dẫn giải

Ở đây giữa các biến x, y, z không có tính bình đẳng nhưng có vai trò hoán vị vòng quanh, nên chỉ có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

Vì thế xét hai trường hợp sau:

1. Nếu $x \geq y \geq z \geq 0$. Từ đó ta có: $x(y-x)(y-z) \leq 0$
 $\Leftrightarrow x^2y + xyz \geq xy^2 + zx^2 \Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq x^2y + yz^2 + xyz$
 $\Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz \leq y(x^2 + z^2)$.

Do $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, nên có $P \leq y(3 - y^2)$

hay $P \leq -y^3 + 3y - 2 + 2$ hay $P \leq -(y-1)^2(y+2) + 2$.

Từ đó suy ra $P \leq 2$ (1)

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \\ y = 1 \\ x^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

2. Nếu $x \geq z \geq y \geq 0$. Lúc đó ta có $y(z-x)(z-y) \leq 0$

$$\Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq zx^2 + zy^2 + xyz$$

$$\Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz \leq z(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow P \leq z(3 - z^2)$$

$$\Leftrightarrow P \leq -z^3 + 3z - 2 + 2$$

$$\Leftrightarrow P \leq -(z-1)^2(z+2) + 2$$

Từ đó suy ra $P \leq 2$.

(2)

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=x \\ z=y \\ z=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z=1 \\ x=\sqrt{2}; y=0; z=1. \end{cases}$$

Sau đó trao đổi vai trò giữa các biến x, y, z ta có:

$$\max P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z=1 \\ x=\sqrt{2}; y=0; z=1 \\ x=0; y=1; z=\sqrt{2} \\ x=1; y=\sqrt{2}; z=0. \end{cases}$$

Bài 31. Cho x, y, z là ba số thực dương sao cho $x + y + z + xyz = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z - xy - yz - zx$.

Hướng dẫn giải

Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z , nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$. (1)

Từ giả thiết $x + y + z + xyz = 4$ và kết hợp với (1) suy ra $3z + z^3 \leq 4 \leq 3x + x^3$.

Từ $z^3 + 3z - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+4) \leq 0 \Leftrightarrow z \leq 1$.

Tương tự $x^3 + 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy ta có $x \geq 1$ và $z \leq 1$.

Do $x \geq y \geq z$, nên có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu $x \geq y \geq 1 \geq z$

Từ $x + y + z + xyz = 4$

$$\Leftrightarrow z(1+xy) = 4 - x - y$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-x-y}{1+xy} \quad (2)$$

Ta có $4 \geq x + y \geq 2\sqrt{xy}$, do đó $0 < xy \leq 4$

Vì $x \geq y \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0; y-1 \geq 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x + y - 2 = (x-1) + (y-1) \geq 2\sqrt{(x-1)(y-1)}$$

$$\Rightarrow (x+y-2)^2 \geq 4(x-1)(y-1) \geq xy(x-1)(y-1) \quad (\text{do } xy \leq 4)$$

$$\Rightarrow (x+y-xy)(xy+1) \geq (4-x-y)(x+y-1)$$

$$\Rightarrow x + y - xy \Rightarrow \frac{4-x-y}{xy+1}(x+y-1). \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $x + y - xy \geq z(x+y-1)$

$$\Rightarrow x + y + z \geq xy + yz + zx \Rightarrow P \geq 0.$$

2. Nếu $x \geq 1 \geq y \geq z$. Khi đó ta có $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 0$

$$\Rightarrow xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow x + y + z - (xy + yz + zx) \geq 1 - xyz.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } 4 = x + y + z + xyz \geq 4\sqrt[4]{xyz(xyz)}$$

$$\Rightarrow 0 < xyz \leq 1.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = x + y + z - (xy + yz + zx) \geq 0. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = 0 \\ x = y = z = xyz \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Kết hợp lại ta có } \min P = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bài 32. Cho x, y, z là ba số thực không âm và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz$.

Hướng dẫn giải

Do vai trò của các số x, y, z trong biểu thức P có tính hoán vị vòng quanh, nên không mất tính tổng quát có thể giả sử y là số ở giữa x và z .

$$\text{Như vậy ta có } (y-x)(y-z) \leq 0. \quad (1)$$

Viết lại P dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} P &= xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz = (yz^2 + x^2y) + (xy^2 + zx^2 - x^2y - xyz) \\ &= y(x^2 + z^2) + x(y-x)(y-z) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và do } x \geq 0 \Rightarrow x(y-x)(y-z) \leq 0. \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = x \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) (3), ta có } P \leq y(x^2 + z^2) = 2\sqrt{y^2 \frac{x^2 + z^2}{2} \frac{x^2 + z^2}{2}}. \quad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$y^2 \frac{x^2 + z^2}{2} \frac{x^2 + z^2}{2} \leq \left(\frac{y^2 + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2}}{3} \right)^3 = \left[\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right]^3 = 1 \quad (5)$$

$$(\text{do } x^2 + y^2 + z^2 = 3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (5) xảy ra} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2 + z^2}{2}.$$

$$\text{Từ (4) (5) suy ra } P \leq 2 \quad (6)$$

$$\text{Dấu bằng trong (6) xảy ra} \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (3), (5)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 1 \\ x = 0; y = 1; z = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{Từ đó ta có } \max P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 1 \\ \text{hoặc là trong ba số } x, y, z \text{ có một số bằng } 0, \\ \text{một số bằng } 1, \text{ một số bằng } \sqrt{2}. \end{cases}$$

Bài 33. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn điều kiện $xyz = 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 4} + \frac{y^2}{y^2 + 2y + 4} + \frac{z^2}{z^2 + 2z + 4}.$$

Hướng dẫn giải

Do $xyz = 8$, nên ta có thể đổi biến như sau:

$$\text{Đặt } x = \frac{2X^2}{YZ}; y = \frac{2Y^2}{ZX}; z = \frac{2Z^2}{XY}$$

Khi đó ta có X, Y, Z là ba số thực khác không.

Với phép đổi biến này thì

$$\frac{x^2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{\frac{4X^4}{Y^2Z^2}}{\frac{4X^4}{Y^2Z^2} + \frac{4X^2}{YZ} + 4} = \frac{X^4}{X^4 + X^2YZ + Y^2Z^2}$$

Từ đó bằng phép tính tương tự, ta có

$$P = \frac{X^4}{X^4 + X^2YZ + Y^2Z^2} + \frac{Y^4}{Y^4 + Y^2ZX + Z^2X^2} + \frac{Z^4}{Z^4 + Z^2XY + X^2Y^2} \quad (1)$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$P \geq \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}{X^4 + Y^4 + Z^4 + XYZ(X + Y + Z) + (X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2)} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z$

Ta có:

$$\begin{aligned} (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 &= X^4 + Y^4 + Z^4 + (X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) + (X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) \\ &\Rightarrow (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 \\ &\geq X^4 + Y^4 + Z^4 + (X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) + XYZ(X + Y + Z) \end{aligned} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z$.

$$\text{Từ (2) (3) suy ra } P \geq 1 \quad (4)$$

(chú ý P là tổng của ba phân số dương)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow X = Y = Z \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 2$

Nhận xét: Trong bài toán trên ta đã áp dụng phép đổi biến đầy hiệu quả sau đây:

Với ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = k^3$ thì có thể áp dụng một trong ba phép đổi biến sau:

1. Đặt $X = \sqrt[3]{x}; Y = \sqrt[3]{y}; Z = \sqrt[3]{z}$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{kX^2}{YZ} = \frac{k\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{yz}} = \frac{kx}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{kx}{\sqrt[3]{k^3}} = x.$$

$$\text{Vậy tương tự có } y = \frac{kY^2}{ZX}, z = \frac{kZ^2}{XY}$$

$$\text{Như thế có thể viết lại phép thay biến thành } x = \frac{kX^2}{YZ}; y = \frac{kY^2}{ZX}; z = \frac{kZ^2}{XY}.$$

(trong bài tập trên đã dùng phép thay biến này với $k = 2$)

2. Đặt $X = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, Y = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}, Z = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ hay $x = \frac{kYZ}{X^2}, y = \frac{kZX}{Y^2}, z = \frac{kXY}{Z^2}$ (bạn đọc tự nghiệm lại).

3. Đặt $X = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{z}}; Y = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}; Z = \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{y}}$ hay $x = \frac{kY}{Z}; y = \frac{kZ}{X}; z = \frac{kX}{Y}$

Bài 34. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \left(x + \frac{1}{y} - 1\right) \left(y + \frac{1}{z} - 1\right) \left(z + \frac{1}{x} - 1\right)$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng phép đổi biến thứ ba trong nhận xét của bài 33 (với $k = 1$), cụ thể đặt

$$x = \frac{X}{Y}; y = \frac{Y}{Z}; z = \frac{Z}{X} \text{ khi đó ta có } X, Y, Z \text{ là ba số thực dương.}$$

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó biểu thức } P \text{ có dạng } P &= \left(\frac{X}{Y} + \frac{Z}{Y} - 1\right) \left(\frac{Y}{Z} + \frac{X}{Z} - 1\right) \left(\frac{Z}{X} + \frac{Y}{X} - 1\right) \\ &= \frac{(X+Z-Y)(Y+X-Z)(Z+Y-X)}{XYZ}. \end{aligned}$$

Do $X > 0, Y > 0, Z > 0$, nên ta có bất đẳng thức quen biết sau đây

$$XYZ \geq (X+Y-Z)(Y+X-Z)(Z+Y-X).$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z$.

Từ (1) (2) suy ra $P \leq 1$.

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy ta có $\max P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 35. Cho x, y, z là ba số thực khác 1 và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2$

Hướng dẫn giải

Do $xyz = 1$, nên thực hiện phép đổi biến sau (xem phép đổi biến thứ trong nhận xét của bài 33)

$$x = \frac{X^2}{YZ}; y = \frac{Y^2}{ZX}; z = \frac{Z^2}{XY}.$$

$$\begin{aligned} \text{Lúc này biểu thức } P \text{ có dạng } P &= \left(\frac{\frac{X^2}{YZ}}{\frac{X^2}{YZ}-1}\right)^2 + \left(\frac{\frac{Y^2}{ZX}}{\frac{Y^2}{ZX}-1}\right)^2 + \left(\frac{\frac{Z^2}{XY}}{\frac{Z^2}{XY}-1}\right)^2 \\ &= \frac{X^4}{(X^2 - YZ)^2} + \frac{Y^4}{(Y^2 - ZX)^2} + \frac{Z^4}{(Z^2 - XY)^2} \end{aligned}$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$P \geq \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}{(X^2 - YZ)^2 + (Y^2 - ZX)^2 + (Z^2 - XY)^2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z$.

Ta có $(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = X^4 + Y^4 + Z^4 + 2(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2)$

$$\begin{aligned} &(X^2 - YZ)^2 + (Y^2 - ZX)^2 + (Z^2 - XY)^2 \\ &= X^4 + Y^4 + Z^4 + X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2 - 2XYZ(X + Y + Z) \\ &\Rightarrow (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - [(X^2 - YZ)^2 + (Y^2 - ZX)^2 + (Z^2 - XY)^2] \\ &= (XY + YZ + ZX)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vì cả mẫu và tử của phân số về phải đều dương, nên từ (2) suy ra $P \geq 1$.

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow X = Y = Z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 36. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}}$.

Hướng dẫn giải

Do $xyz = 1$, nên thực hiện phép đổi biến sau $x = \frac{YZ}{X^2}; y = \frac{ZX}{Y^2}; z = \frac{XY}{Z^2}$, ở

đây X, Y, Z là các số dương (xem phép đổi biến thứ hai trong phần nhận xét của bài 33 với $k = 1$)

Khi đó biểu thức P trở thành

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{YZ}{X^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{ZX}{Y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\frac{XY}{Z^2}}} \\
 &= \frac{X}{\sqrt{X^2+8YZ}} + \frac{Y}{\sqrt{Y^2+8ZX}} + \frac{Z}{\sqrt{Z^2+8XY}} \\
 &= \frac{X^2}{X\sqrt{X^2+8YZ}} + \frac{Y^2}{Y\sqrt{Y^2+8ZX}} + \frac{Z^2}{Z\sqrt{Z^2+8XY}}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có

$$P \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{X\sqrt{X^2+8YZ} + Y\sqrt{Y^2+8ZX} + Z\sqrt{Z^2+8XY}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow X=Y=Z$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\begin{aligned}
 &X\sqrt{X^2+8YZ} + Y\sqrt{Y^2+8ZX} + Z\sqrt{Z^2+8XY} \\
 &= \sqrt{X}\sqrt{X^3+8XYZ} + \sqrt{Y}\sqrt{Y^3+8XYZ} + \sqrt{Z}\sqrt{Z^3+8XYZ} \\
 &\leq \sqrt{(X+Y+Z)(X^3+Y^3+Z^3+24XYZ)}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2) (3) suy ra } P \geq \frac{(X+Y+Z)^2}{\sqrt{(X+Y+Z)(X^3+Y^3+Z^3+24XYZ)}}$$

$$\text{hay } P \geq \sqrt{\frac{(X+Y+Z)^3}{X^3+Y^3+Z^3+24XYZ}}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow X=Y=Z \Leftrightarrow x=y=z=1.$$

$$\text{Có thể thấy rằng } (X+Y+Z)^3 \geq X^3+Y^3+Z^3+24XYZ \quad (5)$$

Thật vậy bằng các phép biến đổi sơ cấp, ta có

$$(5) \Leftrightarrow X(Y-Z)^2 + Y(Z-X)^2 + Z(X-Y)^2 \geq 0. \quad (6)$$

Do $X, Y, Z > 0$, nên (6) đúng và dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow X=Y=Z$

$$\text{Từ (4) và (5) có } P \geq 1. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow X=Y=Z \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Nhận xét:

1. Qua các bài 33 – 36, các bạn đã thấy rõ hiệu quả to lớn của các phép đổi biến (đã trình bày trong nhận xét của bài 33) để giải nhiều bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng phương pháp bất đẳng thức.
2. Các bạn hãy áp dụng các phép đổi biến ấy để giải các bài toán sau:

1. Cho x, y, z là ba số dương và $xyz = 1$.

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+3}{(x+1)^2} + \frac{y+3}{(y+1)^2} + \frac{z+3}{(z+1)^2}$.

Đáp số: $\min P = \frac{1}{3}$.

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + x + 4}} + \frac{1}{\sqrt{4y^2 + y + 4}} + \frac{1}{\sqrt{4z^2 + z + 4}}.$$

Đáp số: $\max Q = 1$.

2. Cho x, y, z là các số dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 27$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 21x + 9}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 21y + 9}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 21z + 9}}$$

Đáp số: $\min P = \frac{1}{3}$.

Bài 37. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (1 + 9xyz - x - y - z) \left(\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} \right).$$

Hướng dẫn giải

* Nếu $1 + 9xyz - x - y - z \leq 0$.

Do $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1 \Rightarrow 1 - xy > 0, 1 - yz > 0, 1 - zx > 0$
 $\Rightarrow P \leq 0$.

* Nếu $1 + 9xyz - x - y - z > 0$. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$x + y + z = (x + y + z) \cdot 1 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3\sqrt{xyz} \cdot 3\sqrt{x^2 y^2 z^2}$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq 9xyz \Rightarrow 1 + x + y + z \geq 1 + 9xyz$$

$$\Rightarrow 0 < 1 + 9xyz - x - y - z \leq 1$$

$$\Rightarrow (1 + 9xyz - x - y - z) \left(\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} \right) \leq \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx} \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra} \Leftrightarrow 1 + 9xyz - x - y - z = 1$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 9xyz$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{do } x^2 + y^2 + z^2 = 1).$$

Đặt $Q = \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx}$, khi đó:

$$Q = \frac{1-xy+xy}{1-xy} + \frac{1-yz+yz}{1-yz} + \frac{1-zx+zx}{1-zx} \\ = 3 + \left(\frac{xy}{1-xy} + \frac{yz}{1-yz} + \frac{zx}{1-zx} \right). \quad (2)$$

Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ta có (do $x^2 + y^2 \geq 2xy$)

$$\frac{xy}{1-xy} \leq \frac{2xy}{2-(x^2+y^2)} \leq \frac{1}{2} - \frac{(x+y)^2}{(x^2+z^2)+(y^2+z^2)} \quad (3)$$

(do $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $(x+y)^2 \geq 4xy$).

Áp dụng kết quả sau đây:

Nếu $m > 0$, $n > 0$ ta có $\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}$ và dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}; \text{ ta có}$$

$$\frac{(x+y)^2}{(x^2+z^2)+(y^2+z^2)} \leq \frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{y^2+z^2}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) (4) suy ra } \frac{xy}{1-xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{y^2+z^2} \right). \quad (5)$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{yz}{1-yz} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{y^2+x^2} + \frac{z^2}{z^2+x^2} \right), \quad (6)$$

$$\frac{zx}{1-zx} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{z^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} \right). \quad (7)$$

$$\text{Từ (2) (5) (6) (7) suy ra } Q \leq 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \quad (8)$$

$$\text{Bây giờ từ (1) (8) có } Q \leq \frac{9}{2}. \quad (9)$$

Dấu bằng trong (9) xảy ra dễ thấy khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Kết hợp cả hai trường hợp suy ra $\max Q = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 38. Cho ba số thực $x, y, z \in [1; 2]$

$$1. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = (3x + 2y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.

Hướng dẫn giải

1. Viết lại P dưới dạng $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 3$. (1)

Đặt $R = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}$. (2)

Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Từ đó ta có $\frac{y}{x} \leq 1; \frac{z}{y} \leq 1$. Vì vậy suy ra $\left(1 - \frac{y}{x}\right) \left(1 - \frac{z}{y}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \leq 1 + \frac{z}{x}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{z}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

Lại có $\frac{x}{y} \geq 1, \frac{y}{z} \geq 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{y}\right) \left(1 - \frac{y}{z}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq 1 + \frac{x}{z}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{y}{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

Cộng từng vế (3) (4) và có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \leq 2 + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}$. (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3) (4)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.

Mặt khác từ giả thiết có $1 \leq x \leq 2; 1 \leq z \leq 2 \Rightarrow x - 2z \leq 0; z - 2x \leq 0$

$\Rightarrow (x - 2z)(z - 2x) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2z^2 \leq 5xz \Leftrightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$. (6)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ z = 2x \end{cases}$

Bây giờ từ (5) có:

$$R = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq 2 + 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \leq 2 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 7. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (5) (6)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2z \text{ hoặc } z = 2x \\ y = z \\ x = 2z \text{ hoặc } z = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2; z = 1 \\ y = z = 1; x = 2 \end{cases} \quad (\text{do } x \geq y \geq z)$$

Tóm lại ta có $\max R = 7$ hay $\max P = 10$.

Giá trị lớn nhất đạt được $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{trong ba số } x, y, z \text{ có 2 số bằng 2, 1 số bằng 1} \\ \text{trong ba số } x, y, z \text{ có 2 số bằng 1, 1 số bằng 2} \end{cases}$

$$2. \text{ Ta có } \frac{9}{4}(x + y + z) - (3x + 2y + z) = \frac{1}{4}(y + 5z - 3x).$$

Do $x, y, z \in [1; 2] \Rightarrow y + 5z \geq 6 \geq 3x$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{9}{4}(x + y + z) - (3x + 2y + z) &\geq 0 \Rightarrow 3x + 2y + z \leq \frac{9}{4}(x + y + z) \\ \Rightarrow (3x + 2y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &\leq \frac{9}{4}(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow y + 5z = 6 = 3x \Leftrightarrow x = 2; y = z = 1$.

$$\text{Kết hợp phần 1, 2 suy ra } Q \leq \frac{9}{4} \cdot 10 = \frac{45}{2}. \quad (9)$$

Dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (7) (8)
 $\Leftrightarrow y = z = 1; x = 2$

$$\text{Vậy } \max Q = \frac{45}{2} \Leftrightarrow x = 2; y = z = 1.$$

Bài 39. Cho x, y là các số thực và $x + y \neq 0$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = x^2 + y^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y} \right)^2.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } Z = -\frac{1 + xy}{x + y} \Rightarrow xy + yz + zx = -1. \quad (1)$$

$$\text{Khi đó } P = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2)$$

Rõ ràng ta có $(x + y + z)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx). \quad (3)$$

Từ (1) (2) suy ra $P \geq 2$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x + y = -z \Leftrightarrow x + y = \frac{1+xy}{x+y}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 1+xy. \quad (5)$$

Chú ý rằng tập các số thực x, y thỏa mãn (5) là khác rỗng.

Thật vậy chẳng hạn $x = 1; y = 0$ thỏa mãn (5).

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x, y$ thỏa mãn (5)

Bình luận: Ở bài trên ta đã sử dụng kĩ thuật: Dùng một đẳng thức (đẳng thức (1)), và dựa vào một bất đẳng thức cho trước để giải bài toán đặt ra.

Bài 40. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{y}{(y+1)^2} + \frac{z}{(z+1)^2} - \frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } X = \frac{1-x}{1+x}; Y = \frac{1-y}{1+y}; Z = \frac{1-z}{1+z} \quad (1)$$

Do x, y, z đều là các số dương, nên dễ thấy $X, Y, Z \in (-1; 1)$

$$\text{Từ (1) suy ra } x = \frac{1-X}{1+X}; y = \frac{1-Y}{1+Y}; z = \frac{1-Z}{1+Z}.$$

Rõ ràng từ $xyz = 1$, suy ra $(1-X)(1-Y)(1-Z) = (1+X)(1+Y)(1+Z)$

$$\Rightarrow X + Y + Z + XYZ = 0. \quad (2)$$

$$\text{Ta có } \frac{4x}{(x+1)^2} = 1 - X^2; \frac{2}{x+1} = 1 + X,$$

$$\frac{4y}{(y+1)^2} = 1 - Y^2; \frac{2}{y+1} = 1 + Y,$$

$$\frac{4z}{(z+1)^2} = 1 - Z^2; \frac{2}{z+1} = 1 + Z.$$

Vì vậy P có dạng

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} [3 - (X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(1+X)(1+Y)(1+Z)] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 3 - [(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2(XY + YZ + ZX) + 2(X + Y + Z + XYZ) + 2] \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2) (3) suy ra } P = \frac{1}{4} [1 - (X + Y + Z)^2] \leq \frac{1}{4}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow X + Y + Z = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1-z}{1+z} = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Rõ ràng tập các số thực dương x, y, z thỏa mãn (5) là khác (thí dụ có thể lấy $x = y = z = 1$). Vậy $\min P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (5)

Nhận xét:

1. Trong bài này ta cũng sử dụng một đẳng thức và một bất đẳng thức để giải bài toán.
2. Xét bài toán tương tự sau:

Cho x, y, z là các số dương và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

$$\text{Đặt } X = \frac{1-x}{1+x}; Y = \frac{1-y}{1+y}; Z = \frac{1-z}{1+z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-X}{1+X}; y = \frac{1-Y}{1+Y}; z = \frac{1-Z}{1+Z}$$

$$\Rightarrow 1+x = \frac{2}{1+X}; 1+y = \frac{2}{1+Y}; 1+z = \frac{2}{1+Z}.$$

$$\text{Như vậy } P = \frac{1}{4} [(1+X)^2 + (1+Y)^2 + (1+Z)^2 + (1+X)(1+Y)(1+Z)] \quad (6)$$

Giống như bài trên ta có $X + Y + Z + XYZ = 0$

Từ đó dễ dàng suy ra $(1+X)^2 + (1+Y)^2 + (1+Z)^2 + (1+X)(1+Y)(1+Z) \geq 4$ (bạn đọc tự chứng minh lấy).

Vậy ta có $P \geq 1 \Rightarrow \min P = 1$.

Bài 41. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z}$.

Hướng dẫn giải

Dựa vào đồng nhất thức:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \quad (1)$$

((1) chứng minh dễ dàng và xin dành cho bạn đọc)

$$\text{Từ đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có } xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (1) ta có $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 3(x+y+z)\sqrt[3]{x^2y^2z^2} - xyz$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \left(3(x+y+z) - \sqrt[3]{xyz} \right).$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ (2) (3) suy ra $(x+y)(y+z)(z+x) \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \left(3(x+y+z) - \frac{x+y+z}{3} \right)$ (4)

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{3} \sqrt[3]{x^2y^2z^2} (x+y+z)$$

$$\Rightarrow P = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} \geq \frac{8}{3}. \quad (5) \text{ (do } xyz = 1)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bình luận:

1. Mấu chốt là dùng đồng nhất thức (1)

2. Ta có bài toán tương tự sau:

Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(1 + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{y}{z} \right) \left(1 + \frac{z}{x} \right) - \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } P \text{ dưới dạng } P = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} - \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}. \quad (1)$$

Theo bài trên ta có $(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{3} \sqrt[3]{x^2y^2z^2} (x+y+z)$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \geq \frac{8}{3} \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} - \frac{2}{3} \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2 \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} - \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{2}{3} \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}. \quad (2)$$

Lại có $\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3$ (theo bất đẳng thức Côsi)

$$\Rightarrow P \geq 2. \quad (3)$$

Vậy $\min P = 2 \Leftrightarrow x = y = z > 0$.

Bài 42. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $xyz = 1$

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x + y)(y + z)(z + x) - 2(x + y + z)$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} + \sqrt{\frac{y+z}{y+1}} + \sqrt{\frac{z+x}{z+1}}$.

Hướng dẫn giải

1. Áp dụng đồng nhất thức:

$$(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz. \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } P = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz - 2(x + y + z). \quad (1)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \text{ (do } xyz = 1) \quad (2)$$

$$\text{Lại có } xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3 \text{ (do } x^2y^2z^2 = 1) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) suy ra } P \geq 3(x + y + z) - 1 - 2(x + y + z)$$

$$\Rightarrow P \geq (x + y + z) - 1 \geq 3 - 1 = 2. \quad (4)$$

Dễ thấy dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

2. Trước hết ta chứng minh rằng

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq (x + 1)(y + 1)(z + 1) \quad (5)$$

Thật vậy dựa vào (*) suy ra

$$(5) \Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \geq xy + yz + zx + x + y + z + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) - 2 \geq xy + yz + zx + x + y + z + 2 \text{ (do } xyz = 1)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq xy + yz + zx + x + y + z + 3. \quad (6)$$

$$\text{Do } xyz = 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3 \text{ và } xy + yz + zx \geq 3. \quad (7)$$

Ta có $(x + y + z)(xy + yz + zx)$

$$= \frac{x+y+z}{3}(xy + yz + zx) + (x + y + z)\frac{xy + yz + zx}{3} + \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx)}{3} \quad (8)$$

$$\text{Từ (7) (8) suy ra } (x + y + z)(xy + yz + zx) \geq xy + yz + zx + x + y + z + 3.$$

Vậy (6) đúng, tức (5) đúng.

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi, ta có } Q \geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x+1)(y+1)(z+1)}}. \quad (9)$$

$$\text{Từ (5) (9) suy ra } Q \geq 3. \quad (10)$$

Dấu bằng trong (10) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\min Q = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Chương 3.

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Lượng giác hóa là một trong những phương pháp hay sử dụng để tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số.

Bằng phương pháp đổi biến lượng giác (thí dụ $x = \sin t$, $x = \cos t$ hoặc $x = \tan t, \dots$) ta đưa biểu thức và điều kiện của bài toán về dạng lượng giác. Từ đó dựa vào phép tính lượng giác ta sẽ dễ dàng hơn trong việc giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đã cho ban đầu.

Các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất có thể sử dụng phương pháp lượng giác hóa thường có các dấu hiệu dễ nhận biết sau đây:

- Hoặc là trong biểu thức của đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất có chứa các đại lượng dạng $x^2 + y^2$; $1 + x^2$; ...
- Hoặc là điều kiện trong bài toán ban đầu có dạng: $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, ...
- Hoặc là các biểu thức đã cho ban đầu gắn liền với một hệ thức lượng giác quen biết nào đó.

Bài 1: Cho $x, y, z \in [0; 1]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{xyz} + \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)}$.

Hướng dẫn giải

Do $x, y, z \in [0; 1]$, nên đặt $x = \sin^2 A$, $y = \sin^2 B$, $z = \sin^2 C$,

với $A, B, C \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $0 \leq \sin A \leq 1$; $0 \leq \sin B \leq 1$, $0 \leq \sin C \leq 1$; $0 \leq \cos A \leq 1$;

$0 \leq \cos B \leq 1$, $0 \leq \cos C \leq 1$.

Lúc này ta có: $P = \sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} + \sqrt{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}$
 $= \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C.$ (1)

Ta có: $\cos A \cos B \cos C \leq \cos A \cos B.$ (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = 1 \\ \cos A \cos B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (*)$

Tương tự $\sin A \sin B \sin C \leq \sin A \sin B.$ (3)

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin C = 1 \\ \sin A \sin B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \quad (**) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) có: } P \leq \cos A \cos B + \sin A \sin B \Rightarrow P \leq \cos(A - B). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3).

Vì $\cos(A - B) \leq 1$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B$, nên ta có:

$$P \leq 1 \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow A = B$ và đồng thời thỏa mãn (*) và (**)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x = y \text{ và đồng thời thỏa mãn (*) và (**)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0; x = 0; y = 0 \\ x = y = z = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Từ đó ta có $\max P = 1 \Leftrightarrow x, y$ thỏa mãn (6).

Bài 2: Cho $x, y, z, t > 0$ và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} + \frac{1}{1+t^4} = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xyz$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } x^2 = \tan \alpha; y^2 = \tan \beta; z^2 = \tan \gamma; t^2 = \tan \delta \text{ với } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Từ đó: } 1 + x^4 = 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + y^4 = \frac{1}{\cos^2 \beta};$$

$$1 + z^4 = \frac{1}{\cos^2 \gamma}; \quad 1 + t^4 = \frac{1}{\cos^2 \delta},$$

$$\text{vì vậy điều kiện: } \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} + \frac{1}{1+t^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 1 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta \quad (2)$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: } \sin^2 \alpha \geq 3\sqrt{\cos^2 \delta \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}. \quad (3)$$

$$\text{Lập luận tương tự, ta có: } \sin^2 \beta \geq 3\sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \delta \cos^2 \gamma}, \quad (4)$$

$$\sin^2 \gamma \geq 3\sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \delta}, \quad (5)$$

$$\sin^2 \delta \geq 3\sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}. \quad (6)$$

Nhân từng vế (3), (4), (5), (6) và có:

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \geq 81 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma \tan^2 \delta \geq 81 \Rightarrow x^4 y^4 z^4 t^4 \geq 81 \Rightarrow P = xyzt \geq 3. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4), (5), (6)

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = t = \sqrt[4]{3}. \quad (8)$$

Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x, y, z, t$ thỏa mãn (8).

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự, ta có kết quả sau:

Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} + \frac{1}{1+t^4} = 1$.

Khi đó nếu $P = xyz$, thì $\min P = 2\sqrt{2}$.

Bài 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + y^2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp số: $\max P = 3$; $\min P = -6$

Xem lời giải trong bài toán 3, § 1, chương 1 cuốn sách này.

Bài 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Đáp số: $\max f(x) = 2\sqrt{2}$; $\min f(x) = -2$

Xem lời giải cách 3 trong bài toán 1, bài 1, chương 1 cuốn sách này.

Bài 5: Cho x là số thực tùy ý ($x \in \mathbb{R}$).

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \tan \varphi$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2} &= \frac{3 + 4\tan^2 \varphi + 3\tan^4 \varphi}{(1 + \tan^2 \varphi)^2} = \frac{(3 + 4\tan^2 \varphi + 3\tan^4 \varphi)\cos^4 \varphi}{\cos^4 \varphi} \\ &= 3\cos^4 \varphi + 4\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 3\sin^4 \varphi = 3\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right) + \sin^2 2\varphi \\ &= 3 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Xét hàm số $F(\varphi) = 3 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi$, với $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta thấy ngay: $\min F(\varphi) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2\varphi = 1$;

$\max F(\varphi) = 3 - 0 = 3 \Leftrightarrow \sin^2 2\varphi = 0$.

Từ đó ta có: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} F(\varphi) = 3$;

$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} F(\varphi) = \frac{5}{2}$.

Để thấy: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Nhận xét: Xét cách giải khác sau đây: (bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức)

1. Viết lại $f(x)$ dưới dạng: $f(x) = \frac{3x^4 + 4x^2 + 3}{x^4 + 2x^2 + 1} = 3 - \frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$. (1)

Do $\frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} \geq 0 \forall x$, nên từ (1) suy ra: $\begin{cases} f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 3 \end{cases}$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

Mặt khác: $\frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2}$. (2)

Do $x^2 + 1 \geq 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^2 + 1)^2 \geq 4x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó theo (2) suy ra: $\frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$. (3)

Bây giờ từ (1), (3) ta có: $f(x) \geq \frac{5}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Từ đó và theo (5) suy ra: $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta thu lại kết quả trên.

2. Ta lại có cách giải khác nữa (bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số)

Ta có: $f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } f'(x) &= \frac{(8x + 12x^3)(1 + x^2)^2 - 4x(1 + x^2)(3 + 4x^2 + 3x^4)}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{(8x + 12x^3)(1 + x^2) - 4x(3 + 4x^2 + 3x^4)}{(1 + x^2)^3} = \frac{4x^3 - 4x}{(1 + x^2)^3} = \frac{4x(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Vậy có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	3

Chú ý rằng do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2} = 3$,

nên từ bảng biến thiên trên suy ra:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

3. Ta còn có cách giải khác nữa bằng phương pháp miền giá trị hàm số như sau:

Gọi m là giá trị tùy ý của $f(x)$. Khi đó có phương trình sau (ẩn x)

$$\frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{1 + 2x^2 + x^4} = m \quad (5)$$

có nghiệm. Do $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 > 0 \forall x$, nên

$$(5) \Leftrightarrow 3 + 4x^2 + 3x^4 = m + 2mx^2 + mx^4$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)x^4 + 2(m - 2)x^2 + m - 3 = 0 \quad (6)$$

- Nếu $m = 3$, khi đó (6) có dạng: $2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $m = 3$ là một giá trị của $f(x)$.

- Nếu $m \neq 3$, khi đó (6) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình sau (ẩn t):

$$(m - 3)t^2 + 2(m - 2)t + m - 3 = 0 \quad (7)$$

có ít nhất một nghiệm không âm.

Ta có nhận xét vì $\frac{c}{a} = \frac{m-3}{m-3} = 1$, nên nếu (7) có nghiệm thì hai nghiệm

phải cùng dấu

Do đó (7) có nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ -\frac{2(m-2)}{m-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-5 \geq 0 \\ \frac{m-2}{m-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m < 3 \text{ và } m \neq 3$$

Kết hợp lại (6) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m \leq 3$.

Từ đó suy ra: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2}$.

Một lần nữa các bạn thấy được tính đa dạng của các phương pháp giải bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Bài 6: Cho x và y là hai số thực không đồng nhất bằng 0.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $D = \{(x; y) : x^2 + y^2 > 0\}$

Gọi $D_1 = \{(x; y) : y = 0\}$ và $D_2 = \{(x; y) : y \neq 0\}$.

Khi đó theo nguyên lý phân rã, ta có:

$$\min_{(x;y) \in D} P = \min \left\{ \min_{(x;y) \in D_1} P; \min_{(x;y) \in D_2} P \right\}, \quad (1)$$

$$\max_{(x;y) \in D} P = \max \left\{ \max_{(x;y) \in D_1} P; \max_{(x;y) \in D_2} P \right\}, \quad (2)$$

ở đây ta có: $D = D_1 \cup D_2$.

- Khi $(x; y) \in D_1$, do $y = 0$ nên lúc đó $x \neq 0$ và $P = \frac{x^2 - x^2}{x^2} = 0 \quad \forall (x; y) \in D_1$

$$\Rightarrow \min_{(x;y) \in D_1} P = \max_{(x;y) \in D_1} P = 0. \quad (3)$$

- Khi $(x; y) \in D_2$, do $y \neq 0$ nên lúc đó có thể viết lại P dưới dạng:

$$P = \frac{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 - \left(\frac{x}{2y} - 2\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 + 1}. \quad (4)$$

Đặt $\frac{x}{2y} = \tan \alpha$, với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\tan^2 \alpha - (\tan \alpha - 2)^2}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha (4 \tan \alpha - 4) = 4 \sin \alpha \cos \alpha - 2(1 + \cos 2\alpha) \\ &= 2 \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha - 2 = 2\sqrt{2} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (5) suy ra: $\max_{(x;y) \in D_2} P = 2\sqrt{2} - 2,$ (6)

$\min_{(x;y) \in D_2} P = -2\sqrt{2} - 2.$ (7)

Từ (3), (6), (7) suy ra: $\max_{(x;y) \in D} P = \max\{2\sqrt{2} - 2; 0\} = 2\sqrt{2} - 2,$
 $\min_{(x;y) \in D} P = \min\{-2\sqrt{2} - 2; 0\} = -2\sqrt{2} - 2.$

Nhận xét:

1. Dĩ nhiên ta có các cách giải khác nhau như sau:

Đặt $\frac{x}{2y} = t, t \in \mathbb{R}$, lúc đó xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - (t-2)^2}{1+t^2} = 4 \frac{t-1}{t^2+1}.$

Ta có: $\max_{(x;y) \in D_2} P = \max_{t \in \mathbb{R}} f(t); \min_{(x;y) \in D_2} P = \min_{t \in \mathbb{R}} f(t).$

Dễ thấy $f'(t) = 4 \frac{-t^2 + 2t + 1}{(t^2 + 1)^2}.$

Và có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
f'(t)	-	0	+	0	-
f(t)	0	$-2\sqrt{2} - 2$	$2\sqrt{2} - 2$	0	

Từ đó suy ra: $\min_{(x;y) \in D_2} P = -2\sqrt{2} - 2$ và $\max_{(x,y) \in D_2} P = 2\sqrt{2} - 2.$

Ta thu lại kết quả trên.

2. Lại có cách giải bằng phương pháp miền giá trị hàm số:

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số $\frac{4t-4}{t^2+1}$, khi đó phương trình (ẩn t):

$4t - 4 = (t^2 + 1)m$ (*)

có nghiệm. Do (*) $\Leftrightarrow mt^2 - 4t + m - 4 = 0$, nên dễ thấy (*) có nghiệm
 $\Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2\sqrt{2} - 2.$

Từ đó thu lại kết quả trên!.

Bài 7: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D)

Cho $x \geq 0, y \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y^2)}.$

Hướng dẫn giải

Đáp số: $\max P = \frac{1}{4}$; $\min P = -\frac{1}{4}$.

Xem lời giải (bằng phương pháp lượng giác hóa) trong bài toán 1, § 1, chương 1 cuốn sách này.

Bài 8: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

Hướng dẫn giải

Đáp số: $\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = \sqrt{2}$; $\min_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = 0$;

Xem lời giải trong phần 3, bình luận của bài 15, § 2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 9: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

Hướng dẫn giải

Đáp số: $\min P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Xem lời giải trong phần nhận xét của bài 8, mục 1.2, § 1, chương 2 của cuốn sách này (dùng phương pháp lượng giác hóa).

Bài 10: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Hướng dẫn giải

Đáp số: $\max P = \frac{3}{2}$.

Xem lời giải trong phần nhận xét của bài 5, mục 1.2, § 1, chương 2 của cuốn sách này (dùng phương pháp lượng giác hóa).

Bài 11: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{xy}$.

Hướng dẫn giải

Do $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$, nên đặt $x = \sin^2 \alpha, y = \cos^2 \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Lúc này:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy} &= \frac{1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha} + \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha} = \frac{4}{4 - 3 \sin^2 2\alpha} + \frac{4}{\sin^2 2\alpha}. \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $t = \sin^2 2\alpha$. Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\alpha < \pi \Rightarrow 0 < t \leq 1$.

Từ (1) dẫn đến xét hàm số $f(t) = \frac{4}{4-3t} + \frac{4}{t} = \frac{8(2-t)}{4t-3t^2}$ với $0 < t \leq 1$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{8(-3t^2 + 12t - 8)}{(4t - 3t^2)^2}.$$

Vậy có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{6-\sqrt{12}}{3}$	1	$\frac{6+\sqrt{12}}{3}$
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$				

$$\text{Vậy min } P = \min_{0 < t < 1} f(t) = f\left(\frac{6-\sqrt{12}}{3}\right) = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Nhận xét:

1. Ta đã phối hợp phương pháp “lượng giác hóa” và phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải bài toán.
2. Xem cách giải bài toán trên bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi trong bài 9, mục 1.2, § 1, chương 2 cuốn sách này.

Bài 12: Cho $x^2 + y^2 = 1$; $u^2 + v^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x(u + v) + y(u - v)$.

Hướng dẫn giải

Do $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \sin \alpha, y = \cos \alpha$, với $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Do $u^2 + v^2 = 1 \Rightarrow u = \cos \beta, v = \sin \beta$, với $\beta \in [0; 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Vì thế } P &= \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) + \cos \alpha (\cos \beta - \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra: $\max P = \sqrt{2}$ và $\min P = -\sqrt{2}$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp dùng bất đẳng thức Bunhiacopski để giải như sau:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$[x(u+v) + y(u-v)]^2 \leq (x^2 + y^2)[(u+v)^2 + (u-v)^2],$$

$$\text{hay } P^2 \leq 2(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = 2 \text{ (Do } x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1).$$

$$\text{Từ đó ta có: } -\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Có thể thấy } P = \sqrt{2} \text{ chẳng hạn khi } x = y = u = v = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\text{Lúc đó rõ ràng: } x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1).$$

$$P = -\sqrt{2} \text{ chẳng hạn khi } x = \sqrt{2}; y = \sqrt{2}; u = v = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Từ đó ta có: } \max P = \sqrt{2}; \min P = -\sqrt{2}$$

Các bạn hãy tự tìm xem khi nào P đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất)?

Bài 13: Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đáp số: } \min P = \sqrt{2}.$$

Lời giải bằng phương pháp “lượng giác hóa” xem trong phần nhận xét của bài 10, mục 1.2, § 1, chương 2 của cuốn sách này.

Bài 14: Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 16(x^5 + y^5) - 20(x^3 + y^3) + 5(x + y).$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } x^2 + y^2 = 1, \text{ nên đặt } x = \sin \alpha, y = \cos \alpha \text{ với } \alpha \in [0; 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin 5\alpha &= \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha \\ &= (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos \alpha (4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha) \\ &= (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha (4\cos^2 \alpha - 3) \\ &= (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)(1 - 4\sin^2 \alpha) \\ &= 16\sin^5 \alpha - 20\sin^3 \alpha + 5\sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \cos 5\alpha = 16\cos^5 \alpha - 20\cos^3 \alpha + 5\cos \alpha. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } P = \sin 5\alpha + \cos 5\alpha = \sqrt{2} \cos \left(5\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) suy ra: } \max P = \sqrt{2}; \min P = -\sqrt{2}.$$

Nhận xét: Xét cách giải “phi lượng giác hóa” sau đây:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^5 + y^5 &= (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\ &= (x + y)\left[(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 - xy(x^2 + y^2)\right] \\ &= (x + y)[1 - xy - x^2y^2], \\ x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)(1 - xy). \end{aligned}$$

Áp dụng công thức:

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{(x + y)^2 - 1}{2} \Rightarrow x^2y^2 = \left[\frac{(x + y)^2 - 1}{2}\right]^2.$$

Ta có: $|P| = |16(x^5 + y^5) - 20(x^3 + y^3) + 5(x + y)|$ và đặt $x + y = z$, ta có:

$$\begin{aligned} |P| &= \left| 16z \left(1 - \frac{z^2 - 1}{2} - \frac{(z^2 - 1)^2}{4} \right) - 20z \left(1 - \frac{z^2 - 1}{2} \right) + 5z \right| \\ &= |z| \left| -4z^2 + 10z^2 - 5 \right| = |z| \left| \left(2z^2 - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right|. \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{2}. \quad (**)$$

Thay (**) vào (*), và có: $|P| \leq \sqrt{2} \quad (***)$

$$\left(\text{Do } |z| \leq \sqrt{2} \text{ và } \left| \left(2z^2 - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right| \leq 1 \right)$$

$$\text{Để thấy dấu bằng trong (***) xảy ra} \Leftrightarrow |x + y| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max P = \sqrt{2}; \min P = -\sqrt{2}.$$

Bạn đọc hãy tự đánh giá về tính hiệu quả của hai phương pháp “lượng giác hóa” và “phi lượng giác hóa” trong bài toán nói trên!. Bạn thích cách giải nào?.

Bài 15: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn hệ thức: $xyz + x + z = y$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{2}{y^2 + 1} + \frac{3}{z^2 + 1}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } xz + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = 1. \quad (1)$$

Do x, y, z là các số dương,

nên đặt $x = \tan \frac{\alpha}{2}; \frac{1}{y} = \tan \frac{\beta}{2}; z = \tan \frac{\gamma}{2}$, ở đây $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó (1) có dạng: $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = 1$ (*)

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi \left(\text{do } \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Ta có: } 1 + x^2 = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$1 + y^2 = 1 + \cot^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$1 + z^2 = 1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } P &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 3 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \cos \alpha - (1 - \cos \beta) + 3 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 3 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = -3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 3 \\ &= 3 - 3 \left(\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{2}{3} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 3 - 3 \left[\left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 - \frac{1}{9} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right] \\ &= 3 + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 3 \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \leq \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1 \\ \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } 1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \tan^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Từ (*) với $\alpha = \beta$ suy ra

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\gamma}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{\alpha}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = \sqrt{2}; z = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

Từ đó suy ra: $\max P = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = \sqrt{2}; z = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

Nhận xét: Phương pháp “lượng giác hóa” tỏ rõ hiệu quả trên bài toán này!

Bài 16: Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2).$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \tan \frac{\alpha}{2}; y = \tan \frac{\beta}{2}; z = \tan \frac{\gamma}{2}$. Do $x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $\cos \alpha \geq 0; \cos \beta \geq 0; \cos \gamma \geq 0$, vì thế hiển nhiên suy ra:

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) \geq 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Dựa vào công thức lượng giác, ta có:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow & \left(1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \left(1 + \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) \left(1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \geq 1 + \frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \\ & \Leftrightarrow 8 \geq (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) \text{ hay } P \leq 8. \end{aligned}$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $\max P = 8 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bình luận: Dĩ nhiên các bạn có thể làm như sau:

$$\text{Do } x, y, z \in [0; 1] \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0; 1 - y^2 \geq 0; 1 - z^2 \geq 0.$$

Vì thế hiển nhiên ta có:

$$\left(1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \left(1 + \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) \left(1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \geq 1 + \frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}. \quad (*)$$

Từ (*) suy ra $\max P = 8 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Tuy nhiên sử dụng (*) không phải là điều mà ai cũng thấy được, trong khi sử dụng (1) và công thức lượng giác thì lời giải tự nhiên hơn!

Bài 17. Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}$ với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ $xy + yz + zx = 1 \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) = 1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}} = \frac{1}{\tan \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} = \cot \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow A + B + C = 180^\circ.$$

Vậy A, B, C là ba góc của một tam giác ABC.

$$\text{Ta có } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\tan \frac{A}{2}}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{A}{2}}} = \frac{\tan \frac{A}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}}} = \tan \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2}.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \sin \frac{B}{2}; \quad \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \sin \frac{C}{2}.$$

Như vậy $P = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$. Như đã biết trong mọi tam giác ABC ta có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \text{ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } A = B = C = 60^\circ.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow A = B = C = 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán trên bằng cách “phi lượng giác hóa” như sau:

Dựa vào $xy + yz + zx = 1$, ta có

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{xy+yz+zx+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{x}{x+y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+z}}.$$

$$\text{Từ đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right). \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+z} \Leftrightarrow y = z.$$

Tương tự ta có
$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} \right), \quad (2)$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y} \right). \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow z = x; x = y$.

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có $P \leq \frac{3}{2}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{do } xy + yz + zx = 1)$$

Tóm lại $\max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$. Ta thu lại kết quả trên!

Bạn thích giải cách nào?

Bài 18. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}$.

Hướng dẫn giải

Do $x > 0, y > 0, z > 0$, nên đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$, với $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Từ giả thiết $x + y + z = xyz$, ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$\Rightarrow \tan A (1 - \tan B \tan C) = -(\tan B + \tan C)$$

$$\Rightarrow \tan A = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -\tan(B + C) \Rightarrow A + B + C = 180^\circ.$$

Vậy có thể coi A, B, C là ba góc của một tam giác ABC .

Ta có $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \tan^2 A \cdot \cos^2 A = \sin^2 A$

Tương tự $\frac{y^2}{1+y^2} = \sin^2 B; \frac{z^2}{1+z^2} = \sin^2 C$. Vậy $P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

Ta biết rằng trong một tam giác thì $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = 60^\circ$

Vậy $\max P = \frac{9}{4} \Leftrightarrow A = B = C = 60^\circ \Leftrightarrow \tan A = \tan B = \tan C = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}.$$

Chương 4. **PHƯƠNG PHÁP CHIỀU BIẾN THIÊN HÀM SỐ**

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cùng với phương pháp bất đẳng thức, đây là một trong hai phương pháp thông dụng nhất để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Bằng cách xét chiều biến thiên hàm số (mà thông thường người ta hay sử dụng phép tính đạo hàm), sau đó so sánh giá trị hàm số tại các điểm đặc biệt (thông thường là các điểm cực đại, cực tiểu, các điểm đặt biệt như các đầu mút của các đoạn thẳng xác định nên miền xác định của hàm số đang xét, các điểm không tồn tại đạo hàm...). Từ phép so sánh ấy suy ra các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất phải tìm.

§1. SỬ DỤNG TRỰC TIẾP CHIỀU BIẾN THIÊN HÀM SỐ ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Những bài toán này thường có dạng đơn giản hoặc là trực tiếp khảo sát chiều biến thiên hàm số cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất cho trong đầu bài, hoặc là thực hiện một phương pháp đổi biến đơn giản để đưa hàm số cần khảo sát về dạng đơn giản vì thuận lợi hơn cho việc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số.

Bài 1. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D - 2011)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên miền $[0; 2]$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \frac{(4x + 3)(x + 1) - (2x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(x + 1)^2}$.

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	-2	-1	0	2
y'				+
y				

Vậy $\max_{0 \leq x \leq 2} y = y(2) = \frac{17}{3}$, $\min_{0 \leq x \leq 2} y = y(0) = 3$.

Nhận xét: Bài toán này quá đơn giản và cơ bản!

Bài 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D - 2010)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

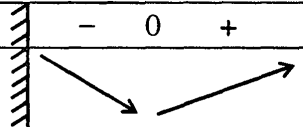
(Lời giải vắn tắt, lời giải chi tiết xem bài 4, §2 chương 1 cuốn sách này)

Miền xác định của hàm số là: $-2 \leq x \leq 5$

Ta có:
$$y' = \frac{(4-2x)\sqrt{-x^2+3x-10} - (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}}{2\sqrt{-x^2+4x+21} \cdot \sqrt{-x^2+3x-10}}.$$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	-2	$\frac{1}{3}$	5		
y'		-	0	+	
y					



Vậy $\min y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}.$

Bài 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Hướng dẫn giải

Khảo sát trực tiếp $f'(x)$ và suy ra $\max_{1 \leq x \leq e^3} f(x) = \frac{4}{e^2}; \min_{1 \leq x \leq e^3} f(x) = 0.$

(Xem lời giải chi tiết ở bài 4, §2 chương 1 cuốn sách này).

Bài 4. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm

số: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Hướng dẫn giải

Khảo sát trực tiếp $f'(x)$, rồi suy ra: $\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = \sqrt{2}; \min_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = 0.$

(Xem lời giải chi tiết ở bài 15, §2 chương 1 cuốn sách này).

Bài 5. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Khảo sát trực tiếp $f'(x)$, rồi suy ra: $\min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = -2$; $\max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = 2\sqrt{2}$.

(Xem lời giải chi tiết ở bài 1 (cách 2), §1 chương 1 cuốn sách này).

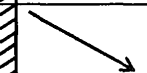
Bài 6. Cho $x, y \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{x}{y}$. Do $x, y \in [1; 2] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 2$

Lúc này ta có: $\max P = \max_{\frac{1}{2} \leq t \leq 2} f(t)$, với $f(t) = t + \frac{1}{t}$.

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$, nên có bảng biến thiên sau:

t	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(t)$		0	
$f(t)$			

Vậy $\max P = \max_{\frac{1}{2} \leq t \leq 2} f(t) = \max \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right); f(2) \right\} = \max \left\{ \frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right\} = \frac{5}{2}$.

Như vậy $\max P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = 1; y = 2 \end{cases}$

Bình luận:

1. Khi đổi biến, ta phải tìm miền xác định của biến mới.

Trong bài trên biến cũ $x, y \in [1; 2]$, còn biến mới $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

2. Các bạn hãy so sánh cách giải này với cách giải trong bài 19, mục 2, chương 2 của cuốn sách này).

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x^6 + 4(1 - x^2)^3 \text{ với } -1 \leq x \leq 1.$$

Hướng dẫn giải

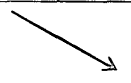
Đặt $t = x^2$. Khi đó do $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [0; 1]$.

Ta có: $\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \max_{0 \leq t \leq 1} F(t)$; $\min_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \min_{0 \leq t \leq 1} F(t)$ (1)

ở đây: $F(t) = t^3 + 4(1 - t)^3$.

Ta có: $F'(t) = 3t^2 - 12(1 - t)^2 = -9t^2 + 24t - 12$.

Vậy có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{2}{3}$	1	2	
$F'(t)$		-	0	+	
$F(t)$					

Như vậy: $\min_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \min_{0 \leq t \leq 1} F(t) = F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$,

$\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \max_{0 \leq t \leq 1} F(t) = \max\{F(0); F(1)\} = \max\{4; 1\} = 4$.

Ta có: $\min_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\max_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = 4 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể ra dưới dạng sau:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \sin^6 x + 4\cos^6 x$, với $x \in \mathbb{R}$

Rõ ràng sau khi đặt: $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$), ta có:

$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{-1 \leq t \leq 1} F(t)$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{-1 \leq t \leq 1} F(t)$

Với $F(t) = t^6 + 4(1 - t^2)^3$. Khi đó ta quy bài toán đã cho về bài toán trên!.

Bài 8. Cho x, y là các số thực không âm, sao cho $x + y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3^{2x} + 3^y$.

Hướng dẫn giải

Do $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$, vậy $P = 3^{2x} + 3^{1-x} = 3^{2x} + \frac{3}{3^x}$.

Đặt $t = 3^x$. Do $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq 3$.

Ta có: $\max P = \max_{1 \leq t \leq 3} F(t)$; $\min P = \min_{1 \leq t \leq 3} F(t)$ (1)

với $F(t) = t^2 + \frac{3}{t}$.

Ta có: $F'(t) = 2t - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^3 - 3}{t^2}$,

và có bảng biến thiên sau:

t	1	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$	3	
F'(t)		-	0	+
F(t)	4			10

Như vậy: $\max P = \max_{1 \leq t \leq 3} F(t) = \max \{F(1); F(3)\} = \max \{4; 10\} = 10$,

$$\min P = \min_{1 \leq t \leq 3} F(t) = F\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$$

Ta có: $\max P = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0,$

$$\min P = 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 3^x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \log_3 \frac{3}{2} = \frac{1}{3}(1 - \log_3 2) \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log_3 2 \end{cases}$$

Bài 9. Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$, vậy $P = \frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{x+1} = 2 \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 2}$.

Đặt $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 2}$ với $0 \leq x \leq 1$.

Ta có: $\max P = 2 \max_{0 \leq x \leq 1} f(x)$; $\min P = 2 \min_{0 \leq x \leq 1} f(x)$. (1)

Rõ ràng $f'(x) = \frac{6x-3}{(-x^2+x+2)^2}$ nên có bảng biến thiên sau:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'(x)		- 0 +	
f(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Từ đó theo (1) có: $\min P = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$$\max P = 2\max\{f(0); f(1)\} = 2\max\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\} = 1.$$

Vậy $\min P = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$, $\max P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; y=1 \\ x=1; y=0 \end{cases}$

Nhận xét:

1. Ta còn có thể giải như sau (cũng bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số)

Ta có: $P = \frac{x^2 + x + y^2 + y}{xy + x + y + 1} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + (x+y)}{(x+y) + 1 + xy} = \frac{2 - 2xy}{2 + xy}$.

Đặt $t = xy$. Ta có: $0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Xét hàm số:

$f(t) = \frac{2-2t}{2+t}$ với $0 \leq t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f'(t) = \frac{-6}{(2+t)^2}$ và có bảng biến thiên sau

x	0	$\frac{1}{4}$
$f'(t)$	//	-
$f(t)$	//	//

Vậy $\max P = \max f(t) = f(0) = 1$; $\min P = \min f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}$;

$\max P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=0 \\ x=0; y=1 \end{cases}$; $\min P = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ta thu lại kết quả trên.

2. Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(t) = \frac{2-2t}{2+t}$ với $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$,

ta có thể sử dụng phương pháp bất đẳng thức như sau:

Ta có: $f(t) = 1 - \frac{3t}{2+t}$. (1)

Do $0 \leq t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3t}{2+t} \geq 0 \Rightarrow f(t) \leq 1 \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Vả lại $f(t) = 1 \Leftrightarrow \frac{3t}{2+t} = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

$$\text{Từ đó suy ra } \max P = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0 \\ x = 0; y = 1. \end{cases}$$

$$\text{Lại có } f(t) = -2 + \frac{6}{2+t}.$$

$$\text{Do } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < 2+t \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{6}{2+t} \geq \frac{8}{3}.$$

$$\text{Vậy } f(t) \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}. \text{ Do đó: } \min P = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Các bạn thích cách giải nào?

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sin x \cos^3 x \text{ với } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Do $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nên ta có:

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = \sqrt{\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f^2(x)}, \quad (1)$$

$$\min_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = \sqrt{\min_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f^2(x)}. \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } f^2(x) = \sin^2 x \cos^6 x = (1 - \cos^2 x) \cos^6 x.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Ta có: } \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f^2(x) = \max_{0 \leq t \leq 1} F(t); \quad \min_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f^2(x) = \min_{0 \leq t \leq 1} F(t),$$

$$\text{ở đây: } F(t) = (1-t)t^3 = t^3 - t^4.$$

Ta có: $F'(t) = 3t^2 - 4t^3 = t^2(3 - 4t)$, nên có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{3}{4}$	1
F'(t)		-	0
F(t)	0	$\frac{27}{256}$	0

$$\text{Vậy } \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = \sqrt{\max_{0 \leq t \leq 1} F(t)} = \sqrt{\frac{27}{256}} = \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

$$\min_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = \sqrt{\min_{0 \leq t \leq 1} F(t)} = \sqrt{\min\{F(0); F(1)\}} = \sqrt{\min\{0; 0\}} = 0.$$

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6},$$

$$\min_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0. \end{cases}$$

Nhận xét: Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi để giải bài toán trên như sau:

Ta có: $f^2(x) = \sin^2 x \cdot \cos^6 x$

$$= (1 - \cos^2 x) \cos^6 x = 27 \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \quad (3)$$

Từ (3) và theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$f^2(x) \leq 27 \left[\frac{(1 - \cos^2 x) + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{\cos^2 x}{3}}{4} \right] = \frac{27}{256}$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{3} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (do } \cos x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \sqrt{\max f^2(x)} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Mặt khác do } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow P \geq 0. \text{ Dễ thấy } P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó có ngay } \min P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Ta thu lại kết quả trên!.

Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Do $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, nên ta có:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{\max_{x \in \mathbb{R}} f^2(x)}; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{\min_{x \in \mathbb{R}} f^2(x)}.$$

Ta có: $f^2(x) = 2 + (\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x}$.

Dựa vào công thức: $\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$, ta đặt $t = \sin x + \cos x$
 $(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$.

Lúc đó: $\max_{x \in \mathbb{R}} f^2(x) = \max_{|t| \leq \sqrt{2}} F(t)$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f^2(x) = \min_{|t| \leq \sqrt{2}} F(t)$, ở đây

$$F(t) = 2 + t + 2\sqrt{1 + t + \frac{t^2 - 1}{2}} = 2 + t + \sqrt{2}|t + 1|.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$
F(t)	$(1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}$	
F'(t)	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	
F'(t)	-	+	
F(t)	$4 - 2\sqrt{2}$	1	$4 + 2\sqrt{2}$

Vậy $\min_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} F(t) = F(-1) = 1$

$$\max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} F(t) = \max\{F(-\sqrt{2}); F(\sqrt{2})\} = \max\{4 - 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2}\} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 \Leftrightarrow t = \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Nhận xét: Làm tương tự như trên, các bạn hãy giải bài toán sau:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|, \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đáp số: } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2(\sqrt{2} + 1); \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{3} - 1.$$

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2}, x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Lời giải vẫn tất như sau: (Xem lời giải chi tiết trong bài 5, nhận xét 2 của chương 3)

Ta có: $f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}$, từ đó suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	3	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\frac{5}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	3

Từ đó suy ra $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Chú ý: Bài này ít nhất có đến 4 lời giải khác nhau (Xem bài 5, chương 3 cuốn sách này)

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sin \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1, \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\cos \frac{4x}{1+x^2} = 1 - 2\sin^2 \frac{2x}{1+x^2}$. Đặt $t = \sin \frac{2x}{1+x^2}$

Do $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ và hàm $y = \sin x$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên

$$-\sin 1 \leq t \leq \sin 1$$

$$\text{Lúc đó: } \sin \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1 = -2t^2 + t + 2.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{|t| \leq \sin 1} F(t); \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{|t| \leq \sin 1} F(t), (1)$$

ở đây $F(t) = -2t^2 + t + 2$. Dễ thấy $F'(t) = -4t + 1$ và có bảng biến thiên sau:

t	$-\sin 1$	$\frac{1}{4}$	$\sin 1$
$F'(t)$		+	0
$F(t)$		$\nearrow$	$\searrow$

Từ (1) Suy ra:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8}.$$

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) &= \min \{F(-\sin 1); F(\sin 1)\} = \min \{-2 \sin^2 1 - \sin 1 + 2; -2 \sin^2 1 + \sin 1 + 2\} \\ &= -2 \sin^2 1 - \sin 1 + 2. \end{aligned}$$

§2: SỬ DỤNG CHIỀU BIẾN THIÊN HÀM SỐ CÓ KẾT HỢP THÊM CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Với những bài toán phức tạp hơn, lược đồ sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất như sau:

- Trước hết bằng các bài toán phụ (thí dụ như sử dụng các bất đẳng thức trung gian, sử dụng phép biến đổi đại số) ta đưa bài toán ban đầu về một bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số có dạng đơn giản hơn.
- Với bài toán mới này cần lưu ý xác định lại miền xác định của biến mới. Để làm được điều này người ta thường dùng một bất đẳng thức phụ, đôi khi còn giải thêm một bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất nữa để xác định các cận trên và dưới của biến mới.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \text{ trên miền xác định của nó.}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 18+3x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6. \quad (1)$$

Vậy (1) là miền xác định của hàm số $f(x)$.

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$. Ta tìm miền xác định của biến mới t như sau:

$$\text{Do } t \geq 0 \text{ nên } t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, suy ra:

$$9 \leq t^2 \leq 9 + [(3+x) + (6-x)] \Rightarrow 9 \leq t^2 \leq 18 \Rightarrow 3 \leq t \leq 3\sqrt{2}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } \sqrt{(3+x)(6-x)} = \sqrt{18+3x-x^2} = \frac{t^2-9}{2}.$$

$$\text{Như vậy ta có: } \max_{-3 \leq x \leq 6} f(x) = \max_{3 \leq t \leq 3\sqrt{2}} F(t), \quad (4)$$

$$\min_{-3 \leq x \leq 6} f(x) = \min_{3 \leq t \leq 3\sqrt{2}} F(t), \quad (5)$$

ở đây $F(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$.

Ta có: $F'(t) = -t + 1$, nên có bảng biến thiên sau:

t	1	3	$3\sqrt{2}$
$F'(t)$	0		-
$F(t)$			

Từ (4), (5) suy ra:

$$\max_{-3 \leq x \leq 6} f(x) = \max_{3 \leq t \leq 3\sqrt{2}} F(t) = F(3) = 3,$$

$$\min_{-3 \leq x \leq 6} f(x) = \min_{3 \leq t \leq 3\sqrt{2}} F(t) = F(3\sqrt{2}) = \frac{9-3\sqrt{2}}{6};$$

$$\max_{-3 \leq x \leq 6} f(x) = 3 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases},$$

$$\min_{-3 \leq x \leq 6} f(x) = \frac{9-3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow t = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 3+x = 6-x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Nhận xét:

Trong bài trên ta đã sử dụng phương pháp bất đẳng thức để tìm miền xác định của biến mới t.

Bài 2. Cho các số thực x, y thỏa mãn các điều kiện: $1 \leq x \leq 2$; $3 \leq y \leq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, khi đó

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right)^2 - 2 = \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 - 2 \right]^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 - 2 = t^2 - 2.$$

$$\text{Vậy } P = t^4 - 4t^2 + 2 - t^2 + 2 + t = t^4 - 5t^2 + t + 4.$$

Bây giờ ta tìm miền xác định của t.

Ta có: $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ với $1 \leq x \leq 2$; $3 \leq y \leq 4$.

Dễ thấy: $\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$.

Đặt $u = \frac{x}{y}$ và xét $f(u) = u + \frac{1}{u}$, với $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(u) = 1 - \frac{1}{u^2} = \frac{u^2 - 1}{u^2}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

u	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$f'(u)$		
$f(u)$		
	$\frac{17}{4}$	$\frac{13}{6}$

Vậy ta có miền xác định của hàm số: $F(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4$ là $\frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}$.

Ta có: $F'(t) = 4t^3 - 10t + 1 = 4t(t^2 - 4) + 6t + 1$.

Như thế $F'(t) > 0$ khi $t \geq 2$.

Do $\frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}$, nên nói riêng ta có bảng biến thiên sau:

t	$\frac{13}{6}$	$\frac{17}{4}$
$F'(t)$		
$F(t)$		

Vậy $\max P = \max_{\frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}} F(t) = F\left(\frac{17}{4}\right) = \frac{4249}{16}$,

$\min P = \min_{\frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}} F(t) = F\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{1083}{54}$;

$\max P = \frac{4249}{16} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=4 \\ x=4; y=1 \end{cases}$

$\min P = \frac{1083}{54} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=3 \\ x=3; y=2 \end{cases}$.

Nhận xét:

1. Trong bài toán này, để tìm miền xác định của biến mới, ta phải giải một bài toán phụ đó cũng là bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số (tuy nhiên có dạng đơn giản hơn nhiều!)

2. Bằng phương pháp giải hoàn toàn tương tự, các bạn hãy giải bài toán sau:

Cho x, y, z là hai số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, khi đó $|t| \geq 2$. **Đáp số:** $\min P = 2$.

Bài 3. Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có

$$(x + y + z) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}. \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } P \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$. Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{9}{t}$ với $0 < t \leq \frac{3}{2}$.

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} = \frac{t^2 - 9}{t^2}$, và có bảng biến thiên sau:

t	-3	0	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$			-
$f(t)$			

$$\text{Vậy } \forall 0 < t \leq \frac{3}{2}, \text{ ta có } f(t) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3) suy ra: } P \geq \frac{15}{2}. \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{15}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét: Sử dụng bất đẳng thức phụ, ta có đánh giá (2)

Trên cơ sở (2) sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải tiếp bài toán. Đây là sự kết hợp giữa phương pháp bất đẳng thức và chiều biến thiên hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 4. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A - 2011)

Cho $x \geq y$, $x \geq z$ và $x, y, z \in [1; 4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 4, §1, chương 1 cuốn sách này.

Bình luận: Đây là sự kết hợp khéo léo giữa hai phương pháp bất đẳng thức và chiều biến thiên hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 5. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B - 2011)

Cho a, b là hai số thực dương và thỏa mãn điều kiện:

$$2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) + 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).$

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 2, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 6. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D)

Cho x, y là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện: $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 6, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 7. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 7, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 8. (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A)

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy.$$

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 10, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 9. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho x, y, z là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 11, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 10. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho $x, y \in \mathbb{R}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong bài 13, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bình luận: Trong các đề thi tuyển sinh nói trên (từ bài 4 đến bài 10) để giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các biểu thức đều dựa vào sự kết hợp khéo léo giữa phương pháp chủ đạo là chiều biến thiên hàm số và các phương pháp khác (thí dụ như dựa vào một bất đẳng thức cho trước, hoặc sử dụng bất đẳng thức Côsi, hoặc dựa vào các kiến thức về hình học giải tích, ...)

Các bài toán ấy đã minh họa rõ nét cho những điều mà chúng tôi đã đưa ra trong phần mở đầu của §2, chương 4 này.

Bài 11. Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải chi tiết trong phần nhận xét của bài 9, mục 1.2, §1, chương 2 cuốn sách này.

Lời giải vắn tắt sau: Đưa P về dạng: $P = \frac{1}{1-3yx} + \frac{1}{xy}$.

Đặt $t = xy \left(0 < t \leq \frac{1}{4} \right)$ và đưa về xét chiều biến thiên của hàm số:

$$f(t) = \frac{1}{1-3t} + \frac{1}{t}.$$

Từ đó có: $\min P = 4 + 2\sqrt{3}$.

Nhận xét: Lời giải là gọn gàng và tự nhiên!

Bài 12. Cho x, y, z là ba số thực dương sao cho $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x + y)(y + z)(z + x) - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$,
và giả thiết $x + y + z = 3$, ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 = 27 - 3(x + y)(y + z)(z + x). \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) ta có} \quad 3P &= 3(x + y)(y + z)(z + x) - 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \\ &= 27 - (x^3 + y^3 + z^3) - 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \\ &= 27 - \left[(x^3 + 3\sqrt[3]{x}) + (y^3 + 3\sqrt[3]{y}) + (z^3 + 3\sqrt[3]{z}) \right] \\ &= 27 - \left[(x^3 + 3\sqrt[3]{x} - 4x) + (y^3 + 3\sqrt[3]{y} - 4y) + (z^3 + 3\sqrt[3]{z} - 4z) \right] - 12 \quad (2) \end{aligned}$$

(chú ý do $x + y + z = 3$)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3\sqrt[3]{t} - 4t$ với $0 < t \leq 1$.

$$\text{Ta có} \quad f'(t) = 3t^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} - 4$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} - 4 = 0$$

$$\text{hay } f'(u) = 0 \Leftrightarrow 3u^3 + \frac{1}{u} - 4 = 0 \text{ (ở đây đặt } u = \sqrt[3]{t^2} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 3u^4 - 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(3u^3 + 3u^2 + 3u - 1) = 0.$$

Vậy phương trình $f'(u) = 0$ có 1 nghiệm $u = 1$ và một nghiệm u_0 nên $0 < u_0 < 1$.

Từ đó suy ra phương trình $f'(t) = 0$ có một nghiệm $t = 1$ và một nghiệm t_0 nên $0 < t_0 < 1$.

Như thế có bảng biến thiên sau

t	0	t_0	1
$f'(t)$		0	
$f(t)$		↗ ↘	
	0		0

Từ đó suy ra $f(t) \geq 0 \forall 0 < t \leq 1$ (vì $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$).

Từ (2) suy ra $3P \leq 15$.

$$\Rightarrow P \leq 5. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Tóm lại $\min P = 5 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét: Ta có cách giải khác bằng phương pháp bất đẳng thức sau đây:

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có } x^3 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \geq 4\sqrt[4]{x^3(\sqrt[3]{x})^3} = 4x$$

$$\text{hay } x^3 + 3\sqrt[3]{x} \geq 4x. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x^3 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = 1$ (do $x > 0$).

$$\text{Lập luận tương tự, ta có } y^3 + 3\sqrt[3]{y} \geq 4y, \quad (2)$$

$$z^3 + 3\sqrt[3]{z} \geq 4z. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) và có } x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 12 \quad (4)$$

(do $x + y + z = 3$)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Áp dụng hằng đẳng thức ta viết lại (4) dưới dạng sau:

$$(x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x) + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 12$$

$$\Rightarrow 27 - 3(x + y)(y + z)(z + x) + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 12$$

$$\Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) - (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \leq 5.$$

$$\text{hay } P \leq 5. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy ta có $\max P = 5 \Leftrightarrow x = y = z = 1$. Ta thu lại kết quả trên.

Bạn thích cách giải nào?

Bài 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = (1 + \cos x) \left(1 + \frac{1}{\sin x} \right) + (1 + \sin x) \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right) \text{ với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Viết lại } f(x) \text{ dưới dạng } f(x) = (\cos x + \sin x) + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} + 2$$

$$= (\cos x + \sin x) + \frac{1 + (\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x} + 2 \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng công thức } \sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$$

$$\text{và đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Do } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 < t \leq \sqrt{2}.$$

Khi đó từ (1) xét hàm số $F(t) = t + \frac{1+t}{\frac{t^2-1}{2}} + 2 = t + \frac{2}{t-1} + 2$ với $1 < t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $F'(t) = 1 - \frac{2}{(t-1)^2} < 0 \quad \forall t \in (1; \sqrt{2}]$

$\Rightarrow \min_{1 < t \leq \sqrt{2}} F(t) = F(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$.

Từ (2) suy ra $\min_{0 < x < \frac{\pi}{2}} F(x) = \min_{1 < t \leq \sqrt{2}} F(t) = 4 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Bài 14. Giả sử $x, y, z \in [0; 1]$ và $xy + yz + zx = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2}t - \frac{3\sqrt{3}}{2}t^3$ với $0 \leq t \leq 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}t^2$.

Từ đó có bảng xét dấu sau:

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$				

Vậy $\max_{0 \leq t \leq 1} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1$ hay $\frac{3\sqrt{3}}{2}t(1-t^2) \leq 1 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}t \leq \frac{1}{1-t^2}$

$$\Rightarrow \frac{t}{1-t^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}t^2. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t = 0 \end{cases}$

$$\text{Như vậy ta có } \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \quad (2)$$

$$\frac{y}{1-y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \quad (3)$$

$$\frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2. \quad (4)$$

Vì $xy + yz + zx = 1$, nên x, y, z không thể đồng thời bằng 0.

$$\text{Sau khi cộng từng vế (2) (3) (4), ta có } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2). \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta lại có } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \quad (6)$$

$$\text{Dấu bằng trong (6) xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vì } xy + yz + zx = 1, \text{ nên từ (5) (6) suy ra } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (5) (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 15. Cho ba số thực $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(1-z).$$

Hướng dẫn giải

Với mỗi y, z cố định $\in [0; 1]$, xét hàm số biến x sau đây

$$F(x) = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(1-z), 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Ta có } F'(x) = \frac{1}{y+z+1} - \frac{y}{(z+x+1)^2} - \frac{z}{(x+y+1)^2} - (1-y)(1-z)$$

$$\Rightarrow F''(x) = \frac{2y}{(z+x+1)^2} + \frac{2z}{(x+y+1)^2} \geq 0 \quad (\text{do } y, z \geq 0)$$

Vậy $F'(x)$ là hàm đồng biến khi $0 \leq x \leq 1$.

Chỉ có ba khả năng sau đây:

1. Nếu $F'(x) \geq 0 \forall 0 \leq x \leq 1$. Khi đó $F(x)$ là hàm đồng biến trên $0 \leq x \leq 1$, như vậy với mọi $0 \leq x \leq 1$

$$\text{ta có } F(x) \leq F(1) = \frac{1}{y+z+1} + \frac{y}{z+1+1} + \frac{z}{1+y+1} \leq \frac{1+y+z}{y+z+1} = 1 \quad (\text{do } y \leq 1; z \leq 1)$$

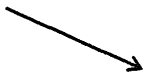
2. Nếu $F'(x) \leq 0 \forall 0 \leq x \leq 1$.

Khi đó $F(x)$ là hàm nghịch biến trên $0 \leq x \leq 1$. Từ đó với mọi $0 \leq x \leq 1$, ta có

$$F(x) \leq F(0) = \frac{y}{z+1} + \frac{z}{y+1} + (1-y)(1-z) = \frac{1+y+z+y^2z^2}{1+y+z+yz}.$$

Do $y^2z^2 \leq yz$ và y, z đều $\in [0; 1] \Rightarrow F(x) \leq 1 \forall x \in [0; 1]$.

3. Nếu $F'(x)$ có dấu thay đổi trên $[0; 1]$. Do $F'(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; 1]$ nên chỉ có thể là

x	0	ξ	1
$F'(x)$		- 0 +	
$F(x)$			

Do $F(0) \leq 1; F(1) \leq 1$, nên suy ra với mọi $0 \leq x \leq 1$, ta luôn có $F(x) \leq 1$.

Như vậy kết hợp lại, ta luôn có $P \leq 1$. Vậy $\max P = 1$.

Nhận xét:

1. Trong bài toán trên mặc dầu biểu thức P phụ thuộc vào ba biến x, y, z nhưng ta đã coi nó chỉ là hàm của một biến (biến x chẳng hạn). Sau đó sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải bài toán đã cho.
2. Cách giải này cũng có thể áp dụng để giải đề thi tuyển sinh Cao đẳng đại học khối A – 2011: Cho $x, y, z \in [1; 4]$ sao cho $x \geq y; x \geq z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

(xem lời giải trong bài 1, §2, chương 1 cuốn sách này!)

Bài 16. (Đề thi Tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A)

Cho hai số thực x, y khác 0 và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 - xy + y^2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3y^3}$. (1)

Từ (1) và giả thiết suy ra $P = \frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2$ (2)

Đặt $x = ty$. Khi đó từ giả thiết ta có $(y+ty)y \cdot ty = t^2y^2 - ty^2 + y^2 = y^2(t^2 - t + 1)$

$\Rightarrow y = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t} \Rightarrow x = ty = \frac{t^2 - t + 1}{t + 1}$. (3)

Thay (3) vào (2) và có $P = \left(\frac{t+1}{t^2-t+1} + \frac{t^2+t}{t^2-t+1} \right)^2 = \left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} \right)^2 = f^2(t)$,

với $f(t) = \left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} \right)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-3t^2+3}{(t^2-t+1)^3}$ và có bảng biến thiên sau

t	-1		1	
$f'(t)$	-	0	+	0
$f(t)$	1	0		4
				1

Ta có $\max_{t \in \mathbb{R}} f(t) = 4$, nên $\max P = 16 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Nhận xét: Xem cách giải bài toán trên bằng phương pháp bất đẳng thức trong bài 11, §2, chương 1 cuốn sách này.

Chương 5. PHƯƠNG PHÁP MIỀN GIÁ TRỊ HÀM SỐ

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Giả sử ta phải tìm $\max_{x \in D} f(x)$ hoặc $\min_{x \in D} f(x)$, ở đây D là miền xác định của biến số x .

Khi đó để sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số để giải bài toán trên ta làm như sau:

Gọi m là giá trị tùy ý của $f(x)$ trên D . Khi đó phương trình sau đây (ẩn x):

$$\begin{cases} f(x) = m \\ x \in D \end{cases} \quad (1)$$

có nghiệm. Tùy dạng của (1) mà ta có được điều kiện để (1) có nghiệm. Nói chung các điều kiện này có dạng: $\alpha \leq m \leq \beta$ (2)

Bằng cách giải phương trình cụ thể $f(x) = \beta$; $f(x) = \alpha$ ta suy ra được với giá trị nào của $x \in D$, để có dấu bằng tương ứng xảy ra ở bên phải, bên trái của (2).

Nói cách khác ta tìm được $x_0 \in D$, $x_1 \in D$ sao cho $f(x_0) = \beta$; $f(x_1) = \alpha$ (3)

Kết hợp (2), (3) suy ra: $\max_{x \in D} f(x) = \beta$ và $\min_{x \in D} f(x) = \alpha$

Đây cũng là một trong các phương pháp hay dùng để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 23}{x^2 + 2x + 10}, \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của $f(x)$, khi đó phương trình sau đây (ẩn x)

$$\frac{2x^2 + 7x + 23}{x^2 + 2x + 10} = m$$

có nghiệm. Vì $x^2 + 2x + 10 > 0$ ($\forall x$), nên

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 23 = m(x^2 + 2x + 10)$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)x^2 + (2m - 7)x + 10m - 23 = 0 \quad (2)$$

- Nếu $m = 2$, khi đó (2) có dạng: $-3x - 3 = 0$.

Rõ ràng (3) có nghiệm ($x = -1$)

- Nếu $m \neq 2$, khi đó (2) có nghiệm khi và chỉ khi

$$(2m - 7)^2 - 4(m - 2)(10m - 23) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq m \leq \frac{5}{2} \text{ và } m \neq 2$$

Kết hợp lại, suy ra (2) có nghiệm (tức là (1) có nghiệm) khi và chỉ khi:

$$\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

- Khi $m = \frac{5}{2}$ thì (2) có dạng: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

- Khi $m = \frac{3}{2}$ thì (2) có dạng: $x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -4.$$

Nhận xét:

1. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số như sau:

Rõ ràng: $y' = \frac{-3x^2 - 6x + 24}{(x^2 + 2x + 10)^2}$, và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2

Từ đó suy ra:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -4.$$

Ta thu lại kết quả trên. Bạn thích cách giải nào?

2. Ta lại có thể giải bằng phương pháp bất đẳng thức như sau:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 23}{x^2 + 2x + 10} = 2 + \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 10} = 2 + 3 \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 9}. \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \left| \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 9} \right| = \frac{|x + 1|}{(x + 1)^2 + 9} \leq \frac{|x + 1|}{6|x + 1|} = \frac{1}{6}$$

(Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $(x + 1)^2 + 9 \geq 6|x + 1|$)

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 3 \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 9} \leq \frac{1}{2}. \quad (**)$$

Từ (**) và (*) suy ra, $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$

Rõ ràng $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$, còn $f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -4$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$ và $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -4$.

Có lẽ đây là phương pháp đơn giản nhất!.

3. Xét bài toán tương tự sau:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}, \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Xét các cách giải sau:

- Bằng phương pháp miền giá trị hàm số:

Làm tương tự như trên sau khi gọi m là giá trị tùy ý của hàm số, ta đi đến phương trình sau đây (ẩn x): $(3m - 2)x^2 + 2(m - 5)x + m - 3 = 0$ có nghiệm. Lập luận tương tự như trên ta đi đến m thỏa mãn:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{2}{3} \\ m \neq \frac{2}{3} \\ \frac{1 - \sqrt{153}}{4} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{153}}{4} \end{array} \right.$$

Từ đó đi đến $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1 + \sqrt{153}}{4}$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1 - \sqrt{153}}{4}$.

- Bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số:

Ta có: $f'(x) = \frac{-26x^2 - 14x + 4}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$,

Vậy có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{-7-\sqrt{153}}{26}$	$\frac{-7+\sqrt{153}}{26}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$

Nhận xét: Sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số trong bài này thì

- Ở biến lấy đạo hàm và xét dấu thì không có gì phức tạp!
- Tuy nhiên khi tính các giá trị $f\left(\frac{-7 + \sqrt{153}}{26}\right)$ và $f\left(\frac{-7 - \sqrt{153}}{26}\right)$ không đơn

giản chút nào! Dĩ nhiên ở đây ta cần biết kết quả sau đây:

Xét hàm phân thức: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số, khi

đó ta có: $y(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)}$.

Áp dụng kết quả này, ta có:

$$f\left(\frac{-7 + \sqrt{153}}{26}\right) = \frac{4x + 10}{6x + 2}. \text{ Thay } x = \frac{-7 + \sqrt{153}}{26}, \text{ ta có}$$

$$f\left(\frac{-7 + \sqrt{153}}{26}\right) = 2 \frac{58 + \sqrt{153}}{3\sqrt{153} + 5} = 2 \frac{(58 + \sqrt{153})(3\sqrt{153} - 5)}{(3\sqrt{153} + 5)(3\sqrt{153} - 5)} = \frac{169(1 + \sqrt{153})}{676} = \frac{1 + \sqrt{153}}{4}.$$

Tương tự, ta có: $f\left(\frac{-7 - \sqrt{153}}{26}\right) = \frac{1 - \sqrt{153}}{4}$.

Kết hợp với bảng biến thiên trên, suy ra:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{-7 + \sqrt{153}}{26}\right) = \frac{1 + \sqrt{153}}{4}; \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{-7 - \sqrt{153}}{26}\right) = \frac{1 - \sqrt{153}}{4}.$$

Ta thu lại kết quả trên.

Qua thí dụ này ta thấy sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số không thuận lợi bằng phương pháp miền giá trị hàm số.

Với thí dụ này nếu sử dụng phương pháp bất đẳng thức chắc rất khó ra được kết quả như trên!.

4. Các bạn hãy giải bài toán sau bằng các phương pháp khác nhau.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}$ trên toàn trục số.

Sau đó hãy so sánh ưu thế của từng phương pháp sử dụng

Đáp số: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5; \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1.$

Nhận xét: Ngoài phương pháp chiều biến thiên hàm số, phương pháp sử dụng lượng giác áp dụng vào bài toán này cũng rất đơn giản.

Thật vậy, đặt $x = \tan \varphi$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1} &= (\tan^2 \varphi + 4\sqrt{2} \tan \varphi + 3) \cos^2 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi + 4\sqrt{2} \sin \varphi \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + 2\sqrt{2} \sin 2\varphi + 3 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = 2 + 2\sqrt{2} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi. \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức quen biết: $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad \forall x$,

từ (*) suy ra: $2 - 3 \leq f(x) \leq 2 + 3 \Rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5; \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1.$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số, khi đó phương trình sau đây (ẩn x)

$$\frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} = m \quad (1)$$

có nghiệm. Vì $-\sqrt{5} \leq \sin x - 2 \cos x \leq \sqrt{5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

nên: $\sin x - 2 \cos x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow (m - 2) \sin x - (2m + 1) \cos x = 1 - 3m. \quad (2)$$

Theo lý thuyết phương trình lượng giác thì (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(m - 2)^2 + (2m + 1)^2 \geq (1 - 3m)^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 2.$$

$$\text{Xét phương trình: } \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = 2 \quad (3)$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Tương tự: } \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét:

1. Xét cách giải bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số sau:

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\cos x - \sin x)(\sin x - 2\cos x + 3) - (\cos x + 2\sin x)(2\sin x + \cos x + 1)}{(\sin x - 2\cos x + 3)^2} \\ &= \frac{5\cos x - 5\cos^2 x - 5\sin x - 5\sin^2 x}{(\sin x - 2\cos x + 3)^2} = 5 \frac{\cos x - \sin x - 1}{(\sin x - 2\cos x + 3)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra dấu của $f'(x)$ là dấu của $\cos x - \sin x - 1$.

Rõ ràng $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π , nên ta chỉ cần xét $f(x)$ với $-\pi \leq x \leq \pi$.

$$\text{Ta có: } \cos x - \sin x - 1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 = \sqrt{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

Từ đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	π			
$\cos x - \sin x - 1$		-	0	+	0	-	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		0		$-\frac{1}{2}$		2	

Từ đó (dựa vào tính chu kỳ 2π của $f(x)$) suy ra:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Như vậy ta thu lại kết quả trên. Rõ ràng phương pháp miền giá trị hàm số có ưu thế rõ rệt trong thí dụ này!

2. Xét cách giải khác nữa sau đây:

Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$, khi đó:

$$\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = \frac{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}{\frac{2t}{1+t^2} - 2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \frac{4t+2}{5t^2+2t+1} = F(t).$$

Đến đây ta có: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in \mathbb{R}} F(t)$; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{t \in \mathbb{R}} F(t)$.

Ta lại có thể sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số, hoặc chiều biến thiên hàm số để tìm $\max_{t \in \mathbb{R}} F(t)$, $\min_{t \in \mathbb{R}} F(t)$. Các bạn thử giải tiếp xem!.

Bài 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho x và y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Hướng dẫn giải

- Xem lời giải bằng phương pháp miền giá trị hàm số trong cách giải 1 bài toán 3, §1, chương 1 cuốn sách này.
- Xem lời giải kết hợp phương pháp lượng giác hóa và miền giá trị hàm số trong cách giải 2 bài toán 3, §1, chương 1 cuốn sách này.

Bài 4. Cho x, y là các số thực tùy ý.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$.

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của P . Khi đó phương trình sau (ẩn x và y)

$$\frac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7} = m \quad (1)$$

có nghiệm. Ta có: $(1) \Leftrightarrow mx^2 - x + my^2 - 2y + 7m - 1 = 0$. (2)

- Nếu $m = 0$ thì (2) có dạng: $x + 2y + 1 = 0$. (3)

Rõ ràng (3) có nghiệm (thí dụ $x = -1, y = 0$ là nghiệm của (3)).

Vậy $m = 0$ là một giá trị mà biểu thức nhận.

- Nếu $m \neq 0$. Vì (2) có nghiệm, nên nói riêng:

$$\Delta = 1 - 4m(my^2 - 2y + 7m - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2y^2 - 8my + 28m^2 - 4m - 1 \leq 0. \quad (4)$$

Ta sử dụng kết quả sau: Bất phương trình: $at^2 + bt + c \leq 0$ (với $a > 0$)

có nghiệm khi và chỉ khi:

$$b^2 - 4ac \geq 0 \text{ (thật vậy nếu } b^2 - 4ac < 0 \text{ thì } at^2 + bt + c > 0 \forall t)$$

Từ đó do (4) có nghiệm nên:

$$\begin{aligned} \delta' = 16m^2 - 4m^2(28m^2 - 4m - 1) \geq 0 &\Leftrightarrow 28m^2 - 4m - 5 \leq 0 \text{ (do } m^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{14} \leq m \leq \frac{1}{2} \text{ (và } m \neq 0). \end{aligned}$$

Kết hợp lại suy ra: $-\frac{5}{14} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Mặt khác khi $m = \frac{1}{2}$, thì (1) có dạng:

$$\frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 7 - 2x - 4y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Khi $m = -\frac{5}{14}$, thì (1) có dạng: $\frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} = -\frac{5}{14}$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{14}{5}x + y^2 + \frac{28}{5}y + \frac{49}{5} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{14}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = -\frac{14}{5} \end{cases}$$

Từ đó ta có: $\max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1; y = 2,$

$$\min P = -\frac{5}{14} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}; y = -\frac{14}{5}.$$

Nhận xét: Xét cách giải bằng phương pháp bất đẳng thức cho bài toán trên sau đây:

Ta nhận thấy: $x^2 + y^2 + 7 > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$

Xét ba khả năng sau:

1. Nếu $x + 2y + 1 = 0$ thì $P = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} = 0.$

2. Nếu $x + 2y + 1 > 0$ thì chắc chắn $P > 0.$

Mặt khác, ta có:

$$x^2 + y^2 + 7 = (x^2 + 1) + (y^2 + 4) + 2 \geq 2x + 4y + 2 = 2(x + 2y + 1).$$

Từ đó suy ra $P \leq \frac{x+2y+1}{2(x+2y+1)} = \frac{1}{2}.$

Vậy trong trường hợp này, ta có: $0 < P \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2x \\ y^2 + 1 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

3. Nếu $x + 2y + 1 < 0$ thì chắc chắn $P < 0$.

Mặt khác, ta có:

$$(25x^2 + 49) + (25y^2 + 196) - 70 \geq (-70x) + (-140y) - 70 = -70(x + 2y + 1) > 0$$

$$\text{Do vậy, } P = \frac{25(x + 2y + 1)}{25(x^2 + y^2 + 7)} \geq \frac{25(x + 2y + 1)}{-70(x + 2y + 1)} = -\frac{5}{14}.$$

Vậy trong trường hợp này, ta có: $-\frac{5}{14} \leq P < 0$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 + 49 = -70x \\ 25y^2 + 196 = -140y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Tóm lại ta luôn luôn có: $-\frac{5}{14} \leq P \leq \frac{1}{2}$.

Dấu bằng bên phải xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$ và $y = 2$,

còn bên trái có dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}$ và $y = -\frac{4}{5}$.

Như vậy: $\max P = \frac{1}{2}$ và $\min P = -\frac{5}{14}$. Ta thu lại kết quả trên.

Các bạn hãy so sánh tính hiệu quả của hai phương pháp trên.

Bài 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 + xy + y^2 \leq 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 - xy - 3y^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi D_1 và D_2 là các miền xác định như sau:

$$D_1 = \{(x; y) : x^2 + xy + y^2 \leq 3 \text{ và } y = 0\};$$

$$D_2 = \{(x; y) : x^2 + xy + y^2 \leq 3 \text{ và } y \neq 0\}.$$

$$\text{Khi đó: } D = \{(x; y) : x^2 + xy + y^2 \leq 3\} = D_1 \cup D_2.$$

Theo nguyên lí phân rã, ta có:

$$\max_{(x; y) \in D} P = \max \left\{ \max_{(x; y) \in D_1} P; \max_{(x; y) \in D_2} P \right\}, \quad (1)$$

$$\min_{(x; y) \in D} P = \min \left\{ \min_{(x; y) \in D_1} P; \min_{(x; y) \in D_2} P \right\}. \quad (2)$$

Để thấy $D_1 = \{(x; y) : y = 0 \text{ và } x^2 \leq 3\}$, và $P = x^2$ khi $(x; y) \in D_1$.

Từ đó suy ra:

$$\max_{(x; y) \in D_1} P = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}; y = 0, \quad (3)$$

$$\min_{(x; y) \in D_1} P = 0 \Leftrightarrow x = y = 0. \quad (4)$$

Xét khi $(x; y) \in D_2$. Lúc đó: $x^2 + xy + y^2 > 0$, vì thế:

$$P = \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} (x^2 + xy + y^2).$$

$$\text{Do } x^2 + xy + y^2 \leq 3, \text{ nên } \begin{cases} P \leq 3 \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} \text{ khi } x^2 - xy - 3y^2 \geq 0 \\ P \geq 3 \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} \text{ khi } x^2 - xy - 3y^2 < 0. \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 3}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1} = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}.$$

Đến đây gọi m là giá trị tùy ý của hàm số:

$$f(t) = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1} \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Làm tương tự như trên, ta có: } \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 0 \leq P \leq \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3} \cdot 3 \text{ khi } x^2 - xy - 3y^2 \geq 0,$$

$$3 \cdot \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{3} \leq P < 0 \text{ khi } x^2 - xy - 3y^2 < 0.$$

$$\text{Như vậy: } \max_{(x; y) \in D_2} P = -3 + 4\sqrt{3},$$

$$\min_{(x; y) \in D_2} P = -3 - 4\sqrt{3}.$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6) đi đến:

$$\max_{(x; y) \in D} P = -3 + 4\sqrt{3} \text{ và } \min_{(x; y) \in D} P = -3 - 4\sqrt{3}.$$

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số: $f(x) = \frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{(1 + x^2)^2}, x \in \mathbb{R}.$

Khi đó phương trình sau (ẩn x): $\frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{1 + 2x^2 + x^4} = m$ (1)

có nghiệm. Ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 3 + 4x^2 + 3x^4 = m + 2mx^2 + mx^4 \\ &\Leftrightarrow (m - 3)x^4 + 2(m - 2)x^2 + m - 3 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hai khả năng:

1. Nếu $m = 3$, khi đó (2) có dạng $x^2 = 0$, vậy (2) có nghiệm.

Do đó $m = 3$ là một giá trị của $f(x)$.

2. Nếu $m \neq 3$, khi đó (2) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình

$$(m - 3)t^2 + 2(m - 2)t + m - 3 = 0 \quad (3)$$

có nghiệm $t \geq 0$. Điều đó xảy ra khi $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \quad (4)$

(Do $P = \frac{m - 3}{m - 3} = 1 > 0$), ở đây S và P tương ứng là tổng và tích hai nghiệm

của (3)

$$\text{Ta có: } (4) \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2)^2 - (m - 3)^2 \geq 0 \\ \frac{2 - m}{m - 3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{5}{2} \\ 2 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m \leq 3 \text{ (và } m \neq 3)$$

Từ đó ta có: $\frac{5}{2} \leq m \leq 3$.

Khi $m = 3$, thì (1) có dạng $\frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{1 + 2x^2 + x^4} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi $m = \frac{5}{2}$, thì (1) có dạng $\frac{3 + 4x^2 + 3x^4}{1 + 2x^2 + x^4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$,

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nhận xét:

1. Ta đã sử dụng các định lý về dấu tam thức bậc hai để tìm điều kiện sao cho (3) có nghiệm không âm.
2. Ta có thể giải bài toán trên bằng nhiều cách khác
 - Bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số (xem bài 11, bài 1, chương 4 cuốn sách này)
 - Bằng phương pháp lượng giác (xem bài 5, chương 3 cuốn sách này)
 - Bằng phương pháp bất đẳng thức (xem bài 5 phần nhận xét, chương 3 cuốn sách này).

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$, $x > 0$.

$$\text{Khi đó hệ sau đây (ẩn } x\text{): } \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = m \\ x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

có nghiệm.

$$\text{Hệ (1) tương đương với hệ } \begin{cases} 0 < x \leq m \\ x^2 + \frac{1}{x} = (m-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq m \\ 2mx^2 - m^2x + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow m^4 - 8m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ (chú ý từ (2) có $m > 0$).

Khi $m \geq 2$, thì (3) có nghiệm. Mặt khác ta có: $P = \frac{1}{2m} > 0$; $S = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2} > 0$.

Do đó khi $m \geq 2$ thì (3) có hai nghiệm dương x_1, x_2 với $x_1 > x_2$.

$$\forall x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \Rightarrow x_2 < x_1 < m.$$

Do đó $m \geq 2$ chính là điều kiện để hệ (2), (3) có nghiệm

Từ đó suy ra với mọi $x > 0$, ta có: $f(x) \geq 2$.

$$\text{Khi } m = 2, \text{ thì hệ (2), (3) trở thành } \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ 4x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Từ đó suy ra: $\min_{x>0} f(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Nhận xét:

Nếu ta có bài toán sau:

Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, thì $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \geq 2$.

Khi đó bài toán đơn giản hơn hẳn. Thật vậy:

- Nếu $x > 2$, thì rõ ràng $f(x) > 2$
- Xét khi $0 < x \leq 2$, thì $f(x) \geq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \geq 2 - x \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} \geq 4 - 4x + x^2 \quad (\text{do } 2 - x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0.$$

Từ đó suy ra: $f(x) \geq 2 \quad \forall x > 0$ và $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Tuy nhiên với bài toán đã cho, thì làm sao mà tìm ra hằng số 2. Cái khó của bài toán là ở chỗ đó. Vì vậy dùng phương pháp miền giá trị hàm số giải bài toán này là cách giải tự nhiên và cũng khá đơn giản!

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{x - x^2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Hàm số $f(x)$ xác định khi $x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

Gọi m là giá trị tùy ý của hàm số $f(x)$. Khi đó phương trình sau đây (ẩn x)

$$x + \sqrt{x - x^2} = m \quad (1) \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \sqrt{x - x^2} = m - x \quad (2)$$

(2) có nghiệm khi và chỉ khi hai đường $y = \sqrt{x - x^2}$ và $y = m - x$ cắt nhau.

$$\text{Ta có } y = \sqrt{x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy $y = \sqrt{x - x^2}$ là nửa đường tròn tâm tại điểm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$

(phần nằm trên trục hoành).

$$y = m - x \Leftrightarrow x + y = m.$$

Từ đó dễ dàng suy ra hai đường nói trên cắt nhau khi và chỉ khi $x + y = m$

nằm giữa hai đường $x + y = 0$ và $x + y = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

Vậy (2) có nghiệm (tức (1) có nghiệm)

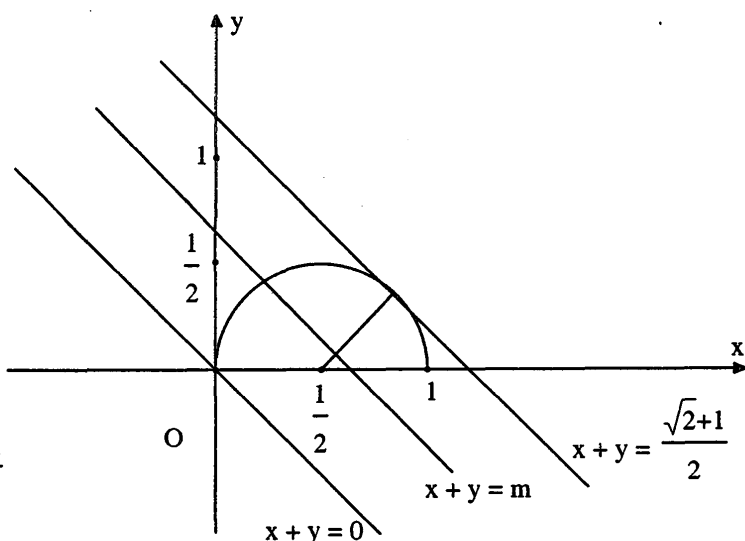
$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 0$$

và

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$



Nhận xét:

1. Cách giải trên là sự phối hợp khéo léo giữa hai phương pháp miền giá trị hàm số và phương pháp đồ thị.
2. Xét cách giải khác sau đây (bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số)

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 + \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{2\sqrt{x-x^2} + 1 - 2x}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

$$\bullet \text{ Với } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0.$$

$$\bullet \text{ Xét khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \text{ lúc đó viết lại } f'(x) = \frac{2\sqrt{x-x^2} - (2x-1)}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Khi $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 2x - 1 \geq 0$, từ đó ta có

$$f'(x) = \frac{4(x-x^2) - (2x-1)^2}{2\sqrt{x-x^2}(2\sqrt{x-x^2} + 2x-1)} = \frac{8x - 8x^2 - 1}{2\sqrt{x-x^2}(2\sqrt{x-x^2} + 2x-1)}.$$

Dấu của $f'(x)$ là dấu của $8x - 8x^2 - 1$.

Như vậy dấu của $f'(x)$ khi $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ là dấu của $8x - 8x^2 - 1$.

Từ đó ta có bảng biến thiên sau:

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$	1
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

Vậy $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \min\{f(0); f(1)\} = \min\{0; 0\} = 0$,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) &= f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4} \left[1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right]} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{16}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}. \end{aligned}$$

Ta thu lại kết quả trên!

3. Lại xét cách giải sau (bằng phương pháp lượng giác hóa)

Do $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ đặt $x = \sin^2 \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } x + \sqrt{x-x^2} &= \sin^2 \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi} = \sin^2 \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi)} \\ &= \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \quad (\text{do } \sin \varphi \geq 0; \cos \varphi \geq 0) \\ &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq 2\varphi - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \\ \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$; $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 0$

Các bạn thích cách giải nào?

Bài 9. Cho x và y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi m là giá trị tùy ý của P trên miền $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

Như vậy hệ sau đây (ẩn x, y)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m & (1) \\ (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{có nghiệm.}$$

$$\text{Ta có } (1) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m & (3) \\ m^2 - 3m + 1 + 4x^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(4) \text{ (ẩn } x) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \quad (5)$$

Như vậy (5) là điều kiện để (4) có nghiệm.

$$\text{Ta có } (3) \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 4m \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 1 + 4y^2 = 4m \Leftrightarrow 4y^2 = m^2 + m + 1$$

Do $m^2 + m + 1 > 0 \forall m$, nên từ đó suy ra hệ (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi thỏa mãn (5).

Vậy (5) chính là điều kiện để hệ (1) (2) có nghiệm.

$$\text{Từ đó suy ra } \max P = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \min P = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét: Bây giờ xét cách giải sau đây:

Theo trên điều kiện đã cho với $(x; y)$ có dạng

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + 4x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} - 4x^2. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Từ (6) suy ra } \left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}. \quad (7)$$

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại thấy (7)} &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 - \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$P = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$P = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ và } \min P = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ta thu lại kết quả trên. Phép giải này còn đơn giản hơn phép sử dụng miền giá trị hàm số.

Chương 6. **PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỒ THỊ HOẶC HÌNH HỌC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**

Phương pháp này đặc biệt thích hợp với những bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số, trong đó các biểu thức và điều kiện của bài toán ban đầu đã tiềm ẩn những yếu tố hình học mà thoát tiên ta chưa nhìn ra nó.

Với lớp bài toán này, ta thường sử dụng các tính chất hình học sơ cấp sau đây:

- Trong tất cả các đường nối hai điểm A, B cho trước thì đường thẳng nối A, B là đường có độ dài nhỏ nhất.
- Trong một tam giác, tổng hai cạnh luôn luôn lớn hơn cạnh thứ 3.
- Cho điểm M ở ngoài đường thẳng d cho trước. Khi đó độ dài đường vuông góc kẻ từ M xuống d ngắn hơn mọi đường xiên kẻ từ M xuống cùng đường thẳng d.
- Trong các tam giác cùng nội tiếp một đường tròn, thì tam giác đều là tam giác có chu vi và diện tích lớn nhất.

Ngoài ra người ta cũng dùng các kiến thức sau đây:

- Dùng tính chất của độ dài vectơ, hoặc tính chất của tích vô hướng của hai vectơ.
- Dùng phương trình đường và mặt và các công thức tính khoảng cách của hình học phẳng và hình học không gian.

Bài 1. Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A)

Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

Hướng dẫn giải

Xét các vectơ sau: $\vec{u} = \left(x; \frac{1}{x}\right)$, $\vec{v} = \left(y; \frac{1}{y}\right)$, $\vec{w} = \left(z; \frac{1}{z}\right)$.

Ta có $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(x + y + z; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

Theo tính chất về độ dài của vectơ tổng, ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$. (1)

Từ (1) có:

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ là các vectơ cùng phương, cùng chiều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = k_1 \vec{v}, k_1 > 0 \\ \vec{v} = k_2 \vec{w}, k_2 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Dễ thấy

$$(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 80(x+y+z)^2 \quad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 18(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right). \quad (5)$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản thì } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9. \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) (6) suy ra } 81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 162. \quad (7)$$

$$\text{Từ giả thiết } 0 < x+y+z \leq 1 \Rightarrow 80(x+y+z)^2 \leq 80. \quad (8)$$

$$\text{Từ (2) (4) (7) (8) ta có } P \geq \sqrt{82}. \quad (9)$$

Dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (5) (6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Như thế } \min P = \sqrt{82} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Nhận xét:

1. Trong bài trên ta đã kết hợp phương pháp sử dụng vectơ trong hình học phẳng và phương pháp sử dụng bất đẳng thức để giải bài toán đặt ra.
2. Thay cho phương pháp bất đẳng thức ta có thể sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số như sau:

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

$$\text{Vì thế } (x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq (x+y+z)^2 + \frac{81}{(x+y+z)^2}. \quad (10)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 + \frac{81}{t}, \text{ ở đây } 0 < t \leq 1,$$

(đặt $t = (x + y + z)^2$. Do $0 < x + y + z \leq 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1$).

Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{81}{t^2}$, và bảng biến thiên sau:

t	0	1
$f'(t)$		-
$f(t)$		82

Vậy từ (10) suy ra $\min P = \sqrt{\min_{0 < t \leq 1} f(t)} = \sqrt{82}$.

Ta thu lại kết quả trên.

Bài 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho x, y là các số thực tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|.$$

Hướng dẫn giải

Ta kết hợp phương pháp sử dụng vectơ và chiều biến thiên hàm số để giải bài toán này. Xem lời giải trong bài 13, §2, chương 1 cuốn sách này.

Bài 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B)

Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số này trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Xem lời giải kết hợp giữa phương pháp đồ thị, hình học và phương pháp miền giá trị hàm số để giải bài toán trên trong bài toán 1, §1, chương 1 cuốn sách này.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$, với $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Viết lại hàm số $f(x)$ dưới dạng sau đây

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}. \quad (1)$$

Xét hệ trục tọa độ Oxy, và trên đó xét các điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và

$C(x; 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó từ (1), ta có $f(x) = CA + CB$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow OM_0 &= OC \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}-1$. Ta thu lại kết quả trên.

4. Các bạn thử xem có thể giải bài toán trên bằng cách khác mà lại đơn giản hơn hai cách trên không?

Bài 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} -x + 2y - 8 \leq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \\ y - 2x - 4 \geq 0 \end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn hệ điều kiện đã cho.

Dễ thấy tập hợp các điểm $M(x; y)$ nói trên chính là tam giác ABC (kể cả ba cạnh), trong đó

$A = (-4; 2)$, $B = (0; 4)$ và $C = (-2; 0)$.

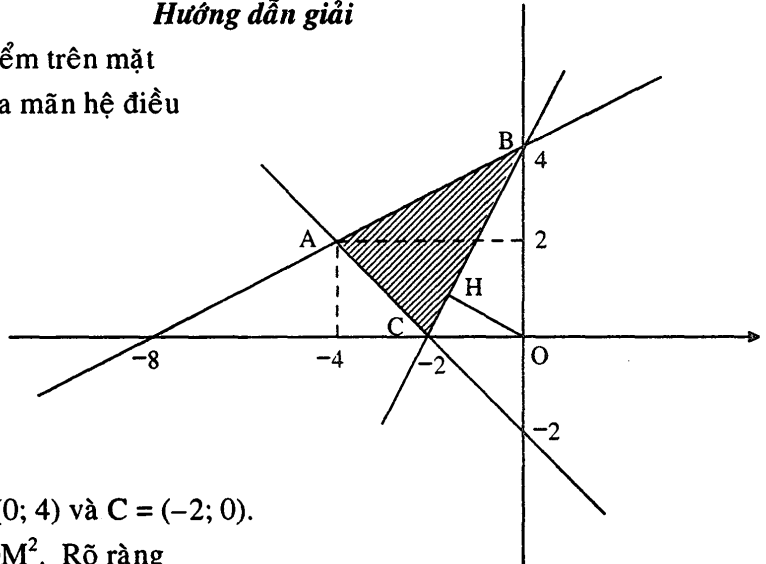
Ta có $x^2 + y^2 = OM^2$. Rõ ràng

$$\begin{aligned}\max P &= \max_{(x;y) \in \Delta ABC} (x^2 + y^2) = \max_{M \in \Delta ABC} OM^2 \\ &= \max \{OA^2; OB^2; OC^2\} = \max \{20; 16; 4\} = 20 = OA^2,\end{aligned}$$

$$\min P = \min_{M \in \Delta ABC} OM^2 = OH^2 \text{ (ở đây ta kẻ } OH \perp BC)$$

Theo công thức tính khoảng cách từ O đến đường thẳng $y - 2x - 4 = 0$, ta có

$$OH = \frac{|-4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow OH^2 = \frac{16}{5}.$$



$$\text{Vậy } \max P = 20 \Leftrightarrow M \equiv A \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \min P = \frac{16}{5} \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Bình luận: Không thể có phương pháp khác hiệu quả hơn phương pháp đồ thị và hình học giải bài toán này

Nhận xét: Xét bài toán tương tự sau:

$$\text{Cho } x, y \text{ là hai số thực thỏa mãn hệ điều kiện: } \begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x + 3y \leq 9 \\ x \geq 0; y \geq 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 4x - 8y$.

Hướng dẫn giải

Các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn hệ đã cho là toàn bộ tứ giác ABCD với $A = (1; 9)$, $B = (0; 2)$, $C = (0; 3)$, $D = (9; 0)$.

Viết lại P dưới dạng: $P = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 20$.

Gọi I là điểm $I = (2; 4)$, khi đó $P = MI^2 - 20$, ở đây $M(x; y)$ thuộc tứ giác ABCD.

Dễ thấy $\max MI^2 = DI^2 = 65$;

$$\min MI^2 = HI^2 = \frac{5}{2},$$

ở đây H là hình chiếu của I trên CD .

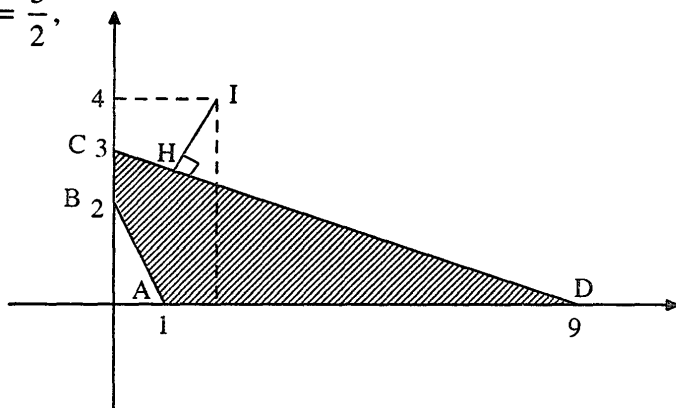
Từ đó suy ra

$$\max P = 45 \Leftrightarrow M \equiv D$$

$$\Leftrightarrow x = 9; y = 0,$$

$$\min P = -\frac{35}{2} \Leftrightarrow M \equiv H$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; y = \frac{5}{2}.$$



Bài 6. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + 16 = 8x + 6y$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 4x + 3y$.

Hướng dẫn giải

Viết lại điều kiện đã cho dưới dạng $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$. (1)

Từ đó suy ra các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (1) nằm trên đường tròn tâm tại điểm $I(4; 3)$ và bán kính $R = 3$.

Khi $(x; y)$ thỏa mãn (1), ta viết lại biểu thức P dưới dạng

$$P = \frac{8x + 6y}{2} = \frac{x^2 + y^2 + 16}{2} = 8 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (2)$$

Để ý rằng nếu vẽ hệ trục tọa độ Oxy,

$$\text{thì } \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}OM^2,$$

ở đây $M(x; y)$ thỏa mãn (1).

$$\text{Từ (2) suy ra } \max P = 8 + \frac{1}{2} \max_{M \in \Omega} OM^2,$$

$$\min P = 8 + \frac{1}{2} \min_{M \in \Omega} OM^2.$$

ở đây Ω là đường tròn tâm $I(4; 3)$

và bán kính $R = 3$.

$$\text{Để thấy } \max_{M \in \Omega} OM^2 = OM_2^2; \min_{M \in \Omega} OM^2 = OM_1^2$$

ở đây M_1, M_2 lần lượt là các giao điểm của OI và đường tròn Ω (xem hình vẽ)

$$\text{Do } OI = 5 \Rightarrow OM_2 = OI + 3 = 8; OM_1 = OI - 3 = 2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max P = 8 + 32 = 40; \min P = 8 + 2 = 10$$

$$\text{Như thế } \max P = 40 \Leftrightarrow M \equiv M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}, \quad (*)$$

$$\min P = 10 \Leftrightarrow M \equiv M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}. \quad (**)$$

Các bạn có thể tự nghiệm lại các kết quả (*) và (**) một cách dễ dàng.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp lượng giác hóa để giải bài toán trên như sau:

$$\text{Từ (1) suy ra } \begin{cases} x - 4 = \sin \varphi \\ y - 3 = 3 \cos \varphi \end{cases} \text{ với } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\text{Từ đó } P = 4x + 3y = 4(4 + \sin \varphi) + 3(3 + 3 \cos \varphi) = 25 + 12 \sin \varphi + 9 \cos \varphi \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức quen biết: $\forall \alpha$, ta có:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \alpha + b \cos \alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Ta có: } -15 \leq 12 \sin \varphi + 9 \cos \varphi \leq 15.$$

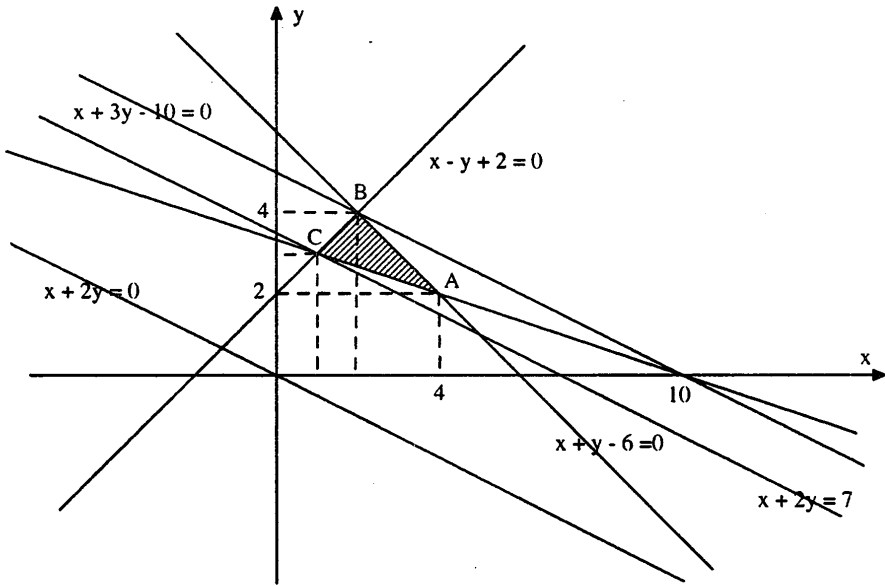
Bây giờ từ (3) (4) suy ra $\max P = 40$; $\min P = 10$.

Ta thu lại kết quả trên (với phép giải rất gọn gàng).

Bài 7. Cho x và y là các số thực thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} x + 3y - 10 \geq 0 \\ x + y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

Hướng dẫn giải



Giả sử $M(x; y)$ là điểm, trong đó x, y thỏa mãn hệ điều kiện đã cho.

Dễ dàng thấy rằng khi đó miền D các điểm $M(x; y)$ như vậy được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ xOy là toàn tam giác ABC , với các đỉnh $A(4; 2)$; $B(2; 4)$ và $C(1; 3)$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tham số m , sao cho đường thẳng $x + 2y = m$ cắt tam giác ABC . Bằng cách tịnh tiến đường thẳng $x + 2y = 0$ (theo chiều mũi tên)

Điều đầu tiên mà đường thẳng $x + 2y = m$ gặp tam giác ABC chính là điểm $C(1; 3)$

Khi đó $m = 1 + 2.3 = 7$. Điểm cuối cùng mà đường $x + 2y = m$ gặp ΔABC chính là điểm $B(2; 4)$. Khi đó $m = 2 + 2.4 = 10$.

Vậy $\max P = 10 \Leftrightarrow x = 2; y = 4$; $\min P = 7 \Leftrightarrow x = 1; y = 3$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp miền giá trị hàm số như sau:

$$\text{Gọi } m \text{ là giá trị tùy ý của } P, \text{ khi đó hệ sau đây (ẩn } x; y) \begin{cases} x + 2y = m & (1) \\ x + 3y - 10 \geq 0 & (2) \\ x + y - 6 \leq 0 & (3) \\ x - y + 2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

có nghiệm.

Từ (1) suy ra $x = m - 2y$.

$$\text{Vì thế } (1) (2) (3) (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2y \\ y + m - 10 \geq 0 \\ -y + m - 6 \leq 0 \\ -3y + m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2y & (5) \\ y \geq 10 - m & (6) \\ y \geq m - 6 & (7) \\ y \leq \frac{m+2}{3} & (8) \end{cases}$$

Xét hệ (6) (7) ta có

- Nếu $m \leq 8$ thì $10 - m \geq m - 6 \Rightarrow (6) (7) \Leftrightarrow y \geq 10 - m$
- Nếu $m \geq 8$ thì $10 - m \leq m - 6 \Rightarrow (6) (7) \Leftrightarrow y \geq m - 6$

$$\text{Vậy } (5) (6) (7) (8) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 10 - m \\ y \leq \frac{m+2}{3} \end{cases} & \text{khi } m \leq 8 \\ \begin{cases} y \geq m - 6 \\ y \leq \frac{m+2}{3} \end{cases} & \text{khi } m \geq 8 \end{cases}$$

Từ đó suy ra khi $m \leq 8$, hệ (5) (6) (7) (8) có nghiệm khi

$$\frac{m+2}{3} \geq 10 - m \Leftrightarrow 8 \geq m \geq 7$$

Còn khi $m \geq 8$, hệ (5) (6) (7) (8) có nghiệm khi $\frac{m+2}{3} \geq m - 6 \Leftrightarrow 10 \geq m \geq 8$

Như vậy hệ (5) (6) (7) (8) có nghiệm (tức là hệ (1) (2) (3) (4) có nghiệm) khi và chỉ khi $7 \leq m \leq 10$.

Từ đó suy ra $\max P = 10 \Leftrightarrow x = 2; y = 4; \min P = 7 \Leftrightarrow x = 1; y = 3$

Bình luận: Rõ ràng phương pháp giải bằng đồ thị và hình học tỏ rõ hiệu quả hơn hẳn so với phương pháp miền giá trị hàm số.

Bài 8. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \cos 2x + \cos 2y$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sin x$; $v = \sin y$.

Khi đó ta có $\cos 2x + \cos 2y = 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 y = 2 - 2(u^2 + v^2)$. (1)

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $Q = u^2 + v^2$

với điều kiện
$$\begin{cases} |u| \leq 1; |v| \leq 1 & (2) \\ u + v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Từ (1) suy ra mối liên hệ sau $\max P = 2 - 2\min Q$, (3)

$\min P = 2 - 2\max Q$. (4)

Vẽ hệ tọa độ Ouv . Khi đó tập các điểm $(u; v)$ thỏa mãn (2) chính là đoạn thẳng AB (đó là phần đường thẳng $u + v = \frac{1}{2}$ nằm trong hình vuông cạnh 2

trong hình vẽ dưới đây).

Để thấy $A = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ còn $B = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$

Từ đó $Q = u^2 + v^2 = OM^2$, với $M = (u; v)$.

Do đó

$\max Q = \max_{M \in AB} OM^2$; $\min Q = \min_{M \in AB} OM^2$

Ta có ngay

$\max_{M \in AB} OM^2 = OA^2 = OB^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$,

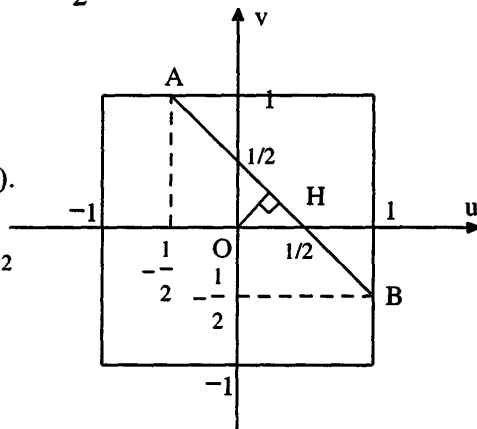
$\min_{M \in AB} OM^2 = OH^2 = \frac{1}{8}$,

(ở đây H là hình chiếu của O trên AB).

Từ đó suy ra:

$\max P = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{4} \\ v = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{4} \\ \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\min P = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv A \\ M \equiv B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}; v = 1 \\ u = 1; v = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}; \sin y = 1 \\ \sin x = 1; \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$



Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp “chiều biến thiên hàm số” để giải bài toán trên như sau:

$$\text{Từ } u + v = \frac{1}{2} \Rightarrow v = \frac{1}{2} - u$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2} - u \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u \leq 1.$$

$$\text{Khi đó } u^2 + v^2 = u^2 + \left(\frac{1}{2} - u\right)^2 = 2u^2 - u + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2 - 2(u^2 + v^2) = 2 - 4u^2 + 2u - \frac{1}{2} = -4u^2 + 2u + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max P = \max_{-\frac{1}{2} \leq u \leq 1} f(u); \min P = \min_{-\frac{1}{2} \leq u \leq 1} f(u) \text{ với } f(u) = -4u^2 + 2u + \frac{3}{2}$$

Ta có $f'(u) = -8u + 2$, và có bảng biến thiên sau

u	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$f'(u)$		+	0
$f(u)$			

$$\text{Vậy } \max P = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{4} \\ v = \frac{1}{4} \end{cases},$$

$$\min P = \min \left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right); f(1) \right\} = \min \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}; v = 1 \\ u = 1; v = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta thu lại kết quả trên. Phép giải cũng gọn gàng và đơn giản!

Bài 9. Cho bốn số thực x, y, z, t thỏa mãn điều kiện $x + y = 6; z^2 + t^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 2xz - 2yt$

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó điểm $M(x; y)$ với $x + y = 6$ nằm trên đường thẳng $x + y = 6$; còn điểm $N(z; t)$ với $z^2 + t^2 = 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$ tâm tại O và bán kính bằng 1

Viết lại biểu thức P dưới dạng

$$P = (x - z)^2 + (y - t)^2 - (z^2 + t^2) = (x - z)^2 + (y - t)^2 - 1 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$P = MN^2 - 1. \quad (2)$$

$$\text{Vậy } \min P = (\min MN^2) - 1,$$

với $M(x; y)$

thuộc đường

thẳng $x +$

$y = 6$, còn $N(z;$

$t)$ thuộc đường

tròn đơn vị. Kẻ

$OM_0 \perp$ đường

thẳng $x + y =$

6, và giả sử

OM_0 cắt đường

tròn đơn vị tại

N_0 .

Khi đó có ngay

$$\min(MN^2) = M_0N_0^2.$$

(3)

$$\text{Do } OM_0 = 3\sqrt{2}; ON_0 = 1 \Rightarrow M_0N_0 = 3\sqrt{2} - 1 \Rightarrow M_0N_0^2 = 19 - 6\sqrt{2}.$$

(4)

$$\text{Từ đó suy ra } \min P = 18 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow M \equiv M_0; N \equiv N_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = t = 3 \end{cases}$$

Nhận xét: Lời giải bằng phương pháp đồ thị thật trong sáng và gọn gàng!

Sở dĩ có lời giải như vậy, vì trong bài toán cái hồn “hình học” đã thể hiện rõ qua các điều kiện $x + y = 6; z^2 + t^2 = 1$ và biểu thức P gợi ta nghĩ đến khoảng cách giữa hai điểm trên mặt phẳng tọa độ.

Bài 10. Cho bốn số thực x, y, z, t thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + t^2}$.

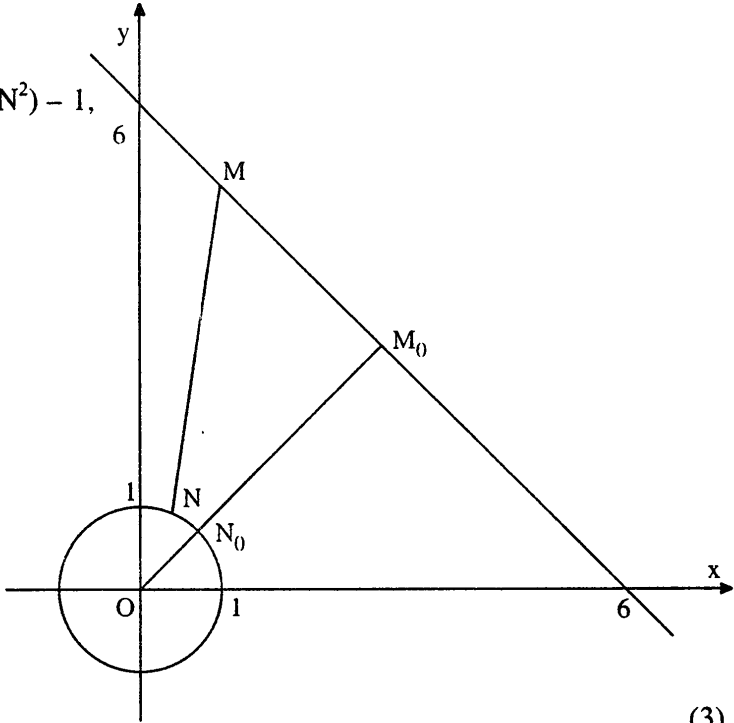
Hướng dẫn giải

Trên mặt phẳng tọa độ xOy xét hai điểm $M(x; z)$ và $N(x + y; z + t)$

Do $(x + y) + (z + t) = 1$, nên điểm N nằm trên đường thẳng $x + y = 1$

$$\text{Ta có } OM = \sqrt{x^2 + z^2}, MN = \sqrt{(x + y - x)^2 + (z + t - z)^2} = \sqrt{y^2 + t^2}.$$

$$\text{Ta có } OM + MN \geq ON \geq OH \quad (1)$$



ở đây H là hình chiếu của O
trên đường thẳng $x + y = 1$.

Rõ ràng do $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nên ta có từ (1)

$$P = \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + t^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương, cùng chiều và $N \equiv H$.

Ta có: $\overrightarrow{OM} = (x; y); \overrightarrow{MN} = (y; t)$.

Do vậy $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương, cùng chiều và $N \equiv H$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = z \\ y = t. \end{cases} \quad (3)$$

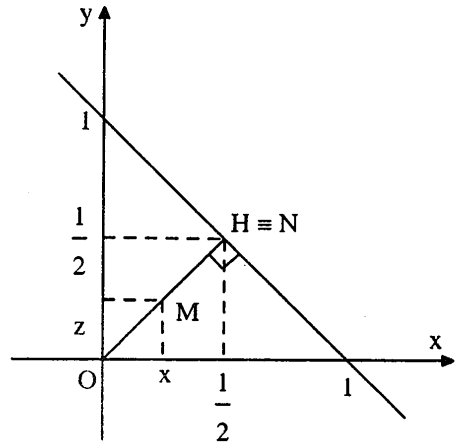
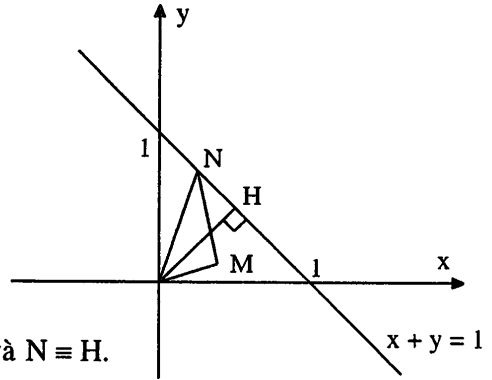
Mặt khác $N(x + y; z + t) \equiv H\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$,

nên ta có $x + y = z + t = \frac{1}{2}$. (4)

Từ (3) (4) suy ra $\begin{cases} x = z = \alpha \\ y = t = \frac{1}{2} - \alpha \end{cases}$

với $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } \min P = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \alpha \\ y = t = \frac{1}{2} - \alpha \end{cases} \text{ với } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$



Nhận xét: Phương pháp đồ thị tỏ rõ hiệu quả trong việc giải bài toán trên. Các bạn có thể giải cách khác lại hay hơn cách giải trên không?

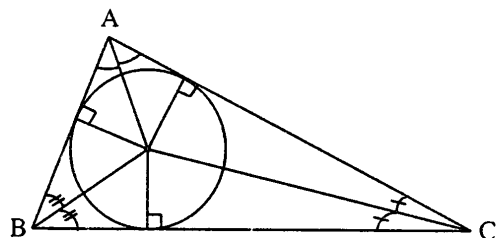
Bài 11. Cho x, y, z là ba số thực dương và thỏa mãn điều kiện: $xyz(x + y + z) = 1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x + y)(x + z)$.

Hướng dẫn giải

Xét tam giác ABC có 3 cạnh

$AB = x + y; AC = x + z; BC = y + z$.

Rõ ràng $\triangle ABC$ tồn tại vì thỏa mãn các tiên đề về độ dài cạnh của một tam giác.



Khi đó nếu gọi p là nửa chu vi của tam giác thì $p = x + y + z$.

Theo công thức Heron, ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

Từ giả thiết suy ra $S_{ABC} = 1$. (1)

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2}(x+y)(x+z)\sin A. \quad (2)$$

Do $\sin A \leq 1$, nên từ (1) (2) suy ra $\frac{1}{2}(x+y)(x+z) \geq 1 \Rightarrow (x+y)(x+z) \geq 2$

Vậy $P \geq 2$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow A = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Leftrightarrow (y+z)^2 = (x+y)^2 + (x+z)^2$$

$$\Leftrightarrow yz = xy + xz + x^2. \quad (4)$$

Từ đó ta có $\min P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} xyz(x+y+z) = 1 \\ yz = xy + xz + x^2 \end{cases}$

Bài 12. Cho bốn số x, y, z, t thỏa mãn điều kiện $x + 2y = 9; z + 2t = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 - 12x + y^2 - 8y + 52} + \sqrt{x^2 + z^2 + y^2 + t^2 - 2xz - 2yt} + \sqrt{z^2 + t^2 - 4z + 8t + 20}$$

Hướng dẫn giải

Viết lại P dưới dạng sau

$$P = \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} + \sqrt{(z-2)^2 + (t+4)^2}. \quad (1)$$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ hai đường thẳng $x + 2y = 9; x + 2y = 4$.

Xét hai điểm

$M(6; 4)$ và $N(2; -4)$.

Từ (1) ta thấy

$$P = MA + AB + BN$$

Trong đó $A(x;$

$y)$ và $B(z; t)$

tương ứng nằm

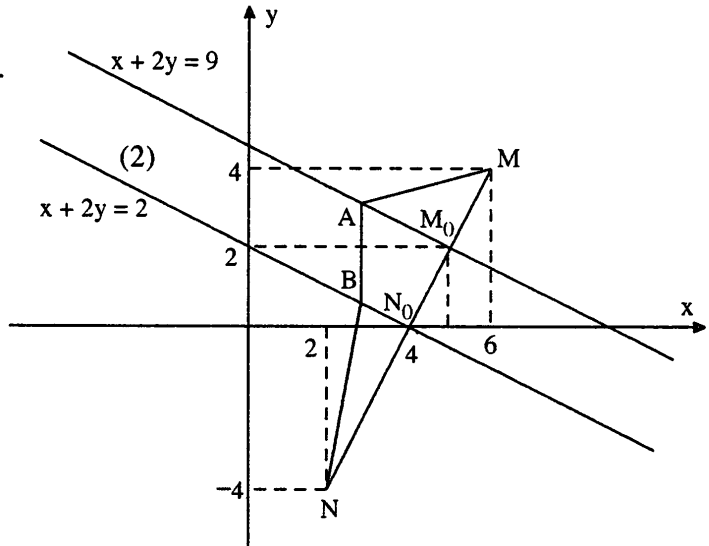
trên hai đường

thẳng $x + 2y =$

9 và $x + 2y = 4$.

Hiển nhiên ta

có



$$MA + AB + BN \geq MN = \sqrt{(6-2)^2 + (4+4)^2} = 4\sqrt{5} \quad (3)$$

Giả sử MN cắt $x + 2y = 9$ tại M_0 và cắt $2x + y = 4$ tại N_0 .

Dễ thấy $M_0 = (5; 2)$; $N_0 = (4; 0)$.

$$\text{Từ đó suy ra } \min P = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5; y = 2 \\ z = 4; t = 0 \end{cases}$$

Bình luận: Không thể có lời giải nào lại ngắn gọn và hay hơn lời giải trên.

Bài 13. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện: $x - 2y + 2 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 14y + 74}$$

Hướng dẫn giải

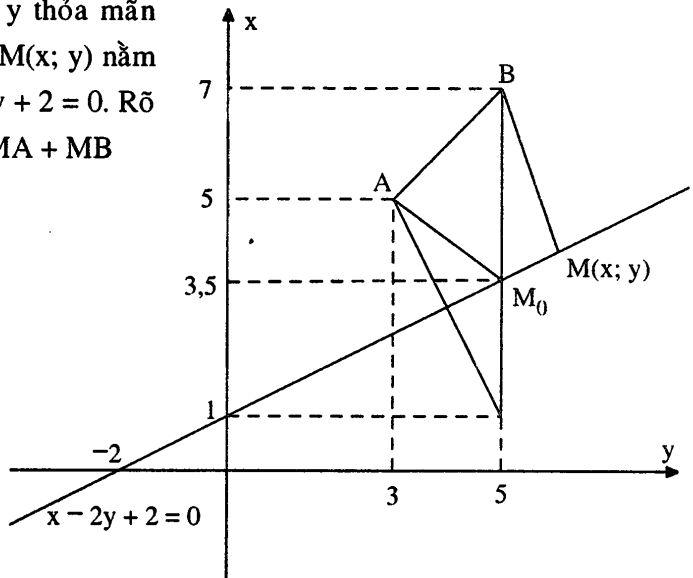
Viết lại P dưới dạng

$$P = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2}. \quad (1)$$

Xét đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 5)$, $B(5; 7)$ trên mặt phẳng tọa độ xOy .

Giả sử $M(x; y)$ với x, y thỏa mãn $x - 2y + 2 = 0$, tức là $M(x; y)$ nằm trên đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$. Rõ ràng từ (1) suy ra $P = MA + MB$

Theo một bài toán quen biết của hình học phẳng, thì nếu gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$ và giả sử AA' cắt đường thẳng $x - 2y + 2 = 0$ tại M_0 ,



thì $MA + MB \geq M_0A + M_0B, \forall M \in (d)$, ở đây $(d): x - 2y + 2 = 0$.

Có thể tính được ngay $M_0 = (5; 3,5) \Rightarrow M_0A + M_0B = A'B = 6$.

Từ đó ta có $P \geq 6$. (2)

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra} \Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3,5 \end{cases}$$

Vậy $\min P = 6 \Leftrightarrow x = 5; y = 3,5$.

Nhận xét:

1. Từ $x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow x = 2y - 2$.

Từ đó ta có:

$$P = \sqrt{(2y-2)^2 + y^2 - 6(2y-2) - 10y + 34} + \sqrt{(2y-2)^2 + y^2 - 10(2y-2) - 14y + 74}$$

$$= \sqrt{5y^2 - 30y + 50} + \sqrt{5y^2 - 42y + 98}.$$

Bài toán trở thành:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(y) = \sqrt{5y^2 - 30y + 50} + \sqrt{5y^2 - 42y + 98}$ với $y \in \mathbb{R}$.

Các bạn hãy thử dùng phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải tiếp! Sau đó hãy so sánh với cách giải bằng phương pháp sử dụng đồ thị và hình học ở trên!

2. Ta có bài toán tương tự (giải bằng cách sử dụng phương trình đường thẳng và mặt phẳng trong không gian)

Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn điều kiện $2x - y + z + 1 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z + 14} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 18x - 8y - 18z + 178}.$$

Hướng dẫn: Xét mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$,

và hai điểm $A(-1; 3; -2)$ và $B(-9; 4; 9)$.

Khi đó $P = MA + MB$, ở đây $M(x; y; z) \in (P)$.

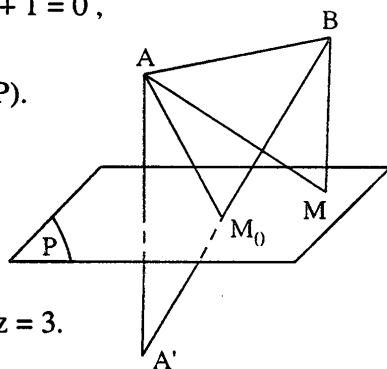
Có thể thấy $AB \cap (P) = M_0(-1; 2; 3)$.

Đáp số: $\min P = A'B = 3\sqrt{26}$,

ở đây $A' = (3; 1; 0)$

là điểm đối xứng của A qua (P).

$$\min P = 3\sqrt{26} \Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow x = -2; y = 2; z = 3.$$



Bài 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1}.$$

Hướng dẫn giải

Viết lại $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (1)$$

Trên mặt phẳng tọa độ xét các điểm $A(0; 1);$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ và } T(x; x).$$

Khi đó từ (1), ta có

$$f(x) = TA + TB + TC. \quad (2)$$

Dễ thấy ABC là tam giác đều với tâm là gốc tọa độ O.

Theo kết quả quen biết trong hình học phẳng:

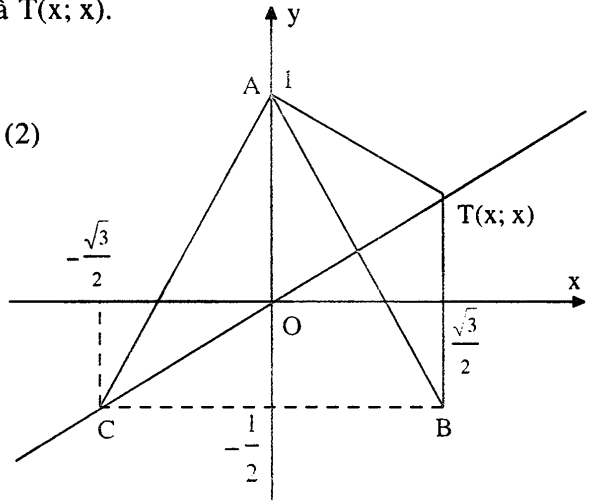
Do ABC là đa giác đều, nên với mọi điểm trên mặt phẳng tọa độ – nói riêng với mọi điểm $T(x; x)$, ta có

$$TA + TB + TC \geq OA + OB + OC. \quad (3)$$

Do $OA = OB = OC = 1$, nên từ (2) (3) có $f(x) \geq 3 \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow T \equiv O \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0.$$



Bài 15. Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0; 1]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y + z - xy - yz - zx$.

Hướng dẫn giải

Vẽ tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = x$; $BN = y$; $CP = z$.

$$\text{Ta có: } S_{AMP} + S_{BMN} + S_{CNP} \leq S_{ABC}. \quad (1)$$

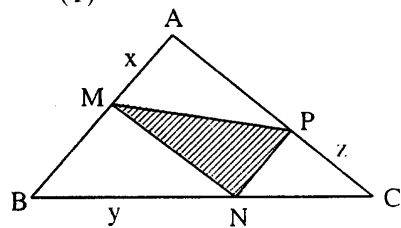
Dấu bằng trong (1) xảy ra khi và chỉ khi trong các tam giác AMP, BMN, CNP có tam giác trùng với $\triangle ABC$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi trong ba số x, y, z có một số bằng 1, một số bằng 0 và một số tùy ý $\in [0; 1]$. Từ (1) có

$$\frac{\sqrt{3}}{4} [x(1-z) + y(1-x) + z(1-y)] \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x - xz + y - yx + z - zy \leq 1$$

$$\Leftrightarrow P \leq 1 \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (1).

Vậy $\max P = 1 \Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có một số bằng 1, một số bằng 0 và một số tùy ý $\in [0; 1]$.



Nhận xét:

1. Ta có thể sử dụng phương pháp “bất đẳng thức” để giải bài toán trên như sau:

Do $x, y, z \in [0; 1]$, nên ta có $(x-1)(1-y)(1-z) \leq 0$

$$\Rightarrow x + y + z - xy - yz - zx + xyz - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow x + y + z - xy - yz - zx \leq 1 - xyz. \quad (*)$$

Do x, y, z đều không âm, nên $xyz \geq 0$.

Từ đó kết hợp với (*), ta có $P \leq 1$. (**)

$$\text{Dấu bằng trong (**) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(1-y)(1-z) = 0 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có một số bằng 1, một số bằng 0 và số còn lại tùy ý $\in [0; 1]$ (***)

Từ đó suy ra $\max P = 1 \Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn (***)

Ta thu lại kết quả trên.

Cách giải này cũng rất gọn gàng và đơn giản!

2. Ta có bài toán tương tự sau: Cho x, y, z, t là bốn số thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z + t - xy - yz - zt - tx$.

Hướng dẫn giải

Ta giải bằng phương pháp sử dụng hình học như sau:

Trên bốn cạnh của hình vuông: đặt $AM = x$; $DN = y$; $CP = z$; $BQ = t$ (xem hình vẽ).

Ta có $S_{AMQ} + S_{DMN} + S_{CNP} + S_{BPQ} \leq S_{ABCD}$

$$\Rightarrow \frac{x(1-t)}{2} + \frac{y(1-x)}{2} + \frac{z(1-y)}{2} + \frac{t(1-z)}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow x + y + z + t - (xy + yz + zt + tx) \leq 2$$

$$\Rightarrow P \leq 2$$

Như vậy $\max P = 2$.

Các bạn hãy tự làm hai điều sau đây:

- Khi nào thì $\max P = 2$.
 - Giải lại bài toán trên bằng phương pháp “bất đẳng thức”!
3. Ta có bài toán sau dựa vào bài toán đã cho:

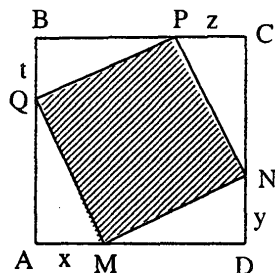
Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[0; 1]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y - y^2z - z^2x$.

Lời giải như sau:

$$\text{Do } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \geq x^2$$

$$\text{Lại có } 1 - y \geq 0 \Rightarrow x(1 - y) \geq x^2(1 - y) \Rightarrow x - xy \geq x^2 - x^2y$$



Tương tự có $y - yz \geq y^2 - y^2z$,

$$z - zx \geq z^2 - z^2x.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên và có $x + y + z - xy - yz - zx \geq P$

Từ đó dựa vào bài trên ta có $P \leq 1$,

và $P = 1$ khi và chỉ khi trong ba số x, y, z có một số bằng 1, một số bằng 0, số còn lại tùy ý $\in [0; 1]$ (bạn đọc có thể nghiệm lại điều này).

Vậy $\max P = 1$.

Bài 16. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn điều kiện $x + 2y + 3z = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{16 + x^2} + 2\sqrt{16 + y^2} + 3\sqrt{16 + z^2}$.

Hướng dẫn giải

với $x + 2y + 3z = 4$, trên mặt phẳng tọa độ Oxy xét các điểm

$A(4; x); B(12; x + 2y); C(24; x + 2y + 3z)$.

Do $x + 2y + 3z = 4 \Rightarrow C(24; 4)$ là điểm cố định.

Dễ thấy $OA = \sqrt{4^2 + x^2}$;

$$AB = \sqrt{8^2 + 4y^2} = 2\sqrt{16 + y^2}$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 9z^2} = 3\sqrt{16 + z^2}$$

Vậy $P = OA + AB + BC$,

do đó hiển nhiên ta có:

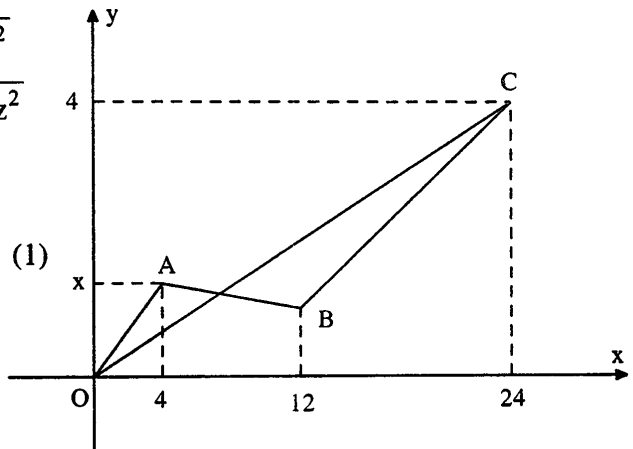
$$P \geq OC = \sqrt{24^2 + 4^2} = 4\sqrt{37} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra

$\Leftrightarrow O, A, B, C$ thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{x+2y}{12} = \frac{x+2y+3z}{24}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{4}{1+2+3} = \frac{2}{3}.$$



$$\text{Vậy } \min P = 4\sqrt{37} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}.$$

Bài 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 4x + 8}$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng ta có $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0 \forall x$,

$$x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4 > 0 \forall x.$$

Vậy $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Viết lại $f(x)$ dưới dạng sau đây

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1^2} + \sqrt{[x-(-2)]^2 + (-2)^2}. \quad (1)$$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy xét các điểm $A(x-1; 1)$ và $B(x+2; -2)$

Từ (1) có $f(x) = OA + OB$. (2)

Rõ ràng ta luôn có $OA + OB \geq AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Vậy $f(x) \geq 3\sqrt{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra

$\Leftrightarrow A, O, B$ thẳng hàng.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng phương,

ngược chiều.

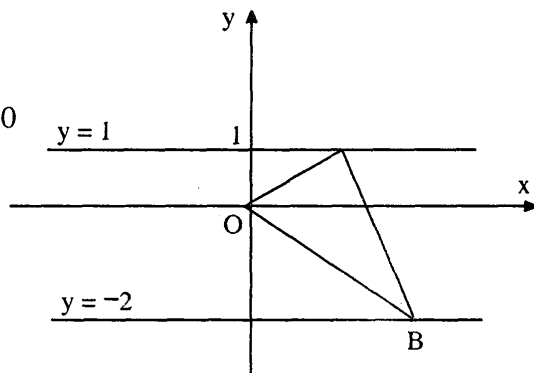
$\Leftrightarrow (x-1; 1) = k(x+2; -2)$ với $k < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k(x+2) \\ 1 = -2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{2}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 2x-2 = -x-2 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy $\min f(x) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=0$.



Nhận xét: Rõ ràng phương pháp đồ thị tỏ rõ quá hiệu quả trong hai bài toán 16 và 17. Các bạn có cách giải nào khác ngắn gọn hơn không?

Chương 7.

ỨNG DỤNG CỦA GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRONG BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ

Sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là một trong những phương pháp hữu hiệu để giải phương trình và bất phương trình có tham số. Dạng toán này cũng thường xuyên xuất hiện trong các đề thi Toán của các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng trong những năm gần đây.

§1. MỐI LIÊN HỆ GIỮA GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ VÀ SỰ CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ta thường xuyên sử dụng kết quả sau đây:

Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên miền D , và giả sử tồn tại $M = \max_{x \in D} f(x)$;

$$m = \min_{x \in D} f(x).$$

Khi đó ta có:

1. Hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = \alpha \\ x \in D \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \alpha \leq M$.
2. Hệ bất phương trình $\begin{cases} f(x) \geq \alpha \\ x \in D \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi $M \geq \alpha$.
3. Bất phương trình $f(x) \geq \alpha$ đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi $m \geq \alpha$.
4. Hệ bất phương trình $\begin{cases} f(x) \leq \alpha \\ x \in D \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \alpha$.
5. Bất phương trình $f(x) \leq \alpha$ đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi $M \leq \alpha$.

Chứng minh:

1. Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm, tức là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = \alpha$.

Theo định nghĩa ta có $\min_{x \in D} f(x) \leq f(x_0) \leq \max_{x \in D} f(x)$, tức là

$$\min_{x \in D} f(x) \leq \alpha \leq \max_{x \in D} f(x).$$

Đảo lại giả sử $\min_{x \in D} f(x) \leq \alpha \leq \max_{x \in D} f(x)$.

Vì $f(x)$ là hàm liên tục nên nó nhận mọi giá trị từ $\min_{x \in D} f(x)$ đến $\max_{x \in D} f(x)$

Nói riêng nó nhận giá trị α , tức là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = \alpha$.

Điều đó có nghĩa là phương trình đã cho có nghiệm trên $D \Rightarrow \text{đpcm.}$

2. Giả sử hệ đã cho có nghiệm, tức là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) \geq \alpha$.

Rõ ràng $\max_{x \in D} f(x) \geq f(x_0) \geq \alpha$

Đảo lại giả sử $\max_{x \in D} f(x) \geq \alpha$ (1)

Giả thiết phản chứng hệ đã cho vô nghiệm, tức là $f(x) < \alpha \forall x \in D$

Từ đó suy ra $\max_{x \in D} f(x) < \alpha$ (2)

Từ (1) (2) suy ra vô lí, vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là hệ đã cho có nghiệm $\Rightarrow$ đpcm.

3. Giả sử $m \geq \alpha$

Lấy x_0 tùy ý $\in D$. Ta có $f(x_0) \geq \min_{x \in D} f(x) = m \geq \alpha$

Vậy $f(x) \geq \alpha \forall x \in D$.

Đảo lại giả sử $f(x) \geq \alpha \forall x \in D$.

Khi đó do $m = \min_{x \in D} f(x)$, nên theo định nghĩa ta có tồn tại $x_0 \in D$ mà $m = f(x_0)$.

Từ $f(x_0) \geq \alpha \Rightarrow m \geq \alpha$. Như vậy ta có đpcm.

4,5. Chứng minh tương tự như 2, 3.

§2. CÁC BÀI TOÁN BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ CÓ MẶT TRONG CÁC KÌ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

Bài 1. (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2011)

Cho phương trình $6 + x + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)} = m + 4(\sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2})$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 2x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$

Để tìm miền xác định của t, xét hàm số $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$ với $1 \leq x \leq 4$.

Ta có $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-2}} = \frac{-\sqrt{2x-2} + 2\sqrt{4-x}}{2\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{2x-2}}$.

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = \sqrt{2x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 16-4x = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên sau:

x	1	3	4
f'(x)	+	0	-
f(x)	$\sqrt{3}$	3	$\sqrt{6}$

Vậy $\min_{1 \leq x \leq 4} f(x) = \sqrt{3}$ và $\max_{1 \leq x \leq 4} f(x) = 3$.

Từ đó suy ra khi: $1 \leq x \leq 4$, thì $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

$$\text{Từ } t = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2} \Rightarrow t^2 = x + 2 + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)}$$

Vì thế bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ sau $\begin{cases} g(t) = t^2 - 4t + 4 = m & (1) \\ \sqrt{3} \leq t \leq 3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $g'(t) = 2t - 4$, và có bảng biến thiên sau:

t	$\sqrt{3}$	2	1	
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		$7-4\sqrt{3}$	0	1

Từ đó $\min_{\sqrt{3} \leq t \leq 3} g(t) = g(2) = 0$;

$$\max_{\sqrt{3} \leq t \leq 3} g(t) = \max \{g(\sqrt{3}); g(3)\} = \max \{7 - 4\sqrt{3}; 1\} = 1.$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (1) (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \min_{\sqrt{3} \leq t \leq 3} g(t) \leq m \leq \max_{\sqrt{3} \leq t \leq 3} g(t) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$$

Nhận xét:

- Khi đổi biến ta phải tìm miền xác định của biến mới. Để tìm miền xác định của biến mới t, ta đã giải một bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số f(x) khi $1 \leq x \leq 4$.
- Đây là một ví dụ mẫu mực minh họa cho việc áp dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số để biện luận một phương trình có tham số.

Bài 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A)

Cho phương trình $\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}$; $g(x) = \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}$

Lúc này phương trình đã cho có dạng $h(x) = f(x) + g(x) = m$.

(1)

Phương trình (1) xác định trong miền $0 \leq x \leq 6$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} - \frac{2}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{2x(6-x)}}$, nên có bảng biến thiên sau:

x	0	2	6
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

Tương tự ta có $g'(x) = \frac{\sqrt[4]{(6-x)^3} - \sqrt[4]{(2x)^3}}{2\sqrt[4]{2x0^3(6-x)^3}}$, nên cũng có bảng biến thiên sau

(với chú ý: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, ở đây $a^2 + ab + b^2 > 0$).

x	0	2	6
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$			

Vì thế ta có bảng biến thiên sau đối với hàm số $h(x)$, $0 \leq x \leq 6$

x	0	2	6
$h'(x)$		+	0 -
$h(x)$			

Ta có $\max_{0 \leq x \leq 6} h(x) = h(2) = \sqrt[4]{4} + \sqrt{4} + 2\sqrt[4]{4} + 2\sqrt{4} = 6 + 3\sqrt{2}$,

$\min_{0 \leq x \leq 6} h(x) = \min\{h(0); h(6)\} = \min\{2\sqrt[4]{6} + 2\sqrt{6}; \sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}\} = h(6) = \sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3}$

Từ đó suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$2(\sqrt[4]{6} + \sqrt{6}) \leq m < 3\sqrt{2} + 6.$$

Chú ý:

1. Nếu đầu bài chỉ đòi hỏi: Tìm m để phương trình có nghiệm thì đáp số của bài toán là $\sqrt[4]{12} + 2\sqrt{3} \leq m \leq 6 + 3\sqrt{2}$.
2. Tuy nhiên ở đây bài toán đòi hỏi: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt, thì để ý khi $m = \max_{0 \leq x \leq 6} h(x)$ khi đó phương trình đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất.

Kết hợp với bảng biến thiên, ta suy ra kết quả trên. Khi làm bài ta cần lưu ý điều này.

Bài 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A)

Tìm m để phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 4\sqrt{x^2-1}$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$ (1)

Điều kiện để (1) có nghĩa là $x \geq 1$. Do $x \geq 1$, nên $\sqrt{x+1} > 0$, vậy

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Do $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} < 0$ (vì $x \geq 1$ nên $\frac{2}{x+1} > 0$ nên điều kiện đặt ra với t là $0 \leq t < 1$)

Bài toán đã cho trở thành: Tìm m để hệ: $\begin{cases} f(t) = -3t^2 + 2t = m \\ 0 \leq t < 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = -6t + 2$, nên có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{1}{3}$	

Vậy $\max_{0 \leq t < 1} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; còn $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -1$ (chú ý ở đây không tồn tại $\min f(t)$).

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

Chú ý:

1. Các bạn nên lưu ý rằng khi sử dụng điều kiện có nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \\ x \in D \end{cases} \text{ ta cần lưu ý giả thiết phải tồn tại } \min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f(x)$$

Ở đây vì xét khi $0 \leq t < 1$, nên không tồn tại $\min_{0 \leq t < 1} f(t)$ nhưng tồn tại

$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -1$. Do đó điều kiện theo lý thuyết $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$ phải thay bằng $-1 <$

$m \leq \frac{1}{3}$ (tức là ta đã thay điều kiện $m \geq \min_{0 \leq t < 1} f(t)$ thành $m > \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$)

Các bạn cần lưu ý điều đó (ở đây ta cũng đã kết hợp sử dụng chiều biến thiên của hàm số đã xét trong bảng biến thiên hàm số $f(t)$ trong bài).

2. Ta có cách giải khác sau đây:

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} -3t^2 + 2t - m = 0 & (3) \\ 0 \leq t < 1 & (4) \end{cases}$$

Để hệ (3) (4) có nghiệm, trước hết (3) cần có nghiệm, tức là phải có

$$\Delta' = 1 - 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}. \text{ Khi đó } (3) \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-3m}}{3}.$$

Từ đó suy ra hệ (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1 + \sqrt{1-3m}}{3} < 1 \\ 0 \leq \frac{1 - \sqrt{1-3m}}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 + \sqrt{1-3m} < 3 \\ 0 \leq 1 - \sqrt{1-3m} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \sqrt{1-3m} < 2 \\ -2 < \sqrt{1-3m} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-3m} < 2 \\ \sqrt{1-3m} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-3m} < 2 \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{3}.$$

Ta thu lại kết quả trên!

3. Lại còn cách giải khác sau đây

Trước hết ta tìm điều kiện để hệ (3) (4) vô nghiệm

Điều này xảy ra trong hai trường hợp sau:

a. hoặc (3) vô nghiệm, tức là $\Delta' = 1 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}.$

b. hoặc (3) có nghiệm, nhưng mọi nghiệm đều không thỏa mãn (4)

Khi (3) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = \frac{2}{3}$, do đó mọi nghiệm t_1, t_2 không thỏa

mãn (4) khi và chỉ khi $t_1 < 0 < 1 \leq t_2$ (5)

Để thấy (5) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{3} \\ m < 0 \\ m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$

Vậy hệ (3) (4) vô nghiệm khi $\begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \leq -1 \end{cases}$

Do đó hệ (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \frac{1}{3}.$

Các bạn hãy so sánh phương pháp sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với các phương pháp vừa trình bày! Các bạn thích cách giải nào?

Bài 4. (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Hướng dẫn giải

Đưa phương trình đã cho về hệ sau:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 + mx + 2 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x - 1 = mx & (1) \\ x \geq -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Do $x = 0$ không phải là nghiệm của (1) $\forall m$, nên (1) (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x} = m & (3) \\ x \geq -\frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2}$, và có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{1}{2}$		0	
$f'(x)$		+		+
$f(x)$		$\frac{9}{2}$	$-\infty$	$+\infty$

Từ đó suy ra hệ (3) (4) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$.

Nhận xét:

- Rõ ràng trong bài này ta có $\min_{-\frac{1}{2} \leq x < 0} f(x) = \frac{9}{2}$, và đã kết hợp với chiều biến thiên hàm số để giải bài toán.
- Xét cách giải khác của bài toán trên:

Bài toán đã cho có dạng: Tìm m để hệ $\begin{cases} 3x^2 + (4 - m)x - 1 = 0 & (5) \\ x \geq -\frac{1}{2} & (6) \end{cases}$ có hai

nghiệm phân biệt.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi (5) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

$$x_2 > x_1 \geq -\frac{1}{2} \quad (7)$$

Rõ ràng (5) có hai nghiệm phân biệt (vì $\frac{c}{a} = -\frac{1}{3} < 0$)

$$\text{Vì vậy (7)} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ x_1 + x_2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \geq 0 \\ x_1 + x_2 > -1 \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

Áp dụng định lí Viet với (5), ta có (8) (9)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \geq 0 \\ \frac{m-4}{3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{9}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

Ta thu lại kết quả trên.

Bạn đọc hãy tự bình luận về tính hiệu quả của mỗi phương pháp.

Bài 5. (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối B)

Tìm m để phương trình

$$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \text{ có nghiệm.}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Khi đó $t \geq 0$.

Ta có $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2$, vậy $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Lúc đó ta đưa phương trình về dạng $m(t+2) = 2 - t^2 - t$. (1)

Do $0 \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow t+2 \neq 0$, vậy (1) $\Leftrightarrow \frac{-t^2 - t + 2}{t+2} = m$.

Bài toán đã cho trở thành:

$$\text{Tìm } m \text{ để hệ: } \begin{cases} f(t) = \frac{-t^2 - t + 2}{t+2} = m & (2) \\ 0 \leq t \leq \sqrt{2} & (3) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

t	0	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		-
$f(t)$		

Từ đó suy ra $\max_{0 \leq t \leq \sqrt{2}} f(t) = f(0) = 1,$

$$\min_{0 \leq t \leq \sqrt{2}} f(t) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

Vậy hệ (2) (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1.$

Bình luận: Các bạn hãy giải lại bài toán trên bằng phương pháp tam thức bậc hai để thấy rõ tính hiệu quả của phương pháp sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số để giải bài toán này.

Bài 6. (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A)

Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$

Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Khi $1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow 1 \leq t \leq 2.$

Lúc này theo biến mới t, phương trình đã cho có dạng $t^2 + t - 2 = 2m.$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = t^2 + t - 2 = 2m & (1) \\ 1 \leq t \leq 2 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Ta có $f'(t) = 2t + 1$ và có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{1}{2}$	1		2
$f'(t)$			+	
$f(t)$				

Vậy $\max_{1 \leq t \leq 2} f(t) = f(2) = 4,$

$$\min_{1 \leq t \leq 2} f(t) = f(1) = 0.$$

Từ đó suy ra các giá trị cần tìm của tham số m là $0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$

Nhận xét: Xét cách giải khác nhau:

Bài toán đã cho có dạng:

Tìm m để hệ sau $\begin{cases} t^2 + t - 2 - 2m = 0 & (3) \\ 1 \leq t \leq 2 & (4) \end{cases}$ có nghiệm.

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1 + \sqrt{8m + 9}}{2} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{8m + 9}}{2} < 0 \text{ (loại do không thỏa mãn (4))} \end{cases}$$

Vậy hệ (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq -\frac{9}{8} \\ 1 \leq \frac{-1 + \sqrt{8m+9}}{2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{9}{8} \\ 3 \leq \sqrt{8m+9} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$$

Ta thu lại kết quả trên.

Bạn thấy thế nào về tính hiệu quả của hai cách giải vừa trình bày!

§3. SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐỂ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ

A. Biện luận phương trình có tham số

Bài 1. Cho phương trình $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Hướng dẫn giải

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng tương đương sau:

$$2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x + m \Leftrightarrow 3\sin^2 2x - 2\sin 2x - 3 = m \quad (1)$$

Đặt $t = \sin 2x$. Khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \sin 2x \leq 1$.

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = 3t^2 - 2t - 3 = m & (2) \\ 0 \leq t \leq 1 & (3) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = 6t - 2$ và có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$		-	0
$f(t)$		-	+

Vậy $\min_{0 \leq t \leq 1} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{10}{3}$;

$\max_{0 \leq t \leq 1} f(t) = \max\{f(0); f(1)\} = \max\{-3; -2\} = -2$.

Do đó hệ (2) (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{0 \leq t \leq 1} f(t) \leq m \leq \max_{0 \leq t \leq 1} f(t) \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq -2$.

Đó chính là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bình luận:

1. Rõ ràng sử dụng phương pháp giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số để giải bài toán này đầy hiệu quả: Lời giải gọn gàng, trong sáng.
2. Ta hãy xét thêm các cách giải khác để nhận thấy cách giải trên là thích hợp nhất.

Cách 2: Bài toán đã cho có dạng:

$$\text{Tìm } m \text{ để hệ } \begin{cases} 3t^2 - 2t - 3 - m = 0 & (4) \\ 0 \leq t \leq 1 & (5) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Hệ (4) (5) có nghiệm trong hai trường hợp sau:

- a. (4) có nghiệm t_1, t_2 mà $0 < t_1 \leq t_2 < 1$

$$\text{Điều này xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 + t_2 < 2 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào định lí Viet, thì } t_1 + t_2 = \frac{2}{3}; t_1 t_2 = \frac{-3-m}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} 3m + 10 \geq 0 \\ -3 - m > 0 \\ -3 - m - \frac{2}{3} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m < -3. \quad (6)$$

- b. (4) có nghiệm t_1, t_2 trong đó một nghiệm $\in [0; 1]$ và một nghiệm không thuộc $[0; 1]$

$$\begin{aligned} \text{Điều đó xảy ra} &\Leftrightarrow f(0)f(1) \leq 0, \text{ ở đây } f(t) = 3t^2 - 2t - 3 - m \\ &\Leftrightarrow (-3 - m)(-2 - m) \leq 0 \Leftrightarrow (3 + m)(2 + m) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq m \leq -2. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Kết hợp (6) (7) suy ra } -\frac{10}{3} \leq m \leq -2.$$

Ta thu lại kết quả trên.

Cách 3: Trước hết tìm điều kiện để hệ (4) (5) vô nghiệm

Hệ (4) (5) vô nghiệm trong hai trường hợp sau:

a. Bản thân (4) vô nghiệm, tức là cần có $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 3m + 10 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{10}{3}$.

b. (4) có nghiệm nhưng cả hai nghiệm đều $\notin [0; 1]$.

Khi (4) có nghiệm t_1, t_2 , ta có $t_1 + t_2 = \frac{2}{3}$, nên điều này xảy ra khi và chỉ

$$\text{khi } t_1 < 0 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - m < 0 \\ -2 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

$$\text{Vậy hệ (4) (5) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{10}{3} \\ m > -2 \end{cases}$$

Do đó hệ (4) (5) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq -2$. Ta thu lại kết quả trên.

Cách 4: Trước hết (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 3m + 10 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{10}{3}$.

$$\text{Khi đó (4) có nghiệm} \begin{cases} t_1 = \frac{1 - \sqrt{3m + 10}}{2} \\ t_2 = \frac{1 + \sqrt{3m + 10}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ (4) (5) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{10}{3} \\ 0 \leq \frac{1 - \sqrt{3m + 10}}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1 + \sqrt{3m + 10}}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq \sqrt{3m + 10} \leq 1 \\ -1 \leq \sqrt{3m + 10} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 3m + 10 \leq 1 \\ 0 \leq 3m + 10 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 2$$

Ta thu lại kết quả trên.

Bây giờ chắc các bạn đồng ý với chúng tôi: Sử dụng phương pháp giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong trường hợp này là hợp lí nhất.

Bài 2. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} + 3 - x = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng sau:

$$\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} = x - 3. \quad (1)$$

$$\text{Từ đó suy ra (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10 = (x - 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 & (2) \\ x^2 - 2x + 1 = m(2x - 5) & (3) \end{cases}$$

Do $x \geq 3$, nên $2x - 5 \neq 0$, như vậy (1)

$$\Leftrightarrow (2) (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 & (4) \\ f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 5} = m & (5) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = \frac{2x^2 - 10x + 8}{(2x - 5)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

x	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	0		-	0
$f(x)$				+

Từ đó suy ra $\min_{x \geq 3} f(x) = f(4) = 3$

(còn $\max_{x \geq 3} f(x) = +\infty$ hiểu theo nghĩa $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

Vậy hệ (4) (5) có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{x \geq 3} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq 3$.

Nhận xét:

- Ở đây điều kiện $m \leq \max_{x \geq 3} f(x)$ hiển nhiên thỏa mãn do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Xét cách giải khác sau đây (để các bạn thấy nó kém hiệu quả hơn phương pháp mà ta vẫn sử dụng)

Bài toán đã cho có dạng:

Tìm m để hệ sau $\begin{cases} x^2 - 2(m+1)x + 5m + 1 = 0 & (6) \\ x \geq 3 & (7) \end{cases}$ có nghiệm

Trước hết tìm m để hệ (6) (7) vô nghiệm.

Hệ (6) (7) vô nghiệm trong hai trường hợp sau:

- (6) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$
- (6) có nghiệm x_1, x_2 và $x_1 \leq x_2 < 3$. (8)

$$(8) \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 & (9) \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0 & (10) \\ x_1 + x_2 < 6 & (11) \end{cases}$$

Do $x_1 + x_2 = 2(m + 1)$; $x_1 x_2 = 5m + 1$, nên

$$(9) (10) (11) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ 5m + 1 - 6(m+1) + 9 \Leftrightarrow \\ 2(m+1) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \text{ hoặc } m \geq 3 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vậy hệ (6) (7) vô nghiệm khi $m < 3 \Rightarrow$ hệ (6) (7) có nghiệm khi $m \geq 3$.

Ta thu lại kết quả trên. Bạn thấy thế nào?

Bài 3. Cho phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } t^2 &= 4 + 2\sqrt{(2-x)(2+x)} \Rightarrow 4 \leq t^2 \leq 4 + (2-x) + (2+x) \\ &\Rightarrow 4 \leq t^2 \leq 8 \\ &\Rightarrow 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Từ đó ta cũng có $\sqrt{(2-x)(2+x)} = \frac{t^2 - 4}{2}$, vậy đưa phương trình đã cho về

$$\text{dạng } t - \frac{t^2 - 4}{2} = m$$

$$\Leftrightarrow -t^2 + 2t + 4 = 2m.$$

Bài toán đã cho trở thành:

$$\text{Tìm } m \text{ để hệ } \begin{cases} f(t) = -t^2 + 2t + 4 = 2m & (1) \\ 2 \leq t \leq 2\sqrt{2} & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $f'(t) = -2t + 2$, và có bảng biến thiên sau

t	1	2		$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	0		-	
$f(t)$				

$$\text{Vậy } \max_{2 \leq t \leq 2\sqrt{2}} f(t) = f(2) = 4; \quad \min_{2 \leq t \leq 2\sqrt{2}} f(t) = f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4$$

$$\text{Từ đó suy ra hệ (1) (2) có nghiệm} \Leftrightarrow \min_{2 \leq t \leq 2\sqrt{2}} f(t) \leq 2m \leq \max_{2 \leq t \leq 2\sqrt{2}} f(t)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 4 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2.$$

Nhận xét: Các bạn hãy giải lại bằng phương pháp khác, để thấy rõ hiệu lực của phương pháp mà ta vừa sử dụng để giải bài toán này!

Bài 4. Cho phương trình $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \frac{x+m}{6}$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{x-9} \geq 0 \Rightarrow x = t^2 + 9$. Khi đó phương trình đã cho có dạng

$$\sqrt{t^2 + 6t + 9} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = \frac{t^2 + 9 + m}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t+3)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = \frac{t^2 + 9 + m}{6}$$

$$\Leftrightarrow t + 3 + |t-3| = \frac{t^2 + 9 + m}{6} \quad (\text{do } t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow -t^2 + 6t + 9 + 6|t-3| = m.$$

Bài toán trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = -t^2 + 6t + 9 + 6|t-3| = m & (1) \\ t \geq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Lập bảng sau đây:

t	0	3	6	$+\infty$
f(t)		$-t^2 + 27$	$-t^2 + 12t - 9$	
f'(t)		$-2t$	$-2t + 12$	
f''(t)		-	+ 0 -	
f(t)	27	18	27	$-\infty$

Ta có $\max_{t \geq 0} f(t) = \max\{f(0); f(6)\} = \max\{27; 27\} = 27$.

Ở đây ta coi như $\min_{t \geq 0} f(t) = -\infty$ vì $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$.

Vậy hệ (1) (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \max_{t \geq 0} f(t) \Leftrightarrow m \leq 27$.

Nhận xét: Theo chúng tôi không thể có phương pháp nào khác lại đơn giản hơn phương pháp này.

Bài 5. Cho phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Đặt $3^{1+\sqrt{1-x^2}} = t$. Ta có $3 \leq t \leq 9$.

Khi đó đưa phương trình đã cho về dạng tương đương sau:

$$t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = m(t-2). \quad (1)$$

Do $3 \leq t \leq 9 \Rightarrow t - 2 \neq 0$, vậy (1) $\Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = m$.

Vì thế bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = m & (2) \\ 3 \leq t \leq 9 & (3) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t - 2)^2}$ và có bảng biến thiên sau

t		3		9
$f'(t)$			+	
$f(t)$				

Vậy $\max_{3 \leq t \leq 9} f(t) = f(9) = \frac{64}{7}$; $\min_{3 \leq t \leq 9} f(t) = f(3) = 4$

Do đó $4 \leq m \leq \frac{64}{7}$ là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bài 6. Cho phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_1 x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0; 1)$

Hướng dẫn giải

Với điều kiện $x > 0$ thì $\log_1 x = -\log_2 x$,

$$\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x.$$

Từ đó phương trình đã cho có dạng sau: $\log_2^2 x + \log_2 x = -m$.

Đặt $t = \log_2 x$. Khi $0 < x < 1$ thì $t < 0$

Bài toán đã cho trở thành: Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = t^2 + t = -m & (1) \\ t < 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = 2t + 1$, và có bảng biến thiên sau

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$		-	+
$f(t)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	0

Ta có $\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 + t) = +\infty$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} (t^2 + t) = 0$.

Do đó $\min_{t < 0} f(t) = -\frac{1}{4}$ và coi như $\max_{t < 0} f(t) = +\infty$.

Từ đó hệ (1) (2) có nghiệm $\Leftrightarrow -m \geq \min_{t < 0} f(t)$

$$\Leftrightarrow -m \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

Vậy $m \leq \frac{1}{4}$ là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bình luận: Xem cách giải khác sau đây bằng phương pháp tam thức bậc hai.

Bài toán đã cho có dạng:

Tìm m để phương trình $t^2 + t + m = 0$ (3) có nghiệm âm.

Rõ ràng nếu (3) có nghiệm thì do $S = -1 < 0$, nên chắc chắn (3) có nghiệm âm. Vì thế (3) có nghiệm âm khi và chỉ khi (3) có nghiệm, tức là khi và chỉ khi $\Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.

Ta thu lại kết quả trên.

Công bằng mà nói trong bài toán này, đây mới là cách làm hay nhất, đơn giản nhất!

Bài 7. Cho phương trình $x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 = 0$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Do với mọi m thì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, vì thế có thể đưa phương trình ban đầu về dạng tương đương sau đây:

$$x^2 + mx + 2m + \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2m - 2 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, khi đó $|t| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$, vậy

(1) có dạng $t^2 + mt + 2m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow m(t + 2) = 2 - t^2 \quad (2)$$

Do $t = -2$ không phải là nghiệm của (2) với mọi m , nên $(2) \Leftrightarrow \frac{2 - t^2}{t + 2} = m$.

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = \frac{2-t^2}{t+2} = m & (3) \\ |t| \geq 2 & (4) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t - 2}{(t+2)^2}$ và có bảng biến thiên sau

t	-2 - $\sqrt{2}$	-2	-2 + $\sqrt{2}$	2
f'(t)	-	0	+	-
f(t)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$

Ta có $\min_{t < -2} f(t) = 4 + 2\sqrt{2}$; $\max_{t < -2} f(t) = +\infty$;

$$\max_{t \geq 2} f(t) = -\frac{1}{2}; \min_{t \geq 2} f(t) = -\infty$$

Hệ (3) (4) có nghiệm $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{hoặc là phương trình } f(t) = m \text{ có nghiệm trên } D_1 \\ \text{hoặc là phương trình } f(t) = m \text{ có nghiệm trên } D_2 \end{cases}$

(ở đây $D_1 = \{t: t < -2\}$ còn $D_2 = \{t: t \geq 2\}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 + 2\sqrt{2} \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nhận xét:

1. Trong bài tập trên ta đã mở rộng kết quả sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

cho trường hợp hệ $\begin{cases} f(x) = m \\ x \in D \end{cases}$ với $D = D_1 \cup D_2$

Rõ ràng hệ này có nghiệm khi và chỉ khi hoặc là phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên D_1 , hoặc là phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên D_2 .

2. Xét cách giải khác cho bài toán trên

Bài toán có dạng mới sau đây:

Tìm m để hệ $\begin{cases} t^2 + mt + 2m - 2 = 0 & (5) \\ |t| \geq 2 & (6) \end{cases}$ có nghiệm.

Trước hết ta tìm m để hệ (5) (6) vô nghiệm.

Hệ (5) (6) vô nghiệm trong hai trường hợp sau:

a. (5) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m + 8 < 0 \Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}$.

b. (5) có nghiệm $t_1 \leq t_2$ và không thỏa mãn (6), tức là $-2 < t_1 \leq t_2 < 2$. (7)

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (t_1 + 2)(t_2 + 2) \geq 0 \\ t_1 + t_2 > -4 \\ (2 - t_2)(2 - t_1) > 0 \\ t_1 + t_2 < 4 \end{cases}$$

Do $t_1 + t_2 = -m$ và $t_1 t_2 = 2m - 2$, nên

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 \geq 0 \\ 2m - 2 + 2(-m) + 4 \geq 0 \\ -m > -4 \\ 4 - 2(-m) + 2m - 2 > 0 \\ -m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 \geq 0 \\ m < 4 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

Vậy hệ (5) (6) vô nghiệm khi $-\frac{1}{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}$, tức là hệ (5) (6) có

$$\text{nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta thu lại kết quả trên. Bạn đọc tự đánh giá về tính hiệu quả của từng phương pháp trên!

3. Xét một bài toán tương tự sau:

Cho phương trình $\frac{3}{\sin^2 x} + 3\operatorname{tg}^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải như sau:

Đưa phương trình đã cho về dạng:

$$\begin{aligned} & 3(\tan^2 + \cot^2 x) + m(\tan x + \cot x) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3[(\tan x + \cot x)^2 - 2] + m(\tan x + \cot x) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(\tan x + \cot x)^2 + m(\tan x + \cot x) - 4 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } t = \tan x + \cot x & \Rightarrow |t| = |\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \quad (\text{do } \tan x \cot x = 1 > 0) \\ & \Rightarrow |t| \geq 2. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } (8) \Leftrightarrow 3t^2 + mt - 4 = 0 \Leftrightarrow mt = 4 - 3t^2.$$

$$\text{Do } |t| \geq 2 \text{ nên } (8) \Leftrightarrow \frac{4 - 3t^2}{t} = m.$$

Bài toán đã cho trở thành: Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = \frac{4-3t^2}{t} = m & (9) \\ |t| \geq 2 & (10) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(t) = \frac{-3t^2 - 4}{t^2}$, nên có bảng biến thiên sau

t		-2		2	
$f'(t)$		$-$		$-$	
$f(t)$	$+\infty$			-4	$-\infty$

Gọi $D = \{t: |t| \geq 2\}$, thì $D = D_1 \cup D_2$, ở đây $D_1 = \{t: t \leq -2\}$ và $D_2 = \{t: t \geq 2\}$

Ta có $\max_{t \in D_1} f(t) = +\infty$; $\min_{t \in D_1} f(t) = f(-2) = 4$,

$\max_{t \in D_2} f(t) = f(2) = -4$; $\min_{t \in D_2} f(t) = -\infty$.

Hệ (4) (10) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{hoặc là } m \geq \min_{t \in D_1} f(t) = 4 \\ \text{hoặc là } m \leq \max_{t \in D_2} f(t) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$

Đó là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bài 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = m. \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} & (1) \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{2-m}{2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \sin x; v = \sin y. \text{ Khi đó } (1) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{1}{2} & (3) \\ u^2 + v^2 = \frac{2-m}{2} & (4) \\ |u| \leq 1; |v| \leq 1. & (5) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra $v = \frac{1}{2} - u$.

$$\text{Do } -1 \leq v \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2} - u \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Từ (5) (6) suy ra $-\frac{1}{2} \leq u \leq 1$. Lúc này (4) có dạng $8u^2 - 4u - 3 = -2m$.

Bài toán đã cho trở thành:

$$\text{Tìm } m \text{ để hệ } \begin{cases} f(u) = 8u^2 - 4u - 3 = 2m & (7) \\ -\frac{1}{2} \leq u \leq 1 & (8) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $f'(u) = 16u - 4$, và có bảng biến thiên sau

u	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	
f'(u)		-	0	+
f(u)				

$$\text{Ta có } \min_{-\frac{1}{2} \leq u \leq 1} f(u) = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{4};$$

$$\max_{-\frac{1}{2} \leq u \leq 1} f(u) = \max \left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right); f(1) \right\} = \max \{1; 1\} = 1.$$

$$\text{Vậy hệ (7) (8) có nghiệm } \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq 2m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Bình luận: Xét một cách giải độc đáo bài toán trên như sau:

Xét hệ (3) (4) (5). Vẽ hệ trục tọa độ Ouv

Để thấy các điểm (u; v) thỏa mãn

(3) và (5) chính là đoạn thẳng AB

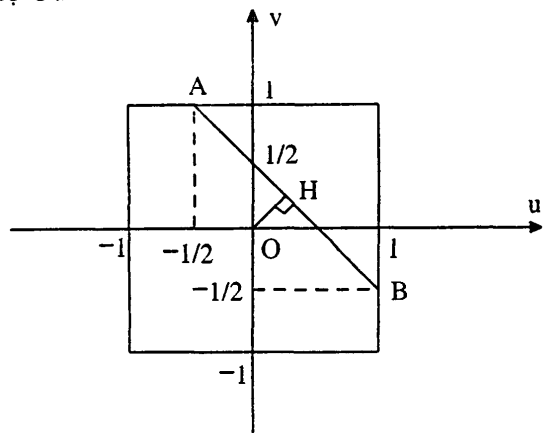
$$\text{với } A\left(-\frac{1}{2}; 1\right) \text{ và } B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$$

Khi $2 - m > 0$, thì (4) là đường tròn tâm O bán kính

$$R = \sqrt{\frac{2-m}{2}}.$$

Hệ (3) (4) (5) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ đường tròn trên cắt đoạn AB



$\Leftrightarrow OH \leq R \leq OA$ (ở đây H là hình chiếu của O trên AB)

$$\Leftrightarrow OH^2 \leq R^2 \leq OA^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{2-m}{2} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}.$$

Ta thu lại kết quả trên. Bạn đọc tự bình luận về tính ưu việt của từng phương pháp đã trình bày.

Bài 9. Tìm m để phương trình $2 + 2\sin 2x = m(1 + \cos x)^2$ có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng với mọi m thì $1 + \cos x \neq 0$ (vì nếu $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow VT = 2$ vô lí).

Do đó đưa phương trình đã cho về dạng tương đương sau:

$$\frac{2(1 + \sin 2x)}{(1 + \cos x)^2} = m. \quad (1)$$

Đặt $\tan \frac{x}{2} = t$. Áp dụng công thức $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ khi đó

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\text{nên (1)} \Leftrightarrow \frac{2\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1) = m.$$

Bài toán đã cho trở thành: Tìm m để hệ

$$\begin{cases} f(t) = t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1 = 2m & (2) \\ -1 \leq t \leq 1 & (3) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

(chú ý khi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = \tan \frac{x}{2} \in [-1; 1]$.

$$\text{Hệ (2) (3) có nghiệm} \Leftrightarrow \min_{-1 \leq t \leq 1} f(t) \leq 2m \leq \max_{-1 \leq t \leq 1} f(t). \quad (4)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 4t + 4 = 4(t-1)(t^2 - 2t - 1).$$

Vì thế có bảng biến thiên sau:

t	-1	$1 - \sqrt{2}$	1
$f'(t)$		-	0
$f(t)$			

Từ đó ta có $\max_{-1 \leq t \leq 1} f(t) = \max\{f(-1); f(1)\} = \max\{4; 4\} = 4$;

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} f(t) = f(1 - \sqrt{2}) = 0.$$

Thay vào (4) ta có $0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Đó là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bài 9. Tìm m để phương trình sau $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = m$ có nghiệm với $x \in [-\pi; \pi]$.

Hướng dẫn giải

Gọi D là miền xác định của phương trình, thì

$$D = \{x: 1 + 2\cos x \geq 0, 1 + 2\sin x \geq 0\}$$

$$\text{Từ } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ và } \cos x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{suy ra } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy } D = \{x: x \text{ thỏa mãn (1)}\}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x}, x \in D.$$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{x \in D} f(x) \leq m \leq \max_{x \in D} f(x). \quad (2)$$

$$\text{Vì } f(x) \geq 0 \forall x \in D, \text{ nên } \max_{x \in D} f(x) = \sqrt{\max_{x \in D} f^2(x)} ; \min_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min_{x \in D} f^2(x)}$$

$$\text{Ta có } f^2(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1+2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x}$$

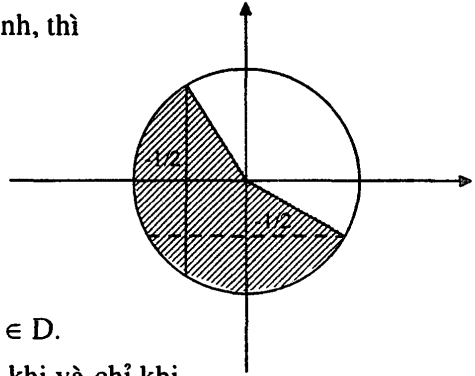
$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Khi } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} &\Rightarrow -\frac{5\pi}{12} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Lúc đó } \max_{x \in D} f^2(x) = \max_{\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t \leq \sqrt{2}} F(t) ; \min_{x \in D} f^2(x) = \max_{\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t \leq \sqrt{2}} F(t),$$

$$\text{ở đây } F(t) = 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}.$$

$$\text{Ta có } F'(t) = 2 + \frac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}} > 0 \forall t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right].$$



Từ đó suy ra $\max_{t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2} \right]} F(t) = F(\sqrt{2}) = 4(1 + \sqrt{2});$

$\min_{t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2} \right]} F(t) = F\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) = \sqrt{3} + 1.$

Từ đó kết hợp với (2) suy ra $\sqrt{\sqrt{3}+1} \leq m \leq 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$ là các giá trị cần tìm của tham số m.

B. Biện luận bất phương trình có tham số

Bài 1. Cho bất phương trình $\sqrt{(x+4)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m.$

Tìm m để bất phương trình đúng với mọi $-4 \leq x \leq 6.$

Hướng dẫn giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 24} - x^2 + 2x \leq m$ (1)

Ta có $f'(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+24}} - 2x+2 = \frac{(1-x)(1+2\sqrt{-x^2+2x+24})}{\sqrt{-x^2+2x+24}}.$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	-4	1	6		
f'(x)		+	0	-	
f(x)					

Vậy $\max_{-4 \leq x \leq 6} f(x) = f(1) = 6$

Rõ ràng (1) đúng với mọi $x \in [-4; 6] \Leftrightarrow \max_{-4 \leq x \leq 6} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq 6$

Bình luận:

1. Cách giải trên là gọn gàng, sáng sủa.
2. Xét các cách giải khác nữa như sau:

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{(x+4)(6-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 24}$

Xét $g(x) = -x^2 + 2x + 24$ với $-4 \leq x \leq 6 \Rightarrow g'(x) = -2x + 2$, và có bảng biến thiên sau:

x	-4	1	6		
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$					

Vậy $\max_{-4 \leq x \leq 6} g(x) = g(1) = 5$; $\min_{-4 \leq x \leq 6} g(x) = \min\{g(4); g(6)\} = \min\{0; 0\} = 0$

Từ đó miền xác định của biến mới t là $0 \leq t \leq 5$.

Khi đó $t^2 = -x^2 + 2x + 24 \Rightarrow x^2 - 2x = 24 - t^2$.

Bất phương trình đã cho có dạng mới tương đương sau:

$t \leq 24 - t^2 + m \Leftrightarrow t^2 + t - 24 \leq m$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để bất phương trình $f(t) = t^2 + t - 24 \leq m$ đúng với mọi $0 \leq t \leq 5$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1$ và có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{1}{2}$	0		5
$f'(t)$	0		$+$	
$f(t)$				

Vậy $\max_{0 \leq t \leq 5} f(t) = f(5) = 6$. Từ đó suy ra $m \geq \max_{0 \leq t \leq 5} f(t) = 6$.

Ta thu lại kết quả trên!

Cách giải này cũng dựa vào việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Cách 3: (Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ)

Điều kiện cần: Giả sử bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in [-4; 6]$

Nói riêng nó cũng đúng khi $x = -4$; $x = 1$ $x = -6$ (chú ý: $x = -4$; $x = 6$ là hai đầu nút của đoạn $[-4; 6]$, còn $x = 1$ là trung điểm của đoạn đó), tức là ta có

$$\begin{cases} m + 24 \geq 0 \\ m + 24 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 6. \\ m - 1 \geq 5 \end{cases}$$

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 6$

Ta có $x^2 - 2x + m = (x - 1)^2 + m - 1 \geq 5 \forall x \in [-4; 6]$.

Theo bất đẳng thức Côsi, với mọi $x \in [-4; 6]$ thì

$$\sqrt{(x+4)(6-x)} \leq \frac{(x+4)(6-x)}{2} = 5.$$

Từ đó suy ra khi $m \geq 6$ thì $\sqrt{(x+4)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m \forall x \in [-4; 6]$

Như vậy $m \geq 6$ là các giá trị cần tìm của tham số m .

Rõ ràng cách giải này cũng vô cùng đơn giản và sáng sủa!

Cách 4: (Phương pháp đồ thị)

Đặt $y = \sqrt{(x+4)(6-x)}$, thì ta có $y \geq 0$ và có:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 24 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Vì thế đồ thị của $y = \sqrt{(x+4)(6-x)}$ là nửa đường tròn (phía trên trục hoành) tâm tại điểm $I(1; 0)$ và bán kính $R = 5$.

$y = x^2 - 2x + n$ là parabol với mọi n và đều nhận $x = 1$ là trục đối xứng.

Bài toán có dạng: Tìm n để parabol là luôn luôn nằm trên nửa đường tròn.

Xét parabol tiếp xúc với nửa đường tròn trên tại $M(1; 5)$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6$.

Vậy các parabol cần tìm là tịnh tiến parabol ấy lên trên, tức là $n \geq 6$.

Ta thu lại kết quả trên.

Cách 5: (Sử dụng tam thức bậc hai)

Bài toán đã cho có dạng:

Tìm n để bất phương trình $f(t) = t^2 + t - 24 - n \leq 0$ (*)

đúng với mọi $0 \leq t \leq 5$.

Ta chỉ xét khi $\Delta > 0$ (vì nếu $\Delta \leq 0$ thì $t^2 + t - 24 - n > 0 \forall n$ trừ ra có thể chỉ bằng 0 tại một điểm $t = -\frac{1}{2}$).

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow t_1 \leq t \leq t_2$. Vậy ta cần có $[t_1, t_2] \subset [0; 5]$

$$\Leftrightarrow t_1 \leq 0 \leq 5 \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24 - n \leq 0 \\ 6 - n \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Ta thu lại kết quả trên.

Chúng tôi đã trình bày 5 cách giải khác nhau (trong đó có hai cách dùng đến giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số) bài toán trên. *Bạn có nhận xét gì?*

Bài 2. Tìm n để bất phương trình $-4\sqrt{(4-x)(2+x)} \leq x^2 - 2x + n - 18$ đúng với mọi $x \in [-2; 4]$

Hướng dẫn giải

Viết lại bất phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2 - 2x - 8) + 4\sqrt{-x^2 + 2x + 8} - 10 \geq -n \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$. Xét $g(x) = -x^2 + 2x + 8$ với $-2 \leq x \leq 4$.

Ta có $g'(x) = -2x + 2$, và có bảng biến thiên sau:

x	-2	1	4	
g'(x)		+	0	-
g(x)				

The diagram illustrates the relationship between the function $g(x)$ and its derivative $g'(x)$. The x -axis is marked with values -2 , 1 , and 4 . The $g'(x)$ row shows the sign of the derivative: it is positive ($+$) for $x < 1$, zero (0) at $x = 1$, and negative ($-$) for $x > 1$. The $g(x)$ row shows the function values, with vertical hatched bars at $x = -2$ and $x = 4$. Arrows point from these bars towards the point $x = 1$, indicating that $g(x)$ has a local minimum at $x = 1$.

Ta có $\max_{-2 \leq x \leq 4} g(x) = g(1) = 3$;

$$\min_{-2 \leq x \leq 4} g(x) = \min\{g(-2); g(4)\} = \min\{0; 0\} = 0.$$

Vậy biến mới t có miền xác định $0 \leq t \leq 3$.

Lúc này (1) có dạng $-t^2 + 4t - 10 \geq -m$

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 4t + 10 \leq m. \quad (2)$$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để (2) đúng với mọi $t \in [0; 3]$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\max_{0 \leq t \leq 3} f(t) \leq m$. (3)

Ta có $f'(t) = 2t - 4$ và có bảng biến thiên sau:

t	0	2	3	
f'(t)		-	0	+
f(t)				

Vậy $\max f(t) = \max\{f(0); f(3)\} = \max\{10; 7\} = 10$. (4)

Từ (3) (4) suy ra $m \geq 10$ là các giá trị cần tìm của tham số m

Nhận xét: Khác với bài 1, bài này chỉ có cách giải này là hợp lí nhất. Các bạn thử lí giải xem vì sao?

Bài 3. Cho bất phương trình

$$3\cos^4 x - 5\cos^3 x - 36\sin^2 x - 15\cos x + 36 + 24m - 12m^2 > 0$$

Tìm m để bất phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Đưa bất phương trình đã cho về dạng

$$3\cos^4 x - 5(4\cos^3 x - 3\cos x) - 36(1 - \cos^2 x) - 15\cos x + 36 + 24m - 12m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^4 x - 20\cos^3 x + 36\cos^2 x > 12m^2 - 24m. \quad (1)$$

Đặt $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$), khi đó bài toán đã cho trở thành

Tìm m để bất phương trình $f(t) = 3t^4 - 20t^3 + 36t^2 > 0$ $12m^2 - 24m$ đúng với mọi $-1 \leq t \leq 1$.

Như đã biết điều ấy xảy ra $\Leftrightarrow \min_{-1 \leq t \leq 1} f(t) > 12m^2 - 24m$. (2)

Ta có $f'(t) = 12t^3 - 60t^2 + 72t = 12t(t^2 - 5t + 6)$, và từ đó có bảng biến thiên sau:

t	-1	0	1	2	3			
f'(t)	-	0	+	+	0	-	0	+
f(t)								

Từ đó suy ra $\min_{-1 \leq t \leq 1} f(t) = f(0) = 0$. (3)

Từ (2) (3) ta có $12m^2 - 24m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2$. (4)

Vậy (4) là các giá trị cần tìm của tham số m.

Nhận xét: Chắc chắn đây là phương pháp hiệu quả và đơn giản nhất để giải bài toán đã cho. Các bạn có tin điều đó không?

Bài 4. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \geq m$ có nghiệm

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}$ với $-1 \leq x \leq 4$

Để thấy bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \geq m & (1) \\ -1 \leq x \leq 4 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0 \quad \forall x \in (-1; 4)$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên sau:

x	-1		4
f'(x)		+	
f(x)			

Vậy $\max_{-1 \leq x \leq 4} f(x) = f(4) = \sqrt{5}$.

Hệ (1) (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \max_{-1 \leq x \leq 4} f(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq \sqrt{5}$.

Nhận xét: Xét cách giải khác sau:

- * Rõ ràng bất phương trình xác định khi $-1 \leq x \leq 4$.
- * Để thấy khi $x = 4$, thì VT = $\sqrt{5}$, từ đó suy ra nếu $m \leq \sqrt{5}$ thì chắc chắn bất phương trình có nghiệm (vì khi đó ít nhất $x = 4$ là nghiệm).
- * Xét khi $m > \sqrt{5}$. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \geq m &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 4-x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 \geq m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x \geq \frac{3}{2} \\ 5-m^2 \geq 2\sqrt{(x+1)(4-x)} \end{cases} \quad (3) \\ &\quad \quad \quad (4)\end{aligned}$$

Do $m > \sqrt{5}$, nên $5 - m^2 < 0$ vậy (4) vô nghiệm

$\Rightarrow$ hệ (3) (4) vô nghiệm.

Vậy khi $m > \sqrt{5}$ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Từ đó suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \sqrt{5}$.

Ta thu lại kết quả trên.

Rõ ràng cách giải này vừa phức tạp, vừa không sáng sủa như cách giải bằng cách sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số mà ta đã dùng ở trên.

Bài 5. Cho bất phương trình $\sin 3x + m \sin 2x + 3 \sin x \geq 0$.

Tìm m để bất phương trình đúng với mọi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đưa bất phương trình đã cho về dạng

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2m \sin x \cos x + 3 \sin x \geq 0. \quad (1)$$

Với mọi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x \geq 0$, vậy từ (1) suy ra $-2 \sin^2 x + m \cos x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + m \cos x + 1 \geq 0. \quad (2)$$

Đặt $t = \cos x$. Khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $0 \leq t \leq 1$.

$$\text{Lúc này } (2) \Leftrightarrow 2t^2 + mt + 1 \geq 0. \quad (3)$$

Rõ ràng khi $t = 0$ thì VP (3) = $1 > 0 \forall m$, vì thế ta chỉ cần xét với $0 < t \leq 1$, do

$$\text{vậy } (3) \Leftrightarrow \frac{2t^2 + 1}{t} \geq -m.$$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để bất phương trình $f(t) = \frac{2t^2 + 1}{t} \geq -m$ đúng với mọi $0 < t \leq 1$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\min_{0 < t \leq 1} f(t) \geq -m$.

Ta có $f'(t) = \frac{2t^2 - 1}{t^2}$ và có bảng biến thiên sau

t	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$			

Vậy $\min_{0 < t \leq 1} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$ (5)

Từ (4) (5) suy ra $2\sqrt{2} \geq -m \Leftrightarrow m \geq -2\sqrt{2}$

Đó là các giá trị cần tìm của tham số m.

Nhận xét: Các bạn hãy tự giải lấy thêm ít nhất bằng 2 cách khác, rồi hãy so sánh với cách mà chúng tôi vừa trình bày!

Bài 6. Tìm k để hệ sau đây

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \\ x^2 - kx + k \leq 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Hướng dẫn giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng $\begin{cases} x^2 \leq k(x-1) & (1) \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 3 & (2) \end{cases}$

Do $x = 1$ không phải là nghiệm của (1) với mọi k, nên (1) (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x-1} \leq k & (3) \\ 1 < x \leq 3 & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x-1} \geq k & (5) \\ \frac{1}{2} \leq x < 1 & (6) \end{cases}$$

Hệ (1) (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{hoặc là hệ (3) (4) có nghiệm} \\ \text{hoặc là hệ (5) (6) có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{1 < x \leq 3} f(x) \leq k & (7) \\ \max_{\frac{1}{2} \leq x < 1} f(x) \geq k & (8) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ và có bảng biến thiên sau

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$		$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{9}{2}$

Từ đó ta suy ra

$$\max_{\frac{1}{2} \leq x < 1} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$\min_{1 < x \leq 3} f(x) = f(2) = 4. \quad (10)$$

Thay (9) (10) vào (7) (8) và có $\begin{cases} k \geq 4 \\ k \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$ là các giá trị cần tìm của tham số k.

Nhận xét: Các bạn hãy giải lại bài này bằng phương pháp khác rồi so sánh với cách giải của chúng tôi!

Bài 7. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^3 - 2x|x-2| - m^2 - 20m \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng tương đương sau

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 2x|x-2| \geq m^2 + 20m & (1) \\ 0 \leq x \leq 3 & (2) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên sau đây:

x	2	$\frac{2}{3}$	2	3
$f(x)$		$x^3 + 2x^2 - 4x$	$x^3 - 2x^2 + 4x$	
$f'(x)$		$3x^2 + 4x - 4$	$3x^2 - 4x + 4$	
$f'(x)$		- 0 +	+	
$f(x)$				

Vậy $\max_{0 \leq x \leq 3} f(x) = \max\{f(0); f(3)\} = \max\{0; 21\} = 21.$

$$\begin{aligned} \text{Hệ (1) (2) có nghiệm} &\Leftrightarrow \max_{0 \leq x \leq 3} f(x) \geq m^2 + 20m \Leftrightarrow m^2 + 20m \leq 21 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 20m - 21 \leq 0 \Leftrightarrow -21 \leq m \leq 1. \end{aligned}$$

Bài 8. Tìm m để hệ $\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 \leq 0 \\ x^3 + 3mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng tương đương $\begin{cases} x^3 + 1 \leq -3mx & (1) \\ -1 \leq x \leq \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$

Rõ ràng với mọi m thì $x = 0$ không phải là nghiệm của (1), nên ta có

$$(1) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) = -\frac{x^3 + 1}{3x} \leq m & (3) \\ -1 \leq x < 0 & (4) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -\frac{x^3 + 1}{3x} \geq m & (5) \\ 0 < x \leq \frac{1}{3} & (6) \end{cases} \end{cases}$$

Hệ (3) (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{-1 \leq x < 0} f(x) \leq m$ (7)

Hệ (5) (6) có nghiệm $\Leftrightarrow \max_{0 < x \leq \frac{1}{3}} f(x) \geq m$ (8)

Ta có $f'(x) = \frac{1 - 2x^3}{3x^2}$, và có bảng biến thiên sau

x		-1		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
$f'(x)$			+		+			0
$f(x)$								

Từ đó ta có $\min_{-1 \leq x < 0} f(x) = f(-1) = 0$, $\max_{0 < x \leq \frac{1}{3}} f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{28}{27}$

Kết hợp lại suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -\frac{28}{27} \end{cases}$

Bài 9. Cho bất phương trình $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$

Tìm m để bất phương trình có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ với $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ và có bảng biến thiên sau

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

The diagram illustrates the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ over the interval $[0, 1 + \sqrt{3}]$. The x-axis is marked at 0 , 1 , and $1 + \sqrt{3}$. The derivative $f'(x)$ is negative for $x < 1$, zero at $x = 1$, and positive for $x > 1$. The function $f(x)$ is shown as a curve with a minimum at $x = 1$, with arrows indicating the direction of the curve from $x = 0$ to $x = 1$ and from $x = 1$ to $x = 1 + \sqrt{3}$.

Từ đó ta có $\max_{0 \leq x \leq 1 + \sqrt{3}} g(x) = \max\{g(0); g(1 + \sqrt{3})\} = \max\{\sqrt{2}; 2\} = 2$
 $\min_{0 \leq x \leq 1 + \sqrt{3}} g(x) = g(1) = 1$

Vậy miền xác định của biến mới là $1 \leq t \leq 2$

Từ $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow t^2 - 2 = -x(2 - x)$

Do đó bất phương trình đã cho có dạng

$m(t + 1) \leq t^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2}{t + 1} \geq m$ do $t + 1 > 0$ vì $t \in [1; 2]$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để hệ $\begin{cases} f(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1} \geq m & (1) \\ 1 \leq t \leq 2 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \max_{1 \leq t \leq 2} f(t) \geq m$ (3)

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2}$ và có bảng biến thiên sau

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$		

Như vậy $\max_{1 \leq t \leq 2} f(t) = f(2) = \frac{2}{3}$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $m \leq \frac{2}{3}$ là các giá trị cần tìm của tham số m.

Chương 8.

VÀI BÀI TOÁN KHÁC VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

§1. ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CÓ THAM SỐ

Ta sử dụng các kết quả hiển nhiên sau đây để giải một số lớp phương trình và bất phương trình có cấu trúc đặc biệt được xét đến trong mục này.

Mệnh đề 1: Xét phương trình $f(x) = g(x)$, với $x \in D$ (1)

Nếu như với phương trình (1) ta có điều kiện $\max_{x \in D} f(x) < \min_{x \in D} g(x)$ thì (1) vô nghiệm.

Mệnh đề 2: Xét phương trình $f(x) = g(x)$, với $x \in D$ (2)

Nếu như ta có $\max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} g(x) = \alpha$ thì (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha \\ g(x) = \alpha \end{cases}$

Xét các bài toán minh họa sau đây.

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy miền xác định của phương trình là $D = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ và $g(x) = x^2 - 6x + 11$.

Ta có $f^2(x) = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)}$.

Theo bất đẳng thức Côsi suy ra $2 \leq f^2(x) \leq 2 + [(x-2) + (4-x)]$
 $\Rightarrow 2 \leq f^2(x) \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$.

Lại có $f(x) = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $\max_{x \in D} f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có $g(x) = (x-3)^2 + 2 \Rightarrow \min_{x \in D} g(x) = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Do $\max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} g(x) = 2$, nên phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ g(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Nhận xét: Xét cách giải khác sau đây:

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \Rightarrow u^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} = 2 + 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$$

$$\text{hay } u^2 = 2 + 2\sqrt{3 - (x^2 - 6x + 11)}.$$

Từ đó ta đi đến phương trình hệ quả sau:

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{3 - u} \Leftrightarrow u^2 - 2 = 2\sqrt{3 - u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq u \leq 3 \\ u^4 - 4u^2 + 4 = 12 - 4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq u \leq 3 \\ u^4 - 4u^2 + 4u - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leq u \leq 3 \\ (u-2)(u^3 + 2u^2 + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2.$$

$$\text{Từ đó dẫn đến phương trình } \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8} = 4 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Thử lại $x = 3$ vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn, nên đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ta thu lại kết quả trên!

Các bạn có nhận xét gì về tính hiệu quả của mỗi cách giải trên!

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$1. \frac{x^2 - 6x + 15}{x^2 - 6x + 11} = \sqrt{x^2 - 6x + 18},$$

$$2. \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

Hướng dẫn giải

$$1. \text{ Xét phương trình } \frac{x^2 - 6x + 15}{x^2 - 6x + 11} = \sqrt{x^2 - 6x + 18}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 - 6x + 15}{x^2 - 6x + 11} = 1 + \frac{4}{x^2 - 6x + 11} = 1 + \frac{4}{(x-3)^2 + 2}$$

$$\text{Rõ ràng } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ta có } f(x) \leq 1 + \frac{4}{2} = 3,$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3.$$

$$\text{Lại có } g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18} = \sqrt{(x-3)^2 + 9} \geq 3$$

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 3$$

$$\text{Vì thế } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ g(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Do vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của (1)

2. Xét phương trình $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$ (2)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x) &= \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \\ &= \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9}. \end{aligned}$$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R}$, thì $f(x) \geq 5$; $f(5) = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

Từ đó ta có $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

Lại có $g(x) = 4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2 \Rightarrow g(x) \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}$;
 $g(x) = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

Do vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\text{Như thế suy ra (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 5 \\ g(x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Từ đó ta có $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Bài 3. Giải phương trình $2^{2x+1} + 2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3(4x^2 - 4x + 4)}$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$f(x) = 2^{2x+1} + 2^{3-2x} \geq 2\sqrt{2^{2x+1} \cdot 2^{3-2x}} = 2\sqrt{2^4} = 8,$$

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Lại có $4x^2 - 4x + 4 = (2x - 1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \log_3(4x^2 - 4x + 4) \geq 1$.

$$\text{Vì thế } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ta có } g(x) = \frac{8}{\log_2(4x^2 - 4x + 4)} \leq 8;$$

$$g(x) = 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó phương trình đã cho tương đương với hệ } \begin{cases} f(x) = 8 \\ g(x) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 4. Giải phương trình $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$. (1)

Ta có $g(x) = (x-1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Do } (x-1)^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\Rightarrow x^2 - x \geq x - 1 \\ &\Rightarrow 2^{x^2-x} \geq 2^{x-1}. \end{aligned}$$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f(x) = 2^{x-1} - 2^{x^2-x} \leq 0$;

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ đó suy ra $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Như thế (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 5. Giải phương trình $3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có } \left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + \left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + 1 &\geq 3\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right)^2} \\ &\Rightarrow 3(1 + x^2) \geq 3\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{(1+x^2)^3} \geq 1 + \frac{3}{2}x^2 \\ &\Rightarrow 1 - \sqrt{(1+x^2)^3} \leq -\frac{3}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1) \end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số, ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 &\geq 4\sqrt[4]{x^{12}} \geq 4x^3 \\ \Rightarrow 3x^4 - 4x^3 &\geq -\frac{3}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) (2) suy ra $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - (1 - \sqrt{(1+x^2)^3}) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Rõ ràng phương trình đã cho có thể viết dưới dạng $f(x) = 0$

$$\text{Từ đó suy ra phương trình đã cho có dạng } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất cần tìm.

Chú ý:

Đặt biệt với phương trình dạng $f(x) = \alpha, x \in D$

mà thỏa mãn điều kiện $\max_{x \in D} f(x) = \alpha$ (hoặc $\min_{x \in D} f(x) = \alpha$),

khi đó ta có $f(x) = \alpha \Leftrightarrow \max_{x \in D} f(x) = \alpha$ (hoặc $f(x) = \alpha \Leftrightarrow \min_{x \in D} f(x) = \alpha$).

Bài 6. Giải phương trình $\sin^8 x + \cos^8 x = 32(\sin^{12} x + \cos^{12} x)$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\sin^8 x \leq \sin^2 x$

$$\cos^8 x \leq \cos^2 x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^8 x = \sin^2 x \\ \cos^8 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Từ đó ta có } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Áp dụng kết quả sau đây: Nếu $a, b \geq 0$ và $a + b = 1$, thì với mọi n nguyên và ≥ 2 ta có:

$$a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (*)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^{12} x + \cos^{12} x = (\sin^2 x)^6 + (\cos^2 x)^6 \geq \frac{1}{2^5}$$

$$\Rightarrow g(x) = 32(\sin^{12} x + \cos^{12} x) \geq 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

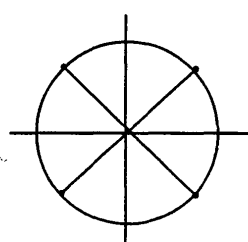
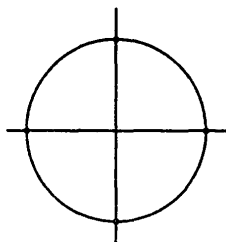
$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có:

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$



$$\sin^8 x + \cos^8 x = 32(\sin^{12} x + \cos^{12} x) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Từ các kết quả trên suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Rõ ràng hệ (2) (3) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Chú ý: (*) chứng minh như sau:

Xét hàm số $h(x) = x^n + (1-x)^n$ với $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(x) &= nx^{n-1} - n(1-x)^{n-1} = n[x^{n-1} - (1-x)^{n-1}] \\ &= n[x - (1-x)] [x^{n-2} + x^{n-3}(1-x) + \dots + (1-x)^{n-2}] \\ &= n(2x-1) [x^{n-2} + x^{n-3}(1-x) + \dots + (1-x)^{n-2}] \end{aligned}$$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$h'(x)$		-	+
$h(x)$			

Như vậy do $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow h(a) \geq h\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a^n + (1-a)^n \geq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ hay } a^n + b^n \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{đpcm!}$$

Bài 7. Giải phương trình $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 x)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x}$; $g(x) = 2(1 + \sin^2 x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng $f(x) = g(x)$. (1)

Để thấy $g(x) \geq 2 \forall x \in \mathbb{R}$ (do $\sin^2 x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

Mặt khác $g(x) = 2 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy ta có $\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 2 \Leftrightarrow x = k\pi$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left[\cos^2 3x + (2 - \cos^2 3x) \right] (1+1) \geq \left(\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \right)^2$$

Từ đó suy ra $f(x) = \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos 3x}{1} = \frac{\sqrt{2 - \cos^2 3x}}{1}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = 1.$$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2 \Leftrightarrow \cos 3x = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}. \quad (3)$$

Từ đó suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ g(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad x = \frac{2k\pi}{3}, x \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$.

Hướng dẫn giải

Miền xác định của phương trình là tập hợp D gồm những phần tử x thỏa mãn

$$\text{hệ } \begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ -x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{chú ý rằng } x^2 - x + 2 > 0 \quad \forall x)$$

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} - (x + 1) = x^2 - 2x + 1. \quad (1)$$

Đặt $g(x) = x^2 - 2x + 1$; $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} - (x + 1)$, với $x \in D$.

Ta có $g(x) = (x - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in D$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Từ đó suy ra $\min_{x \in D} g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Theo bất đẳng thức Côsi $\forall x \in D$, ta có

$$\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{(x^2 + x - 1) \cdot 1} \leq \frac{(x^2 + x - 1) + 1}{2}$$

$$\sqrt{x-x^2+1} = \sqrt{(x-x^2+1) \cdot 1} \leq \frac{(x-x^2+1)+1}{2}.$$

Từ đó suy ra $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} \leq x+1$ hay $f(x) \leq 0 \forall x \in D$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=1 \\ x-x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Từ đó đi đến $\max_{x \in D} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Kết hợp lại suy ra (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Do vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 9. Giải phương trình $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y$.

Hướng dẫn giải

Đặt $g(y) = 12 + \frac{1}{2} \sin y, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $g(y) \leq 12 + \frac{1}{2} \forall y \in \mathbb{R}$

$$g(y) = 12 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $\max_{y \in \mathbb{R}} g(y) = 12 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (1)

Đặt $f(x) = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2$

$$= (\cos^4 x + \sin^4 x) + \left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x}\right) + 4 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 x \cos^4 x} + 4$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + 16 \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\sin^4 2x} + 4. \quad (2)$$

Từ (2) dễ dàng suy ra $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f(x) \geq 1 - \frac{1}{2} + 16 \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} + 4$

hay $f(x) \geq 12 + \frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 12\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Vì phương trình đã cho có dạng $f(x) = g(y)$ $x, y \in \mathbb{R}$ (3)

$$\text{Từ các lập luận trên suy ra (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 12\frac{1}{2} \\ g(y) = 12\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}; y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, n \text{ và } k \in \mathbb{Z}$$

Bài 10. Giải phương trình $(\sin 3x + \cos 2x)^2 = 5 - \sin x$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = (\sin 3x + \cos 2x)^2$, $g(x) = 5 - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Do $\sin x \leq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = 4 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \quad (1)$$

Lại có $|\sin 3x + \cos 2x| \leq |\sin 3x| + |\cos 2x| \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow |\sin 3x + \cos 2x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \sin 3x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

Từ đó ta có $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 4 \Leftrightarrow x$ thỏa mãn (2)

Vì phương trình đã cho có dạng $f(x) = g(x)$, nên từ các kết quả trên suy ra

phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} f(x) = 4 & (3) \\ g(x) = 4 & (4) \end{cases}$

Từ (1) (2) suy ra (3) (4) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét:

Khó có cách giải nào khác gọn gàng hơn cách giải trên

Các bạn cứ thử tưởng tượng sau khi sử dụng công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$;

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ta đưa phương trình đã cho về dạng:

$$(4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 3\sin x - 1)^2 = 5 - \sin x$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^6 x + 16\sin^5 x - 20\sin^4 x - 20\sin^3 x + 5\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(16\sin^5 x + 32\sin^4 x + 12\sin^3 x - 8\sin^2 x - 3\sin x + 4) = 0$$

Đến đây mời các bạn giải tiếp!! Các bạn thấy thế nào?

Bài 11. Giải phương trình $\frac{4x^2 + 14x + 46}{x^2 + 2x + 10} = 2x^2 - 8x + 13$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = \frac{4x^2 + 14x + 46}{x^2 + 2x + 10}$.

Gọi m là giá trị tùy ý. Khi đó phương trình sau (ẩn x)

$$\frac{4x^2 + 14x + 46}{x^2 + 2x + 10} = m \quad (1) \text{ có nghiệm}$$

Do $x^2 + 2x + 10 \neq 0 \forall x$ (vì $x^2 + 2x + 10 > 0$), nên

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 14x + 46 = mx^2 + 2mx + 10m$$

$$\Leftrightarrow (m - 4)x^2 + 2(m - 7)x + 10m - 46 = 0 \quad (2)$$

* Khi $m = 4$, thì $m - 7 \neq 0 \Rightarrow (1)$ có nghiệm.

* Khi $m \neq 4$, thì (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 15 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 3 \leq m \leq 5 \quad (m \neq 4)$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq m \leq 5.$$

Vậy (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 3 \leq m \leq 5$.

Khi $m = 5$, thì (2) có dạng $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Từ đó ta có $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 2 \quad (3)$

Ta có $g(x) = 2x^2 - 8x + 13 = 2(x - 2)^2 + 5$

Như vậy $\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 5 \Leftrightarrow x = 2 \quad (4)$

Từ (3) (4) suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} f(x) = 5 \\ g(x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất cần tìm.

Nhận xét: Xét cách giải khác sau đây

$$\frac{4x^2 + 14x + 46}{x^2 + 2x + 10} = 2x^2 - 8x + 13$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 14x + 46 = (2x^2 - 8x + 13)(x^2 + 2x + 10)$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 68x + 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(2x^2+4x+21)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Cách giải này hoàn toàn chấp nhận được, nếu các bạn đoán trước được nghiệm $x=2$!

Bài 12. Giải phương trình $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cos(xy) + 2^{|y|} = 0$

Hướng dẫn giải

Viết lại phương trình dưới dạng sau:

$$P = \left[2^{\sin x} - \cos(xy) \right]^2 + \left(2^{|y|} - \cos^2(xy) \right) = 0. \quad (1)$$

Ta có $2^{|y|} \geq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(xy) \leq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì thế $P \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P=0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin x} - \cos(xy) = 0 \\ 2^{|y|} - \cos^2(xy) = 0 \\ \cos^2(xy) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin x} = \cos(xy) \\ 2^{|y|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin x} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; y = 0, k \in \mathbb{Z}$

Từ đó suy ra nghiệm của (1) là $x = k\pi, y = 0$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 13. (Đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện để hệ (1) (2) có nghĩa là
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 & (3) \\ y+1 \geq 0 & (4) \\ xy \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Từ (3) (4) suy ra $x \geq -1; y \geq -1$

Dễ thấy nếu $-1 \leq x \leq 0$ và $-1 \leq y \leq 0$ thì $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \leq 2$ vậy không thể thỏa mãn (2)

$\Rightarrow x > 0; y > 0$.

Vì thế theo bất đẳng thức Côsi, ta có từ (1): $x+y=3+\sqrt{xy} \leq 3+\frac{x+y}{2}$

$$\Rightarrow x + y \leq 6. \quad (6)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$(\sqrt{x+1} \cdot 1 + \sqrt{y+1} \cdot 1)^2 \leq \left[(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{y+1})^2 \right] (1^2 + 1^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{2(x+y+2)} \leq 4$$

$$\Rightarrow \max_{x>0, y>0} (\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}) = 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{1} = \frac{\sqrt{y+1}}{1} \text{ và } \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

Từ đó suy ra (2) $\Leftrightarrow x = y = 3$ và $x = y = 3$ cũng thỏa mãn (1).

Vậy hệ (1) (2) có nghiệm duy nhất $x = y = 3$

Nhận xét: Nếu không sử dụng phương pháp tìm giá trị lớn nhất của hàm số để đánh giá hai vế, ta có thể giải thuần túy hệ phương trình trên như sau:

$$\text{Từ (2) có } x + 1 + y + 1 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2 + x + y + 2\sqrt{xy + (x+y) + 1} = 16. \quad (7)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{xy} \geq 0, \text{ thì từ (1) có } x + y = 3 + t$$

$$\text{Thay lại vào (7) và có } 3 + t + 2\sqrt{t^2 + 3 + t + 1} = 14$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + t + 4} = 11 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{35}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

$$\text{Khi đó } \sqrt{xy} = 3 \Leftrightarrow xy = 9$$

$$\text{Vậy (1) (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

Ta thu lại kết quả trên!

§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ PHỤ THUỘC THAM SỐ

Cho họ hàm số $F_m(x)$, với $x \in D$. Với mỗi giá trị của tham số m , ta xét bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $F_m(x)$ với $x \in D$. Như vậy dĩ nhiên giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $F_m(x)$ trên D là các đại lượng phụ thuộc tham số m . Tùy theo giá trị của m hãy khảo sát các tính chất của các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của họ hàm số $F_m(x)$ theo một tiêu chí nào đó. Đó là nội dung của bài toán chúng ta xét trong mục này.

A. Biện luận theo tham số giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của họ hàm số phụ thuộc tham số

Bài 1. Cho họ hàm số $f_\alpha(x) = \tan^2(x + \alpha) + \tan^2(x - \alpha)$, với tham số $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f_\alpha(x)$ và biện luận theo α .

Hướng dẫn giải

Biến đổi $f_\alpha(x)$ về dạng sau đây

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{\sin^2(x + \alpha)}{\cos^2(x + \alpha)} + \frac{\sin^2(x - \alpha)}{\cos^2(x - \alpha)} \\ &= \frac{\sin^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha) + \sin^2(x - \alpha)\cos^2(x + \alpha)}{\cos^2(x + \alpha)\cos^2(x - \alpha)} \\ &= \frac{(\sin 2x + \sin 2\alpha)^2 + (\sin 2x - \sin 2\alpha)^2}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2} \\ &= \frac{2(\sin^2 2x + \sin^2 2\alpha)}{(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

* Nếu $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha \geq 0$.

Ta có $\forall x \in D_\alpha$, (ở đây D_α là miền xác định của hàm số $f_\alpha(x)$)

$$0 \leq \sin^2 2x + \sin^2 2\alpha \leq \sin^2 2\alpha \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x = 0$.

$$\text{Do } \cos 2\alpha \geq 0, \text{ nên } (\cos 2x + \cos 2\alpha)^2 \leq (1 + \cos 2\alpha)^2. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = 1$.

Vì hệ $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases}$ chắc chắn có nghiệm, chẳng hạn $x = 0$, vì thế trong trường

hợp này

$$\min f_{\alpha}(x) = 2 \frac{\sin^2 2\alpha}{(1 + \cos 2\alpha)^2} = 2 \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4 \cos^4 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha.$$

* Nếu $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \pi \Rightarrow \cos 2\alpha \leq 0$

Do $\cos 2\alpha \leq 0$, nên $(\cos 2x + \cos 2\alpha)^2 \leq (-1 + \cos 2\alpha)^2$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = -1$

Vì hệ $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$ có nghiệm (chẳng hạn $x = \frac{\pi}{2}$), vì thế trong trường hợp

này $\min f_{\alpha}(x) = 2 \frac{\sin^2 2\alpha}{(-1 + \cos 2\alpha)^2} = 2 \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4 \sin^4 \alpha} = 2 \cot^2 \alpha.$

Như vậy theo tham số α , ta có kết luận sau:

$$\min f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 2 \tan^2 \alpha, & \text{Nếu } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ 2 \cot^2 \alpha, & \text{nếu } \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f_m(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + m \sin x \cos x, x \in \mathbb{R}$$

Biện luận theo m.

Hướng dẫn giải

Viết lại $f_m(x)$ dưới dạng sau: $f_m(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{m}{2} \sin 2x.$

Đặt $\sin 2x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$). Khi đó ta có $\begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = \max_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) & (1) \\ \min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = \min_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) & (2) \end{cases}$, ở đây

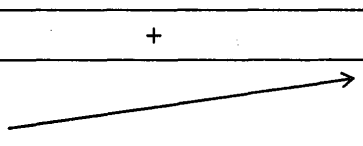
$$F_m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{m}{2}t + 1, \text{ với } -1 \leq t \leq 1.$$

Ta có $F'_m(t) = -t + \frac{m}{2}.$

Có ba khả năng sau:

1. Nếu $m \geq 2$, khi đó $\frac{m}{2} \geq 1$ và ta có bảng biến thiên sau

t	-1		1	$\frac{m}{2}$
$F'_m(t)$		+		0
$F_m(t)$				-



Từ đó suy ra $\max_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = F_m(1) = \frac{m+1}{2},$

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = F_m(-1) = \frac{1-m}{2}.$$

2. Nếu $m \leq -2$, khi đó $\frac{m}{2} \leq -1$ và có bảng biến thiên sau

t	$\frac{m}{2}$	-1		1
$F'_m(t)$	0		-	
$F_m(t)$				

Lúc đó ta có $\max_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = F_m(-1) = \frac{1-m}{2};$

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = F_m(1) = \frac{1+m}{2}.$$

3. Nếu $-2 < m < 2 \Rightarrow -1 < \frac{m}{2} < 1$, và có bảng biến thiên sau

t	-1	$\frac{m}{2}$		1
$F'_m(t)$		+	0	-
$F_m(t)$				

Lúc này $\max_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = F\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2+8}{8},$

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = \min\{F(-1);$$

$$F(1)\} = \min\left\{\frac{1-m}{2}; \frac{1+m}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{1-m}{2}, & \text{nếu } 0 \leq m < 2 \\ \frac{1+m}{2}, & \text{nếu } -2 < m < 0 \end{cases}.$$

Tóm lại ta có $\max_{-1 \leq m \leq 1} F_m(t) = \begin{cases} \frac{1-m}{2}, & \text{nếu } m \leq -2 \\ \frac{m^2+8}{8}, & \text{nếu } -2 < m < 2; \\ \frac{1+m}{2}, & \text{nếu } m \geq 2 \end{cases}$

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} F_m(t) = \begin{cases} \frac{1+m}{2}, & \text{nếu } m < 0 \\ \frac{1-m}{2}, & \text{nếu } m > 0 \end{cases}.$$

Bài 3.

1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x + c} + \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x + c}$.

Tìm a, b, c để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$F(x) = f(x) + m \sin 2x$, với $x \in \mathbb{R}$.

Biện luận theo m .

Hướng dẫn giải

1. Viết lại $f(x)$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a \frac{1 + \cos 2x}{2} + b \frac{1 - \cos 2x}{2} + c} + \sqrt{a \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \frac{1 + \cos 2x}{2} + c} \\ &= \sqrt{\frac{a+b+2c}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2x} + \sqrt{\frac{a+b+2c}{2} + \frac{b-a}{2} \cos 2x} \quad (1) \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{a-b}{2} \cos 2x + \frac{a+b+2c}{2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{b-a}{2} \cos 2x + \frac{a+b+2c}{2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{2} t + \frac{a+b+2c}{2} \geq 0 \quad \forall |t| \leq 1 \\ \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b+2c}{2} \geq 0 \quad \forall |t| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{|t| \leq 1} \left(\frac{a-b}{2} t + \frac{a+b+2c}{2} \right) \geq 0 \quad (2) \\ \min_{|t| \leq 1} \left(\frac{b-a}{2} t + \frac{a+b+2c}{2} \right) \geq 0 \quad (3) \end{cases}$$

Do $\frac{a+b+2c}{2}$ là hằng số khi t biến thiên nên

$$(2) (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b+2c}{2} + \min_{|t| \leq 1} \left(\frac{a-b}{2} t \right) \geq 0 \quad (4) \\ \frac{a+b+2c}{2} + \min_{|t| \leq 1} \left(\frac{b-a}{2} t \right) \geq 0 \quad (5) \end{cases}$$

- Nếu $a \geq b \Rightarrow \min_{|t| \leq 1} \left(\frac{a-b}{2} t \right) = \frac{a-b}{2} (-1) = \frac{b-a}{2}$

$$\min_{|t| \leq 1} \left(\frac{b-a}{2} t \right) = \frac{b-a}{2} (1) = \frac{b-a}{2}$$

$$\text{Khi đó (4) (5)} \Leftrightarrow \frac{a+b+2c}{2} + \frac{b-a}{2} \geq 0 \Leftrightarrow c+b \geq 0.$$

- Nếu $a \leq b$, hoàn toàn tương tự ta có

$$(4) (5) \Leftrightarrow \frac{a+b+2c}{2} + \frac{a-b}{2} \geq 0 \Leftrightarrow c+a \geq 0.$$

Tóm lại để $f(x)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ ta cần có

$$\begin{cases} c+b \geq 0, \text{ nếu } a \geq b \\ c+a \geq 0, \text{ nếu } b \leq a \end{cases} \Leftrightarrow c + \min(a; b) \geq 0 \quad (6).$$

Vậy (6) là điều kiện cần và đủ để $f(x)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$2. \text{ Đặt } g(x) = m \sin 2x, \text{ thì } F(x) = f(x) + g(x) \quad (7).$$

Ta có $|g(x)| \leq |m| \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq m & \forall x \in \mathbb{R} \text{ nếu } m \geq 0 \\ g(x) \leq -m & \forall x \in \mathbb{R} \text{ nếu } m \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi } m \geq 0 \text{ thì } \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = m \Leftrightarrow \sin 2x = 1. \quad (8)$$

$$\text{Khi } m \leq 0 \text{ thì } \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = -m \Leftrightarrow \sin 2x = -1. \quad (9)$$

$$\text{Do } f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \text{ nên } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{\max_{x \in \mathbb{R}} f^2(x)} \quad (10)$$

$$\text{Ta có } f^2(x) = (a+b+2c) + 2 \sqrt{\left(\frac{a+b+2c}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2} \cos^2 2x \quad (11)$$

Do thỏa mãn (6) nên $a+b+2c = (c+a) + (c+b) \geq 0$, từ đó từ (11) ta có $\forall x \in \mathbb{R}$, thì

$$\begin{cases} f^2(x) \leq (a+b+2c) + 2 \frac{a+b+2c}{2} = 2(a+b+2c) \\ f^2(x) = 2(a+b+2c) \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in \mathbb{R}} f^2(x) = 2(a+b+2c) \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2(a+b+2c)} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \quad (12)$$

Vì các hệ phương trình $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$ đều có nghiệm, nên suy

$$\text{ra } \max_{x \in \mathbb{R}} F(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \sqrt{2(a+b+2c)} + |m|.$$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f_m(x) = mx^2 + (m+1)x + m+2, \text{ trên miền } D = \{x : 1 \leq x \leq 2\}.$$

Hướng dẫn giải

- Khi $m = 0$, ta có $f_0(x) = x + 2$

Ta thấy $f'_0(x) = 1 > 0$, nên $f_0(x)$ là hàm đồng biến khi $x \in [1; 2]$

$$\Rightarrow \min_{x \in D} f_0(x) = f_0(1) = 3; \max_{x \in D} f_0(x) = f_0(2) = 4.$$

- Khi $m > 0$. Từ $f'_m(x) = 2mx + m + 1$, và do $m > 0$, nên $-\frac{m+1}{2m} < 0$, nên có

bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{m+1}{2m}$	1	2
$f'_m(x)$	0		
$f_m(x)$			

+ ↗

Từ đó ta có $\min_{x \in D} f_m(x) = f_m(1) = 3m + 3; \max_{x \in D} f_m(x) = f_m(2) = 7m + 4.$

- Khi $m < 0$. Từ $f'_m(x) = 2mx + m + 1$, và $f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{m+1}{2m}$ suy ra xét

ba khả năng sau:

- a. Nếu $-\frac{m+1}{2m} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{3}$. Lúc này ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{m+1}{2m}$	1	2
$f'_m(x)$	0		
$f_m(x)$			

- ↘

Từ đó ta có $\min_{x \in D} f_m(x) = f_m(2) = 7m + 4; \max_{x \in D} f_m(x) = f_m(1) = 3m + 3.$

- b. Nếu $-\frac{m+1}{2m} \geq 2 \Leftrightarrow 0 > m \geq -\frac{1}{5}$. Lúc này ta có bảng biến thiên

x	1	2	$-\frac{m+1}{2m}$
$f'_m(x)$			0
$f_m(x)$			

+ ↗

Từ đó ta có $\min_{x \in D} f_m(x) = f_m(1) = 3m + 3$; $\max_{x \in D} f_m(x) = f_m(2) = 7m + 4$.

c. Nếu $1 < -\frac{m+1}{2m} < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{5}$. Lúc này ta có bảng biến thiên

x	1	$-\frac{m+1}{2m}$	2
$f'_m(x)$	+	0	-
$f_m(x)$			

Từ đó suy ra $\max_{x \in D} f_m(x) = f_m\left(-\frac{m+1}{2m}\right) = \frac{3m^2 + 6m - 1}{4m}$,

$$\min_{x \in D} f_m(x) = \min\{f_m(1); f_m(2)\}$$

$$= \min\{3m + 3; 7m + 4\} = \begin{cases} 3m + 3 & \text{nếu } -\frac{1}{4} \leq m < -\frac{1}{5} \\ 7m + 4 & \text{nếu } -\frac{1}{3} \leq m < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Tổng hợp lại ta có :

$$\min_{x \in D} f_m(x) = \begin{cases} 3m + 3, & \text{nếu } m \geq -\frac{1}{4} \\ 7m + 4, & \text{nếu } m \leq -\frac{1}{4} \end{cases} ; \max_{x \in D} f_m(x) = \begin{cases} 7m + 4, & \text{nếu } m \geq -\frac{1}{4} \\ 3m + 3, & \text{nếu } m \leq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

B. Các ứng dụng của việc khảo sát giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số phụ thuộc tham số

Bài 1.

Tìm a, b để bất phương trình sau: $\cos 4x + a \cos 2x + b \sin 2x \geq -1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Vì bất phương trình đúng với mọi x, nên nói riêng nó phải đúng khi

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ và } x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó ta có hệ: } \begin{cases} -1 + b \geq -1 \\ -1 - b \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0.$$

Vậy $b = 0$, và bài toán trở thành: Tìm a để bất phương trình sau:

$$\cos 4x + a \cos 2x \geq -1 \quad (1) \text{ đúng với mọi } x.$$

Đặt $t = \cos 2x$, khi đó $-1 \leq t \leq 1$.

Lúc này (1) có dạng $2t^2 - 1 + at \geq -1$ hay $2t^2 + at \geq 0$

Bài toán trở thành: Tìm a để bất phương trình: $f_a(t) = 2t^2 + at \geq 0$ đúng với mọi $-1 \leq t \leq 1$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\min_{-1 \leq t \leq 1} f_a(t) \geq 0$. (2)

Ta có: $f'_a(t) = 4t + a$ và $f'_a(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{a}{4}$.

Từ đó xét ba khả năng sau:

1. Nếu $-\frac{a}{4} > 1$ (tức là khi $a < -4$). Lúc này có bảng biến thiên

t	-1		1	$-\frac{a}{4}$
$f'_a(t)$		-		0
$f_a(t)$				



Ta có: $\min_{-1 \leq t \leq 1} f_a(t) = f_a(1) = 2 + a$

Khi đó từ (2) suy ra $a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -2$.

Loại khả năng này vì không thỏa mãn $a < -4$.

2. Nếu $-\frac{a}{4} < -1$ (tức là khi $a > 4$). Lúc này có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{a}{4}$	-1		1
$f'_a(t)$	0		+	
$f_a(t)$				



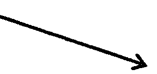
Từ đó: $\min_{-1 \leq t \leq 1} f_a(t) = f_a(-1) = 2 - a$

Bây giờ từ (2) suy ra $2 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 2$.

Loại khả năng này vì không thỏa mãn $a > 4$.

3. Nếu $-1 \leq -\frac{a}{4} \leq 1$ (tức là khi $-4 \leq a \leq 4$). Bây giờ có bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{a}{4}$		1
$f'_a(t)$		-	0	+	
$f_a(t)$					




$$\text{Từ đó: } \min_{-1 \leq t \leq 1} f_a(t) = f_a\left(-\frac{a}{4}\right) = \frac{-a^2}{8}.$$

$$\text{Từ (2) ta có: } \frac{-a^2}{8} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Tóm lại $a = b = 0$ là các giá trị cần tìm của tham số a và b .

Bài 2. Tìm m để phương trình sau:

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (m^2 + 4m + 3)(m^2 + 4m + 6) + 7 + \sin 3x \text{ có nghiệm.}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } f(x) = (\cos 4x - \cos 2x)^2, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Khi đó rõ ràng do } |\cos 4x - \cos 2x| \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Và } f(x) = 4 \Leftrightarrow |\cos 4x - \cos 2x| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1.$$

(Chú ý: khi $\cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 4x = 1$; còn khi $\cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 4x = 1$)

$$\text{Từ đó suy ra: } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 4 \Leftrightarrow \cos 2x = -1. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } g_m(x) &= (m^2 + 4m + 3)(m^2 + 4m + 6) + 7 + \sin 3x, x \in \mathbb{R} \\ &= [(m+2)^2 - 1][(m+2)^2 + 2] + 7 + \sin 3x \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý rằng: } A_m = [(m+2)^2 - 1][(m+2)^2 + 2] = (m+2)^4 + (m+2)^2 - 2.$$

Do đó: $-A_m = -2$ khi $m = -2$ (và $A_m > -2$ khi $m \neq -2$)

$$\text{Lại có: } 7 + \sin 3x \geq 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$7 + \sin 3x \geq 6 \Leftrightarrow \sin 3x = -1.$$

Như vậy ta đi đến:

$$\bullet \text{ Khi } m = -2, \text{ thì } \min_{x \in \mathbb{R}} g_m(x) = 4. \quad (2)$$

$$\bullet \text{ Khi } m \neq -2, \text{ thì } \min_{x \in \mathbb{R}} g_m(x) > 4. \quad (3)$$

$$\text{Phương trình đã cho có dạng: } f(x) = g_m(x) \quad (4)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra:

a. Nếu $m \neq -2$, thì (4) vô nghiệm

$$\text{b. Nếu } m = -2, \text{ thì } (4) \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} g_{-2}(x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 & (5) \\ \sin 3x = -1 & (6) \end{cases}$$

Rõ ràng hệ (5) (6) có nghiệm (thí dụ $x = \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn (5) (6))

Tóm lại phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m = -2$.

Bài 3. Tìm m để phương trình sau:

$$\frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = x^2 + 2(2m - 3)x + 5m^2 - 16m + 20 \text{ có nghiệm.}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}.$$

Rõ ràng $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ (do $3x^2 + 2x + 1 > 0 \forall x$)

Gọi α là một giá trị tùy ý của $f(x)$. Khi đó phương trình sau đây (ẩn x)

$$\frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \alpha \quad (1) \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow 20x^2 + 10x + 3 = \alpha(3x^2 + 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (20 - 3\alpha)x^2 + (10 - 2\alpha)x + 3 - \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\bullet \text{ Rõ ràng khi } \alpha = \frac{20}{3} \text{ thì } 5 - \alpha \neq 0 \Rightarrow (2) \text{ có nghiệm khi } \alpha = \frac{20}{3}.$$

$$\bullet \text{ Khi } \alpha \neq \frac{20}{3} \text{ thì } (2) \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 19\alpha + 35 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq \alpha \leq 7 \left(\alpha \neq \frac{20}{3} \right)$$

$$\text{Vậy } (2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq \alpha \leq 7.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 7 \Leftrightarrow -x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2. \quad (3)$$

$$\text{Đặt } g_m(x) = x^2 + 2(2m - 3)x + 5m^2 - 16m + 20$$

$$\Rightarrow g'_m(x) = 2x + 2(2m - 3) \text{ và } g'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 - 2m$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} g_m(x) = g_m(3 - 2m) = m^2 - 4m + 11 = (m - 2)^2 + 7.$$

Như vậy ta có:

$$\text{a) Nếu } m = 2, \text{ thì } \min_{x \in \mathbb{R}} g_m(x) = 7 \Leftrightarrow x = -1. \quad (4)$$

$$\text{b) Nếu } m \neq 2, \text{ thì } \min_{x \in \mathbb{R}} g_m(x) > 7. \quad (5)$$

Từ (4) (5) suy ra:

a. Nếu $m \neq 2$, thì $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) < \min_{x \in \mathbb{R}} g_m(x) \Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

b. Nếu $m = 2$, thì $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} g_2(x) = 7$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} f(x) = 7 \\ g_2(x) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases} \quad (*)$$

Do hệ (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình đã cho cũng vô nghiệm khi $m = 2$
Tóm lại với mọi m , phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 4. Tìm m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m+2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Do đó bài toán đã trở thành:

Tìm m để bất phương trình: $f_m(x) = mx^2 + (m+1)x + m+2 \geq 0$ (1) đúng với mọi $1 \leq x \leq 2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi: $\min_{1 \leq x \leq 2} f_m(x) \geq 0$. (2)

Theo bài 4, phần A, §2 chương 8 ta có:

$$\min_{1 \leq x \leq 2} f_m(x) = \begin{cases} 3m+3, & \text{nếu } m \geq -\frac{1}{4} \\ 7m+4, & \text{nếu } m \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) (3) ta có: } \begin{cases} m \geq -\frac{1}{4} \\ 3m+3 \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{4} \\ 7m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{7} \leq m \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}.$$

Vậy $m \geq -\frac{4}{7}$ là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bài 5. Tìm m để bất phương trình sau:

$$x^2 + 2|x-m| + m^2 + m - 1 \leq 0 \text{ có nghiệm.}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } f_m(x) = x^2 + 2|x-m| + m^2 + m - 1.$$

Khi đó bất phương trình đã cho có dạng $f_m(x) \leq 0$. (1)

Từ đó suy ra (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \leq 0$. (2)

Bài toán trở thành: Biện luận theo m giá trị nhỏ nhất của hàm số $f_m(x)$.

Lập bảng sau đây:

x	m	
$f_m(x)$	$x^2 - 2x + m^2 + 3m - 1$	$x^2 - 2x + m^2 - m - 1$
$f'_m(x)$	$2x - 2$	$2x + 2$

Từ bảng biến thiên, xét các khả năng sau đây:

1. Nếu $m \geq 1$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	1	m
$f'_m(x)$	- 0 +	+
$f_m(x)$		

Lúc này ta có: $\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = f_m(1) = m^2 + 3m - 2$.

Rõ ràng hệ: $\begin{cases} m \geq 1 \\ m^2 + 3m - 2 \leq 0 \end{cases}$ vô nghiệm, nên loại trường hợp này.

2. Nếu $m \leq -1$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

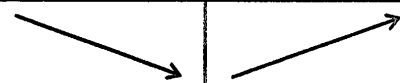
x	m			-1	1
$f'_m(x)$	-		-	0	+
$f_m(x)$					

Lúc này ta có: $\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = f_m(-1) = m^2 - m - 2$

Từ đó đi đến xét hệ sau:

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ m^2 - m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -1 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

3. Nếu $-1 < m < 1$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	m	1
$f'_m(x)$		-	+
$f_m(x)$			

Lúc này ta có: $\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = f_m(m) = 2m^2 + m - 1$.

Từ đó đi đến xét hệ sau $\begin{cases} -1 < m < 1 \\ 2m^2 + m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{2}.$

Kết hợp lại suy ra các giá trị cần tìm của tham số m là: $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}.$

Bài 6. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \\ x^2 - mx + m \leq 0 \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Viết lại hệ đã cho dưới dạng sau: $\begin{cases} f_m(x) = x^2 - mx + m \leq 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 3 & (2) \end{cases}$

Từ đó suy ra hệ (1) (2) có nghiệm khi và chỉ khi: $\min_{\frac{1}{2} \leq x \leq 3} f_m(x) \leq 0$ (3)

Ta có: $f'_m(x) = 2x - m$ và $f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

Từ đó suy ra xét các khả năng sau:

1. Nếu $\frac{m}{2} > 3$ (tức là nếu $m > 6$). Lúc đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{m}{2}$
$f'_m(x)$		-	
$f_m(x)$		-	0

(Note: In the original image, there is a '+' sign after the 0 in the $f_m(x)$ row, and an arrow points from the value at $x=3$ to the minimum value calculation below.)

Lúc này ta có: $\min_{\frac{1}{2} \leq x \leq 3} f_m(x) = f_m(3) = 9 - 2m$

Từ đó dẫn đến việc xét hệ sau: $\begin{cases} m > 6 \\ 9 - 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m \geq \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$

2. Nếu $\frac{m}{2} < \frac{1}{2}$ (tức là nếu $m < 1$). Lúc đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{m}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$f'_m(x)$	-		
$f_m(x)$	-	+	+

(Note: In the original image, there is a '+' sign after the value at $x=3$ in the $f_m(x)$ row, and an arrow points from the value at $x=\frac{1}{2}$ to the minimum value calculation below.)

Lúc này ta có: $\min_{\frac{1}{2} \leq x \leq 3} f_m(x) = f_m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}$.

Từ đó xét hệ sau: $\begin{cases} m < 1 \\ \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$.

3. Nếu $\frac{1}{2} < \frac{m}{2} < 3$ (tức là $1 < m < 6$). Lúc đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{m}{2}$	3
$f'_m(x)$	—	0	+
$f_m(x)$	↘	↗	↘

Lúc này ta có: $\min_{\frac{1}{2} \leq x \leq 3} f_m(x) = f_m\left(\frac{m}{2}\right) = m - \frac{m^2}{4}$.

Như đó dẫn đến xét hệ sau: $\begin{cases} 1 < m < 6 \\ m - \frac{m^2}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 6$.

Kết hợp lại suy ra: $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 4$ là các giá trị cần tìm của tham số m

Nhận xét: Hãy so sánh cách giải này với cách giải trình bày trong bài 6 phần B, §3 chương 7 cuốn sách này. Các bạn thấy cách nào thích hợp với bạn hơn?

Bài 7. Cho bất phương trình: $\sin 3x + m \sin 2x + 3 \sin x \geq 0$.

Tìm m để bất phương trình đúng với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Đưa bất phương trình đã cho về dạng tương đương sau:

$$\begin{aligned} 3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2m \sin x \cos x + 3 \sin x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x (-2 \sin^2 x + m \cos x + 3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x (2 \cos^2 x + m \cos x + 1) &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Khi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thì $\sin x \geq 0$.

Vậy trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thì (1) $\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + m \cos x + 1 \geq 0$. (2)

Đặt $t = \cos x$. Khi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thì $t \in [0; 1]$.

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm m để bất phương trình: $f_m(t) = 2t^2 + mt + 1 \geq 0$ đúng với mọi $t \in [0; 1]$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi: $\min_{0 \leq t \leq 1} f_m(t) \geq 0$. (3)

Ta có: $f'_m(t) = 4t + m \Rightarrow f'_m(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{m}{4}$. Từ đó xét các khả năng sau:

1. Nếu $-\frac{m}{4} > 1$ (tức là khi $m < -4$). Lúc này ta có bảng biến thiên sau:

t	0	1	$-\frac{m}{4}$
$f'_m(t)$		-	- 0 +
$f_m(t)$			

Như vậy: $\min_{0 \leq t \leq 1} f_m(t) = f_m(1) = m + 3$.

Ta có: $\begin{cases} m < -4 \\ m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm. Từ đó loại khả năng này.

2. Nếu $-\frac{m}{4} < 0$ (tức là khi $m > 0$). Lúc này ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{m}{4}$	0	1
$f'_m(t)$	0		+
$f_m(t)$			

Từ đó: $\min_{0 \leq t \leq 1} f_m(t) = f_m(0) = 1 > 0$

Từ đó suy ra $m > 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài ra.

3. Nếu $0 \leq -\frac{m}{4} \leq 1$ (tức là khi $-4 \leq m \leq 0$).

Lúc này ta có bảng biến thiên sau:

t	0	$-\frac{m}{4}$	1
$f'_m(t)$		- 0 +	
$f_m(t)$			

Từ đó ta có: $\min_{0 \leq t \leq 1} f_m(t) = f_m\left(-\frac{m}{4}\right) = -\frac{m^2}{8} + 1$

Như thế dẫn đến việc xét hệ sau:

$$\begin{cases} -4 \leq m \leq 0 \\ -\frac{m^2}{8} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 0 \\ -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq m \leq 0$$

Kết hợp lại suy ra: $m \geq -2\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm của m .

Nhận xét: Cách giải trên dựa vào phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số phụ thuộc tham số m .

Các bạn hãy so sánh cách giải trên với cách giải bài này bằng phương pháp sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số phân thức (không có tham số) đã trình bày trong bài 5 phần B, §3 chương 7 cuốn sách này.

Và tính hiệu quả của từng phương pháp, xin dành quyền bình luận cho các bạn.

Bài 8. Cho hàm số: $f_m(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Xét trên miền $-2 \leq x \leq 0$.

Tìm m để $\min_{-2 \leq x \leq 0} f_m(x) = 2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'_m(x) = 8x - 4m \Rightarrow f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$.

Từ đó dẫn đến các khả năng sau đây:

1. Nếu $\frac{m}{2} > 0$ ($\Leftrightarrow m > 0$). Lúc này ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	0	$\frac{m}{2}$
$f'_m(x)$		$-$	
$f_m(x)$			0

Vậy: $\min_{-2 \leq x \leq 0} f_m(x) = f_m(0) = m^2 - 2m$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m^2 - 2m = 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 2 = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{3} \\ m = 1 - \sqrt{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt{3}$$

2. Nếu $\frac{m}{2} < -2$ ($\Leftrightarrow m < -4$).

Lúc này ta có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{m}{2}$	-2	0
$f'_m(x)$	- 0		+
$f_m(x)$			

Từ đó: $\min_{-2 \leq x \leq 0} f_m(x) = f_m(-2) = m^2 - 6m + 16.$

Khi đó hệ: $\begin{cases} m^2 - 16m + 16 = 2 \\ m < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 14 = 0 \\ m < -4 \end{cases}$ vô nghiệm.

3. Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0$ ($\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$). Lúc này ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	$\frac{m}{2}$	0
$f'_m(x)$		- 0 +	
$f_m(x)$			

Vì thế: $\min_{-2 \leq x \leq 0} f_m(x) = f_m\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$. Như vậy: $\begin{cases} -2m = 2 \\ -4 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Tóm lại: $m = 1 + \sqrt{3}$ và $m = -1$ là hai giá trị cần tìm của tham số m.

Bài 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = m \\ x + y = 3m \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{y+2}$, thì $u \geq 0$, $v \geq 0 \Rightarrow x + 1 = u^2$ và $y + 2 = v^2$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm m để hệ: $\begin{cases} u + v = m & (1) \\ u^2 + v^2 = 3m & (2) \\ u \geq 0; v \geq 0 & (3) \end{cases}$ có nghiệm.

Từ (3) và (1) suy ra $m \geq 0$.

Từ (1) có: $v = m - u$. Do $v \geq 0 \Rightarrow 0 \leq u \leq m$. Thay $v = m - u$ vào (2) ta có:

$2u^2 - 2mu + m^2 - 3m - 3 = 0$. Từ đó bài toán đã cho lại có dạng sau: Tìm

m để hệ sau:

$\begin{cases} f_m(u) = 2u^2 - 2mu + m^2 - 3m - 3 = 0 & (4) \\ 0 \leq u \leq m & (5) \end{cases}$ có nghiệm.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\min_{0 \leq u \leq m} f_m(u) \leq 0 \leq \max_{0 \leq u \leq m} f_m(u)$ (6)

Ta có: $f'_m(u) = 4u - 2m \Rightarrow f'_m(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{m}{2}$.

Do $m \geq 0$, nên ta có: $0 \leq \frac{m}{2} \leq m$, vậy có bảng biến thiên sau:

u	0	$\frac{m}{2}$	m
$f'_m(u)$		- 0 +	
$f_m(u)$			

Từ đó suy ra: $\min_{0 \leq u \leq m} f_m(u) = f_m\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2 - 6m - 6}{2}$;

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq u \leq m} f_m(u) &= \max \{f_m(0); f_m(m)\} = \max \{m^2 - 3m - 3; m^2 - 3m - 3\} \\ &= m^2 - 3m - 3. \end{aligned}$$

Bây giờ kết hợp với (6), ta có:
$$\begin{cases} \frac{m^2 - 6m - 6}{2} \leq 0 \\ m^2 - 3m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \leq m \leq 3 + \sqrt{15}.$$

Đó là các giá trị cần tìm của m.

Bài 10. Cho bất phương trình: $m^2 + 2m(\sin x + \cos x) + 1 \geq 0$.

Tìm m để bất phương trình đúng với mọi x.

Hướng dẫn giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$f_m(x) = 2m(\sin x + \cos x) \geq -1 - m^2 \quad (1)$$

Từ đó suy ra (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \geq -1 - m^2 \quad (2)$$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $m = 0$, thì $f_0(x) = 0 \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f_0(x) = 0$. Lúc đó (2) có dạng $0 \geq -1$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

2. Nếu $m > 0$, thì $\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = -2\sqrt{2}m$ (do $\sin x + \cos x \leq -\sqrt{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Từ đó thay vào (2) có:

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}m \geq -1 - m^2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2\sqrt{2}m + 1 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \sqrt{2} - 1 \\ m \geq \sqrt{2} + 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq \sqrt{2} - 1 \\ m \geq \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

3. Nếu $m < 0$, thì do $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) = 2\sqrt{2}m.$$

Thay vào (2) và có hệ:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}m \geq -1 - m^2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2\sqrt{2}m + 1 \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{2} - 1 \\ m \geq -\sqrt{2} + 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{2} - 1 \\ 1 - \sqrt{2} \leq m < 0 \end{cases}$$

Kết hợp lại ta có:
$$\begin{cases} m \geq \sqrt{2} + 1 \\ m \leq -\sqrt{2} - 1 \\ 1 - \sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \geq \sqrt{2} + 1 \\ |m| \leq \sqrt{2} - 1 \end{cases}.$$

Đó là các giá trị cần tìm của tham số m .

Bài 11. Cho hàm số $f_m(x) = |-2x^2 + x + m|$ với $x \in [-1; 1]$.

1. Tìm $\max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x)$ và biện luận theo m .
2. Tìm m để $\max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x)$ đạt giá trị bé nhất.

Hướng dẫn giải

1. Đặt $g_m(x) = -2x^2 + x + m$ với $-1 \leq x \leq 1$.

Ta có: $g'_m(x) = -4x + 1 \Rightarrow g'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	-1	$\frac{1}{4}$	1
$g'_m(x)$	$\diagup$	0	$\diagdown$
$g_m(x)$	$\diagup$	$\nearrow$	$\searrow$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x) &= \max \left\{ |g_m(-1)|; \left| f_m\left(\frac{1}{4}\right) \right|; |g_m(1)| \right\} = \max \left\{ |m - 3|; |m - 1|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\} \\ &= \max \left\{ |m - 3|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (*)$$

Xét các khả năng sau:

- a. Nếu $m \geq 3$, thì $m - 3 \geq 0$ và $m + \frac{1}{8} > 0$, do đó:

$$\max \left\{ |m-3|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\} = \max \left\{ m-3; m + \frac{1}{8} \right\} = m + \frac{1}{8}.$$

b. Nếu $m \leq -\frac{1}{8}$, thì $m-3 < 0$ và $m + \frac{1}{8} \leq 0$, do đó:

$$\max \left\{ |m-3|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\} = \max \left\{ 3-m; -m - \frac{1}{8} \right\} = 3-m.$$

c. Nếu $-\frac{1}{8} < m < 3$, thì $m-3 < 0$ và $m + \frac{1}{8} > 0$, do đó:

$$\max \left\{ |m-3|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\} = \max \left\{ 3-m; m + \frac{1}{8} \right\} = \begin{cases} m + \frac{1}{8} & \text{nếu } \frac{23}{16} \leq m < 3 \\ 3-m & \text{nếu } -\frac{1}{8} < m \leq \frac{23}{16} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp lại suy ra: } \max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x) = \begin{cases} 3-m, & \text{nếu } m \leq \frac{23}{16} \\ m + \frac{1}{8}, & \text{nếu } m > \frac{23}{16}. \end{cases}$$

2. Từ phần 1/ suy ra bảng biến thiên sau (theo m)

m	$\frac{23}{16}$	
$\max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x)$	$3-m$	$m + \frac{1}{8}$
$\max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x)$		

$$\text{Vì thế } \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} f_m(x) \right\} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow m = \frac{23}{16}.$$

Nhận xét: Ta chứng minh (*) như sau:

Từ bảng biến thiên suy ra: $m + \frac{1}{8} > m-1 > m-3$.

Từ đó suy ra:

a. Nếu $m + \frac{1}{8} \leq 0 \Rightarrow m-1 > m-3 > 0 \Rightarrow |m-1| < |m-3|$. (1)

b. Nếu $m + \frac{1}{8} > 0$ thì

• Nếu $m + \frac{1}{8} > m-1 \geq 0 \Rightarrow \left| m + \frac{1}{8} \right| > |m-1|$ (2)

• Nếu $m-1 < 0 \Rightarrow |m-3| > |m-1|$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\max \left\{ |m-3|; |m-1|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\} = \max \left\{ |m-3|; \left| m + \frac{1}{8} \right| \right\}$.

Vậy (*) được chứng minh.

Bài 12. Tìm m để bất phương trình sau: $m^2x + m(x+1) - 2(x-1) \geq 0$ đúng với mọi $x \in [-2; 1]$.

Hướng dẫn giải

Viết lại bất phương trình đã cho dưới dạng tương đương sau:

$$f_m(x) = (m^2 + m - 2)x + m \geq -2 \Leftrightarrow f_m(x) \geq -2 \quad (1)$$

Để (1) đúng với mọi $x \in [-2; 1]$ điều kiện cần và đủ là:

$$\min_{-2 \leq x \leq 1} f_m(x) \geq -2. \quad (2)$$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $m^2 + m - 2 > 0 \Rightarrow f'_m(x) = m^2 + m - 2 > 0$, nên ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	1
$f'_m(x)$	/	/
$f_m(x)$	/	/

+ ↗

Từ đó ta có: $\min_{-2 \leq x \leq 1} f_m(x) = f_m(-2) = -2m^2 - 2m + 4 + m$.

$$\text{Vậy (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0 \\ -2m^2 - m + 4 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 > 0 \\ 2m^2 + m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}.$$

2. Nếu $m^2 + m - 2 < 0 \Rightarrow f'_m(x) = m^2 + m - 2 < 0$, nên ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	1
$f'_m(x)$	/	/
$f_m(x)$	/	/

- ↘

Từ đó ta có: $\min_{-2 \leq x \leq 1} f_m(x) = f_m(1) = m^2 + 2m - 2$.

$$\text{Vậy (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 < 0 \\ m^2 + 2m - 2 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 1.$$

3. Nếu $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Lúc này $f_1(x) = 1$; $f_{-2}(x) = -2$

Vậy (2) thỏa mãn khi $m = 1$ và $m = -2$

Kết hợp lại suy ra $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$ và $m = -2$ là các giá trị cần tìm của tham số m .

Nhận xét:

a. Cách giải trên dựa vào phương pháp tìm giá trị bé nhất của hàm số phụ thuộc tham số $f_m(x) = (m^2 + m - 2)x + m$

b. Xét cách giải sau đây:

Vì $f_m(x)$ hoặc là hàm hằng số (khi $m^2 + m - 2 = 0$), hoặc là hàm bậc nhất nên luôn luôn đồng biến (khi $m^2 + m - 2 > 0$), hoặc luôn luôn nghịch biến (khi $m^2 + m - 2 < 0$). Vì vậy $f_m(x) \geq -2 \forall x \in [-2; 1]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f_m(-2) \geq -2 \\ f_m(1) \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 4 \geq -2 \\ m^2 + 2m - 2 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 6 \leq 0 \\ m^2 + 2m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq -2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m = -2. \end{cases}$$

Ta thu lại kết quả trên. Rõ ràng cách giải này gọn gàng hơn!

Thí dụ này chứng tỏ rằng không phải bao giờ việc sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số để giải toán cũng đem lại hiệu quả!.

Bài 13. Xét hàm số $f_m(x) = \cos 2x + m \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng với mọi m ta có:

$$\left(\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x)\right)^2 + \left(\max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x)\right)^2 \geq 2.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f_m(0) = 1 + m \cos \frac{\pi}{4}, \quad (1)$$

$$f_m(\pi) = 1 + m \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - m \cos \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra: } f_m(0) + f_m(\pi) = 2. \quad (3)$$

$$\text{Rõ ràng } \begin{cases} f_m(0) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) & (4) \\ f_m(\pi) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) & (5) \end{cases}$$

Từ (3) (4) (5) suy ra:

$$2 = f_m(0) + f_m(\pi) \leq 2 \max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \Rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \geq 1 \Rightarrow \left(\max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \right)^2 \geq 1 \quad (6)$$

Lại có: $f_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -1 - m \sin \frac{\pi}{4},$

$$f_m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + m \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -1 + m \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_m\left(\frac{\pi}{2}\right) + f_m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2. \quad (7)$$

Rõ ràng: $f_m\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x), \quad (8)$

$$f_m\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq \min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x). \quad (9)$$

Từ (7) (8) (9) suy ra: $\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \leq -1 \Rightarrow \left(\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \right)^2 \geq 1. \quad (10)$

Cộng từng vế (6) (10) đi đến: $\left(\min_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \right)^2 + \left(\max_{x \in \mathbb{R}} f_m(x) \right)^2 \geq 2.$

Đó là điều phải chứng minh.

§3. GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT TRONG SỐ HỌC, HÌNH HỌC, LƯỢNG GIÁC

Cuốn sách này dành để trình bày các bài toán giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường gặp trong đại số và giải tích.

Các bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong các lĩnh vực khác như trong số học, hình học, lượng giác sẽ được chúng tôi trình bày trong một cuốn chuyên khảo khác. Tuy nhiên trong mục này, chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một số bài toán liên quan đến việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong những lĩnh vực này để các bạn thấy được tính đa dạng của lớp bài toán này.

A. Vài bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong số học

Bài 1. Cho $P = 5|x| - 3|y|$, ở đây x, y thuộc tập hợp D được xác định như sau:

$$D = \{(x; y): x, y \in \mathbb{Z} \text{ và } 4x + 5y = 7\}$$

(tức là D là tập hợp các nghiệm nguyên của phương trình $4x + 5y = 7$)

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức P khi $(x; y) \in D$.

Hướng dẫn giải

Nếu $(x; y) \in D$ thì chắc chắn $x \neq 0; y \neq 0$. Thật vậy nếu trái lại giả sử chẳng hạn $x = 0 \Rightarrow 5y = 7$. Đó là điều vô lí vì $y \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác nếu $(x; y) \in D$ thì x và y trái dấu. Thật vậy nếu x và y cùng dấu, chẳng hạn cùng dương thì do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow 4x + 5y \geq 9$. Đó là điều vô lí.

Vì lẽ đó $D = D_1 \cup D_2$, trong đó:

$$D_1 = \{(x; y): x > 0, y < 0; x, y \in \mathbb{Z} \text{ và } 4x + 5y = 7\},$$

$$D_2 = \{(x; y): x < 0, y > 0; x, y \in \mathbb{Z} \text{ và } 4x + 5y = 7\}.$$

Theo nguyên lí phân rã, ta có: $\min_{(x;y) \in D} P = \min \left\{ \min_{(x;y) \in D_1} P; \min_{(x;y) \in D_2} P \right\}$. (1)

Khi $(x; y) \in D_1$ thì $P = 5x + 3y$. (2)

$$\text{Từ } 4x + 5y = 7 \Rightarrow x = \frac{7-5y}{4} = 2 - y + \frac{1+y}{4}.$$

$$\text{Do } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1+y}{4} = t, \text{ với } t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} y = 4t - 1 \\ x = 3 - 5t \end{cases} \quad (*)$$

Do $x > 0; y < 0$ nên suy ra:

$$\begin{cases} 3 - 5t > 0 \\ 4t - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow t < \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0; -1; -2; \dots \text{ (do } t \in \mathbb{Z})$$

Khi $x = 3 - 5t; y = 4t - 1$, ta có: $P = 5x + 3y = 12 - 13t$ (3)

Từ (3) và do $t = 0; -1; -2; \dots$, nên suy ra ứng với $t = 0$, ta có:

$$\min_{(x;y) \in D_1} P = 12. \quad (4)$$

Khi $(x; y) \in D_2$ thì $P = -5x - 3y$. (5)

Do $x < 0; y > 0$, từ (*) ta có:

$$\begin{cases} 3 - 5t < 0 \\ 4t - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow t > \frac{3}{5} \Rightarrow t = 1; 2; 3; \dots \text{ (do } t \in \mathbb{Z}).$$

Lúc này $P = 13t - 12$. (6)

Từ (6) và do $t = 1; 2; \dots$ suy ra ứng với $t = 1$, thì:

$$\min_{(x;y) \in D_2} P = 13.1 - 12 = 1. \quad (7)$$

Từ (1); (6); (7) đi đến:

$$\min_{(x;y) \in D} P = \min \{12; 1\} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 5.1 \\ y = 4.1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa nguyên lí phân rã trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và phép giải phương trình nghiệm nguyên trong số học!.

Bài 2. Cho m, n là số nguyên dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |12^m - 5^n|$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh rằng với mọi m, n là số nguyên dương thì $P \geq 7$. (1)
Thật vậy giả sử (1) không đúng, tức là tồn tại hai số nguyên dương m_0, n_0 sao cho $|12^{m_0} - 5^{n_0}| < 7$. (2)

Vì 12^{m_0} là số chẵn, còn 5^{n_0} là số tận cùng bằng 5, nên suy ra:

$$12^{m_0} - 5^{n_0} \text{ là số lẻ } \Rightarrow 12^{m_0} - 5^{n_0} \not\equiv 0 \pmod{2}.$$

$$\text{Do } 12^{m_0} \not\equiv 0 \pmod{5}, \text{ còn } 5^{n_0} \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 12^{m_0} - 5^{n_0} \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

$$\text{Lại thấy } 12^{m_0} \not\equiv 0 \pmod{3}, \text{ còn } 5^{n_0} \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 12^{m_0} - 5^{n_0} \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

$$\text{Kết hợp lại các điều trên, từ (2) suy ra: } |12^{m_0} - 5^{n_0}| = 1 \quad (3)$$

Từ (3) ta có:

$$\begin{cases} \text{hoặc là } 12^{m_0} - 5^{n_0} \text{ chia cho 13 thì dư 1} \\ \text{hoặc là } 12^{m_0} - 5^{n_0} \text{ chia cho 13 thì dư 12.} \end{cases}$$

$$\text{Rõ ràng ta có: } 12^{m_0} \equiv (-1)^{m_0} \pmod{13} \quad (4)$$

$$\text{Như vậy nếu } m_0 \text{ là số chẵn thì } 12^{m_0} \equiv 1 \pmod{13}, \text{ còn nếu } m_0 \text{ lẻ thì } 12^{m_0} \equiv 12 \pmod{13}$$

Mặt khác ta luôn luôn có thể biểu diễn:

$$n_0 = 4k_0 + z_0 \text{ với } k_0 \in \mathbb{Z} \text{ và } z_0 \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 5^{n_0} = 625^{k_0} \cdot 5^{z_0} \equiv 1^{k_0} \cdot 5^{z_0} \pmod{13} \quad (5)$$

Từ (5) ta có khi 5^{n_0} chia 13 thì số dư sẽ là 1, 5, 15 hoặc 8 (tương ứng với $z_0 = 0; 1; 2; \text{ hoặc } 3$).

Từ (4) (5) suy ra khi đem $12^{m_0} - 5^{n_0}$ chia cho 13 thì không thể dư 1 hoặc 12.

Điều này mâu thuẫn với (3). Vậy không thể có (2), tức là (1) đúng

Mặt khác nếu chọn $m = 1; n = 1$, thì $P = 7$.

Theo định nghĩa về giá trị lớn nhất suy ra: $\min P = 7$.

Bài 3. Xét tập hợp tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_k$ sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 100$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a_1 a_2 \dots a_k$.

Hướng dẫn giải

Trong các phân tích 100 ra tổng các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_k$ ta quan tâm đến cách chọn mà tích của các số nguyên dương là lớn nhất. Nếu có nhiều cách phân tích như vậy thì ta sẽ chọn cách phân tích có nhiều số hạng nhất.

Trước hết ta chứng minh rằng trong cách phân tích đã chọn như trên thì tích $a_1 a_2 \dots a_k$ chỉ gồm những thừa số nguyên tố 2 và 3, và không có quá 2 thừa số nguyên tố 2. Thật vậy:

- Trong cách phân tích đã chọn, không có số hạng 1 vì nếu có số hạng 1 thì ta lấy một số hạng a tùy ý khác, $a > 1$ (dĩ nhiên nó tồn tại). Lúc này ta thay hai số 1, a bằng số $1 + a$ và để ý rằng do $1 \cdot a < 1 + a$, nên sau khi thay tích $a_1 a_2 \dots a_k$ tăng lên. Điều này mâu thuẫn với tích đã cho là lớn nhất.
- Trong cách phân tích đã cho không có số hạng $b \geq 4$, vì ta có thể thay b bằng hai số hạng 2 và $b - 2$. Rõ ràng $2(b - 2) \geq 4$ (Thật vậy, vì $2(b - 2) \geq 4 \Leftrightarrow 2b - 4 = b \Leftrightarrow b \geq 4$). Vậy tổng chỉ chứa các số hạng 2 và 3.
- Giả sử tổng có nhiều hơn hai số hạng 2. Chú ý rằng nếu thay ba số 2 bằng hai số 3 thì $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, nhưng $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$, vậy tích $a_1 a_2 \dots a_k$ tăng lên, đó là điều vô lí. Do vậy thừa số 2 trong tích sẽ không vượt quá 2.

Với tính chất như vậy thì để đảm bảo $a_1 a_2 \dots a_k$ lớn nhất, ta cần phân tích

$$100 = \underbrace{3+3+\dots+3}_{33 \text{ số hạng}} + 2 \quad \text{hoặc} \quad 100 = \underbrace{3+3+\dots+3}_{32 \text{ số hạng}} + 2 + 2.$$

Do $3^{33} \cdot 2 < 3^{32} \cdot 2^2$ (vì $3 < 4$) suy ra $a_1 a_2 \dots a_k \leq 4 \cdot 3^{32}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $k = 34$; $a_1 = a_2 = \dots = a_{32} = 3$; $a_{33} = a_{34} = 2$.

Vậy $\max P = 4 \cdot 3^{32}$.

Bài 4. Xét tập hợp tất cả các cách chọn 30 số nguyên dương $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 2011. \text{ Xét đại lượng } P = x_1 x_2 \dots x_{30}.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P .

Hướng dẫn giải

Do vai trò bình đẳng giữa $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ ta có thể không giảm tổng quát mà giả sử rằng $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{30}$

1. Xét bài toán tìm min P .

Xét bộ số $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{30}})$ trong đó:

$$1 < \overline{x_1} \leq \overline{x_2} \leq \dots \leq \overline{x_{30}} \quad \text{và} \quad \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_{30}} = 2011$$

Khi đó ta có: $\overline{P} = \overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_{30}}$.

Bây giờ xét bộ số $(\overline{x_1} - 1, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{29}}, \overline{x_{30}} + 1)$.

Khi đó để ý rằng do $\overline{x_1} > 1 \Rightarrow \overline{x_1} \geq 2 \Rightarrow \overline{x_1} - 1 \geq 1$.

Mặt khác: $(\overline{x_1} - 1) + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_{29}} + (\overline{x_{30}} + 1) = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_{30}} = 2011$, nên bộ số mới này cũng thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ứng với bộ số này ta có:

$$\tilde{P} = (\overline{x_1} - 1) \overline{x_2} \dots \overline{x_{29}} (\overline{x_{30}} + 1) = \overline{x_2} \dots \overline{x_{29}} (\overline{x_{30}} - \overline{x_1} + 1).$$

$$\text{Do } \overline{x_i} > 0 \quad \forall i = 2, 29, \text{ và } \overline{x_1} \leq \overline{x_{30}} \Rightarrow \tilde{P} > \overline{P}. \quad (1)$$

(1) chứng tỏ rằng bộ số $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{30}})$ không làm cho tích P đạt giá trị nhỏ nhất. Vậy một điều kiện cần để P đạt giá trị nhỏ nhất là $x_1 = 1$.

Từ đó lập luận hoàn toàn tương tự suy ra $x_2 = x_3 = \dots = x_{29} = 1$ cũng là điều kiện cần để P đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Từ đó suy ra: } \min P = \underbrace{1.1 \dots 1}_{29 \text{ thừa số}} (2011 - 29) = 1982.$$

Vậy $\min P = 1982 \Leftrightarrow$ có 29 thừa số bằng 1, và một thừa số bằng 1982.

2. Xét bài toán tìm max P

$$\text{Xét bộ số } (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_{30}}) \text{ trong đó: } \begin{cases} \overline{x_1} \leq \overline{x_2} \leq \dots \leq \overline{x_{30}} \\ \overline{x_{30}} - \overline{x_1} \geq 2 \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_{30}} = 2011. \end{cases}$$

Ứng với bộ số này ta có: $\overline{P} = \overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_{30}}$. Bây giờ xét bộ số mới sau đây:

$$(\overline{x_1} + 1; \overline{x_2}; \dots; \overline{x_{29}}; \overline{x_{30}} - 1)$$

Chú ý rằng do $\overline{x_{30}} - \overline{x_1} \geq 2$ mà $\overline{x_1} \geq 1 \Rightarrow \overline{x_{30}} - \overline{x_1} \geq 1$

Mặt khác dễ thấy: $(\overline{x_1} + 1) + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_{29}} + (\overline{x_{30}} - 1) = \overline{x_1} + \dots + \overline{x_{30}} = 2011$, nên bộ số mới cũng thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ứng với bộ số này ta có:

$$\tilde{P} = (\overline{x_1} + 1) \overline{x_2} \dots \overline{x_{29}} (\overline{x_{30}} - 1)$$

$$\Rightarrow \tilde{P} - \overline{P} = \overline{x_2} \dots \overline{x_{29}} [(\overline{x_1} + 1)(\overline{x_{30}} - 1) - \overline{x_1} \overline{x_{30}}] = \overline{x_2} \dots \overline{x_{29}} (\overline{x_{30}} - \overline{x_1} - 1).$$

$$\text{Từ } \overline{x_{30}} - \overline{x_1} \geq 2 \Rightarrow \tilde{P} > \overline{P}$$

Vậy bất đẳng thức này chứng tỏ rằng bộ số $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{30}})$ chưa làm cho P đạt giá trị nhỏ nhất. Vì thế điều kiện cần để P đạt giá trị lớn nhất là $x_{30} - x_1 < 2$ hay

$$x_{30} - x_1 \leq 1 \Rightarrow x_{30} - x_1 \in \{0; 1\} \text{ tức là: } \begin{cases} \text{hoặc } x_{30} = x_1 \\ \text{hoặc } x_{30} = x_1 + 1 \end{cases}$$

Như thế điều kiện cần để P đạt giá trị lớn nhất là trong 30 số thì không được có hai số bất kì nào trong chúng lại chênh nhau quá 1.

Điều này có nghĩa là phải có t số bằng α và $30 - t$ số bằng $\alpha + 1$ ($1 \leq t \leq 30$) sao cho:

$$t\alpha + (30 - t)(\alpha + 1) = 2011 \Rightarrow 30\alpha + (30 - t) = 2011 (*)$$

Để thỏa mãn (*) có thể chọn $\alpha = 67, t = 29$ (vì $30.67 + 1 = 2011$)

Như vậy chọn dãy chẳng hạn 29 số bằng 67 vì một số bằng 68 thì:

$$P = 67^{29} \cdot 68.$$

Tóm lại ta có: $\max P = 67^{29} \cdot 68$

Kết hợp lại ta có: $\min P = 1982$ và $\max P = 67^{29} \cdot 68$.

Bài 5. Cho k là số nguyên dương ≥ 3 .

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y, z) = xyz$ trên miền

$D = \{(x, y, z) : x, y, z \text{ nguyên dương và } x + y + z = k\}$.

Hướng dẫn giải

Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z nên không giảm tổng quát có thể cho rằng $x \geq y \geq z$. Vì D là tập hữu hạn phần tử (x, y, z) nên dĩ nhiên hàm số $f(x, y, z) = xyz$ phải đạt giá trị lớn nhất trên D . Giả sử:

$$\max_{(x, y, z) \in D} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) = x_0 y_0 z_0. \quad (1)$$

(Chú ý ở đây $x_0 \geq y_0 \geq z_0$)

Ta sẽ chứng minh rằng: $x_0 - z_0 \leq 1$ (2)

Thật vậy, nếu trái lại ta có: $x_0 - z_0 > 1$.

Khi đó chỉ có thể xảy ra 3 trường hợp sau đây:

a. Nếu $x_0 = y_0 > z_0 + 1$. Vì $x_0 + y_0 + z_0 = k$ nên ta có: $x_0 + (y_0 - 1) + (z_0 + 1) = k$

Do $x_0 = y_0 > z_0 + 1$ và $z_0 > 0 \Rightarrow x_0, y_0 - 1, z_0 + 1$ cũng nguyên dương, tức là:

$$(x_0, y_0 - 1, z_0 + 1) \in D.$$

$$\text{Mặt khác: } f(x_0, y_0 - 1, z_0 + 1) = x_0(y_0 - 1)(z_0 + 1) = x_0 y_0 z_0 + x_0(y_0 - z_0 - 1).$$

$$\text{Do } x_0 = y_0 > z_0 + 1, \text{ nên từ trên suy ra: } f(x_0, y_0 - 1, z_0 + 1) > x_0 y_0 z_0 = f(x_0, y_0, z_0).$$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với (1).

Vậy trong trường hợp a. không thể xảy ra.

b. Nếu $x_0 > y_0 > z_0$.

Xét bộ ba nguyên dương $(x_0 - 1, y_0, z_0 + 1)$. Rõ ràng $(x_0 - 1, y_0, z_0 + 1) \in D$.

$$\text{Lại có: } f(x_0 - 1, y_0, z_0 + 1) = y_0(x_0 - 1)(z_0 + 1) = x_0 y_0 z_0 + y_0(x_0 - z_0 - 1)$$

Vì $x_0 - z_0 - 1 > 0$ (do $x_0 > z_0 + 1$) nên ta có:

$$f(x_0 - 1, y_0, z_0 + 1) > x_0 y_0 z_0 \Rightarrow f(x_0 - 1, y_0, z_0 + 1) > f(x_0, y_0, z_0).$$

Bất đẳng thức này cũng mâu thuẫn với (1).

Vậy trong trường hợp b. không thể xảy ra.

c. Nếu $x_0 - 1 > y_0 > z_0$. Lập luận như trên cũng suy ra mâu thuẫn

Tóm lại giả thiết $x_0 - z_0 > 1$ là sai, vậy (2) đúng

Từ (2) suy ra chỉ có thể xảy ra hai khả năng sau:

i. Nếu $x_0 - z_0 = 0$. Kết hợp với $x_0 \geq y_0 \geq z_0$, thì $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{k}{3}$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$k \equiv 0 \pmod{3}$. (Chú ý: x_0, y_0, z_0 nguyên dương).

ii. Nếu $x_0 - z_0 = 1$. Lúc này lại có hai trường hợp nhỏ sau:

• Nếu $x_0 = y_0 + 1 = z_0 + 1$. Từ đó ta có: $x_0 = \frac{k+2}{2}$; $y_0 = z_0 = \frac{k-1}{3}$.

Chú ý rằng trường hợp này xảy ra khi và chỉ khi $k \equiv 1 \pmod{3}$.

• Nếu $x_0 = y_0 = z_0 + 1$. Từ đó ta có: $x_0 = y_0 = \frac{k+1}{3}$; $z_0 = \frac{k-2}{3}$.

Trường hợp này xảy ra khi và chỉ khi $k \equiv 2 \pmod{3}$.

Tóm lại ta đi đến kết luận sau:

$$\max_{(x,y,z) \in D} f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{k^3}{27} & \text{khi } k \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{(k+2)(k-1)^2}{27} & \text{khi } k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{(k+1)^2(k-2)}{27} & \text{khi } k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Nhận xét:

1. Dĩ nhiên nếu $k \equiv 0 \pmod{3}$, tức là k nguyên dương và chia hết cho 3, thì lời giải của bài toán có thể suy trực tiếp một cách đơn giản như sau:

Theo bất đẳng thức Côsi thì với mọi $(x; y; z) \in D$, ta có:

$$xyz \leq \left(\frac{z+y+z}{3} \right)^3 = \frac{k^3}{27}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{k}{3}$.

Do $k > 0$ và $k : 3$ nên $\left(\frac{k}{3}; \frac{k}{3}; \frac{k}{3} \right) \in D$.

Vì lẽ đó ta có: $\max_{(x,y,z) \in D} f(x,y,z) = \frac{k^3}{27}$, khi $k > 0$ và $k : 3$.

2. Tuy nhiên nếu $k \not\equiv 0 \pmod{3}$ thì không thể áp dụng được bất đẳng thức Cô-Si để giải bài toán này.

Lí do ở chỗ dấu “=” xảy ra trong bất đẳng thức $xyz \leq \frac{k^3}{27}$ khi và chỉ khi:

$$x = y = z = \frac{k}{3}.$$

Tuy nhiên do $k \nmid 3$, nên $\left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right) \notin D$.

Vì thế chưa có thể kết luận gì về $\max_{(x,y,z) \in D} f(x,y,z)$ nếu sử dụng bất đẳng thức

Côsi.

Vai trò cũng lập luận số học tỏ rõ hiệu lực trong trường hợp này.

Bài 6. Cho $X = \{1; 2; 3; \dots; 2011\}$. Tìm số nguyên dương n ($n \leq 2011$) nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lấy đi một tập hợp con gồm n phần tử của X sao cho tập hợp còn lại có tính chất: không có phần tử nào bằng tích hai phần tử khác.

Hướng dẫn giải

Loại đi 43 phần tử sau: 2, 3, 4, ..., 44.

Khi đó phần tử còn lại của X bao gồm các phần tử 1, 45, 46, ..., 2011.

Với các phần tử còn lại này chỉ xảy ra hai khả năng sau:

- Xét tích hai phần tử trong đó có một phần tử là 1. Tích ấy chính bằng phần tử thứ hai. Do mỗi phần tử của phần còn lại đều khác nhau, nên không có phần tử nào bằng tích một phần tử khác với 1.
- Xét tích hai phần tử bất kì khác 1.

Rõ ràng tích ấy lớn hơn: $45^2 = 2025 > 2011$.

Vì mọi phần tử còn lại đều ≤ 2011 , suy ra không có phần tử nào bằng tích của hai phần tử khác.

Như vậy ta đã chỉ ra một cách loại bỏ đi 43 phần tử, để thu được một tập hợp con thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu đề bài thỏa mãn bất đẳng thức: $n \geq 43$ (1)

Thật vậy, giả sử (1) không đúng, tức là tồn tại số nguyên dương $n_0 < 43$ mà vẫn thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Xét 43 bộ ba sau: (2, 87, 2.87); (3, 86, 3.86); ... (44, 45, 44.45).

Đặt $f(x) = x(89 - x)$ với $2 \leq x \leq 44$. Ta có: $f'(x) = 89 - 2x > 0$ khi $2 \leq x \leq 44 \Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến trên $[2; 44]$.

Từ đó ta có: $2.87 < 3.86 < \dots < 44.25 < 2011$

Như thế 43 bộ trên gồm các phần tử đôi một khác nhau thuộc tập X .

Vì ta rút ra n_0 phần tử ($n_0 < 43$), nên phần còn lại của X sau khi rút n_0 phần tử luôn chứa ít nhất một trong 43 bộ ba nói trên.

Rõ ràng bộ ba đó chứa ba phần tử của dãy con, trong đó có một phần tử bằng tích hai phần tử còn lại. Đó là điều vô lí vì n_0 là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy giả thiết phản chứng là sai $\Rightarrow$ (1) đúng
 Kết hợp lại theo định nghĩa giá trị nhỏ nhất suy ra số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đầu bài là: $\min n = 43$.

Bài 7. Xét tập hợp tất cả 7 số nguyên tố khác nhau có các tính chất sau:

1. Chúng có dạng $a, b, c, a + b + c, a + b - c, a - b + c, b + c - a$.
2. Hai trong ba số a, b, c có tổng là 800.

Gọi d là khoảng cách giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong 7 số đó.

Tìm giá trị lớn nhất của d .

Hướng dẫn giải

Do vai trò bình đẳng giữa a, b, c nên có thể giả sử (mà không làm mất tính tổng quát)

$$a + b = 800 \text{ và } a < b.$$

Rõ ràng $c < 800$. Thật vậy nếu $c \geq 800 \Rightarrow a + b - c \leq 0$, điều này mâu thuẫn với việc $a + b - c$ là số nguyên tố.

Rõ ràng $a + b + c$ là số lớn nhất trong 7 số nguyên tố nói trên

Số nguyên tố lớn nhất dưới 800 là 797, vì thế:

$$a + b + c = 800 + c \leq 800 + 797 \Rightarrow a + b + c \leq 1597. \quad (1)$$

Rõ ràng a, b, c phải là các số lẻ. Thật vậy nếu trái lại tồn tại ít nhất một trong ba số trên là số chẵn, thì do 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất nên chỉ có đúng một trong ba số a, b, c là 2, còn hai số còn lại là hai số nguyên tố lẻ khác nhau. Từ đó suy ra các số $a + b + c, a + b - c, a - b + c, b + c - a$ đều là các số chẵn, mà chúng lại khác nhau. Như vậy ta có nhiều hơn 2 số nguyên tố chẵn khác nhau trong 7 số nói trên. Đó là điều vô lí.

Vậy cả 7 số nguyên tố đã cho đều là các số nguyên tố lẻ.

Nói riêng số nhỏ nhất trong 7 số đã cho lớn hơn hoặc bằng 3.

Kết hợp với (1) suy ra:

$$d \leq 1597 - 3 \Rightarrow d \leq 1594. \quad (2)$$

Bây giờ ta chỉ ra dấu “=” trong (2) có thể xảy ra.

Ví dụ chọn 7 số sau:

$$a = 13; b = 787; c = 797; a + b + c = 1597,$$

$$a + b - c = 3, a - b + c = 23, b + c - a = 1571.$$

Rõ ràng đúng là 7 số nguyên tố khác nhau thỏa mãn các tính chất 1. ; 2.

$$\text{Ngoài ra: } d = 1597 - 3 = 1594.$$

Từ đó theo định nghĩa về giá trị nhỏ nhất suy ra: $\min d = 1594$.

Bài 8. Hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương và nhận giá trị

$$\text{cũng trên đó và được xác định như sau: } \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n) \\ f(2n+1) = f(2n) + 1 \end{cases} \quad \text{với mọi } n = 1, 2, \dots$$

2, ... Tìm $\max_{1 \leq n \leq 2011} f(n)$

Hướng dẫn giải

Ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề: $f(n)$ chính bằng số các chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của số n . Bổ đề được chứng minh bằng quy nạp như sau:

Với $n = 1$, theo định nghĩa ta có: $f(1) = 1$

Mặt khác: $1 = \bar{1}/_2$ ở đây ta dùng kí hiệu $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}_2$ để chỉ số ghi theo hệ cơ số 2)

Vậy bổ đề đúng khi $n = 1$.

- Giả sử bổ đề đã đúng đến $n = k \geq 1$, tức là với mọi $l \leq k$, $f(l)$ chính bằng số các chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của số l .
- Xét khi $n = k + 1$. Có hai trường hợp xảy ra:
 - Hoặc là k chẵn ($k = 2m$). Khi đó: $f(k + 1) = f(2m + 1) = f(m) + 1$.

Do $m < k$, nên theo giả thiết quy nạp suy ra $f(k + 1)$ chính bằng số các chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của m cộng thêm 1.

$$\text{Mặt khác, } k + 1 = 2m + 1 \text{ mà: } \begin{array}{r} 2m + 1 \\ 1 \quad \overline{2} \\ \hline m \end{array}$$

Tức là: $2m + 1 = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p 1}_2$, ở đây $m = \overline{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}_2$ là biểu diễn của m trong hệ nhị phân. Từ đó suy ra số chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của số $k + 1$ chính bằng số chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của m cộng thêm 1.

Vậy bổ đề đúng trong trường hợp $k = 2m$.

- Hoặc là k lẻ ($k = 2m + 1$). Khi đó: $f(k + 1) = f(2m + 2) = f(m + 1)$
- Do $m + 1 < k$, nên theo giả thiết quy nạp suy ra $f(k + 1)$ chính bằng số các chữ số 1 trong biểu diễn của $m + 1$ trong hệ nhị phân.

$$\text{Mặt khác, } k + 1 = 2m + 2 \text{ mà: } \begin{array}{r} 2m + 2 \\ 0 \quad \overline{2} \\ \hline m + 1 \end{array}$$

Tức là: $2m + 2 = \overline{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p 0}_2$, ở đây $m + 1 = \overline{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}_2$ là biểu diễn của $m + 1$ trong hệ nhị phân.

Đến đây ta thấy bổ đề đúng khi $k = 2m + 1$.

Tóm lại, bổ đề đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra bổ đề đúng với mọi n (đpcm).

Ta thấy số nhỏ nhất có 11 chữ số 1 trong biểu diễn dưới hệ nhị phân (ơ số 2) là số:

$$N = \underbrace{11\dots1}_{11 \text{ số } 1}_2 = 2^{10} + 2^9 + \dots + 2^1 + 2^0 = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2027.$$

Từ bổ đề và do $1 \leq n \leq 2011 \Rightarrow f(n) \leq 10$. (1)

Để phát hiện ra dấu bằng trong (1), ta liệt kê ra các số là nhỏ nhất, gần nhỏ nhất, ... nên trong biểu diễn dưới hệ nhị phân có chứa 10 chữ số 1. Các số ấy theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là:

$$\underbrace{11\dots1}_{10 \text{ chữ số } 1}_2 = 1023;$$

$$\underbrace{10 \dots 11\dots1}_{9 \text{ chữ số } 1}_2 = 1535$$

$$\underbrace{11 \dots 01\dots1}_{9 \text{ chữ số } 1}_2 = 1791;$$

$$\underbrace{1110 \dots 11\dots1}_{7 \text{ chữ số } 1}_2 = 1919$$

$$\underbrace{11110 \dots 11\dots1}_{6 \text{ chữ số } 1}_2 = 1983;$$

$$\underbrace{11111 \dots 0 \dots 11\dots1}_{5 \text{ chữ số } 1 \quad 5 \text{ chữ số } 1}_2 = 2115 > 2011.$$

Vậy dấu bằng trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow n \in \{1023; 1535; 1791; 1919; 1983\}. \quad (2)$$

Tóm lại thu định nghĩa về giá trị bé nhất ta có:

$$\max_{1 \leq n \leq 2011} f(n) = 10 \Leftrightarrow n \text{ thỏa mãn (2)}.$$

Bài 9. Tìm n số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất sau:

- n là lập phương của một số nguyên dương.
- n viết trong hệ thập phân có 4 số tận cùng là 1997.

Hướng dẫn giải

Ta tìm số nguyên dương X thỏa mãn:

$$X = a^3 \equiv 1997 \pmod{10^4} \Rightarrow a^3 + 3 \equiv 2000 \pmod{10^4}. \quad (1)$$

Do $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, nên nếu đặt $a = 5a_1 + r_1$ với r_1 là số nguyên thỏa mãn $0 \leq r_1 \leq 4$, ta có:

$$a^3 \equiv r_1^3 \pmod{5} \Rightarrow (a^3 + 3) \equiv r_1^3 + 5 \pmod{5} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra, nói riêng $(a^3 + 3) \equiv 5 \pmod{5}$. Vì thế từ (2) có $(r_1^3 + 3) \equiv 5 \pmod{5}$.

Do $r_1 \in \{0; 2; 3; 4\}$ nên suy ra: $r_1 = 3 \Rightarrow a = 5a_1 + 3$. (3)

Đặt $a_1 = 5a_2 + r_2$, với $r_2 \in \{0; 2; 3; 4\}$, ta có:

$$a = 5(5a_2 + r_2) + 3 = 25a_2 + 5r_2 + 3.$$

$$\text{Vì thế: } a^3 + 3 = [25a_2 + (5r_2 + 3)]^3 + 3.$$

$$\Rightarrow a_3 + 3 \equiv ((5r_2 + 3)^3 \pmod{25}). \quad (4)$$

Từ (1) suy ra, nói riêng $(a^3 + 3):25$

$$\Rightarrow [(5r_2 + 3)^3 + 3]:25 \Rightarrow r_2 = 2 \text{ (do } r_2 \in \{0; 2; 3; 4\})$$

Vậy $a = 25a_2 + 13$. Lại đặt $a_2 = 5a_3 + r_3$ với $r_3 \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Để ý rằng: $(a^3 + 3):125$ và lập luận như trên suy ra:

$$r_3 = 1 \Rightarrow a = 125a_3 + 38. \quad (5)$$

Vì $2000 : 16$, nên từ (1) có $(a^3 + 3):16$.

Lại đặt $a = 16t + r$ với r không âm và $0 \leq r \leq 15$

$$\text{Từ } (a^3 + 3) \equiv (r^3 + 3) \pmod{16} \Rightarrow (r^3 + 3):16 \Rightarrow r = 5.$$

$$\text{Vậy } a = 16t + 5. \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) (6) đi đến: } 125a_3 + 38 = 16t + 5 \Rightarrow 33 = 16t - 125a_3$$

$$\Rightarrow t = \frac{33 + 125a_3}{16} = 8a_1 + 3 \frac{11 - a_3}{16}$$

Do t nguyên dương nên $\frac{11 - a_3}{16} = h$ ($h = 0; 1; 2; \dots$) suy ra $a_3 = 16h + 11$.

$$\text{Từ đó } a = 125(16h + 11) + 38 \Rightarrow a = 2000h + 1413; h = 0; 1; 2; \dots$$

Như vậy $n = 1413^3 = 2821151997$ là số tự nhiên nhỏ nhất thoả mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 10. Số nguyên A được tạo thành bằng cách viết liên nhau các số nguyên dương từ 1 đến 60 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn, tức là: $A = 1234\dots5960$

Xét tập hợp các số n thu được từ A bằng cách xóa đi 100 chữ số tùy ý của A .

Tìm min n và max n .

Hướng dẫn giải

Ta thấy a có: $9 + 2.51 = 111$ chữ số. Do vậy sau khi xóa đi 100 chữ số tùy ý của A thì còn lại số n có 11 chữ số (chú ý rằng n có thể có các chữ số 0 đứng đầu).

Ta thấy A có 6 chữ số 0 phân bố như sau:

12... 10... 20... 30... 40... 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60.

Để n là nhỏ nhất, ta chọn 5 chữ số đầu tiên cho n đều bằng 0 (nghĩa là phải xóa bớt các chữ số khác 0 trong các số từ 1 đến 50). Ta sẽ xác định thêm 6 chữ số còn lại cho n từ dãy số:

51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

Để thấy 6 số đó là: 123450.

Vậy min $n = 00000123450 = 123450$.

Để n là lớn nhất, ta chọn 5 chữ số đầu tiên cho n đều bằng 9 (nghĩa là phải xóa bớt các chữ số khác 9 trong các số từ 1 đến 49). Ta sẽ xác định thêm 6 chữ số còn lại của n từ dãy số:

50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

Dễ thấy 6 số đó là: 785960

Vậy $\max n = 99999785960$.

Bình luận:

Qua 10 bài toán trên, ta thấy để giải các bài toán liên quan đến việc xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong lĩnh vực SỐ HỌC ta cần kết hợp khéo léo giữa các đặc thù số học của bài toán với các phương pháp truyền thống nói chung của bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

B. Điểm qua bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học tổ hợp

Bài 1. Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn bán kính 1, sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm trong chung.

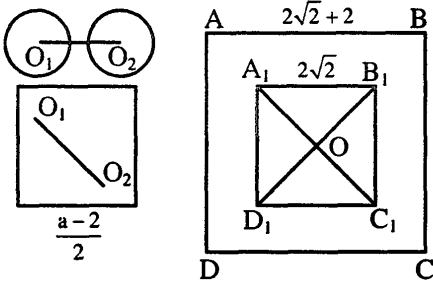
Hướng dẫn giải

Giả sử hình vuông ABCD có tâm O và cạnh a , chứa năm hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1. Vì cả năm hình tròn này nằm trọn trong hình vuông, nên các tâm của chúng nằm trong hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có tâm O và cạnh bằng $a - 2$, ở đây $A_1B_1 \parallel AB$.

Các đường thẳng nối các trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ chia $A_1B_1C_1D_1$ thành bốn hình vuông nhỏ. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong bốn hình vuông nhỏ, mà trong hình vuông này chứa ít nhất hai trong số năm tâm hình tròn nói trên (không giảm tổng quát, giả sử đó là O_1, O_2).

Để ý rằng vì không có hai hình tròn nào (trong số năm hình tròn) cắt nhau, nên $O_1O_2 \geq 2$. (1)

Mặt khác do O_1, O_2 cùng nằm trong một hình vuông nhỏ (cạnh của hình vuông nhỏ bằng $\frac{a-2}{2}$), nên lại có:



$$O_1O_2 \leq \frac{a-2}{2}\sqrt{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra: } \frac{a-2}{2}\sqrt{2} \geq 2 \Rightarrow a \geq 2\sqrt{2} + 2 \quad (3)$$

Vậy mọi hình vuông cạnh a thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta đều có (3).

Bây giờ xét hình vuông ABCD có $a = 2\sqrt{2} + 2$. Xét năm hình tròn có tâm là O, A_1, B_1, C_1, D_1 (xem hình vẽ), thì mọi yêu cầu đề bài thỏa mãn. Tóm lại, hình vuông có kích thước bé nhất cần tìm là hình vuông với cạnh bằng $2\sqrt{2} + 2$.

Bài 2. Dùng n màu để tô tất cả các cạnh của một hình lập phương sao cho mỗi đỉnh đều có ba màu liên thuộc, đó là ba màu của ba cạnh chứa đỉnh đó. Tìm số n nhỏ nhất để hai điều kiện sau đây đồng thời được thỏa mãn.

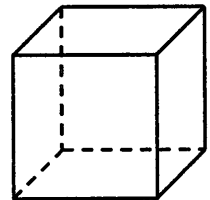
- Không có mặt nào có hai cạnh cùng màu.
- Không có hai đỉnh nào có cùng ba màu liên thuộc.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết a. không có mặt nào có hai cạnh cùng màu, mà mỗi mặt có bốn cạnh, vậy số màu phải dùng ít nhất là bốn, tức là $n \geq 4$.

Mặt khác, nếu $n = 4$, thì số bộ ba màu tạo ra từ bốn màu là $C_4^3 = 4$.

Có bốn bộ ba màu khác nhau để tô cho 8 bộ ba cạnh tại tám đỉnh của hình lập phương, vậy theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai đỉnh có cùng một bộ ba màu liên thuộc, tức là giả thiết b. không thỏa mãn.

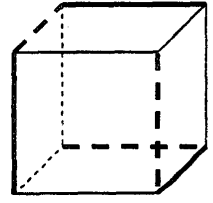


Vậy $n \geq 4$ và $n \neq 4$, nên $n \geq 5$.

Xét khi $n = 5$. Vì hình lập phương có sáu mặt (mỗi mặt bốn cạnh), và lại có 12 cạnh, nên với bất cứ bốn cạnh nào luôn luôn chọn được ít nhất hai trong chúng thuộc cùng một mặt của hình lập phương. Do đó, để thỏa mãn giả thiết a. mỗi màu chỉ dùng để tô cho tối đa ba cạnh (vì nếu không, từ nhận xét trên nếu có màu đỏ chẳng hạn dùng để tô ít nhất bốn cạnh, thì ít nhất một mặt có hai cạnh đó, trái với giả thiết a.)

Dùng $n = 5$ màu để tô cho 12 cạnh, mà mỗi màu dùng để tô tối đa cho ba cạnh, nên lại theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất hai màu (giả sử đó là màu xanh (X), và màu đỏ (Đ)), mà mỗi màu dùng để tô đúng ba cạnh.

Vì mỗi cạnh chứa hai đỉnh và lại để thỏa mãn giả thiết a. nên hai màu X, Đ sẽ liên thuộc tổng cộng 12 đỉnh (mỗi màu liên thuộc sáu đỉnh). Mà hình lập phương chỉ có tám đỉnh nên phải có ít nhất bốn đỉnh có cùng hai màu X, Đ liên thuộc (xem hình vẽ, đường nét liền đậm (—) chỉ màu đỏ, đường nét đứt (---) đậm chỉ màu xanh).



Với mỗi đỉnh trong số này, xét cạnh thứ ba xuất phát từ đó và không có màu X, Đ. Chỉ có khả năng sau xảy ra:

Bốn cạnh đang xét đôi một khác nhau. Do bốn cạnh này chỉ được dùng ba màu còn lại (ngoài X, Đ), nên phải có ít nhất hai cạnh cùng màu, và nghĩa là điều kiện b. bị vi phạm vì có hai đỉnh cùng có bộ ba màu liên thuộc giống nhau.

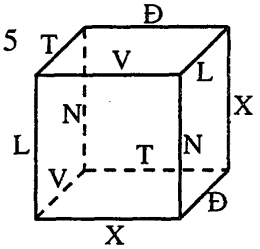
Tóm lại, nếu $n = 5$, ta luôn đi đến mâu thuẫn. Do đó $n > 5$

Với $n = 6$, xét cách tô màu sau đây: Đỏ (Đ), Xanh (X),

Vàng (V), Tím (T), Nâu (N), Lam (L).

Cách tô màu này thỏa mãn mọi yêu cầu đề ra.

Vậy giá trị nhỏ nhất phải tìm là $n = 6$.



Bài 3. Cho bảng hình vuông gồm 13×13 ô vuông. Người ta tô màu đỏ ở S ô vuông của bảng sao cho không có bốn ô đỏ nào nằm ở bốn góc của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị lớn nhất của S có thể là bao nhiêu.

Hướng dẫn giải

Gọi x_i là số ô để tô ở hàng thứ i . Ta có: $S = \sum_{i=1}^{13} x_i$.

Ở hàng thứ i , số các cặp ô để có thể có là: $C_{x_i}^2 = \frac{x_i(x_i - 1)}{2}$.

Vậy tổng số các cặp ô đỏ là: $A = \sum_{i=1}^{13} \frac{x_i(x_i - 1)}{2}$.

Chiếu các cặp ô đỏ xuống một hàng ngang nào đó. Vì không có bốn ô đỏ nào nằm ở bốn góc của một hình chữ nhật nên không có cặp ô đỏ nào có hình chiếu trùng nhau.

Vì thế: $C_{13}^2 = 78 \geq A$.

Từ (2) và (3) suy ra: $\sum_{i=1}^{13} \frac{x_i(x_i - 1)}{2} \leq 78$ hay: $\sum_{i=1}^{13} x_i^2 - \sum_{i=1}^{13} x_i \leq 156$.

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{13} x_i\right)^2 \leq 13 \left(\sum_{i=1}^{13} x_i^2\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{13} x_i^2 \geq \frac{S^2}{13}. \quad (5)$$

Từ đó, ta thay (1) và (5) vào (4), đi đến:

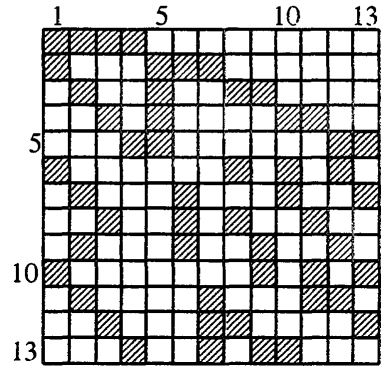
$$\frac{S^2}{13} - S \leq 156 \Rightarrow S^2 - 13S - 2028 \leq 0$$

$$\Rightarrow S \leq 52. \quad (6)$$

Đẳng thức trong (6) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_{13} = 4$, tức là mỗi dòng có 4 ô tô đỏ.

Bây giờ ta chỉ ra cách tô màu như sau:

Vậy $\max S = 52$.



Bài 4.

Một tam giác đều được chia thành n^2 tam giác đều bằng nhau. Một số tam giác đó được đánh số bởi các số $1, 2, 3, \dots, m$ sao cho các tam giác với các số liên tiếp thì phải có cạnh chung.

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của m .

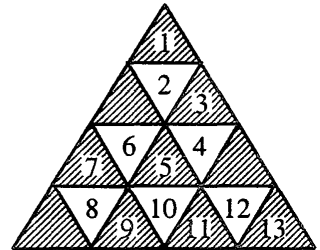
Hướng dẫn giải

Chia các cạnh tam giác đều thành n phần bằng nhau. Từ các điểm chia vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Khi đó số tam giác đều con là: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Tô màu các tam giác thành các tam giác đen, trắng xen kẽ nhau như hình vẽ. Khi đó số các ô

đen là: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, còn số các ô

trắng là: $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$.



Theo cách đánh số tam giác thì hai tam giác được đánh số liên tiếp phải có cạnh chung, do đó nó phải có màu khác nhau.

Vì lẽ đó, trong số các tam giác được đánh số, số các tam giác đen chỉ có thể nhiều hơn số các tam giác trắng là 1. Vậy tổng số các tam giác được đánh số m phải thỏa mãn bất đẳng thức:

$$m \leq 2 \frac{n(n-1)}{2} + 1, \text{ hay } m \leq n^2 - n + 1.$$

Ta chỉ ra một cách đánh số đạt dấu đẳng thức. Muốn vậy, cách đánh số này phải đánh số được hết tất cả các ô trắng. Thí dụ cách đánh số như hình vẽ

trên. Trong cách đánh số này số ô được đánh số bằng hai lần số ô trắng cộng 1 và do đó bằng $n^2 - n + 1$.

(Chú ý trong cách đánh số trên để các bạn dễ hình dung ta lấy $n = 4$)

Vậy giá trị $\max m = n^2 - n + 1$.

Bài 5. Cho bảng ô vuông kích thước 2010×2011 (bảng gồm 2010 dòng và 2011 cột). Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông của bảng sao cho với mọi hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

Hướng dẫn giải

Ta đánh số các hàng và cột theo quy ước sau: Thứ tự của hàng tính từ trên xuống dưới, còn thứ tự của cột tính từ trái sang phải.

Kí hiệu $(i; j)$ là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j của bảng.

Giả sử T là một cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài. Kí hiệu $k(T)$ là số ô được tô màu của cách T .

	1	2	3	j		2010	2011
1							
2							
3							
i							
$i + 1$							
2009							
2010							

Nếu ô $(i; j)$ được tô màu trong cách tô màu T ($1 \leq i \leq 2n - 1$) thì ô $(i + 1; j)$, và các ô kề với $(i; j)$ trong cùng hàng dĩ nhiên không được tô màu.

Thực hiện phép biến đổi đối với T :

Xóa màu ở tất cả các ô $(i; j)$ mà $i \equiv 1 \pmod{2}$, đồng thời tô màu các ô $(i + 1; j)$ (tức là xóa màu tất cả các ô nằm ở hàng lẻ).

Rõ ràng sau khi thực hiện phép biến đổi ấy, ta có một phép tô màu mới T' .

Phép tô màu này thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Hai ô vuông con nào được tô màu ở bước T' cũng không có đỉnh chung.
2. $k(T) = k(T')$
3. Tất cả các ô nằm ở hàng thứ 1, 3, 5, ..., 2009 đều không có màu

Theo cách tô màu thì số các ô được tô màu ở một hàng không vượt quá 1006.

Và chỉ có tối đa n hàng có màu, nên:

$$K(T') \leq 1005 \cdot 1006$$

Vì thế $k(T) \leq (n + 1)n$ với mọi cách tô màu T .

Xét cách tô màu sau:

Tô màu tất cả các ô $(2i; 2j - 1)$ với $i = 1, 2, \dots, 1005; j = 1, 2, \dots, 1006$

	1	2	3	4		2010	2011
1							
2							
3							
4							
2010							

Rõ ràng phép tô này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Số ô được tô là 1005.1006

Vậy $\max k = 1005.1006$.

Bài 6.

Cho C là một đa giác lồi. Nó được gọi là “đa giác đẹp”, nếu như ngoài các đỉnh ra, không còn đỉnh nào khác là các “điểm nguyên” (tức là các đỉnh mà hai tọa độ của nó đều là số nguyên). Tìm số cạnh lớn nhất có thể có của một “đa giác đẹp”.

Hướng dẫn giải

Xét các hình vuông đơn vị trên mặt phẳng tọa độ, với các đỉnh là các “điểm nguyên”. Vậy tồn tại “tứ giác đẹp”.

Giả sử tồn tại một “ngũ giác đẹp”.

Các “điểm nguyên” chỉ có thể là bốn loại sau:

Loại 1: Đó là các điểm $(x_i; y_i)$, trong đó x_i và y_i cùng là các số nguyên chẵn (gọi tắt là điểm C-C).

Loại 2: Đó là các điểm $(x_i; y_i)$, trong đó x_i và y_i cùng là các số nguyên lẻ (gọi tắt là điểm L-L).

Loại 3: Đó là các điểm $(x_i; y_i)$, trong đó x_i chẵn, y_i lẻ (C-L).

Loại 4: Đó là các điểm $(x_i; y_i)$, trong đó x_i lẻ, y_i chẵn (L-C).

Vì ngũ giác là “đẹp”, nên theo sự phân loại trên và theo nguyên lí Dirichlet, thì phải có ít nhất hai đỉnh cùng loại. Giả sử hai đỉnh đó là $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi ấy hoặc M nằm trên biên của ngũ giác (nếu AB là cạnh của ngũ giác), hoặc M là điểm trong của ngũ giác (nếu AB là đường chéo của ngũ giác).

Giả sử tọa độ của M là $(x_M; y_M)$. theo hệ thức Sácơ, ta có:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Do A và B là hai đỉnh cùng loại, nên x_1 và x_2 cũng như y_1 và y_2 cùng tính chẵn, lẻ; tức là x_M và y_M cũng là số nguyên. Vậy M là “điểm nguyên”. Ta dẫn đến mâu thuẫn của “đa giác đẹp”.

Vậy giả thiết phản chứng là sai. Điều đó có nghĩa là: mọi đa giác lồi n cạnh với $n \geq 5$ không thể là “đa giác đẹp”.

Số tối đa cạnh của “đa giác đẹp” là $n = 4$.

Bài 7. Trong các ô của một bảng vuông kích thước $n \times n$, người ta viết các số sao cho tổng của các số có mặt trong các ô của một “chữ thập” bất kì (tức là

một hình gồm một hàng và một cột) không nhỏ hơn a , a là một số dương cho trước.

Giả sử S là tổng của tất cả các số điền trong các ô của bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của S .

Hướng dẫn giải

Lấy một hàng có tổng các số viết trong các ô của hàng ấy là nhỏ nhất, rồi xét tổng các số của tất cả các “chữ thập” tương ứng với các ô của hàng này.

Còn n “chữ thập” như vậy, và theo điều kiện của bài, ta thấy tổng tất cả các số ghi trong n “chữ thập” ấy không nhỏ hơn na .

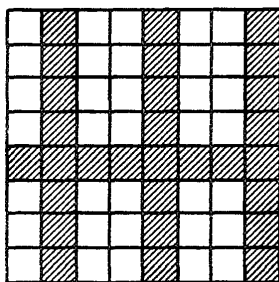
Để thấy tổng nói trên chính bằng tổng tất cả các số trong bảng cộng thêm $(n - 1)$ lần tổng các số trong hàng lấy ra.

Gọi tổng các số trong cả bảng là N , tổng các số trong hàng lấy ra là m , dựa vào lập luận trên suy ra:

$$N + (n - 1)m \geq na. \quad (1)$$

Theo định nghĩa của số m , ta có: $m \leq \frac{N}{n}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra: $N + \frac{N}{n}(n - 1) \geq na \Rightarrow N \left(2 - \frac{1}{n} \right) \geq na$.



C. Vài bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong hình học không gian

Bài 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có thể tích là V . M là một điểm tùy ý nằm bên trong tam giác ABC . Qua M vẽ các đường song song với SA , SB , SC . Chúng cắt các mặt SBC , SAC , SAB tương ứng tại A' , B' , C' . Tìm thể tích lớn nhất của tứ diện $MA'B'C'$.

Hướng dẫn giải

AM , BM , CM tương ứng cắt BC , AC , AB tại P , Q , R .

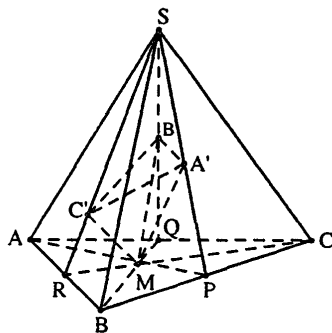
Khi đó từ giả thiết suy ra:

$$A' \in SP; B' \in SQ; C' \in SR$$

Theo định lý Talet, ta có:

$$\frac{MA'}{SA} = \frac{PM}{PA}; \frac{MB'}{SB} = \frac{QM}{QB}; \frac{MC'}{SC} = \frac{RM}{RC}.$$

Trong tam giác ABC hiển nhiên ta có:
(theo định lý Xê Va)



$$\frac{PM}{PA} + \frac{QM}{QB} + \frac{RM}{RC} = 1 \Rightarrow \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1. \quad (1)$$

Hai tứ diện $M.A'B'C'$ và $S.ABC$ có $MA' \parallel SA$, $MB' \parallel SB$, $MC' \parallel SC$ nên ta có:

$$\frac{V_{M.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}. \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức CôSi, ta có:

$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} \geq 3\sqrt{\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (3) suy ra: } \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC} \leq \frac{1}{27}. \quad (4)$$

Dấu “=” trong (4) xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow M \text{ là trọng tâm } \Delta ABC.$$

$$\text{Từ (1) (4) đi đến: } V_{M.A'B'C'} \leq \frac{1}{27} V. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (4) xảy ra

$\Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC

$$\text{Từ đó ta có: } \max V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{27} V$$

Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi M là trọng tâm của ΔABC .

Bài 2. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = a$, $BC = b$ và SA tạo với BC góc 60° . M là một điểm trên cạnh SB . Qua M dựng thiết diện song song với BC . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích thiết diện.

Hướng dẫn giải

Kẻ $MN \parallel SA$, $MQ \parallel BC$. Khi đó $(MNQ) \cap (ABC) = NP \parallel MQ$

Dễ thấy $QP \parallel MN \Rightarrow$ thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Do $MN \parallel SA$, $NP \parallel BC \Rightarrow \widehat{MNP} = \widehat{(SA, BC)} = 60^\circ$

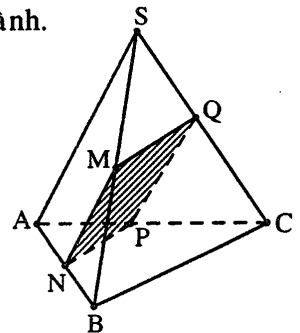
Ta có:

$$S_{MNPQ} = MN \cdot NP \sin \widehat{MNP} = MN \cdot MQ \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

(do $NP = MQ$)

Theo định lí Talet, ta có:

$$\frac{MQ}{BC} = \frac{SM}{SB}; \frac{MN}{SA} = \frac{MB}{SB} \Rightarrow \frac{MQ}{b} + \frac{MN}{a} = \frac{SM + MB}{SB} = 1 \quad (2)$$



Theo bất đẳng thức CôSi, ta có:

$$1 = \frac{MQ}{b} + \frac{MN}{a} \geq 2\sqrt{\frac{MQ \cdot MN}{ab}} \Rightarrow MQ \cdot MN \leq \frac{ab}{4} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MQ}{b} = \frac{MN}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của SB

Từ (1), (3) có: $S_{MNPQ} \leq \frac{ab\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của SB .

Như vậy ta có: $\max S_{MNPQ} = \frac{ab\sqrt{3}}{8}$.

Bài 3. Cho góc tam diện vuông Oxyz. M là một điểm trong góc tam diện có khoảng cách xuống ba mặt xOy , xOz , yOz tương ứng là a , b , c ($a, b, c > 0$). Mặt phẳng qua M cắt Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C . Xét đại lượng $P = OA + OB + OC$. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} V_{O.ABC} &= V_{M.OAB} + V_{M.OBC} + V_{M.OCA} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{V_{M.OAB}}{V_{O.ABC}} + \frac{V_{M.OBC}}{V_{O.ABC}} + \frac{V_{M.OCA}}{V_{O.ABC}}, \end{aligned}$$

$$\text{hay } \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$(OA + OB + OC) \left(\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} \right) \geq \left(\sqrt{OA} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{OA}} + \sqrt{OB} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{OB}} + \sqrt{OC} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{OC}} \right)^2$$

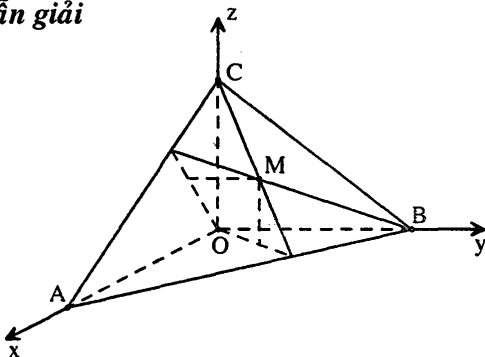
$$\text{Kết hợp với (1) suy ra: } P = OA + OB + OC \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{OA}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{OB}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{OC}}{\sqrt{c}}$$

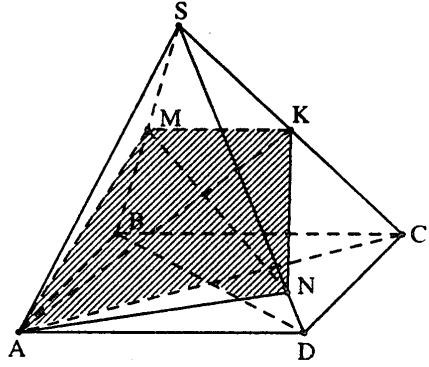
$$\Leftrightarrow \frac{OA}{\sqrt{a}} = \frac{OB}{\sqrt{b}} = \frac{OC}{\sqrt{c}} = \frac{OA + OB + OC}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ OB = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \\ OC = \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra: $\min P = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \Leftrightarrow OA, OB, OC$ xác định bởi (3)



Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt cạnh SB , SD lần lượt tại M , N . Giả sử hình chóp $S.ABCD$ có thể tích là V . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của thể tích tứ diện $S.AMNK$.



Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{SM}{SB}$; $y = \frac{SN}{SD}$.

Ta đặt $V_1 = V_{S.AMNK}$, thì $V_1 = V_{S.AMK} + V_{S.ANK}$. (1)

Rõ ràng ta có: $\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SK}{SC}$. (2)

Do $V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{V}{2}$ và $\frac{SK}{SC} = \frac{1}{2}$,

nên từ (2) suy ra: $V_{S.AMK} = \frac{xV}{4}$. (3)

Tương tự có: $V_{S.ANK} = \frac{yV}{4}$. (4)

Từ (1) (3) (4) suy ra: $V_1 = \frac{V}{4} (x + y)$. (5)

Mặt khác lại có: $V_1 = V_{S.AMN} + V_{S.MNK}$ (6)

Hoàn toàn tương tự ta có: $V_{S.AMN} = \frac{xy}{2}$ và $V_{S.MNK} = \frac{xyV}{4}$.

Nên từ (6) có: $V_1 = \frac{3xyV}{4}$. (7)

Bây giờ từ (5) (7) có: $x + y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$. (8)

Do $x > 0$, $y > 0$ nên từ (8) suy ra: $x > \frac{1}{3}$.

Vì $y = \frac{SN}{SD} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Từ đó $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Thay (8) vào (7) và có

$V_1 = \frac{V}{4} \left(3x \cdot \frac{x}{3x-1} \right) = \frac{3x^2}{4(3x-1)} V$. (9)

Xét hàm số: $f(x) = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$f'(x) = \frac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$f'(x)$	$\left \right $	- 0 +	$\left \right $
$f(x)$	$\left \right $		$\left \right $

Từ đó có: $\max_{\frac{1}{2} \leq x \leq 1} f(x) = \max \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right); f(1) \right\} = \max \left\{ \frac{3}{8}; \frac{3}{8} \right\} = \frac{3}{8}$;

$$\min_{\frac{1}{2} \leq x \leq 1} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Vậy $\max V_{S.AMNK} = \frac{3V}{8} \Leftrightarrow SM = \frac{2}{3}SB$ (ứng với $x = \frac{2}{3}$)

$$\min V_{S.AMNK} = \frac{V}{3} \Leftrightarrow M \equiv B.$$

Bài 5. Cho góc tam diện vuông Oxyz đỉnh O. trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho: $OA + OB + OC + AB + AC + BC = l$, ở đây l là số dương cho trước

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện OABC.

Hướng dẫn giải

Đặt $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Khi đó theo bất đẳng thức Bunhiacopski,

ta có:

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

$$a + c \leq \sqrt{2(a^2 + c^2)}$$

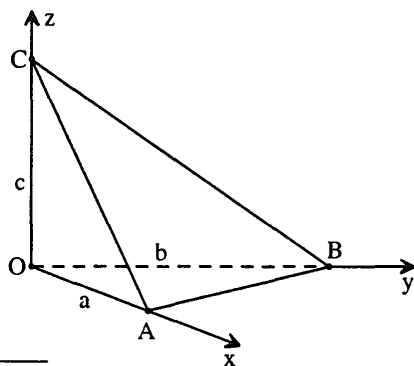
$$b + c \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)}.$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt{2}(a + b + c) \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2},$$

$$\text{hay } (a + b + c)(1 + \sqrt{2}) \leq a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.



Từ giả thiết suy ra ta có:

$$(a + b + c)(1 + \sqrt{2}) \leq l \text{ hay } a + b + c \leq \frac{l}{1 + \sqrt{2}}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$\text{Theo bất đẳng thức CôSi, thì: } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$$\text{Từ (2) (3) suy ra: } \frac{l}{1 + \sqrt{2}} \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ hay } \frac{l^3}{27(\sqrt{2} + 1)^3} \geq abc. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra

$$\Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{3}$$

(dựa vào giả thiết ta có phương trình: $3a + 3a\sqrt{2} = l$).

$$\text{Vì } V_{OABC} = \frac{1}{6} abc \Rightarrow V_{OABC} \leq \frac{l^3}{162(\sqrt{2} + 1)^3}$$

$$\text{và } V_{OABC} = \frac{l^3}{162(\sqrt{2} + 1)^3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } \max V_{O.ABC} = \frac{l^3}{162(\sqrt{2} + 1)^3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{3}.$$

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a$. Với giá trị nào của góc α giữa mặt bên và đáy của hình chóp, thì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là nhỏ nhất. Tìm giá trị bé nhất ấy.

Hướng dẫn giải

Gọi M và N tương ứng là trung điểm của AD và BC .

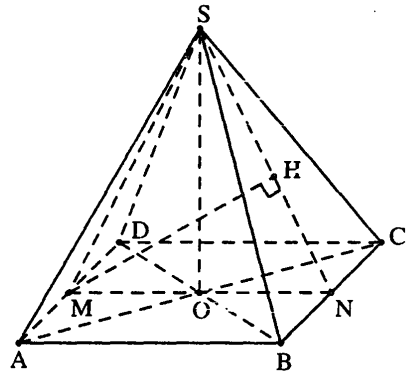
Do $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(M, (SBC)) = 2a$

Vì $BC \perp (SMN) \Rightarrow (SBC) \perp (SMN)$,

nên nếu kẻ $MH \perp SN \Rightarrow MH \perp (SBC)$.

Vậy $d(M, (SBC)) = MH = 2a$.

Ta có: $\widehat{SNM} = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.



Từ đó suy ra: $MN = \frac{2a}{\sin \alpha}$; $SO = ON \tan \alpha = \frac{a}{\cos \alpha}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \frac{a^3}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$. (1)

Từ (1) suy ra: $\min V_{S.ABCD} = \frac{\frac{4}{3}a^3}{\max_{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} (\sin^2 \alpha \cos \alpha)}$. (2)

Đặt $x = \cos \alpha$. Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < 1$.

Lúc đó $\sin^2 \alpha \cos \alpha = x(1 - x^2) = x - x^3$.

Xét hàm số: $y = x - x^3$ với $0 < x < 1$.

Ta có $y' = 1 - 3x^2$, và có bảng biến thiên sau:

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
y'	+	0	-
y			

Vậy: $y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó: $\min V_{S.ABCD} = 2\sqrt{3}a^3 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nhận xét:

Ta có thể sử dụng phương pháp bất đẳng thức để giải bài toán trên như sau:

Do $\sin^2 \alpha \cos \alpha > 0$ khi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

nên $\max_{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} (\sin^2 \alpha \cos \alpha) = \sqrt{\max_{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} (\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha)}$. (3)

Ta có:

$\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^2 \cos^2 \alpha = 4 \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \cdot \cos^2 \alpha$. (4)

Theo bất đẳng thức CôSi, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \cdot \cos^2 \alpha} \leq \frac{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} + \cos^2 \alpha}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \cdot \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{27}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{do } \cos \alpha > 0)$$

$$\text{Từ (4) (5) suy ra: } \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha \leq \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow \max_{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}} (\sin^2 \alpha \cos \alpha) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Rightarrow \min V_{S,ABCD} = 2\sqrt{3}a^3 \Leftrightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ta thu lại kết quả trên.

D. điểm qua vài bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học phẳng

Bài 1. Cho tam giác ABC và O là điểm nằm trong tam giác. Ở bên ngoài tam giác kẻ các đường thẳng song song với các cạnh, cách chúng một khoảng cách bằng khoảng cách từ O đến cạnh đó. Mỗi đường thẳng này tạo với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia một hình thang. Gọi S_1, S_2, S_3 là ba diện tích hình thang này. Giả sử S là diện tích tam giác ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của đại lượng $P = S_1 + S_2 + S_3$.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu diện tích các tam giác ABC, OBC, OAC, OAB và các hình thang $BCC_1B_1, ACC_2A_2, ABB_3A_3$ lần lượt qua S, $S_1, S_2, S_3, S_1', S_2', S_3'$. Do $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, nên:

$$\frac{S + S_1'}{S} = \left(\frac{AH'}{AH} \right)^2 = \left(\frac{AH + HH'}{AH} \right)^2.$$

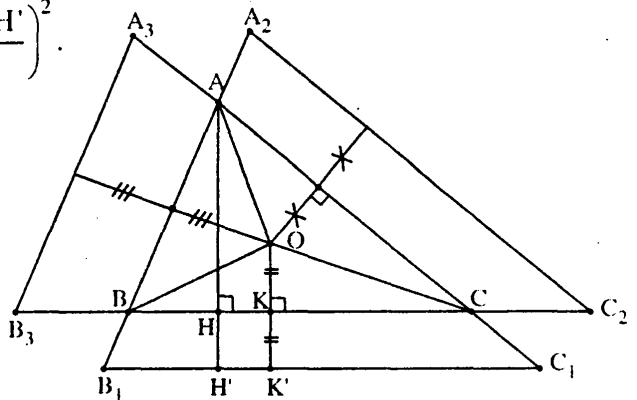
Vì $OK = KK' = HH'$,

nên từ trên có:

$$\frac{S + S_1'}{S} = \left(1 + \frac{OK}{AH} \right)^2. \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{OK}{AH} = \frac{S_1}{S}.$$

Thay vào (1) và có:



$$\frac{S + S_1'}{S} = \left(1 + \frac{S_1}{S}\right)^2$$

$$\Rightarrow S + S_1' = S \left(1 + \frac{2S_1}{S} + \frac{S_1^2}{S^2}\right) = S + 2S_1 + \frac{S_1^2}{S} \Rightarrow S_1' = 2S_1 + \frac{S_1^2}{S}. \quad (2)$$

Lập luận tương tự, ta có: $S_2' = 2S_2 + \frac{S_2^2}{S},$ (3)

$$S_3' = 2S_3 + \frac{S_3^2}{S}. \quad (4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra:

$$P = S_1' + S_2' + S_3' = 2(S_1 + S_2 + S_3) + \frac{1}{S}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad (5)$$

Vì: $\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1$, nên ta có: $\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 + \left(\frac{S_2}{S}\right)^2 + \left(\frac{S_3}{S}\right)^2 \geq \frac{1}{3}$ (6)

(dựa vào nhận xét hiển nhiên sau: Nếu $a + b + c = 1$, thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$)

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S} = \frac{S_3}{S} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow O$ là trọng tâm ΔABC .

Viết lại (5) dưới dạng: $P = 2S + \left[\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 + \left(\frac{S_2}{S}\right)^2 + \left(\frac{S_3}{S}\right)^2 \right] S$ (7)

Từ (6) (7) suy ra: $P \geq 2S + \frac{S}{3} = \frac{7}{3}S$.

$P = \frac{7S}{3} \Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (6) $\Leftrightarrow O$ là trọng tâm ΔABC .

Vậy min $P = \frac{7S}{3} \Leftrightarrow O$ là trọng tâm ΔABC .

Bài 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a . M là điểm tùy ý nằm bên trong ΔABC . Xét tam giác có 3 cạnh là MA, MB, MC . Gọi $\mathcal{S}$ là diện tích tam giác ấy. Tìm giá trị lớn nhất của $\mathcal{S}$.

Hướng dẫn giải

Gọi S là diện tích tam giác đều ABC cạnh a , thì $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. (1)

Qua M vẽ ba đoạn thẳng A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 tương ứng song song với AB, BC, CA (xem hình vẽ)

Đặt $BB_1 = x$; $B_1C_3 = y$; $C_3C = z$

Dễ thấy A_3BB_1M , CC_3MA_1 , AA_3MC_2

là các hình thang cân.

Từ đó có:

$MB = A_3B_1$; $AM = A_3C_2$; $CM = C_2B_1$

Vậy tam giác có ba cạnh MA , MB , MC

cũng chính là $\Delta A_3B_1C_2$.

Do các tam giác MB_2A_3 , MA_1C_2 và MB_1C_3 là

các tam giác đều với cạnh lần lượt là x , y , z ,

nên nếu gọi S_1 , S_2 , S_3 tương ứng là diện tích

của chúng thì:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S} = \frac{S_3}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x + y + z)^2}$$

(do $a = x + y + z$)

$$\text{Từ đó ta có: } S_1 + S_2 + S_3 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x + y + z)^2} S. \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \mathcal{S} = S_{\Delta A_3B_1C_1} = S_{\Delta MA_3C_2} + S_{\Delta MB_1C_2} + S_{\Delta MA_3B_1}$$

$$\begin{aligned} &= S_{MA_3A} + S_{MCC_2} + S_{MBB_1} = \frac{1}{2} (S_{MA_3AA_1} + S_{MC_2CC_3} + S_{MB_2BB_1}) \\ &= \frac{1}{2} [S - (S_1 + S_2 + S_3)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Hiển nhiên ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$, nên từ (1) suy ra:

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3} S \quad (3)$$

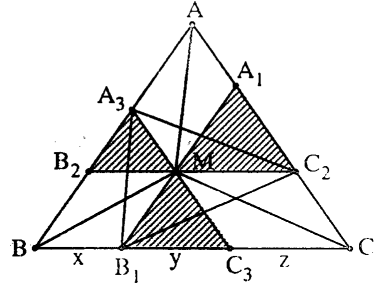
Dấu bằng trong (3) xảy ra $x = y = z = \frac{a}{3}$.

$$\text{Từ (2) (3) suy ra: } \mathcal{S} \leq \frac{S}{3}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (3)

$\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow M$ là tâm của Δ đều ABC .

$$\text{Do } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \min S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow M \text{ là tâm của } \Delta ABC.$$



Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{A} = \alpha$. Xét tập hợp các đường thẳng Δ qua A và không trùng với hai cạnh AB, AC. Gọi P là tích khoảng cách từ B và C tới Δ . Tìm giá trị lớn nhất của P.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ qua A chia thành hai loại:

Nhóm 1:

Đường Δ cắt đoạn BC. Đặt $\widehat{BAH} = \beta$.

Kẻ $BH \perp \Delta$, $CK \perp \Delta$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= BH \cdot CK = bc \sin \beta \sin(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{2} bc [\cos(\alpha - 2\beta) - \cos \alpha]. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) ta có:

$$P \leq \frac{1}{2} bc (1 - \cos \alpha) = bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - 2\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \Delta \text{ là phân giác trong của góc } A.$$

Vậy trong các đường thẳng thuộc nhóm 1, thì đường phân giác trong của góc A là đại lượng P đạt giá trị lớn nhất và giá trị đó bằng: $P_1 = bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Nhóm 2:

Đường Δ qua A và cắt đoạn BC' , ở đây C' là điểm đối xứng của C qua A. Kẻ BH và CK cùng vuông góc Δ .

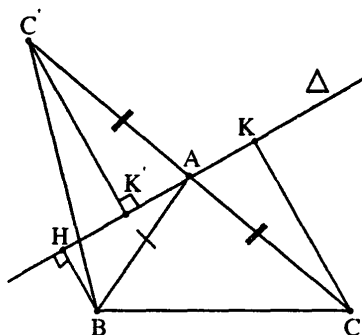
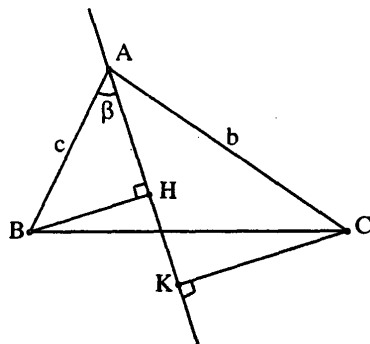
$$\text{Kẻ } C'K' \perp \Delta \Rightarrow CK = C'K' \Rightarrow P = BH \cdot CK = BH \cdot C'K'$$

Áp dụng lí luận phần 1 vào tam giác ABC' , ta thấy tích $BH \cdot C'K'$ (cũng là tích $BH \cdot CK$) lớn nhất khi Δ là phân giác trong của góc $\widehat{BAC'}$ (tức Δ là phân giác ngoài của góc A) và giá trị lớn nhất đó

$$\text{bằng } P_2 = bc \sin^2 \frac{180^\circ - \alpha}{2} = bc \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Theo nguyên lí phân rã, thì:

$$\max P = \max \{P_1; P_2\} = \max \left\{ bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}; bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right\}$$



$$= \begin{cases} bccos^2 \frac{\alpha}{2}, & \text{nếu } A \text{ là góc nhọn } (0 < \alpha < 90^\circ) \\ bcsin^2 \frac{\alpha}{2}, & \text{nếu } A \text{ là góc tù } (90^\circ < \alpha < 180^\circ) \\ \frac{1}{2}bc, & \text{nếu } A \text{ là góc vuông } (\alpha = 90^\circ) \end{cases}$$

Như vậy nếu A là góc nhọn, thì $\max P = bccos^2 \frac{\alpha}{2}$ khi Δ là phân giác ngoài của góc A và nếu A là góc tù, thì $\max P = bcsin^2 \frac{\alpha}{2}$, khi Δ là phân giác trong của góc A và nếu A là góc vuông thì $\max P = \frac{1}{2}bc$ khi Δ là phân giác trong hoặc là phân giác ngoài của góc A .

Nhận xét: Trong bài trên đã sử dụng nguyên lí phân rã của bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, dĩ nhiên kết hợp với các lập luận về hình học phẳng có ứng dụng lượng giác!

Bài 4. (Bài toán Toricelli)

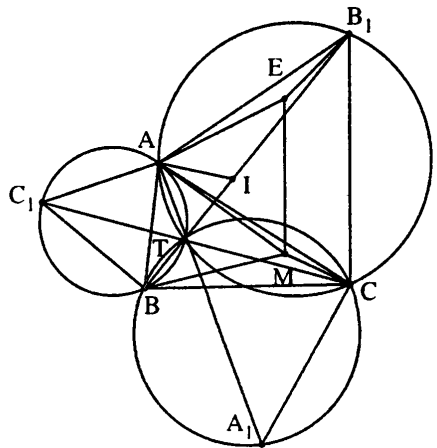
Cho tam giác ABC có $\max \{A, B, C\} < 120^\circ$ (tức là mọi góc của tam giác đều bé hơn 120°).

Hãy tìm trong tam giác ABC một điểm M sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị bé nhất.

Hướng dẫn giải

Cách 1: (Lời giải của Toricelli)

Dựng ba tam giác đều ABC_1 , BCA_1 , ACB_1 ra phía ngoài tam giác ABC . Để thấy ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác đều ấy đồng quy tại điểm T , và T là 3 điểm nhìn 3 cạnh của tam giác BAC dưới ba góc bằng nhau và bằng 120° . Do $\widehat{C_1TA} = \widehat{ABC_1} = 60^\circ$, nên $\widehat{ATC} = 120^\circ \Rightarrow C_1, T, C$ thẳng hàng. Lí luận tương tự có B, T, B_1 thẳng hàng và A, T, A_1 cũng thẳng hàng. Lấy điểm I trên TB_1 , sao cho $TA = TI \Rightarrow \Delta AB_1I = \Delta ACT$ (c.g.c)



$$\Rightarrow B_1I = CT \Rightarrow TB + TA + TC = BT + TI + IB_1 = BB_1 \quad (1)$$

Lấy điểm M bất kì thuộc miền tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC \geq TA + TB + TC \quad (2)$$

Thật vậy dựng tam giác AME sao cho E ở nửa mặt phẳng bờ AM không chứa B.

$$\text{Rõ ràng } \triangle AMC = \triangle AEB_1 \Rightarrow MC = EB_1 \Rightarrow MA + MB + MC \geq TA + TB + TC$$

$$\Rightarrow (2) \text{ đúng. Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow M \equiv T$$

Vậy điểm M cần tìm chính là điểm T nói trên. Điểm đó thường gọi là điểm “Toricelli”.

Cách 2: Lấy M là điểm tùy ý trong miền tam giác ABC.

Thực hiện phép quay $R^-(B, 60^\circ)$

$$\text{Khi đó: } R^-(B, 60^\circ)$$

$$C \rightarrow A_1$$

$$M \rightarrow M'$$

Theo tính chất của phép quay suy ra. MBM' là tam giác đều $\Rightarrow MB = MM'$.

$$\text{Ngoài ra do: } R^-(B, 60^\circ)$$

$$MC \rightarrow M'A_1,$$

$$\text{vậy } MC = M'A_1.$$

$$\text{Vậy } MA + MB + MC = MA + MM' + M'A_1. \quad (1)$$

Từ (*) và theo tính chất đường gấp khúc, ta có:

$$MA + MM' + M'A_1 \leq AA_1. \quad (2)$$

Như vậy từ (1) (2) ta đã chứng minh được rằng với mọi vị trí điểm M thuộc miền $\triangle ABC$, ta luôn có: $MA + MB + MC \leq AA_1$. (3)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A, M, A_2$ thẳng hàng.

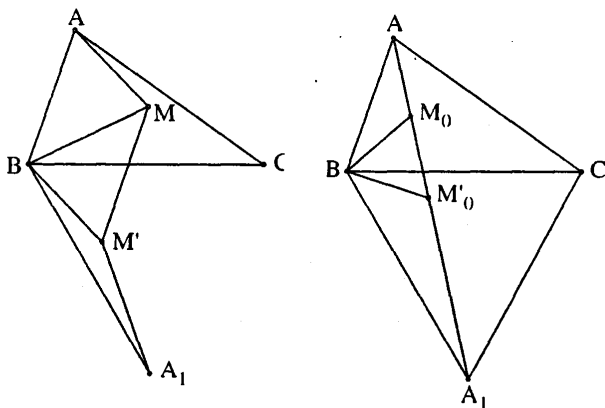
Giả sử M_0 là vị trí của M mà A, M_0, A_1 thẳng hàng

$$\text{Do } \widehat{BM_0M'_0} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AM_0B} = 120^\circ.$$

Theo tính chất của phép quay ta có góc tạo bởi M_0C và M'_0A_1 bằng 60°

$$\Rightarrow \widehat{M'_0M_0C} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BM_0C} = 120^\circ.$$



Vậy M_0 là điểm nhìn ba cạnh tam giác dưới ba góc bằng nhau $= 120^\circ$, tức M_0 là điểm Toricelli phải tìm.

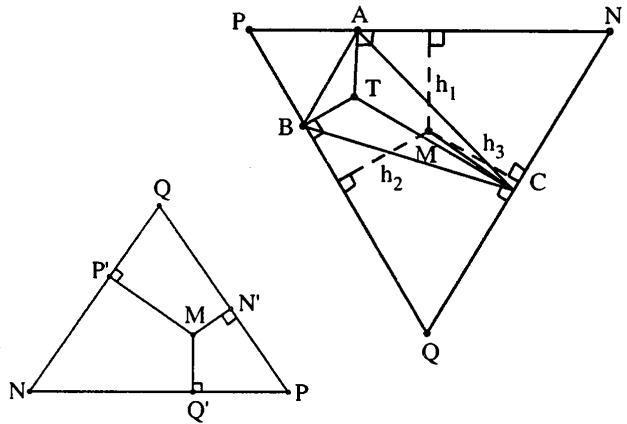
Cách 3:

Rõ ràng ta có bổ đề hiển nhiên sau đây (vì thế chúng tôi bỏ qua chứng minh). Nếu QNP là tam giác đều, thì với mọi vị trí của điểm M nằm trong miền tam giác QNP, ta luôn có tổng khoảng cách từ M tới ba cạnh của tam giác QNP là hằng số (có thể tính được ngay hằng số này bằng chính chiều cao của tam giác đều QNP).

Áp dụng bổ đề ấy ta giải bài toán Toricelli như sau:

Do ΔABC có $\max(A, B, C) < 120^\circ$, nên tồn tại duy nhất điểm T nhìn ba cạnh của tam giác dưới ba góc bằng nhau, tức là: $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{ATC} = 120^\circ$.

Qua A, B, C dựng ba đường vuông góc TA, TB, TC. Ba đường này cắt nhau tại Q, N, P. Dễ thấy QNP là tam giác đều. Lấy M là điểm tùy ý trong ΔABC . Gọi h_1, h_2, h_3 là khoảng cách từ M tới ba cạnh NP, PQ, QN của ΔQNP .



Rõ ràng ta có:

$$MA + MB + MC \geq h_1 + h_2 + h_3$$

Theo bổ đề nêu trên (áp dụng vào tam giác đều QNP), ta có:

$$h_1 + h_2 + h_3 = TA + TB + TC$$

$$\text{Từ đó suy ra: } MA + MB + MC \geq TA + TB + TC \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra trong $(*) \Leftrightarrow M \equiv T$. Đó chính là đpcm.

Cách 4:

Sử dụng bổ đề hiển nhiên sau đây (Chứng minh rất đơn giản và xin dành cho các bạn đọc)

Bổ đề: Giả sử $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 120^\circ$ và $MA = MB = MC$ thì:

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$$

Do giả thiết $\max(A, B, C) < 120^\circ$, nên tồn tại duy nhất điểm T trong tam giác sao cho $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120^\circ$.

Áp dụng bổ đề suy ra: $\frac{\overline{TA}}{TA} + \frac{\overline{TB}}{TB} + \frac{\overline{TC}}{TC} = 0$ (*)

$\left(\text{Do độ dài của ba vectơ } \frac{\overline{TA}}{TA}, \frac{\overline{TB}}{TB}, \frac{\overline{TC}}{TC} \text{ đều bằng } 1 \right)$

Lấy M là điểm bất kỳ trong miền tam giác ABC, ta có:

$$MA + MB + MC = \frac{MA \cdot TA}{TA} + \frac{MB \cdot TB}{TB} + \frac{MC \cdot TC}{TC}.$$

Sử dụng các bất đẳng thức hiển nhiên sau:

1. $|\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} + \dots + \overline{\alpha_n}| \leq |\overline{\alpha_1}| + |\overline{\alpha_2}| + \dots + |\overline{\alpha_n}|.$

2. $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} \leq |\overline{\alpha}| \cdot |\overline{\beta}|$; ta có:

$$\frac{MA \cdot TA}{TA} + \frac{MB \cdot TB}{TB} + \frac{MC \cdot TC}{TC} \geq \frac{\overline{MA} \cdot \overline{TA}}{TA} + \frac{\overline{MB} \cdot \overline{TB}}{TB} + \frac{\overline{MC} \cdot \overline{TC}}{TC}. \quad (2)$$

Để thấy: $VF(2) = \frac{(\overline{MT} + \overline{TA})\overline{TA}}{TA} + \frac{(\overline{MT} + \overline{TB})\overline{TB}}{TB} + \frac{(\overline{MT} + \overline{TC})\overline{TC}}{TC}$

$$= \overline{MT} \left(\frac{\overline{TA}}{TA} + \frac{\overline{TB}}{TB} + \frac{\overline{TC}}{TC} \right) + TA + TB + TC. \quad (3)$$

Từ (*) và (3) suy ra: $VF(2) = TA + TB + TC. \quad (4)$

Từ (1) (2) (3) (4) suy ra: $MA + MB + MC \geq TA + TB + TC.$

Nhận xét: Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv T$. Đó chính là đpcm.

Cũng giống như trong các bài toán đại số, giải tích, với các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong các bài toán khác nói chung (trong hình học phẳng nói riêng) cũng có rất nhiều cách giải khác nhau. Bài toán trên là một ví dụ điển hình minh chứng cho tính đa dạng của các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một đại lượng cho trước.

Bài 5. Cho tam giác ABC với $a > b > c$, ở đây qua a, b, c kí hiệu độ dài các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Giả sử M là một điểm di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

Tìm giá trị bé nhất của đại lượng $S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$

Hướng dẫn giải

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Khi đó (C) = $\widehat{BC} \cup \widehat{CA} \cup \widehat{AB}.$ (1)

Giả sử $M \in \widehat{BC}$.

Gọi H, I, J tương ứng là hình chiếu của M xuống AB, BC, CA .

Khi đó ta có: $MI = x$; $MJ = y$; $MH = k$.

Giả sử $K \in AC$ sao cho $AB = CK$ (do $a > b > c$).

Gọi $L = MK \cap BC$

$$\text{Để thấy } \triangle BLM \sim \triangle ACM \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BL}{x}. \quad (1)$$

$$\text{Ta cũng có } \triangle CLM \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{CL}{x}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BL + CL}{x} = \frac{a}{x}.$$

$$\text{Do vậy } S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}.$$

$$\text{Như vậy } \min_{M \in BC} S = \min_{M \in BC} \left(\frac{2a}{x} \right) = \frac{2a}{\max_{M \in BC} MI} = \frac{2a}{M_0 I_0},$$

ở đây M_0 là trung điểm của $\widehat{BC}$

$$\text{Ta có: } M_0 I_0 = BI_0 \tan \widehat{M_0 B I_0} = \frac{a}{2} \tan \frac{A}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \min_{M \in BC} S = \frac{2a}{\frac{a}{2} \tan \frac{A}{2}} = 4 \cot \frac{A}{2}. \quad (3)$$

Lập luận tương tự, có:

$$\min_{M \in AC} S = 4 \cot \frac{B}{2} \text{ và } \min_{M \in AB} S = 4 \cot \frac{C}{2}. \quad (4)$$

Theo nguyên lí phân rã, ta có:

$$\min_{M \in \mathcal{C}} S = \min \left\{ \min_{M \in BC} S, \min_{M \in AC} S, \min_{M \in AB} S \right\}. \quad (5)$$

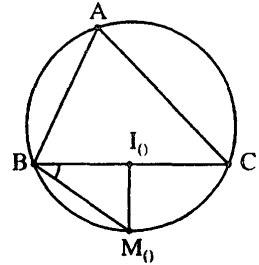
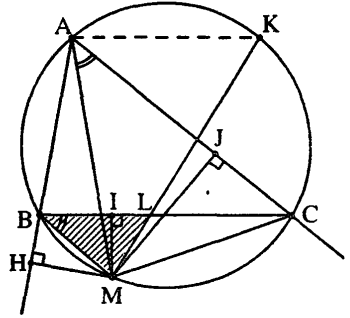
Từ (3) (4) (5) suy ra:

$$\min_{M \in \mathcal{C}} S = \min \left\{ 4 \cot \frac{A}{2}, 4 \cot \frac{B}{2}, 4 \cot \frac{C}{2} \right\} \quad (6)$$

$$\text{Do } a > b > c \Rightarrow 180^\circ > A > B > C > 0$$

$$\Rightarrow 90^\circ > \frac{A}{2} > \frac{B}{2} > \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \cot \frac{A}{2} < \cot \frac{B}{2} < \cot \frac{C}{2}. \quad (7)$$

$$\text{Vậy từ (6) (7) đi đến: } \min_{M \in \mathcal{C}} S = 4 \cot \frac{A}{2} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } \widehat{BC}.$$



Bài 6. Cho hình tròn bán kính r . Xét tất cả các tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn. Tìm giá trị nhỏ nhất của đại lượng $P = AB + CD$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $\Rightarrow M$ là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc A, B, C, D của tứ giác.

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và gọi ABN là tam giác cân nội tiếp có đỉnh là N sao cho $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$.

Gọi h là khoảng cách từ N xuống AB , còn h_1 là khoảng cách từ M xuống AB . Khi đó ta có:

$$h \geq h_1 \text{ và } h_1 = r.$$

$$\text{Ta có } AB = 2h \tan \frac{\widehat{ANB}}{2} = 2h \tan \frac{\widehat{AMB}}{2}$$

$$\Rightarrow AB \geq 2r \tan \frac{\widehat{AMB}}{2} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow h = h_1$

$\Leftrightarrow M$ cách đều A và B .

$$\text{Tương tự ta có: } CD \geq 2r \tan \frac{\widehat{CMD}}{2}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow M$ cách đều C và D .

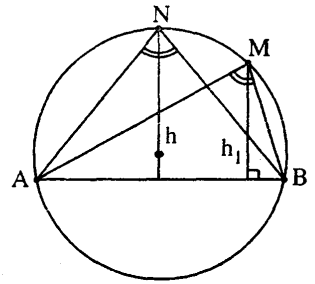
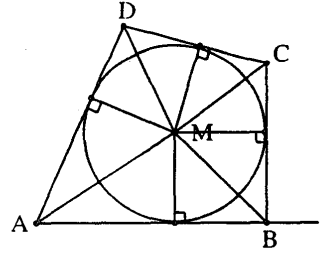
$$\text{Từ (1) (2) có: } P = AB + CD \geq 2r \left(\tan \frac{\widehat{AMB}}{2} + \tan \frac{\widehat{CMD}}{2} \right). \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2).

$$\text{Ta có: } \widehat{AMB} + \widehat{CMD} = \left(180^\circ - \frac{A+B}{2} \right) + \left(180^\circ - \frac{C+D}{2} \right) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\widehat{AMB}}{2} = \cot \frac{\widehat{CMD}}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\widehat{CMD}}{2}}. \text{ Vì theo bất đẳng thức Côsi, suy ra:}$$

$$\tan \frac{\widehat{AMB}}{2} + \tan \frac{\widehat{CMD}}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\widehat{CMD}}{2}} + \tan \frac{\widehat{CMD}}{2} \geq 2. \quad (4)$$



Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\widehat{AMB}}{2} = 45^0$.

Từ (3) (4) đi đến: $P \geq 4r$ (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4)

$\Leftrightarrow M$ cách đều A, B ; M cách đều C, D và $\widehat{AMB} = \widehat{CMD} = 90^0$

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông ngoại tiếp đường tròn bán kính r đã cho.

Tóm lại min $P = 4r$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi và chỉ khi $ABCD$ là hình vuông ngoại tiếp đường tròn bán kính r cho trước.

Bài 7. Xét tất cả các tứ giác $ABCD$ chỉ có duy nhất một cạnh lớn hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của S , ở đây S là diện tích tứ giác $ABCD$.

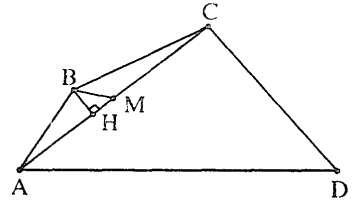
Hướng dẫn giải

Giả sử $AD > 1$. Khi đó ta có: $AB \leq 1, BC \leq 1, CD \leq 1$.

Đặt $AC = x$ và gọi M là trung điểm của AC

Ta có: $AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2}$

$$\Rightarrow 2BM^2 + \frac{x^2}{2} \leq 2 \Rightarrow BM \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}. \quad (1)$$



Do $AC < AB + BC \leq 2 \Rightarrow 0 < x < 2$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC = 1$. Kẻ $BH \perp AC$. Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH \leq \frac{1}{2} x \cdot BM. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow AB = BC$

$$\text{Từ (1) (2) có: } S_{ABC} \leq \frac{1}{4} x \sqrt{4-x^2}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1) (2)

$$\Leftrightarrow AB = BC = 1.$$

$$\text{Ta có: } S_{ACD} = \frac{1}{2} CA \cdot CD \sin \widehat{ACD} \leq \frac{1}{2} x. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow CD = 1$ và $AC \perp CD$.

$$\text{Từ (3) (4) ta có: } S = S_{ASBCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \leq \frac{1}{4} x \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2} x,$$

$$\text{hay } S \leq \frac{2x + x\sqrt{4-x^2}}{4}. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4)

$$\Leftrightarrow AB = BC = CD = 1 \text{ và } \widehat{ACD} = 90^0.$$

$$\text{Ta có: } \frac{2x + x\sqrt{4-x^2}}{4} = \frac{x}{4}(1 + 1 + \sqrt{4-x^2}). \quad (6)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiascopski, ta có:

$$(1 + 1 + \sqrt{4-x^2}) \leq 3(2 + 4 - x^2) \text{ hay } 2 + \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{6-x^2}. \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) (7) suy ra: } \frac{2x + x\sqrt{4-x^2}}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x\sqrt{6-x^2}. \quad (8)$$

Dấu bằng trong (8) xảy ra $\Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (7)

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$x\sqrt{6-x^2} \leq \frac{x^2 + (6-x^2)}{2} = 3. \quad (9)$$

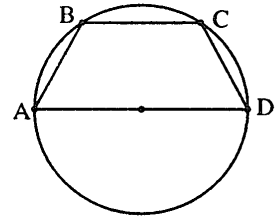
Dấu bằng trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$

$$\text{Từ đó kết hợp với (5) có: } S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{4} \quad (10)$$

$$\text{Kết hợp lại ta có: } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = 1 \\ AC = \sqrt{3} \\ AC \perp CD \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh 1.

Tóm lại $\max S = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh 1.



Bài 8. Trên mặt phẳng cho hai điểm A, B với $AB = d$. Xét tập hợp tất cả các hình vuông sao cho A và B nằm trên các cạnh của hình vuông ấy. Gọi l là tổng các khoảng cách từ A đến các đỉnh của hình vuông. Tìm giá trị nhỏ nhất của l .

Hướng dẫn giải

Giả sử CDEF là một hình vuông tùy ý cạnh a và giả sử $A \in CD$.

Ta có: $AC + AD = a$

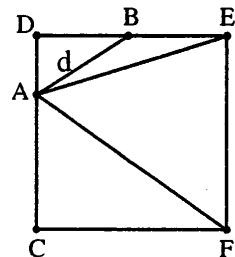
$$AE \geq a, AF \geq a.$$

Do đó cạnh lớn nhất trong các đoạn AC, AD, AE, AF là AE hoặc AF (thí dụ là AF)

Rõ ràng trong các điểm trên biên của hình vuông thì điểm cách xa A nhất phải là một trong các đỉnh.

Từ đó suy ra:

$$AB \leq \max\{AC, AD, AE, AF\} = AF. \quad (1)$$



Hiển nhiên ta có: $AB \leq CE = a\sqrt{2}$.

Từ đó suy ra: $AC + AD = a \geq \frac{AB}{\sqrt{2}}$ (do $\frac{AB}{\sqrt{2}} \leq a$),

$$AE \geq a \geq \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

Từ (1) ta có: $AF \geq AB$, nên kết hợp lại suy ra

$$l = AC + AD + AE + AF \geq \frac{AB}{\sqrt{2}} + \frac{AB}{\sqrt{2}} + AB = AB(1 + \sqrt{2}) = d(1 + \sqrt{2}).$$

Như vậy ta đi đến: $l \geq (1 + \sqrt{2})d$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow AB$ là đường chéo của hình vuông.

Tóm lại: $\min l = (1 + \sqrt{2})d$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi AB là đường chéo của hình vuông.

Bài 9. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1. Điểm M và N lần lượt di động trên AB và CD sao cho $\widehat{MBN} = 45^\circ$. Giả sử S là diện tích tam giác BMN . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của S .

Hướng dẫn giải

Đặt $AM = x$, $CN = y$, như vậy $x, y \in [0; 1]$.

Đặt $\widehat{ABM} = \alpha$, $\widehat{NBC} = \beta$.

Do $\widehat{MBN} = 45^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1 \Rightarrow \frac{x + y}{1 - xy} = 1$$

$$\Rightarrow x + y = 1 - xy. \quad (1)$$

Ta có: $S = S_{BMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{BCN} - S_{MDN}$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{(1-x)(1-y)}{2} = \frac{1-xy}{2}.$$

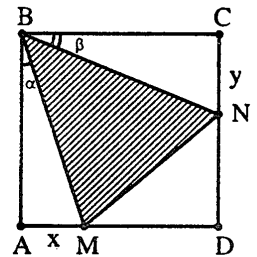
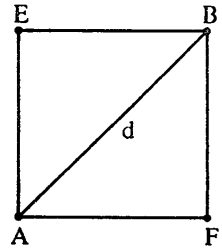
$$\text{Đặt } t = xy. \text{ Khi đó ta có: } S = \frac{1-t}{2} \quad (2)$$

$$\text{Ta có từ (1): } \begin{cases} x + y = 1 - t \\ xy = t \end{cases},$$

nên theo định lý Viet x, y là hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ của phương trình:

$$x^2 - (1-t)x + t = 0 \quad (3)$$

Để (3) có nghiệm như vậy, ta cần có:



$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 6t + 1 \geq 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \quad (*) \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lí Viet với (3) ta có: $x_1 + x_2 = 1 - t$; $x_1 x_2 = t$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 6t + 1 \geq 0 \\ t - (1 - t) + 1 \geq 0 \\ 1 - t \leq 2 \\ t \geq 0 \\ 1 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3 - 2\sqrt{2}. \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra: $\sqrt{2} - 1 \leq S \leq \frac{1}{2}$ (4)

$$S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 1; y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv A; N \equiv D \\ M \equiv D; N \equiv C \end{cases}$$

$$S = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow t = 3 - 2\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow M, N$ tương ứng là chân đường phân giác của $\widehat{ABD}$, $\widehat{DBC}$.

$$\text{Vậy } \max S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv A, N \equiv D \\ M \equiv D, N \equiv C \end{cases}$$

$$\min S = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow M \equiv M_0; N \equiv N_0,$$

ở đây BM_0 và BN_0 lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{DBC}$.

Nhận xét: Ta có cách giải khác bài toán trên như sau: (dựa vào lượng giác)

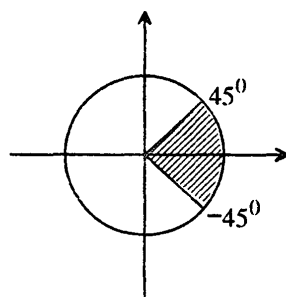
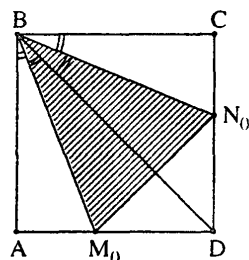
$$\text{Ta có: } S = S_{BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \sin \widehat{MBN}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \beta} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2 \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (5)$$

(do $\alpha + \beta = 45^\circ$)

Vì $\alpha, \beta \in [0; 45^\circ]$, nên $-45^\circ \leq \alpha - \beta \leq 45^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1$$



(6)

Từ (5) (6) suy ra: $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \leq S \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$

hay $\sqrt{2} - 1 \leq S \leq \frac{1}{2}.$ (7)

Lại có: $S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 22^\circ 30'$

$S = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 45^\circ \\ \alpha - \beta = -45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 45^\circ; \beta = 0 \\ \alpha = 0; \beta = 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv D; N \equiv C \\ M \equiv A; N \equiv D \end{cases}$

Ta thu lại kết quả trên!

Nhận xét: Một lần nữa ta thấy được tính đa dạng của các phương pháp dùng để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các lĩnh vực khác nhau: đại số, giải tích, số học, hình học, lượng giác...

Bài 10. Cho nửa đường tròn bán kính R , đường kính AOB . C là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn không trùng với A và B . Trong hai hình quạt BOC và AOC vẽ hai đường tròn nội tiếp. Gọi M và N là hai tiếp điểm của hai đường tròn ấy với đường kính AB của nửa đường tròn đã cho. Đặt $l = MN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của l .

Hướng dẫn giải

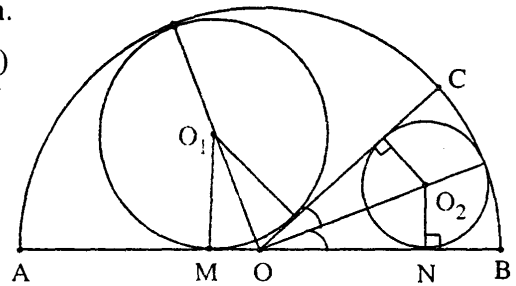
Gọi O_1, O_2 là tâm của hai đường tròn.

Đặt $\widehat{CON} = 2\alpha$ (như vậy $0 < \alpha < 90^\circ$)

Đặt $MO_1 = R_1$; $NO_2 = R_2$.

Dễ thấy $\widehat{O_2ON} = \frac{1}{2}\widehat{CON} = \alpha,$

$\widehat{O_1OM} = \frac{1}{2}\widehat{COM} = 90^\circ - \alpha.$



Ta có $l = MN = OM + ON = R_1 \cot(90^\circ - \alpha) + R_2 \cot \alpha$
 $= R_1 \tan \alpha + R_2 \cot \alpha$ (1)

Trong tam giác vuông O_1MO , ta có $R_1 = OO_1 \sin(90^\circ - \alpha) = (R - R_1) \cos \alpha$

$\Rightarrow R_1(1 + \cos \alpha) = R \cos \alpha \Rightarrow R_1 = \frac{R \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$ (2)

Hoàn toàn tương tự, ta có $R_2 = \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra $l = \frac{R \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{R \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{R \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = R \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{(1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)} \\
 &= R \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2} = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \\
 &= \frac{2R}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Do $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ)$, mà $0 < \alpha < 90^\circ$.

$\Rightarrow 0 < \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$, vì thế từ (3) có :

$$\left\{ \begin{aligned} l &\geq \frac{2R}{\sqrt{2} + 1} = 2R(\sqrt{2} - 1) \\ l &= 2R(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \cos(\alpha - 45^\circ) = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \\ &\Leftrightarrow C \text{ là trung điểm của } \widehat{AB} \end{aligned} \right.$$

Vậy $\min l = 2R(\sqrt{2} - 1)$, khi C là điểm chính giữa của $\widehat{AB}$.

E. Điểm qua một số bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong lượng giác

Bài 1. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của đại lượng sau:

$$P = \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} - \tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2}$$

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} \geq 2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$

$$\tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 2 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

$$\tan^2 \frac{C}{2} + \tan^2 \frac{A}{2} \geq 2 \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}.$$

Từ đó suy ra:

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}.$$

Trong mọi tam giác ABC, thì VP (1) = 1, như vậy ta có :

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$

Lại theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$1 = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \geq 3 \sqrt{\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2} \leq \frac{1}{27}.$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$. Từ (2) (3) có $P \geq \frac{26}{27}$.

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3)

$$\Leftrightarrow A = B = C.$$

Như vậy $\min P = \frac{26}{27} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \cos \frac{A}{2} \sqrt{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$ ở đây A, B, C là ba góc của một tam giác ABC .

Hướng dẫn giải

Chú ý rằng $P > 0$ với mọi tam giác ABC . Từ đó ta có $\max P = \sqrt{\max P^2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P^2 &= \cos^2 \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \left(\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Do } \cos \frac{B-C}{2} \leq 1, \text{ nên từ (2) có } P^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra } \Leftrightarrow \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow B = C$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(2 - 2 \sin \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right).$$

Từ đó theo bất đẳng thức Côsi, có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right) &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2 - 2 \sin \frac{A}{2} \right) + \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right) + \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)}{3} \right]^3 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right) &\leq \frac{16}{27}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Dấu bằng trong (4) xảy ra } \Leftrightarrow 2 - 2 \sin \frac{A}{2} = 1 + \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ (3) (4) đi đến } \begin{cases} P^2 \leq \frac{16}{27} \\ P^2 = \frac{16}{27} \Leftrightarrow B = C \text{ và } \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy từ (1) ta có } \max P = \sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\Leftrightarrow ABC \text{ là tam giác cân đỉnh A với } A = 2\arcsin \frac{1}{3}.$$

Bài 3. Xét các tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $\tan A + \tan C = 2\tan B$.

Tìm giá trị lớn nhất của đại lượng $S = \cos A + \cos C$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \tan A + \tan C = 2\tan B \Rightarrow \frac{\sin(A+C)}{\cos A \cos C} = \frac{2\sin B}{\cos B}$$

$$\Rightarrow \cos B = 2\cos A \cos C \quad (\text{do } \sin B = \sin(A+C) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \cos B = \cos(A+C) + \cos(A-C)$$

$$\Rightarrow 2\cos B = \cos(A-C). \quad (1)$$

Lại có $S = \cos A + \cos C$

$$= 2\cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2\sin \frac{B}{2} \sqrt{\frac{1+\cos(A-C)}{2}}.$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra } S = 2\sin \frac{B}{2} \sqrt{\frac{1+2\cos B}{2}}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) suy ra } S > 0, \text{ nên } \max S = \sqrt{\max S^2}. \quad (4)$$

$$\text{Ta có } S^2 = 4\sin^2 \frac{B}{2} \frac{1+2\cos B}{2} = \frac{(2-2\cos B)(1+2\cos B)}{2}.$$

Vì thế theo bất đẳng thức Côsi đi đến

$$\begin{aligned} S^2 &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{(2-2\cos B) + (1+2\cos B)}{2} \right]^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} S^2 \leq \frac{9}{8} \\ S^2 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow 2-2\cos B = 1+2\cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có } \max S = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(A-C) = 2\cos B \\ \cos B = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-C = \frac{\pi}{3} \\ B = \arccos \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của đại lượng $S = \tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2}$, ở đây A,

B, C là ba góc của một tam giác.

Hướng dẫn giải

$$\text{Để thấy } S \geq \tan^3 \frac{A}{2} \tan^3 \frac{B}{2} + \tan^3 \frac{B}{2} \tan^3 \frac{C}{2} + \tan^3 \frac{C}{2} \tan^3 \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$.

$$\text{Đặt } x = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}, y = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}, z = \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \text{ thì } x + y + z = 1$$

(chú ý $x > 0, y > 0, z > 0$)

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai dãy } \sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z} \\ \sqrt{x^3}, \sqrt{y^3}, \sqrt{z^3},$$

$$\text{ta có } (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2. \quad (2)$$

$$\text{Lại có } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3}. \quad (3)$$

$$\text{Từ đó suy ra } x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{9}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)
 $\Leftrightarrow A = B = C$.

$$\text{Từ (1) (4) có } \begin{cases} S \geq \frac{1}{9} \\ S = \frac{1}{9} \Leftrightarrow A = B = C \end{cases}$$

Vậy $\min S = \frac{1}{9} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Bài 5. Xét các tam giác ABC với A là góc lớn nhất.

Tìm giá trị lớn nhất của đại lượng $S = \sin 2B + \sin 2C + \frac{2}{\sin A}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } S = 2\sin(B + C)\cos(B - C) + \frac{2}{\sin A} \\ = 2\sin A \cos(B - C) + \frac{2}{\sin A} \quad (1)$$

Do $\sin A > 0$ và $\cos(B - C) \leq 1$, nên từ (1) có:

$$S \leq 2\sin A + \frac{2}{\sin A}. \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C$.

Do A là góc lớn nhất trong tam giác $\Rightarrow A \geq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin A \leq 1$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ với $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1$.

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2}$, nên có bảng biến thiên sau

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$f'(x)$		-
$f(x)$		

Vậy $\max_{\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó suy ra (kết hợp với (2)) $\begin{cases} S \leq \frac{7\sqrt{3}}{3} \\ S = \frac{7\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow B = C \text{ và } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow A = B = C$

Vậy $\max S = \frac{7\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Bài 6. Xét tam giác ABC với $A \geq 90^\circ$.

Tìm giá trị lớn nhất của đại lượng $P = \tan B \tan C + 2 \cot A$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có $\tan B \tan C \leq \cot^2 \frac{A}{2}$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow B = C$.

Từ đó $P \leq \cot^2 \frac{A}{2} + 2 \cot A$. (2)

Do $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{2 \tan \frac{A}{2}}$. (3)

Thay (3) vào (2) ta đi đến $P \leq \cot^2 \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} - \frac{1}{\cot \frac{A}{2}}$. (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow B = C$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}$ với $0 < x \leq 1$

(do $A \geq 90^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} \geq 45^\circ \Rightarrow 0 < \cot \frac{A}{2} \leq 1$).

Ta có $f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (0; 1]$, nên có bảng biến thiên sau

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$		

Vậy $\max_{0 < x \leq 1} f(x) = f(1) = 1$. Từ (4) suy ra :

$$\begin{cases} P \leq 1 \\ P = 1 \Leftrightarrow B = C \text{ và } \cot \frac{A}{2} = 1 \\ \Leftrightarrow ABC \text{ là tam giác vuông cân tại A} \end{cases}$$

Từ đó ta có $\max P = 1 \Leftrightarrow ABC$ là tam giác vuông cân tại A.

Chú ý: (1) chứng minh như sau

Do $A \geq 90^\circ \Rightarrow B + C \leq 90^\circ \Rightarrow \cos(B + C) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos B \cos C &= \frac{1}{2} [\cos(B + C) + \cos(B - C)] \\ &\geq \frac{1}{2} [\cos(B + C) \cos(B - C) + \cos(B - C)] \\ \Rightarrow \cos B \cos C &\geq \frac{1}{2} \cos(B - C) [1 + \cos(B + C)] = \cos(B - C) \cos^2 \frac{B + C}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos B \cos C \geq \sin^2 \frac{A}{2} \cos(B - C)$$

$$\Rightarrow \cos B \cos C \geq \sin^2 \frac{A}{2} (\cos B \cos C + \sin B \sin C)$$

$$\Rightarrow (1 - \sin^2 \frac{A}{2}) \cos B \cos C \geq \sin^2 \frac{A}{2} \sin B \sin C.$$

Do B, C nhọn $\Rightarrow \cos B \cos C > 0$.

$$\text{Từ đó ta có } \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} \Rightarrow \tan B \tan C \leq \cot^2 \frac{A}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \cos(B - C) \Leftrightarrow B = C \Rightarrow$ (1) được chứng minh!

Bài 7. Xét tập hợp các tam giác ABC không phải là tam giác có góc tù.

Tìm giá trị nhỏ nhất của đại lượng $P = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C}$

Hướng dẫn giải

Do vai trò bình đẳng của A, B, C nên có thể giả sử $A = \max\{A; B; C\}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq A \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ta có:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{\sin A + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\cos A + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}.$$

Đặt $x = \cos \frac{B-C}{2}$ ($0 \leq x \leq 1$)

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin A + 2x \cos \frac{A}{2}}{\cos A + 2x \sin \frac{A}{2}}$ với $0 < x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cos \frac{3A}{2}}{(\cos A + 2x \sin \frac{A}{2})^2}.$

Do $\frac{\pi}{3} \leq A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{3A}{2} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos \frac{3A}{2} \leq 0$

Từ đó có $f'(x) \leq 0 \forall 0 < x \leq 1$, nên có bảng biến thiên sau:

x	0	1
f'(x)		-
f(x)		

Do vậy $\min_{0 < x \leq 1} f(x) = f(1) = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2}}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}}.$

Xét hàm số $g(A) = \frac{\sin A + 2 \cos \frac{A}{2}}{\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}}$ với $\frac{\pi}{3} \leq A \leq \frac{\pi}{2}.$

Ta có (sau khi rút gọn) $g'(A) = \frac{\sin \frac{3A}{2} - 1}{\left(\cos A + 2 \sin \frac{A}{2}\right)^2} \leq 0.$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		-	
$g(x)$			

$$\text{Vậy } \min_{\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{3}} g(A) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$

$$\text{Từ đó suy ra } f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} + 1. \quad (1)$$

$$\text{Dấu bằng trong (1) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ A=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ A=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABC$ là tam giác vuông cân đỉnh A.

$$\text{Từ đó ta có kết quả sau: } \min P = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$\Leftrightarrow ABC$ là tam giác vuông cân đỉnh A.

Bài 8. Xét ABC là tập hợp các tam giác nhọn.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \tan A + \tan B + \tan C + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Rõ ràng trong một tam giác nhọn, ta có:

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$.

$$\text{Như vậy } P \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} + \frac{1}{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}}.$$

$$\text{Trong mọi tam giác ta có } \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2},$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}.$$

Từ (2) (3) (4) sau khi đặt $x = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$, ta có:

$$P \geq x + \frac{1}{x} \text{ với } x \geq 3\sqrt{3}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, nên có bảng biến thiên sau:

x	$3\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

Từ đó $\min_{x \geq \sqrt{3}} = f(3\sqrt{3}) = \frac{28\sqrt{3}}{9}$.

Kết hợp lại suy ra $P \geq \frac{28\sqrt{3}}{9}$

$$P = \frac{28\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = C \\ x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C.$$

Như thế $\min P = \frac{28\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của đại lượng $S = \cos A + \cos B + \cos C$, ở đây A, B, C là ba góc của tam giác ABC .

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 - 4 \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[- \left(2 \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 - \sin^2 \frac{A-B}{2} + 3 \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

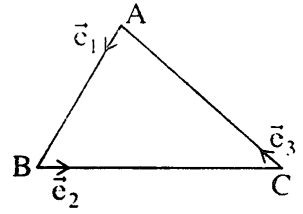
Từ (1) suy ra $S \leq \frac{3}{2}$ (2)

và $S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{A-B}{2} = 0 \\ 2 \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C.$

Vậy $\max S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Nhận xét: Xét các cách giải khác sau đây:

1. Xét các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ như hình vẽ.



Ta có $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow |\vec{e}_1|^2 + |\vec{e}_2|^2 + |\vec{e}_3|^2 + 2|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2|\vec{e}_1||\vec{e}_3|\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + 2|\vec{e}_2||\vec{e}_3|\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \geq 0.$$

Do $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$.

Tương tự $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = -\cos A$ và $\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = -\cos C$.

Do $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1 \Rightarrow 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 0$

$$\Rightarrow S = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Lại có $S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = -\vec{e}_3$$

$\Leftrightarrow$ BMNP là hình thoi có $BM = BN = BP = 1$

$$\Leftrightarrow \widehat{MBP} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ.$$

Tương tự $\hat{A} = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow ABC$ là tam giác đều.

Tóm lại $\max S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Ta thu lại kết quả trên.

2. Xét cách giải khác nữa như sau:

Ta có nhận xét hiển nhiên sau:

$$\text{Nếu } x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ thì } \frac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos \frac{x+y}{2}.$$

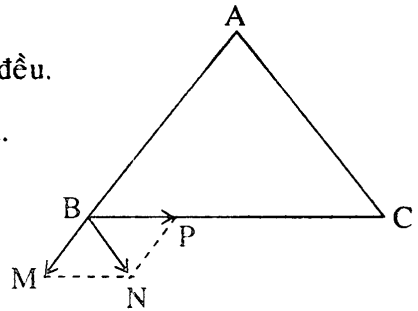
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Từ đó ta có:

$$\frac{\cos A + \cos B}{2} + \frac{\cos C + \cos \frac{\pi}{3}}{2} \leq \frac{\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}{2} \leq \cos \frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{2}}{4} \leq \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$.



Vậy $\max S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều. Ta cũng thu lại kết quả trên.

3. Lại xét cách giải khác nữa như sau:

Ta có $S = \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C \leq 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C \quad (*)$$

Dấu bằng trong (*) xảy ra $\Leftrightarrow \cos \frac{A-B}{2} = 1 \Leftrightarrow A = B$

Xét hàm số $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + \cos x$ với $0 < x < \pi$

Ta có $f'(x) = \cos \frac{x}{2} - \sin x = \cos \frac{x}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{x}{2} \right)$. $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ (do } 0 < x < \pi)$$

Với chú ý khi $0 < x < \pi$ thì $\cos \frac{x}{2} > 0$, ta có bảng biến thiên sau:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			

$$\text{Vậy } \max f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Từ đó kết hợp với (*) suy ra $S \leq \frac{3}{2}$, và $S = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Như thế $\max S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều.

Bài toán mở đầu cuốn sách này đã chứng tỏ sự phong phú và đa dạng của các phương pháp dùng để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức hay một hàm số cho trước.

Bài toán nêu trên khép lại cuốn sách này cùng với một thông điệp rằng: Các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất mà chúng tôi đã trình bày kỹ lưỡng trong cuốn sách này mới thật phong phú làm sao!

MỤC LỤC

Chương 1. Mở đầu về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	3
§1. Vài bài toán mở đầu	3
§2. Nhìn lại các bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trong các kì thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng	13
§3. Cơ sở lí thuyết của bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	30
Chương 2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	33
§1. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi	42
1.1. Sử dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản	42
1.2. Phương pháp sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi	50
1.3. Phương pháp thêm bớt hằng số	63
1.4. Phương pháp thêm bớt hạng tử	73
1.5. Phương pháp nhóm các số hạng	90
1.6. Phương pháp sử dụng kĩ thuật ngược dấu trong bất đẳng thức Côsi	111
§2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất hàm số	119
§3. Các phương pháp thông dụng khác sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	133
1. Phương pháp xuất phát từ một bất đẳng thức đã biết từ trước	133
2. Các bài toán khác sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	141
Chương 3.	
Phương pháp lượng giác hóa tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	191
Chương 4. Phương pháp chiều biến thiên hàm số tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	206
§1. Sử dụng trực tiếp chiều biến thiên hàm số để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	206
§2. Sử dụng chiều biến thiên hàm số có kết hợp thêm các phương pháp khác để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	216
Chương 5.	
Phương pháp miền giá trị hàm số tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số	227
Chương 6. Phương pháp sử dụng đồ thị hoặc hình học để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số	243

Chương 7. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong bài toán

giải phương trình và bất phương trình có tham số 263

- §1. Mối liên hệ giữa giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số
và sự có nghiệm của phương trình và bất phương trình 263
- §2. Các bài toán biện luận phương trình và bất phương trình có tham số
có mặt trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng 264
- §3. Sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
để biện luận phương trình và bất phương trình có tham số 272
 - A. Biện luận phương trình có tham số 272
 - B. Biện luận bất phương trình có tham số 285

Chương 8. Vài bài toán khác về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số 296

- §1. Ứng dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất để giải phương trình
và bất phương trình không có tham số 296
- §2. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số phụ thuộc tham số 308
 - A. Biện luận theo tham số giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của họ hàm số
phụ thuộc tham số 308
 - B. Các ứng dụng của việc khảo sát giá trị lớn nhất và nhỏ nhất
của các hàm số phụ thuộc tham số 314
- §3. Giới thiệu một số bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong số học,
hình học, lượng giác 330
 - A. Vài bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong số học 330
 - B. Điểm qua bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học tổ hợp 342
 - C. Vài bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong hình học không gian 348
 - D. Điểm qua vài bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong hình học phẳng 355
 - E. Điểm qua một số bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong lượng giác 370