BẤT ĐẲNG THỨC

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa :

Cho a ; b $\in$R. Mệnh đề " a > b" ; "a $\ge$ b" ; "a < b" ; " a $\le$ b" gọi là bất đẳng thức

2.Tính chất :

* $a>b$ và $b>c \Rightarrow a>c$
* $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$
* $a>b$ và $c>d \Rightarrow a+c>b+d$
* $a>b \Rightarrow \begin{cases} ac>bc & \text{khi } c>0 \\ ac<bc & \text{khi } c<0 \end{cases}$
* $a>b\ge 0 \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$
* $a\ge b\ge 0 \Leftrightarrow a^2\ge b^2$
* $a>b\ge 0 \Rightarrow a^n>b^n$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

* $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ (Với $a>0$)
* $|x|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>a \\ x<-a \end{array}\right.$ (Với a > 0)

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bđt Cauchy)

a) Cho $a,b\ge 0$, ta có $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi a = b

<u>Hệ quả</u> :*. Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi 2 số đó bằng nhau

*. Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi 2 số đó bằng nhau

b) Cho $a,b,c\ge 0$, ta có $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

5. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

I. Phương pháp biến đổi tương đương

Để chứng minh BĐT dạng $A\ge B$ ta thường dùng các cách sau :

<u>Cách 1 :</u> Ta chứng minh $A-B\ge 0$. Để là điều này ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A-B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.

Chú ý : Một số kết quả ta thường hay sử dụng

* $x^2\ge 0\ \forall x$ và $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$; $|x|\ge 0\ \forall x$ và $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

* $a^2+b^2+c^2\ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=0$.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a,b. Chứng minh rằng : $a^2+b^2\ge 2ab$.

Giải : Ta có $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$. Đẳng thức có $\Leftrightarrow a=b$.

Ví dụ 2 : Cho ba số thực a,b,c. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (I**)**.

Giải : Ta có : $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2-2ca+a^2)$$

$=\frac{1}{2}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 3 : Cho 5 số thực a,b,c,d,e. Cmr : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$.

Giải :

Ta có : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)=$

$=(\frac{a^2}{4}-ab+b^2)+(\frac{a^2}{4}-ac+c^2)+(\frac{a^2}{4}-ad+d^2)+(\frac{a^2}{4}-ae+e^2)$

$=(\frac{a}{2}-b)^2+(\frac{a}{2}-c)^2+(\frac{a}{2}-d)^2+(\frac{a}{2}-e)^2\geq 0\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b=c=d=e=\frac{a}{2}$.

Nhận xét :

1) BĐT ở Ví dụ 3 cũng đúng với n số thực $1\leq n\leq 5$, còn $n\geq 6$ thì không còn đúng nữa, tức là BĐT $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq a_i(a_1+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n)$ đúng với n số thực $\Leftrightarrow n\leq 5$.

2) Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ thì ta có thể viết BĐT (1) dưới các dạng sau :

$$(a+b+c)\geq 3(ab+bc+ca) \quad \text{(II)}$$
$$3(a^2+b^2+c^2)\geq (a+b+c)^2 \quad \text{(III)}.$$

Các BĐT (I), (II), (III) có nhiều ứng dụng trong chứng minh BĐT, ta xét các bài toán sau :

Bài toán 1.2 : Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh BĐT sau

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c \ \ (1)$$ (***Vô dịch Toán Canađa 2002)***

Giải : BĐT (1) $\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$ (2)

Áp dụng (I) hai lần ta có :

$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq$

$\geq ab.bc+bc.ca+ca.ab=abc(a+b+c)\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét : * Nếu ta cho $abc=1$ thì (2) trở thành : $a^4+b^4+c^4\geq a+b+c$ đây là bài toán 3 đề thi HSG tỉnh Đồng Nai lớp 11 năm 2005.

* Nếu ta cho $a+b+c=1$ thì (2) trở thành : $a^4+b^4+c^4\geq abc$

Bài toán 2.2 : Cho các số thực dương $x,y,z>0$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}\leq\sqrt{21}.$$

Giải : Áp dụng BĐT (III) với $a=\sqrt{4x+1},b=\sqrt{4y=1},c=\sqrt{4z+1}$ ta có

$VT=a+b+c\leq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{3(4x+1+4y+1+4z+1)}=\sqrt{21}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài toán 3.2: Gọi p là chu vi tam giác ABC. Cmr :

$$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}.$$

Giải : Áp dụng BĐT (III) ta có :

$VT\le\sqrt{3(p-a+p-b+p-c)}=\sqrt{3p}$ đpcm. Đẳng thức có khi ΔABC đều.

Ví dụ 4 : Cho $a,b\ge 0$. Chứng minh rằng : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

Giải : Ta có :

$a^3+b^3-a^2b-b^2a=a^2(a-b)+b^2(b-a)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)\ge 0$

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Nhận xét : * Qua chứng minh trên ta thấy chỉ cần điều kiện $a+b\ge 0$ thì BĐT luôn đúng và ta còn có kết quả tổng quát như sau : $a^{m+n}+b^{m+n}\ge a^mb^n+a^nb^m$.

* Sử dụng kết quả bài toán trên ta có thể giải quyết được một số bài toán sau :

Bài toán 1.4 : Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.$$

Giải :

Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$$

Tương tự : $\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\le\dfrac{a}{abc(a+b+c)}$; $\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Sau đây ta xét bài toán được giới thiệu trong kì thi IMO năm 1995.

Bài toán 2.4 : Cho $a,b,c\ge 0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ac}\le 1.$$

Giải : Ta có : $a^5+b^5\ge a^3b^2+b^3a^2=a^2b^2(a+b)\Rightarrow a^5+b^5+ab\ge ab\dfrac{a+b+c}{c}$

$$\Rightarrow\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{ab\dfrac{a+b+c}{c}}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Tương tự : $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\dfrac{a}{a+b+c}$; $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ac}\le\dfrac{b}{a+b+c}$

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm.

Bài toán 3.4 : Cho $a+b\ge 0$. Chứng minh : $\dfrac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}\ge\dfrac{a^m+b^m}{2}\dfrac{a^n+b^n}{2}$

Giải :

Ta có BĐT $\Leftrightarrow 2(a^{m+n}+b^{m+n})\ge(a^m+b^m)(a^n+b^n)\Leftrightarrow a^{m+n}+b^{m+n}\ge a^mb^n+a^nb^m$

Đây chính là BĐT trong nhận xét trên.

Bài toán 4.4 : Cho các số thực a,b. Chứng minh rằng :

$$(a^2+b^2)(a^8+b^8)(a^{10}+b^{10})\le 4(a^{20}+b^{20}).$$

Giải : Đặt $x=a^2, y=b^2 \Rightarrow x,y\ge 0$ và BĐT trở thành :

$(x+y)(x^4+y^4)(x^5+y^5)\le 4(x^{10}+y^{10})$

Áp dụng bài toán 3 ta có :

$\frac{x+y}{2}\frac{x^4+y^4}{2}\frac{x^5+y^5}{2}\le \frac{x^5+y^5}{2}\frac{x^5+y^5}{2}\le \frac{x^{10}+y^{10}}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 5.4 : Cho $a+b\ge 0$.Chứng minh rằng : $\frac{a^n+b^n}{2}\ge (\frac{a+b}{2})^n$.

Giải : Áp dụng kết quả bài toán 3 ta có :

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}.\frac{a+b}{2}...\frac{a+b}{2}}_{n \text{ lần}}\le \frac{a^2+b^2}{2}.\underbrace{\frac{a+b}{2}...\frac{a+b}{2}}_{n-1 \text{ lần}}\le ...\le \frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}\frac{a+b}{2}\le \frac{a^n+b^n}{2}$$

$\Rightarrow (\frac{a+b}{2})^n\le \frac{a^n+b^n}{2}$ đpcm.

Ví dụ 5 : Cho $ab\ge 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\ge \frac{2}{1+ab}$.

Giải : Ta có $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}-\frac{2}{1+ab}=(\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{1+ab})+(\frac{1}{b^2+1}-\frac{2}{1+ab})$

$=\frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)}+\frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)}=\frac{a-b}{1+ab}(\frac{b}{1+b^2}-\frac{a}{1+a^2})=\frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)}$

$=\frac{a-b}{1+ab}\frac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)}=\frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)}\ge 0$ (Do $ab\ge 1$).

Nhận xét : Nếu $-1<ab\le 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\le \frac{2}{1+ab}$.

Ví dụ 6 : Cho hai số thực x,y. Chứng minh : $3(x+y+1)^2+1\ge 3xy$.

Giải : Vì ta có : $xy\le \frac{1}{4}(x+y)^2$ nên ta chứng minh :$3(x+y+1)^2+1\ge \frac{3}{4}(x+y)^2$

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(x+y)^2+24(x+y)+16\ge 3(x+y)^2$

$\Leftrightarrow 9(x+y)^2+24(x+y)+16\ge 0 \Leftrightarrow (3x+3y+4)^2\ge 0$ đpcm

Đẳng thức xay ra khi : $x=y=-\frac{2}{3}$.

Cách 2 : Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh
Đối với cách này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

Ví dụ 1 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Giải : Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :
$a+b>c \Rightarrow ac+bc>c^2$. Tương tự
$bc+ba>b^2$; $ca+cb>c^2$ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm

Nhận xét : ***** Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c. Tương tự thì xuất phát từ BĐT $|a-b|<c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.
* Nếu giả thiết các biến $a\in(-1;1)$ thì ta có : $(1-a),\ (1+a)>0\ \ldots$

Ví dụ 2 : Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh : $a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$

Giải : Vì $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\ge 0$
$\Leftrightarrow 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2c^2\ge a^2+b^2+c^2$ (*)
Ta có : $a^2b^2c^2\ge 0$; $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^2b+b^2c+c^2a$ nên từ (*) ta suy ra
$a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$ đpcm.

Ví dụ 3 : Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

$$2(1+a+b+c+ab+bc+ca)+abc\ge 0.$$

Giải : Vì $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a,b,c\in[-1;1]$ nên ta có :
$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc\ge 0$ (*)
Mặt khác : $\dfrac{(1+a+b+c)^2}{2}\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca\ge 0$ (**)
Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Bài tập : Chứng minh các bđt sau:
1) $(ax+by)(bx+ay)\ge(a+b)^2xy$ (với $a,b>0;\ x,y\in R$)
2) $(a+b)(a^2+b^2)(a^7+b^7)\le 4(a^{10}+b^{10})$ với $a+b\ge 0$
3) $a^n+b^n\le a^{n+1}+b^{n+1}$ với a+b ≥ 2
8) $y(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})+\frac{1}{y}(x+z)\le(x+z)(\frac{1}{x}-\frac{1}{z})$ với $z\ge y\ge x\ge 0$
9) $\dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge\dfrac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$ với $a>b>0;\ c>\sqrt{ab}$
10) $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}\ge 4$ với $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

11) $a^2+b^2+c^2\le 5$ với $a,b,c\in[0;2]; a+b+c=3$

12) $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)<0$

13) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>a^3+b^3+c^3$

14) $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ trong đó a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác,S là diện tích.

15*) Cho $x\ge y\ge z\ge 0$. Chứng minh: $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2$.

I. Bất đẳng thức Côsi

Trước hết ta nhắc lại BĐT Côsi cho hai số:

Định lí 1: Với hai số thực không âm x,y ta có:

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \quad (1).$$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x=y.

Việc chứng minh (1) rất đơn giản nên tôi không chứng minh. (1) còn có nhiều cách biểu diễn khác nhau như:

$$x^2 + y^2 \ge 2xy$$

$$x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

BĐT Côsi cho 3 số không âm.

Định lí 2: Với 3 số thực không âm x, y, z ta có:

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz} \quad (2).$$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

<u>Chứng minh:</u>

C1: Đặt $\sqrt[3]{x} = a,\ \sqrt[3]{y} = b,\ \sqrt[3]{z} = c$. Khi đó (2) trở thành: $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc \quad (*)$.

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right] \ge 0\ \forall a,b,c \ge 0$

C2: Vì (2) là BĐT thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh (2) với $x + y + z = 1$. Khi đó

(2) $\Leftrightarrow xyz \le \frac{1}{27}$ (**)

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số ta có: $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(1-z)^2}{4}$

$$\Rightarrow xyz \le \frac{z(z^2 - 2z + 1)}{4} = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{4} = \frac{f(z)}{4}$$

Ta có: $f(z) = \frac{27z^3 - 54z^2 + 27z}{27} = \frac{(3z-1)^2(3z-4) + 4}{27} \le \frac{4}{27}$ (vì $z \in (0;1)$)

$\Rightarrow xyz \le \frac{1}{27} \Rightarrow (**)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Định lí 3: Cho n số thực không âm $x_1, x_2, \ldots x_n$ .Ta có: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ **(3)**.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

*Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

*BĐT côsi thường được áp dụng khi trong bđt cần chứng minh có tổng và tích

*Điều kiện xảy ra dấu '=' là các số bằng nhau

Ví dụ 1: Cho hai số thực không âm a,b. Chứng minh: $(a+b)(1+ab)\ge 4ab$.

Giải: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ 1+ab\ge 2\sqrt{ab}\end{array}\right\}\Rightarrow (1+b)(1+ab)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab}=4ab \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.

Ví dụ 2: Cho $a,b>0$. Chứng minh: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 4$.

Giải: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Nhận xét: BĐT trên còn được viết lại như sau: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ **(I)** . BĐT này có nhiều ứng dụng trong chứng minh BĐT. Ta xét một số bài toán sau:

Bài toán 2.1: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác, p là chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).$$

Giải: áp dụng Bđt (I) ta có:

$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{p-a+p-b}=\frac{4}{c}$. Tương tự ta cũng có :

$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{a}$; $\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\ge\frac{4}{b}$. Cộng ba BĐT này ta có đpcm.

Bài toán 2.2: Cho $a,b>0$ và $a+b=1$. Chứng minh: $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\ge\frac{1}{3}$.

Giải: Ta có: $\text{VT}=\frac{a^2-1}{a+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{b^2-1}{b+1}+\frac{1}{b+1}=-1+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$

Mặt khác áp dụng BĐT (I) ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\ge\frac{4}{a+b+2}=\frac{4}{3}$

Do đó: $\text{VT}\ge -1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Bài toán 2.3: Cho $x,y,z>0$. Chứng minh BĐT sau:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{2x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}).$$

Giải: Áp dụng BĐT (I’) ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{(x+y)+(x+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$

Cộng ba BĐT trên ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài toán 2.4: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\ge\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}.$$

Giải: Áp dụng BĐT (I) ta có:

$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+b+2c}\ge\frac{4}{2a+4b+2c}=\frac{2}{a+2b+c}$. Tương tự

$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{2a+b+c}\ge\frac{2}{a+b+2c}$; $\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{2}{2a+b+c}$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 3: Cho $a,b>0$. Chứng minh: $(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n\ge 2^{n+1}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

Giải: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}\Rightarrow(1+\frac{a}{b})^n\ge 2^n\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n\\&1+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow(1+\frac{b}{a})^n\ge 2^n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\end{aligned}\right\}\Rightarrow(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n\ge 2^n\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\right]$$

mà $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\ge 2$ nên suy ra $(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n\ge 2^{n+1}$ □pcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Ví dụ 4: Cho $x,y,z>0$. Cmr: $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$.

Giải: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có:

$x^3+y^2\ge 2xy\sqrt{x}\Rightarrow\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}\le\frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}}=\frac{1}{xy}$.

Tương tự: $\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}\le\frac{1}{yz}$; $\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{zx}\Rightarrow \text{VT}\le\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

Vậy : $\text{VT}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Ví dụ 5 : Cho $a,b,c>0$. Chứng minh : $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9$ **(II)**.

Giải : Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array}\right\}\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=9 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét : * BĐT trên còn được viết lại như sau : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ **(II)**

* Tương tự ta có BĐT tổng quát của (I) và (II) như sau :

Cho n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ khi đó : $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$ **(III)**.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

Các BĐT (I), (II), (III) được sử dụng nhiều trong các bài toán BĐT. Ta xét các bài toán sau

Bài toán 5.1 : Cho ba số thực dương a,b,c. Cmr : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Giải : Cộng hai vế của BĐT với 3 thì BĐT cần chứng minh trở thành

$$(\frac{a}{b+c}+1)+(\frac{b}{c+a}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)\ge\frac{9}{2}\Leftrightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\ge\frac{9}{2}$$

Áp dụng BĐT (II) ta có : $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{a+b+b+c+c+a}=\frac{9}{2(a+b+c)}$

$$\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\ge (a+b+c).\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{9}{2} \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét : BĐT trên có tên là BĐT Nesbit cho ba số. Có nhiều cách để chứng minh BĐT trên sau đây ta xét một cách chứng minh cho BĐT trên

Đặt $A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b};B=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b};C=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$

Khi đó : $B+C=3$ và $\begin{cases} A+B\ge 3 \\ A+C\ge 3\end{cases}\Rightarrow 2A+B+C\ge 6\Rightarrow A\ge\frac{3}{2}$.

Đây là lời giải có lẽ là hay nhất cho bài toán này. Tuy nhiên việc tìm được lời giải như vậy không phải là việc đơn giản.

Bài toán 5.2 : Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Cmr : $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\le\frac{3}{4}$.

Giải : Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 3-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{4}$.

Áp dụng BĐT (II) ta có : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{a+b+c+3}=\frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 5.3 : Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}\ .$$

Giải : Ta có $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=3$.

Áp dụng BĐT (II) ta có : $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca+3}\ge\frac{3}{2}$ đpcm.

Đẳng thức có $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài toán 5.4 : Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30\,.$$

Giải : Áp dụng BĐT (II) ta có : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác : $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=9$$

Suy ra : $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 9+21=30$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 5.4 : Cho $x,\ y,\ z\ >\ 0$. CMR:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{2x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\ \le\ \frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}).$$

HD: Áp dụng (III) với n=4 ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ \ge\ \frac{4^2}{2x+y+z}\ =\ \frac{16}{2x+y+z}\Rightarrow\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{16}{2z+y+z}.$$

Tương tự : $\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\ge\frac{16}{x+2y+z}$ và $\frac{2}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{16}{x+y+2z}$

Cộng 3 BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài toán 5.5 : Cho n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

a) $\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+...+\frac{a_n}{2-a_n}\ge\frac{n}{2n-1}$

b) $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+...+\frac{a_n}{a_n+1}\le\frac{n}{n+1}$

Giải :

a) BĐT $\Leftrightarrow(\frac{a_1}{2-a_1}+1)+(\frac{a_2}{2-a_2}+1)+...+(\frac{a_n}{2-a_n}+1)\ge\frac{n}{2n-1}+n$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\ge\frac{n^2}{2n-1}$ (*)

Áp dụng BĐT (III) ta có : $\text{VT}(*)\ge\frac{n^2}{2n-(a_1+a_2+...+a_n)}=\frac{n^2}{2n-1}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$.

b) BĐT $\Leftrightarrow(\frac{a_1}{1+a_1}-1)+(\frac{a_2}{1+a_2}-1)+...+(\frac{a_n}{1+a_n}-1)\le\frac{n}{n+1}-n$

$\Leftrightarrow\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\ge\frac{n^2}{n+1}$ (**)

Áp dụng BĐT (III) ta có : $\text{VT}(**)\ge\frac{n^2}{n+(a_1+a_2+...+a_n)}=\frac{n^2}{n+1}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$.

Ví dụ 6 : Cho $a,b,c>0$. Cmr : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$.

Giải : Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}}=a$. Tương tự : $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\ge b;\ \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được :

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\ge a+b+c\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét :* Phương pháp mà chúng ta làm ở trong bài toán trên người ta thương gọi là phương pháp tách gép cặp trong BĐT Côsi.

Vì sao chúng ta lại gép $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}$? Mục đích của việc làm này là làm mất các biến ở mẫu do vế phải của BĐT là một biểu thức không có biến ở mẫu. Vì sao ta lại gép $\frac{b+c}{4}$ mà không phải là $b+c$ hay $\frac{b+c}{2}$… điều này xuất phát từ điều kiện để đẳng thức xảy ra. Vì BĐT đã cho là một BĐT đối xứng (Tức là khi đổi vị trí hai biến bất kì cho nhau thì BĐT không thay đổi) nên đẳng thức thường xảy ra khi các biến bằng nhau và khi đó $\frac{a^2}{b+c}=\frac{a}{2}$ nên ta phải gép với $\frac{b+c}{4}$.

* Nếu $abc=1$ thì ta có : $a+b+c\ge 3$ nên : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

* Phương pháp trên được sử dụng nhiều trong chứng minh BĐT

Ví dụ 7 : Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c^3}{(a+1)(c+1)}\ge\frac{3}{4}.$$

Giải: Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{b+1}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}\frac{a+1}{8}\frac{b+1}{8}}=\frac{3}{4}a.$$

Tương tự: $\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{b+1}{8}\ge\frac{3}{4}b$; $\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{a+1}{8}\ge\frac{3}{4}c$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được:

$$\text{VT}+\frac{a+b+c+3}{4}\ge\frac{3}{4}(a+b+c)\Rightarrow\text{VT}\ge\frac{2(a+b+c)-3}{4}\ge\frac{2.3\sqrt[3]{abc}-3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 8 : Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b^4}{c^2(a+b)}+\frac{c^4}{a^2(b+c)}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Giải : Áp dụng BĐT Côsi cho bốn số thực dương ta có :

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge 4.\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^2(c+a)}.\frac{b}{2}.\frac{b}{2}.\frac{c+a}{4}}=2a$$

$\Rightarrow\frac{a^4}{b^2(c+a)}+b+\frac{c+a}{4}\ge 2a$. Tương tự cũng có :

$\frac{b^4}{c^2(a+b)}+c+\frac{a+b}{4}\ge 2b$; $\frac{c^4}{a^2(b+c)}+a+\frac{b+c}{4}\ge 2c$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm. Đẳng thức có $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 9 : Cho $a,b,c>0$ và n là một số tự nhiên dương. Chứng minh

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

Giải : Áp dụng BĐT Côsi cho n-1 số $\frac{a^n}{b+c}$ và 1 số $\frac{(b+c)^{n-1}}{2^n}$ ta có :

$(n-1)\frac{a^n}{b+c}+\frac{(b+c)^{n-1}}{2^n}\ge n\sqrt[n]{a^{n(n-1)}.\frac{1}{2^n}}=\frac{n}{2}a^{n-1}$. Tương tự :

$(n-1)\frac{b^n}{c+a}+\frac{(c+a)^{n-1}}{2^n}\ge \frac{n}{2}b^{n-1};\ (n-1)\frac{c^n}{a+b}+\frac{(a+b)^{n-1}}{2^n}\ge \frac{n}{2}c^{n-1}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được :

$(n-1).\text{VT}+\frac{1}{2}[(\frac{a+b}{2})^{n-1}+(\frac{b+c}{2})^{n-1}+(\frac{c+a}{2})^{n-1}]\ge \frac{n}{2}(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})$

Mặt khác ta lại có :

$\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}\ge (\frac{a+b}{2})^{n-1};\ \frac{b^{n-1}+c^{n-1}}{2}\ge (\frac{b+c}{2})^{n-1};\ \frac{c^{n-1}+a^{n-1}}{2}\ge (\frac{c+a}{2})^{n-1}$

$\Rightarrow \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}\ge \frac{1}{2}[(\frac{a+b}{2})^{n-1}+(\frac{b+c}{2})^{n-1}+(\frac{c+a}{2})^{n-1}]$

Do đó : $(n-1)\text{VT}\ge (n-1)\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}\Rightarrow \text{VT}\ge \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 10 : Cho $x,y,z\ge 0$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng :

$$x^3+y^3+z^3\ge x+y+z.$$

Giải : Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực không âm ta có :

$x^3+1+1\ge 3\sqrt[3]{x^3.1.1}=3x\Leftrightarrow x^3+2\ge 3x$ .Tương tự : $y^3+2\ge 3y;\ z^3+2\ge 3y$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được : $x^3+y^3+z^3+6\ge 3(x+y+z)$

Mặt khác : $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\Rightarrow 2(x+y+z)\ge 6$.

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3+6\ge (x+y+z)+2(x+y+z)\Rightarrow x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Nhận xét : * Xuất phát từ $x=\sqrt[3]{x^3}$ nên ta áp dụng BĐT Côsi cho ba số có dạng x^3+a+a. Do đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1\Rightarrow a=1$.

* Tương tự ta có bài toán tổng quát như sau :

Ví dụ 11 : Cho số thực không âm có tích bằng 1 $a_1,a_2,a_3,...,a_k$. Chứng minh

$$a_1^m+a_2^m+...+a_k^m\ge a_1^n+a_2^n+...+a_k^n \text{ với } \forall m\ge n.$$

Giải :Áp dụng BĐT Côsi cho m số, gồm n số a_i^m và $(m-n)$ số 1 ta có :

$na_i^m + (m-n) \ge m\sqrt[m]{a_i^{mn}} = ma_i^n$ Cho i=1,2,…,k rồi lấy tổng hai vế ta được:

$n(a_1^m + a_2^m + ... + a_k^m) + k(m-n) \ge n(a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n) + (m-n)(a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n)$

Mà: $a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n \ge k\sqrt[k]{a_1^n a_2^n ... a_k^n} = k \Rightarrow (m-n)(a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n) \ge (m-n)k$

$\Rightarrow n(a_1^m + a_2^m + ... + a_k^m) \ge n(a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n)$

$\Leftrightarrow a_1^m + a_2^m + ... + a_k^m \ge a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$.

Ví dụ 11 : Cho $x, y, z > 0$ & $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$(1+\frac{1}{x})^4 + (1+\frac{1}{y})^4 + (1+\frac{1}{z})^4 \ge 768.$$

Giải : Đặt $a = 1+\frac{1}{x};\ b = 1+\frac{1}{y};\ c = 1+\frac{1}{z} \Rightarrow a+b+c \ge 12$

Ta có : $a^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 \ge 4\sqrt[4]{4^{12}a^4} = 4^4 a \Leftrightarrow a^4 + 3.4^4 \ge 4^4 a$. Tương tự

$b^4 + 3.4^4 \ge 4^4 b;\ \ c^4 + 3.4^4 \ge 4^4 c$ cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được

$a^4 + b^4 + c^4 + 9.4^4 \ge 4^4(a+b+c) \ge 12.4^4 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \ge 3.4^4 = 768$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 4 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Chú ý : Ta có bài toán tổng quát sau : Cho $a, b > 0, x_i > 0 \forall i = 1,..n; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Cmr:

$$\left(a+\frac{b}{x_1}\right)^m + \left(a+\frac{b}{x_2}\right)^m + ... + \left(a+\frac{b}{x_n}\right)^m \ge n\left(a+nb\right)^m \text{ với } m > 0.$$

Ví dụ 12 : Cho $a,\ b,\ c > 0$ và $a+b+c = 1$.Chứng minh rằng:

$$9(a^4 + b^4 + c^4) \ge a^2 + b^2 + c^2.$$

Giải: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$a^4 + \frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}a^2$; $b^4 + \frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}b^2$ **;** $c^4 + \frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}b^2$ cộng ba BĐT lại với nhau

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{27} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{9} + \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

Mặt khác: $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 9(a^4 + b^4 + c^4) \ge a^2 + b^2 + c^2$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét : 1) Tương tự ta có BĐT tổng quát của bài toán trên như sau:

"Cho k số thực không âm $a_1,...,a_k$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$. Chứng minh

$$\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n}{k^m} \ge \frac{a_1^m + ... + a_k^m}{k^n} \quad \forall n \ge m".$$

2) Từ BĐT tổng quát trên ta có các hệ quả sau

Hq1 : Cho k số thực không âm $a_1,...,a_k$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_k=1$. Chứng minh

$$a_1^n+a_2^n+...+a_k^n \geq \frac{1}{k^{n-1}}\ .$$

Chứng minh : Áp dụng BĐT tổng quá trên với $m=1$ ta có đpcm

Hq2: Cho k số thực $a_1,a_2,...,a_k>0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^n+...+a_k^n}{k} \geq \left(\frac{a_1+...+a_k}{k}\right)^n \text{ với } n\in N^*$$

Chứng minh: Đặt $b_i=\dfrac{a_i}{a_1+a_2+...+a_k}$ với i=1,2,3,…,k $\Rightarrow b_1+b_2+...+b_k=1$ và

BĐT trở thành: $b_1^n+b_2^n+...+b_k^n \geq \dfrac{1}{k^{n-1}}$ đây chính là hệ quả 1.

Ví dụ 13 : Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$.

Giải : Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c \Rightarrow a+b-c>0$ và $c+a-b>0$

* Nếu $b+c-a<0 \Rightarrow$ BĐT cần chứng minh luôn đúng.

* Nếu $b+c-a>0$ áp dụng BĐT Côsi ta có :

$(a+b-c)(b+c-a)\leq \left(\dfrac{a+b-c+b+c-a}{2}\right)^2=b^2$. Tương tự ta cũng có :

$(b+c-a)(c+a-b)\leq c^2$; $(c+a-b)(a+b-c)\leq a^2$.

Nhân ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm. Đẳng thức có $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét : Sử dụng bài toán trên ta có thể giải được các bài toán sau đây

Bài toán 13.1 : Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng :

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\leq 1.$$

Giải : Vì $abc=1\Rightarrow$ tồn tại các số thực $x,y,z>0$ sao cho : $a=\dfrac{x}{y};b=\dfrac{y}{z};c=\dfrac{z}{x}$

Khi đó BĐT cần chúng minh trở thành : $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\leq xyz$

Đây chính là kết quả ở bài toán trên.

Bài toán 13.2 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{a+b-c}+\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}\geq 3.$$

Giải : Theo kết quả bài toán trên ta có : $\dfrac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\geq 1$.

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số ta có :

$$\frac{a}{a+b-c}+\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}\geq 3 \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 14 : Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Giải : Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$(1-a)(1-b)\leq (\frac{2-(a+b)}{2})^2=(\frac{2-(1-c)}{2})^2=\frac{(1+c)^2}{4}$. Tương tự

$(1-b)(1-c)\leq\frac{(1+a)^2}{4}$; $(1-c)(1-a)\leq\frac{(1+b)^2}{4}$ Nhân ba BĐT lại với nhau ta có

đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 15 : Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\geq 1.$$

Giải : BĐT cần chứng minh tương đương với:

$\frac{a^2c}{b^2}+\frac{b^2a}{c^2}+\frac{c^2b}{a^2}\geq a+b+c$ (*)

Áp dụng BĐT Côsi ta có : $\frac{a^2c}{b^2}+\frac{b^2a}{c^2}+c\geq 3.\sqrt[3]{\frac{a^2c}{b^2}.\frac{b^2a}{c^2}.c}=3a$

Tương tự : $\frac{b^2a}{c^2}+\frac{c^2b}{a^2}+a\geq 3b$; $\frac{c^2b}{a^2}+\frac{a^2c}{b^2}+b\geq 3c$. Cộng ba BĐT trên ta có được

BĐT (*) $\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 16 : Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}}\geq 1 .$$

Giải : Đặt $a=\frac{x}{x+y+z};b=\frac{y}{x+y+z};c=\frac{z}{x+y+z}\Rightarrow$ $a+b+c=1$ và BĐT đã cho

trở thành : $P=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$

Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+a(a^2+8bc)\geq 3a\Leftrightarrow\frac{2a}{\sqrt{a^2+8bc}}+a(a^2+8bc)\geq 3a$.

Tương tự : $\frac{2b}{\sqrt{b^2+8ca}}+b(b^2+8ca)\geq 3b$; $\frac{2c}{\sqrt{c^2+8ab}}+c(c^2+8ab)\geq 3c$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được : $2P+a^3+b^3+c^3+24abc\geq 3$

Mặt khác ta lại có :

$1=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geq a^3+b^3+c^3+24abc$.

$\Rightarrow 2P\geq 3-(a^3+b^3+c^3+24abc)\geq 3-1=2\Rightarrow P\geq 1$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z$.

Nhận xét : 1) BĐT trên có nhiều cách chứng minh, ngoài cách chứng minh trên còn có những cách chứng minh khác cũng dùng BĐT Côsi.

C2 : Đặt $a=\frac{yz}{x^2};b=\frac{zx}{y^2};c=\frac{xy}{z^2}\Rightarrow xyz=1$ và BĐT cần chứng minh trở thành :

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c}}\ge 1\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1+8a)(1+8b)}+\sqrt{(1+8b)(1+8c)}+\sqrt{(1+8c)(1+8a)}\ge\sqrt{(1+8a)(1+8b)(1+8c)}$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được :

$$8(a+b+c)+2\sqrt{(1+8a)(1+8b)(1+8c)}(\sqrt{1+8a}+\sqrt{1+8b}+\sqrt{1+8c})\ge 510 \quad (*)$$

Ta có : $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$ và $ab+bc+ca\ge 3$

$\Rightarrow (1+8a)(1+8b)(1+8c)=1+8(a+b+c)+64(ab+bc+ca)+512\ge 729$

$\Rightarrow \sqrt{1+8a}+\sqrt{1+8b}+\sqrt{1+8c}\ge 3\sqrt[6]{(1+8a)(1+8b)(1+8c)}\ge 9$

$\Rightarrow VT(*)\ge 8.3+2.27.9=510\Rightarrow (*)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z$.

2) Từ cách giải trên ta có thể tổng quát bài toán trên như sau :

" Cho các số thực dương x,y,z và số thực $\lambda\ge 8$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+\lambda yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+\lambda zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+\lambda xy}}\ge\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}\text{ . "}$$