NGUYỄN ĐÌNH THÀNH CÔNG – NGUYỄN PHÚ KHÁNH

CHINH PHỤC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG ĐỀ THI QUỐC GIA

- ✓ Dành cho ôn thi tốt nghiệp, đại học và cao đẳng
- ✓ Dành cho ôn thi học sinh giỏi lớp 12
- ✓ Dùng làm tài liệu tham khảo giảng dạy cho các giáo viên.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập - Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 397 15011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: PHƯƠNG ANH

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

Trình bày bìa: NGUYỄN SƠN TÙNG

Sửa bản in: HỒ VĂN DIÊN – LƯƠNG VĂN THỦY – BÙI VĂN CƯỜNG

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

SÁCH LIÊN KẾT

CHINH PHỤC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG ĐỀ THI QUỐC GIA

Mã số: 1L – 588 ĐH2014
In 1000 cuốn, khổ 29,7 x 21cm tại Công Ty TNHH Trần Công
Số xuất bản: 2057 – 2014/CXB/18- 316/ĐHQGHN, ngày 06/10/2014
Quyết định xuất bản số: 586 LK TN/ QĐ – NXBĐHQGHN
In xong và nộp lưu chuyển quý III năm 2014.

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh thân mến !

Kì thi tuyển sinh ĐH-CD đang ở trước chúng ta. Chắc hẳn rằng các em đang rất muốn vượt qua để bước chân vào cánh cổng Đại Học và thực hiện những ước mơ mà các em đã ấp ủ từ rất lâu. Với những tâm huyết của mình trong việc hướng dẫn các em ôn thi tốt môn Toán. Chúng tôi đã biên soạn cuốn sách Chinh phục Bất Đẳng Thức trong đề thi Quốc Gia này với hy vọng giúp các em có những kiến thức và kỹ năng cơ bản nhất khi đứng trước bài toán Bất Đẳng Thức và Cực trị trong các đề thi tuyển sinh ĐH-CĐ và kì thi HSG các cấp.

Lại nhiều em cho rằng đây là một cuốn sách vô bổ vì nó sẽ trình bày một cách nhàm chán và khô cằn các kiến thức thuộc một mảng toán rất là khó ở phổ thông này và cũng phần đông các bạn cho rằng không cần thiết học chuyên đề này bởi vì các em cũng rất ít được các GV dạy trang bị cho mình những kiến thức cần thiết về Bất đẳng thức và cực trị. Nhưng hãy kiên nhẫn đọc qua cuốn sách để thấy được vẻ đẹp hoàn mĩ của toán học. Những lời giải được trình bày qua các Ví Dụ là rất mẫu mực và mang những nét đẹp riêng của Bất Đẳng Thức. Các em hãy thử đọc và cảm nhận và chắc hẳn rằng các em sẽ vỡ òa trong hạnh phúc khi vượt qua được chính mình, được thử thách bởi những bài toán khó. Các em sẽ cảm thấy tự tin hơn ở bản thân khi giải được những bài toán ăn điểm 10 này.

Các em sẽ được trang bị những lý thuyết và kỹ năng giải toán thông qua 4 chương:

Chương 1: *Các bất đẳng thức cơ bản.*

Chương này sẽ cung cấp cho các em lý thuyết về những Bất Đẳng Thức cơ bản trong chương trình phổ thông kèm theo các chứng minh của nó. Để qua đó, các em học sinh có được nền tảng cơ bản nhất trong việc định hướng và tìm lời giải của các bài toán.

Chương 2: *Bất đẳng thức lượng giác.*

Chương 3: *Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh.*

Đây là chương sẽ trình bày cho các em các phương pháp hay được sử dụng để chứng minh các bài toán Bất Đẳng Thức. Chắn hẳn nhiều em đã biết tên hoặc được học những phương pháp này rồi nhưng với sự dẫn dắt của tác giả các em sẽ tìm được nhiều điều lý thú ẩn sau những phương pháp này. Qua các VD cụ thể và các bình luận, học sinh sẽ tự rút ra cho mình những kinh nghiệm khi giải các bài toán về Bất Đẳng Thức.

Chương 4: *Các bài toán chọn lọc.*

Sau khi đã đọc thật kỹ 2 chương đầu, các em hãy tự mình giải lần lượt các bài toán ở chương này, và đọc thật kỹ các lời giải được trình bày trong chương. Qua đó các em một lần nữa rút ra được cho riêng mình vẻ đẹp của bài toán bất đẳng thức và trả lời được câu hỏi: Mình cần phải làm gì để đi đến lời giải ?

Để hoàn thành cuốn sách này chúng tôi xin chân thành gửi lời cảm ơn đến: TS.Nguyễn Đăng Hợp (Đại Học UCLA, Hoa Kì),PGS.Nguyễn Minh Tuấn (Khoa Toán Cơ-Tin Học,ĐHKHTN Hà Nội), Dương Duy Sơn (Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự), Ivan Boresscu (Học Viên Công Nghệ MIT), PGS Đàm Văn Nhỉ (Đại Học Sư Phạm Hà Nội) đã góp những ý kiến chân thành giúp chúng tôi định hướng chuyên môn trong việc viết cuốn sách này.

Trong thời gian hoàn thành cuốn sách này, chúng tôi xin cảm ơn sự động viên tinh thần của các bạn Lê Thế Kiên (Đại Học Y Hà Nội), Trần Thị Quỳnh Trang (THPT Chuyên Quốc Học, Huế), Hoàng Đức Long (Đại Học Bách Khoa Tp HCM), tập thể các thành viên của CLB GSTT Group.

Đặc biệt, xin gửi lời cảm ơn bạn Nguyễn Văn Quốc Tuấn (K112 Đại Học Y Hà Nội) đã giúp chúng tôi trong quá trình đánh máy và biên tập bản thảo.

Cá nhân tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến bố mẹ đã tạo điều kiện thuận lợi cho mình có cơ hội học tập ở môi trường tốt nhất

Dù đã cố gắng biên soạn nhưng sẽ không thoát khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp và các em học sinh.

Mọi góp ý xin liên hệ:

Nguyễn Đình Thành Công, K51 Đại Học Ngoại Thương Hà Nội

Email:congisnguyen@gmail.com

"Đây là một cuốn sách cho mức độ phổ thông luyện thi đại học ở Việt Nam nhưng lối viết khá hàn lâm và gần gũi, chứng tỏ được tay nghề viết của tác giả là rất có kinh nghiệm. Các phương pháp được trình bày qua lối dẫn dắt từ những điều cơ bản của toán học phổ thông rồi phát triển dần thành những công cụ có tính công phá mạnh. Đặc biệt, nhiều ví dụ kinh điển được giải lại bằng các phương pháp mới mang tính tự nhiên hơn. Cuốn sách được viết không theo kiểu ví dụ - lời giải nên sẽ khó cho các học sinh phổ thông ban đầu tiếp cận nhưng hãy đọc lại "lần n" để cảm nhận vẻ đẹp của bài toán bất đẳng thức."

(TS. Nguyễn Đăng Hợp, Đại học UCLA, Hoa Kì)

Anh chúc nhà sách Lovebook thành công.

MỤC LỤC

(Hãy tự xây dựng mục lục cho cuốn sách của mình, các em sẽ hiểu cuốn sách hơn rất nhiều ^_^)

Chương 1: Các vấn đề về bất đẳng thức AM – GM

1. Bất đẳng thức AM – GM

Trong tiết này, chúng ta sẽ giới thiệu BĐT AM-GM mà các bạn học sinh phổ thông quen gọi với cái tên gọi đó là Bất Đẳng Thức Cô si.
Trước hết ta xét trong những trường hợp đơn giản nhất.
Đầu tiên, ta bắt đầu từ hằng đẳng thức $(a-b)^2 \ge 0$. Điều này tương đương với $a^2+b^2 \ge 2ab$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.
Ta phát biểu lại theo ngôn ngữ toán học của BĐT AM-GM (Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhận):
Cho hai số thực dương a,b. Lúc này ta có BĐT sau:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.
Nói một cách nôm na là Trung bình cộng luôn luôn lớn hơn trung bình nhân. Bỏ qua hình thức rất đơn giản nhưng BĐT AM-GM lại có những ứng dụng rất rộng rãi trong việc chứng minh các bài toán về cực trị và cả trong các bài toán cực trị hình học.
Chúng ta hãy thử xét qua các ví dụ nhập môn sau:

1

Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$

Lời giải

Đây chính là BĐT AM-GM cho 3 số dương. Lời giải của nó cũng sẽ dựa trên cách áp dụng AM-GM với 2 số.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$P = a+b+c+\sqrt[3]{abc} \ge 4\sqrt[3]{abc}$$

Ta có:

$$P \ge 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \ge 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}} \ge 4\sqrt[3]{abc} \quad \text{(đpcm)}$$

Chúng ta thử một cách tiếp cách khác để chứng minh ví dụ này.
Ở THCS ta đã biết được đẳng thức quan trọng sau:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \ge 0$$

Như vậy ta cũng suy ra được điều cần chứng minh.
Dường như ngay từ đầu tiên, người ta đã xây dựng các Bất Đẳng Thức dựa trên điều hiển nhiên sau $x^2 \ge 0$. Các bạn hãy đọc hết cuốn sách này để tự trả lời câu hỏi này nhé !
Một số dạng tương tự của BĐT AM-GM cho 3 số:
Với $a,b,c > 0$. Ta có:

$\boxed{1}$ $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$

$\boxed{2}$ $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge abc$

Sau đây chúng ta sẽ chứng minh Bất Đẳng Thức AM-GM trong trường hợp tổng quát nhất. Có khoảng hơn 20 cách chứng minh cho BĐT AM-GM trong trường hợp tổng quát. Mà chúng tôi không thể nào trình bày hết trong cuốn sách này được dù rất muốn trình bày. Đa phần chúng ta đã bỏ qua việc xây dựng lý thuyết khi học toán mà tập trung vào các kĩ năng tính toán. Điều này sẽ giúp các bạn đi nhanh lúc đầu nhưng sẽ hạn chế khả năng tuy duy và giải toán dài lâu sau này của các bạn.
Với những Bất Đẳng Thức nhiều biến số, thì tư tưởng cơ bản và tự nhiên nhất đó chính là sử dụng phép quy nạp. Tại sao lại thế? Bởi vì luôn có một sự liên hệ giữa trường hợp $n-1$ và n. Như vậy nếu như chúng ta chứng minh được

với trường hợp số liền trước thì với trường hợp số liền sau ta hoàn toàn có cơ sở chứng minh được. Phương pháp quy nạp chính là "chìa khóa vàng" của các nhà toán học khi xây dựng nên các lý thuyết toán học cổ điển và hiện đại. Song, điều chúng ta cần nắm đó là cách quy nạp như thế nào. Đó là cả một nghệ thuật. Chúng ta hãy theo dõi lời giải sau của TS.Trần Nam Dũng (ĐHKHTN-ĐHQG Tp HCM):
(Chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng quy nạp tiến).

2

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Lời giải

Trong các tài liệu, bất đẳng thức này thường được chứng minh bằng *phép quy nạp lùi*, hay *quy nạp kiểu Cauchy*. Ở đây chúng ta trình bày một phép chứng minh khác.
Cơ sở quy nạp với n = 1, 2 được kiểm tra dễ dàng. Giả sử bất đẳng thức đã được chứng minh cho n số. Xét n+1 số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Đặt $a_1a_2\ldots a_{n+1} = A^{n+1}$. Nếu tất cả các số bằng nhau thì bất đẳng thức đúng. Trong trường hợp ngược lại, phải tồn tại hai số a_i, a_j sao cho $a_i < A < a_j$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_n < A < a_{n+1}$. Khi đó ta có $(a_n - A)(a_{n+1} - A) < 0$, suy ra $a_n + a_{n+1} > a_na_{n+1}/A + A$. Từ đó ta có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} > a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_na_{n+1}/A + A \quad (1)$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho *n* số $a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_na_{n+1}/A$ ta được

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}\frac{a_na_{n+1}}{A}} = nA$$

Kết hợp với (1) ta được đpcm.

3

Với $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}\le 1$$

Lời giải

Ta có:

$$1-\frac{a}{b}=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Tương tự:

$$\begin{cases} 1-\frac{b}{c}\ge 2\sqrt{\frac{c}{b}} \\ 1-\frac{c}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{c}} \end{cases}$$

Cộng lại, ta có điều phải chứng minh.
Bình luận: Lời giải là sự kết nối giữa giả thiết và điều phải chứng minh. Để ý quan sát ta thấy nếu như cứ nhân 2 số hạng ở biểu thức điều kiện rồi lấy căn thì ta được một số hạng ở biểu thức cần chứng minh Chính điều này là xuất phát điểm của lời giải như trên.

4

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Lời giải

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}$$

Trước hết ta có: $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3$ theo AM-GM.

Bây giờ, ta xử lý tiếp một "đoạn đường" còn lại nữa.

Ta thử xem liên hệ của $\frac{a^2}{b^2}$ và $\frac{a}{b}$ là gì?

Ta mạnh dạn áp dụng AM-GM thử xem:

$$\begin{cases}\frac{a^2}{b^2}+1\ge 2\frac{a}{b}\\ \frac{b^2}{c^2}+1\ge 2\frac{b}{c}\\ \frac{c^2}{a^2}+1\ge 2\frac{c}{a}\end{cases}$$

Để ý rằng: $\sum\frac{a}{b}\ge 3$

Cộng lại ta được điều phải chứng minh.

Bình luận: *Việc chèn thêm tham số trong việc áp dụng BĐT AM-GM là kĩ năng quan trọng mà các bạn cần phải có trong việc giải toán Bất Đẳng Thức. Nhưng lưu ý khi chèn thêm tham số các bạn phải đảm bảo được việc dấu đẳng thức xảy ra.*

5

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^6+b^6+1}+\sqrt{b^6+c^6+1}+\sqrt{c^6+a^6+1}\ge 3\sqrt{3}$$

Lời giải

Trước hết dự đoán điểm rơi của bài toán là $a=b=c=1$.

Như vậy ta thử liên kết điều cần chứng minh và biểu thức điều kiện bằng cách áp dụng BĐT AM-GM:

$$a^6+b^6+1\ge 3a^2b^2$$

Suy ra: $\sqrt{a^6+b^6+1}\ge\sqrt{3}ab$

Tương tự: $\begin{cases}\sqrt{b^6+c^6+1}\ge\sqrt{3}bc\\ \sqrt{c^6+a^6+1}\ge\sqrt{3}ca\end{cases}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$

Bây giờ, chúng ta sẽ chuyển tiếp các ví dụ mà qua đó chúng ta sẽ thực hành được các phép biến đổi cơ bản trong việc áp dụng BĐT AM-GM.

6

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c}\ge abc$

Lời giải

Ở bài toán này chúng ta sẽ sử dụng cách nhóm đối xứng để hạ bậc BĐT AM-GM.

Cụ thể, ta có:

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Áp dụng tương tự, ta cũng sẽ có:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}+\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2}+\frac{c^2a^2+a^2b^2}{2}\ge abc(a+b+c)$$

Như vậy ta suy ra được đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

7

Với a, b, c là các số thực không âm, chứng minh rằng: $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

Lời giải

Cũng bằng cách nhóm đối xứng như ở ví dụ 6, ta có:

$$(a+b+c)^2=(a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)+\frac{ab+bc}{2}+\frac{bc+ca}{2}+\frac{ca+ab}{2}$$
$$\ge 2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}=3(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

8

Với a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng: $\sum\sqrt{a^2+2b^2}\ge\sqrt{3}(a+b+c)$

Lời giải

Ta sẽ tìm cách để khử căn thức. Để ý 1 điều quen thuộc là ở bài toán này, dấu đẳng thức xảy ra tại tâm (ba biến bằng nhau).

Theo BĐT AM-GM, thì ta được:

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

Suy ra:

$$a^2+2b^2\ge 3\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+2b^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(a+2b)$$

Tương tự: $\begin{cases}\sqrt{b^2+2c^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(b+2c)\\ \sqrt{c^2+2a^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(c+2a)\end{cases}$

Cộng vế theo vế BĐT, ta có điều phải chứng minh.

9

Cho $a_1, a_2, \dots a_{2011}>0$ và $a_1+a_2+\dots+a_{2011}=1$. Chứng minh:

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{a_{2011}}-1\right)\ge 2010^{2011}$$

Lời giải

Ở bài toán này thuộc lớp bất đẳng thức có điều kiện. Đối với lớp bất đẳng thức này ta thường có 3 hướng khai thác điều kiện như sau: Khai thác điều kiện kết hợp với bất đẳng thức kinh điển để giới hạn miền giá trị của biến hoặc khai thác bằng cách thế vào biểu thức cần chứng minh hoặc dùng điều kiện vào các bước cuối cùng hoặc các bước trung gian của bài toán chứng minh. Ở đây tôi khai thác theo hướng thế vào biểu thức cần chứng minh.

Ta có: $\frac{1-a_1}{a_1}=\frac{a_2+a_3+\dots+a_{2011}}{a_1}\overset{\text{Cauchy}}{\ge}\frac{2010\sqrt[2010]{a_2\dots a_{2011}}}{a_1}$

Tương tự cho $\left(\frac{1}{a_2}-1\right);\dots;\left(\frac{1}{a_{2011}}-1\right)$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{2011} = \frac{1}{2011}$

Ta có thể tổng quát bài toán này như sau:

Cho $a_1, a_2, ... a_n > 0$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Chứng minh: $\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)...\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n-1)^n$.

10

Cho $x+y+z=0$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z}$

Lời giải

Nhận xét:

Bài này yêu cầu tìm GTNN nên chúng ta cần đánh giá $P \geq m$ để làm được điều này chúng ta cần dùng Cauchy đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân. Nhưng nếu không có kinh nghiệm thì học sinh có thể giải như sau:

$$\sqrt{3+4^x} \overset{AM-GM}{\geq} \sqrt{2\sqrt{3.4^x}} = \sqrt{2^{x+1}\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{3+4^y} \overset{AM-GM}{\geq} \sqrt{2\sqrt{3.4^y}} = \sqrt{2^{y+1}\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{3+4^z} \overset{AM-GM}{\geq} \sqrt{2\sqrt{3.4^z}} = \sqrt{2^{z+1}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow P \geq \sqrt{2^{x+1}\sqrt{3}} + \sqrt{2^{y+1}\sqrt{3}} + \sqrt{2^{z+1}\sqrt{3}} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\sqrt{2^{x+y+z+3}3\sqrt{3}}} = 3\sqrt[3]{\sqrt{24\sqrt{3}}}$$

Kết luận: GTNN của P là $3\sqrt[3]{\sqrt{24\sqrt{3}}}$, là sai vì: em học sinh này đã quên mất nếu làm như vậy thì dấu bằng không xảy ra. Vì em dùng Cauchy mà quên mất kết hợp chọn điểm rơi. Ở đây ta dự đoán điểm rơi là $x=y=z=0$, để có được điều này thì dự đoán dấu bằng xảy ra phải là $4^x = 4^y = 4^z = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 0$. Từ đó gợi ý chúng ta đánh giá Cauchy như sau:

Hướng dẫn:

Áp dụng Cauchy ta được: $\sqrt{3+4^x} = \sqrt{1+1+1+4^x} \geq \sqrt{4\sqrt[4]{4^x}} = 2.4^{\frac{x}{8}}$

Tương tự và Cauchy thêm một lần nữa.

Kết luận: GTNN $P = 6 \Leftrightarrow x = y = z = 0$

11

Cho $x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+3z} + \sqrt[3]{z+3x}$$

Lời giải

Ta thấy x, y, z có vai trò như nhau trong biểu thức. Từ đó ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{4}$. Với dấu bằng xảy ra tại $x = y = z = \frac{1}{4}$ nên $x+3y = 1; y+3z = 1; z+3x = 1$, mặt khác để khử được căn bậc 3 ta phải Cauchy như sau:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{(x+3y).1.1} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{x+3y+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{(y+3z).1.1} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{y+3z+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{(z+3x).1.1} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{z+3x+1+1}{3} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế $\Rightarrow P \le 3 \Rightarrow \text{Max}P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{4}$.

12

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}} \ge 3\sqrt{2}$$

Lời giải

Bài toán này có phát biểu rất cồng kềnh và rối mắt khiến chúng ta "hơi ngán". Nhưng hãy lấy lại bình tĩnh và cùng xem xét.

Chú ý rằng: $(a^2+bc)(b+c) = b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$. Phát hiện được đẳng thức này, mọi chuyện trở nên khá đơn giản:

Đặt $a(b^2+c^2) = x; b(c^2+a^2) = y; c(a^2+b^2) = z$

Ta viết BĐT cần chứng minh lại dưới dạng:

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}} \ge 3\sqrt{2}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì, ta có: $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$

Như vậy hiển nhiên BĐT trên được chứng minh hoàn toàn.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

13

Cho các số thực dương a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c \le 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \ge 9$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM thì ta có: $\begin{cases} x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} \end{cases}$

Nên suy ra: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$

Áp dụng, ta có: $P \ge \frac{9}{(a+b+c)^2} \ge 9$

Phép chứng minh kết thúc.

14

Cho các số thức không âm a, b, c, chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{\frac{a+2b}{3}}+\sqrt{\frac{b+2c}{3}}+\sqrt{\frac{c+2a}{3}}$$

Lời giải

Hãy để ý quan sát một tí chúng ta sẽ tìm được cách nhóm, tạm gọi là "nhóm các hệ số có tổng bằng 1". Cụ thể như sau:

Ta có: $\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{3} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b}}{3} \le \sqrt{\frac{a+b+b}{3}} = \sqrt{\frac{a+2b}{3}}$

Tương tự: $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{b}+2\sqrt{c}}{3} \le \sqrt{\dfrac{b+2c}{3}} \\ \dfrac{\sqrt{c}+2\sqrt{a}}{3} \le \sqrt{\dfrac{c+2a}{3}} \end{cases}$

Cộng lại, ta có ngay điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

15

Với $a,b>0$; chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Lời giải

Theo Bất Đẳng Thức AM-GM, thì ta có: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{b} \ge 2\sqrt{a} \\ \sqrt{\dfrac{b^2}{a}}+\sqrt{a} \ge 2\sqrt{b} \end{cases}$

Cộng vế theo vế 2 BĐT cùng chiều ta có ngay điều phải chứng minh.

2. Một số dạng khác của bất đẳng thức AM-GM

2.1: Dạng lũy thừa của BĐT AM-GM

Dạng lũy thừa của BĐT AM-GM được phát biểu như sau:

$$\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^m \quad \text{với } a_i \ge 0,\ \forall i=\overline{1,n}$$

1

Cho a,b là những số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^{m+n}+b^{m+n} \ge \frac{1}{2}\left(a^m+b^m\right)\left(a^n+b^n\right)$$

Lời giải

Khai triển ra ta có BĐT đúng nếu điều sau đúng:

$$\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right) \ge 0$$

Điều này đúng vì là tích của 2 biểu thức cùng dấu.

Ta thử xét trong trường hợp 3 số xem thế nào nhé!

2

Cho a,b,c là những số thực dương. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge \frac{1}{3}\left(a^m+b^m+c^m\right)\left(a^n+b^n+c^n\right)$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$2(a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}) \ge a^m(b^n+c^n)+b^m(c^n+a^n)+c^m(a^n+b^n)$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(a^m-b^m\right)\left(a^n-b^n\right) \ge 0. \text{ Điều này luôn đúng.}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Ta thử xét một số ứng dụng nhỏ của 2 bài toán trên

3

Với a,b,c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6}}+\sqrt{\frac{b^{10}+c^{10}}{b^6+c^6}}+\sqrt{\frac{c^{10}+a^{10}}{c^6+a^6}}\ge a^2+b^2+c^2$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6}\ge\frac{1}{4}(a^2+b^2)^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6}}\ge\frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

Tương tự: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{b^{10}+c^{10}}{b^6+c^6}}\ge\dfrac{1}{2}\left(b^2+c^2\right)\\ \sqrt{\dfrac{c^{10}+a^{10}}{c^6+a^6}}\ge\dfrac{1}{2}\left(c^2+a^2\right)\end{cases}$

Cộng theo vế ta có điều phải chứng minh.

4

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$P=a^4+b^4+\frac{1}{8}c^4\ge\frac{1}{64}(a+b+c)^4$$

Lời giải

Các bạn học sinh 12, có thể làm quen bài này bằng kĩ thuật đạo hàm để đưa về biến c. Song, ta có thể giải bằng Bất Đẳng Thức AM-GM như sau:

Ta có: $P=a^4+b^4+\left(\dfrac{c}{2}\right)^4+\left(\dfrac{c}{2}\right)^4\ge4\left(\dfrac{a+b+c}{4}\right)^4$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{c}{2}$

5

Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2}\ge\frac{64}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Ta viết lại:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}\ge4\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\frac{c}{2}}+\frac{1}{\frac{c}{2}}}{4}\right)^2\ge4\left(\frac{16}{\frac{a+b+c}{4}}\right)^2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Một số bài tập tự luyện

Bài 1: Với a,b,c là độ dài của ba cạnh tam giác, chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+b-c}+\sqrt[3]{b+c-a}+\sqrt[3]{c+a-b}\le\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

Gợi ý: Đánh giá: $\sqrt[3]{a+b-c}+\sqrt[3]{b+c-a}\le2\sqrt[3]{b}$

Bài 2: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$9\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge (a+2b)^3+(b+2c)^3+(c+2a)^3$$

Gợi ý: Ta có $\frac{a^4}{b}+ba^2\ge 2a^3$

Tương tự rồi cộng lại ta được: $\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a}\ge a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{9}(a+b+c)^3$

Lại có: $\frac{a^4}{b}+b^3+\frac{b^4}{a}\ge\frac{1}{9}(a+2b)^3$

Bài 3: Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng:

$$P=\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}\le 6\sqrt{\frac{a+b+c}{6}}$$

2.2 Dạng cộng mẫu số

Dạng cộng mẫu số: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$ *với* $a_i>0,\ \forall i=\overline{1,n}$

Chúng ta sẽ thử ứng dụng của BĐT AM-GM dạng cộng mẫu số.

1

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{a+2b}$

Tương tự, ta có: $\begin{cases}\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\ge\frac{9}{b+2c}\\ \frac{1}{c}+\frac{2}{a}\ge\frac{9}{c+2a}\end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều, ta thu được điều phải chứng minh.

2

Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng: $\frac{4}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\ge 4\left(\frac{3}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\frac{12}{a+b}\le 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\ \frac{8}{b+c}\le 2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ \frac{4}{c+a}\le\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\end{cases}$

Cộng lại, ta có điều phải chứng minh.

3

Cho a, b, c >0. Chứng minh rằng: $\frac{a+3c}{a+b}+\frac{c+3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}\ge 6$

Lời giải

Để giải bài tập khó này, chúng ta cần trình bày phương pháp xây dựng cách giải như sau:

Tìm x, y sao cho:

$$(a+3c)+x(a+b)=(c+3a)+y(b+c)=M$$
$$\Leftrightarrow (1+x)a+ab+3c=3a+yb+(1+y)c$$

Từ đó, ta thu được:

$$1+x=3 \Rightarrow x=2$$
$$3=1+y \Rightarrow y=2$$

Và $M=3a+2b+3c$

Tìm z sao cho:

$$4b+z(c+a)=m(3a+2b+3c)$$
$$\Leftrightarrow za+4b+zc=3ma+2mb+3mc$$

Suy ra: $4=2m \Rightarrow m=2$

$z=3m=6$

Khi đó BĐT đã cho tương đương với:

$$\frac{a+3c}{a+b}+2+\frac{c+3a}{b+c}+2+\frac{4b}{c+a}+6\ge 16$$
$$\Leftrightarrow P=(3a+2b+3c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right)\ge 16$$

Ta có $P\ge(3a+2b+3c).\dfrac{16}{(a+b)+(b+c)+2(c+a)}=16$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b=b+c=2c+2a$

Suy ra $a=c=\dfrac{b}{3}$

Bình luận: *Đây là một bài toán khó yêu cầu xử lý rất tinh tế. Chúng ta có một kinh nghiệm nhỏ: Với các bài toán Bất đẳng thức dạng phân thức bậc nhất thì chúng ta sẽ thêm bớt để rút ra được một nhân tử (biểu thức) chung. Sau đó sẽ áp dụng BĐT AM-GM để đi đến lời giải. Với các bạn học sinh 12, sau khi được trang bị kĩ năng đạo hàm thì các bạn có thể giải bài toán này bằng kĩ thuật đạo hàm và giải phương trình $f'(a)=0$. Cách giải này mang tính "thuật toán". Và trong áp lực thời gian thì dùng đạo hàm là một giải pháp rất an toàn và thông minh. Trong cuốn sách này, chúng tôi cũng sẽ cung cấp cho các bạn kĩ năng dùng đạo hàm để chứng minh Bất Đẳng Thức rất kỹ.*

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{2a+c}{b}+\dfrac{4(a+b)}{a+c}\ge 9$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{b+c}{a}+2\right)+\left(\frac{2a+c}{b}+1\right)+\left[\frac{4(a+b)}{a+c}+4\right]\ge 16$$
$$\Leftrightarrow (2a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right)$$

Ta có

$$P=(2a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}\right)\ge(2a+b+c).\frac{8^2}{8a+4b+4c}=16 \quad (1)$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bình luận: Các bạn sẽ thắc mắc vì sao lại tách như ở (1). Cách giải thích đó là vì ta dự đoán được đẳng thức xảy ra khi $a=b=a+c$. Lúc này ta cần đưa các giá trị về một số bằng nhau. Đại khái nếu như ta có $2+2+8$ thì ta sẽ đưa về $2+2+2+2+2+2$. Tư duy tự nhiên tưởng chừng như quá hiển nhiên nay chính là mấu chốt của việc giải BĐT đấy !

Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}\geq abc$$

Lời giải

Để áp dụng được BĐT AM-GM dạng cộng mẫu số, ta phải làm tử số là 1.
Bất Đẳng Thức đã cho tương đương với:

$$P=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{bc}}+\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ca}}+\frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}}\geq (abc)^2$$

Ta có $P\geq \dfrac{9}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=(abc)^2$

3. Các kĩ thuật sử dụng Bất Đẳng Thức Cô si

1. Kĩ thuật chọn điểm rơi AM-GM

Trước hết, xin nhắc lại rằng: Điều quan trọng khi giải toán Bất Đẳng Thức là các đánh giá trung gian phải đảm bảo được dấu đẳng thức xảy ra. Chính vì thế, việc đoán được dấu đẳng thức xảy ra giúp ta định hướng tốt hơn **Lời giải**. Ta tạm gọi đó là việc dự đoán điểm rơi.
Trong các bất đẳng thức dấu "=" thường xảy ra ở các trường hợp sau:
Các biến có giá trị bằng nhau. Khi đó ta gọi bài toán có *cực trị đạt được tại tâm*
Khi các biến có giá trị tại biên (1 biến bằng 0). Khi đó ta gọi bài toán có *cực trị đạt được tại biên*
Ngoài ra, cũng có một số trường hợp ngoại lệ là 3 biến lệch nhau hoàn toàn. Không có một "thuật toán" nào có thể giúp chúng ta dự đoán được dấu bằng bằng tay cả. Nếu dùng máy tính thì chúng ta có thuật toán Fermat-Lagrange để làm điều này. Nhưng chúng ta cũng có thể có một vài cách tư duy để dự đoán được dấu bằng. Trường hợp tầm thường nhất đó là dấu đẳng thức xảy ra tại tâm 3 biến bằng nhau. Điều này thường xảy ra đối với các bài toán đối xứng 3 biến (vai trò a,b,c như nhau). Trường hợp, hay gặp thứ 2 là có một biến bằng 0. Trong trường hợp này, gần như BĐT AM-GM không làm gì được và nó trở nên không đủ sức công phá các bài dạng này. Ta sẽ nói ở sau về dạng bài này. Trong một số bài toán có điều kiện kiểu như 3 biến a,b,c thuộc một đoạn đóng nào đó kiểu $[a;b]$ thì rất có thể đẳng thức sẽ xảy ra tại 2 điểm đầu và cuối, và biến còn lại chúng ta có thể hoàn toàn tìm ra được bằng cách thử trực tiếp. Hoặc giả như với các BĐT không đối xứng 3 biến thì hãy cố tìm 2 biến mà nó đối xứng nhau trong 3 biến đó và 2 biến đối xứng này sẽ bằng nhau,và hãy gán cho nó một giá trị. Sau đó ta chỉ tìm cực trị của biểu thức 1 biến. Điều này khá đơn giản bởi sự hỗ trợ của đạo hàm.
Bây giờ, ta sẽ tìm hiểu kĩ thuật chọn điểm rơi với BĐT AM-GM:

1

Cho $a\geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=a+\dfrac{1}{a^2}$

Lời giải

$$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{7a}{8}\geq 2\sqrt{\frac{a}{8}\cdot\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\frac{2}{\sqrt{8a}}+\frac{7a}{8}\geq\frac{2}{\sqrt{8.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{2}{4}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \min S=\frac{9}{4}$$

Lời giải này là lời giải sai. Ta phân tích kỹ hơn: Mặc dù chọn điểm rơi $a=2$ và $\min S=\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số: Nếu $a\ge 2$ thì $\frac{2}{\sqrt{8a}}\ge\frac{2}{\sqrt{8.2}}=\frac{2}{4}$ là đánh giá sai.

Để thực hiện lời giải đúng ta cần phải kết hợp với kỹ thuật tách nghịch đảo, phải biến đổi S sao cho sau khi sử dụng BĐT Côsi sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

Lời giải đúng:

$$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{6a}{8}\overset{\text{Côsi}}{\ge}3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{6a}{8}=\frac{3}{4}+\frac{6a}{8}\ge\frac{3}{4}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}$$

Với $a=2$ thì $\min S=\frac{9}{4}$

2

Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\le\frac{3}{2}\end{cases}$. Tìm GTNN của $S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

Lời giải

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$

Bây giờ, ta thay điểm rơi vào ta có phép tính: $\frac{1}{4}+4$. Như vậy ta sẽ tách 4 để sao cho có $\frac{1}{4}$. Vậy ta đi đến **Lời giải** sau:

$$S=\sqrt{a^2+\underbrace{\frac{1}{16b^2}+.....+\frac{1}{16b^2}}_{16}}+\sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+.....+\frac{1}{16c^2}}_{16}}+\sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+.....+\frac{1}{16a^2}}_{16}}$$

$$\ge\sqrt{17\sqrt[17]{a^2.\underbrace{\frac{1}{16b^2}.....\frac{1}{16b^2}}_{16}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{b^2.\underbrace{\frac{1}{16c^2}.....\frac{1}{16c^2}}_{16}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{c^2.\underbrace{\frac{1}{16a^2}.....\frac{1}{16a^2}}_{16}}}$$

$$=\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}}=\sqrt{17}\left(\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right)$$

$$\ge\sqrt{17}\left[3\sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}}\right]=3.\sqrt{17}\sqrt[17]{\frac{a}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{(2a2b2c)^5}}$$

$$\ge\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Dấu “ = ” xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{Min } S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Tiếp theo ta xét một VD kinh điển sau, là bài toán dự bị đề thi quốc tế năm 1998.

3

Chứng minh rằng với mọi số dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$ thì:

$$A=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải

Ở bài toán này, không có sự xuất hiện của những căn thức. Nhưng lại xuất hiện một biểu thức mẫu khá là khó chịu. Ta thử đánh giá mất mẫu xem thế nào.

Theo lối tư duy này ta xét riêng phân thức: $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}$ (các phân thức khác tương tự)

Để có thể mất đi mẫu $(1+y)(1+z)$ thì ta sẽ tìm cách nhân phân thức với biểu thức $(1+y)(1+z)$

Như vậy nghĩa là ta tìm một BĐT nào đó liên quan đến phép nhân,hiển nhiên đơn giản nhất đó chính là Bất Đẳng Thức AM-GM. Vấn đề tiếp theo cần xác định là áp dụng BĐT AM-GM với bộ bao nhiêu số?

Để ý điều kiện đề bài là tích 3 số (ở bậc 1),trong khi đó,số mũ của tử số là mũ 3,vì vậy,trong tư tưởng của ta,việc đánh giá phải làm mất được mẫu và đưa tử về bậc 1 (hoặc lớn hơn)-Tuy nhiên,chẳng dại gì mà ta lại đánh giá để đưa về bậc lớn,vì càng lớn thì việc khử "phần thêm" sẽ càng khó,Vậy,ta sẽ áp dụng cho 3 số(Sau này,trong hầu hết các bài toán đánh giá mẫu,thường thì bậc của tử là bậc bao nhiêu thì sẽ đánh giá cho từng ấy số hạng)

Từ những phân tích trên, thì hướng đánh giá của chúng ta sẽ là như sau:

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương, ta có: $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq\frac{3x}{4}$

Xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng lại, ta có:

$$A\geq\frac{x+y+z}{2}-\frac{3}{4}$$

Để ý rằng: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3s$

Vậy ta có $A\geq\frac{3}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=1$

4

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c\geq 20$. Tìm GTNN của:

$$A=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

Lời giải

Dự đoán GTNN của *A* đạt được khi $a+2b+3c=20$, tại điểm rơi $a=2,b=3,c=4$.

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{3}{a}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{4}{3}$$

$$b=3\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{\beta}=\frac{3}{\beta}\\ \frac{9}{2b}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{\beta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\beta=2$$

$$c=4\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{\gamma}=\frac{4}{\gamma}\\ \frac{4}{c}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{\gamma}=1\Rightarrow\gamma=4$$

Như vậy,ta đề xuất lời giải sau:

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\\&\geq 2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}+2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}}+\frac{a+2b+3c}{4}\\&\geq 3+3+2+5=13\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2, b=3, c=4$

Vậy GTNN của A là 13

Bình luận: Việc tìm được điểm rơi của bài toán bao giờ cũng là một trong những yếu tố tiên quyết khi giải toán cực trị.

5

Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của $A=\dfrac{1}{1+a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}$

Lời giải

Trước hết, ta sẽ dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=\dfrac{1}{2}$. Lúc này ta sẽ thay giá trị này vào từng số hạng của biểu thức A. Thì ta sẽ phải tách $\dfrac{1}{2ab}$ thành 2 số hạng sao cho có một số hạng nhận giá trị bằng $\dfrac{1}{1+a^2+b^2}$. Từ đó, ta có lời giải sau:

$$A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{(1+a^2+b^2)6ab}}+\frac{1}{3ab}$$

$$\ge 2.\frac{1}{\frac{1+a^2+b^2+6ab}{2}}+\frac{1}{3ab}=\frac{4}{(a+b)^2+1+4ab}+\frac{1}{3ab}$$

$$\ge\frac{4}{(a+b)^2+1+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\quad\left(\text{Do } ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$\ge\frac{4}{2(a+b)^2+1}+\frac{4}{3(a+b)^2}$$

$$\ge\frac{4}{2.1+1}+\frac{4}{3.1}=\frac{8}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1+a^2+b^2=6ab\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\dfrac{8}{3}$

Một dạng khác của kĩ thuật này là có khi ta cân bằng có sự xuất hiện của hằng số và cả biểu thức.
Ta xét ví dụ tiếp theo.

6

Với a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{9}$.

Chứng minh rằng: $(2a+2b-c)^3+(2b+2c-a)^3+(2c+2a-b)^3\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Ta có một hằng đẳng thức có nhiều ứng dụng sau:

$$(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2=9(a^2+b^2+c^2)=1$$

Như vậy ta sẽ đặt: $x=2a+2b-c; y=2b+2c-a; z=2c+2a-b$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: Với $x,y,z>0$ và thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng m

$$P=x^3+y^3+z^3\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ta có, theo AM-GM thì:

$$\begin{cases} x^3+x^3+(\frac{1}{\sqrt{3}})^3\ge\sqrt{3}x^2 \\ y^3+y^3+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\ge\sqrt{3}y^2 \\ z^3+z^3+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\ge\sqrt{3}z^2 \end{cases}$$

Cộng lại, ta có: $2P+\frac{1}{\sqrt{3}}\ge\sqrt{3}(x^2+y^2+z^2)=\sqrt{3}$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Với $a,b,c>0,a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng: $ab^2+bc^2+c+a^3\le$

Lời giải

Ta hãy thử liên kết giả thiết và BĐT cần chứng minh:

Theo Bất đẳng thức AM-GM thì:
$$\begin{cases} a^4+b^4+c^4+1\ge 4ab^2 \\ b^4+c^4+c^4+1\ge 4bc^2 \\ c^4+1+1+1\ge 4c \\ 1+a^4+a^4+1\ge 4a^2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ta chuyển sang một số Ví dụ nâng cao hơn, để thử sức "sát thương" của phương pháp này

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh r

$$\frac{1}{a^5(b^2+c^2)^2}+\frac{1}{b^5(c^2+a^2)^2}+\frac{1}{c^5(a^2+b^2)^2}\ge\frac{81}{4}$$

Lời giải

Một cách tự nhiên, ta sẽ cố gắng khử đi cái mẫu số khá khó chịu ở mỗi số hạng. Để làm điều nà đẳng thức AM-GM:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^5(b^2+c^2)^2}+\frac{81a(b^2+c^2)}{8}+\frac{81a(b^2+c^2)}{8}\ge\frac{27\sqrt[3]{9}}{4a} \\ \frac{1}{b^5(c^2+a^2)^2}+\frac{81b(c^2+a^2)}{8}+\frac{81b(c^2+a^2)}{8}\ge\frac{27\sqrt[3]{9}}{4b} \\ \frac{1}{c^5(b^2+a^2)^2}+\frac{81c(b^2+a^2)}{8}+\frac{81c(b^2+a^2)}{8}\ge\frac{27\sqrt[3]{9}}{4c} \end{cases}$$

Áp dụng tiếp Bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\begin{cases} \dfrac{27\sqrt[3]{9}}{4a} = 81\dfrac{1}{4.3.a.\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}} \ge \dfrac{81}{4\left(a^3+\dfrac{2}{3}\right)} \\ \dfrac{27\sqrt[3]{9}}{4b} \ge \dfrac{81}{4\left(b^3+\dfrac{2}{3}\right)} \\ \dfrac{27\sqrt[3]{9}}{4c} \ge \dfrac{81}{4\left(c^3+\dfrac{2}{3}\right)} \end{cases}$$

Như vậy, cộng theo vế 3 BĐT trên rồi áp dụng Bunhiacopxki, ta có:

$$\sum\frac{27\sqrt[3]{9}}{4a} \ge \sum\frac{81}{4\left(a^3+\dfrac{2}{3}\right)} \ge \frac{27^2}{4\left(a^3+b^3+c^3\right)+8} = \frac{243}{4}$$

Như vậy ta có:

$$\frac{1}{a^5\left(b^2+c^2\right)^2}+\frac{1}{b^5\left(c^2+a^2\right)^2}+\frac{1}{c^5\left(a^2+b^2\right)^2} \ge \frac{243}{4}-\frac{81\left(\sum ab^2+\sum a^2b\right)}{4}$$

Để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra được:

$$\sum ab^2+\sum ba^2 \le 2\left(a^3+b^3+c^3\right)=2$$

Bất đẳng thức này có mối liên quan gì với: $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$. Câu trả lời dành cho bạn đọc !
Vậy ta có điều phải chứng minh.

9

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=11$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=\frac{5xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{2zx}{y}$$

Lời giải

Mục đích của chúng ta là hy vọng đánh giá được: $P=\dfrac{5xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{2zx}{y} \ge k(x+y+z)$

Với k là một hằng số, ta sẽ sử dụng phương pháp hệ số bất định

Chọn 3 số dương m,n,p thỏa mãn $m<5,n<1,p<2$. Khi đó áp dụng Bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(5-m)\frac{xy}{z}+n\frac{yz}{x} \ge 2y\sqrt{(5-m)n}$$
$$(1-n)\frac{yz}{x}+p\frac{zx}{y} \ge 2z\sqrt{(1-n)p}$$
$$(2-p)\frac{zx}{y}+m\frac{xy}{z} \ge 2x\sqrt{(2-p)m}$$

Như vậy, muốn sử dụng đượ giả thiết $x+y+z=11$ thì ta phải có:

$$\sqrt{(5-m)n}=\sqrt{(1-n)p}=\sqrt{(2-p)m}.$$

Ta có thể chọn $m=1$, khi đó ta sẽ tìm được $p=\sqrt{17}-3;n=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$
Từ đó, ta có:

$$P \ge \left(10-2\sqrt{17}\right)(x+y+z)$$

10

Cho $\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ x^n + y^n + z^n = M \end{cases}$ (n là số tự nhiên khác 0; M là số không âm cho trước).

Tìm giá trị lớn nhất của:

a, $P_1 = xy + yz + zx$

b, $P_2 = \sqrt[m]{xy} + \sqrt[m]{yz} + \sqrt[m]{zx}$ $(m \in \mathbb{N}, m \geq 2)$.

Lời giải

Do vai trò bình đẳng của x,y,z nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x^n = y^n = z^n = \dfrac{M}{3}$

Để xuất hiện biểu thức $P_1 = xy + yz + zx$ ta cần áp dụng BĐT Cô si cho n số:

Ta có: $x^n + y^n + \underbrace{\dfrac{M}{3} + \dfrac{M}{3} + \ldots + \dfrac{M}{3}}_{(n-2)\text{ số}} \geq n\sqrt[n]{x^n.y^n.\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}} = n\sqrt[n]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}}xy$

Suy ra: $x^n + y^n + (n-2)\dfrac{M}{3} \geq n\sqrt[n]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}}xy$

Tương tự: $\begin{cases} y^n + z^n + (n-2)\dfrac{M}{3} \geq n\sqrt[n]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}}yz \\ z^n + x^n + (n-2)\dfrac{M}{3} \geq n\sqrt[n]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}}zx \end{cases}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$n\sqrt[n]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}}.P_1 \leq 2\left(x^n + y^n + z^n\right) + (n-2)M = nM \Rightarrow P_1 \leq \dfrac{M}{\sqrt[n]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{n-2}}} = 3\sqrt[n]{\dfrac{M^2}{9}}$$

Vậy $\text{Max}P_1 = 3.\sqrt[n]{\dfrac{M^2}{9}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[n]{\dfrac{M}{3}}$.

b). Tương tự câu a ta áp dụng bất đẳng thức Cô si như sau:

Ta có: $x^n + y^n + \underbrace{\dfrac{M}{3} + \dfrac{M}{3} + \ldots + \dfrac{M}{3}}_{(mn-2)\text{ số}} \geq mn\sqrt[mn]{x^n.y^n.\left(\dfrac{M}{3}\right)^{mn-2}}$

Suy ra: $x^n + y^n + (mn-2)\dfrac{M}{3} \geq mn\sqrt[mn]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{mn-2}}\sqrt[m]{xy}$

Tương tự: $\begin{cases} y^n + z^n + (mn-2)\dfrac{M}{3} \geq mn\sqrt[mn]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{mn-2}}\sqrt[m]{yz} \\ z^n + x^n + (mn-2)\dfrac{M}{3} \geq mn\sqrt[mn]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{mn-2}}\sqrt[m]{zx} \end{cases}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$mn\sqrt[mn]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{mn-2}}.P_2 \leq 2\left(x^n + y^n + z^n\right) + (mn-2)M = mnM \Rightarrow P_1 \leq \dfrac{M}{\sqrt[mn]{\left(\dfrac{M}{3}\right)^{mn-2}}} = 3\sqrt[mn]{\dfrac{M^2}{9}}$$

Vậy $\mathrm{Max}P_2 = 3.\sqrt[mn]{\frac{M^2}{9}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[n]{\frac{M}{3}}$.

11

Cho x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + kz^2 = M$ (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước).
Tìm giá trị lớn nhất của của $S = xy + yz + zx$

Phân tích và Lời giải

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x = y$ và các thao tác đối với x và y là "giống nhau". Ta tách $\begin{cases} x^2 = mx^2 + (1-m)x^2 \\ y^2 = my^2 + (1-m)y^2 \end{cases} \quad (0 \le m \le 1)$

đồng thời "chia đều" $kz^2 = \frac{k}{2}z^2 + \frac{k}{2}z^2$ cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si như sau: $\begin{cases} (1-m)x^2 + (1-m)y^2 \ge 2(1-m)xy \\ mx^2 + \frac{k}{2}z^2 \ge \sqrt{2mk}xz \\ my^2 + \frac{k}{2}z^2 \ge 2\sqrt{mk}yz \end{cases}$

Để xuất hiện biểu thức $S = xy + yz + zx$ ta cần chọn m sao cho

$$2(1-m) = \sqrt{2mk} \Leftrightarrow 4(1-m)^2 = 2mk \Leftrightarrow 2m^2 - (4+k)m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}\left[(4+k) - \sqrt{k^2 + 8k}\right]$$

(vì $0 \le m \le 1$).

Khi đó cộng vế theo vế suy ra: $2(1-m)S \le M \Rightarrow S \le \frac{M}{2(1-m)}$.

Vậy GTLN của $S = \frac{M}{2(1-m)} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \text{ cungdau} \\ x = y \\ mx^2 = \frac{kz^2}{2} \\ x^2 + y^2 + kz^2 = M \end{cases}$

12

Cho x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + \frac{9}{2}z^2 = 5$. Tìm GTLN của $S = xy + yz + zx$

Lời giải

Chọn $m = \frac{1}{4}\left[\left(4 + \frac{9}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8.\frac{9}{2}}\right] = \frac{1}{4}$

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 \ge \frac{3}{2}|xy| \ge \frac{3}{2}xy \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}z^2 \ge \frac{3}{2}|xz| \ge \frac{3}{2}xz \\ \frac{1}{4}y^2 + \frac{9}{4}z^2 \ge \frac{3}{2}|yz| \ge \frac{3}{2}yz \end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $\frac{3}{2}S \le x^2+y^2+\frac{9}{2}z^2=5 \Rightarrow S \le \frac{10}{3}$.

Vậy $\text{Max}S=\frac{10}{3}$ khi $\begin{cases} x=y=3z \\ x^2+y^2+\frac{9}{2}z^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\sqrt{2};z=-\frac{\sqrt{2}}{3} \\ x=y=\sqrt{2};z=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Bạn đọc hãy thực hành qua một số bài toán sau:

Bài toán:

1). Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+4z^2=4$. Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$.

2). Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+8z^2=1$. Tìm GTLN của $Q=xy+yz+zx$

Tiếp tục các ví dụ tiếp theo.

13

Cho x,y,z thoả mãn $2(x^2+y^2)+9z^2=10$. Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$

Lời giải

Chọn $m=\frac{1}{4}\left[(4.2+9)-\sqrt{9^2+8.9.2}\right]=\frac{1}{2}$

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2 \ge 3|xy| \ge 3xy \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}z^2 \ge 3|xz| \ge 3xz \\ \frac{1}{2}y^2+\frac{9}{2}z^2 \ge 3|yz| \ge 3yz \end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $3S \le 2(x^2+y^2)+9z^2=10 \Rightarrow S \le \frac{10}{3}$.

Vậy Max $S=\frac{10}{3}$ khi $\begin{cases} x=y=3z \\ 2(x^2+y^2)+9z^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\sqrt{2};z=-\frac{\sqrt{2}}{3} \\ x=y=\sqrt{2};z=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$.

14

Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=M$. (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước). Tìm giá trị lớn nhất của $S=xy+yz+kzx$

Lời giải

Do vai trò bình đẳng của x, z nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi x và z và các thao tác đối với x và z là "giống nhau". Để xuất hiện biểu thức: $S=xy+yz+kxz$ thì khi ta áp dụng BĐT Cô si

$$\begin{cases} (1-m)x^2+\frac{1}{2}y^2 \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}|xy| \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}xy \\ (1-m)z^2+\frac{1}{2}y^2 \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}|yz| \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}yz \\ mx^2+mz^2 \ge 2m|xz| \ge 2mxz \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có: $x^2+y^2+z^2 \geq 2\left(\sqrt{\frac{1-m}{2}}xy+\sqrt{\frac{1-m}{2}}yz+mxz\right)$

Ta cần chọn m ($0 \leq m \leq 1$) sao cho:

$$m = k\sqrt{\frac{1-m}{2}} \Leftrightarrow m^2 = k^2\left(\frac{1-m}{2}\right) \Leftrightarrow 2m^2+k^2m-k^2=0 \Rightarrow m = \frac{-k^2+\sqrt{k^4+8k^2}}{4}$$

Khi đó suy ra:

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2\left(\sqrt{\frac{1-m}{2}}xy+\sqrt{\frac{1-m}{2}}yz+k\sqrt{\frac{1-m}{2}}xz\right) = \sqrt{2(1-m)}[xy+yz+kxz]$$

Do đó: $S = xy+yz+kzx \leq \frac{M}{\sqrt{2(1-m)}}$

Vậy: $\text{MaxS} = \frac{M}{\sqrt{2(1-m)}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = \pm\sqrt{\frac{M}{4-2m}} \\ y = \sqrt{2(1-m)}x \end{cases}$

15

Cho x, y, z thoả mãn $xy+yz+zx = M$ (M là số không âm cho trước).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = n(x^2+y^2)+kz^2$ (k là hằng số dương)

Lời giải

Ta tách $\begin{cases} x^2 = mx^2+(n-m)x^2 \\ y^2 = ny^2+(n-m)y^2 \end{cases}$ $(0 \leq m \leq n)$ đồng thời "chia đều" $kz^2 = \frac{k}{2}z^2+\frac{k}{2}z^2$ cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} (n-m)x^2+(n-m)y^2 \geq 2(n-m)xy \\ mx^2+\frac{k}{2}z^2 \geq \sqrt{2mk}xz \\ my^2+\frac{k}{2}z^2 \geq 2\sqrt{mk}yz \end{cases}$

Để xuất hiện biểu thức $xy + yz + zx$ ta cần chọn m sao cho

$$2(n-m) = \sqrt{2mk} \Leftrightarrow 4(n-m)^2 = 2mk \Leftrightarrow 2m^2-(4n+k)m+2n^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}\left[(4n+k)-\sqrt{k^2+8kn}\right]$$

(vì $0 \leq m \leq n$).

Khi đó cộng vế theo ba BĐT trên ta được: $S \geq 2(n-m)M$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x, y, z \text{ cùng dau} \\ x = y \\ mx^2 = \frac{k}{2}z^2 \\ xy+yz+zx = 1 \end{cases}$

16

Cho x, y, z thoả mãn $xy+yz+zx = 15$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\ge\frac{2}{3}|xy|\ge\frac{2}{3}xy \\ \frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}z^2\ge\frac{2}{3}|xz|\ge\frac{2}{3}xz \\ \frac{2}{3}y^2+\frac{1}{6}z^2\ge\frac{2}{3}|yz|\ge\frac{2}{3}yz \end{cases}$

Cộng vế theo các BĐT trên ta được: $S\ge\frac{2}{3}(xy+yz+zx)=\frac{2}{3}.15=10$.

Vậy $\text{MinS}=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y=\sqrt{3};z=2\sqrt{3} \\ x=y=-\sqrt{3};z=-2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Cho A,B,C là 3 góc của một tam giác sao cho: $5\cos A+6\cos B+7\cos C=9$.

Chứng minh rằng: $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}+\sin^4\frac{C}{2}\ge\frac{7}{16}$

Lời giải

Bài toán này khá đặc biệt tùy là giả thiết bài toán cho các hệ số lệch nhau và bậc của biểu thức cần Chứng minh cũng lệch nhưng đẳng thức xảy ra lại tại tâm, nghĩa là $A=B=C$. Trước hết ta sẽ đại số hóa BĐT lượng giác này bằng phép đặt ẩn phụ.

Đặt $x=\sin\frac{A}{2};y=\sin\frac{B}{2};z=\sin\frac{C}{2}$. Dễ thấy $(x,y,z>0)$

Khi đó, ta có một hệ quả quen thuộc là:

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{3}{4}(1)$$

Ngoài ta, từ giả thiết ta dễ dàng suy ra: $5x^2+6y^2+7z^2=\frac{9}{2}$. Do $(\cos a=1-2\sin^2\frac{a}{2})$

Quay trở lại bài toán, ta cần chứng minh:

$$x^2+y^3+z^4\ge\frac{7}{16}$$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=\frac{1}{2}$. Nên ta sẽ áp dụng Bất đẳng thức AM-GM với kĩ thuật chọn điểm rơi:

$$\begin{cases} \frac{y^3}{2}+\frac{y^3}{2}+\frac{1}{16}\ge\frac{3}{4}y^2\Rightarrow y^3\ge\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{16} \\ z^4+\frac{1}{16}\ge\frac{1}{2}z^2=>z^4\ge\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{16} \end{cases}$$

Cộng 2 BĐT này., theo vế ta được:

$$y^3+z^4\ge\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{8}$$

Vì vậy, ta có:

$$x^2+y^3+z^4\ge x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{8}=x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}z^2-\frac{5x^2+6y^2+7z^2-\frac{9}{2}}{4}-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{9}{4}(x^2+y^2+z^2)-\frac{5}{4}\ge\frac{7}{16}\quad\text{(theo (1))}$$

Bình luận: Các bạn học sinh hãy thử chứng minh bất đẳng thức (1) và ghi nhớ nó như một bổ đề có nhiều áp dụng

18 Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=a^2+b^2+c^3$$

Lời giải

Trước hết, ta đi dự đoán điểm rơi của bài toán. Đầu tiên ta tư duy ngay được $a=b$ vì 2 biến này đối xứng nhau. Bây giờ quan sát tiếp, ta thấy rằng giả thiết của bài toán liên quan đến các biểu thức bậc 1 trong khi các biểu thức trong P lại có lũy thừa là 2 và 3. Do vậy ta cần đánh giá để đưa bậc cao về bậc 1. Để làm được điều này, ta dùng BĐT AM-GM. Chú ý số bộ số để áp dụng BĐT AM-GM thì bằng số bậc của biểu thức. Nhưng một điều khó khăn nữa đó là ta chưa biết điểm rơi chính xác. Nên ta sẽ sử dụng điểm rơi giả định. Tuy nhiên ta cũng có thể giải rỏ rang điểm rơi bằng cách thay $a=b=\frac{3-c}{2}$ rồi lấy đạo hàm. Tuy nhiên điều này là không quá cần thiết lắm vì nếu bậc cao thì nghiệm nghiệm đạo hàm khá là khó giải (thường là số vô tỷ).

Giả sử tại $a=b=x, c=y(2x+y=3)$ là điểm rơi, ta có theo Bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{cases} a^2+x^2\ge 2ax \\ b^2+y^2\ge 2by \\ c^3+y^3+y^3\ge 3y^2c \end{cases}$$

Cộng 3 BĐT cùng chiều này lại, ta có:

$$P\ge (2x(a+b)+3y^2c)-2x^2-2y^3$$

Ta sẽ mong muốn tận dụng được giả thiết là $a+b+c=3$ vậy nghĩa là hệ số $2x=3y^2$. Mặt khác lại có $2x+y=3$.

Giải hệ này ta tìm được $x=\frac{19-\sqrt{37}}{12}; y=\frac{\sqrt{37}-1}{6}$

Phần còn lại để kết thúc lời giải xin dành cho bạn đọc.

Bài toán tương tự: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+2b^2+3c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a^3+3b^3+4c^3$

Hướng dẫn

Ta áp dụng Bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$2a^3+\left(\frac{6}{\sqrt{407}}\right)^3\ge 3\frac{6}{\sqrt{407}}a^2$$

$$\frac{3}{2}\left(2b^3+\left(\frac{8}{\sqrt{407}}\right)^3\right)\ge \frac{9}{2}b^2.\frac{8}{\sqrt{407}}$$

$$2\left(2c^3+\left(\frac{9}{\sqrt{407}}\right)^3\right)\ge 6c^2\frac{9}{\sqrt{407}}$$

Các bạn đọc hãy thử lập luận vì sao lại áp dụng như trên nhé.

19 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $4a+3b+4c=22$.

Tìm GTNN của biểu thức: $P=a+b+c+\frac{1}{3a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$

Lời giải

Ngày nhỏ, bố tôi thường ra các câu đố 3 quả cam +5 quả cam bằng bao nhiêu? Rồi sau đó tôi tập trả lời câu hỏi 3 quả cam + 5 quả quýt bằng bao nhiêu. Câu hỏi này khó hơn câu hỏi đầu tiên nhiều bởi vì chúng ta phải quy đổi 1 quả cam bằng bao nhiêu quả quýt. Tư tưởng tự nhiên này, được áp dụng trong giải toán rất nhiều. Ta thấy với bài toán này, giả thiết là biểu thức bậc 1 còn biểu thức P có sự xuất hiện của phân thức. Như vậy ta phải đánh giá để đưa phân thức này về dạng bậc nhất.

Cũng chưa đoán được điểm rơi của bài toán này, nên ta sẽ dùng điểm rơi giả định.

Giả sử điểm rơi tại $(a,b,c)=(x,y,z)$.

Ta thấy: $\frac{1}{3a}=\frac{1}{3x}=\frac{a}{3x^2};\frac{2}{b}=\frac{2}{y}=\frac{2b}{y^2};\frac{3}{c}=\frac{3}{z}=\frac{3c}{z^2}$

Theo Bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\begin{cases}\frac{1}{3a}+\frac{a}{3x^2}\ge\frac{2}{3x}\\ \frac{2}{b}+\frac{2b}{y^2}\ge\frac{4}{y}\\ \frac{3}{c}+\frac{3c}{z^2}\ge\frac{6}{z}\end{cases}$

Vậy ta suy ra được: $\frac{1}{3a}\ge\frac{2}{3x}-\frac{a}{3x^2};\frac{2}{b}\ge\frac{4}{y}-\frac{2b}{y^2};\frac{3}{c}\ge\frac{6}{z}-\frac{3c}{z^2}$

Như vậy ta có

$$P\ge a+b+c+\left(\frac{2}{3x}-\frac{a}{3x^2}\right)+\left(\frac{4}{y}-\frac{2b}{y^2}\right)+\left(\frac{6}{z}-\frac{3c}{z^2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3x^2}\right)a+\left(1-\frac{2}{y^2}\right)b+\left(1-\frac{1}{3z^2}\right)c+\frac{2}{3x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}$$

Để vận dụng được giả thiết $4a+3b+4c=22$ thì ta cần phải có các hệ số của $a:b:c$ tỉ lệ theo $4:3:4$

Giải hệ này ta có $x=1;y=2;z=3$.

Phần còn lại của lời giải xin dành cho bạn đọc !

20

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm GTNN:
$$P=\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{3+9b}+\frac{1}{6+3c}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:
$$\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{2+4a}{16}\right)+\left(\frac{1}{3+9b}+\frac{3+9b}{36}\right)+\left(\frac{1}{6+3c}+\frac{6+3b}{144}\right)\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Suy ra $P+\frac{2+4a}{16}+\frac{3+9b}{-36}+\frac{6+3b}{144}\ge1\Rightarrow P\ge\frac{1}{2}$ (vì $a+b+c=1$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

21

[Macedonia 1999] Cho các số dương a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:
$$a+b+c+\frac{1}{abc}\ge4\sqrt{3}$$

Lời giải

Theo BĐT Cauchy ta có: $a+b+c+\frac{1}{9abc}\ge3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

Mà $1=a^2+b^2+c^2\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\le\frac{1}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{8}{9abc}\ge\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Cộng vế theo vế 2 BĐT trên ta có điều phải chứng minh

22

Cho các số thực a, b, c dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất $J = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Lời giải

Tượng tự như trên, ta sẽ có: $J = \left(x^2 + a^2\right) + 2\left(y^2 + b^2\right) + 3\left(z^2 + c^2\right) \geq 2ax + 4by + 6cz$

Ta sẽ chọn a,b,c sao cho: $\begin{cases} 2a = 4b = 6c \\ a + b + c = x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{18}{11};\ b = \dfrac{9}{11};\ c = \dfrac{6}{11}$

Khí đó: $J = \left[x^2 + \left(\dfrac{18}{11}\right)^2\right] + 2\left[y^2 + \left(\dfrac{9}{11}\right)^2\right] + 3\left[z^2 + \left(\dfrac{6}{11}\right)^2\right] - \left[\left(\dfrac{18}{11}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{11}\right)^2 + \left(\dfrac{6}{11}\right)^2\right] \geq$

$$\geq \frac{36}{11}(x + y + z) - \left[\left(\frac{18}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2\right] = 3$$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow x = \dfrac{18}{11};\ y = \dfrac{9}{11};\ z = \dfrac{6}{11}$

Tuy nhiên chúng tôi sẽ giới thiệu các bạn cách giải tại điểm rơi BĐT Cauchy Schwarz cũng tương tự:

Vẫn tư tưởng như cũ: Ta có: $\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right)\left(a^2 + 2b^2 + 3c^2\right) \geq (xa + 2yb + 3zc)^2$

Ta sẽ chọn a,b,c sao cho: $\begin{cases} a = 2b = 3c \\ \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z} \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{18}{11};\ b = \dfrac{9}{11};\ c = \dfrac{6}{11}$ (vì $x+y+z=3$)

Thay vào: $\left(\left(\dfrac{18}{11}\right)^2 + 2\left(\dfrac{9}{11}\right)^2 + 3\left(\dfrac{6}{11}\right)^2\right)\left(a^2 + 2b^2 + 3c^2\right) \geq \dfrac{18}{11}(x + y + z)^2 = \dfrac{18}{11}.9 \Rightarrow J \geq 3$

23

Cho a,b,c dương có: $ab + bc + ca = 1$. Tìm min: $S = 10a^2 + 10b^2 + c^2$

Lời giải

Phân tích định hướng

Bài toán quen thuộc thêm 1 chút rắc rối vì giả thiết ta không thể dùng BĐT Cauchy từng biến để hạ bậc. Bởi giả thiết quan hệ a,b,c không đơn lẻ.

Dấu "=" xảy ra thì $a = b$. Ta sẽ tách:

$$S = 10\left(a^2 + b^2\right) + c^2 = (10 - \alpha)\left(a^2 + b^2\right) + \left(\alpha a^2 + \frac{1}{2}c^2\right) + \left(\alpha b^2 + \frac{1}{2}c^2\right) \geq$$

$$\geq 2(10 - \alpha).ab + \sqrt{2\alpha}.ac + \sqrt{2\alpha}.bc$$

Điều ta mong muốn là $S \geq k(ab + bc + ca)$. Vậy ta sẽ chọn α sao cho: $2(10 - \alpha) = \sqrt{2\alpha}$

$\Rightarrow \alpha = 8$.

Lời giải chi tiết

Ta có: $S = 2\left(a^2 + b^2\right) + \left(8a^2 + \dfrac{1}{2}c^2\right) + \left(8b^2 + \dfrac{1}{2}c^2\right) \geq 4(ab + bc + ca) = 4$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 8a^2 = \dfrac{1}{2}c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{3};\ c = \dfrac{4}{3}$

24

Cho a,b,c dương thỏa mãn: $ab + bc + ca \geq 1$. Tìm min: $K = a^2 + b^2 + 2c^2$

Lời giải

Phân tích định hướng

Dễ thấy dấu "=" xảy ra thì a=b. Ta sẽ áp dụng BĐT Cauchy như sau:

$$\begin{cases}\alpha a^2+\alpha b^2\ge 2\alpha ab\\(1-\alpha)a^2+c^2\ge 2\sqrt{1-\alpha}.ac\\(1-\alpha)b^2+c^2\ge 2\sqrt{1-\alpha}.bc\end{cases}$$

$$\Rightarrow K\ge 2\alpha.ab+2\sqrt{1-\alpha}.ac+2\sqrt{1-\alpha}.bc\,(0<\alpha<1).$$

Để đưa về $K\ge k(ab+bc+ca)$, ta chỉ cần tìm α sao cho: $2\alpha=2\sqrt{1-\alpha}$ và $0<\alpha<1$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\sqrt5-1}{2}.$$

Lời giải chi tiết

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $K=\frac{\sqrt5-1}{2}(a^2+b^2)+\left(\frac{3-\sqrt5}{2}a^2+c^2\right)+\left(\frac{3-\sqrt5}{2}b^2+c^2\right)\ge$

$$\ge(\sqrt5-1)ab+2\sqrt{\frac{3-\sqrt5}{2}}ac+2\sqrt{\frac{3-\sqrt5}{2}}bc=(\sqrt5-1)(ab+bc+ca)\ge\sqrt5-1$$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow$ $a=b=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$; $c=\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt[4]{5}}$

25

Cho a,b,c dương có tổng bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất $S=5ab+10bc+9ca$

Lời giải

Trước hết đưa S về dạng: $S=ma(b+c)+nb(c+a)+pc(a+b)$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases}m+n=5\\n+p=10\\p+m=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=3\\p=7\end{cases}$. Vậy $S=2a(b+c)+3b(c+a)+7c(a+b)$

$$S=2a(3-a)+3b(3-b)+7c(3-c)=27-\left[2\left(a-\frac32\right)^2+3\left(b-\frac32\right)^2+7\left(c-\frac32\right)^2\right]$$

Đặt $x=\left|a-\frac32\right|$; $y=\left|b-\frac32\right|$; $z=\left|c-\frac32\right|\Rightarrow x+y+z\ge\left|a+b+c-\frac92\right|=\frac32$

Khi đó: $S=27-(2x^2+3y^2+7z^2)$. Ta chỉ cần tìm min của $x^2+3y^2+7z^2$. Ta chuyển về bài toán:

26

Cho x,y,z không âm thỏa mãn: $x+y+z\ge\frac32$. Tìm min: $P=2x^2+3y^2+7z^2$

Hoàn toàn là **Ví dụ 23.** Ta tìm được $P\ge\frac{189}{82}$ tại $x=\frac{63}{82}$; $y=\frac{21}{41}$; $z=\frac{9}{41}$

27

[VNTST 2001] Cho a,b,c dương thỏa mãn: $21ab+2bc+8ca\le 12$.

Tìm GTNN của: $P=\frac1a+\frac2b+\frac3c$.

Lời giải

Phương pháp giải tương tự như trên!

Nhưng nếu các bạn đang mang ý tưởng Cauchy như sau thì đó là một lối đi không tốt:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+21ab\ge 3\sqrt[3]{21xy} \\ \dfrac{2-y}{b}+\dfrac{z}{c}+2bc\ge 3\sqrt[3]{8(2-y)z} \\ \dfrac{1-x}{a}+\dfrac{3-z}{c}+8ca\ge 3\sqrt[3]{8(1-x)(3-z)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P+21ab+2bc+8ca\ge k.\left(x\in(0;1);y\in(0;2);z\in(0;3)\right).$$

Vậy ta chỉ cần tìm x,y,z sao cho dấu "=" xảy ra: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=21ab \\ \dfrac{2-y}{b}=\dfrac{z}{c}=2bc \\ \dfrac{1-x}{a}=\dfrac{3-z}{c}=8ca \end{cases}$

Rồi sao, giải ra hệ phương trình này, chắc chắn giải được! Nhưng một vấn đề quan trọng hơn, nếu sử dụng như vậy các bạn đã vô tình giới hạn điều kiện của x,y,z và như thế đẳng thức xảy ra sẽ không thể khẳng định đó là GTNN của P. Vậy giải quyết như thế nào, chẳng nhẽ thay hệ số của $ab;bc;ca$ trong BĐT Cauchy rồi sau sẽ nhân lên, hướng này rất mịt mờ: 9 ẩn với 3PT kép 2 dấu bằng và 1PT ngoài. Nếu vậy thì vẫn một câu nói ngay từ khi bắt đầu dạng toán này, nếu chưa có dấu bằng thì hãy giờ sử cho có, ta sẽ làm như sau:

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{2}{b};z=\dfrac{3}{c}\Rightarrow \dfrac{7}{xy}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{4}{zx}\le 2$. Ta sẽ đi tìm GTNN của: $P=x+y+z$

Giả sử dấu bằng xảy ra tại $x=\alpha;y=\beta;z=\chi$

Theo BĐT Cauchy ta có: $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{xy}\ge 3 \quad (1) \\ \dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\chi}+\dfrac{\beta\chi}{yz}\ge 3 \quad (2) \\ \dfrac{z}{\chi}+\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\chi\alpha}{zx}\ge 3 \quad (3) \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{7}{\alpha\beta}.PT^{(1)}+\dfrac{2}{\beta\chi}.PT^{(2)}+\dfrac{4}{\chi\alpha}.PT^{(3)}\ge 3\left(\dfrac{7}{\alpha\beta}+\dfrac{2}{\beta\chi}+\dfrac{4}{\chi\alpha}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{7}{\beta}+\frac{4}{\chi}\right)x+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{7}{\alpha}+\frac{2}{\chi}\right)y+\frac{1}{\chi^2}\left(\frac{2}{\beta}+\frac{4}{\alpha}\right)z+\frac{7}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{4}{zx}\ge 3\left(\frac{7}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta\chi}+\frac{4}{\chi\alpha}\right)$$

Vậy ta sẽ tìm $\alpha;\beta;\chi$ sao cho $\dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{7}{\beta}+\dfrac{4}{\chi}\right)=\dfrac{1}{\beta^2}\left(\dfrac{7}{\alpha}+\dfrac{2}{\chi}\right)=\dfrac{1}{\chi^2}\left(\dfrac{2}{\beta}+\dfrac{4}{\alpha}\right)$

Và thỏa mãn ĐK: $\dfrac{7}{\alpha\beta}+\dfrac{2}{\beta\chi}+\dfrac{4}{\alpha\chi}=2$ ta thu được $\alpha=3;\ \beta=\dfrac{5}{2};\ \chi=2$

Lời giải chi tiết

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{2}{b};z=\dfrac{3}{c}\Rightarrow \dfrac{7}{xy}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{4}{zx}\le 2$. Ta sẽ đi tìm GTNN của: $P=x+y+z$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{5}{2}}+\frac{\frac{15}{2}}{xy}\ge 3^{(1)};\quad \frac{y}{\frac{5}{2}}+\frac{z}{2}+\frac{5}{yz}\ge 3^{(2)};\quad \frac{z}{2}+\frac{x}{3}+\frac{6}{zx}\ge 3^{(3)}$$

Suy ra: $\frac{14}{15}.PT^{(1)}+\frac{2}{5}.PT^{(2)}+\frac{2}{3}.PT^{(3)}\geq 3\left(\frac{14}{15}+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow \frac{8}{15}P+\frac{7}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{4}{zx}\geq 6\Rightarrow P\geq\frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{3};y=\frac{4}{5};z=\frac{3}{2}$

Bài toán được giải quyết! Đây cũng là một cách giải sáng tạo! Cách giải theo các tài liệu hiện nay là sử dụng đạo hàm nhưng cách giải dùng AM-GM tinh tế và mang tính kĩ thuật hơn. Đây cũng là lời giải được đề xuất bởi tác giả bài toán này TS Trần Nam Dũng. Được biết trong kì thi TST 2001. PGS Lê Anh Vinh (PGS trẻ nhất VN 2013) cũng đã thao tác một lời giải như trên.

28

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $x^2+2y^2+5z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất:

$$P=xy+yz+zx$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$1=x^2+2y^2+5z^2=\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2}y^2+2z^2\right)+\left(\frac{1}{3}x^2+3z^2\right)\geq 2(xy+yz+zx)\Rightarrow P\leq\frac{1}{2}$$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{11}} \\ y=\frac{2}{\sqrt{11}} \\ z=\frac{1}{\sqrt{11}} \end{cases}$

Vậy $P\max=\frac{1}{2}$ tại $x=\frac{3}{\sqrt{11}};y=\frac{2}{\sqrt{11}};z=\frac{1}{\sqrt{11}}$

29

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn: $a+b+c=4$. Tìm GTLN và GTNN của:

$$P=\sqrt{2a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{4c+1}$$

Lời giải

Rõ ràng là biểu thức cần tìm là tổng các biểu thức đơn lẻ của ẩn và ta mong đợi rằng đề bài là tìm GTLN của P bằng cách sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz. Cũng xin nói luôn về việc tìm GTLN của nó, dấu "=" vẫn luôn là thứ được ưu tiên hàng đầu trong dạng toán này. Việc tìm GTLN bài toán này là dễ! Vấn đề quan tâm hơn cả là tìm GTNN!

Quay trở lại bài toán, ta sẽ đặt như sau:

Đặt $x=\sqrt{2a+1};y=\sqrt{3b+1};z=\sqrt{4c+1}\,(x,y,z\geq 1)$

Và bắt đầu chuyển về ẩn mới:

Suy ra $\frac{1}{2}(x^2-1)+\frac{1}{3}(y^2-1)+\frac{1}{4}(z^2-1)=4\Rightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=\frac{61}{12}\Rightarrow x^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{2}z^2=\frac{61}{6}$

Ta sẽ tìm GTLN và GTNN của $P=x+y+z$.

* **GTLN**: Bài toán này quá quen thuộc rồi, theo tư tưởng như trên:

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)(2+3+4)\geq(x+y+z)^2\Rightarrow P\leq\frac{\sqrt{183}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{183}}{9}; y = \dfrac{\sqrt{183}}{6}; z = \dfrac{2\sqrt{183}}{9}$

$$\Leftrightarrow a = \frac{17}{27}; b = \frac{49}{36}; c = \frac{217}{108}$$

***GTNN**: Phải đưa bậc của nó về ngang bằng hoặc lớn hơn giả thiết cho mới mong tìm được GTNN:

Ta có: $P^2 = (x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx)$

Dễ có: $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{61}{6} + \dfrac{1}{3}y^2 + \dfrac{1}{2}z^2 \geq 11$ vì $y, z \geq 1$.

Suy ra $P^2 \geq 11 + 2(xy+yz+zx)$. Từ giả thiết ta chỉ có thể tìm max của $xy+yz+zx$.

Vậy để tìm $P\min$ ta sẽ đánh giá $xy+yz+zx$ lớn hơn so với P đương nhiên là phải có mặt ĐK của x,y,z:

Từ $x, y, z \geq 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) \geq 0$

$\Rightarrow xy+yz+zx+3 \geq 2(x+y+z) \Rightarrow P^2 \geq 11 + (4P-6) \Rightarrow P \geq 5$ (vì $P \geq 3$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 3; y = z = 1 \Leftrightarrow a = 4; b = c = 0$

Vậy $P_{max} = \dfrac{\sqrt{183}}{2}$ tại $a = \dfrac{17}{27}; b = \dfrac{49}{36}; c = \dfrac{217}{108}$

$P_{min} = 5$ tại $a = 4; b = c = 0$

<u>Lưu ý</u>: Việc đặt như trên chỉ vì mục đích sử dụng nó cho việc tìm GTNN sau này, nếu chỉ muốn tìm GTLN của P ta chỉ việc áp dụng trực tiếp BĐT Cauchy – Schwarz:

$$P = \sqrt{2}.\sqrt{a+\frac{1}{2}} + \sqrt{3}.\sqrt{b+\frac{1}{3}} + 2.\sqrt{c+\frac{1}{4}} \leq \sqrt{(2+3+4)\left(a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{3}+c+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{183}}{2}$$

Vấn đề đặt ra bây giờ khá tinh vi. Trong công cuộc tìm GTLN, hoàn toàn sẽ xảy ra trường hợp không tìm được dấu "=" còn tìm GTNN thì luôn tìm được vì ĐK bài toán a,b,c không âm. Tùy thuộc vào giá trị của tổng mà ta có thể tìm GTLN theo cách trên hay không. Ta sẽ đi thử bài toán sau:

30

Cho a, b, c là các số không âm có tổng bằng 1. Tìm GTLN và GTNN của:

$$T = \sqrt{a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{3c+1}$$

<u>Lời giải</u>

Bây giờ thì vấn đề không còn là tìm GTNN nữa:

* Đầu tiên là tìm GTNN. Phương cách đi không khác gì bài giải trên, bởi vì tư hướng của nó khá tổng quát:

Đặt $x = \sqrt{a+1}; y = \sqrt{2b+1}; z = \sqrt{3c+1}\ (x, y, z \geq 1)$

Suy ra $(x^2-1) + \dfrac{1}{2}(y^2-1) + \dfrac{1}{3}(z^2-1) = 1 \Rightarrow x^2 + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = \dfrac{17}{6}$.

Ta sẽ tìm GTNN của $T = x+y+z$.

Ta có: $T^2 = (x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx)$

Dễ có: $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{17}{6} + \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{2}{3}z^2 \geq 4$ vì $y, z \geq 1$. Suy ra $T^2 \geq 4 + 2(xy+yz+zx)$.

Từ $x, y, z \geq 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) \geq 0$

$\Rightarrow xy+yz+zx+3 \geq 2(x+y+z) \Rightarrow T^2 \geq 4 + (4T-6) \Rightarrow T \geq 2 + \sqrt{2}$ (vì $T \geq 3$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{2}; y = z = 1 \Leftrightarrow a = 1; b = c = 0$

Vậy $T_{min} = 2+\sqrt{2}$ tại $a = 1;\ b = c = 0$

* **GTLN**: Thử theo cách trên kia

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz:

$$P = 1.\sqrt{a+1} + \sqrt{2}.\sqrt{b+\frac{1}{2}} + \sqrt{3}.\sqrt{c+\frac{1}{3}} \le \sqrt{(1+2+3)\left(a+1+b+\frac{1}{2}+c+\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{17}$$

Đẳng thức xay ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{a+1} = \dfrac{\sqrt{b+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{c+\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} \\ a+b+c=1 \end{cases}$

Hệ trên vô nghiệm vì a, b, c không âm! Vì vậy các bạn hãy quan sát lời giải sau:

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$P = \sqrt[4]{\frac{30}{11}}.\sqrt{\sqrt{\frac{11}{30}}(a+1)} + \sqrt{2}.\sqrt{b+\frac{1}{2}} + \sqrt{3}.\sqrt{c+\frac{1}{3}} \le \sqrt{\left(\sqrt{\frac{30}{11}}+2+3\right)\left(\sqrt{\frac{11}{30}}(a+1)+b+\frac{1}{2}+c+\frac{1}{3}\right)}$$

mà $\sqrt{\frac{11}{30}}(a+1)+b+\frac{1}{2}+c+\frac{1}{3} \le a+b+c+\sqrt{\frac{11}{30}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{11}{30}}+\frac{11}{6}$

Vì a, b, c không âm

Suy ra $P \le \sqrt{\left(\sqrt{\frac{30}{11}}+2+3\right)\left(\sqrt{\frac{11}{30}}+\frac{11}{6}\right)} = 1+\sqrt{\frac{55}{6}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a,b,c không âm và

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sqrt{\frac{11}{30}}(a+1)}}{\sqrt[4]{\frac{30}{11}}} = \dfrac{\sqrt{b+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{c+\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0;\ b = \frac{7}{30};\ c = \frac{23}{30}$$

Vậy $P_{max} = 1+\sqrt{\frac{55}{6}}$ tại $a = 0; b = \frac{7}{30}; c = \frac{23}{30}$

Vì sao tách được hệ số như vậy hẳn không còn là vấn đề nữa.

31

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn: $x+y+z=1$.

Tìm GTNN của: $P = x^3+y+\frac{1}{2}z^3$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x^3 + \frac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} \ge \frac{3x}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}$$

Tương tự ta có: $y^3 + \dfrac{2}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} \ge \dfrac{3y}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}$

Lại có: $\dfrac{1}{2}z^3 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3 \ge \dfrac{3z}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}$

Cộng vế theo vế 3 BĐT suy ra $P + \dfrac{4}{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3 \ge \dfrac{3}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}(x+y+z)$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2+\sqrt{2}}; z = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

32

[Đề dự bị khối A năm 2005] Chứng minh rằng với mọi x,y dương ta có:

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} 1+x = 1+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}} \\ 1+\frac{y}{x} = 1+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x}+\frac{y}{3x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{27x^3}} \\ 1+\frac{9}{\sqrt{y}} = 1+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}}+\frac{3}{\sqrt{y}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{3^3}{\left(\sqrt{y}\right)^3}} \end{cases}$$

Nhân vế theo vế 3 BĐT trên suy ra điều phải chứng minh!

2. Kĩ thuật thêm bớt:

Ta sẽ làm quen với một phương pháp khá là tổng quan hơn (chứ không phải tổng quát) nghĩa là lời giải cần đến việc sử dụng một số "yếu tố bên ngoài" được chèn vào cho việc liên kết giả thiết và điều cần chứng minh. Nghĩa là chúng ta cùng cộng hoặc trừ với 1 số để đưa về một bất đẳng thức khác dễ chứng minh hơn. Ta theo dõi một số ví dụ sau:

1

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c thì ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

Lời giải

Trước hết ta kết hợp những số hạng có cùng mẫu, bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b} \geq 0$$

Thực ra công việc làm việc với những biểu thức xấp xỉ 0 khá là khó chịu, và đặc biệt là có dấu trừ nữa, vì chưa chắc chúng đã dương để đánh giá. Nên ta sẽ cố gắng làm triệt dấu trừ và đồng thời phá đi các số có thể âm. Ta cộng vào vế trái 3 đơn vị thử xem.

Như vậy ta có: $\frac{a-b}{b+c}+1 = \frac{c+a}{b+c}; \frac{b-c}{c+a}+1 = \frac{a+b}{c+a}; \frac{c-a}{a+b}+1 = \frac{c+b}{a+b}$

Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{a+b}{b+c} \geq 3$$

Điều này khá là hiển nhiên theo bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương. Phép chứng minh được hoàn tất.

2

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\frac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0$$

Lời giải

Cộng thêm 3 vào VT ta cần chứng minh:

$$\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\geq 3$$

Áp dụng AM-GM, ta có: $\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+1}{ab+1}\cdot\frac{b+1}{bc+1}\cdot\frac{c+1}{ca+1}}$

Vậy thì, ta cần có được: $(a+1)(b+1)(c+1)\geq(ab+1)(bc+1)(ca+1)$

Khai triển ra, ta có bất đẳng thức tương đương với:

$$abc+a+b+c+ab+bc+ca+1\geq a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+ab+bc+ca+1$$

$$\Leftrightarrow abc(abc-1)+(a+b+c)(abc-1)\geq 0$$

Điều này đúng do theo AM-GM thì $a+b+c=3\Rightarrow abc\leq 1$

Phép chứng minh được hoàn tất.

Chứng minh rằng với mọi số thức a,b,c dương tùy ý, ta có bất đẳng thức sau là đúng:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải

Đây là một bài toán rất nổi tiếng của một giáo sư ngành điện tử của Romania. Khi bắt tay giải bài toán này, tôi đã gặp phải rất nhiều khó khăn, điều khó khăn nhất là bất đẳng thức này khá là chặt, mọi đánh giá của tôi lúc đó điều dẫn đến ngược dấu. Ở thời điểm đó, tôi đã chọn một giải pháp là sử dụng cách dồn biến bằng định lý dồn biến. Một cách giải chỉ mang tính là khẳng định được bất đẳng thức đúng. Sau này, tôi gặp lại một lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Swarch, chính điều này đã thôi thức tôi giải lại bài toán này hy vọng tìm ra một lời giải sáng sủa hơn lời giải trước đó của tôi, rất may mắn tôi đã tìm được một lời giải sử dụng AM-GM.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4a(a+b+c)}{3(a+b)(a+c)}\cdot\frac{3(a+c)}{2(a+b+c)}}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{4a(a+b+c)}{3(a+b)(a+c)}+\frac{3(a+c)}{2(a+b+c)}\right]$$

Thiết lập tương tự 2 bất đẳng thức tương tự, rồi cộng lại thì ta cần phải chứng minh:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}+\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}\right]+\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}\right)\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Để ý rằng $\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}=2$. Nên ta cần chứng minh:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}+\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}\right]+\frac{3}{2\sqrt{2}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Hay là: $\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}+\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}\leq\frac{9}{4}$

Để giải quyết bài này, chúng ta sẽ quy đồng, bất đẳng thức tương đương với:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\leq\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$$

Hay là $9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Cần ghi nhớ một đẳng thức rất quan trọng như sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

nên ta cần chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

Hiển nhiên điều này đúng theo AM-GM.

Bình luận: Đôi khi việc vượt qua giới hạn của bản thân giúp chúng ta có những hạnh phúc trong công việc. Toán học giúp chúng ta cảm nhận được cái đẹp và hướng đến những thứ hoàn hảo. Việc đánh giá như trong bài toán trên giúp chúng ta làm được những công việc sau: Áp dụng AM-GM sẽ giúp chúng ta loại bỏ được căn thức khá rắc rối của bài toán. Kĩ thuật thêm bớt đã cho chúng ta chuyển một bất đẳng thức hoán vị về bất đẳng thức đối xứng. Nhưng lưu ý là khi đánh giá phải đảm bảo được điểm rơi của bài toán.

4

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>ab+bc+ca$$

Lời giải

Bây giờ ta sẽ tìm mối liên hệ giữa $a+b+c$ và $ab+bc+ca$. Có điều gì liên hệ ở đây không? À thì ra là nó khá đơn giản đến nỗi hiển nhiên: $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$

Bây giờ, ta sẽ thêm bớt:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq (a+b+c)^2=9$$

Vậy, ta cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq 9$

Ta sẽ sử dụng AM-GM: $\begin{cases} a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\geq 3a \\ b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\geq 3b \\ c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\geq 3c \end{cases}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức cùng chiều, ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Ta xét tiếp ví dụ sau, điều đặc biệt của ví dụ này là sự làm mạnh của bất đẳng thức AM-GM. Nếu có thời gian các bạn hãy tự làm mạnh các bất đẳng thức mà mình đã làm được bằng cách cộng thêm một lượng nhỏ (epsilon) nào đó xấp xỉ 0.

5

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3+\frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}$

Lời giải

Nhân cả 2 vế với $ab+bc+ca$ và chú ý biến đổi sau:

$$(ab+bc+ca)(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})=(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)+(\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b})$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng:

$$(a^2+b^2+c^2)+(\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b})\geq 2(ab+bc+ca)+(a-c)^2$$

Hay $b^2+\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b}\geq 2ab+2bc$

Ta tách ra: $(\frac{bc^2}{a}+ab-2bc)+(\frac{ab^2}{c}+\frac{a^2c}{b}+b^2-3ab)\geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng theo AM-GM. Vậy ta có điều phải chứng minh.

6

Cho các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{c+b+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}\geq 3$$

Lời giải

Nếu để mỗi số hạng như vậy, thì ta rất khó đánh giá. Nhưng nếu thử nhân thêm cái gì đó để tạo tích 2 số thì sao? Có phải là ta có tích 2 số với nhau thì bé hơn cái gì đó đúng không?

Theo AM-GM, ta có: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}=\dfrac{a^2+b^2+c}{\sqrt{(a+b+c^2)(a^2+b^2+c)}}\ge\dfrac{2(a^2+b^2+c)}{(a^2+b^2+c^2+a+b+c)}$

Tương tự cho 2 số hạng còn lại, rồi cộng lại, ta cần chứng minh được:

$$\frac{4(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}\ge 3$$

Hay $a^2+b^2+c^2\ge 3$. Điều này đúng do $a+b+c=3$

Bình luận: Nếu nhìn từ góc độ "bất biến" (hiểu nôm na là một cái gì đó không đổi, cố định) thì ta phát hiện là tử số cộng mẫu số của mỗi số hạng là một biểu thức không đổi. Có chăng điều này cho ta một lý do để đánh giá như trên? Đôi khi việc phát hiệu các yếu tố "bất biến" chính là chìa khóa để giải các bài toán khó.

3. Kĩ thuật AM-GM-GM ngược dấu

Trong việc giải toán bất đẳng thức một sai lầm thường hay gặp đó là sau một loạt các đánh giá chúng ta lại thu được một bất đẳng thức mới nhưng ngược dấu. Lúc này chúng ta cần làm gì? Hãy khoan vội nản lòng, cũng cách tiếp cận đó nhưng các bạn thử thay đổi một tí xem thế nào? Đại khái chúng ta có một ý tưởng tự nhiên như sau: Bạn mời bạn gái đi chơi, khi đi bạn mang theo một triệu đồng và biết rằng số tiền dùng hôm đó lớn hơn năm trăm nghìn thì số tiền bạn còn lại sẽ không thể vượt quá năm trăm nghìn (đương nhiên không xét trường hợp bạn gái bạn trả tiền) Cũng như vậy trong bất đẳng thức nếu như bạn cần chứng minh $A\ge k$ thì bạn có thể xét một biểu thức cố định trừ đi A thì bạn có thể chứng minh một bất đẳng thức với chiều ngược lại. Chúng ta hãy làm quen thông qua các ví dụ sau:

2

Các số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải

Định hướng lời giải

Đây là một bài toán trong bài thi quốc gia của Bulgari năm 2003, ở thời điểm đó, nó đã gây không ít khó khăn cho nhiều thí sinh.

Hình thức phát biểu của bài toán khiến ta nghĩ ngay đến việc sử dụng AM-GM kiểu: $a^2+1\ge 2a$.

Nhưng rất tiếc là điều này dẫn đến "bẫy ngược dấu ":

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\le\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a}\ge\frac{3}{2}$$

Tuy nhiên, khá may mắn, ta có thể khắc phục lời giải như sau:

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tới đây sử dụng bất đẳng thức AM-GM: $1+b^2\ge 2b$ ở dưới mẫu nhưng lại có được một bất đẳng thức thuận chiều. Sự may mắn ở đây là một cách dùng ngược dấu bất đẳng thức AM-GM, một kĩ thuật khá ấn tượng và bất ngờ.

Lời giải chi tiết

Ta có: $\dfrac{a}{1+b^2}=\dfrac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\dfrac{ab^2}{2b}=a-\dfrac{ab}{2}$

Tương tự: $\dfrac{b}{1+c^2}\ge b-\dfrac{bc}{2}$ và $\dfrac{c}{1+a^2}\ge c-\dfrac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế cả bất đẳng thức ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3}{2}$$

Vì $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Leftrightarrow ab+bc+ca\leq 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự:

1 Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{3}{2}$.

2 Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1+a}{1+b^2}+\frac{1+b}{1+c^2}+\frac{1+c}{1+a^2}\geq 3.$$

3 Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}\geq 2$$

4 Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\geq 2$$

5 Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có:

$$\frac{1+a}{1+b^2}+\frac{1+b}{1+c^2}+\frac{1+c}{1+d^2}+\frac{1+d}{1+a^2}\geq 4$$

Một số ví dụ bổ sung:

3

Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có bất đẳng thức: $\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 2$

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a}{1+b^2c}=\frac{a\left(1+b^2c-b^2c\right)}{1+b^2c}=a-\frac{b^2c}{1+b^2c}\geq a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}\geq a-\frac{b\sqrt{a.ac}}{2}\geq a-\frac{b(a+ac)}{4}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2d}\geq b-\frac{bc+bcd}{2}$; $\frac{c}{1+d^2a}\geq c-\frac{cd+cda}{2}$ và $\frac{d}{1+a^2b}=d-\frac{da+dab}{4}$

Cộng 4 bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq a+b+c+d-\frac{1}{4}(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab)$$

Ta lại có: $\begin{cases} ab+bc+cd+da\leq\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=4 \\ (abc+bcd+cda+dab)\leq\frac{1}{16}(a+b+c)^3=4 \end{cases}$

Do đó: $\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq a+b+c+d-2=2$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$.

4

Cho $a,b,c \ge 0$ thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:
$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $\dfrac{a^2}{a+2b^2}=\dfrac{a\left(a+2b^2\right)-2ab^2}{a+2b^2}\ge a-\dfrac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\dfrac{2(ab)^{\frac{2}{3}}}{3}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức: $\dfrac{b^2}{b+2c^2}\ge b-\dfrac{2(bc)^{\frac{2}{3}}}{3}$, $\dfrac{c^2}{c+2a^2}\ge c-\dfrac{2(ca)^{\frac{2}{3}}}{3}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:
$$a+b+c-\frac{2}{3}\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]\ge 1 \Leftrightarrow (ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\le 3.$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cô si ta có:
$$a+ab+b\ge 3(ab)^{\frac{2}{3}},\ b+bc+c\ge 3(bc)^{\frac{2}{3}},\ c+ca+a\ge 3(ca)^{\frac{2}{3}}$$

Cộng vế theo vế ta có: $2(a+b+c)+ab+bc+ca\ge 3\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]$

Vì $a+b+c=3$ và $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2=9 \Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Từ đó suy ra: $3\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]\le 2.3+3=9 \Leftrightarrow (ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\le 3$

Nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

5

Cho $a,b,c\ge 0$ thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:
$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $\dfrac{a^2}{a+2b^3}=\dfrac{a\left(a+2b^3\right)-2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\dfrac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\dfrac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cô si ta có: $b\sqrt[3]{a^2}\le\dfrac{1}{3}b.(a+a+1)=\dfrac{2a+b}{3}$

Cộng vế theo vế ta có:
$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}\le\frac{2}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(a+b+c)$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\dfrac{2}{3}.3+\dfrac{1}{3}.3=3$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

6

Cho x, y, x > 0 thoả mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:
$$T=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{x^2}{x+y}=\dfrac{x(x+y)-xy}{x+y}=x-\dfrac{xy}{x+y}\geq x-\dfrac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{y^2}{y+z}\geq y-\dfrac{\sqrt{yz}}{2}$; $\dfrac{z^2}{z+x}\geq z-\dfrac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra: $T\geq x+y+z-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2}=x+y+z-\dfrac{1}{2}\geq 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(vì $x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$)

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\text{Min}T=\dfrac{1}{2}$ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

7

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\geq\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$$

Lời giải

Đây là một bài toán có khá nhiều kỉ niệm với tác giả. Bởi vì nó thuộc những bài toán mình được dạy khi mới bắt đầu làm quen với bất đẳng thức. Bài toán này được đề xuất bởi anh Phạm Kim Hùng (HCV IMO 2004, 2005). Tác giả đã được làm quen với những bài giảng về Bất đẳng thức AM-GM và kĩ thuật ngược dấu với anh Phạm Kim Hùng và anh Nguyễn Đăng Hợp (HCB IMO 2003, anh trai tác giả) những người anh đã khai mở cho chúng tôi những bước đầu về toán học sơ cấp.

Ta sẽ có biến đổi sau: $\dfrac{1+a}{1+b}=1+a-\dfrac{b(1+a)}{1+b}$

Ta sẽ quy bài toán về chứng minh:

$$\frac{b(1+a)}{1+b}+\frac{c(1+b)}{1+c}+\frac{a(1+c)}{1+a}\geq 3$$

Áp dụng AM-GM, ta có: $\dfrac{b(1+a)}{1+b}+\dfrac{c(1+b)}{1+c}+\dfrac{a(1+c)}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{abc(1+a)(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}}=3$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

8

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16}\geq\frac{1}{6}$$

Lời giải

Cấu hình b^3+16 khiến cho ta nghĩ ngay đến sử dụng AM-GM dạng $b^3+8+8\geq 12b$. Nhưng để tránh ngược dấu ta cần quan sát một tí.

$$\frac{a}{b^3+16}=\frac{1}{16}\left(a-\frac{ab^3}{b^3+16}\right)\geq\frac{1}{16}\left(a-\frac{ab^3}{12b}\right)=\frac{1}{16}\left(a-\frac{ab^2}{12}\right)$$

Áp dụng tương tự, như vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{16}\left(3-\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12}\right)\geq\frac{1}{6}$$

Hay điều nay tương đương với việc chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2\leq 4$

Ta sẽ chứng minh một khẳng định mạnh hơn là $ab^2+bc^2+ca^2+abc\leq 4$

Đây là một bất đẳng thức hoán vị, nên ta nghĩ ngay đến việc giả sử b nằm giữa a,c. Như vậy ta có:

$$a(b-c)(b-a)\geq 0$$

Vì vậy $ab^2+bc^2+ca^2+abc=b(a+c)^2+a(b-c)(b-a)\leq b(a+c)^2$

Đến đây ta có thể đưa về hàm $f(b)=b(3-b)^2$ để khảo sát hoặc có thể dùng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$b(c+a)^2=\frac{1}{2}2b(c+a)(c+a)\leq\frac{1}{2}\left[\frac{2a+2b+2c}{3}\right]^3=4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a; b; c) = (0; 1; 2).

9

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{2a^3}{a^2+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c$

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}=2a-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\geq 2a-\frac{2ab^2}{2ab}=2a-b$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases}\frac{2b^3}{b^2+c^2}\geq 2b-c\\ \frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq 2c-a\end{cases}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c\ \text{(đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

4. Kĩ thuật ghép đối xứng

Với một số bài toán chứng minh BĐT mà cả Vế trái lẫn vế phải đều là những biểu thức phức tạp việc chứng minh trực tiếp khá khó khăn. Thì ta có thể sử dụng kĩ thuật ghép đối xứng để đơn giản hóa công việc chứng minh. Một cách đơn giản, ta có thể chia thành 2 dạng như sau:

Dạng 1: Chứng minh $X+Y+Z\geq A+B+C$

Công việc chúng ta là tìm cách chứng minh: $X+Y\geq 2A$. Nhờ tính đối xứng ta thiết lập thêm được 2 bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại, khi đó ta có được điều phải chứng minh.

Dạng 2: $XYZ\geq ABC$

Ta thử tìm cách chứng minh: $XY\geq A^2$. Tương tự ta có thêm 2 bất đẳng thức nữa. Sau đó nhân từng vế bất đẳng thức cùng chiều, ta có điều phải chứng minh.

Ta hãy đón xem các ví dụ sau:

Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, thì ta có: $abc\geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Lời giải

Đây là 1 BĐT có rất nhiều ứng dụng đã được đề cập đến trong SGK toán lớp 10.

Trước hết nếu như $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)<0$ thì bài toán là hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp ngược lại, tức là $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$

Vận dụng kĩ thuật, ghép đối xứng ta chứng minh:

$$b^2\geq (a+b-c)(b+c-a).$$

May mắn thay là điều này hiện nhiên đúng theo BĐT quen thuộc sau: $xy\leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$

Như vậy ta có phép chứng minh hoàn tất và ta có đpcm.

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}\geq 3$$

Lời giải

Khi ra cho học sinh bài toán này, chúng tôi lập tức nhận được đề xuất ý tưởng giải là áp dụng BĐT Am-GM kiểu: $1+a^2\geq 2a$. Để quy về chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sum\sqrt{\frac{2a}{b+c}}\geq 3$$

Và "đâm đầu" chứng minh Bất đẳng thức trông có vẻ rất đúng và….đẹp này. Nhưng nếu như cho $a=b, c=0$ ta thấy ngay bất đẳng thức này……không đúng.

Như vậy, các bạn học sinh đã lặp lại lối mòn muôn thuở là "ngược dấu".

Tôi đã hướng dẫn các em làm "chặt" đánh giá của mình hơn bằng cách áp dụng trực tiếp. Điều này làm giảm rủi ro hơn (vì nó không làm quá lòng bài toán).
Như vậy, theo AM-GM, ta có:

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}}$$

Bây giờ, phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ge (a+b)(b+c)(c+a)$$

Sử dụng ghép đối xứng, ta thử kiểm tra BĐT sau đúng không ?

$$(1+a^2)(1+b^2)\ge (a+b)^2$$

Nhân "tung tóe" ra ta được bất đẳng thức trên tương đương với: $(ab-1)^2\ge 0$

Như vậy ta có đpcm.

2

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\ge \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

Lời giải

Nhân chéo lên ,thì bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$

Ta thử chứng minh bất đẳng thức sau đúng:

$$(c^2+ab)(a+b)\ge 2\sqrt{ab(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Dễ thấy vế phải có cấu hình khá rõ ràng là $2\sqrt{xy}$,nên gợi ý ta sử dụng AM-GM.

Để làm được điều này, ta tách VP thành 2 số hàng.

Để ý: $(c^2+ab)(a+b)=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\ge 2\sqrt{ab(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$

Vậy ta có điều phải.

3

Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\ge abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

Lời giải

Đối với những bài toán dạng này thì kĩ thuật ghép đối xứng là kĩ thuật mà ta nên nghĩ tới. Nghĩa là ta tách bên vế trái thành từng cặp rồi tìm đánh giá sao cho hiệu quả.

Quan sát, ta thấy rằng:

$$(a^2+bc)(b^2+ca)=a^2b^2+c(a^3+b^3)+abc^2$$
$$=a^2b^2+c(a+b)(a^2-ab+b^2)+abc^2$$
$$\ge a^2b^2+c(a+b)ab+abc^2=ab(a+c)(b+c)$$

Tương tự, thiết lập thêm 2 BĐT nữa, ta có ngay điều phải chứng minh.

4

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ac}}\ge 3$$

Lời giải

Áp dụng Bất Đẳng Thức AM-GM , ta cần phải chứng minh:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge(c+ab)(b+ca)(c+ab)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh:

$(a+b)(b+c)\ge(c+ab)(a+bc)$

Khai triển ra tương đương với:

$$c^2+a^2+abc\le 3$$

$$\Rightarrow (c+a)^2-2ac+abc=(c+a)^2+ac(b-2)\le(3-b)^2+\frac{(3-b)^2}{4}(b-2)\le 3$$

Việc kiểm tra hàm 1 biến còn lại , xin dành cho bạn đọc xem như luyện tập

5

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{a^2+ab+ac}}+\sqrt{\dfrac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}}+\sqrt{\dfrac{c^2+2a^2}{a^2+ca+ab}}\ge 3$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM thì ta chỉ cần chỉ ra rằng:

$$\left(a^2+2b^2\right)\left(b^2+2c^2\right)\left(c^2+2a^2\right)\ge\left(a^2+ab+bc\right)\left(b^2+bc+ca\right)\left(c^2+ca+ab\right)$$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\begin{cases}\left(a^2+2b^2\right)\left(b^2+2c^2\right)=\left(a^2+b^2+b^2\right)\left(b^2+c^2+c^2\right)\ge\left(b^2+bc+ca\right)^2\\ \left(b^2+2c^2\right)\left(c^2+2a^2\right)=\left(b^2+c^2+c^2\right)\left(c^2+a^2+a^2\right)\ge\left(c^2+ca+ab\right)^2\\ \left(c^2+2a^2\right)\left(a^2+2b^2\right)=\left(c^2+a^2+a^2\right)\left(a^2+b^2+b^2\right)\ge\left(a^2+ab+bc\right)^2\end{cases}$$

Nhân lại với nhau ta có được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

5. Bất Đẳng Thức AM-GM suy rộng:

Phần này chỉ dành cho học sinh có nhu cầu nâng cao kiến thức cho các kì thi HSG toán cấp tỉnh và chọn đội tuyển Quốc Gia

Mệnh đề 1. Cho α,β là hai số thực dương thỏa mãn: $\alpha+\beta=1$ và $a,b>0$. Chứng minh rằng:

$$\alpha a+\beta b\ge a^\alpha b^\beta \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức $(1)\Leftrightarrow \alpha a+(1-\alpha)b\ge a^\alpha b^{1-\alpha}\Leftrightarrow \alpha\dfrac{a}{b}+(1-\alpha)\ge\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$

Đặt $\dfrac{a}{b}=x>0:\alpha x+1-\alpha\ge x^\alpha$ là bất đẳng thức Bernoully với $0\le\alpha\le 1$.

Mệnh đề 2. Cho $\alpha_i>0,x_i>0,i=\overline{1,n},\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, Ta có bất đẳng thức: $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\ge\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$

Chứng minh sử dụng mệnh đề 1 và phương pháp qui nạp.

- Các mệnh đề trên gọi là bất đẳng thức Cauchy suy rộng.

3. Áp dụng.

1

Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \geq a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}$

Lời giải

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a+b}a + \dfrac{b}{a+b}b \geq a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}$.

Áp dụng mệnh đề 1 với $\alpha = \dfrac{a}{a+b}, \beta = \dfrac{b}{a+b}$,

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2

Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{2ab}{a+b} \geq a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}$

Lời giải

Áp dụng mệnh đề 1 với $\alpha = \dfrac{a}{a+b}, \beta = \dfrac{b}{a+b}$, ta có:

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{b}{a+b}a + \frac{a}{a+b}b \geq a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

3

Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn: $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$

Lời giải

Áp dụng mệnh đề 1, ta có:

$$a.a + b.b \geq a^a b^b \text{ và } a.b + b.a \geq b^a a^b \Rightarrow 1 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^a b^b + a^b b^a$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

4

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1$$

Lời giải

Áp dụng mệnh đề 2 với ba số:

$$\begin{cases} a^a b^b c^c \leq a^2 + b^2 + c^2 \\ a^b b^c c^a \leq b.a + c.b + a.c \\ a^c b^a c^b \leq c.a + a.b + b.c \end{cases}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

5

Cho a, b, a_1, b_1 là các số thực dương thỏa mãn:

$$a \geq b,\ a_1 \geq b_1,\ a \geq a_1 \text{ và } \alpha,\beta > 0 : \alpha+\beta = 1,\ a^{\alpha}b^{\beta} \geq a_1^{\alpha}b_1^{\beta}$$

Chứng minh rằng: $\alpha a + \beta b \geq \alpha a_1 + \beta b_1$.

Lời giải

Áp dụng mệnh đề 1, ta có:

$$\alpha a+\beta b = b_1\left(\alpha\frac{a}{a_1}+\beta\frac{b}{b_1}\right)+(a_1-b_1)\alpha\frac{a}{a_1} \geq b_1\left(\frac{a}{a_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{b_1}\right)^{\beta}+(a_1-b_1)\alpha \geq b_1+(a_1-b_1)\alpha = \alpha a_1+\beta b_1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $a = a_1$, $b = b_1$

6

(IMO Bulgarian) Cho các số thực dương a, b, c và các số thực $p,q,r \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, và $a+b+c = p+q+r = 1$ Chứng minh rằng: $a.b.c \leq \frac{1}{8}(pa+qb+rc)$.

Lời giải

Áp dụng mệnh đề 2, ta có:

$$p\frac{1}{bc}+q\frac{1}{ca}+r\frac{1}{ab} \geq \left(\frac{1}{bc}\right)^{p}\left(\frac{1}{ca}\right)^{q}\left(\frac{1}{ab}\right)^{r} \text{ và } p.bc+q.ca+r.ab \geq (bc)^{p}(ca)^{q}(ab)^{r}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{abc}{pa+qb+rc} = \frac{1}{p\frac{1}{bc}+q\frac{1}{ca}+r\frac{1}{ab}} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{bc}\right)^{p}\left(\frac{1}{ca}\right)^{q}\left(\frac{1}{ab}\right)^{r}} = (bc)^{p}(ca)^{q}(ab)^{r} \leq p.bc+q.ca+r.ab$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{pa+qb+rc} \leq p.bc+q.ca+r.ab \qquad (1)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xem: $a \leq b \leq c$.

Khi đó $p.bc+q.ca+r.ab \leq p.bc+(q+r)ac = p.bc+(1-p)ac$ (2)

Từ giả thiết: $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, nên ta có:

$$\left(\frac{1}{2}-p\right)ac \leq \left(\frac{1}{2}-p\right)bc \Leftrightarrow \frac{1}{2}ac+\left(\frac{1}{2}-p\right)ac \leq \frac{1}{2}ac+\left(\frac{1}{2}-p\right)bc$$

$$\Leftrightarrow p.bc+(1-p)ac \leq \frac{1}{2}(a+b)c \qquad (3)$$

Áp dụng Cauchy: $(a+b)c \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4): $abc \leq \frac{1}{8}(pa+qb+rc)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a=b=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{2} \\ p=q=\frac{1}{2}, r=0 \end{cases} \cup \begin{cases} a=c=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2} \\ p=r=\frac{1}{2}, q=0 \end{cases} \cup \begin{cases} b=c=\frac{1}{4}, a=\frac{1}{2} \\ q=r=\frac{1}{2}, p=0 \end{cases}$$

7

Cho a, b là hai số thực dương, $\alpha_1,\alpha_2 > 0 : \alpha_1+\alpha_2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)^{\alpha_1}(1+b)^{\alpha_2} \geq 1+a^{\alpha_1}b^{\alpha_2} \quad (1)$$

Lời giải

Bất đẳng thức (1) $M=\left(\frac{1}{1+a}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{1+b}\right)^{\alpha_2}+\left(\frac{a}{1+a}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{b}{1+b}\right)^{\alpha_2}\le 1$

Áp dụng mệnh đề 1:

$$M\le \alpha_1\left(\frac{1}{1+a}\right)+\alpha_2\left(\frac{1}{1+b}\right)+\alpha_1\left(\frac{a}{1+a}\right)+\alpha_2\left(\frac{b}{1+b}\right)=\alpha_1+\alpha_2=1$$

Nhận xét: Tương tự, sử dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng dạng chứa tham biến ta sẽ chứng minh bất đẳng thức tổng quát.

Cho $a_i>0,\alpha_i>0:\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1, i=\overline{1,n}$. Chứng minh rằng: $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)^{\alpha_i}\ge 1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i}$ (*)

8

Cho các số thực dương a,b,c,p,q,s dương thỏa: $pq+qs+sp=pqs$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+b^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(1+c^s\right)^{\frac{1}{s}}\ge 1+abc$$

Lời giải

Áp dụng (*), từ giả thiết: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{s}=1$, ta có: $\left(1+a^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+b^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(1+c^s\right)^{\frac{1}{s}}\ge 1+(a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}}(c^s)^{\frac{1}{s}}=1+abc$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bất Đẳng Thức Cauchy Swarch

I. Bất Đẳng Thức Cauchy Swarch (BCS)

(Bất đẳng thức Cauchy-Schawrz). *Với 2 dãy số thực tùy ý* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$, *ta luôn có bất đẳng thức*

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *là 2 bộ tỉ lệ, tức là tồn tại số thực k để*

$$a_i = kb_i \ \forall i=\overline{1,n}.$$

Chứng minh: Có 3 cách đơn giản chứng minh bất đẳng thức trên.

Cách 1. Đây là các chứng minh quen thuộc sử dụng tam thức bậc 2.

Xét tam thức sau đây

$$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2$$

Sau khi khai triển ta có

$$f(x)=\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right).$$

Mặt khác vì $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$ nên theo định lý về dấu của tam thứ bậc 2

$$\Delta f\leq 0\Leftrightarrow\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi phương trình $f(x)=0$ có nghiệm, nói cách khác $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là 2 bộ tỉ lệ.

Cách 2. Một cách chứng minh khác cũng rất cần nhớ, vì ta sẽ sử dụng lại trong 1 số bài tập, đó là phương pháp sử dụng đẳng thức. Ta có hằng đẳng thức sau

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2.$$

Và do đó hiển nhiên phải có

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2.$$

Cách 3. Ngoài ra bất đẳn thức *Cauchy – Schwarz cũng có thể chứng minh trực tiếp* bằng bất đẳng thức *AM – GM* chỉ với 2 số đây là một chứng minh rất hay và dùng để mở rộng cho bất đẳng thức *Holder*

$$\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$$

$$\geq\frac{2|a_ib_i|}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)}}.$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng vế cả n bất đẳng thức lại ta có kết quả. Đây cũng là một chứng minh rất ngắn gọn

Ta rút ra một số hệ quả sau:

Hệ quả: 1). Với hai dãy số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vụ $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *với* $b_i > 0,\ \forall i=\overline{1,n}$ *ta có:*

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$ *(Bất đẳng thức Schwarz).*

2). Với hai dãy số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vụ $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *ta có:*

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+..+b_n)^2}$$ *(Bất đẳng thức Mincôpxki)*

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ *là hai bộ số tỉ lệ.*

Chúng ta sẽ xét một số bài toán coi như là mở đầu cho bất đẳng thức này.

1

Chứng minh: $(x^2+ax+b)^2+(x^2+cx+d)^2 \le (2x^2+1)^2$ với mọi a, b, c, d thoả mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

Lời giải

Sự xuất hiện của biểu thức bình phương ,khiến ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức BCS. Vấn đề là áp dụng như thế nào. Đương nhiên ta đã có Vế trái là $(x^2+ax+b)^2$.Và vế phải là tích 2 số, trong đó để kết nối được với giả thiết rất có thể một số phải là $(2x^2+1)$.Như vậy , ta đề xuất cách áp dụng BCS như sau:

Theo Bất đẳng thức BCS ta có:

$$\begin{cases}(x^2+ax+b)^2 \le (x^2+a^2+b^2)(x^2+x^2+1)=(x^2+a^2+b^2)(2x^2+1)\\(x^2+cx+d)^2 \le (x^2+c^2+d^2)(x^2+x^2+1)=(x^2+c^2+d^2)(2x^2+1)\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$(x^2+ax+b)^2+(x^2+cx+d)^2 \le (2x^2+1)(2x^2+a^2+b^2+c^2+d^2)=(2x^2+1)^2$$

2

Cho a,b,c,x,y,z là các số thực thoả mãn $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=25\\x^2+y^2+z^2=36\\ax+by+cz=30\end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \ge (ax+by+cz)^2$$

Theo bài ra ta có: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=25.36=30^2=(ax+by+cz)^2$

Do đó đẳng thức xảy ra khi: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z} \Rightarrow \dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{b^2}{y^2}=\dfrac{c^2}{z^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{25}{36}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$

Suy ra: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\pm\dfrac{5}{6}$

Vậy: $P=\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\pm\dfrac{5}{6}$

3

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3a}{b+c}+\dfrac{4b}{c+a}+\dfrac{5c}{a+b}$

với a, b, c là các số thực dương tuỳ ý.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{3a}{b+c}+3+\frac{4b}{c+a}+4+\frac{5c}{a+b}+5=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right]\geq\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2}{2}$$

Suy ra: $P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}\geq\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2}{2}-12$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\text{Min}P=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2}{2}-12$ khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$.

4

Chứng minh rằng nếu $a,b,c\geq 0$, $abc=1$ thì

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1.$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1\Leftrightarrow 1-\frac{2}{2+a}+1-\frac{2}{2+b}+1-\frac{2}{2+c}\geq 1\Leftrightarrow\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}\geq 1$

Tồn tại các số thực x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y}$; $b=\frac{y}{z}$; $c=\frac{z}{x}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{\frac{x}{y}}{2+\frac{x}{y}}+\frac{\frac{y}{z}}{2+\frac{y}{z}}+\frac{\frac{z}{x}}{2+\frac{z}{x}}=\frac{x}{2y+x}+\frac{y}{2z+y}+\frac{z}{2x+z}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x^2}{2xy+x^2}+\frac{y^2}{2yz+y^2}+\frac{z^2}{2zx+z^2}\geq 1$$

Theo BĐT Svacxơ ta có:

$$\frac{x^2}{2xy+x^2}+\frac{y^2}{2yz+y^2}+\frac{z^2}{2zx+z^2}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2xy+x^2+2yz+y^2+2zx+z^2}=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c=1$.

Ta xét qua một số ví dụ nâng cao hơn để thấy được sự ứng dụng của bất đẳng thức BCS.

5

Chứng minh rằng nếu x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Thì bất đẳng thức sau đây là đúng: $x+y+z\leq 2+xyz$.

Lời giải

Ta sẽ giải bài toán này bằng bất đẳng thức BCS, nhưng lý do vì sao lại nghĩ đến?

Điều ta cần đó là đánh giá tổng $x(1-yz)+y+z$ thông qua tổng $x^2+y^2+z^2$

Như vậy, dạng của BCS đã xuất hiện, vấn đề là ta chọn đánh giá như thế nào mà thôi.

Ta thử chọn đánh giá như sau: $(x(1-yz)+y+z)^2\leq(x^2+y^2+z^2)((1-yz)^2+1+1)$

Điều này không mang lại gì cho chúng ta cả, vậy hãy tìm cách kết hợp các bộ số khác.

Để ý thì dấu đẳng thức ở đây xảy ra khi $x=y=1;z=0$. Như vậy có một quan hệ khá rõ ràng là $x=y+z$. Như thế thử xem $y+z$ là một số hạng xem sao. Ta sẽ đánh giá:

$$(x(1-yz)+y+z)^2\leq(x^2+(y+z)^2)(1+(1-yz)^2)$$

Như vậy, ta cần chỉ ra rằng: $2(1+yz)(2-2yz+y^2z^2)\le 4 \Leftrightarrow y^3z^3 \le y^2z^2$

Điều này đúng vì ta có: $y^2+z^2\le 2 \Rightarrow yz\le 1$

Chứng minh rằng nếu x,y,z thuộc đoạn $[-1;1]$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z+xyz=0$. Thì ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\le 3$

Lời giải

Ta áp dụng BCS một cách "thô sơ" nhất:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\le\sqrt{3(x+y+z+3)}$$

Bây giờ xét xem $\sqrt{3(x+y+z+3)}$ có nhỏ hơn 3 không ? Chưa hẳn đúng không ? Điều đó chỉ xảy ra khi $x+y+z\le 0$. Vậy bây giờ ta xét $x+y+z>0$.

Ta có thể giả sử $z<0$. Lúc này ta có $x,y\in(0;1]$. Lúc này ta có biến z như tách khỏi cái chung. Từ đó tư duy là ta sẽ đánh giá 2 số hạng đầu tiên.

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\le\sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1}$$

Bây ta cần chứng minh:

$$\sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1}\le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{2+\sqrt{2x+2y+4}}\le\frac{-z}{1+\sqrt{1+z}}$$

$$\Leftrightarrow 2xy+2(1+xy)\sqrt{1+z}\le\sqrt{2x+2y+4}$$

Bây giờ ta rút $z+1=\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$

Ta quy về việc chứng minh bất đẳng thức sau:

$$xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)}\le\sqrt{1+\frac{x+y}{2}}$$

Áp dụng BCS, ta có:

$$xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)}$$
$$=\sqrt{x}\sqrt{xy^2}+\sqrt{1-x}\sqrt{1+xy-y-xy^2}\le\sqrt{1+xy-y}\le 1\le\sqrt{1+\frac{x+y}{2}}$$

Chứng minh rằng với 3 số dương $a;b;c$, ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}$$

Lời giải

Một điều dễ dàng nhận thấy ở đây là bậc của tử số bằng bậc của mẫu số. Vì thế ta sẽ chia xuống để đưa về một biểu thức mới như sau:

$$\sum\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}=\sum\frac{(\frac{b+c}{a}-1)^2}{1+(\frac{b+c}{a})^2}\ge\frac{(\sum\frac{b+c}{a}-3)^2}{3+\sum(\frac{b+c}{a})^2}$$

Để cho gọn ta đặt ẩn phụ $\dfrac{b+c}{a}=x;\dfrac{c+a}{b}=y;\dfrac{a+b}{c}=z$

Ta cần chứng minh: $(x+y+z-3)^2\ge\frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2+3)$.

Điều này tương đương với: $(x+y+z)^2-15(x+y+z)+3(xy+yz+zx)+18\geq 0$

Chúng ta chứng minh được: $xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)$

Như vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(x+y+z)^2-9(x+y+z)+18\geq 0$$

Đây là bất đẳng thức đúng vì $x+y+z\geq 6$

8

Với mọi số dương a, b, c dương ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1\Leftrightarrow\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

Theo BĐT Svacxơ ta có:

$$\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)}$$

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)=\left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\right)$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\right)\leq\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}$$

Do đó: $\dfrac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)}$

Ta cần chứng minh: $a^3+b^3+c^3+24abc\leq(a+b+c)^3\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\geq 6abc$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo BĐT AM-GM. Từ đó suy ra đpcm.

9

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng là 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{4b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{4c^2+a^2+b^2}\leq\frac{1}{2}$$

Lời giải

Đầu tiên , ta tách $4a^2+b^2+c^2=2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)$

Lúc này sử dụng bất đẳng thức BCS , ta có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2}\leq\frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Như vậy , ta thao tác tương tự với 2 số hạng còn lại rồi cộng lại , chú ý rằng:

$$\sum\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)=3$$

Như vậy, ta có được điều phải chứng minh

Qua những ví dụ trên, ta thấy bất đẳng thức BCS có những ứng dụng rộng rãi khá lớn. Cũng xin lưu ý bạn đọc rằng bất đẳng thức này thực sự giải quyết được rất nhiều dạng toán khó và chặt. Trong giới hạn đề thi đại học thì bất đẳng thức BCS kết hợp với đạo hàm là một công cụ thực sự mạnh. Bây giờ chúng ta sẽ làm rỏ ứng dụng của bất đẳng thức BCS dạng cộng mẫu số.

Trước hết, ta xin nhắc lại bất đẳng thức BCS dạng cộng mẫu số ,hay còn có tên gọi là Dạng Engel:

Với hai dãy số $(a_1,a_2,...,a_n),(b_1,b_2,...,b_n)$ *với* $b_i>0,\ \forall i=\overline{1,n}$ *ta có:*

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Bây giờ, ta sẽ đi vào những ví dụ cụ thể để cụ thể hóa cho phương pháp này. Hãy đọc thật kĩ, thật kĩ những điều sắp viết, hy vọng rằng bạn đọc sẽ có một cái nhìn mới về các bài toán bất đẳng thức. Quan điểm của chúng tôi là: " Những công cụ đơn giản nhất là công cụ mạnh nhất"

1

(A-2013): Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

Lời giải

Ta thấy vai trò của $a;b$ ở trong biểu thức là giống nhau nên có thể dự đoán rằng GTNN đạt tại $a=b$, thay vào điều kiện ta có $a=b=c$. Như vậy ta sẽ đoán được $P\min=1-\sqrt{2}$

Quan sát tiếp ta thấy điều kiện cho ở dạng đồng bậc nên ta sẽ tư duy ngay được cách đặt quen thuộc sau: $a=xc;b=yc$.

Ta đi vào giải bài toán.

Đặt $a=xc;b=yc$ với $x,y>0$, thì ta có $(x+1)(y+1)=4$.

$$P=\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(u+v)^2\ge 4uv$ vào điều kiện ta có: $16\le(x+y+2)^2\Leftrightarrow x+y\ge 2$

Và $16=(x+1)^2(y+1)^2\ge 4x.4y=16xy\Rightarrow xy\le 1$

Áp dụng bất đẳng thức BCS dạng cộng mẫu số ta có:

$$\frac{x^3}{(y+3)^3}+\frac{y^3}{(x+3)^3}=\frac{x^4}{x(y+3)^3}+\frac{y^4}{y(x+3)^3}\ge\frac{(x^2+y^2)^2}{x(y+3)^3+y(x+3)^3}$$

Mặt khác, ta có:

$$x(y+3)^3+y(x+3)^3=xy(x^2+y^2)+9xy(x+y)+54xy+27(x+y)$$
$$\le(x^2+y^2)+36(x+y)+27(x^2+y^2)\le 64(x+y)^2$$

Do đó $P\ge\frac{x^2+y^2}{2}-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{t^2}{2}-t;t\ge\sqrt{2}$

Để ý: $\frac{t^2}{2}-t=\frac{(t-\sqrt{2})^2}{2}+t\sqrt{2}-1\ge 1-\sqrt{2}$

Phép chứng minh được hoàn tất.

2

Cho $a;b;c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức dạng phân thức, tư duy nghĩ ngay đến đó là áp dụng bất đẳng thức BCS dạng cộng mẫu số. Để làm được điều đó, trước hết ta làm chẵn bậc của tử số.

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)}+\frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)}$$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)}+\frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

Ta cần xử lý ở mẫu số. Để ý rằng ta có đẳng thức:

$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Như vậy ta đã chứng minh được:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Đương nhiên, ta sẽ có: $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Qua 2 ví dụ trên, đã phần nào khẳng định được sức mạnh của bất đẳng thức này. Qua 2 ví dụ này , ta sẽ nhìn một cách tổng quát hơn về cách áp dụng phương pháp này.

+ Có dạng mẫu số đối xứng

+Làm chẵn bậc tử số , nếu như bậc lẻ ta sẽ làm tăng lên một bậc rồi đánh giá. Đương nhiên sẽ có trường hợp bất đẳng thức ngược dấu, đừng lo lắng, hãy mạnh dạn làm tăng bậc cao hơn nữa. Lúc đó đánh giá của chúng ta sẽ chặt hơn

+ Giải quyết bất đẳng thức đối xứng còn lại.

3

Cho các số thực dương a,b,c,d .Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

Lời giải

Trước hết, ta làm chẵn bậc của tử số:

$$\frac{a^2}{a(b+2c+3d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+3a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+3b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+3c)}$$

Áp dụng tương tự ví dụ 2, ta có:

$$\frac{a^2}{a(b+2c+3d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+3a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+3b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+3c)}$$
$$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da+ac+bd)}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh:

$$3(a+b+c+d)^2\geq 8(ab+bc+cd+da+ac+bd)$$

Khai triển ra, thì ta cần chứng minh:

$$(a+b+c+d)^2\geq 4(ab+bc+cd+da)$$

May mắn là điều này hiển nhiên đúng. Ta kết thúc chứng minh tại đây

Ví dụ tiếp theo là bài toán số 4 kì thi Olympiad toán quốc tế năm 1995. Năm mà đoàn Việt Nam đạt kết quả rất cao tại Hong Kong. Bài toán này đã được xuất hiện trong rất nhiều tài liệu, và đương nhiên, nó cũng sẽ được giải quyết bằng bất đẳng thức BCS.

4

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải

Đầu tiên, ta sẽ viết lại bất đẳng thức dưới dạng dễ nhìn hơn:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3}{2}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bình luận: Ngoài ta dựa vào điều kiện tích $abc = 1$ ta có thể nghĩ ngay đến việc đổi biến $a = \frac{yz}{x}$

Các bạn tự giải quyết theo hướng này xem như là một bài tập

Ví dụ tiếp theo được đề xuất bởi Peter Scholze (người đã 3 lần đạt HCV toán quốc tế, trong đó c
được tổ chức ở Việt Nam)

5

Cho $a;b;c$ là các số thực dương.Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ac}\ge 6$$

Lời giải

Cũng tương tự như các ví dụ trên , áp dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$$VT \ge \frac{4(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}\ge 6$$

Rất tiếc , chúng ta lại bị ngược chiều. Như đã nói, bây giờ chúng ta sẽ làm chặt thêm đánh giá củ
nâng bậc lên.

Vế trái được viết lại :

$$VT = \sum\frac{(a+b)^4}{(a+b)^2(c^2+ab)}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\sum(a+b)^2\right)^2 \ge 6\sum(a+b)^2(c^2+ab)$$

Khai triển, ta được:

$$2(a^4+b^4+c^4)+ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)+2abc(a+b+c)\ge 6(a^2b^2+b^2c^2+c$$

Ta có đánh giá sau: $bc(b^2+c^2)\ge 2b^2c^2$

Vậy ta cần chứng minh: $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-$$

Vậy ta cần chứng minh: $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Đây là một bất đẳng thức quen thuộc đã đề cập ở phần trước.

6

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$ .Chứng minh rằng:

$$P=\frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}}\ge 1$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{a}=\frac{x}{y};\sqrt{b}=\frac{y}{z};\sqrt{c}=\frac{z}{x}$

Khi đó, ta viết lại P dưới dạng:

$$P=\frac{(xz)^2}{(xy)^2+2xyz^2}+\frac{(xy)^2}{(yz)^2+2x^2yz}+\frac{(yz)^2}{(zx)^2+2y^2zx}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS , ta có:

$$P=\frac{(xz)^2}{(xy)^2+2xyz^2}+\frac{(xy)^2}{(yz)^2+2x^2yz}+\frac{(yz)^2}{(zx)^2+2y^2zx}\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2xyz(x}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Cho x,y,z là các số thực dương thõa mãn $x,y,z\in(0;1)$ và thõa mãn $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2+y^4}{y}+\frac{y^2+z^4}{z}+\frac{z^2+x^4}{x}\geq\frac{15}{8}$$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1-x}{x}$ tương tự với b,c .Như vậy ta có $abc=1$.

Ta nhận thấy luôn tồn tại 2 số cùng lớn hoặc cùng bé hơn 1. Giả sử đó là a,b .Vậy ta có:

$$(a-1)(b-1)\geq 0\ \Leftrightarrow a+b\leq 1+ab=\frac{1+c}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$$

Như vậy ta có:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(1+c)^2}=\frac{(c-1)^2}{4(1+c)^2}+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$$

Bây giờ, lại sử dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}}$$

$$\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3}}}=\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\geq\frac{3}{2}$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)\geq(x^2+y^2+z^2)^2$$
$$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$$

Vậy nên: $3(x^3+y^3+z^3)^2\geq(x^2+y^2+z^2)^3\geq\left(\frac{3}{4}\right)^3$

Vậy $x^3+y^3+z^3\geq\frac{3}{8}$

Vậy ta có điều phải chứng minh, phép chứng minh được hoàn tất.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{3+9b}+\frac{1}{6+36c}$ trong đó a,b,c là các số thực dương thõa mãn $a+b+c=1$.

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức BCS , ta có:

$$P=\frac{9}{18+36a}+\frac{4}{12+36b}+\frac{1}{6+36c}\geq\frac{36}{72}=\frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{3}{18+36a}=\frac{2}{12+36b}=\frac{1}{6+36c}=\frac{1}{12}$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{2};b=\frac{1}{3};c=\frac{1}{6}$$

9

Cho các số thực $x,y,z \neq 1$ thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \ge 1$$

Vì $xyz=1$ nên tồn tại a,b,c sao cho $x=\frac{bc}{a^2}; y=\frac{ca}{b^2}; z=\frac{ab}{c^2}$

Khi đó, bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{a^4}{(a^2-bc)^2}+\frac{b^4}{(b^2-ca)^2}+\frac{c^4}{(c^2-ab)^2} \ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có: $VT \ge \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2}$

Để ý rằng: $(a^2+b^2+c^2)^2-(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2=(ab+bc+ca)^2$ nên ta có đpcm.

Một điều khá đặc biệt ở bài toán này là đẳng thức xảy ra tại vô số điểm.

Ta có thể giải bài toán này theo một hướng khác như sau:

Đặt $x=\frac{a}{b}; y=\frac{b}{c}; z=\frac{c}{a}$.

Bất đẳng thức đã cho trở thành: $\sum \left(\frac{a}{a-b}\right)^2 \ge 1$

Áp dụng BCS, ta có: $VT\left[\sum (a-b)^2(a-c)^2\right] \ge \left[a(a-c)+b(b-a)+c(c-b)\right]^2$

Ta chú ý là $xy+yz+zx=0$ với $x=(a-b)(a-c); y=(b-c)(b-a); z=(c-a)(c-b)$

Ta có: $\left[\sum (a-b)^2(a-c)^2\right]=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$

Lại để ý $x+y+z=a(a-c)+b(b-c)+c(c-a)$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ta thử khảo sát một vài ví dụ về các bất đẳng thức không đối xứng xem phương pháp này có sức công phá không ? Đa phần , các bài toán này là tổng của nhiều số hạng và có 2 số hạng là đối xứng nhan và số hạng kia không đối xứng, để dồn biến, ta phải đánh giá 2 số hạng đối xứng bằng bất đẳng thức BCS. Ta hãy theo dõi.

10

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+2bc+3ca=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+4a+b+c.$$

Lời giải

Trước hết, ta đoán dấu bằng thức xảy ra khi nào , dựa vào điều kiện ta sẽ đoán những bộ số nguyên dương và thõa mãn $ab+2bc+3ca=6$. Dễ đoán được $(a,b,c)=(1,0,2)$.

Thay cái điểm rơi này vào thì ta thấy ngay điều đặc biệt $(a+b)(b+c)(c+a)=4a+b+c=6$, 2 biểu thức này bằng nhau. Lại một phép tính nữa là bậc 3 cộng bậc 1 đem chia cho 2 nó sẽ được bậc 2 (đúng bằng bậc của giả thiết).Như vậy ý tưởng sử dụng AM-GM khá lộ thiên.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+4a+b+c \ge 2\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)(4a+b+c)}$$

Bây giờ, ta cần chứng minh: $(a+b)(b+c)(c+a)(4a+b+c) \ge 36=(ab+2bc+3ca)^2$

Ý tưởng sử dụng BCS khá rõ ràng , ta có:

$$M=\left[a(b+c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2\right](4a+b+c) \ge (2a(b+c)+b(c-a)+c(a+b))^2$$

Vậy $M \geq (ab+2bc+3ca)^2$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Bình luận: Các bạn hãy thử xét hiệu: $(a+b)(b+c)(c+a)(4a+b+c)-(ab+2bc+3ca)^2$ xem thu được điều gì nhé !

11

Với các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+1=z$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^3}{x+yz}+\dfrac{y^3}{y+zx}+\dfrac{z^3}{z+xy}+\dfrac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

Lời giải

Hình thức của bài toán khiến ta nghĩ ngay đến phương pháp hàm số . Vấn đề là ta sẽ xác định dồn về biến nào ? Nhận thấy có sự đối xứng của 2 biến x,y nên ta không thể dồn theo 2 biến này được. Vậy ta sẽ dồn z. Bây giờ biến z ta sẽ không đụng chạm gì nó, giữ nguyên. Ta sẽ cố đưa 2 biến còn lại về z . Để ý điều kiện , việc đưa về z đồng nghĩa với việc rút ra các biểu thức dạng $(x+y)$ hoặc các biểu thức có thể đánh giá được với $(x+y)$.

Để ý số hạng cuối có cấu hình $\sqrt{ab}$ nên ta có ngay đánh giá theo AM-GM:

$$\sqrt{(x+1)(y+1)} \leq \frac{x+y+2}{2}$$

$$z+xy=x+y+1+xy=(x+1)(y+1) \leq \frac{(x+y+2)^2}{4}=\frac{(z+1)^2}{4}$$

Bây giờ ta khó khăn ở việc xử lý 2 số hạng đầu tiên , có một phương pháp rất mạnh để xử lý biểu thức phân thức, đó là áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+zx} &= \frac{x^4}{x^2+xyz}+\frac{y^4}{y^2+xyz} \\
&\geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \\
&\geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+(x^2+y^2)z}=\frac{x^2+y^2}{z+1} \\
&\geq \frac{(x+y)^2}{2(z+1)}=\frac{(z-1)^2}{2(z+1)}
\end{aligned}$$

Vậy suy ra: $P \geq \dfrac{(z-1)^2}{2(z+1)}+\dfrac{4z^3}{(z+1)^2}+\dfrac{28}{(z+1)^2}$

Khảo sát hàm số trên $z>0$ ta được $\text{Min}P=\dfrac{53}{8}$ đạt tại $x=y=\dfrac{1}{3}, z=\dfrac{5}{3}$.

12

Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2$$

Lời giải

Nhận thấy rằng sự xuất hiện đặc biệt của $\dfrac{c}{a+b}$ xuất hiện 2 lần nên sẽ rất OK nếu như chúng ta dồn về biến $t=\dfrac{c}{a+b}$. Hai số hạng đầu tiên là đối xứng theo a,b nên ta cần đánh giá chúng để đưa về $t=\dfrac{c}{a+b}$. Ta sẽ áp dụng BCS:

Ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}\ge\frac{(a+b)^2}{2ab+c(a+b)}=\frac{2(a+b)^2}{4ab+2c(a+b)}\ge$$

$$\ge\frac{2(a+b)^2}{(a+b)^2+2c(a+b)}=\frac{2\frac{(a+b)^2}{c^2}}{\frac{(a+b)^2}{c^2}+2\frac{a+b}{c}}$$

Vậy nếu đặt $\frac{a+b}{c}=t$ thì ta có: $P\ge\frac{2t^2}{t^2+2t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}$.

Đến đây, ta có thể khảo sát hàm để tìm giá trị nhỏ nhất.

Bài toán tương tự: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a}{b+c}+\sqrt{\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}$

13

[Poland 1991] Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2$. Chứng minh:

$$x+y+z\le xyz+2$$

Lời giải

BĐT $\Leftrightarrow x+y+z-xyz\le 2$

Đầu tiên với dấu bằng tại $(0;1;1)$ ta tách mỗi số hạng trong vế trái ra 2 nhân tử để dấu bằng xảy ra đồng thời tận dụng giả thiết thông qua BĐT Cauchy Schwarz và đưa về một ẩn. Khi đã thông hiểu dạng này các bạn sẽ thấy không thường thì không phải quan tâm dấu bằng:

Ta có:

$$VT^2=\left[x.(1-yz)+(y+z).1\right]^2\le\left[x^2+(y+z)^2\right]\left[(1-yz)^2+1\right]$$

$$\left(x^2+y^2+z^2+2yz\right)\left[(1-yz)^2+1\right]=(2+2yz)\left(y^2z^2-2yz+2\right).$$

Đặt $yz=t$ Ta chứng minh: $(2+2t)\left[t^2-2t+2\right]\le 4\Leftrightarrow t^3-t^2\le 0\Leftrightarrow t\le 1$

Ta có: $2=x^2+y^2+z^2\ge x^3+2yz=x^2+2t\ge 2t\Leftrightarrow 1\ge t$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

14

Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=8$. Chứng minh:

$$4(x+y+z)-xyz\le 16$$

Ta có:

$$VT^2=\left[x.(4-yz)-(y+z).4\right]^2\le\left[x^2+(y+z)^2\right]\left[(2-yz)^2+16\right]$$

$$\left(x^2+y^2+z^2+2yz\right)\left[(4-yz)^2+16\right]=(8+2yz)\left(y^2z^2-8yz+32\right).$$

Đặt $yz=t$:Ta chứng minh: $(2t+8)\left(t^2-8t+32\right)\le 256\Leftrightarrow t\le 4$

Dễ có điều đó vì: $8=x^2+y^2+z^2\ge y^2+z^2\ge 2yz=2t$.

Vậy ta có điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x,y,z)=(0;2;2)$ và các hoán vị của nó.

15

[JBMO 2002 Shortlish] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+a+b+c\ge 2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)$

Mà $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge 2(a+b+c)\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$. Suy ra $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ đpcm!

Cách 1:

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz ta có:

$$\left(\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\right)\left[a\left(a^2+ab+b^2\right)+b\left(b^2+bc+c^2\right)+c\left(c^2+ca+a^2\right)\right]\ge$$

$$\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Mà $a\left(a^2+ab+b^2\right)+b\left(b^2+bc+c^2\right)+c\left(c^2+ca+a^2\right)=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$\Rightarrow\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Ta có: $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\ge\frac{a+b+c}{3}\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$ đúng!

Vậy ta có đpcm! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Tuy nhiên, bài toán này lại có một cách giải khác, đó chính là đánh giá đại diện hay rộng hơn là phương pháp tiếp tuyến. Nhưng ở dạng này ta chỉ cần một chút kĩ thuật trong phương pháp đánh giá đại diện như sau:

Cách 2: Ta sẽ tìm x,y sao cho BDDT sau luôn đúng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge ax+by$$

BĐT $\Leftrightarrow a^3\ge(ax+by)\left(a^2+ab+b^2\right)\Leftrightarrow(1-x)a^3+(-y)b^3\ge(x+y)\left(a^2b+b^2a\right)$

Lại có BĐT $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$ luôn đúng nên ta sẽ chọn x,y, sao cho:

$1-x=-y=x+y\Leftrightarrow x=\frac{2}{3};y=\frac{-1}{3}$ thì BĐT trên luôn đúng!

Bài giải: Ta có: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$. Thật vậy:

BĐT $\Leftrightarrow 3a^3\ge\left(a^2+ab+b^2\right)(2a-b)\Leftrightarrow a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$ (luôn đúng)

Tương tự ta có:

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}c;\ \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{2}{3}c-\frac{1}{3}a$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên suy ra:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Đánh giá thông qua sử dụng BĐT phụ sẽ được sử dụng nhiều sau này.

Cách 3: (Cauchy ngược dấu – Kết quả khi đưa ra BĐT phụ có thể giống nhau nhưng tư tưởng thì khác):

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=a-\frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab+b^2}\ge a-\frac{ab(a+b)}{3ab}=a-\frac{a+b}{3}=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$$

Và lại giống như trên.

16 **[USAMO 2003]** Cho x,y,z là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

Vì có nhiều cách giải và sau đây là cách sử dụng biến đổi khá hay:

Ta có: $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=3-\dfrac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\le 3-\dfrac{2(b+c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=3-\dfrac{(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$

Suy ra ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 1\Leftrightarrow (a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2\ge a^2+b^2+c^2$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (luôn đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài toán tưởng chừng đơn giản trên lại có một số ứng dụng tốt trong việc định hướng đem đến tự tin khi đi các bài toán khác đưa về nó:

17 **[ĐH Khối A năm 2007]** Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x^2(y+z)\ge x^2 2\sqrt{yz}=2x\sqrt{x}$

Suy ra $P\ge \dfrac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\dfrac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\dfrac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

Đặt $x\sqrt{x}=a;\ y\sqrt{y}=b;\ z\sqrt{z}=c$. Ta có:

$P\ge 2\left(\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\right)$ quay trở lại *ví dụ 16*

Vậy $P\min=2$ tại $x=y=z=1$

Dạng của bài toán trên lại mở ra một hướng đi nhanh chóng cho bài toán sau:

18 Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

Để nguyên như vậy đánh giá khó lòng đem lại kết qủa gì!

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\sqrt{\dfrac{2a}{a+b}}=\dfrac{2a}{\sqrt{2a}.\sqrt{a+b}}\ge\dfrac{4a}{2a+(a+b)}=\dfrac{4a}{3a+b}$

Tương tự cho 2 biến còn lại ta có:

$$\sqrt{\frac{2b}{b+c}}\ge\frac{4b}{3b+c};\ \sqrt{\frac{2c}{c+a}}\ge\frac{4c}{3c+a}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\ge\frac{4a}{3a+b}+\frac{4b}{3b+c}+\frac{4c}{3c+a}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schqarz ta có:

$$\left(\frac{4a}{3a+b}+\frac{4b}{3b+c}+\frac{4c}{3c+a}\right)\left[a(3a+b)+b(3b+c)+c(3c+a)\right]\ge 4(a+b+c)^2$$

Mà $a(3a+b)+b(3b+c)+c(3c+a)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca\le 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Suy ra

$$\frac{4a}{3a+b}+\frac{4b}{3b+c}+\frac{4c}{3c+a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

19

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+yz}+\frac{1}{z^2+zx}$$

Lời giải

Tồn tại các số a,b,c sao cho $x=\frac{b}{a};y=\frac{c}{b};z=\frac{a}{c}$. Khi đó:

$$P=\frac{a^2}{b^2+ac}+\frac{b^2}{c^2+ab}+\frac{c^2}{a^2+bc}$$

Ta có: $\frac{a^2}{b^2+ac}\ge\frac{a^2}{b^2+\frac{1}{2}\left(a^2+c^2\right)}=\frac{2a^2}{a^2+2b^2+c^2}$

Vậy $P=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+2c^2}+\frac{c^2}{2a^2+b^2+c^2}\right)$

Đến đây đơn giản rồi, sử dụng Cauchy – Schwarz như bài toán cơ sở ta thu được

$P_{min}=\frac{3}{4}$ tại $x=y=z=1$

Bình luận: Lưu ý cách xử lý điều kiện tích bằng 1.

20

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{2}\quad (*)$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Ta chỉ cần chứng minh: $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\le 2\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{3}}$

Áp dụng BĐT BCS ta có:

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\le\sqrt{\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]}$$

Mà $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Và $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\le 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Nhân vế theo vế các BĐT trên suy ra điều phải chứng minh.

21

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c\ge 3\sqrt{2}$. Tìm GTNN của:

$$P=\sqrt[3]{a^4+\frac{1}{b^4}}+\sqrt[3]{b^4+\frac{1}{c^4}}+\sqrt[3]{c^4+\frac{1}{a^4}}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có: $\left(4+\frac{1}{4}\right)\left(a^4+\frac{1}{b^4}\right)\ge\left(2a^2+\frac{1}{2a^2}\right)^2$ mà

$$\left(4+\frac{1}{4}\right)\left(2a^2+\frac{1}{2a^2}\right)\ge\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{17^3}{4^3}\left(a^4+\frac{1}{b^4}\right)\ge\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)^4\Rightarrow\frac{17}{4}.P\ge\sum\sqrt[3]{\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)^4}$$

Á dụng BĐT Cauchy ta có:

$$3.\sqrt[3]{\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^4}\ge 4\sqrt[4]{\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)^4.\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^4}}=4\sqrt[3]{\frac{17}{4}}\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)$$

Suy ra $\frac{17}{4}.P\ge\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{17}{4}}.\sum\left(2\sqrt{2}a+\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^4}$

Vậy ta chuyển về bài toán: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c\ge 3\sqrt{2}$. Tìm GTNN:

$$N=2\sqrt{2}(a+b+c)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sum\frac{\sqrt{2}a}{8}+\sum\frac{1}{2\sqrt{2}a}\ge\frac{3}{2}\Rightarrow N\ge\frac{15\sqrt{2}}{8}(a+b+c)+\frac{3}{2}\ge\frac{51}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{17}{4}.P\ge\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{17}{4}}.\frac{51}{4}-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^4}\Rightarrow P\ge 3\sqrt[3]{\frac{17}{4}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{2}$

Vậy $P_{min}=3\sqrt[3]{\frac{17}{4}}$ tại $a=b=c=\sqrt{2}$

II. Các kĩ thuật sử dụng bất đẳng thức BCS

1. Kĩ thuật thêm-bớt

Đây là một kĩ thuật khá quan trọng trong việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawarz . Đặc biệt là khi các bài bất đẳng thức khó đánh giá. Ý tưởng khá đơn giản đó là: Để chứng minh một bất đẳng thức có dạng

$$f(a,b,c)\ge g(a,b,c)$$

mà nếu chứng minh trực tiếp có khi sẽ gặp khó khăn thì lúc này, ta sẽ tìm cách chứng minh:

$$f(a,b,c)-h(a,b,c)\ge g(a,b,c)-h(a,b,c).$$

Và ta hy vọng rằng đánh giá này càng chặt càng tốt. $h(a,b,c)$ ở đây có thể là số hoặc là một biểu thức chưa biến. Để cụ thể hóa , ta sẽ cùng xét một số ví dụ sau:

1

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+ca+a^2}\le\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Với các học sinh chuyên Toán thì bài toán này sẽ được các bạn giải bằng kĩ thuật phân tích bình phương. Nhưng chúng ta hoàn toàn giải được bằng bất đẳng thức BCS.

Nếu áp dụng BCS cho vế trái thì ta thấy ngay chiều của bất đẳng thức bị ngược. Như vậy ta sẽ nghĩ đến việc thêm-bớt để làm đảo chiều bất đẳng thức. Mà cụ thể ý tưởng của chúng ta sẽ như sau:

Ta sẽ thêm bớt một số k sao cho:

$$\sum\left(k-\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}\right)\ge 3k-\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum\left[\frac{(k-1)a^2+kab+(k-1)b^2}{a^2+ab+b^2}\right]\ge 3\left[\frac{(k-2)\sum a^2+2k\sum ab}{(a+b+c)^2}\right]$$

Để đảm bảo cho việc sử dụng BCS, thì ta cần phải có:

$(k-1)a^2+kab+(k-1)b^2;(k-1)b^2+kbc+(k-1)c^2;(k-1)c^2+kca+(k-1)a^2$ đều phải dương cả.

Để chắc chắn, ta sẽ xét đây là một tam thức bậc 2, thì ta phải có $\begin{cases}\Delta=k^2-4(k-1)^2\le 0\\ k\ge 1\end{cases}$

Vì vậy suy ra $k\ge 2$. Vậy ta sẽ chọn k nhỏ nhất là 2.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum\frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có $\sum\frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}$

Như vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}\ge\frac{12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Hay $(a+b+c)^4\ge 3(ab+bc+ca)(2\sum a^2+\sum ab)$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM:

$$3(ab+bc+ca)(2\sum a^2+\sum ab)\le\frac{(3(ab+bc+ca)+2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca)^2}{4}=(a+b+c)^4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$

Lời giải

Cùng như bài toán trên, ta sẽ tìm cách đảo chiều của bất đẳng thức. Tức là tìm một số $k > 0$ sao cho:

$$\sum(k-\frac{1}{1-ab}) \ge 3k-\frac{9}{2}$$

Hay $\sum\left(\frac{k-kab-1}{1-ab}\right) \ge 3(k-\frac{3}{2})$

Bằng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $1=a^2+b^2+c^2 \ge 2ab$ vậy thì ta sẽ chọn $k=2$.

Khi đó ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1-2ab}{1-ab}+\frac{1-2bc}{1-bc}+\frac{1-2ca}{1-ca} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{c^2}{1-ab}+\sum\frac{(a-b)^2}{1-ab} \ge \frac{3}{2}$$

Không giảm tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\begin{cases} \sum\frac{c^2}{1-ab} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3-ab-bc-ca} \\ \sum\frac{(a-b)^2}{1-ab} \ge \frac{(a-c)^2}{3-(ab+bc+ca)} \end{cases}$$

Do đó ta cần chứng minh: $2\left[4(a-c)^2+(a+b+c)^2\right] \ge 3\left[3-(ab+bc+ca)\right]$

Đồng bậc hóa bất đẳng thức, bằng cách thay giả thiết $3=a^2+b^2+c^2$, ta cần CM:

$$2\left[4(a-c)^2+(a+b+c)^2\right] \ge 3\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right]$$

$$\Leftrightarrow 7b(a-b)(a-c)+(b-c)^2 \ge 0 .$$

Điều này đúng theo cách mà chúng ta sắp thứ tự.

3

Cho a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{2a+c}+\frac{1}{2b+a}+\frac{1}{2c+b}\right)+1 \ge 2\left(\frac{a+b}{2b+a}+\frac{b+c}{2c+b}+\frac{a+c}{2a+c}\right)$$

Lời giải

Điều khó khăn ở bài toán này là gì ? Đúng là hệ số tự do ở vế trái, trong khi vế phải là một biểu thức khá phức tạp. OK, tôi sẽ cố gắng loại bỏ đi số 1 ở vế trái. Tôi sẽ cố gắng tạo 1 số tự do ở vế phải để từ đó loại đi hệ số tự do.

Để ý rằng $2\frac{a+b}{2b+a}=1+\frac{a}{2b+a}$

Do đó bất đẳng thức được viết lại:

$$\sum\frac{a+b+c}{2b+a} \ge 2+\sum\frac{b}{2b+a}$$

$$\Leftrightarrow \sum(\frac{a+b+c}{2b+a}-\frac{b}{2b+a}) \ge 2$$

Hay $\frac{b+c}{2b+a}+\frac{c+a}{2c+b}+\frac{a+b}{2a+c}\ge 2$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có: $\frac{b+c}{2b+a}+\frac{c+a}{2c+b}+\frac{a+b}{2a+c}\ge \frac{\left[\sum (b+c)\right]^2}{\sum [(2b+a)(a+c)]}$

Bây giờ , ta cần chỉ ra rằng:

$4(a+b+c)^2\ge \sum (2b+a)(a+c)$ hay là $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.Điều này đúng.

Phép chứng minh được hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $a=b=c$

4

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le \frac{5}{2}$$

Lời giải

Ta cần tìm một số m để có biến đổi: $\left(m-\frac{a}{b+c}\right)$.

Bây giờ tìm m như thế nào ? Ta sẽ xét xem nếu như tam giác này suy biến thành đường thẳng thì sao nhỉ ?

Lúc này $\frac{a}{b+c}$ sẽ tiệm cận về 1. Như thế quá rõ $m=1$ là một đánh giá hợp lý.

Vậy ta biến đổi như sau:

$$\left(1-\frac{a}{b+c}\right)+\left(1-\frac{b}{c+a}\right)+\left(1-\frac{c}{a+b}\right)\ge \frac{1}{2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{b+c}+\frac{c+a-b}{c+a}+\frac{a+b-c}{a+b}\ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{b+c-a}{b+c}+\frac{c+a-b}{c+a}+\frac{a+b-c}{a+b}\ge \frac{[(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]^2}{\sum (b+c)(b+c-a)}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

5

Cho ba số thực dương a,b,c Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1$$

Lời giải

Khi giải bài toán này, chúng tôi đã bó tay trong 1 tiếng đầu tiên. Và chúng tôi khá ngạc nhiên về điều này. Vậy lý do là vì sao ? Lý do chính đó là chúng tôi đã bỏ quên đi một trường hợp xảy ra đẳng thức đó là a,b tiến dần về 0 và $c>0$.Một điểm đẳng thức khá "nhạy cảm". Khi gặp trường hợp này, chúng ta có một lưu ý nhỏ là phải làm xuất hiện các biểu thức kiểu như $ab+bc+ca$. Vậy làm sao để có điều đó. Tôi tiếp tục suy nghĩ và tôi phát hiện ra 1 điều nếu như , lấy ví dụ là số hạng đầu tiên nếu tôi thêm vào $c(a+b+c)$ rồi cộng với mẫu số thì tôi được một bất biến là tổng $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

Nên nếu lấy: $\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^2}{\sum a^2+\sum ab}$ thì ta sẽ được bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum\left(\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{a^2}{\sum a^2+\sum ab}\right)\geq 1-\frac{a^2+b^2+c^2}{\sum a^2+\sum ab}$$

Hay $\dfrac{ca^2}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{ab^2}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{bc^2}{c^2+ca+a^2}\geq\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$

Bây giờ , áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{ca^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{ab^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{bc^2}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum c(a^2+ab+b^2)}=\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

6

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geq\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$$

Lời giải

Để ý rằng: $\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{2a}{b+c}+1$

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}$$

Do $\dfrac{a}{c}-\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{ab}{c(b+c)}$.Nên ta cần chứng minh:

$$\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Chứng minh của bất đẳng thức này đã được "lập trình" , bạn đọc có thể tự mình hoàn thiện lời giải của mình.

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}+\dfrac{1}{a+b+1}=1$

Chứng minh rằng: $a+b+c>ab+bc+ca$.

Lời giải

Điều dễ dàng nhận thấy ở đây chính là: $\dfrac{1}{b+c+1}=1-\dfrac{b+c}{b+c+1}$.Vì vậy , theo giả thiết, ta có:

$$\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1}+\frac{a+b}{a+b+1}\leq 2.$$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có:

$$VP\geq\frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{\sum(b+c)(b+c+1)}=\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+a+b+c}$$

Đương nhiên , ta phải có:

$$\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+a+b+c}\leq 2$$

chính điều này tương đương với $a+b+c\geq ab+bc+ca$

Bình luận: Ta có một cách tiếp khác khá hay cho bài toán này đó là áp dụng BCS như sau:

$$(b+c+1)(b+c+a^2)\geq(b+c+a)^2$$

Một số bài toán tự luyện

1

Cho 3 số thực không âm a,b,c thõa mãn $ab+bc+ca=3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\le 1$$

Hướng dẫn giải: Ta sẽ tìm m sao cho $m-\frac{1}{a^2+2}=\frac{m(a^2+2)-1}{a^2+2}$.

Ta cần có $m(a^2+2)-1\ge 0$ và đánh giá này càng chặt càng tốt. Để $a\to 0$ ta có $m=\frac{1}{2}$. Mọi chuyện đến đây khá đơn giản.

Ngoài ra, ta có thể giải bài toán này bằng cách áp dụng BCS trực tiếp như sau:

$$\left(a^2+2\right)\left[1+\frac{(b+c)}{2}\right]\ge (a+b+c)^2$$

Cách áp dụng BCS có trọng số như thế này luôn mang đến cho chúng ta những lời giải khá đẹp mắt và ngắn gọn.

2

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\ge 1$$

Hướng dẫn giải:

Bài toán này tương đương với việc chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sum\left(\frac{a}{3a-b+c}-\frac{1}{4}\right)\ge \frac{1}{4}$$

Điều còn lại khá là đơn giản và đã luyện tập thao tác nhiều lần.

3

Cho $a,b,c>0$ và thõa mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\ge \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải:

Do $\frac{a}{a+bc}=1-\frac{bc}{bc+a}$.Nên bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{b+ca}+\frac{ab}{c+ab}\le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{bc}{3bc+a(a+b+c)}\le \frac{1}{2}$$

Ta sẽ tách $3bc+a(a+b+c)=a^2+2bc+(ab+bc+ca)$ rồi áp dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$\frac{4}{x+y}\le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

2.Kĩ thuật tách-ghép:

Đây là một kĩ thuật khá tinh tế trong việc chứng minh bất đẳng thức. Áp dụng thành công nó hay không phụ thuộc vào việc bạn tách một biểu thức A thành các số hạng hợp lý để có thể áp dụng thành công bất đẳng thức BCS:

1

Cho $a,b,c>0$ thõa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le \frac{9}{2}$$

Lời giải

Bài toán này đã được đề cập ở phần trước rồi, bây giờ, ta tìm cách tiếp cận mới cho bài toán này.

Sự xuất hiện của ab và giả thiết là dạng tổng bình phương , khiến ta nghĩ ngay đến áp dụng AM-GM:

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$\frac{1}{1-ab} \le \frac{1}{1-\dfrac{a^2+b^2}{2}} = \frac{2}{1-a^2+1-b^2}$$

Rồi sử dụng BCS, ta có:

$$\frac{2}{1-a^2+1-b^2} \le 2\left(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\right)$$

Bây giờ ta cần chứng minh: $\sum \frac{1}{1-a^2} \le \frac{9}{2}$

Nhưng không may mắn , ta có: $\sum \frac{1}{1-a^2} \ge \frac{9}{3-a^2-b^2-c^2} = \frac{9}{2}$. Nghĩa là chúng ta đã bị ngược dấu.

Vậy là thất bại à ? Chúng ta sẽ khắc phục để hoàn thiện hơn lời giải theo cách sau:

Chú ý rằng: $\frac{1}{1-ab} - 1 = \frac{ab}{1-ab}$ .Nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$\frac{ab}{1-ab}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca} \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{4ab}{1+c^2+(a-b)^2} \le 3$$

Mặt khác ta có: $4ab \le (a+b)^2$ nên ta có: $\sum \frac{4ab}{1+c^2+(a-b)^2} \le \sum \frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)}$

Theo bất đẳng thức BCS, thì ta có: $\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} \le \frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}$

Vậy ta có: $\sum \frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} \le \sum\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$

Để ý rằng: $\sum\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)=3$

Vậy nên ta có điều phải chứng minh.

2

Cho $a,b,c>0$ .Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{a+b}{c^2+ab}+\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ab}$

Lời giải

Ta mong muốn tạo ra được biểu thức dạng bình phương ở mẫu số của mỗi số hạng vế phải.

$$\frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{(a+b)^2}{b(c^2+a^2)+a(b^2+c^2)} \le \frac{a^2}{b(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$$

Tương tự 2 bất đẳng thức nữa:

$$\frac{b+c}{a^2+bc} \le \frac{b^2}{c(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{c(c^2+a^2)}$$

$$\frac{c+a}{b^2+ca} \le \frac{c^2}{a(b^2+c^2)}+\frac{a^2}{c(a^2+b^2)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta có:

$$VP \le \sum\left(\frac{a^2}{b(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(b^2+c^2)}\right) = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

3

Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta luôn có bất đẳng thức sau đúng:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(b+a)}\le 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}=\frac{(b+c)^2}{b(a+b)+c(c+a)}\le\frac{b^2}{b(a+b)}+\frac{c^2}{c(c+a)}$$
$$=\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}$$

Thiết lập thêm 2 bất đẳng thức tương tự, rồi cộng lại ta được:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(b+a)}\le\sum\frac{b}{a+b}+\sum\frac{c}{c+a}=\sum\frac{b}{a+b}+\sum\frac{a}{a+b}=3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ sau đây là một bài toán khá chặt và khó của tác giả Phạm Kim Hùng (CEO NES.vn)

4

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{1+a^2}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{1+c^2}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Ta sẽ mong rằng xuất hiện biểu thức bình phương ở tử số. Như vậy thì ta sẽ đánh giá tử số

$$bc\le\frac{(b+c)^2}{4}$$

Vậy kết hợp với sử dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{bc}{1+a^2}\le\frac{(b+c)^2}{4(1+a^2)}=\frac{(b+c)^2}{4\left[(a^2+b^2)+(c^2+a^2)\right]}$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$$

Tương tự, ta thiết lập thêm 2 bất đẳng thức nữa rồi cộng theo các bất đẳng thức cùng chiều, ta có

$$VT\le\sum\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)=3$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

5

Cho $a,b,c>0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

Cấu hình xa^2+yb^2 ở mẫu số làm ta liên tưởng ngay đến việc sử dụng AM-GM.

Áp dụng AM-GM, ta có:

$$3a^2+2b^2+c^2=2(a^2+b^2)+(a^2+c^2)\ge 4ab+2ac.$$

Do đó ta có: $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \frac{a}{4ab+2ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2b+c}\right)$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có: $\frac{1}{2b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Từ đó ta suy ra: $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \frac{1}{18}(\frac{2}{b}+\frac{1}{c})$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Cộng lại, vế theo vế, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \le abc$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}$$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức sau luôn đúng $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có: $\begin{cases} \frac{a}{a^2+bc} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{bc}\right) \\ \frac{b}{b^2+ac} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{ac}\right) \\ \frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}\right) \end{cases}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta sẽ có:

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{abc}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\right) \le \frac{1}{2},$$

Vậy GTLN $P = \frac{1}{2}$ đạt tại $a=b=c$

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}}+\sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{4(a+b+2c)}} \le \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$$

Suy ra: $\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{bc}{b+c+2a}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)\\ \sqrt{\dfrac{ca}{c+a+2b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta được:

$$P\le\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{9}$

8

[HSG Tỉnh Hải Dương] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $2ab+6bc+2ca=7abc$. Tìm GTNN của:

$$C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{4bc}{b+c}+\frac{9ca}{a+4c}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{2}{c}+\dfrac{6}{a}+\dfrac{2}{b}=7$. Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}\Rightarrow 6x+2y+2z=7$

Khi đó: $C=\dfrac{4ab}{a+2b}+\dfrac{4bc}{b+c}+\dfrac{9ca}{a+4c}=\dfrac{4}{2x+y}+\dfrac{4}{y+z}+\dfrac{9}{z+4x}$

ÁP dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left(\frac{4}{2x+y}+2x+y\right)+\left(\frac{4}{y+z}+y+z\right)+\left(\frac{9}{z+4x}+z+4x\right)\ge 4+4+6$$
$$\Rightarrow C+6x+2y+2z\ge 14\Rightarrow C\ge 7$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2};y=z=1\Rightarrow a=2;b=c=1$

Vậy $C_{min}=7$ tại $a=2;b=c=1$

Chú ý về phân tích $a^2+(ab+bc+ca)=(a+b)(a+c)$ *sẽ được sử dụng nhiều trong giải toán*

9

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm GTNN:

$$P=\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}$$

Bài giải: Ta có: $\dfrac{a+bc}{b+c}=\dfrac{a(a+b+c)+bc}{b+c}=\dfrac{(a+b)(c+a)}{b+c}$.

Đặt $a+b=x;\ b+c=y;\ c+a=z\Rightarrow x+y+z=2$, khi đó ta có:

$$P=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge xyz\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=x+y+z=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Vậy $P_{min}=2$ tại $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

3.Bất đẳng thức Holder

Thật tiếc rằng BĐT Holder không có trong chương trình phổ thông! Tuy nhiên kết quả ở dạng 3 biến của nó sau đây khá phổ biến, hoàn toàn có thể áp dụng tốt và chứng minh dễ dàng. Cuốn sách này chỉ nói sơ qua về BĐT này:

Với a,b,c là các số thực dương ta có:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\geq\left(m+byn+czn\right)^3$$

Chứng minh: Sử dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\geq\left(m+byn+czn\right)^3$$

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}\geq\frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Tương tự cho 2 biến còn lại, cộng vế theo vế ta được đpcm!

Áp dụng vào các ví dụ

1

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\leq\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}$$

Lời giải

Đây là một bài toán nếu sử dụng BĐT Cauhy và Cauchy – Schwarz sẽ rất mất thời gian và công sức. Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{\left(a+a+a\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)\left(a+b+c\right)}{27}\geq\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\right)^3$$

Về ứng dụng của BĐT này: rất lớn, thường thì ta đang nói đến các BĐT đối xứng gồm tổng các phân thức có mẫu số là căn bậc 2 của một biểu thức, nó sẽ giúp tìm GTNN. Cũng chính vì tính thiếu phổ thông nên xin giới thiệu bằng 2 ví dụ rất quen thuộc.

2

Cho x,y,z là các số dương có tích bằng 1. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{x}{\sqrt{7+y+z}}+\frac{y}{\sqrt{7+z+x}}+\frac{z}{\sqrt{7+x+y}}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$P.P.\left[x(7+y+z)+y(7+z+x)+z(7+x+y)\right]\geq\left(a+b+c\right)^3$$

$$\Rightarrow P^2\left[7(x+y+z)+2(xy+yz+zx)\right]\geq\left(a+b+c\right)^3$$

Ta có: $2(xy+yz+zx)\leq\frac{2}{3}(a+b+c)^2$. Ta sẽ chứng minh: $(a+b+c)^2\geq7(a+b+c)+\frac{2}{3}(a+b+c)^2$ sử dụng hàm số với $a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}=3$ ta có đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Tuy nhiên nếu chỉ nói có vậy thì quả là vô vị! Sử dụng BĐT này ta sẽ phải chứng minh, chính vì thế sử dụng cách chứng minh của nó để giải trực tiếp bài toán này thông qua việc nêu ra một BĐT phụ luôn đúng là một phương án tối ưu. Để ý ta đã sử dụng biểu diễn:

$$\frac{x^k}{x^k+y^k+z^k}+\frac{y^k}{x^k+y^k+z^k}+\frac{z^k}{x^k+y^k+z^k}=1$$

Sử dụng điều này, dựa theo cách giải trên. Ta đi thử bài toán đơn giản sau:

3

[IMO lần thứ 42 – 2001] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq1$$

Lời giải

Cách 1: Trước hết xin nêu lại PP dùng BĐT Holder quen thuộc:

Theo BĐT Holder ta có:

$$P.P.\left[a\left(a+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)\right]\ge\left(a+b+c\right)^3$$

$$\Leftrightarrow P^2\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)\ge\left(a+b+c\right)^3$$

Lại có: $\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge a^3+b^3+c^3+24abc$

Suy ra $P\ge 1$ điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$

Cách 2: Vậy cách đi của chúng ta ở đây sẽ là: sử dụng BĐT phụ luôn đúng sau:: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\dfrac{a^k}{a^k+b^k+c^k}$

Hay nói cách khác là tìm hằng số k sao cho BĐT $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\dfrac{a^k}{a^k+b^k+c^k}$ luôn đúng!

Với 2 biến còn lại tương tự.

Nếu với giá trị hằng số k để BĐT luôn đúng với mọi x,y,z ta sẽ chọn $b=c=1$ để tìm k dễ dàng hơn.

Khi đó ta sẽ tìm k sao cho BĐT: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8}}\ge\dfrac{a^k}{a^k+2}$ luôn đúng!

BĐT trên $\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{a^2+8}\ge\dfrac{a^{2k}}{\left(a^k+2\right)^2}\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{a^2+8}\ge\dfrac{a^{2k}}{a^{2k}+4a^k+4}\Leftrightarrow a^{2k+2}+4a^{k+2}+4a^2\ge a^{2k+2}+8a^{2k}$

$\Leftrightarrow a^{k+2}+a^2\ge 2a^{2k}$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $a^{k+2}+a^2\ge 2\sqrt{a^{k+4}}$

Vậy ta chỉ cần tìm k sao cho $2\sqrt{a^{k+4}}=2a^{2k}$. Từ đó tìm được $k=\dfrac{4}{3}$

Vậy ta có cơ sở để tin rằng BĐT phụ: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$ đúng! Khi đã tìm ra k, ta tiến hành sử dụng BĐT phụ để giảm 3 ẩn xuống 2 ẩn mới!

Bài giải: Ta có: BĐT $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$ đúng. Thậy vậy:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\ge 2\sqrt[3]{b^4c^4}$. Đặt $bc=t$

Ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8t^2}}\ge\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4}}\Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4}\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{t^2}\right)^2\ge 0$ luôn đúng!

Suy ra BĐT trên đúng. Tương tự cho 2 biến còn lại. Cộng vế theo vế 3 BĐT mới ta có đpcm!

Cách 3: Sử dụng BĐT Cauchy Schwarz:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$$

Mà $\left(\sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+8abc}\right)^2\le\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)$

Lại có: $a^3+b^3+c^3+24abc\le\left(a+b+c\right)^3\Leftrightarrow 8abc\le\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$ luôn đúng

Suy ra $a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\le\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow P\ge 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

> ***Tổng quát:*** Cho a,b,c là các số thực dương và hằng số $k\left(0<k\le 8\right)$. Chứng minh:
>
> $$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\ge 1$$

Tiếp tục các ví dụ

4

Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1$$

Lời giải

Ta sẽ tìm hằng số k sao cho BĐT sau luôn đúng: $\frac{1}{x+y+1}\le\frac{z^k}{x^k+y^k+z^k}$

Để tìm k ra nhanh nhất và tổng quát nhất, ta rút $z=\frac{1}{xy}$ đồng thời chuẩn hóa (chọn) $x=y$

Ta thu được: $\frac{1}{2x+1}\le\frac{1}{2x^{3k}+1}\Leftrightarrow 2x\ge 2x^{3k}$ với mọi k!

Với cách chọn này, ta tìm ra ngay $k=\frac{1}{3}$

Như vậy ta dự đoán BĐT sau đúng: $\frac{1}{x+y+1}\le\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

***Lời giải** chi tiết*

Ta có: $\frac{1}{x+y+1}\le\frac{1}{\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)+1}=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$

(Áp dụng BĐT $a^3+b^3\ge ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$)

Tương tự, $\frac{1}{y+z+1}\le\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$; $\frac{1}{z+x+1}\le\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$

Cộng vế theo vế 3 BĐT suy ra đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Việc chứng minh BĐT phụ thì có khi rất đơn giản nhưng muốn hướng đến đưa về nó là một hướng tư duy!

Tuy nhiên việc tìm ra BĐT phụ không phải luôn đúng! Đơn giản ta thử ví dụ ban đầu, nếu đi theo con đường này, ta sẽ dễ dàng tìm ra $k=\frac{3}{2}$. Bây giờ ta đi chứng minh BĐT sau đúng:

$$\frac{x}{\sqrt{7+y+z}}\ge\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}+\sqrt{z^3}}$$

Đáng tiếc BĐT trên không đúng, trường hợp thực nghiệm $(a,b,c)=\left(\frac{100}{49};\frac{7}{10};\frac{7}{10}\right)$.

Một ví dụ tiếp theo, đặc điểm nhận dạng sử dụng PP này là chứng minh tổng 3 phân thức không lớn (nhỏ) hơn 1, mà mỗi phân thức chứa quan hệ 3 biến:

5

Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1$$

Lời giải

Ta sẽ tìm k sao cho BĐT sau luôn đúng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\frac{x^k}{x^k+y^k+z^k}$$

Để đơn giản ta chuẩn hóa $y = z = 1$. Ta tìm k sao cho BĐT $\frac{x}{2x+1} \le \frac{x^k}{x^k+2}$ luôn đúng!

BĐT trên $\Leftrightarrow x^{k+1} + 2x \le 2x^{k+1} + x^k \Leftrightarrow x^{k+1} + x^k \ge 2x$.

Theo BĐT Cauchy: $x^{k+1} + x^k \ge 2\sqrt{x^{2k+1}}$. Vậy ta tìm k để $2\sqrt{x^{2k+1}} = 2x$ thì BĐT trên luôn đúng

Suy ra $k = \frac{1}{2}$. Vậy ta dự đoán $\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ đúng.

Thật vậy: BĐT $\Leftrightarrow \frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{zx}} \Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(z+x)} \ge \sqrt{xy} + \sqrt{zx}$

Theo BĐT Cauchy Schwarz ta có đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$. Thật vậy:

BĐT $\Leftrightarrow 2a^2(b^2+c^2) + (b^2+c^2)^2 \ge a(b+c)^3$ sử dụng BĐT Cauchy ta dễ có đpcm!

Tương tự cho 2 biến còn lại, cộng vế theo vế các BĐT ta có đpcm!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \ge 1$$

Lời giải

Dễ dạng tìm ra BĐT sau luôn đúng: $\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}} \ge \frac{a}{a+b+c}$. Thật vậy:

BĐT $\Leftrightarrow (a+b+c)b \ge \sqrt{a}\left(4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}\right) \Leftrightarrow b^2 + ab + bc \ge 4b\sqrt{ac} - ac \Leftrightarrow (a+b)(b+c) \ge 4b\sqrt{ac}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có đpcm!

Tương tự cho 2 biến còn lại, cộng vế theo vế các BĐT ta có đpcm!

Ta sẽ quay lại dạng biểu diễn này ở chuyên đề kĩ thuật hệ số bất định UCT một lần nữa. Nhưng trước khi đọc đến phần đó yêu cầu các bạn thực hành nhiều loại toán này.

Chương IV: Đôi nét về Bất Đẳng Thức Lượng Giác

Phần này của cuốn sách, được viết chủ yếu cho các bạn ôn thi kì thi HSG cấp tỉnh. Nếu như nhớ lại, thì trước đây giai đoạn các trường thi riêng thì phần Bất đẳng thức lượng giác và bài toán xác định dạng của tam giác rất được "thịnh hành". Cũng vì lý do đó, trong cuốn sách này, chúng tôi cũng sẽ giới thiệu và trang bị cho các bạn những kĩ năng đầy đủ để "tấn công" các bất đẳng thức dạng lượng giác ,và đồng thời giúp các bạn "đón đầu" được hướng ra đề thi mới của đề thi tuyển sinh.

1.Vài nét mở đầu

Chúng ta sẽ mở đầu chương này bằng một số bất đẳng thức lượng giác cơ bản và một vài lý thuyết "công cụ" giúp ta khai mở một mảng rất thú vị của Bất Đẳng Thức này.

1

Cho A,B,C là 3 đỉnh của 1 tam giác nhọn. Chứng minh rằng:

$$\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$$

Lời giải

Vì $\tan(A+B)=-\tan C\Leftrightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

Tam giác ABC nhọn nên tanA, tanB, tanC dương.

Theo Cauchy ta có:

$$\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}=3\sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}$$

$$\Rightarrow (\tan A+\tan B+\tan C)^2\ge 27(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

2

Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng: $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$

Lời giải

Ta luôn có:

$$\cot(A+B)=-\cot C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cot A.\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$$

$$\Leftrightarrow \cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$$

Khi đó:

$$(\cot A-\cot B)^2+(\cot B-\cot C)^2+(\cot C-\cot A)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (\cot A+\cot B+\cot C)^2\ge 3(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=3$$

$$\Rightarrow \cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

3

Chứng minh rằng với mọi ΔABC nhọn ta có:

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}\le\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)+$$

Lời giải

Ta bị ngợp bởi sự rắc rối của Vế phải, nhưng không sao. Nhưng bài toán có cách phát biểu rắc rối thường không phải quá khó. Ta hãy cố áp dụng những công thức lượng giải để làm bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn. Mà cụ thể là ta sẽ làm mất căn thức.Điều này là thực hiện được nhờ Bất đẳng thức AM-GM:

Ta có: $\dfrac{\cos A}{2\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{4}\cos A\cos B}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cot A\cot B\right)$$

Theo AM-GM:

$$\frac{\frac{3}{4}\cos A\cos B}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \le \left(\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \frac{3}{4}\cot A\cot B}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \frac{3}{4}\cot A\cot B\right)$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \frac{3}{4}\cot B\cot C\right)$$

$$S = pr \Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{6}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ Đpcm.

4

CMR với mọi a, b, α ta có: $(\sin\alpha + a\cos\alpha)(\sin\alpha + b\cos\alpha) \le 1 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

Lời giải

Ta có: $(\sin\alpha + a\cos\alpha)(\sin\alpha + b\cos\alpha) = \sin^2\alpha + (a+b)\sin\alpha\cos\alpha + ab\cos^2\alpha$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{(a+b)}{2}\sin 2\alpha + ab\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + ab + (a+b)\sin 2\alpha + (ab-1)\cos 2\alpha\right) \quad (1)$$

Theo Bunhiacốpxki ta có:

$$A\sin x + B\cos x \le \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (2)$$

Áp dụng (2) ta có:

$$(a+b)\sin 2\alpha + (ab-1)\cos 2\alpha \le \sqrt{(a+b)^2 + (ab-1)^2} = \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được:

$$(\sin\alpha+a\cos\alpha)(\sin\alpha+b\cos\alpha)\le\frac{1}{2}\left(1+ab+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\right)\qquad(4)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với mọi a,b:

$$\frac{1}{2}\left(1+ab+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\right)\le1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\qquad(5)$$

Thật vậy:

$$(5)\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\le1+\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{ab}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\le\frac{a^2+b^2+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}\le\frac{(a^2+1)+(b^2+1)}{2}\qquad(6)$$

Theo AM-GM thì (6) hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ (5) đúng với mọi a,b.

Từ (1) và (5): với mọi a,b,α ta có: $(\sin\alpha+a\cos\alpha)(\sin\alpha+b\cos\alpha)\le1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Đẳng thức xảy ra khi ở (1) và (6) dấu bằng đồng thời xảy ra

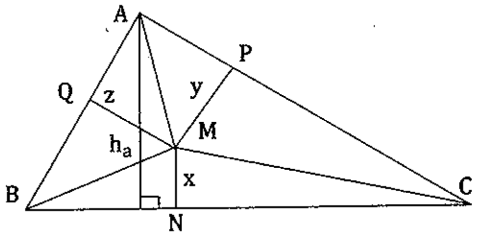
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2\\ \dfrac{a+b}{\sin2\alpha}=\dfrac{ab-1}{\cos2\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=|b|\\ \tan\alpha=\dfrac{a+b}{ab-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|=|b|\\ \alpha=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{a+b}{ab-1}+k\dfrac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$$

4

CMR với mọi ΔABC ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$ với x,y,z là khoảng cách từ điểm M bất kì nằm bên trong ΔABC tới 3 cạnh AB, BC, CA của tam giác.

Lời giải

Ta có:



$$S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCA}$$

$$\Leftrightarrow\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}+\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{MCA}}{S_{ABC}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{z}{h_c}+\frac{y}{h_b}+\frac{x}{h_a}=1$$

$$\Rightarrow h_a+h_b+h_c=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{z}{h_c}+\frac{y}{h_b}+\frac{x}{h_a}\right)$$

Theo Bunhiacốpxki thì:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{h_a}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h_a}}+\sqrt{h_b}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{h_b}}+\sqrt{h_c}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{h_c}}\le\sqrt{(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h_a}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{h_b}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{h_c}}\right)}=\sqrt{h_a+h_b+h_c}$$

mà $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C\Rightarrow h_a=b\sin C,\ h_b=c\sin A,\ h_c=a\sin B$

$$\Rightarrow\sqrt{h_a+h_b+h_c}=\sqrt{(a\sin B+b\sin C+c\sin A)}=\sqrt{\frac{ab}{2R}+\frac{bc}{2R}+\frac{ca}{2R}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{ab}{2R}+\frac{bc}{2R}+\frac{ca}{2R}}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}\Rightarrow\text{Đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b=c\\ x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều và M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Qua các Ví dụ kinh điển trên đã giúp cho chúng ta có cái nhìn về Bất đẳng thức lượng giác. Nhìn chung, chúng ta có thể đưa một bất đẳng thức dạng lượng giác về đại số và ngược lại. Các kĩ thuật được áp dụng trong các bất đại thức đại số cũng được áp dụng tương tự như trong lượng giác. Trong tương lai gần, việc xuất hiện các đề thi có yếu tố lượng giác là hoàn toàn rất có thể. Vì chúng ta đang cần những kiến thức đơn giản nhưng lại có những ứng dụng rộng rãi. Bây giờ, ta sẽ nhắc lại một số công thức lượng giác cần nắm:

2) Các công thức:

a) Đẳng thức:

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

2. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

3. $a=b\cos C+c\cos B$

$b=c\cos A+a\cos C$

$c=a\cos B+b\cos A$

4. $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C=pr$

$=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$

$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

5. $m_a^{\,2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$

$m_b^{\,2}=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}$

$m_c^{\,2}=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$

6. $l_a^{\,2}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c};\ l_b^{\,2}=\frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}$

$l_c^{\,2}=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$

7. $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=$

$(p-c)\tan\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

8. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$

$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$

9. $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

$\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$

$\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

10. $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

11. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

12. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$

$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

13. $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$

$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

14. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{R}$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$	$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

15. $\sin(2k+1)A+\sin(2k+1)B+\sin(2k+1)C=(-1)^k 4\cos(2k+1)\frac{A}{2}\cos(2k+1)\frac{B}{2}\cos(2k+1)\frac{C}{2}$

$\sin 2kA+\sin 2kB+\sin 2kC=(-1)^{k+1}4\sin kA\sin kB\sin kC$

$\cos(2k+1)A+\cos(2k+1)B+\cos(2k+1)C=1+(-1)^k 4\sin(2k+1)\frac{A}{2}\sin(2k+1)\frac{B}{2}\sin(2k+1)\frac{C}{2}$

$\cos 2kA+\cos 2kB+\cos 2kC=-1+(-1)^k 4\cos kA\cos kB\cos kC$

$\tan kA+\tan kB+\tan kC=\tan kA\tan kB\tan kC$

$\cot kA\cot kB+\cot kB\cot kC+\cot kC\cot kA=1$

16. $\tan(2k+1)\frac{A}{2}\tan(2k+1)\frac{B}{2}+\tan(2k+1)\frac{B}{2}\tan\tan(2k+1)\frac{A}{2}(2k+1)\frac{C}{2}+\tan(2k+1)\frac{C}{2}\tan(2k+1)\frac{A}{2}=1$

$\cot(2k+1)\frac{A}{2}+\cot(2k+1)\frac{B}{2}+\cot(2k+1)\frac{C}{2}=\cot(2k+1)\frac{A}{2}\cot(2k+1)\frac{B}{2}\cot(2k+1)\frac{C}{2}$

$\cos^2 kA+\cos^2 kB+\cos^2 kC=1+(-1)^k 2\cos kA\cos kB\cos kC$

$\sin^2 kA+\sin^2 kB+\sin^2 kC=2+(-1)^{k+1}2\cos kA\cos kB\cos kC$

b) Bất đẳng thức:

1. $\lvert a-b\rvert<c<a+b$ $\lvert b-c\rvert<a<b+c$ $\lvert c-a\rvert<b<c+a$ **2.** $a\le b\Leftrightarrow A\le B$ $b\le c\Leftrightarrow B\le C$ $c\le a\Leftrightarrow C\le A$ **3.** $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$ $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ **4.** $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$ **5.** $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$ $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\ge 9$ $\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C\ge 1$	6. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$; $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 1$ $\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\ge 9$ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$ 7. $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ $\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$; $\tan A\tan B\tan C\ge 3\sqrt{3}$ $\cot A\cot B\cot C\le\frac{1}{3\sqrt{3}}$ 8. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$; $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$ 9. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\frac{3}{2}$; $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 10. $\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\ge 2\sqrt{3}$ $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 2\sqrt{3}$

Chứng minh rằng $\forall x,y,z\in R^{+}$ và ΔABC bất kì ta có:

$$\frac{\cos A}{x}+\frac{\cos B}{y}+\frac{\cos C}{z}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$x^2-2x\left(y\cos C+z\cos B\right)^2-\left(y^2+z^2-2yz\cos A\right)\ge 0$$

Coi đây như là tam thức bậc hai theo biến x:

$$\Delta'=\left(y\cos C+z\cos B\right)^2-\left(y^2+z^2-2yz\cos A\right)$$
$$=-\left(y\cos C-z\cos B\right)^2\le 0$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y\sin C=z\sin B\\ x=y\cos C+z\cos B\end{cases}\Leftrightarrow x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$$

Cho ΔABC bất kì. Chứng minh rằng: $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

Lời giải

Đặt $k=\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\cos(A+B)$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A+B}{2}-2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+k-1=0$$

Do đó $\cos\frac{A+B}{2}$ là nghiệm của phương trình:

$$2x^2-2\cos\frac{A-B}{2}x+k-1=0$$

Xét $\Delta'=\cos^2\frac{A+B}{2}-2(k-1)$. Để tồn tại nghiệm thì:

$$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 2(k-1)\le\cos^2\frac{A-B}{2}\le 1\Rightarrow k\le\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh

Bình luận: Qua 2 VD trên chúng ta đã thấy được sự ứng dụng rộng rãi của tam thức bậc 2 trong việc chứng minh bài toán bất đẳng thức. Khi mà việc áp dụng các Bất đẳng thức cổ điển là quá khó khăn thì việc sử dụng các kiến thức rất "làng quê" kia lại tỏ ra khá công dụng. Điều hấp dẫn nhất của bất đẳng thức đó là những bài toán rất phức tạp , lại được giải bằng những công cụ hết sức sơ cấp. Việc đi tìm kiếm một **Lời giải** sơ cấp cho các Bất đẳng thức hiện đại là một công việc đam mê rất thú vị Đôi lúc nên tìm cách vượt qua giới hạn của chính mình để thưởng thức niềm vui chiến thắng.

Ta thử xem xét kĩ năng biến đổi tương đương trong việc chứng minh Bất đẳng thức lượng giác , đây cũng là phương pháp hay sử dụng nhất trong việc chứng minh các bài toán liên quan đến yếu tố lượng giác.

8.

Cho $\alpha,\beta,\gamma\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ là ba góc thỏa $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$. CMR:

$$\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha}{3}\right)^2\leq 1-2\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma$$

Lời giải

Ta có:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\tan^2\alpha}+\frac{1}{1+\tan^2\beta}+\frac{1}{1+\tan^2\gamma}=2$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha\tan^2\beta+\tan^2\beta\tan^2\gamma+\tan^2\gamma\tan^2\alpha=1-2\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha}{3}\right)^2\leq \tan^2\alpha\tan^2\beta+\tan^2\beta\tan^2\gamma=\tan^2\gamma\tan^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow (\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma)^2+(\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha)^2+(\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta)^2\geq 0$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\tan\alpha\tan\beta=\tan\beta\tan\gamma\\ \tan\beta\tan\gamma=\tan\gamma\tan\alpha\\ \tan\gamma\tan\alpha=\tan\alpha\tan\beta\end{cases} \Leftrightarrow \tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma$

9.

Chứng minh rằng trong ΔABC bất kì ta có:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

Lời giải

Ta có:

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Đặt $x=\cot\frac{A}{2}$; $y=\cot\frac{B}{2}$; $z=\cot\frac{C}{2}$ thì $\begin{cases}x,y,z>0\\ x+y+z=xyz\end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương với:

$$x+y+z\geq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+y+z\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cot A=\cot B=\cot C \Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

10.

Cho ΔABC không vuông chứng minh rằng:

$$3\tan^2A\tan^2B\tan^2C-5(\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C)\leq 9+\tan^2A\tan^2B+\tan^2B\tan^2C+\tan^2C\tan$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$4\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C-4(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C)-8\le(1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)(1+\tan^2 C)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 A}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 B}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 C}-1\right)-4\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}-3\right)-8\le\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}-\left(\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 B\cos^2 C}+\frac{1}{\cos^2 C\cos^2 A}\right)\le\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2A+\cos 2B)+4\cos^2 C+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B)\cos(A-B)+4\cos^2 C+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C-4\cos C\cos(A-B)+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos C-\cos(A-B)^2+\sin^2(A-B)\ge 0$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

11

Cho các góc nhọn a và b thỏa $\sin^2 a+\cos^2 b<1$. CMR: $\sin^2 a+\sin^2 b<\sin^2(a+b)$

Lời giải

Ta có: $\sin^2 a+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=1$

Nên từ giả điều kiện $\sin^2 a+\cos^2 b<1$ suy ra:

$$b<\frac{\pi}{2}-a, 0<a+b<\frac{\pi}{2}$$

Mặt khác ta có:

$$\sin^2(a+b)=\sin^2 a\cos^2 b+\sin^2 b\cos^2 a+2\sin a\sin b\cos a\cos b$$

Nên thay thế $\cos^2 b=1-\sin^2 b$ vào thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2\sin^2 a\sin^2 b<2\sin a\sin b\cos a\cos b$$

$$\Leftrightarrow \sin a\sin b<\cos a\cos b$$

$$\Leftrightarrow 0<\cos(a+b)$$

Bất đẳng thức sau cũng hiển nhiên đúng do $0<a+b<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ đpcm

Ta xét tiếp một Bất đẳng thức rất nổi tiếng sau của Flingser:

12

Chứng minh rằng với mọi ΔABC bất kì ta có:

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2(ab+bc+ac)\ge 4\sqrt{3}S+a^2+b^2+c^2\quad (1)$$

Ta có:

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$
$$\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$
$$\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \geq 4\sqrt{3}S + 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \cot A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \cot B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \cot C\right) \geq \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

3) Các ví dụ nâng cao:

13

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$\frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 \geq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \geq \frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2$$

Lời giải

Theo AM-GM ta có:

$$\frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \frac{ab + bc + ac}{2}$$

Do $S = pr \Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{6}$

Lại có:

$$\frac{ab + bc + ac}{2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 \geq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ac}}{a+c}$$

$\Rightarrow$ vế trái được chứng minh xong.

Ta có:

$$a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$$
$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow a + b + c \leq 3R\sqrt{3}$$

Theo AM-GM ta có:

$$S^2 = p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq p\frac{abc}{8} = \frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(a+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \leq \frac{8}{3}.\frac{p\frac{abc}{8}}{\left(\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{9}{2}.\frac{abc}{a+b+c}$$

Một lần nữa theo AM-GM ta có:

$$\frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} \le \frac{9abc}{3.\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \le \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a}$$

Vế phải được chứng minh xong suy ra bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

14

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có: $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{36}{35}(p^2+\frac{abc}{p})$ (1)

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức đã cho ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 35(a^2+b^2+c^2) \ge 9(a+b+c)^2 + \frac{72abc}{a+b+c}$$

Theo BCS thì:

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Rightarrow 9(a+b+c)^2 \le 27(a^2+b^2+c^2)$$

Lại có $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ và $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \sqrt[3]{(abc)^2}$ suy ra

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 9abc$$

$$\Leftrightarrow 8(a^2+b^2+c^2) \ge \frac{72abc}{a+b+c} \quad (2)$$

(1)+(2) suy ra:

$$27(a^2+b^2+c^2) + 8(a^2+b^2+c^2) \ge 9(a^2+b^2+c^2) + \frac{72abc}{a+b+c}$$

Suy ra điều phải chứng minh

15

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \quad (1)$$

Mà $\frac{\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)}{\sin A\sin B\sin C}$

Lại theo AM-GM:

$$\begin{cases} \sin A+\sin B \ge 2\sqrt{\sin A\sin B} \\ \sin B+\sin C \ge 2\sqrt{\sin B\sin C} \\ \sin C+\sin A \ge 2\sqrt{\sin C\sin A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)\ge 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\frac{(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)}{8\sin A\sin B\sin C}\ge 8 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\ge 3\sqrt[3]{8}=6$$

16

Cho tam giác ABC. CMR:

$$\left(\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}-c\right)\left(\frac{b}{\cos b}+\frac{c}{\cos C}-a\right)\left(\frac{c}{\cos C}+\frac{a}{\cos A}-b\right)\ge 27abc$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{\sin C}{\cos A\cos B}-\sin C\right)\left(\frac{\sin A}{\cos B\cos C}-\sin A\right)\left(\frac{\sin B}{\cos C\cos A}-\sin B\right)\ge 27\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}.\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}.\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\ge 27$$

Đặt x = tanA/2, y = tanB/2, z = tanC/2, khi đó ta có

$\cos A=\frac{1-x^2}{1+x^2},\cos B=\frac{1-y^2}{1+y^2},\cos C=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ và $\tan A=\frac{2x}{1-x^2},\tan B=\frac{2y}{1-y^2},\tan C=\frac{2z}{1-z^2}$

Khi đó: $\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=\frac{2(x^2+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}$ mặt khác: $x^2+y^2\ge 2xy$ nên:

$$\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\ge\frac{2x}{1-x^2}.\frac{2y}{1-y^2}=\tan A\tan B \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\ge\tan B\tan C$$

$$\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\ge\tan C\tan A$$

Nhân vế theo vế (1) (2) và (3) ta được đpcm.

17

CMR trong mọi tam giác ABC ta có $l_a+l_b+l_c\le p\sqrt{3}$

Lời giải:

Ta có

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} \quad (1)$$

Lại có $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\le 1$ nên từ (1) suy ra $l_a\le\sqrt{p(p-a)}$ (2)

Tương tự ta có $l_b\le\sqrt{p(p-b)}$ (3)

$l_c\le\sqrt{p(p-c)}$ (4)

Từ (2), (3)và (4) suy ra

$$l_a+l_b+l_c\le\sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}) \quad (5)$$

dấu "=" trong (5) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

áp dụng BCS ta có

$$(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2 \le 3(3p-a-b-c)$$
$$\Rightarrow \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3p} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra dpcm

Đối với một số bài , ta cần kết hợp cả việc khảo sát hàm số để đi đến Lời giải.

18

CMR trong mọi tam giác ABC đều có

$$1+\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B \le \frac{13}{12}(\cos A+\cos B+\cos C)+\cos A\cos B\cos C$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$1-2\cos A\cos B+2(\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B)+1 \ge \frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2(\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B)+1 \ge \frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A+\cos B+\cos C)^2+1 \le \frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C} \le \frac{13}{6}$$

Đặt $t=\cos A+\cos B+\cos C$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+\frac{1}{t}$ với $t\in(1;\frac{3}{2}]$

Ta có $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}>0 \forall t\in(1;\frac{3}{2}] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó

$\Rightarrow f(x)\le f(\frac{3}{2}) \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

19

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 3.MR:

$$3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)+8R\sin A\sin B\sin C \ge \frac{13}{4R^2}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$3.4R^2\sin^2 A+3.4R^2\sin^2 B+3.4R^2\sin^2 C+4(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)\ge 13$$
$$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2+4abc\ge 13$$

Do a,b,c có vai trò như nhau nên ta giả sử $a\le b\le c$

Theo giả thiết $a+b+c=3 \Rightarrow a+b>c \Rightarrow 3-c>c \Rightarrow 1\le c\le\frac{3}{2}$

Thực hiện biến đổi:

$$\begin{aligned}T&=3a^2+3b^2+3c^2+4abc\\&=3(a^2+b^2)+3c^2+4abc\\&=3[(a+b)^2-2ab]+3c^2+4abc\\&=3(3-c)^2+3c^2+4abc-6ab\\&=3(3-c)^2+3c^2-2ab(3-2c)\end{aligned}$$

Vì $c<\frac{3}{2} \Rightarrow 2c-3<0 \Rightarrow 3-2c>0$

Và $ab \le (\frac{a+b}{2})^2 = (\frac{3-c}{2})^2 \Rightarrow -2ab(\frac{3-c}{2})^2$

Do đó:

$$T \ge 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2(\frac{3-c}{2})^2(3-2c)$$
$$= c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c)$$

Xét $f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$ với $1 \le c < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 3c \ge 0 \forall c \in [1;\frac{3}{2}) \Rightarrow f(c)$ đồng biến trên khoảng đó

$\Rightarrow f(c) \ge f(1) = 13 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

20

Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng: $(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B(1+\cos^2 C) \ge \frac{125}{16}$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $C = \min\{A, B, C\}$.Ta có:

$$(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B) = (1+\frac{1+\cos 2A}{2})(1+\frac{1+\cos 2B}{2})$$

Xét:

$$P = 4(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B) = (3+\cos 2A)(3+\cos 2B)$$
$$\Rightarrow P = 9 + 3(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2A \cos 2B$$
$$= 9 + 6\cos(A+B)\cos(A-B) + \frac{1}{2}[\cos(2A+2B) + \cos(2A-2B)]$$
$$= 9 - 6\cos C\cos(A-B) + \frac{1}{2}[2\cos^2(A+B) + 2\cos^2(A+B) - 2]$$
$$= 9 - 6\cos C\cos(A-B) + \cos^2 C + \cos^2(A+B) - 1$$

Do:

$$|\cos(A-B)| \le 1$$
$$\Rightarrow P \ge 9 - 6\cos C + \cos^2 C = (3-\cos C)^2$$

Mà cosC > 0

$$\Rightarrow P(1+\cos^2 C) \ge (3-\cos C)^2(1+\cos^2 C)$$

Mặt khác ta có: $0 < C \le 60^0 \Rightarrow \cos C \ge \frac{1}{2}$

Xét $f(x) = (3-x)^2(1+x^2)$ với $x \in \left[\frac{1}{2};1\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-3)(x-1)(2x-1) \ge 0 \forall x \in [\frac{1}{2};1)$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó $\Rightarrow f(x) \ge f(\frac{1}{2}) = \frac{125}{16} \Rightarrow (1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B)(1+\cos^2 C) \ge \frac{125}{16} \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

4) Bài toán liên quan đến tam giác:

Đây là loại bài toán xác định dạng của tam giác ABC khi biết mối liên hệ giữa các yếu tam giác. Dạng bài này đòi hỏi khả năng xử lý bất đẳng thức khéo léo.

21

CMR ΔABC đều khi thỏa: $m_a+m_b+m_c=\frac{9}{2}R$

Lời giải

Theo Bunhiacốpxki ta có: $(m_a+m_b+m_c)^2\le 3(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2)$

$$\Leftrightarrow (m_a+m_b+m_c)^2\le\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow (m_a+m_b+m_c)^2\le 9R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$$

mà $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}\Rightarrow(m_a+m_b+m_c)^2\le 9R^2.\frac{9}{4}=\frac{81}{4}R^2$

$$\Rightarrow m_a+m_b+m_c=\frac{9}{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều $\Rightarrow$Đpcm.

22

CMR nếu $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{ab}}{4c}$ thì ΔABC đều

Lời giải

Ta có:

$$\frac{\sqrt{ab}}{4c}\le\frac{a+b}{8c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R.8\sin C}=\frac{2R.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2R.8.2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{8\sin\frac{C}{2}}\le\frac{1}{8\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\le\frac{1}{8\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)-1\le 0$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh

23

CMR ΔABC đều khi nó thỏa: $2(h_a+h_b+h_c)=(a+b+c)\sqrt{3}$

Lời giải

Theo đề bài ta có: $2.2p\left(\frac{r}{a}+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}\right)=(a+b+c)\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{r}{a}+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta lại có: $\dfrac{1}{\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cot\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cot\dfrac{B}{2}}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}}\le\dfrac{1}{4}\left(\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)$

$$\dfrac{1}{\cot\dfrac{C}{2}+\cot\dfrac{A}{2}}\le\dfrac{1}{4}\left(\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\dfrac{1}{\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}}+\dfrac{1}{\cot\dfrac{C}{2}+\cot\dfrac{A}{2}}\le\dfrac{1}{2}\left(\tan\dfrac{A}{2}+t\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\dfrac{1}{2}\left(\tan\dfrac{A}{2}+t\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)\Leftrightarrow\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\ge\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

24

CMR ΔABC cân khi thỏa $h_a=\sqrt{bc}\cos\dfrac{A}{2}$

Lời giải

Trong mọi tam giác ta luôn có: $h_a\le l_a=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

Mà $b+c\ge 2\sqrt{bc}\Rightarrow\dfrac{2bc}{b+c}\le\dfrac{bc}{\sqrt{bc}}=\sqrt{bc}$

$$\Rightarrow\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}\le\sqrt{bc}\cos\dfrac{A}{2}\Rightarrow h_a\le\sqrt{bc}\cos\dfrac{A}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC cân $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

25

CMR ΔABC cân khi thỏa $2\cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{9}{4}$

Lời giải

Ta có:

$$2\cos A+\cos B+\cos C=2\left(1-2\sin^2\dfrac{A}{2}\right)+2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$$

$$=-4\sin^2\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=-\left(2\sin\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{B-C}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}$$

$$=-\left(2\sin\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{B-C}{2}+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $B=C$ $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Kĩ thuật đổi biến trong chứng minh bất đẳng thức

Đây là một kĩ thuật khá quan trọng trong việc giải toán bất đẳng thức. Mục đích của việc đổi biến sẽ giúp chúng ta nhìn nhận bài toán một cách tổng quát hơn và dễ dàng liên hệ các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh hơn Ta sẽ tìm hiểu kĩ thuật này thông qua một số vị dụ sau:

1

Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=2$ .Chứng minh rằng: $a^5+b^5 \geq 2$

Lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$.

Do vậy ta đặt: $a=1+x$. Từ giả thiết suy ra: $b=1-x$, $x \in R$

Ta có: $B=a^5+b^5=(1+x)^5+(1-x)^5=10x^4+20x^2+2 \geq 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0$, hay a = b = 1. Vậy B $\geq$ 2

2

Cho $a+b=3, a \leq 1$. Chứng minh rằng: $C=b^3-a^3-6b^2-a^2+9b \geq 0$

Lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra khi a = 1; b = 2.

Do vậy ta đặt $a=1-x$, với $x \geq 0$. Từ giả thiết suy ra $b=2+x$.

Ta có: $C=b^3-a^3-6b^2-a^2+9b=(2+x)^3-(1-x)^3-6(2+x)^2-(1-x)^2+9(2+x)$

$=x^3-2x^2+x=x(x-1)^2 \geq 0$ (vì $x \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ tức $a=1, b=2$ hoặc $a=0, b=3$. Vậy $C \geq 0$

3

Cho $a, b, c \in [1;3]$ và $a+b+c=6$ .Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2 \leq 14$ b) $a^3+b^3+c^3 \leq 36$

Lời giải

Đặt $a=x+1$; $b=y+1$; $c=z+1$. Khi đó $x,y,z \in [0;\ 2]$ và $x+y+z=3$ Giả sử $x=\max\{x;\ y;\ z\}$ suy ra:

$x+y+z=3 \leq 3x \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$

nên: $x^2+y^2+z^2 \leq x^2+(y+z)^2=x^2+(3-x)^2=5+2(x-1)(x-2) \leq 5$

Tức là: $x^2+y^2+z^2 \leq 5$ (*). Tương tự ta chứng minh được $x^3+y^3+z^3 \leq 9$ (**)

a) Ta có: $a^2+b^2+c^2=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3$ (1)

Thay (*) vào (1) ta có: $a^2+b^2+c^2 \leq 14$ là điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$$a^3+b^3+c^3=(x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3=x^3+y^3+z^3+3(x^2+y^2+z^2)+3(x+y+z)+9 \quad (2)$$

Thay (*) và (**) vào (2) ta có: $a^3+b^3+c^3 \leq 36$ là điều phải chứng minh

4

Cho các số thực a, b với $a+b \neq 0$. Chứng minh: $a^2+b^2+\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 \geq 2$.

Lời giải

Đặt $c = -\dfrac{1+ab}{a+b}$. Ta có: $ab + bc + ca = -1$

Và lúc này BĐT cần chứng minh trở thành:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq -2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

5

Cho x, y là 2 số thực không âm. Chứng minh rằng: $\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} \geq 3$

Lời giải

Để ý rằng bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2} \geq 5$

Bây giờ, dấu hiệu ẩn phụ khá rõ ràng. Đặt $t = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2}$. Theo AM-GM thì ta thấy $t \geq 4$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $t + \dfrac{4}{t} \geq 5 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)(t-4)}{t} \geq 0$ (điều này đúng)

6

Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $ab = cd = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(c+d) + 4 \geq 2(a+b+c+d)$$

Lời giải

Đặt $a+b = x, c+d = y$ ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$xy + 4 \geq 2(x+y)$$

Bằng biến đổi tương đương, điều này tương đương với $(x-2)(y-2) \geq 0$. Điều này đúng vì

$$x = a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2; y = c+d \geq 2\sqrt{cd} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$.

Cho $x, y, z \geq 2$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$

Lời giải

Ta sẽ đặt ẩn phụ để đưa biểu thức cần chứng minh về dạng đơn giản hơn.

Đặt $x = a+2; y = b+2; z = c+2$, $a, b, c > 0$.

Bài toán được quy về chứng minh $abc \leq 1$. Trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = 1$$

Đến đây đặt tiếp $m = \dfrac{a}{a+2}; n = \dfrac{b}{b+2}; p = \dfrac{c}{c+2}$ thì ta có $m+n+p = 1$.

Chú ý: $\dfrac{1}{m} = \dfrac{a+2}{a} = 1 + \dfrac{2}{a} \Rightarrow \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{m} - 1 = \dfrac{n+p}{m} \Rightarrow a = \dfrac{2m}{n+p}$

Tiến hành tương tự, ta có $b = \dfrac{2n}{p+m}; c = \dfrac{2p}{m+n}$

Do đó bất đẳng thức trở thành $\frac{2m}{n+p}.\frac{2n}{p+m}.\frac{2p}{m+n} \le 1$

Điều này tương đương với bất đẳng thức đúng theo AM-GM:

$$(m+n)(n+p)(p+m) \ge 8mnp$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 3$

Bình luận: Qua bài toán trên chúng ta học được một kiểu đổi biến khi gặp điều kiện $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$

Khi đó tồn tại các số dương m,n,p sao cho: $a=\frac{2m}{n+p}; b=\frac{2n}{p+m}; c=\frac{2p}{m+n}$.

Và những bài tập kiểu như vậy không hề khó gặp trong các bài toán về bất đẳng thức.

8

Cho các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le 3$$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại như sau:

$$abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8=12+ab+bc+ca+4(a+b+c);$$
$$(a+2)(b+2)(c+2)=(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$$

Điều này tương đương với: $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$

Tồn tại các số dương m,n,p sao cho:

$$a=\frac{2m}{n+p}; b=\frac{2n}{p+m}; c=\frac{2p}{m+n}$$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$2\sum\sqrt{\frac{m}{m+p}.\frac{n}{n+p}} \le 3$$

Ta gặp lại cấu hình quen thuộc $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ nên gợi ý cho chúng ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM để đánh giá:

$$\begin{cases} 2\sqrt{\frac{m}{m+p}.\frac{n}{n+p}} \le \frac{m}{m+p}+\frac{n}{n+p} \\ 2\sqrt{\frac{n}{m+n}.\frac{p}{m+n}} \le \frac{n}{m+n}+\frac{p}{m+n} \\ 2\sqrt{\frac{p}{n+p}.\frac{m}{m+n}} \le \frac{p}{n+p}+\frac{p}{m+n} \end{cases}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có: $2\sum\sqrt{\frac{m}{m+p}.\frac{n}{n+p}} \le 3$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

9

Chứng minh rằng với $x,y,z>0$ và thỏa mãn: $xy+yz+zx+xyz=4$ thì ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$x+y+z \ge xy+yz+zx \quad \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Lời giải

Tồn tại các số thực dương a,b,c sao cho: $x=\frac{2a}{b+c};y=\frac{2b}{c+a};z=\frac{2c}{a+b}$

Bất đẳng thức cần chứng minh bây giờ là:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}$$

Bất đẳng thức này tương đương với:

$$a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)\ge 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur, và ta có điều cần chứng minh.

Bây giờ ta xét tiếp một số cách đổi biến tiếp. Tương tự những gì vừa trình bày. Nếu như điều kiện của bài toán là $xyz=x+y+z+2$ hoặc $xy+yz+zx+2xyz=1$ thì thế nào ? Ta có cách đổi biến nào không ? Câu trả lời là có !

Vì điều kiện , chúng tôi chỉ xin trình bày ngắn gọn, các bên nên tự tìm cách chứng minh lại để hiểu rỏ hơn. Nếu như ta có $xyz=x+y+z+2$ thì tồn tại các số dương a,b,c sao cho

$$x=\frac{b+c}{a};y=\frac{c+a}{b};z=\frac{a+b}{c}$$. (Hãy tự kiểm tra khẳng định này)

Vậy nếu ta có: $xy+yz+zx+2xyz=1$ thì tồn tại các số dương a,b,c sao cho:

$$x=\frac{a}{b+c};y=\frac{b}{c+a};z=\frac{c}{a+b}$$

Trong một lớp bất đẳng thức, thì có lúc ta sẽ gặp điều kiện cho là $x^2+y^2+z^2=xyz+4$ thì tồn tại các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$ và

$$x=a+\frac{1}{a};y=b+\frac{1}{b};z=c+\frac{1}{c}$$

Ngoài ra, còn có một trường hợp nữa chúng ta cũng hay gặp đó là với $x^2+y^2+z^2+xyz=4$ thì ta có thể đặt

$$x=2\cos A;y=2\cos B;z=2\cos C$$

10 Cho $x,y,z>0$ thỏa $xy+yz+zx+2xyz=1$ Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 4(x+y+z)$

Lời giải

Tồn tại các số dương a,b,c sao cho $x=\frac{a}{b+c};y=\frac{b}{c+a};z=\frac{c}{a+b}$.

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Theo bất đẳng thức BCS thì ta có:

$$\frac{4}{b+c}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{4a}{b+c}\le\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

Tương tự: $\begin{cases}\frac{4}{c+a}\le\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{4b}{c+a}\le\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\\ \frac{4}{a+b}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{4c}{a+b}\le\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\end{cases}$

Cộng lại ta có: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$

11

Chứng minh rằng nếu $x,y,z>0$ và thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$ thì ta có:

$$xyz(x-1)(y-1)(z-1)\le 8$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{b+c}{a};y=\frac{c+a}{b};z=\frac{a+b}{c}$

Bất đẳng thức đã cho trở thành: $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le 8a^2b^2c^2$

Rất không may đây là một bất đẳng thức khá chặt, chúng ta có thể giải nó bằng phép dồn biến

Ở đây xin trình bày một cách tiếp cận khác dùng hình học.

Đương nhiên, ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Nếu như R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác thì ta có một đẳng thức quen thuộc sau:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)R^2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành: $(a+b+c)R^2\ge\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$

Chúng ta đã biết trong sách giáo khoa toán 10 NC có đề cập một bài tập chứng minh

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)\ge 0$$

Vậy nên ta đưa bài toán về chứng minh:

$$8(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Theo AM-GM thì ta có:

$$\begin{cases}9(a+b)(b+c)(c+a)\le\frac{8}{3}(a+b+c)^3\\ a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}\end{cases}$$

Từ 2 bất đẳng thức này, ta có điều phải chứng minh.

12

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}+\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{c+a}{b}\right)^3}}+\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{a+b}{c}\right)^3}}\ge 1$$

Để đơn giản, ta đặt $x=\frac{b+c}{a};y=\frac{c+a}{b};z=\frac{a+b}{c}$ Ta viết bất đẳng thức trở thành:

$$\sum\sqrt{\frac{1}{1+x^3}}\ge 1$$

Bây giờ, khá tự nhiên khi ta có hằng đẳng thức: $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$ gợi ý ngay cho ta đánh giá bằng AM-GM (vì là tích của 2 số)

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM,ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}}\geq\frac{2}{x^2+2}$$

Vậy ta cần chứng minh: $\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{y^2+2}+\frac{1}{z^2+2}\geq\frac{1}{2}$

Hay tương đương với: $\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2}+\frac{1}{\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+2}+\frac{1}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2}\geq\frac{1}{2}$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có:

$$\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2}=\frac{a^2}{(b+c)^2+2a^2}\geq\frac{a^2}{2(b^2+c^2)+2a^2}$$

Đánh giá tương tự 2 số hạng còn lại rồi cộng lại ta có:

$$\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2}+\frac{1}{\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+2}+\frac{1}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2}\geq\frac{1}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

13

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ Chứng minh rằng:

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{2ab+c^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{2bc+a^2}}+\frac{|c-a|}{\sqrt{2ca+b^2}}\geq 2$$

Lời giải

Điều khó khăn ở bài toán này đó là dấu đẳng thức không xảy ra tại $a=b=c$. Như vậy các đánh giá của chúng ta khá là khó khăn.

Trước hết, ta phát hiện được: $2ab+c^2=(b-c)^2+(c-a)^2$. Chính vì thế, nếu đặt:

$$x=(a-b)^2;y=(b-c)^2;z=(c-a)^2$$

thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\geq 2$$

Bài toán này khá là quen thuộc với chúng ta.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{x(y+z)}\leq\frac{x+y+z}{2}$ Suy ra: $1\geq\frac{2\sqrt{x(y+z)}}{x+y+z}$ Nhân cả 2 vế vớ

$\sqrt{\frac{x}{y+z}}$, ta có được: $\sqrt{\frac{x}{y+z}}\geq\frac{2x}{x+y+z}$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}}\geq\frac{2y}{x+y+z}$$

$$\sqrt{\frac{z}{x+y}}\geq\frac{2z}{x+y+z}$$

Cộng lại ta có ngay đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$.

14

(IMO 2008) Cho x,y,z là các số thực khác 1 thỏa mãn $xyz=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{x}{x-1}$; tương tự với b, c.

Ta sẽ có

$$abc = (a+1)(b+1)(c+1) \Rightarrow ab+bc+ca+a+b+c+1=0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca+a+b+c+1) = (a+b+c+1)^2+1 \geq 1$$

Lời giải ngắn gọn cho một bài thi quốc tế đúng không ? Những gì đơn giản luôn mang đến cho chúng ta một sức mạnh khá là bất ngờ. Các bạn nên tự luyện tập với một số bất đẳng thức sau được đề xuất bởi anh Đào Hải Long (HCV toán quốc tế).

Bài toán: Chứng minh rằng với các số thực phân biệt x, y, z thì:

$$1)\ \frac{x^2}{(y-z)^2}+\frac{y^2}{(z-x)^2}+\frac{z^2}{(x-y)^2} \geq 2$$

$$2)\ \frac{xy}{(x-y)^2}+\frac{yz}{(y-z)^2}+\frac{zx}{(z-x)^2} \geq \frac{1}{4}$$

$$3)\ \frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{9}{2(x^2+y^2+z^2)}$$

$$4)\ \frac{x^3-y^3}{(x-y)^3}+\frac{y^3-z^3}{(y-z)^3}+\frac{z^3-x^3}{(z-x)^3} \geq \frac{9}{4}$$

15

Cho a, b, c là 3 số dương Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Lời giải

Bài toán này đã được đề cập ở phần trước, nhưng ở đây ta sẽ tiếp cận theo một hướng khác:

Đặt $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$; $y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$; $z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$.

Ta thấy x, y, z đều dương và BĐT cần chứng minh trở thành $S = x+y+z \geq 1$.

Do $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+8bc} \Rightarrow \frac{1}{x^2}-1 = \frac{8bc}{a^2}$

Tương tự ta có: $\frac{1}{y^2}-1 = \frac{8ca}{b^2}$; $\frac{1}{z^2}-1 = \frac{8ab}{c^2}$.

Suy ra: $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) = 8^3$ (1)

Mặt khác nếu $S = x+y+z < 1$

thì: $T = \left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) > \left(\frac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{z^2}-1\right)$

– Ta thấy $(S-x)(S-y)(S-z) = (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ (theo (**) ở ví dụ 12) (2)

– Với ba số dương $x+y, y+z, z+x$ ta lại có $(S+x)(S+y)(S+z) \geq 64xyz$ (3)

– Nhân (2) và (3) vế với vế, ta được: $(S^2-x^2)(S^2-y^2)(S^2-z^2) \geq 8^3x^2y^2z^2$

hay: $\left(\frac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{z^2}-1\right)\ge 8^3$

Từ đây suy ra: $T > 8^3$ mâu thuẫn với (1).

Vậy $S = x + y + z \ge 1$, tức bài toán được chứng minh.

16

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}-\frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)}\le\frac{1}{4}$$

Lời giải

Đặt: $x=\frac{1-a}{1+a}; y=\frac{1-b}{1+b}; z=\frac{1-c}{1+c}\Rightarrow -1<x,y,z<1$ và $a=\frac{1-x}{1+x}; b=\frac{1-y}{1+y}; c=\frac{1-z}{1+z}$.

Từ $abc=1\Rightarrow(1-x)(1-y)(1-z)=(1+x)(1+y)(1+z)\Leftrightarrow x+y+z+xyz=0$

Mặt khác: $\frac{4a}{(a+1)^2}=1-x^2; \frac{2}{a+1}=1+x$

Tương tự: $\frac{4b}{(b+1)^2}=1-y^2; \frac{2}{b+1}=1+y$ và $\frac{4c}{(c+1)^2}=1-z^2; \frac{2}{c+1}=1+z$

Nên

$$(*)\Leftrightarrow\frac{4a}{(a+1)^2}+\frac{4b}{(b+1)^2}+\frac{4c}{(c+1)^2}\le 1+2.\frac{2}{(a+1)}.\frac{2}{(b+1)}.\frac{2}{(c+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2+1-y^2+1-z^2\le 1+2(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2(x+y+z+xyz)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 0$$

Đây là bất đẳng thức luôn đúng nên bài toán được chứng minh

17

Cho a, b, c thỏa mãn $a\ge4; b\ge5; 7\ge c\ge6; a^2+b^2+c^2=90$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c$

Lời giải

Đặt $a=x+4; b=y+5; c=z+6, x,y,z\ge0$.

Ta sẽ chứng min $S\ge16$ có nghĩa là $x+y+z\ge1$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2=90\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+8x+10y+12z=13$

Giả sử $x+y+z<1$, lúc này $x^2+y^2+z^2<1$

Ta có:

$$x^2+y^2+z^2+8x+10y+12z$$
$$=(x^2+y^2+z^2)+8(x+y+z)+2(y+z)+2z<1+(8+2+2)(x+y+z)<1+12=13$$

Điều này vô lý vậy điều giả sử là sai. Do đó ta có $S\ge 15+1=16$

Đẳng thức xảy ra khi $a=4, b=5, c=7$.

18

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}$$

Lời giải

Ta nhận thấy sự xuất hiện lại của một số hạng ở cả tử số và mẫu số Lúc này ta làm gì ?
Hãy theo dõi **Lời giải** của chúng tôi:

Viết lại P dưới dạng $P=\dfrac{1}{\dfrac{c}{\sqrt{ab}}+2}+\dfrac{1}{\dfrac{b}{\sqrt{ca}}+2}+\dfrac{1}{\dfrac{a}{\sqrt{bc}}+2}$

Ý tưởng bây giờ khá rõ ràng là đặt ẩn phụ.

Đặt $\dfrac{a}{\sqrt{bc}}=x,\dfrac{b}{\sqrt{ca}}=y,\dfrac{c}{\sqrt{ab}}=z$ Suy ra $xyz=1$.

Viết lại $P=\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2+y}+\dfrac{1}{2+z}$

Ta sẽ chứng minh rằng: $P=\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2+y}+\dfrac{1}{2+z}\le 1$

Khai triển ra, ta được bất đẳng thức tương đương với:

$$(x+2)(y+2)+(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)\le(x+2)(y+2)(z+2)$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 3$$

Theo AM-GM: $xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3$

Vậy giá trị lớn nhất của $P=1$ đạt tại $a=b=c$

Bây giờ ta xét đến đổi biến với điều kiện tích các biến là một số k (nghĩa là $abc=k$) mà thông thường nhất là $abc=1$.

19

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$ .Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

Lời giải

Nhận xét:

a,b,c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$, nên ta đặt:

$$a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x},$$ với *x, y, z* là các số thực dương.

Ta có: $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\le 1\Leftrightarrow\dfrac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz}\le 1$

$$\Leftrightarrow(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz\quad(*)$$

Đặt $x=m+n;\ y=n+p;\ z=p+m$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow(m+n)(n+p)(p+m)\ge 8mnp\quad(**)$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có: $m+n\ge 2\sqrt{mn};\ n+p\ge 2\sqrt{np};\ p+m\ge 2\sqrt{pm}$

20

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1$$

Lời giải

Nếp áp dụng trực tiếp BCS thì ta sẽ bị ngược dấu ngay. Vậy làm sao để vượt qua được điều này.

Ta sẽ thay x,y,z lần lượt bởi $\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y};\dfrac{1}{z}$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{x^2}{x^2+x+1}+\frac{y^2}{y^2+y+1}+\frac{z^2}{z^2+z+1}\ge 1$$

Lúc này, ta sẽ áp dụng BCS: $\dfrac{x^2}{x^2+x+1}+\dfrac{y^2}{y^2+y+1}+\dfrac{z^2}{z^2+z+1}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+x+y+z+3}$

Nhưng rỏ ràng về phải của bất đẳng thức trên không vượt quá 1 được. Bây giờ như đã nói, ta phả của mình hơn nữa. Ta sẽ đổi biến theo một cách khác.

Đó là đặt $x=\dfrac{bc}{a^2};y=\dfrac{ca}{b^2};z=\dfrac{ab}{c^2}$. Bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+a^2c^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+b^2a^2}\ge 1$$

Áp dụng BCS , ta có: $\sum\dfrac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}\ge\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum\left(a^4+a^2bc+b^2c^2\right)}$

Bây giờ, ta chỉ cần chỉ ra rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\sum a^4+abc\sum a+\sum a^2b^2$$

Hiển nhiên bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức quen thuộc sau:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)$$

(đây thực chất là $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$)

21

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$ .Chứng minh

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)}\ge\frac{1}{2}$$

Lời giải

Đặt $a=\dfrac{yz}{x^2};b=\dfrac{zx}{y^2};c=\dfrac{xy}{z^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\sum\dfrac{x^4}{\left(2x^2+yz\right)\left(x^2+yz\right)}\ge\dfrac{1}{2}$

Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có:

$$VT\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\sum\left(2x^2+yz\right)\left(x^2+yz\right)}$$

Bây giờ, ta cần chỉ ra rằng: $2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge\sum\left(2x^2+yz\right)\left(x^2+yz\right)$

Khai triển và rút gọn ta được: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc\left(a+b+c\right)$.

Hiển nhiên bất đẳng thức này đúng.

22

Cho 3 số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$ .Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge 1$$

Lời giải

Tồn tại các số dương x,y,z sao cho: $a=\dfrac{yz}{x^2};b=\dfrac{zx}{y^2};x=\dfrac{xy}{z^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)}\ge 1$$

Theo bất đẳng thức BCS, ta có: $(x^2+yz)^2 \le (x^2+y^2)(x^2+z^2)$. Theo đánh giá này thì ta có:

$$\sum \frac{x^4}{(x^2+yz)^2} \ge \sum \frac{x^4}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} = 1 - \frac{2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}$$

Rỏ ràng bây giờ, ta cần chứng minh:

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \ge (x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy)$$

Bất đẳng thức này được chứng minh bằng ghép đối xứng. Để ý rằng:

$$(x^2+y^2)(x^2+z^2) \ge (x^2+yz)^2$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

23

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}=\frac{c^4}{1+c^4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}$

Lời giải

Đây là bài toán trong kì thi chọn đội tuyển của Hà Tĩnh năm 2014 (vài ngày trước khi cuốn sách này được XB lần đầu). Bài toán này nêu bật lên ứng dụng của phương pháp đổi biến. Hầu như chúng tôi không tìm được một lời giải nào chứng minh trực tiếp cho Bất đẳng thức này. Ban đầu nhìn vào điều kiện là biểu thức có chút gì đó đối xứng đẹp cũng có chút gì đó "lệch" không đối xứng. Cái nhìn đầu tiên, ta sẽ rút ra ngay được:

$$\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}+\frac{1}{c^4+1}=1$$

Như lý thuyết đã trình bày thì bây giờ tồn tại các số dương x,y,z sao cho:

$$a=\sqrt[4]{\frac{y+z}{x}}, b=\sqrt[4]{\frac{z+x}{y}}, c=\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}$$

Với dự đoán $F \ge \sqrt{2}$ nên ta sẽ chứng minh:

$$\sqrt[4]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}\left(\sum \sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}\right) \ge \sqrt{2}.\left(\sum \sqrt[4]{\frac{(x+y)(y+z)}{zx}}\right)$$

Hay là

$$\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}+\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}+\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}} \ge \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y+z}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z+x}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x+y}}\right)$$

Chú ý kết quả: $8(A^4+B^4) \ge (A+B)^4$ ta có: $\begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x}{y+z}} \le \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\frac{(\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z})^4}{8}}} = \frac{\sqrt[4]{8x}}{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}} \\ \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}} \le \frac{\sqrt[4]{x}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y}}+\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\right) \end{cases}$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự, rồi cộng lại, ta được:

$$VT \le \frac{\sqrt[4]{2}}{2}.\left(\sum \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{y}}\right)$$

Hơn nữa, ta lại có: $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{y}} \le \sqrt[4]{\frac{8(z+x)}{y}}$

Suy ra: $VT \le \sqrt[4]{\frac{z+x}{y}}+\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}+\sqrt[4]{\frac{y+z}{x}} = VP$

Như vậy, ta có kết luận: $F_{min}=\sqrt{2} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt[4]{2}$

Một số bài tập tự luyện:

1. Cho x,y,z là các số thực thõa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$.Chứng minh rằng $xyz\le\frac{1}{8}$ và

$$xy+yz+zx\ge\frac{3}{4}$$

2. Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=xyz$ .Chứng minh rằng:

$$xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)+9$$

Hướng dẫn: Đặt $x=a+1,y=b+1,c=z+1$

3. Cho a,b,c là các số thực không âm ,chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+1+2abc\ge 2(ab+bc+ca)$$

Hướng dẫn: Đặt $a=x+1;b=y+1;z=c+1\ (x,y,z\ge -1)$ Ta chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$x^2+y^2+z^2+2xyz\ge 0$$

Ta có tích $(xy)(yz)(zx)=x^2y^2z^2$ nên có ít nhất 1 số không âm, giả sử đó là $xy\ge 0$ .Lúc này:

$$xy(z+1)\ge 0\ ;x^2+y^2\ge 2xy$$

Vậy ta có đpcm.

4. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z)$$

5. Cho $a,b,c>0$ và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{(2-a)(2-b)}{(2+a)(2+b)}}+\sqrt{\frac{(2-b)(2-c)}{(2+b)(2+c)}}+\sqrt{\frac{(2-c)(2-a)}{(2+c)(2+a)}}=1$$

6. Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$, lúc này ta có:

$$xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)\ \text{và}\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$$

Kĩ thuật lượng giác hóa

Thực ra việc chứng minh một bất đẳng thức đại số luôn khó khăn hơn chứng minh một bất đẳng thức dạng lượng giác hay hình học. Vì thế giới bất đẳng thức đại số quá phong phú và không mẫu mực. Chúng ta sẽ tìm hiểu một kĩ năng chuyển từ bất đẳng thức đại số về dạng lượng giác với niềm tin bất đẳng thức lượng giác thực ra dễ chứng minh hơn rất nhiều. Chúng ta theo dõi một số ví dụ và lưu ý bạn đọc hãy nên rút ra những nhận xét cá nhân hữu ích cho bản thân như là những kinh nghiệm giải toán

Bây giờ, xin phép được nêu ra một số phép đổi biến làm cơ sở cho việc giải toán.

+Nếu bài toán cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ thì ta có thể đặt $a=\tan\frac{A}{2};b=\tan\frac{B}{2};c=\tan\frac{C}{2}$ với $A+B+C=\pi$

+Với giả thiết $a+b+c=abc$ thì ta có thể liên hệ ngay cách đặt $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$

+Từ điều kiện $a,b,c\in[-1;1]$ và $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ thì ta có thể đặt $a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C$ hoặc $a=\sin\frac{A}{2};b=\sin\frac{B}{2};c=\sin\frac{C}{2}$

+Đôi lúc bài toán cho điều kiện $a,b,c\in R^+$ và $a^2=b^2+c^2-\alpha bc$, $\alpha\in(0;2)$ thì ta có tồn tại một tam giác ABC có độ dài 3 cạnh a,b,c và $2\cos A=\alpha$

+Với những bài toán xuất hiện biểu thức kiểu như $\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}};\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}};\sqrt{\frac{xy}{(z+y)(x+z)}}$ thì tồn tạm một tam giác ABC có độ dài các cạnh $a=y+z,b=z+x,c=x+y$. Gọi p là nửa chu vi, khi đó các biểu thức trở thành: $\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sin\frac{A}{2}$,tương tự 2 biểu thức còn lại.

Nhiều khi chúng ta cũng sẽ gặp biểu thức dạng $\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}$,tương tự các bạn đề xuất 2 biểu thức còn lại thì tồn tạm một tam giác ABC có độ dài các cạnh $a=y+z,b=z+x,c=x+y$. Gọi p là nửa chu vi, khi đó các biểu thức trở thành: $\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\cos\frac{A}{2}$,tương tự ta có 2 biểu thức còn lại.

Để làm rõ, ta đi vào xét một số ví dụ sau

1

Cho các số thực $x;y;z$ thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$xy+yz+zx\ge 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$$

Lời giải

Ta để ý trong tam giác ABC thì ta có: $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

Từ đó gợi ý cho ta phép đặt $x=\tan A;y=\tan B,z=\tan C$

Khi đó dễ thấy $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\tan^2 A+1}=\frac{1}{\cos A}$

Như vậy ta cần chứng minh: $\tan A.\tan B+\tan B.\tan C+\tan C.\tan A\ge 3+\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}$

Bây giờ ta cần đưa về biểu diễn theo chung một cung. Để làm được điều đó, ta đặt:

$$\tan\frac{A}{2}=a;\tan\frac{B}{2}=b;\tan\frac{C}{2}=c.$$

Suy ra $ab+bc+ca=1$

Như vậy , ta có: $\tan A=\frac{2a}{1+a^2};\cos A=\frac{1-a^2}{1+a^2}$.

Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\frac{4ab}{(1-a^2)(1-b^2)}+\frac{4bc}{(1-b^2)(1-c^2)}+\frac{4ca}{(1-c^2)(1-a^2)}\ge 3+\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2}$$

Mẫu thức có nét giống nhau nên tốt và nhanh nhất là ta sẽ quy đồng:

$$\Leftrightarrow \sum 4ab(1-c^2)\ge 3(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)+\sum(1+a^2)(1-b^2)(1-c^2)$$

$$\Leftrightarrow 4-4abc(a+b+c)\ge 6-4(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\ge 1+(ab+bc+ca)^2=2$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

2

Cho các số thực $a,b,c\in(0;2)$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le 3\sqrt{3}$$

Lời giải

Giả thiết được viết lại dưới dạng:

$$\left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{bc}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{ca}}{2}\right)^2+2\frac{\sqrt{ab}}{2}\frac{\sqrt{bc}}{2}\frac{\sqrt{ca}}{2}=1$$

Bây giờ ý tưởng lượng giác hóa khá rõ ràng.

Đặt $\cos C=\frac{\sqrt{ab}}{2};\cos B=\frac{\sqrt{ca}}{2};\cos A=\frac{\sqrt{ab}}{2}$

Lúc này ta thấy $2\cos A\cos B=c\frac{\sqrt{ab}}{2}=c.\cos C\Rightarrow c=\frac{2\cos A\cos B}{\cos C}$

Ta chứng minh một bất đẳng thức mạnh hơn như sau:

$$2(4-a^2+4-b^2+4-c^2)\le 27\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$$

Điều này luôn đúng, vì ta có:

$$a^2+b^2+c^2=4\left(\sum\frac{\cos^2 A\cos^2 B}{\cos^2 C}\right)\ge 4(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)\ge 4.\frac{3}{4}=3$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh

3

Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ và thỏa mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng:

$$bc\sqrt{a^2-1}+ca\sqrt{b^2-1}+ab\sqrt{c^2-1}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}abc$$

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương với: $\left(\frac{1}{\sqrt{bc}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2+2\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}=1$

Bây giờ thì cái dấu hiệu lượng giác đã khá rõ ràng.

Ta đặt $\frac{1}{\sqrt{bc}}=\cos A;\frac{1}{\sqrt{ca}}=\cos B;\frac{1}{\sqrt{ab}}=\cos C$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Điều này tương đương với:

$$\sum\sqrt{1-\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Để cho gọn đặt $\cos^2 A = x; \cos^2 B = y; \cos^2 C = z$

Ta chứng minh một bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$3\left(3 - \frac{xy}{z} - \frac{yz}{x} - \frac{zx}{y}\right) \le \frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge \frac{3}{4}$$

Điều này vì theo AM-GM thì: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge x + y + z = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \frac{3}{4}$

4

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz + x + y = z$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{y^2+1} - \frac{2}{z^2+1}$$

Lời giải

Viết giả thiết đã cho về dạng: $xy + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = 1$

Do vậy đặt $x = \tan\frac{A}{2}; y = \tan\frac{B}{2}; \frac{1}{z} = \tan\frac{C}{2}$. Khi đó

$$P = \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{y^2+1} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}} + \frac{3}{1+\tan^2\frac{B}{2}} - \frac{2\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}} = 2\cos^2\frac{A}{2} + 3\cos^2\frac{B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \cos A + \cos C - 3\sin^2\frac{B}{2} + 3 = 2\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A+C}{2} - 3\sin^2\frac{B}{2} + 3 \le -3\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} + 3 \le \frac{10}{3}$$

Đẳng thức xảy ra tại $x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = \frac{\sqrt{2}}{4}; z = \sqrt{2}$

5

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{xyz}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \frac{2\sqrt{y}}{1+y} + \frac{z-1}{1+z}$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x} = \tan\frac{A}{2}; \sqrt{y} = \tan\frac{B}{2}; \sqrt{z} = \tan\frac{C}{2}$.

Khi đó

$$P = \sin A + \sin B - \cos C = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{C}{2} + 1$$

$$P = -\left(\cos\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + 1 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} \le \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}, z = \sqrt{3}$

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}=1$$ Chứng minh rằng: $abc \geq 1$

Lời giải

Từ điều kiện, ta suy ra rằng: $\frac{1}{a+1};\frac{1}{b+1};\frac{1}{c+1}\in(0;1)$

Từ đó ta có thể đặt: $\cos A=\frac{1}{a+1};\cos B=\frac{1}{b+1};\cos C=\frac{1}{c+1}$

Ta sẽ có được A,B,C là 3 góc của một tam giác nhọn

Ta sẽ tính được: $a=\frac{1-\cos A}{\cos A};b=\frac{1-\cos B}{\cos B};c=\frac{1-\cos C}{\cos C}$

Như vậy, ta cần chứng minh:

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\geq \cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos A)}{\sin A}.\frac{(1-\cos B)}{\sin B}.\frac{(1-\cos)}{\sin C}\geq \cot A\cot B\cot C$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\geq \cot A\cot B\cot C$$

$$\Leftrightarrow \tan A.\tan B\tan C\geq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\geq \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\text{ (đúng)}$$

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9(ab+bc+ca)$$

Lời giải

Ta đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2}\tan x\\ a=\sqrt{2}\tan y\\ a=\sqrt{2}\tan z\end{cases}\left(x,y,z\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\cos x.\cos y.\cos z(\cos x.\sin y.\sin z+\cos y.\sin x.\sin z+\cos z.\sin x.\sin y)\leq\frac{4}{9}$$

Ta lại có:

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z-\cos x\sin y\sin z-\cos y\sin x\sin z-\cos z\sin x\sin y$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos x\cos y\cos z\left[\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z)\right]\leq\frac{4}{9}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\cos x\cos y\cos z\leq\left(\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3}\right)^3\leq\cos^3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Khi đó ta đặt $t = \dfrac{x+y+z}{3}$

Ta cần chứng minh

$$\cos^3 t.(\cos^3 t - \cos 3t) \le \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^4 t(1-\cos^2 t) \le \frac{4}{27}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\cos^4 t(1-\cos^2 t) = 4.\frac{\cos^2 t}{2}.\frac{\cos^2 t}{2}.(1-\cos^2 t) \le 4\left(\frac{\frac{\cos^2 t}{2}+\frac{\cos^2 t}{2}+1-\cos^2 t}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\tan x = \tan y = \tan z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

8

Cho x, y thỏa mãn $14xy + 23x^2 - 25y^2 - 24 = 0$ Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \ge 1$

Lời giải

Ta đặt: $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a\cos t \end{cases} (t \in [0; 2\pi])$

Khi đó ta cần chứng minh: $a^2 \ge 1$

Và giả thiết tương đương với

$$14a^2 \sin t\cos t + 23a^2 \sin^2 t - 25a^2\cos^2 t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(7\sin 2t - 24\cos 2t - 1) = 24$$

Ta thấy:

$$7\sin 2t - 24\cos 2t - 1 \le \sqrt{[7^2 + (-24)^2](\sin^2 2t + \cos^2 t)} - 1 = 24$$

Do đó: $24a^2 \ge a^2(7\sin 2t - 24\cos 2t - 1) = 24$

Suy ra: $a^2 \ge 1$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

9

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\dfrac{x}{x+yz} + \dfrac{y}{y+zx} + \dfrac{z}{z+xy} \le \dfrac{9}{4}$

Lời giải

Ta đặt $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{yz}{x}} = \tan\dfrac{\alpha}{2} \\ \sqrt{\dfrac{zx}{y}} = \tan\dfrac{\beta}{2} \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ \sqrt{\dfrac{xy}{z}} = \tan\dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$

Do $\sqrt{\dfrac{yz}{x}}.\sqrt{\dfrac{zx}{y}} + \sqrt{\dfrac{zx}{y}}.\sqrt{\dfrac{xy}{z}} + \sqrt{\dfrac{xy}{z}}.\sqrt{\dfrac{yz}{x}} = 1$

Nên:

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$$

Do đó, α,β,γ là 3 góc của một tam giác nhọn.

Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}}\le\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{9}{4}$$

Đây là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

10

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+a^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}\le\sqrt{10}$$

Lời giải

Tương tự các câu trên, với A,B,C là 3 góc của tam giác ABC, ta đặt $\begin{cases}a=\tan\frac{A}{2}\\ b=\tan\frac{B}{2}\\ c=\tan\frac{C}{2}\end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{3\tan\frac{C}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}}}\le\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+6\sin\frac{C}{2}\le 2\sqrt{10}$$

Ta có:

$$\begin{cases}\sin A+\sin B\le 2.\cos\frac{C}{2}\\ 3\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{(3^2+1^2)(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2})}=\sqrt{10}\end{cases}$$

Do đó, ta có đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}A=B\\ \tan\frac{C}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=3\end{cases}$

Thay vào hệ thức $ab+bc+ca=1$, ta được $\begin{cases}a=b=\sqrt{10}-3\\ c=3\end{cases}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Tương tự ta được: $\begin{cases}\cos B\cos C\le\sin^2\frac{A}{2}\\ \cos C\cos A\le\sin^2\frac{B}{2}\end{cases}$

Nhân theo từng vế, ta được

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \ge \cos A\cos B\cos C$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

11

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$ thì

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3.(x+y)(y+z).(z+x) \le 5(y+z)^3$$

Lời giải

Với a, b, c là các số dương ta đặt: $\begin{cases} a = x+y \\ b = y+z \\ c = z+x \end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{b+c-a}{2} \\ y = \dfrac{c+a-b}{2} \\ z = \dfrac{a+b-c}{2} \end{cases}$

Ta đưa bài toán về 3 số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

Do đó, ta có thể coi a, b, c là 3 cạnh của một tam giác ABC có góc $A = 60^\circ$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với.

$$b^3 + c^3 + 3abc \le 5a^3$$
$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) + 3abc \le 5a^3$$
$$\Leftrightarrow a^2(b+c) + 3abc \le 5a^3$$
$$\Leftrightarrow a(b+c) + 3bc \le 5a^2$$

Theo định lý hàm số Sin ta có:

$$\Leftrightarrow \sin A(\sin B + \sin C) + 3\sin B\sin C \le 5\sin^2 A$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sin B + \sin C) + 12\sin B\sin C \le 15$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} \sin B + \sin C \le 2\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{3} \\ \sin B\sin C \le \dfrac{(\sin B + \sin C)^2}{4} \le \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Do đó, ta được $2\sqrt{3}(\sin B + \sin C) + 12\sin B\sin C \le 15$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x = y = z$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

12

Cho $a, b, c \in (0;1)$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \ge \frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c}\right)$$

Lời giải

Tương tự bài trước, ta đặt $\begin{cases} a = \tan\dfrac{A}{2} \\ b = \tan\dfrac{B}{2} \\ c = \tan\dfrac{C}{2} \end{cases}$

Tuy nhiên, do $a,b,c \in (0;1)$ nên A,B,C là 3 góc của tam giác nhọn ABC.

Ta đưa đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}\right)$$

Ta xét hàm số

$$f(x) = \tan x - \frac{3}{\tan x}; x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = \tan^2 x + 1 + 3.\frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x} > 0$$

Do đó hàm số f đồng biến. Theo bất đẳng thức Jensen, ta được

$$f(A) + f(B) + f(C) \geq 3.f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3.f(60^\circ) = 0$$

Suy ra

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a = b = c$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

13

Cho $x,y,z > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq \sqrt{\frac{16(x+y}{3(x+y)(y+}}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(y+z)\sqrt{\frac{(x+y)(z+x)}{x(x+y+z)}} + (z+x)\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}} + (x+y)\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)}{z(x+y+z)}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}(x+$$

Ta đặt

$$\begin{cases} a = y+z \\ b = z+x \\ c = x+y \\ s = x+y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s-a \\ y = s-b \\ z = s-c \\ s = x+y+z \end{cases}$$

Mặt khác, ta thấy rằng

$$\sqrt{\frac{(x+y)(z+x)}{x(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}}; \sqrt{\frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{ca}{s(s-b)}}; \sqrt{\frac{(y+z)(z+x)}{z(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{\cdot}{s(s}}$$

Đều ≥ 1 và ta để ý rằng trong tam giác ABC:

$$\frac{bc}{p(p-a)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}$$

Nên ta được $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{bc}{s(s-a)}} = \dfrac{1}{\cos \frac{A}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{ca}{s(s-b)}} = \dfrac{1}{\cos \frac{B}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{ab}{s(s-c)}} = \dfrac{1}{\cos \frac{C}{2}} \end{cases}$

Với A,B,C là 3 góc; a,b,c là 3 cạnh; s là nửa chu vi của tam giác ABC

Ta đưa bài toán trở thành

$$\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{b}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{c}{\cos\frac{C}{2}}\geq\frac{4s}{\sqrt{3}}$$

Theo định lý hàm số sin, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geq\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\geq\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hàm số $\sin\frac{x}{2}$ đồng biến trên $[0;\pi]$ và hàm số $\cos\frac{x}{2}$ nghịch biến trên $[0;\pi]$.

Ta được

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\geq\sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Do đó, ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\geq\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó

Vậy ta có điều phải chứng minh.

14

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1$

Lời giải

Với A,B,C là ba góc của tam giác ABC, ta đặt $\begin{cases}a=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\\ b=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\\ c=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}+2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\leq 1+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

Đây chính là bất đẳng thức cơ bản, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a=b=c$

Và ta có điều phải chứng minh.

15

Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\leq\sqrt{x+y+z}$$

Lời giải

Với $a,b,c>0$ Ta đặt

$$\begin{cases} x=a+1\\ y=b+1\\ z=c+1\end{cases}$$

Khi đó giả thiết tương đương với

$$ab+bc+ca+2abc=1$$

Và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{a+b+c+3}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{3}{2}$$

Với A,B,C là ba góc bất kì thuộc $(0;\pi)$. Ta đặt $\begin{cases} ab=\sin^2\dfrac{A}{2}\\ bc=\sin^2\dfrac{B}{2}\\ ca=\sin^2\dfrac{C}{2}\end{cases}$

Đưa giả thiết trở thành

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$$
$$\Leftrightarrow 1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}-\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}=1$$
$$\Leftrightarrow\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}$$
$$\Leftrightarrow A+B+C=\pi$$

Như vậy A, B, C là 3 góc của tam giác ABC. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức cơ bản:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x=y=z$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

16

Cho $x,y,z>0$ Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(z+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+y)(x+z)}}\le1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x}{x+\sqrt{\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2}}}+\frac{y}{y+\sqrt{\dfrac{(y+z)(y+x)}{y^2}}}+\frac{z}{1+\sqrt{\dfrac{(z+x)(z+y)}{z^2}}}\le1$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $xy+yz+zx=1$. Khi đó, với A,B,C là ba góc của tam giác ABC. Ta đặt

$$\begin{cases} x = \tan\frac{A}{2} \\ y = \tan\frac{B}{2} \\ z = \tan\frac{C}{2} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{(x+y)(x+z)}{x^2} = \frac{\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}{\tan^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

Như vậy, ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}} \ge 2$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\left(\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}+1+\sin\frac{B}{2}+1+\sin\frac{C}{2}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}} \ge \frac{9}{3+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản ta có: $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}} \ge 2$

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x = y = z$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

18

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum \sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1} \ge 6$$

Lời giải

Từ giả thiết, với A,B,C là 3 góc của tam giác ABC, ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \\ b = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \\ c = \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} \end{cases}$$

Khi đó,

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}=\sqrt{\frac{1}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}-1}=\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{b}-1}=\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\\ \sqrt{\frac{1}{c}-1}=\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}}\end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức cơ bản

$$\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\ge 6$$

(Chỉ cần áp dụng AM-GM với lưu ý $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$)

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a=b=c$

Một số bài toán tự luyện

Bài 1: Cho các số x,y,z dương thỏa mãn $xy=1+z(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2xy(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{z}{1+z^2}$$

Bài 2: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $6x+3y+2z=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x\sqrt{yz}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[4]{(y^2+4)(z^2+9)}}$$

Bài 3: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)<5(y+z)^3$$

Kĩ thuật dùng tiếp tuyến chứng minh bất đẳng thức

Phương pháp này bắt đầu được đề cập đến trong các tài liệu về toán sơ cấp từ tháng 12/2005. Đầu tiên nó được đề xuất bởi TS Kin-Yin-Lin của trường Đại Học Khoa Học Công Nghệ Hồng Kong. Từ đó, đã có rất nhiều bài viết về vấn đề này. Trong cuốn sách này, chúng tôi cũng xin giới thiệu lại kĩ thuật này cho các bạn. Xem như là một công cụ nâng cao để khảo sát một lớp các bài toán bất đẳng thức.

Ý tưởng chính của phương pháp là ta sẽ tìm một đánh giá xấp xỉ cho biểu thức đã cho thông qua tiếp tuyến. Đối với một hàm số iếp tuyến tại một điểm nào đó của đồ thị hàm số luôn nằm trên hay nằm dưới đồ thị hàm số. Dựa vào tính chất này, ta thiết lập được một phương pháp thú vị để chứng minh bất đẳng thức, đó là phương pháp tiếp tuyến.

Trước khi đi vào phần phương pháp, chúng tôi muốn các bạn Sinh viên hay GV khi học về phương trình tiếp tuyến thì có ý niệm gì không ? CHắc hẳn chúng ta đã được học về khai triển Taylor ở bậc đại học. Vậy khai triển Taylor bậc nhất đó là gì nhỉ ? Viết ra giấy ngay, thì ta thấy đấy chính là phương trình tiếp tuyến tại một điểm. Như vậy phải chăng là phương trình tiếp tuyến cho ta đánh giá xấp xỉ một biểu thức. Vấn đề còn lại là ta cần xác định xem đánh giá tiếp tuyến đó là lớn hơn hay bé hơn mà thôi.

Ta nhắc lại lý thuyết: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên K. Khi đó tiếp tuyến tại một điểm $x_0 \in K$ có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ luôn nằm trên hoặc nằm dưới đồ thị hàm số nên ta có:

$f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ hoặc $f(x) \le f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Việc khảo sát lúc nào thì lớn hơn hoặc bé hơn xin dành cho bạn đọc tự khám phá. Chúng tôi chỉ gợi ý đó là thử tính tiếp đạo hàm cấp 2 xem thử.

Bây giờ, ta thử áp dụng lần lượt tính chất này với các biến thì được điều gì ? Đó chính là đánh giá:

$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f'(x_0)(x_1 + x_2 + ... + x_n - nx_0) + nf(x_0)$ hoặc chiều của bất đẳng thức có thể ngược lại. Ta đi tìm hiểu một số ví dụ khá điển hình và quen thuộc:

1

Cho a,b,c,d là các số thực dương sao cho $a + b + c + d = 1$ Chứng minh rằng:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \ge (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

Lời giải

Để áp dụng được kĩ thuật tiếp tuyến chúng ta phải đưa được bất đẳng thức về dạng tổng của $f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$. Xét hàm số $f(x) = 6x^3 - x^2$. Như vậy ta cần chứng minh:

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \ge \frac{1}{8}$$

Ta có được dự đoán là dấu đẳng thức xảy ra tại tâm , tức là $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.Nên ta sẽ viết phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ tại $\frac{1}{4}$

Phương trình tiếp tuyến đó là $y = f'(\frac{1}{4})(x - \frac{1}{4}) + \frac{1}{32} = \frac{5x - 1}{8}$

Dễ nhận thấy tiếp tuyến tại M nằm ở phía dưới đồ thị nên ta có ngay: $f(x) \ge \frac{5x - 1}{8}$

Khai triển, ta thấy điều này tương đương với $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (4x - 1)^2(3x + 1) \ge 0$ .Luôn đúng với $x > 0$

Vậy ta có: $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \ge \frac{5a + 5b + 5c + 5d - 4}{8} = \frac{1}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

2

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2}\le 5$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2}\le 5$$

Ta sẽ viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}$ tại $M=1$.

Như vậy ta cần phải chứng minh: $\dfrac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}\le\dfrac{x+4}{3};x\in(0;3)$ (1)

Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng biến đổi tương đương hoặc bằng một cách tinh tế như sau:

$$\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}=\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9}=\frac{1}{3}+\frac{2x+6}{3(x-1)^2+6}$$

$$\le\frac{1}{3}+\frac{2x+6}{6}=\frac{x+4}{3}$$

Bây giờ sử dụng (1) ta có:

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2}\le\frac{a+b+c+12}{3}=5$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

3

(*ĐH 2003*) Cho các số dương *x*, *y* và *z* thoả mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}},\ x\in(0;1)$. Vì rằng đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ nên chúng ta xét đồ thị của hàm số $f(x)$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $x=\dfrac{1}{3}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}\Rightarrow f'(\frac{1}{3})=-\dfrac{80}{\sqrt{82}}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{82}}{3}\right)$ là $y=-\dfrac{80}{\sqrt{82}}x+\dfrac{162}{3\sqrt{82}}$.

$$f''(x)=\frac{\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{2}{x^6}}{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}>0,\ \forall x>0$$

suy ra đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó tại điểm $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{82}}{3}\right)$ tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị, bởi vậy ta có

$\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\ge-\dfrac{80}{\sqrt{82}}x+\dfrac{162}{3\sqrt{82}},\ \forall x>0$. Tương tự đối với y, z và cộng lại ta được

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge -\frac{80}{\sqrt{82}}(x+y+z)+\frac{162}{\sqrt{82}}\ge\sqrt{82}$$

(do $x+y+z\le 1$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Cái hay của kĩ thuật này ở chỗ:

- Thứ nhất, ta có thể đánh giá một biểu thức thông qua biểu thức bậc nhất.
- Thứ hai, ta có thể chọn vị trí của tiếp tuyến sao cho bất đẳng thức xảy ra dấu bằng.

4.

Cho các số dương a, b, c thoả mãn $4(a+b+c)-9=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^b\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^c\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^a$$

Lời giải

Ta có

$$\ln S=b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+c\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+a\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$$

Xét hàm số $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x>0$ (1). Do đặc thù của bài toán nên ta có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $a=b=c=\frac{3}{4}$. Vì vậy ta sẽ so sánh vị trí của đồ thị với tiếp tuyến của nó tại điểm $(\frac{3}{4};\ln 2)$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f'(\frac{3}{4})=\frac{4}{5}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $(\frac{3}{4};\ln 2)$ có phương trình $y=\frac{4}{5}x+\ln 2-\frac{3}{5}$.

Đạo hàm cấp hai $f''(x)=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0,\ \forall x>0$ suy ra đồ thị hàm số (1) lồi trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó tại điểm $(\frac{3}{4};\ln 2)$ tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) nằm phía trên đồ thị hàm số (1). Từ đó ta có $\ln(x+\sqrt{x^2+1})\le\frac{4}{5}x+\ln 2-\frac{3}{5},\ \forall x>0$.

Áp dụng bất đẳng thức này cho số dương a ta được $\ln(a+\sqrt{a^2+1})\le\frac{4}{5}a+\ln 2-\frac{3}{5}$. Nhân hai vế với số $b>0$ ta suy ra:

$$b\ln(a+\sqrt{a^2+1})\le\frac{4}{5}ab+\left(\ln 2-\frac{3}{5}\right)b.$$

Tương tự ta có:

$$\begin{cases} c\ln(b+\sqrt{b^2+1})\le\frac{4}{5}bc+\left(\ln 2-\frac{3}{5}\right)c\\ a\ln(c+\sqrt{c^2+1})\le\frac{4}{5}ca+\left(\ln 2-\frac{3}{5}\right)a\end{cases}$$

Cộng vế ba bất đẳng thức này ta được:

$$\ln S\le\frac{4}{5}(ab+bc+ca)+\left(\ln 2-\frac{3}{5}\right)(a+b+c).$$

Cuối cùng sử dụng bất đẳng thức $(ab+bc+ca)\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết $a+b+c=\frac{9}{4}$, rút gọn ta thu được $\ln S\le\frac{9}{4}\ln 2$. Từ đó $S\le 4\sqrt[4]{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$.

Nhận xét: Đôi khi giả thiết lồi, lõm không được thoả mãn. Lúc đó ta sẽ so sánh vị trí của tiếp tuyến và đồ thị hàm số bằng chứng minh trực tiếp

5

Chứng minh rằng, với mọi số thực dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=3$ ta có
$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3.$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2+1}, x>0$. Ta có $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ có phương trình là $y=-\frac{1}{2}x+1$. $f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ suy ra đồ thị hàm số <u>không luôn luôn lõm</u> trên khoảng $(0;+\infty)$. Tuy nhiên ta vẫn có bất đẳng thức $\frac{1}{x^2+1}\ge -\frac{1}{2}x+1, \forall x>0$ (1)

(vì BĐT này tương đương với BĐT $x(x-1)^2\ge 0$).

Áp dụng BĐT (1) cho số $b>0$ ta được $\frac{1}{b^2+1}\ge -\frac{1}{2}b+1$ (2). Vì $a+1>0$ nên
$$(2)\Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1}\ge\left(-\frac{1}{2}b+1\right)(a+1)\Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1}\ge -\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}b+a+1.$$

Tương tự, cộng lại ta được
$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge -\frac{1}{2}(ab+bc+ca)-\frac{1}{2}(b+c+a)+(a+b+c)+3.$$

Cuối cùng sử dụng BĐT $(ab+bc+ca)\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết $a+b+c=3$ ta thu được
$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$$

Nhận xét; Trong chứng minh các BĐT ở trên, giả thiết $a+b+c=k$ ($\ge k$ hay $\le k$) là quan trọng. Do vậy, đối với các BĐT chưa cho sẵn giả thiết này mà có tính đẳng cấp, ta cũng có thể tự tạo ra các điều kiện của biến (chuẩn hoá) rồi sử dụng phương pháp trên.

6

Chứng minh rằng, trong tam giác ABC, ta có: $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\sin x, x\in(0;\pi)$. Bất đẳng thức xảy ra dấu bằng khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ nên ta xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ta có

$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ nên tiếp tuyến có phương trình là $y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$.

$f''(x)=-\sin x<0, \forall x\in(0;\pi)$ nên đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(0;\pi)$. Do vậy tại điểm $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tiếp tuyến nằm phía trên đồ thị, từ đó ta có

$\sin x\le\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}, \forall x\in(0;\pi)$. Áp dụng bất đẳng thức này cho A, B, C và cộng vế lại ta được
$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{1}{2}(A+B+C)+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Nhận xét:

- Bằng cách này ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức cơ bản cho các hàm số $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$
- Các bất đẳng thức trên có thể được chứng minh dựa vào BĐT Jenxen. Tuy nhiên BĐT Jenxen không được đề cập đến trong chương trình toán học phổ thông (có thể vì sự chứng minh BĐT này khá phức tạp). Bây giờ, dùng tiếp tuyến ta sẽ chứng minh BĐT Jenxen một cách đơn giản.

7

Cho a, b, c là những số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c}; y=\frac{b}{a+b+c}; z=\frac{c}{a+b+c}$. Khi đó x, y, z là những số dương và thoả mãn $x+y+z=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}\le 8$$

Hay

$$\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}+\frac{(y+1)^2}{2y^2+(1-y)^2}+\frac{(z+1)^2}{2z^2+(1-z)^2}\le 8$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}, x\in(0;1)$. Vì rằng đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ nên ta xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$. Ta có $f'(x)=-4.\frac{2x^2+x-1}{(3x^2-2x+1)^2}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ có phương trình là $y=4x+\frac{4}{3}$.

$f''(x)=12.\frac{4x^3+3x^2-6x+1}{(3x^2-2x+1)^3}$ đổi dấu hai lần trên khoảng $(0;1)$. Do đó đồ thị hàm số <u>không hoàn toàn lồi</u> trên khoảng $(0;1)$. Tuy nhiên ta vẫn có bất đẳng thức

$$\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}\le 4x+\frac{4}{3}, \forall x\in(0;1)$$

(Vì BĐT này tương đương với $(3x-1)^2(4x+1)\ge 0$).

Tương tự ta có các BĐT đối với y và z, cộng vế lại và sử dụng $x+y+z=1$ ta thu được đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$, tức là $a=b=c$.

8

Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{27}{8}$$

Lời giải

Nhìn bài toán ta khó có thể thấy được việc sử dụng phương pháp tiếp tuyến, tuy nhiên để ý một chút $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(1-c)^2}{4}$ suy ra $\frac{1}{1-ab}\le\frac{4}{3+2c-c^2}$ nên ta đã đưa được bài toán đã cho về bài toán quen thuộc:

Chứng minh rằng $\frac{1}{3+2a-a^2}+\frac{1}{3+2b-b^2}+\frac{1}{3+2c-c^2}\le\frac{27}{32}$ với điều kiện a,b,c dương và $a+b+c=1$ Bây giờ xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3+2x-x^2}$ trên khoảng $(0;1)$, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{-27}{256}x+\dfrac{81}{256}$.

Xét

$$f(x)-\left(\frac{-27}{256}x+\frac{81}{256}\right)=\frac{1}{3+2x-x^2}+\frac{27}{256}x-\frac{81}{256}=\frac{(3x-1)^2(13-3x)}{256(3+2x-x^2)}\le 0$$

với mọi $x\in(0;1)$, do đó $f(x)\le -\dfrac{27}{256}x+\dfrac{81}{256}$ với mọi $x\in(0;1)$. Từ đó ta có

$$\frac{1}{3+2a-a^2}+\frac{1}{3+2b-b^2}+\frac{1}{3+2c-c^2}\le -\frac{27}{256}(a+b+c)+3.\frac{81}{256}=\frac{27}{32},$$

đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

9

Cho $x_1,x_2,\dots,x_n$ là n số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}},\ n\in\mathbb{N}, n\ge 2$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}},\ x\in(0;1)$. Vì rằng đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\dots=x_n=\dfrac{1}{n}$ nên chúng ta xét đồ thị của hàm số $f(x)$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$ có phương trình là:

$$y=\frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}x-\frac{1}{2(n-1)\sqrt{n(n-1)}}$$

$$f''(x)=\frac{4-x}{4(1-x)^2\sqrt{1-x}}>0,\ \forall x\in(0;1)$$

suy ra đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(0;1)$ và do đó tiếp tuyến của nó tại điểm $\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$ nằm phía dưới đồ thị. Bởi vậy ta có $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}\ge\dfrac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}x-\dfrac{1}{2(n-1)\sqrt{n(n-1)}},\ \forall x\in(0;1)$. Áp dụng bất đẳng thức này cho $x_1,x_2,\dots,x_n$ và cộng vế lại ta được:

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\dots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\ge\frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}(x_1+\dots+x_n)-\frac{n}{2(n-1)\sqrt{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\dots=x_n=\dfrac{1}{n}$.

Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức AM-GM bằng kĩ thuật tiếp tuyến như sau.

10

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm. Chứng minh rằng

$$u+v+s=\frac{1}{a};uv+vs+su=\frac{b}{a};uvs=\frac{1}{a}\quad(1)$$

Lời giải

Nếu có một số $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) thì bđt là hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp $a_i > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Chia hai vế cho $a_1+a_2+\ldots+a_n$ ta được

$$\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\cdot\frac{a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\cdots\frac{a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}}$$

Đặt $x_i = \dfrac{a_i}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ thì $x_i > 0$ thoả mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$ và bđt trở thành

$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \dfrac{1}{n}$ hay $\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n \leq n\ln\dfrac{1}{n}$

Xét hàm số $y = f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0, \forall x > 0$ suy ra đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(0;+\infty)$.

Tiếp tuyến của đths tại điểm $\left(\dfrac{1}{n};\ln\dfrac{1}{n}\right)$ có phương trình là $y = nx - 1 + \ln\dfrac{1}{n}$ suy ra

$$\ln x \leq nx - 1 + \ln\frac{1}{n}, \forall x \in (0;+\infty) \quad (1)$$

Áp dụng bđt (1) cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và cộng vế lại ta được

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n \leq n(x_1+x_2+\ldots+x_n) - n + n\ln\frac{1}{n}$$

Kết hợp với $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$ ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$ hay $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

11

Cho $a,b,c > 0$ và thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

Lời giải

Ta nhận thấy biểu thức cần chứng minh chưa có dạng $f(a)+f(b)+f(c)$. Đừng vội nản, ta sẽ biến đổi một tí như sau:

Lưu ý rằng: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = 9$ nên bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c} \geq 9.$$

Xét $f(x) = x^2+2\sqrt{x}$. Ta sẽ chứng minh: $f(x) \geq 3x$ Điều này tương đương với:

$$(\sqrt{x}-1)^2(x+2\sqrt{x}) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Như vậy ta có $f(a)+f(b)+f(c) \geq 3(a+b+c) = 9$

12

Cho $x,y,z > 0$ và thỏa mãn $x+y+z = 9$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x^3+y^3}{xy+9}+\frac{y^3+z^3}{yz+9}+\frac{z^3+x^3}{zx+9} \geq 9$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức BCS , ta có:

$$x^3\left(\frac{1}{xy+9}+\frac{1}{zx+9}\right) \geq \frac{4x^3}{xy+xz+18} = \frac{4x^3}{x(9-x)+18}$$

Tương tự cộng lại ta có:

$$P \geq \frac{4x^3}{9x-x^2+18}+\frac{4y^3}{9y-y^2+18}+\frac{4z^3}{9z-z^2+18}$$

Bây giờ ta sẽ đánh giá bằng tiếp tuyến.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4t^3}{9t-t^2+18}, t\in(0;9)$

Ta viết phương trình tiếp tuyến với $f(t)$ tại điểm $t_0=3$. Vậy ta có:

$$f(t)\ge \frac{11t}{4}-\frac{21}{4}\Leftrightarrow (t-3)^2(9t+14)\ge 0$$

Điều này đúng. Vậy nên ta có:

$$P\ge \frac{4x^3}{9x-x^2+18}+\frac{4y^3}{9y-y^2+18}+\frac{4z^3}{9z-z^2+18}\ge \frac{11}{4}(x+y+z)-\frac{63}{4}=9$$

Vậy ta có điều phải chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=3$

13

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}+\frac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2}+\frac{c^3+a^3}{3c^2-4ca+11a^2}\ge\frac{3}{5}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3+1}{3t^2-4t+11}$.

Ta chứng minh được: $\dfrac{t^3+1}{3t^2-4t+11}\ge\dfrac{13}{50}t-\dfrac{3}{50}, t\in(0,3)$

Với $t=\dfrac{a}{b}\Rightarrow \dfrac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}\ge\dfrac{13a-3b}{50}$

Như vậy ta có: $\dfrac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}+\dfrac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2}+\dfrac{c^3+a^3}{3c^2-4ca+11a^2}\ge\dfrac{1}{5}(a+b+c)=\dfrac{3}{5}$

Bài tập tự luyện

1) Trong tam giác nhọn ABC, chứng minh rằng

a) $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$

b) $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$

c) $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$

d) $\dfrac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\dfrac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)\ge 2\sqrt{3}$

2) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

3) Cho các số dương a, b thoả mãn $a+b\le\dfrac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

4) (*1997 Japanese Math Olympiad*) Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

5) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và số $a\ge 2$ ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{\sin A}{a+\cos A}+\frac{\sin B}{a+\cos B}+\frac{\sin C}{a+\cos C}\le\frac{3\sqrt{3}}{2a+1}$$

Phương pháp dùng đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức

Trong các đề thi tuyển sinh ĐH-CĐ gần đây, thì việc sử dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức được ứng dụng rất rộng rãi. Nói chung, đây là phương pháp không thể thiếu khi chúng ta bước vào cuộc chiến đấu với cánh cổng ĐH. Vậy khó khăn của học sinh khi học phương pháp này, đó là gì ? Nhiều học sinh không biết làm thế nào để giảm biến đưa một biểu thức về dạng hàm 1 ẩn. Thường thì để giảm biến chúng ta phải có những đánh giá tinh tế để xuất hiện những số hạng có thể biểu diễn qua số hạng mà chúng ta cần dồn về. Với một số bài toán, chúng ta cũng có thể tiếp cận theo cách dùng đạo hàm từng biến để chỉ ra hàm số là đơn điệu theo biến mà chúng ta chọn để tính đạo hàm , và hiển nhiên nếu ta chặn được biến đó thì ta cũng có thể làm mất đi được sự có mặt của biến đó bằng cách thay biến đó bằng một số thực nào đó. Để hiểu rỏ hơn về phương pháp này, chúng ta xét một số ví dụ sau:

1

Cho $x,y\in R$ thỏa mãn $y\le 0$, $x^2+x=y+12$ .Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của

$$P=xy+x+2y+17$$

Lời giải

Chúng ta sẽ hy vọng là sẽ đưa được biểu thức P về hàm một biến. Một may mắn cho chúng ta là bậc cao nhất ở bài toán này đó là bậc 2 chính điều đó làm cho bài toán trở nên khá dễ dàng cho thao tác rút-thế.

Từ giả thiết, ta có: $y\le 0, y=x^2+x-12$ .Vậy nên $x^2+x-12\le 0\Leftrightarrow -4\le x\le 3$.

Khi đó $P=x^3+3x^2-9x-7$ .Bây giờ P đã là hàm một biến và biến đó biến thiên trong một khoảng. Nên thao tác sử dụng hàm số ở đây chỉ là 1 thao tác giáo khoa.

Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$. Lấy đạo hàm $f'(x)=3(x^2+2x-3)$

Giải phương trình $f'(x)=0$ rồi lập bảng biến thiên, ta có được:

$\min P=-12$ đạt được khi $x=1;y=-10$ và $\max P=20$ đạt được khi $x=3,y=-6$. **Lời giải** được hoàn tất.

2

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^3+b^3+\frac{1}{4}c^3$$

Lời giải

Nhìn biểu thức của P ta thấy có sự xuất hiện của cả ba biến số a,b,c mà ta không thể quy trực tiếp về một biến số ngay nếu chỉ sử dụng giả thiết. Nhưng ta lại thấy P là biểu thức có đối xứng với a,b, do đó ta dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được khi hai biến a,b bằng nhau. Ta chứng minh và sử dụng bất đẳng thức $\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, đẳng thức xảy ra khi hai biến số a,b bằng nhau nên ta có:

$$P\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+\frac{1}{4}c^3=\left(\frac{1-c}{2}\right)^3+\frac{1}{4}c^3=\frac{c^3+3c^2-3c+1}{8}=f(c).$$

Bây giờ thì việc giải quyết bài toán khá là dễ dàng bằng cách khảo sát hàm số $g(c)=8.f(c)$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $g'(c)=3c^2+6c-3$, $g'(c)=0\Leftrightarrow c_1=-1-\sqrt{2},\ c_2=-1+\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(c)$ trên khoảng $(0;1)$ ta có:

$$g(c)\ge g(c_2)=g\left(-1+\sqrt{2}\right)=6-4\sqrt{2},$$

suy ra $P\ge f(c)\ge\frac{1}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$.

Vậy $P_{min}=\frac{1}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)$ khi và chỉ khi $c=\sqrt{2}-1, a=b=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Bình luận: Việc xác định được dồn về biến nào là một thao tác quan trọng trong việc giải bất đẳng thức bằng phương pháp đạo hàm. Biến dồn về thường là biến có vai trò không đối xứng trong biểu thức cần chứng minh hoặc là biến xuất hiện lặp đi lặp lại nhiều lần nhất. Sau khi xác định được dồn về biến nào thì dựa vào điều kiện của bài toán ta sẽ có được cách đánh giá hợp lý. Ví dụ như bài toán trên, sau khi xác định dồn theo c thì chú ý điều kiện tổng 3 số bằng 1 ta sẽ cố gắng rút ra được biểu thức $a+b$ để từ đó có thể thay bằng $1-c$. Nếu điều kiện cho chẳng hạn như $abc=1$ thì ta sẽ cố gắng đánh giá để làm xuất hiện tích ab.

3

Cho ba số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}.$$

Lời giải:

Trong bài toán này, sự xuất hiện của ba biến a,b,c hoàn toàn đối xứng, nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $0\le a\le b\le c$. Do ba số a,b,c không âm và có tổng bằng 1 cùng với điều giả sử ở trên nên ta có $0\le a\le\frac{1}{3}$ Xét vế trái có:

$$P=a(b+c)+bc(1-2a)\le a(b+c)+\left(\frac{b+c}{2}\right)(1-2a)=a(1-a)+\frac{1}{4}(1-a)^2(1-2a)$$

$$=-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}=f(a)$$

Như vậy, ta đã quy được bài toán từ ba biến về bài toán một biến chỉ bằng một phép biến đổi đơn giản nhóm nhân tử chung và sử dụng thêm bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho hai số. Công việc của ta bây giờ chỉ là xét hàm số $f(a)$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ta có $f'(a)=-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a(1-3a)\ge0,\quad \forall a:0\le a\le\frac{1}{3}$, nên hàm $f(a)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, suy ra $f(a)\le f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$.

Vậy, $P\le f(a)\le\frac{7}{27}$

Điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán này ta có thể mở rộng hơn như sau: Cho ba số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$ và cho số thực $\lambda>0$. Chứng minh rằng $ab+bc+ca-\lambda abc\le\max\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{27}(9-\lambda)\right\}$ Bây giờ ta sẽ đi chứng minh một bất đẳng thức cực kì quan trong và có rất nhiều ứng dụng đó là bất đẳng thức Schur, đương nhiên, ta chỉ làm việc với bất đẳng thức Schur bậc 3. Lưu ý rằng đây là một bài toán rất chặt và có nhiều ứng dụng. Khi gặp những bất đẳng thức đối xứng 3 biến thì bất đẳng thức Schur kết hợp với việc biểu diễn một đa thức dưới lớp hàm sơ cấp đối xứng 3 biến hầu như có hiệu quả. Chúng ta cũng sẽ bàn tới vấn đề này trong cuốn sách này.

4

Cho ba số thực $x,y,z\ge0$, chứng minh rằng:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$$

Lời giải

Ở bài toán này, ta nhận thấy vai trò bình đẳng của cả 3 biến, nên thao tác đánh giá để dồn về một biến nào không phải là duy nhất. Nói cách khác là nếu đánh giá theo 2 biến này thì ta cũng sẽ thao tác được với 2 biến khác. Trong trường hợp này, cách đơn giản nhất đó là tiến hành đạo hàm theo từng biến bất kì.

Bài toán hoàn toàn đối xứng với ba biến số, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x\ge y\ge z\ge0$, coi x là biến số và coi y,z là tham số trong hàm số $f(x)=x^3-x^2(y+z)+3xyz-xy^2-xz^2-y^2z-z^2y+y^3+z^3$

Ta có $f'(x)=3x^2-2x(y+z)+3yz-y^2-z^2$

và $f''(x)=6x-2(y+z)=2(3x-y-z)\geq 0$ với mọi $x,y,z\geq 0$ và $x\geq y\geq z$.

Điều đó chứng tỏ $f'(x)$ là hàm số đồng biến, suy ra

$$f'(x)\geq f'(y)=3y^2-2y(y+z)+3yz-y^2-z^2=yz-z^2\geq 0\ \text{(do } x\geq y\geq z\text{).}$$

Đến đây ta suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến, như vậy $f(x)\geq f(y)=z(z-y)^2\geq 0$. Vậy bài toán đã chứng minh xong!

5

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$$

Lời giải

Trước hết ta thử đoán dấu đẳng thức xem như thế nào. Dấu đẳng thức ở đây xảy ra tại $x=y=1,z=0$

Nếu để ý quan sát, thì ta thấy một quan hệ khá quan trọng ở đây là $x=y+z$. Bây giờ ta sẽ xử lý tiếp biểu thức P. Mà quan trọng phải biết chúng ta phải xử lý điều gì ? Cụ thể là số hạng nào cần xử lý. Có một số hạng lặp đi lặp lại đó là yz. Để ý rằng ở số hạng thứ 1 x xuất hiện cũng rất nhiều lần nên ta có thể đánh giá được gì nhằm làm gọn số hạng này không. Nhớ lại đẳng thức xảy ra tại $x=y+z$ từ đó gợi ý ngay cho ta đánh giá dạng $x^2+(y+z)^2\geq 2x(y+z)$. Và một điều may mắn là $x^2+(y+z)^2=2+2yz$ chính là tử số của số hạng thứ 3. Mọi việc phân tích ở đây coi như ổn, vấn đề ta sẽ trình bày tường minh **Lời giải**.

Cách 1:

Ta có $2(yz+1)=x^2+(y+z)^2\geq 2x(y+z)\Rightarrow yz+1\geq x(y+z)$ và $yz+1=\dfrac{x^2+(y+z)^2}{2}$

Suy ra

$$P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}\leq\frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{\frac{x^2+(y+z)^2}{2}}{9}$$

$$\Leftrightarrow P\leq\frac{x}{x+y+z+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow P\leq\frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\Leftrightarrow P\leq 1-\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\ (x\neq 0)$$

Mà ta lại có

$$x+(y+z)\leq\sqrt{(1^2+1^2)\left[x^2+(y+z)^2\right]}=\sqrt{2\left[x^2+(y+z)^2\right]},$$

$$\Rightarrow P\leq 1-\frac{1}{\sqrt{2\left[x^2+(y+z)^2\right]}+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+(y+z)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2yz}\leq\sqrt{2+2yz}\geq\sqrt{2}$

Mặt khác $2yz\leq y^2+z^2=2-x^2\Rightarrow yz\leq 1\Rightarrow t\in\left[\sqrt{2};2\right]$

Xét hàm số $f(t)=1-\dfrac{1}{t\sqrt{2}+1}-\dfrac{t^2}{18},t\in\left[\sqrt{2};2\right]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(t\sqrt{2}+1\right)^2}-\dfrac{t}{9},t\in\left[\sqrt{2};2\right]$

Do các hàmsố $\frac{\sqrt{2}}{\left(t\sqrt{2}+1\right)^2}$ và $-\frac{t}{9}$ đều nghịch biến trên $\left[\sqrt{2};2\right] \Rightarrow f(t) \le f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{5}{9}$

Cách 2:

Ta có: $x(y+z) \le \frac{x^2+(y+z)^2}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2+2yz}{2} = \frac{2+2yz}{2} = 1+yz$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2yz+2x(y+z) = 2(1+yz)+2x(y+z)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 \le 2(1+yz)+2(1+yz) \Leftrightarrow 1+yz \le \frac{(x+y+z)^2}{4}$$

Do đó $\begin{cases} x(y+z) \le 1+yz \\ 1+yz \le \frac{(x+y+z)^2}{4} \end{cases}$

$$P \le \frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{\frac{(x+y+z)^2}{4}}{9}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x}{x+y+z+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36}, x \ne 0$$

Đặt $0 \le t = x+y+z \le \sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \sqrt{6}$

Xét hàm số:

$$f(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36}, t \in \left[0;\sqrt{6}\right]$$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{t}{18}, t \in \left[0;\sqrt{6}\right]; f''(t) = \frac{-2}{(t+1)^3} - \frac{1}{18} < 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{6}\right]$$

Do đó $f'(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[0;\sqrt{6}\right]$, mà $f'(2)=0$ nên $t=2$ là nghiệm duy nhất của phươngtrình $f'(t)=0$.

Từ đây lập bảng biến thiên ta có ngay kết quả của bài toán.

Cách 3:

Ta có $2(yz+1) = x^2+(y+z)^2 \ge 2x(y+z) \Rightarrow yz+1 \ge x(y+z)$ và $yz+1 = \frac{x^2+(y+z)^2}{2}$

Suy ra:

$$P = \frac{x^2}{x^2+yz+x+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9} \le \frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{\frac{x^2+(y+z)^2}{2}}{9}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x}{x+y+z+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{x^2+(y+z)^2}{18} \Leftrightarrow P \le 1 - \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{x^2+(y+z)^2}{18} \ (x \ne 0)$$

Mặt khác $x \le \frac{x^2+1}{2}$ và $y+z \le \frac{(y+z)^2+1}{2} \Rightarrow x+y+z \le \frac{x^2+1}{2} + \frac{(y+z)^2+1}{2} = \frac{x^2+(y+z)^2+2}{2}$

Vậy ta có:

$$P\le 1-\frac{1}{\frac{x^2+(y+z)^2+2}{2}+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\Leftrightarrow P\le 1-\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow P\le 1+\frac{4}{18}-\left[\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}+\frac{x^2+(y+z)^2+4}{18}\right]$$

Mặt khác: $\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}+\frac{x^2+(y+z)^2+4}{18}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow P\le\frac{5}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{9}$ khi $x=y=1,z=0$

6

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Lời giải

Giả thiết $\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$

Đặt $x=\frac{a}{c}$; $y=\frac{b}{c}$ thì $(x+1)(y+1)=4\Leftrightarrow S+P=3\,;P=3-S$

$$P=32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\ge 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}=8\left[\frac{S^2+3S-2P}{3S+P+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt2}$$

$$=8\left[\frac{S^2+3S-2(3-S)}{3S+(3-S)+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt2}$$

$$=8\left(\frac{S^2+5S-6}{2S+12}\right)^3-\frac{S}{\sqrt2}=8\left(\frac{S-1}{2}\right)^3-\frac{S}{\sqrt2}=(S-1)^3-\frac{S}{\sqrt2},S\ge2$$

$$P'=3(S-1)^2-\frac{1}{\sqrt2}>0\Rightarrow P\min=P(2)=1$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $x=y=1$

-

(B-2013) Cho *a, b, c là* các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Lời giải

Ta thấy có cấu hình $\sqrt{xy}$ ở số hạng thứ 2 nên gợi ý cho chúng ta sử dụng Bất Đẳng thức AM-GM.
Theo BCS thì ta có có:

$$a+b+c+2\le\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+4)}$$

Lại theo AM-GM thì:

$$3(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le(3a+3b).\left(\frac{a+b+4c}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[\frac{4(a+b+c)}{2}\right]^2=2(a+b+c)^2$$

Vậy:

$$P \le \frac{8}{a+b+c+2} - \frac{27}{2(a+b+c)^2}. \text{ Đặt } t = a+b+c\ , t>0;\ P \le \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} = g(t)$$

$$g'(t) = -\frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 27(t+2)^2 - 8t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

t	0		6		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	

$P \le g(t) \le \frac{5}{8}$ Vậy $P_{max} = \frac{5}{8}$ xảy ra khi $a = b = c = 2$

8

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$$

Lời giải

Cách 1:

Quan sát bài toán ta thấy sự khá khó chịu của các biểu thức giá trị tuyệt đối. Nên để gọn hơn ta sẽ tiến hành đặt ẩn phụ để đơn giản hơn

Đặt $a = |x-y|, b = |y-z|, c = |z-x|$

Từ giả thiết suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$

Do đó: $6(x^2+y^2+z^2) = 2\left(|x-y|^2 + |y-z|^2 + |z-x|^2\right)$

Vì vậy nếu đặt: $a = |x-y|, b = |y-z|, c = |z-x|$ thì $a, b, c \ge 0$ và $a+b \ge c, b+c \ge a, c+a \ge b$

Ta có: $P = 3^a + 3^b + 3^c - \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

Bây giờ, ta sẽ tiến hành phá căn thức nhằm đưa về một biểu thức đẹp hơn. Để phá được căn thức thì ta chỉ có thể đánh giá biểu thức trong căn với một biểu thức có dạng bình phương. Rất có thể đó là $(a+b+c)^2$

Vì $a+b \ge c$ nên $(a+b)c \ge c^2$

Tương tự: $(b+c)a \ge a^2; (c+a)b \ge b^2$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được: $2(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2 \Rightarrow (a+b+c)^2 \ge 2(a^2+b^2+c^2)$

Do vậy: $P \ge 3^a + 3^b + 3^c - (a+b+c) = (3^a - a) + (3^b - b) + (3^c - c)$

Xét hàm

$$f(x) = 3^x - x, x \ge 0$$
$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 1 > 0$$
$$\Rightarrow f(x) \ge f(0) = 1$$

Vậy $P \ge 3$, dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Cách 2: Không mất tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z$.

Từ giả thiết suy ra $z = -(x+y)$ do đó:

$P = 3^{x-y} + 3^{y-z} + 3^{x-z} - \sqrt{12\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)} = 3^{x-y} + 3^{2y+x} + 3^{2x+y} - \sqrt{12\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)}$ Đặt: $\begin{cases} a = 2x+y \\ b = 2y+x \end{cases}$ thì

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a-b}{3} \\ y = \dfrac{2b-a}{3} \end{cases} \text{ và } a \ge b \ge 0.$$

Thay vào P ta được:

$$P = 3^{a-b} + 3^a + 3^b - 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} = 3^{a-b} + 3^a + 3^b - 2\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Đặt: $\begin{cases} u = \dfrac{a+b}{2} \\ v = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$, thì $u \ge v \ge 0$ và ta có: $P = 9^v + 3^{u+v} + 3^{u-v} - 2\sqrt{u^2+3v^2}$

Xét hàm:

$$P = f(u) = 9^v + 3^{u+v} + 3^{u-v} - 2\sqrt{u^2+3v^2}, u \ge v \ge 0$$

$$f'(u) = 3^{u+v}\ln 3 + 3^{u-v}\ln 3 - \frac{2u}{\sqrt{u^2+3v^2}} \ge 2\ln 3 - 2 > 0$$

$\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $[v;+\infty)$ kéo theo: $f(u) \ge f(v) = 9^v + 3^{2v} + 1 - 2\sqrt{4v^2} = 2.9^v - 4v + 1$ (1)

Xét $g(v) = 2.9^v - 4v + 1, v \ge 0$

$g'(v) = 2.9^v \ln 9 - 4 = 4.9^v \ln 3 - 4 \ge 4\ln 3 - 4 > 0$ do $v \ge 0$

Suy ra $g(v)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$, kéo theo $g(v) \ge g(0) = 3$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $f(u) \ge 3$ hay $P \ge 3$

Đẳng thức xảy ra khi $u = v = 0$ hay $x = y = z = 0$

Vậy $\min P = 3$.

Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$$

Lời giải

$(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \le 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x+y \le 8$ (1)

$(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow -6xy \ge -\frac{3}{2}(x+y)^2$ (2)

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2) = (x+y)^3 - 6xy - 3(x+y) + 6$$

Từ (2) $\Rightarrow A \ge (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$

* Đặt $t = x+y$ với $(0 \le t \le 8)$, xét $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ (nhận)}; \ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (loại)};$$

Ta có: $f(0) = 6, f(8) = 398$, $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(t) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ xảy ra khi $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$A \ge f(t) \ge \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ và $x + y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy giải trị nhỏ nhất của $A=\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ xảy ra khi $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Bình luận: Với những bài đối xứng 2 ẩn , thì tư duy đầu tiên khi gặp đó là sử dụng lớp đa thức đối xứng để đưa về theo 2 biến $x+y, xy$ .Rồi từ điều kiện sẽ quy được về một ẩn và khảo sát hàm số.

10

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

Ta sẽ đưa bài toán này về một ẩn mới đó là $t=ab+bc+ca$. Dĩ nhiên việc biểu diễn các đại lượng còn lại qua $t=ab+bc+ca$ khá đơn giản.

Đặt $t=ab+bc+ca$

Ta có: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

$\Rightarrow 1=(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=1-2t$ và $0\leq t\leq\frac{1}{3}$

Theo B.C.S ta có: $t^2=(ab+bc+ca)^2\leq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$\Rightarrow M\geq t^2+3t+2\sqrt{1-2t}=f(t)$$

$$f'(t)=2t+3-\frac{2}{\sqrt{1-2t}}$$

$$f''(t)2-\frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}}<0,\ \forall t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$$

$\Rightarrow f'(t)$ là hàm giảm

$f'(t)\geq f'(\frac{1}{3})=\frac{11}{3}-2\sqrt{3}>0\ \Rightarrow f$ tăng $\Rightarrow f(t)\geq f(0)=2,\ \forall t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$

$M\geq 2$

Khi $a=b=0$ và $c=1$ thì $M=2$. Vậy $M_{min}=2$

Bình luận: Biến được dồn về không nhất thiết phải là một trong 3 biến của bài toán mà đó có thể là một biểu thức nào đó chứa các biến đã cho ở đề bài. Lúc này mọi ,đánh giá và biểu diễn nhằm quy biểu thức đã cho theo biến mới.

11

Cho ba số thực $a,b,c\geq 1$ và thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{8}{ab-1}+\frac{1}{bc-1}+\frac{1}{ca-1}\geq 2.$$

Lời giải

Trong bài toán này, ta chưa thể sử dụng ngay đạo hàm để giải quyết bài toán. Để phát biểu bài toán đơn giản hơn và để có ý tưởng sử dụng đạo hàm ta đặt $\frac{1}{1+a}=x,\ \frac{1}{1+b}=y,\ \frac{1}{1+c}=z$. Khi đó $x,y,z\leq\frac{1}{2}$ và $x+y+z=1$.

Ta có $ab-1=\frac{z}{xy},\ bc-1=\frac{x}{yz},\ ac-1=\frac{y}{zx}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $\frac{8xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq 2$ với điều kiện $0<x,y,z\leq\frac{1}{2}$ và $x+y+z=1$. Với nhận xét bài toán đối xứng với biến x,y nên ta có thể đưa bài toán từ ba biến về hai biến bằng cách đặt $x+y=s,\ xy=p$, khi đó $\frac{1}{2}\leq s<1$ và $0<p\leq\frac{s^2}{4}$.

Ta có

$$P=\frac{8xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=\frac{8xy}{z}+\frac{z\left(x^2+y^2\right)}{xy}=\frac{8p}{1-s}+(1-s)\frac{s^2-2p}{p}=f(p)$$

Bây giờ xét hàm số

$$f(p)=\frac{8p}{1-s}+(1-s)\frac{s^2-2p}{p}$$

Có $f'(p)=\frac{8}{1-s}-\frac{s^2(1-s)}{p^2}$, $f'(p)=0\Leftrightarrow\ p=\frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}$.

Lập bảng biến thiên, biện luận so sánh $\frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}$ với $\frac{s^2}{4}$ có:

Nếu $\frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}\le\frac{s^2}{4}\Leftrightarrow s\ge 2-\sqrt{2}$ ta có $f(p)\ge f\left(\frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}\right)=\left(4\sqrt{2}+2\right)s-2\ge 6\sqrt{2}-6>2$

Nếu $\frac{s(1-s)}{2\sqrt{2}}\ge\frac{s^2}{4}\Leftrightarrow s\le 2-\sqrt{2}$ ta có: $f(p)\ge f\left(\frac{s^2}{4}\right)=\frac{2}{1-s}-4s=g(s)$

Khảo sát $g(s)$ trên $\left[\frac{1}{2};2-\sqrt{2}\right]$ có $g'(s)=-4+\frac{2}{(1-s)^2}$, từ đó $g(s)\ge g\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{4}$ và $z=\frac{1}{2}$, tức là $a=b=3,\ c=1$.

12

Xét các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ bài toán chuyển thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x,y,z)=x+2y+3z$ với x,y,z dương thỏa mãn $12xyz\ge 2x+8y+21z$.

Từ giả thiết $z(12xy-21)\ge 2x+8y>0$ ta có $z\ge\frac{2x+8y}{12xy-21}$ với $x>\frac{7}{4y}$.

Do đó $P(x,y,z)\ge x+2y+\frac{2x+8y}{4xy-7}$.

Bây giờ ta xét hàm số $f(x)=x+\frac{2x+8y}{4xy-7}+2y$ với biến $x>\frac{7}{4y}$ và y là tham số thực dương.

Ta có

$$f'(x)=1+\frac{2(4xy-7)-4y(2x+8y)}{(4xy-7)^2}=1-\frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2}$$

nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0=\frac{7}{4y}+\frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $\left(\frac{7}{4y};+\infty\right)$, ta có $f(x)\ge f(x_0)=2y+\frac{9}{4y}+\frac{1}{2y}\sqrt{32y^2+14}=g(y)$. Ta xét tiếp hàm số $g(y)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có $g'(y)=\frac{\left(8y^2-9\right)\sqrt{32y^2+14}-28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}}$ và $g'(y)=0\Leftrightarrow y=\frac{5}{4}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(y)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có $g(y)\ge g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{2}$, từ đó suy ra $P(x,y,z)\ge f(x)\ge g(y)\ge\frac{15}{2}$. Đẳng thức xảy ra với $x=3,y=\frac{5}{4},z=\frac{2}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$ khi $a=\frac{1}{3},b=\frac{4}{5},c=\frac{3}{2}$.

Như vậy, việc đổi biến và rút ẩn từ điều kiện để thay thế vào biểu thức cần tính là những thủ thuật cần thiết, cơ bản để làm cho bài toán không những đơn giản về mặt hình thức mà việc tính toán cũng trở lên ngắn gọn và giảm ngay được số biến trong bài.

13

Cho $a,b,c\in[1,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{10a}{bc}+\dfrac{11b}{ca}+\dfrac{2012c}{ab}$

Lời giải

Ta có: $P=f(c)=\dfrac{2012c}{ab}+\dfrac{1}{c}(\dfrac{10a}{b}+\dfrac{11b}{a})$

Coi c là biến số, còn a,b là tham số, ta có:

$$f'(c)=\frac{2012}{ab}-\frac{1}{c^2}(\frac{10a}{b}+\frac{11b}{a})=\frac{2012c^2-10a^2-11b^2}{ab}\ge\frac{2012-10.2^2-11.2^2}{ab}>0$$

$$\Rightarrow f(c)\le f(2)=\frac{4024}{ab}+\frac{5a}{b}+\frac{11b}{2a}=g(a)$$

Tiếp tục coi a là biến số còn b là tham số, ta có:

$$g'(a)=\frac{-4024}{ba^2}+\frac{5}{b}-\frac{11b}{2a^2}\le\frac{-4024}{2^3}+5-\frac{11}{4.2}<0$$

$$\Rightarrow g(a)\le g(1)=\frac{4029}{b}+\frac{11b}{2}=h(b)$$

$$h'(b)=\frac{-4029}{b^2}+\frac{11}{2}\le 0(b\in[1;2])\Rightarrow h(b)\le h(1)=4029+\frac{11}{2}=\frac{8069}{2}$$

Vậy $\mathrm{Max}P=\dfrac{8069}{2}$ đạt được khi $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=1\\ c=2\end{cases}$

Bình luận: Với những bài toán có giả thiết các biến nằm trong một đoạn xác định thì cách đạo hàm theo từng biến tỏ ra rất có ích, bởi vì điều này cho phép thay biến bởi một giá trị biên. Lúc này bài toán cần chứng minh được giảm biến.

14

Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác thì

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

Lời giải

Bài toán đối xứng với a,b,c nên không mất tính tổng quát ta giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, từ đó suy ra $0<c\le\sqrt{ab}$ và $a<b+c\le 2b$.

Đặt $x=c$, ta xét hàm số

$$f(x)=2\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{a}\right)-\frac{a}{x}-\frac{x}{b}+2\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-3$$

trên khoảng $\left(0;\sqrt{ab}\right]$ có $f'(x)=-\dfrac{2b}{x^2}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{b}=(a-2b)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{ab}\right)\le 0$ với mọi $x\in\left(0;\sqrt{ab}\right]$, do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{ab}\right]$, suy ra $f(x)\ge\max\{f(a),f(b)\}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\ge 0$. Vậy điều phải chứng minh đã được giải quyết.

15

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=1$ và $ab+bc+ca>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$. Ta có bất đẳng thức quen thuộc:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$$

Nên:

$$P=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}\geq\frac{10}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Chú ý rằng:

$$(a-b)^2+(b-c)^2\geq\frac{1}{2}(a-b+b-c)^2=\frac{1}{2}(a-c)^2$$

nên suy ra:

$$\frac{3}{2}(a-c)^2\leq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Đặt $\sqrt{ab+bc+ca}=t$ thì ta có: $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. $a^2+b^2+c^2=1-2t^2$ và $\frac{3}{2}(a-c)^2\leq 2-6t^2$

Ta có $P\geq\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-3t^2}}+\frac{5}{t}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-3t^2}}+\frac{5}{t}$ với $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Ta có $f(t)\geq f(\frac{1}{\sqrt{6}})=10\sqrt{6}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{6}}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}$

Ta có thể giải theo cách khác như sau:

Ta có:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{6}$$

Giả sử $a > b > c$. Đặt $x=a-b, y=b-c \Rightarrow a-c=x+y; x,y>0$

Suy ra $ab+bc+ca=\frac{2-x^2-y^2-(x+y)^2}{6}=\frac{1-x^2-y^2-xy}{3}$

Do đó $P=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{x+y}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2-y^2-xy}}$

Sử dụng 2 bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}; 4(x^2+y^2+xy)\geq 3(x+y)^2$ ta được:

$$P\geq\frac{10}{x+y}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}(x+y)^2}}=\frac{5}{\frac{x+y}{2}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}(x+y)^2}}\geq\frac{20}{\frac{x+y}{2}+\sqrt{\frac{1}{3}-(\frac{x+y}{2})^2}}\geq\frac{20}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=10\sqrt{6}$$

16

Cho x,y,z dương thỏa mãn $xy\geq 1, z\geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{z^3+2}{3(xy+1)}$$

Lời giải

Nhận thấy vai trò đối xứng của 2 biến x,y ở đây và nếu như ta triệt tiêu được z thì bất đẳng thức của chúng ta khá đơn giản. Điều này thực hiện được vì may mắn là z nằm ở tử số, đánh giá của chúng ta không ngược chiều .

Để ý rằng, theo AM-GM thì: $z^3+2=z^3+1+1\geq 3z$.

Do vậy $P \ge \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{z}{xy+1} \ge \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{xy+1}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có: $P \ge \frac{(x+y+1)^2}{3xy+x+y+1}$

Mặt khác: $\left(\frac{x+y+1}{3}\right)^3 \ge xy \Leftrightarrow \frac{(x+y+1)^3}{9} \ge 3xy$

Do đó $P \ge \frac{9(x+y+1)^2}{(x+y+1)^3+9(x+y+1)} = \frac{9(x+y+1)}{(x+y+1)^2+9}$

Đặt $x+y+1=t$ với $(t \ge 3)$ Khi đó $P \ge \frac{9t}{t^2+9}$

Ta có $P' = \frac{-9t^2+81}{(t^2+9)^2} = 0 \Leftrightarrow t=3$

Bằng việc khảo sát hàm số ta có $\min P = \frac{3}{2}$ đạt được khi $x=y=z=1$

17

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc(a+b+c)=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} - \frac{8bc}{bc\left(b^2+c^2\right)+8}$$

Lời giải

Ta có $P = \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} - \frac{8bc}{bc(b^2+c^2)+8}$

Dấu hiệu tích của 2 căn thức làm chúng ta nghĩ ngay đến AM-GM:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \le \frac{2a+b+c}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \ge \frac{2}{2a+b+c}$$

Ở số hạng còn lại, ta thấy có gì đặc biệt không đấy là sự xuất hiện của số 8, ở tử số và mẫu số lại đều chứa bc nên từ đây ta có được gì ? Lại để ý $2abc(a+b+c)=8$. Nên ta sẽ thay vào số hạng này. Sau đó đánh giá để hy vọng có được cái gì đó liên quan với $2a+b+c$

$$\frac{8bc}{bc(b^2+c^2)+8} = \frac{8bc}{bc(b^2+c^2)+2abc(a+b+c)} = \frac{8}{b^2+c^2+2a(a+b+c)}$$

$$\le \frac{8}{\frac{(b+c)^2}{2}+2a^2+2a(b+c)} = \frac{16}{4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2} = \frac{16}{(2a+b+c)^2}$$

Như vậy thì ta đã có $P \ge \frac{2}{2a+b+c} - \frac{16}{(2a+b+c)^2} = \frac{2}{t} - \frac{16}{t^2} = f(t)$

Để kết thúc **Lời giải** ta chỉ cần khảo sát $f(t)$. Nhưng một điều quan trọng ở đây chúng ta đã bỏ qua đó là tìm điều kiện của $t = 2a+b+c$. Vậy làm thế nào ? Ta lưu ý một tí ở giả thiết bài toán.

Ta có $t\sqrt{2} = \frac{a+b+c}{1+\sqrt{2}} + b + c + (1+\sqrt{2})a \ge 4\sqrt[4]{abc(a+b+c)} = 4\sqrt{2}$.

Vậy $t \ge 4$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2a+b+c=4 \\ abc(a+b+c)=4 \\ b=c=(1+\sqrt{2})a \end{cases}$

Bình luận: Những đánh giá để đưa bất đẳng thức về một biến thường không phải là những đánh giá quá phức tạp. Đôi lúc chỉ đơn thuần là những bất đẳng thức quen thuộc. Chúng ta cần rèn luyện kĩ năng này thông qua việc làm các bài tập sẽ tạo "cảm giác" khi biến đổi. Ở phương pháp này, thì một điều cần nhớ nữa đó là phải tìm điều kiện của biến mới bằng cách suy ra từ giải thiết của bài toán. Các bạn cần phải luyện tập lưu ý này.

18

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ac \geq 2b$ và $(ac+b)(ab+c)-a^2c^2=4b^2$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\left(1+\frac{b}{ac}\right)^2+\left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2$$

Lời giải

Từ điều kiện $ac \geq 2b$ và biểu thức P ta nghĩ ngay đến việc đưa về biến mới $t=\frac{b}{ac}$.

Điều kiện đã cho ở dạng đồng bậc nên các lối tư duy là khá quen thuộc.

$$(ac+b)(ab+c)-a^2c^2=4b^2 \Leftrightarrow \left(a+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{ab}{c}+1\right)=a^2+4\frac{b^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{ab}\right)=\frac{ac}{b}+4.\frac{b}{ac}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{b}+4\frac{b}{ac}=\left(a+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{1}{a}\right)\geq 2\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{b}{ac}}\right)$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{ac}{b}}$,$(t \geq \sqrt{2})$. Như vậy ta suy ra:

$$t^2+\frac{4}{t^2}\geq 2\left(t+\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow t^4-2t^3-2t+4\geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3-2)\geq 0 \Leftrightarrow t\geq 2$$

Do đó $\frac{ac}{b}\geq 4$. Bây giờ ta sẽ viết biểu thức cần chứng minh sao cho xuất hiện t

Ta cũng có: $P=\left(1+\frac{b}{ac}\right)^2+\left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2=\left(1+\frac{b}{ac}\right)^2+\left(\frac{1+\frac{b}{ac}}{1-\frac{b}{ac}}\right)^2$

Xét hàm số: $f(u)=(1+u)^2+\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2$ với $u=\frac{b}{ac}\leq\frac{1}{4}$

$$f'(u)=2(1+u)+\frac{4(1+u)}{(1-u)^3}\geq 0, \forall u\leq\frac{1}{4}\Rightarrow f(u)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{625}{144}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Phép chứng minh được hoàn tất.

18

Cho hàm số f xác định trên tập số thực, lấy giá trị trên R và thỏa mãn điều kiện

$$f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x, \quad \forall x\in(0;\pi)$$

Hãy tìm GTLN và GTNN của hàm số $g(x)=f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)$ trên R

Lời giải

Ta có

$$f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x, \quad \forall x\in(0;\pi)$$

$$\Leftrightarrow f(\cot x)=\frac{2\cot x}{\cot^2 x+1}+\frac{\cot^2 x-1}{\cot^2 x+1}=\frac{\cot^2 x+2\cot x-1}{\cot^2 x+1}, \quad \forall x\in(0;\pi)$$

Từ đó với chú ý rằng với mỗi $t\in R$ đều tồn tại $x\in(0;\pi)$ sao cho $\cos x=t$ ta được

$$f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}, \quad \forall t\in R.$$

Dẫn tới

$$g(x)=f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)=\frac{\sin^4 2x+32\sin^2 2x-32}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+32},\forall x\in R\quad(1).$$

Đặt $u=\frac{1}{4}\sin^2 2x$. Dễ thấy Khi x chạy qua R thì u chạy qua $\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Vì vậy từ (1) ta được

$$\min_{x\in R} g(x)=\min_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(u)\quad \text{và}\quad \max_{x\in R} g(x)=\max_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(u)$$

trong đó $h(u)=\frac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2}$. Ta có

$$h'(u)=\frac{2\left(-5u^2+4u+6\right)}{\left(u^2-2u+2\right)^2}.$$

Dễ dàng chứng minh được $h'(u)>0,\forall u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Suy ra hàm h(u) đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Vì vậy trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ ta có

$$\min h(u)=h(0)=-1\quad \text{và}\quad \max h(u)=h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{25}.$$

Vậy $\min g(x)=-1$, đạt được chẳng hạn khi $x=0$ và $\max g(x)=\frac{1}{25}$, đạt được chẳng hạn khi $x=\frac{\pi}{4}$.

19

Cho $a,b,c\in\left[\frac{1}{3};3\right]$. Tìm GTLN của biểu thức

$$S=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}.$$

Lời giải

Đặt $f(a)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. Xét hai trường hợp sau:

THI: $a\ge b\ge c$. Ta có: $f'(a)=\frac{b}{(a+b)^2}-\frac{c}{(a+c)^2}=\frac{(b-c)(a^2-bc)}{(a+b)^2(a+c)^2}\ge 0$

Suy ra: $f(a)\le f(3)=\frac{3}{3+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+3}=g(c)$.

Mặt khác: $g'(c)=\frac{-b}{(c+b)^2}+\frac{3}{(c+3)^2}=\frac{(b-3)(3b-c^2)}{(c+3)^2(b+c)^2}\le 0$

Suy ra: $g(c)\le g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{3+b}+\frac{3b}{3b+1}+\frac{1}{10}=h(b)$

Ta có: $h'(b)=\frac{3}{(3b+1)^2}-\frac{3}{(b+3)^2}=\frac{(1-b)(1+b)}{(3b+1)(b+3)}\le 0$

Ta có bảng biến thiên

b	$-\frac{1}{3}$		1		3
$f'\left(3;b;\frac{1}{3}\right)$		+		-	
$f\left(3;b;\frac{1}{3}\right)$		↗	$\frac{8}{5}$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(a;b;c) \le f\left(3;1;\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5}$.

TH2: $c \ge b \ge a$. Từ TH1 ta có $f(c;b;a) \le \frac{8}{5}$. Mặt khác

$$f(a;b;c) - f(c;b;a) = \frac{(a-b)(b-a)(a-c)}{(a+b)(b+a)(a+c)} \le 0.$$

Suy ra $f(a;b;c) \le \frac{8}{5}$.

Vậy $\max S = \frac{8}{5}$, đạt được khi và chỉ khi

$$(a,b,c) \in \left\{\left(3,1,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},3,1\right),\left(1,\frac{1}{3},3\right)\right\}$$

20

Chứng minh rằng

$$2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right) \le 3, \quad \forall x,y,z \in [0;1].$$

Lời giải

BĐT đã cho tương đương với

$$f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2\left(y^3+z^3\right) - y^2z \le 3.$$

Ta có

$$f'(x) = 6x^2 - 2yz - z^2 \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = \frac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2+6z^2}\right) \\ x = x_2 = \frac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2+6z^2}\right) \end{array}\right.$$

Vì $x \le 0$ nên $x_1 \notin (0;1)$. Xét hai trường hợp

- Nếu $x_2 \notin (0;1) \Rightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in [0;1]$. Suy ra f(x) giảm trên [0; 1]. Do đó $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \max\{f(0), f(1)\}$.
- Nếu $x_2 \in (0;1)$ thì ta có bảng biến thiên

x	0		x_2		1
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \max\{f(0), f(1)\}$.

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \max\{f(0), f(1)\}$.

Mặt khác

$$f(0) = 2\left(y^3+z^3\right) - y^2z \le 2\left(y^3+z^3\right) - y^2z + \left(2 - y - z^2\right) = f(1).$$

Ta sẽ chứng minh $f(1) \le 3$. Thật vậy, đặt

$$f(1) = g(y) = 2\left(y^3+z^3\right) - y^2z + \left(2 - y - z^2\right)$$

Ta có $g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = y_1 = \frac{1}{6}\left(z - \sqrt{z^2+6}\right) < 0 \\ y = y_2 = \frac{1}{6}\left(z + \sqrt{z^2+6}\right) \end{array}\right.$

Nếu $y_2 \notin (0;1) \Rightarrow g'(y) \le 0, \forall y \in [0;1]$. Suy ra g(y) giảm trên [0; 1]. Do đó

$$\max_{y\in[0;1]} g(y) = \max\{g(0), g(1)\}.$$

Nếu $y_2 \in (0;1)$ thì ta có bảng biến thiên

y	0		y_2		1
g'		-	0	+	
g	↘		$g(y_2)$		↗

Từ bảng biên thiên suy ra $\max_{y\in[0;1]} g(y) = \max\{g(0), g(1)\}$.

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $\max_{y\in[0;1]} g(y) = \max\{g(0), g(1)\}$.

Ta có

$$g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \le 2z^3 + 2 - z^2 + (1-z) = g(1) = z(z-1)(2z+1) + 3 \le 3$$

Với mọi $z \in [0;1]$

21

Xét phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ với a, b là các số thực, $a \ne 0$, $a \ne b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm GTNN của $P = \dfrac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b-a)}$.

Lời giải

Gọi u, v, s là ba nghiệm thực dương của đa thức $ax^3 - x^2 + bx - 1$. Theo định lý Viete ta có

$$u + v + s = \frac{1}{a}; uv + vs + su = \frac{b}{a}; uvs = \frac{1}{a} \quad (1).$$

Từ đó suy ra $a, b > 0$.

Đặt $c = \frac{1}{a}$. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$c = uvs = u + v + s \ge 3\sqrt[3]{uvs} = 3\sqrt[3]{c} \Rightarrow c^3 \ge 27c \Rightarrow c \ge 3\sqrt{3} \quad (2).$$

Mặt khác

$$(u+v+s)^2 - 3(uv+vs+su) = \frac{1}{2}\left((u-v)^2 + (v-s)^2 + (s-u)^2\right) \ge 0.$$

Do đó $c^2 = (u+v+s)^2 \ge 3(uv+vs+su) = 3bc \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b-a)} = \frac{1}{a}\cdot\frac{5 - 3\frac{b}{a} + 2\frac{1}{a^2}}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{c(5 - 3bc + 2c^2)}{bc - 1}$$

$$\ge \frac{c(5 - c^2 + 2c^2)}{\frac{c^2}{3} - 1} = \frac{5c(c^2+5)}{c^2 - 3} \quad (4)$$

Xét hàm số $f(c) = \dfrac{5c(c^2+5)}{c^2-3}$ với $c \ge 3\sqrt{3}$.

Ta được $f(c) \ge 12\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $c = 3\sqrt{3}$. Suy ra $P \ge 12\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $u = v = s = \sqrt{3}$, tức là $a = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, b = \sqrt{3}$.

Vậy $\min P = 12\sqrt{3}$.

22

Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn [1; 4] và $x \ge y, x \ge z$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh với mọi a, b dương, $ab \ge 1$ thì

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \qquad (*)$$

Thật vậy, ta có $(*) \Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$ luôn đúng do a, b dương và $ab \ge 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b hoặc ab = 1.

Áp dụng (*) với x, y thuộc đoạn [1; 4] và $x \ge y, x \ge z$ ta có

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{1}{1+\frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \ge \frac{1}{2+\frac{3y}{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1$ (1)

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t, t \in [1;2]$, khi đó $P \ge \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$.

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}, t \in [1;2]$ có

$$f'(t) = \frac{-2\left[t^3(4+3)+3t(2t-1)+9\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0.$$

Suy ra

$$f(t) \ge f(2) = \frac{34}{33}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = 4; y = 1$ (2)

Do đó $P \ge \frac{34}{33}$. Từ (1) và (2) suy ra dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 9, y = 1, z = 2.

23

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $(x+y+z)^3 = 32xyz$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$.

Lời giải

Không mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử $x+y+z=4$, khi đó $xyz=2$. Ta phải tìm GTLN và GTNN của $P = \frac{1}{4^4}(x^4+y^4+z^4)$. Ta có

$$\sum x^4 = \left(\sum x^2\right)^2 - 2\sum x^2y^2 = \left(16-2\sum xy\right)^2 - 2\left(\sum xy\right)^2 + 4xyz\sum x$$
$$= 2a^2 - 64a + 288 = 2(a-16)^2 - 244$$

trong đó $a = xy+yz+zx$. Do $y+z = 4-x$ và $yz = \frac{2}{x}$ nên ta phải có $(4-x)^2 \ge \frac{8}{x}$, tức là $3-\sqrt{5} \le x \le 2$

Tương tự $x, y, z \in \left[3-\sqrt{5}; 2\right]$. Suy ra $(x-2)(y-2)(z-2) \le 0$ và

$$\left(x-3+\sqrt{5}\right)\left(y-3+\sqrt{5}\right)\left(z-3+\sqrt{5}\right) \ge 0.$$

Nhân các BĐT trên ta được $5 \le a \le \dfrac{5\sqrt{5}-1}{3}$. Từ $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{4^4}=\dfrac{(a-16)^2-112}{128}$ suy ra

$$\min P=\frac{9}{128} \quad \text{và} \quad \max P=\frac{383-165\sqrt{5}}{256}$$

Đạt được khi (x, y, z) là các hoán vị của (2, 1, 1) và $\left(3-\sqrt{5},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

24

Cho $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}$$

Lời giải

Trước hết, ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra. Bài toán đạt cực đại tại $(a,b,c)=(1,0,0)$ hoặc các hoán vị. Một điểm đặc biệt là có những 2 số bằng 0 như vậy cách đánh giá sẽ là tận dụng những đánh giá với 0. Ý tưởng của chúng ta sẽ là dồn biến, vì điều kiện cho tổng của 3 số nên sẽ dồn về a, để làm được, ta phải cố gắng rút ra được $b+c$

Giả sử $a=\max(a,b,c)\Rightarrow \dfrac{1}{3}\le a\le 1$

Từ đó ta có:

$$P\le \frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}=\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2+c^2}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}$$

$$\le \frac{1+a^2}{1+b^2}+1+(b+c)^2+\frac{1}{1+a^2}\le 2+a^2+(1-a)^2+\frac{1}{1+a^2}$$

Bây giờ công việc khá đơn giản, đó là xét hàm số:

$$f(a)=a^2+(1-a)^2+\frac{1}{1+a^2} \text{ với } a\in\left[\frac{1}{3};1\right] \text{ ta được } f(a)\le f(1)=\frac{3}{2}$$

Vậy $P\le \dfrac{3}{2}$

25

Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{c}{a+c}\right)^3.$$

Lời giải

Ta thấy vai trò đối xứng của a, b và bậc của số hạng cuối cùng lệch, nên ta sẽ tư duy ngay được sẽ dồn về số hạng cuối cùng. Vấn đề là triển khai thế nào. Ta sẽ cần một đánh giá chiều lớn hơn hoặc bằng cho tổng 2 số hạng đầu với một biểu thức có liên quan đến $\dfrac{c}{a+c}$. Ta nhớ là một bài toán quen thuộc sau và chứng minh nó

Ta chứng minh: $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^2\ge \dfrac{3}{4}$ (*)

Thật vậy, đặt $x=\dfrac{b}{a},y=\dfrac{c}{b},z=\dfrac{a}{c}\Rightarrow xyz=1$. Thì ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2\ge \frac{3}{4}.$$

Ta luôn có: $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{1+y}\right)^2\ge \dfrac{1}{1+xy}$

Vì theo BCS thì ta có $(1+x)^2=\left(1+\sqrt{xy}.\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2\le (1+xy)\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\Rightarrow \dfrac{1}{(1+x)^2}\ge \dfrac{y}{(x+y)(1+xy)}$

Tương tự rồi cộng lại ta thu được $\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geq \frac{1}{1+xy}$

Áp dụng, ta có: $\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2+\left(\frac{1}{1+1}\right)^2 \geq \frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+z}=1$

Vậy bất đẳng thức phụ được chứng minh .

Áp dụng ta có ngay: $P \geq \frac{3}{4}-\left(\frac{c}{c+a}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{c}{c+a}\right)^3=\frac{3}{4}-t^2+\frac{4}{3}t^3=f(t)$

Với $t=\frac{c}{a+c}$

Phần còn lại khá đơn giản , bạn đọc có thể tự hoàn thành lời giải.

26

Cho hai số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $1 \leq x \leq 2$; $1 \leq y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{x+2y}{x^2+3y+5}+\frac{y+2x}{y^2+3x+5}+\frac{1}{4(x+y-1)}$$

$$\begin{cases}1\leq x\leq 2\\ 1\leq y\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-2)\leq 0\\ (y-1)(y-2)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2\leq 3x-2\\ y^2\leq 3y-2\end{cases}$$

$$P \geq \frac{x+2y}{3(x+y)+3}+\frac{y+2x}{3(x+y)+3}+\frac{1}{4(x+y-1)}$$

$$=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{1}{4(x+y-1)}=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)}$$

Đặt $t=x+y$, điều kiện $2\leq t\leq 4$

$$f(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{1}{4(t-1)},\ t\in[2;4]$$

$$f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{4(t-1)^2}$$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 2(t-1)=\pm(t+1) \Leftrightarrow 2t-2=t+1$ hay $2t-2=-t-1$

$\Leftrightarrow t=3$ hay $t=\frac{1}{3}$ (loại). Ta có $f(3)=\frac{7}{8}$

Khi $t=3 \Rightarrow \begin{cases}x=1\vee x=2\\ y=1\vee y=2\\ x+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$ Vậy $P_{min}=\frac{7}{8}$ tại $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

27

Cho x,y là các số không âm thỏa mãn: $x^2+y^2=2$. Tìm GTLN và GTNN của: $S=x+y-xy$

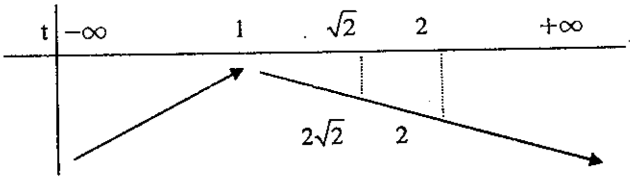
Lời giải

Đặt $x+y=t$, từ giả thiết ta có: $t^2=x^2+y^2+2xy=2+2xy\geq 2 \Rightarrow t\geq\sqrt{2}$

Lại có: $t^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)=4 \Rightarrow t\leq 2 \Rightarrow \sqrt{2}\leq t\leq 2$

Khi đó:: $S = t - \frac{1}{2}(t^2 - 2) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1$ với $t \in [\sqrt{2}; 2]$

Bảng biến thiên:



Từ BBT ta có: $f(x)\max = 2\sqrt{2}$ tại $t = \sqrt{2}$

$f(x)\min = 2$ tại $t = 2$

Vậy $S\max = \sqrt{2}$ tại $(x;y) = (\sqrt{2};0)$ hoặc $(x;y) = (0;\sqrt{2})$

$S\min = 1$ tại $x = y = 1$

28

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm min:

$$P = (x+y+z)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} - \frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$

Lời giải

Đặt $xy + yz + zx = t(0 < t \le 1)$, kết hợp BĐT: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \ge \frac{9}{xy+yz+zx}$

Ta có: $\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = 3 + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)(1 - xy + yz + zx) \ge \frac{9}{t}(1-t)$

Suy ra $P \ge 1 + 2t + \frac{1}{2}\left(3 + \frac{9}{t}(1-t) - \frac{1}{t}\right) = 2t + \frac{4}{t} - 2 = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t} - 2 \ge 4 + 2 - 2 = 4$

Dấu "=" xảy ra tại $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Những bài toán sau đây thể hiện đặc trưng của dạng toán này:

29

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} - (ab+bc+ca) \ge 1$$

Lời giải

Rõ ràng ta sẽ hướng đến đặt ẩn phụ $a^2 + b^2 + c^2 = t$ hoặc $ab + bc + ca = t$ vì chúng có thể đánh giá được và quan trọng hơn chúng có mối quan hệ với đại lượng còn lại qua hằng đẳng thức:

$$(a+b+c)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$$

Vậy vấn đề bây giờ là tìm mối qua hệ đẳng thức hoặc bất đẳng thức giữa $a^2b + b^2c + c^2a$ với $ab + bc + ca$ hoặc $a^2 + b^2 + c^2$. Ở đây, ta sẽ trình bày nó theo 3 cách. **Không chỉ đơn giản là giải bài toán này, sau đây sẽ cung cấp cho các bạn những BĐT phụ liên quan** qua đó thể hiện quan hệ của:

$$ab + bc + ca;\ a^2 + b^2 + c^2;\ a^2b + b^2c + c^2a;\ a + b + c:$$

Cách 1: Sử dụng BĐT phụ: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^2b + b^2c + c^2a)$ với mọi a,b,c dương.

Chứng minh: BĐT này ta đã gặp một lần ở một bài toán thuộc phần kĩ thuật chuẩn hóa BĐT đối xứng thuần nhất, xin được nhắc lại:

BĐT trên $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + a^2c \ge 2(a^2b + b^2c + c^2a)$

Sử dụng BĐT Cauchy ta có: $a^3+ab^2\ge 2a^2b$. Tương tự cho 2 biến còn lại. Cộng vế thoe vế scacs BĐT ta có đpcm. Đây là một BĐT quen thuộc và quan trọng. Trở lại với bài toán:

Khi đó, từ $a+b+c=3$, ta có: $a^2+b^2+c^2\ge a^2b+b^2c+c^2a$

Suy ra: $S\ge a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}-(ab+bc+ca)$

Đặt $a^2+b^2+c^2=t(t\ge 0)\Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}(9-t)$

Từ $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3\Rightarrow t\ge 3$

Khi đó: $S\ge t+\dfrac{9-t}{2t}-\dfrac{1}{2}(9-t)=\dfrac{3}{2}t+\dfrac{9}{2t}-5=\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{9}{2t}\right)+t-5\ge 2\sqrt{\dfrac{t}{2}.\dfrac{9}{2t}}+t-5\ge 1$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Cách 2: Sử dụng BĐT phụ: $(a^2b+b^2c+c^2a)(a+b+c)\le 3(a^2+b^2+c^2)$ với mọi a,b,c dương.

Chứng minh: Theo BĐT Cauchy – Schwarz ta có: $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$

Và: $(a^2b+b^2c+c^2a)^2=(a.ab+b.bc+c.ca)^2\le(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Mà $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}\Rightarrow(a^2b+b^2c+c^2a)^2\le\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3}$

Nhân vế theo vế 2 BĐT trên ta có: $(a^2b+b^2c+c^2a)^2(a+b+c)^2\le(a^2+b^2+c^2)^4$

Suy ra điều phải chứng minh! Đây cũng là một BĐT cần chú ý.

Từ $a+b+c=3$, ta có: $a^2+b^2+c^2\ge a^2b+b^2c+c^2a$ và ta lại quay về cách giải trên!

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Cách 3: Sử dụng BĐT phụ: Nếu a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3 thì ta có:

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab+bc+ca)\le 9$$

Chứng minh: Để chứng minh BĐT này, ta lại phải sử dụng tư tưởng Phương pháp xét hàm.

BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow(a^2b+b^2c+c^2a)(a+b+c)(ab+bc+ca)\le 27$

Ta có: $(a^2b+b^2c+c^2a)(a+b+c)=(a^3b+b^3c+c^3a)+(ab+bc+ca)^2-abc(a+b+c)$

Lại có BĐT phụ sau: $a^3b+b^3c+c^3a\le\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$ với mọi a,b,c dương.

Đây là một BĐT hay cần lưu ý. Chứng minh rất đơn giản:

BĐT trên $\Leftrightarrow\sum\dfrac{1}{2}(a^2-b^2+2bc-ab-ac)^2\ge 0$. Điều này hiển nhiên đúng!

Từ đó: $(a^2b+b^2c+c^2a)(a+b+c)\le\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+(ab+bc+ca)^2-3abc$

Theo BĐT Schur, hệ quả là BĐT (2) đã trình bày trong phần BĐT Schur, ta có:

$$(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)\Rightarrow 3abc\ge 4(ab+bc+ca)-9$$

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(a+b+c)\le\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+(ab+bc+ca)^2-4(ab+bc+ca)+9$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\left[\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+(ab+bc+ca)^2-4(ab+bc+ca)+9\right](ab+bc+ca)\le 27$$

Ý tưởng xét hàm đã rõ! Đặt $ab+bc+ca=t\left(0<t\le 3\right)$(vì $a+b+c=3$)

Khi đó BĐT trên trở thành: $\left[\frac{1}{3}\left(9-2t^2\right)^2+t^2-4t+9\right]t\le 27$

$\Leftrightarrow (t-3)\left(7t^2-27t+27\right)\le 0$ (luôn đúng vì $t\le 3$)

BĐT phụ được chứng minh xong!

Quay lại bài toán: Ta có: $S\ge a^2+b^2+c^2+\frac{(ab+bc+ca)^2}{9}-(ab+bc+ca)$

Đặt $ab+bc+ca=t\left(0<t\le 3\right)$, ta có:

$S\ge 9-2t+\frac{t^2}{9}-t=\frac{1}{9}(t-3)(t-15)-t+4\ge 4-t\ge 1$ (vì $0<t\le 3$)

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=1$

30

[THPT chuyên KHTN Hà Nội lần 4] Giả sử x,y,z là các số dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$ Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT phụ $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ như cách 2 bài trên.

Ta suy ra: $x^2y+y^2z+z^2x\le x+y+z\Rightarrow P=\frac{(x+y+z-1)^2}{x+y+z}+\frac{9}{x+y+z}$

Đặt $x+y+z=t\Rightarrow\sqrt{3}<t\le 3$.

Ta có: $P=\frac{(t-1)^2}{t}+\frac{9}{t}=t-2+\frac{10}{t}=\left(t+\frac{9}{t}\right)+\frac{1}{t}-2\ge 6+\frac{1}{3}-2=\frac{13}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Một lần nữa khẳng định lại ứng dụng của những BĐT phụ liên quan đến 3 lượng trên!

31

Cho a, b, c là các số không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=a^2+b^2+c^2+4abc$$

Lời giải

Bài toán này đã được trình bày trong phần sử dụng BĐT Schur khá nhẹ nhàng. Bây giờ ta sẽ thử áp dụng PP xét hàm số đối với nó:

Từ $a+b+c=1\Rightarrow 1-a=b+c$. Thế vào ta có:

$P=a^2+(b+c)^2+(4a-2)bc\Rightarrow P=a^2+(1-a)^2+2(2a-1)bc$

$\Rightarrow P=2a^2-2a+1+2(2a-1)bc$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow 3a\le a+b+c\Rightarrow a\le\frac{1}{3}$.

Khi đó: $2x-1<0\Rightarrow P\ge 2a^2-2a+1+2(2a-1)\frac{(b+c)^2}{4}$

$$\Rightarrow P\ge 2a^2-2a+1+(2a-1)\frac{(1-a)^2}{2}=a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$ nên nếu cho $a=\frac{1}{3}\Rightarrow a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}=\frac{13}{27}$

Ta dự đoán rằng BĐT $a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\geq\frac{13}{27}$ đúng. Thật vậy:

Lại có: $a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\geq\frac{13}{27}\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{6}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)^2\geq 0$ (đúng với mọi a)

Dấu "=" xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy $P\min=\frac{13}{27}$ tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

32

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a+b+c=\sqrt{3}$. Tìm GTLN của:

$$P=27a^2b^2c^2-(ab+bc+ca)^3-3(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)$$

Lời giải

Ta sẽ đánh giá P so với hàm số trong đó ẩn là $ab+bc+ca$:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow 27a^2b^2c^2\leq(ab+bc+ca)^3$

Lại có: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ suy ra ta có:

$$P\leq-(ab+bc+ca)^3+3(ab+bc+ca)$$

Đặt $ab+bc+ca=t\Rightarrow 3t\leq(a+b+c)^2=3\Rightarrow t\leq 1$

Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t$ với $t\in[0;1]$ ta dễ có $f(t)\max=2$ tại $t=1$.

Từ đó ta có: $P\leq 2$

Dấu "=" có $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy GTLN của P là 2 đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài toán sau, kết hợp xét hàm só với BĐT Schur:

33

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{5}{9}\geq 2abc(a+b+c)$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz ta có:

$$\left(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq(ab+bc+ca)^2=1$$

Từ đó suy ra $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\geq\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

Ta sẽ chứng minh: $\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+\frac{5}{9}\geq 2abc(a+b+c)$

Đặt $ab=x$; $bc=y$; $ca=z$. Suy ra $x+y+z=1$

BĐT trên trở thành: $\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}+\frac{5}{9}\geq 2(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2)+9xyz\geq 18(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)$.

Từ BĐT Schur ta có: $x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\geq 2(xy+yz+zx)$

(Đây là một hệ quả đã được nêu ra trong phần BĐT Schur)

Hay $x^2+y^2+z^2+9xyz \ge 2(xy+yz+zx)$. Ta sẽ chứng minh:

$$4(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx) \ge 18(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)$$

Đặt $x^2+y^2+z^2=t \Rightarrow 2(xy+yz+zx)=1-t$.

BĐT trở thành: $4t+(1-t) \ge 9(1-t)t \Leftrightarrow (3t-1)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy BĐT được chứng minh!

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

35

Cho x,y,z dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm GTNN:

$$K=\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+z}$$

Lời giải

Theo BĐT Cauchy:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}} \ge \frac{2}{\sqrt[4]{(x^2+xy)(y^2+xy)}}$$

Lại có:

$$(x^2+xy)(y^2+xy) \le \frac{(x^2+xy+x^2+xy)^2}{4}=\frac{(x+y)^4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}} \ge \frac{2\sqrt{2}}{x+y} \Rightarrow K \ge \frac{2\sqrt{2}}{x+y}+\frac{2\sqrt{3}}{1+z}$$

36

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $(a+b)^2+2c^2 \ge 2$. Tìm GTNN:

$$P=5(a^2+b^2+c^2)-(a+b+\sqrt{2}c)^2-\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}+c^2}$$

Lời giải

Ta sẽ thực hiện đưa P về hàm số ẩn $a^2+b^2+c^2$

Ta có: $\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{2}+c^2} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Và $(a+b+\sqrt{2}c)^2 \le 2\left[(a+b)^2+2c^2\right] \le 4(a^2+b^2+c^2)$

Từ giả thiết suy ra $2 \le (a+b)^2+2c^2 \le 2(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 1$

Suy ra $P \ge 5(a^2+b^2+c^2)-4(a^2+b^2+c^2)-\sqrt{a^2+b^2+c^2}=a^2+b^2+c^2-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Đặt $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=t \Rightarrow t \ge 1$

Xét hàm số $f(t)=t^2-t$ với $t \in [1;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên hàm số trên suy ta có: $\min f(t)=0$ tại $t=1$.

Vậy $P\min=0$ tại $a=b=\dfrac{1}{2}; c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

37

Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn: $(x^2+y^2+1)^2+3x^2y^2+1=4x^2+5y^2$

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}$$

Lời giải

Ta có: $x^2+2y^2-3x^2y^2=(x^2+y^2+1)^2-3(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)+1$

Từ đó, P chỉ phụ thuộc vào x^2+y^2. Ta hướng đến xét sự biến thiên hàm số, bây giờ chỉ cần tìm khoảng giá trị của x^2+y^2 từ giả thiết chính là tập xác định của P:

Đặt $x^2+y^2=t$. Từ giả thiết ta có: $t-3t+2=-x^2-3x^2y^2\le 0\Rightarrow 1\le t\le 2$.

Khi đó $P=f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t+1}$ với $t\in[1;2]$. Khảo sát hàm số trên đoạn $[1;2]$ ta có:

$\min f(t)=1$ tại $t=1$; $\max f(t)=\dfrac{4}{3}$ tại $t=2$

Từ đó suy ra $\min P=1$ khi $\begin{cases}x=0\\y=\pm 1\end{cases}$

$\max P=\dfrac{4}{3}$ khi $\begin{cases}x=0\\y=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

38

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x+y+z\le\dfrac{3}{2}$

Tìm GTNN của biểu thức: $P=\dfrac{x}{y^2z}+\dfrac{y}{z^2x}+\dfrac{z}{x^2y}+\dfrac{x^5}{y}+\dfrac{y^5}{z}+\dfrac{z^5}{x}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$P\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}}+3\sqrt[3]{(xyz)^4}$$

Đặt $\sqrt[3]{xyz}=t\Rightarrow t\le\dfrac{x+y+z}{3}\le\dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t^4+\dfrac{1}{t^2}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. Ta có: $f(t)=t^4+\dfrac{1}{t^2}$ là hàm nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Suy ra $f(t)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{65}{16}\Rightarrow P\min=\dfrac{195}{16}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

39

Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Tìm GTNN của:

$$P=(a+b)(b+c)(c+a)+\frac{72}{\sqrt{a+b+c+1}}$$

Lời giải

Ý tưởng của bài toán là dồn biến để xét hàm. Ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-1$

Mà $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\Rightarrow ab+bc+ca\ge\sqrt{3(a+b+c)}$

Suy ra $P\ge(a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}+\dfrac{72}{\sqrt{a+b+c+1}}-1$

Đặt $a+b+c=t\Rightarrow t\ge 3$. Ta có: $P\ge t\sqrt{3t}+\dfrac{72}{\sqrt{t+1}}-1$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{3t}+\dfrac{72}{\sqrt{t+1}},t\ge 3$ có $f'(t)=\dfrac{3\sqrt{3t(t+1)^3}-72}{2\sqrt{(t+1)^3}}\ge 0$ với $t\ge 3$

$\Rightarrow f(t)\ge f(3)=45\Rightarrow P\ge 44$

Dấu "=" có khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy $P_{min}=44$ tại $a=b=c=1$

40

Cho các số thực dương a,b,c. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Lời giải

Ta có: $P\le\dfrac{2}{a+b+c+1}-\dfrac{54}{(a+b+c+3)^3}$

Đặt $a+b+c=t\,(t>1)$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{(t+3)^3}$ với $t\in(1;+\infty)$ có

$$f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{162}{(t+2)^4}=0\Leftrightarrow 9t=(t+2)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=4\end{array}\right.;f'(t)>0\Leftrightarrow 1<t<4$$

Lập bảng biến thiên suy ra $P\le f(4)=\dfrac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

40

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $ab+a+b=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}\le a^2+b^2+\frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $(a+1)(b+1)=4$ và $\dfrac{ab}{a+b}+1=\dfrac{3}{a+b}$. Từ đó, BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{3}{4}a(a+1)+\frac{3}{4}b(b+1)+\frac{ab}{a+b}\le a^2+b^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{4}(a+b)+\frac{3}{a+b}\le\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\frac{5}{2}$$

Mà $a^2+b^2\ge\dfrac{1}{2}(a+b)^2$ nên ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{3}{4}(a+b)+\dfrac{3}{a+b}\le\dfrac{1}{8}(a+b)^2+\dfrac{5}{2}$

Đặt $a+b=t\Rightarrow 3=t+ab\le t+\dfrac{t^2}{4}\Rightarrow t\ge 2$

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{3}{4}t+\dfrac{3}{t}\le\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow(t-2)(t^2-4t+12)\ge 0$ luôn đúng vì $t\ge 2$

Suy ra BĐT đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$

Bây giờ ta xét sang một kĩ thuật đơn giản nhưng có khá nhiều ứng dụng hay

Sử dụng tính chất của hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai

Những công cụ tưởng chừng như đơn giản nhất đôi khi lại mang đến những sức mạnh cho chúng ta . Trong tiết này, chúng ta sẽ theo dõi ứng dụng của hàm số bậc nhất và hàm số bậc 2 trong chứng minh các bài toán bất đẳng thức.

** Hàm số bậc nhất: là hàm số có dạng: $y=f(x)=ax+b$. Ta có:

- Nếu $a>0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
- Nếu $a<0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Từ hai tính chất trên ta có:

Hàm số $y=f(x)=ax+b$ có TXĐ: $D=[\alpha;\beta]$ thì:

+ Xét $a\ge 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[\alpha;\beta] \Rightarrow \begin{cases} \min_y = f(\alpha) \\ \max_y = f(\beta) \end{cases}$

+ Xét $a<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[\alpha;\beta] \Rightarrow \begin{cases} \min_y = f(\beta) \\ \max_y = f(\alpha) \end{cases}$

Tóm lại, $\max_y = \max\{f(\alpha);f(\beta)\}$ và $\min_y = \min\{f(\alpha);f(\beta)\}$

Tính biến thiên của hàm số bậc nhất được ứng dụng vào chứng minh BĐT thông qua 2 mệnh đề sau:

- BĐT: $f(x)\ge k$ đúng với mọi $x\in D \Leftrightarrow f(x)\min \ge k$
- BĐT: $f(x)\le k$ đúng với mọi $x\in D \Leftrightarrow f(x)\max \le k$

** Hàm số bậc 2: là hàm số có dạng: $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$

Xét hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$ có TXĐ: $D=[\alpha;\beta]$ thì:

- Nếu $a>0 \Rightarrow \begin{cases} \max_y = \max\{f(\alpha);f(\beta)\} \\ \min_y = \min\left\{f(\alpha);f(\beta);f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right\} \end{cases}$
- Nếu $a<0 \Rightarrow \begin{cases} \min_y = \min\{f(\alpha);f(\beta)\} \\ \max_y = \max\left\{f(\alpha);f(\beta);f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right\} \end{cases}$

Kết quả trên có thể chứng minh bằng bảng biến thiên xin dành cho các bạn!

Ứng dụng của hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai trong nhiều trường hợp là tư duy đơn giản và thuần túy:

1

Cho $x,y,z\in[0;1]$. Chứng minh rằng: $x+y+z\le xy+yz+zx+1$

Lời giải

Nếu phân tích hằng đẳng thức là điều quan trọng thì trong trường hợp này nó là một trong những hướng đi được nghĩ đến:

Sử dụng phân tích: $(1-x)(1-y)(1-z)=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

Ta thấy ngay đpcm!

Tuy nhiên, thử ứng dụng hướng đi dùng t/c hàm số bậc nhất trong trường hợp này:

Xem x là ẩn, ta có: $f(x)=(1-y-z)x+(y+z-yz-1)$ với $x,y,z\in[0;1]$

Ta có: $f(0)=y+z-yz-1=(y-1)(1-z)\le 0$ luôn đúng vì $y,z\in[0;1]$

Và $f(1)=-yz\le 0$, Theo kết quả trên ta có ngay $f(x)\le 0$ với mọi $x,y,z\in[0;1]$

Từ đó ta có đpcm!

2 Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[-1;2]$ và $a+b+c=0$. Tìm GTLN của: $P=a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Ta có: $P=a^2+b^2+(a+b)^2=2(a^2+ab+b^2)$ với $a,b\in[-1;2]$ và $a+b\in[-2;1]$

Xét hàm số $f(a)=a^2+ab+b^2$ với $a\in[-1;2]$

Suy ra $f(a)\max=f(-1)=b^2-b+1$ với $b\in[-1;2]$

hoặc $f(a)\max=f(2)=b^2+2b+4=3\Rightarrow P\max=6$ (vì $a+b\in[-2;1]\Rightarrow b=-1$)

Xét 2 hàm số $g(b)=b^2-b+1$ với $b\in[-1;2]$

Có: $\left[\begin{array}{l} g(b)\max=g(-1)=3 \\ g(b)\max=g(2)=3 \end{array}\right.\Rightarrow g(b)\max=3\Rightarrow P\max=6$

Vậy $P\max=6$ tại $(a,b,c)=(2;-1;-1)$ và các hoán vị của nó!

3 Cho a,b,c là các số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $0\le ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$

Bài toán ta đã gặp không ít lần trong cuốn sách này, sau đây là cách giải theo hướng đi này:

Lời giải

Xét hàm số $f(ab)=ab+bc+ca-2abc-\frac{7}{27}=(1-2c)ab+c(1-c)-\frac{7}{27}$

là hàm số bậc nhất có: $ab\in[0;1]$ và $c\in[0;1]$

Ta có: $f(0)=c(1-c)-\frac{7}{27}=-\left(c-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{108}<0$ với mọi $c\in[0;1]$

Và: $f(1)=1-2c+c(1-c)-\frac{7}{27}=-\frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{3}\right)^2\left(c+\frac{1}{6}\right)\le 0$ với mọi $c\in[0;1]$

Theo kết quả trên ta có ngay $f(ab)\le 0$ với mọi a,b,c. Từ đó ta có đpcm!

4 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.
Chứng minh rằng: $a+b+c\ge ab+bc+ca$

Bài toán từng được sử dụng nguyên lí Dirichlet. Sau đây là lời giải trên tạp chí THTT:

Lời giải

Rút $c=\frac{4-ab}{a+b+ab}$. Ta cần chứng minh:

$$a+b+\frac{(ab+1)(4-ab)}{a+b+ab}\ge 4$$

Ta có: BĐT $\Leftrightarrow(a+b)(a+b+ab)+(ab+1)(4-ab)\ge 4(a+b+ab)$

$\Leftrightarrow(a+b-4)(a+b+ab)+(ab+1)(4-ab)\ge 0$

Đặt $a+b=S, ab=P\Rightarrow P\le\frac{S^2}{4}$. Ta có: $c\ge 0\Rightarrow P\le 4\Rightarrow P\in\left[\min\left\{4;\frac{S^2}{4}\right\}\right]$

Và BĐT cần c/m $\Leftrightarrow(S-4)(S+P)+(P+1)(4-P)\ge 0$

Dễ thấy đây là hàm số bậc 2 ẩn P, có hệ số cao nhất âm và $D=\left[0;\min\left\{4;\frac{S^2}{4}\right\}\right]$

Ta chỉ cần chứng minh $f(0)\ge 0$ và $f\left(\min\left\{4;\frac{S^2}{4}\right\}\right)\ge 0$.

- Ta có: $f(0)=(S-2)^2\ge 0$ đpcm!
- Với chứng minh $f\left(\min\left\{4;\frac{S^2}{4}\right\}\right)\ge 0$:

+ Nếu $S\ge 4\Rightarrow f\left(\min\left\{4;\frac{S^2}{4}\right\}\right)=f(4)=(S+4)(S-4)\ge 0$ đpcm!

+ Nếu $S\le 4\Rightarrow f\left(\min\left\{4;\frac{S^2}{4}\right\}\right)=f\left(\frac{S^2}{4}\right)=\frac{(16-S^2)(S-2)^2}{4}\ge 0$ đpcm!

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

5 Cho a,b,c không âm và $a+b+c=k\,(k\ge 1)$. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+6abc\ge\frac{k^3}{4}$

Đầu tiên biến đổi VT về dạng PT bậc nhất hoặc bậc 2. Một bài toán tổng quát rất đẹp!

Lời giải

Ta có:

$$a^3+b^3+c^3+6abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+9abc$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]+9abc$$
$$=k^3-3k(ab+bc+ca)+9abc=3(3c-k)ab-3kc(a+b)+k^3=3(3c-k)ab-3kc(1-c)+k^3$$

Xét hàm số $f(ab)=3(3c-k)ab-3kc(1-c)+k^3$

với $c\in[0;k]$ và $ab\le\frac{1}{4}(a+b)^2\le\frac{k^2}{4}\Rightarrow ab\in\left[0;\frac{k^2}{4}\right]$

Ta có: $f(0)=-3kc(1-c)+k^3=3k\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+k^3-\frac{3}{4}k\ge k^3-\frac{3}{4}k$

Lại có $k^3-\frac{3}{4}k\ge\frac{k^3}{4}\Leftrightarrow k^3\ge k\Leftrightarrow k\ge 1$ luôn đúng theo giả thiết!

Và

$$f\left(\frac{k^2}{4}\right)=3(3c-k)\frac{k^2}{4}-3kc(1-c)+k^3=3kc^2+3\left(\frac{3}{4}k^2-k\right)c+\frac{1}{4}k^3$$
$$=3kc\left(c+\frac{3}{4}k-1\right)+\frac{1}{4}k^3$$

Điều ta cần bây giờ là $c+\frac{3}{4}k-1\ge 0\Leftrightarrow c\ge\frac{1}{3}k$. Điều này hoàn toàn có thể:

Giả sử $c=\max\{a;b;c\}\Rightarrow 3c\ge a+b+c=k\Rightarrow c\ge\frac{k}{3}$

Suy ra

$$f\left(\frac{k^2}{4}\right)=3kc\left(c+\frac{3}{4}k-1\right)+\frac{1}{4}k^3\ge 3kc(k-1)+\frac{1}{4}k^3\ge\frac{1}{4}k^3$$

Vậy từ nhận xét đầu bài viết ta có ngay đpcm!

Dấu "=" có $\Leftrightarrow k=1;\ (a;,b,c)=\left(0;\frac{1}{2};k-\frac{1}{2}\right)$ và các hoán vị của nó.