Phần 1
BẤT ĐẲNG THỨC
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Chủ đề 1 BẤT ĐẲNG THỨC

Tóm tắt lí thuyết

1. Tính chất:

Điều kiện		Nội dung	
Cộng hai vế với số bất kì		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	*(1)*
Bắc cầu		$a < b$ và $b < c \Leftrightarrow a < c$	*(2)*
Nhân hai vế	$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	*(3a)*
	$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	*(3b)*
Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều		$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow a + c < b + d$	*(4)*
Nhân 2 vế BĐT khi biết nó dương: $a > 0$, $c > 0$		$\left.\begin{matrix} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow ac < bd$	*(5)*
Nâng lên lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	*Mũ lẻ*	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	*(6a)*
	Mũ chẵn	$0 \le a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	*(6b)*
Lấy căn hai vế	$a \ge 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	*(7a)*
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	*(7b)*
Nghịch đảo	*a, b cùng dấu*	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	*(8a)*
	a, b khác dấu	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	*(8b)*

✍ ***Lưu ý:***

- ✓ ***Không*** *có qui tắc chia hai về bất đẳng thức cùng chiều.*
- ✓ *Ta chỉ nhân hai vế bất đẳng thức khi biết chúng dương.*
- ✓ *Cần nắm vững các hằng đẳng thức đáng nhớ và cách biến đổi.*

2. Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác:

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta có:

- $a, b, c > 0$
- $|a-b| < c < a+b$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối:

- $-|x| \le x \le |x|$, *với mọi số thực x*
- $|x| \ge 0; |x| \ge x; |x| \ge -x$, *với mọi số thực x*
- $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ *với* $a \ge 0$
- $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ *hoặc* $x \ge a$ *với* $a \ge 0$
- *Định lí:* $\forall$ *a, b ta có:* $\big||a|-|b|\big| \le |a+b| \le |a|+|b|$.

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cô-si hay AM-GM)

- ***Định lí***: *Với hai số không âm a, b ta có:*

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}} \text{ hay } \boxed{a+b \ge 2\sqrt{ab}} \text{ hay } \boxed{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b.

- ***Hệ quả 1***: *Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.*
Tức là với hai số dương a, b có a + b = S không đổi thì:

$$2\sqrt{ab} \le S \Leftrightarrow ab \le \frac{S^2}{4} \Rightarrow (ab)_{Max} = \frac{S^2}{4}, \text{ đạt được khi } a = b$$

Ý nghĩa hình học: *Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.*

- ***Hệ quả 2***: *Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.*
Tức là với hai số dương a, b có a. b = P không đổi thì:

$$a+b \ge 2\sqrt{P} \Rightarrow (a+b)_{Min} = 2\sqrt{P}, \text{ đạt được khi } a = b$$

Ý nghĩa hình học: *Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.*

- ***Mở rộng:***

① *Với các số a, b, c không âm, ta có:*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ hay } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ hay } \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

② *Với n số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ không âm, ta có:*

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

5. Bất đẳng thức Bunhiacôpxki (chứng minh trước khi dùng)

❖ ***Dạng tổng quát:***

Cho 2n số thực tùy ý $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, khi đó:

✓ **Dạng 1:**

$$\boxed{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

✓ **Dạng 2:**

$$\boxed{|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

✓ **Dạng 3:**

$$\boxed{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$.

❖ ***Hệ quả:***

✓ *Nếu* $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = c$ *là hằng số thì:*

$$\min(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2) = \frac{c^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$$

✓ *Nếu* $x_1^2 + x_1^2 + ... + x_n^2 = c^2$ *là hằng số thì:*

$$\max(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) = |c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n} \ge 0$$

$$\max(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) = -|c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n} \le 0$$

❖ ***Trường hợp đặc biệt:***

Cho a, b, x, y là những số thực, ta có:

✓ ***Dạng 1:*** $\boxed{(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

✓ ***Dạng 2:*** $\boxed{|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

✓ ***Dạng 3:*** $\boxed{ax+by \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}}$.

Dấu "=" $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \ge 0$.

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để chứng minh $A > B$ *bằng định nghĩa, ta lựa chọn theo các hướng sau:*

Hướng 1. *Chứng minh* $A - B > 0$

Hướng 2. *Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.*

Hướng 3. *Xuất phát từ một bất đẳng thức đúng.*

Hướng 4. *Biến đổi vế trái hoặc vế phải thành vế còn lại.*

Chú ý*: Với các hướng 1 và hướng 2 công việc thường là biến đổi* $A-B$ *thành tổng các đại lượng không âm. Và với các bất đẳng thức* $A-B\geq 0$ *chúng ta cần chỉ ra dấu "=" xảy ra khi nào ?*

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.1 Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a^2+b^2\geq 2ab$

② $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$

③ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

④ Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

⑤ $a^3+b^3\geq a^2b+b^2a=ab(a+b)$

⑥ $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\geq\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.1 Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

② $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc-ca)$

③ $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$

④ $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a(a^2b-a+c+1)$

⑤ $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$

⑥ $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

⑦ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge \dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}$, với $a, b, c>0$

⑧ $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, với a, b, c ≥ 0

1.2 Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, với $a,\ b \ge 0$

② $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$

③ $a^4+3 \ge 4a^2$

④ $a^3+b^3+c^3 \ge abc$, với a,b,c ≥ 0

⑤ $a^4+b^4 \le \dfrac{a^6}{b^2}+\dfrac{b^6}{a^2}$, với a, b ≠ 0 ⑥ $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$

⑦ $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2} \ge \dfrac{2}{1+ab}$, với $a,\ b>1$

⑧ $(a^5+b^5)(a+b) \ge (a^4+b^4)(a^2+b^2)$, với $ab>0$

1.3 Cho $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\boxed{a^2+b^2 \ge 2ab}$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge 8abc$

② $(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4) \ge 256abcd$

③ $a^4+b^4+c^4+d^4 \ge 4abcd$

1.4 Cho $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Chứng minh $\boxed{a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca}$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $(a+b+c) \le 3(a^2+b^2+c^2)$ ② $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$

③ $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ ④ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

⑤ $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$, với $a,\ b,\ c>0$

⑥ $a^4+b^4+c^4 \ge abc$, với $a+b+c=1$

1.5 Cho $a,\ b,\ c,\ d>0$. Chứng minh rằng: $\boxed{\text{nếu } \dfrac{a}{b}<1 \text{ thì } \dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}}$ (3).

Áp dụng bất đẳng thức (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

② $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

③ $2<\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+d}+\dfrac{c+d}{c+d+a}+\dfrac{d+a}{d+a+b}<2$

1.6 Cho $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$. Chứng minh $\boxed{a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)}$ (4).

Áp dụng bất đẳng thức (4) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{a^3+b^3}{ab}+\dfrac{b^3+c^3}{bc}+\dfrac{c^3+a^3}{ca}\ge 2(a+b+c)$

② $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{1}{abc}$, $a,\ b,\ c>0$

③ $\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1}\le 1$, với $abc=1$

④ $\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}\le 1$, với $a,\ b,\ c>0$ và $abc=1$

⑤ $\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}+\sqrt[3]{4\left(c^3+a^3\right)}\ge 2(a+b+c)$,

$a,\ b,\ c\ge 0$

1.7 Cho $a,\ b,\ x,\ y\in\mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức sau (BĐT Min-côp-xki): $\boxed{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}}$ (5). Áp dụng (5):

① Cho $a,\ b\ge 0$ thỏa $a+b=1$. Chứng minh: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{5}$

② Tìm GTNN của $P=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$, với $a,b\ne 0$

③ Cho $x,\ y,\ z>0$ thỏa $x+y+z=1$.

Chứng minh: $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$

Dạng 2. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy (AM-GM)

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Các dạng của bất đẳng thức Cauchy (AM-GM):

- *Với* $x, y \geq 0$ *thì* $\begin{cases} x+y \geq 2\sqrt{xy} & ① \\ x^2+y^2 \geq 2xy & ② \end{cases}$. *Dấu "=" xảy ra khi* $x = y$.
- *Với* $x, y \in \mathbb{R}$ *thì* $\begin{cases} \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy & ③ \\ (x+y)^2 \geq 4xy & ④ \end{cases}$. *Dấu "=" xảy ra khi* $x = y$.
- *Với* $x, y, z \geq 0$ *thì* $\begin{cases} x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} & ⑤ \\ \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz & ⑥ \end{cases}$. *Dấu "=" khi* $x = y = z$

B. BÀI TẬP MẪU

Loại 1: Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân và ngược lại:

VD 1.2 Cho $a,\ b,\ c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $(a+b)^2 \geq 4ab$ ② $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

③ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ ④ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Loại 2: Tách cặp nghịch đảo

VD 1.3 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2\ \left(\forall a,b>0\right)$

② $\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x}\geq 6\ \left(\forall x>0\right)$

③ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-2}\geq 3\quad\left(\forall x>2\right)$

④ $a+\dfrac{1}{a}\geq\dfrac{10}{3}\quad\left(\forall a\geq 3\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Loại 3: Sử dụng bổ đề suy luận từ BĐT Cauchy (AM-GM):

Dạng 1: $\boxed{(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\ge 4 \text{ hay } \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge \dfrac{4}{x+y}}$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi x = y

Dạng 2: $\boxed{(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9 \text{ hay } \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge \dfrac{9}{x+y+z}}$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z

VD 1.4 Cho $a,\ b>0$. Chứng minh $\boxed{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge \dfrac{4}{a+b}}$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 2\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)$ $(\forall a,b,c>0)$

② $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge 2\left(\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{2b+c+a}+\dfrac{1}{2c+a+b}\right)$ $(\forall a,b,c>0)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Loại 4: Đặt ẩn phụ để áo dụng BĐT Cauchy:

VD 1.5 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh bất đẳng thức (BĐT Nesbit) sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

HD: Đặt $\begin{cases} b+c=x \\ c+a=y \\ a+b=z \end{cases}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Loại 1: Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân và ngược lại:

1.8 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a^2+b^2\geq 2ab$ ② $(a+b)(1+ab)\geq 4ab$

③ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ ④ $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

⑤ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 8$ ⑥ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{16}{a+b+c+d}$

⑦ $(1+a+b)(a+b+ab)\ge 9ab$ ⑧ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8\ge 64ab(a+b)^2$

⑨ $3a^3+7b^3\ge 9ab^2$ ⑩ $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

⑪ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ ⑫ $\frac{a+4}{\sqrt{a+3}}\ge 2, \forall a>-3$

1.9 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

② $ab+bc+ca\ge\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

③ $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$ ④ $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

⑤ $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge a+b+1$ ⑥ $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

1.10 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$ ② $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c$

③ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ④ $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$

⑤ $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$ ⑥ $\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge a^2+b^2+c^2$

Loại 2: Tách cặp nghịch đảo

1.11 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a+\frac{1}{a^2}\ge\frac{9}{4}\quad\left(\forall a\ge 2\right)$ ② $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\quad\left(\forall a\in\mathbb{R}\right)$

③ $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}}\ge 6\quad\left(\forall x>1\right)$ ④ $a+\frac{1}{a(a-b)}\ge 3\quad\left(\forall a>b>0\right)$

Loại 3: Sử dụng bổ đề suy luận từ BĐT Cauchy (AM-GM):

1.12 Cho $a,\ b>0$. Chứng minh $\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}}$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau, với $a,\ b,\ c>0$:

① $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

② $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}\right)$

③ $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le 1$ với $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$

④ $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le \frac{a+b+c}{2}$

1.13 Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

1.14 Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh $\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}}$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\ge \frac{9}{a+b+c}$ $\left(\forall a,b,c>0\right)$

② $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge \frac{3}{2}(a+b+c)$ $\left(\forall a,b,c>0\right)$

③ $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\le \frac{3}{4}$ $\left(\forall x>y>z>0; x+y+z=1\right)$

④ $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$ $\left(\forall a,b,c>0\right)$

⑤ $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$ $\left(\forall a,b,c>0\right)$

Loại 4: Đặt ẩn phụ để áo dụng BĐT Cauchy:

1.15 Cho $x > 2014$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sqrt{x-2013}}{x+2} + \frac{\sqrt{x-2014}}{x} \le \frac{1}{2\sqrt{2015}} + \frac{1}{2\sqrt{2014}}$$

HD: Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-2013} \ge 0 \\ b = \sqrt{x-2014} \ge 0 \end{cases}$

1.16 Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z} \le \frac{3}{4}$$

HD: Đặt $\begin{cases} a = 2x+y+z > 0 \\ b = x+2y+z > 0 \\ c = x+y+2z > 0 \end{cases}$

Dạng 3. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy Schwarz

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thực chất bất đẳng thức Cauchy Schwarz là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Bunhiacôpski mà ở đây dễ dàng hình dung, tạm gọi là bất đẳng thức cộng mẫu số.

1. *Cho* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *và* $x,\ y > 0$. *Áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho bộ hai số:* $\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}, \dfrac{b}{\sqrt{y}}\right)$; $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}\right)$ *ta được:*

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)(x+y) \overset{\text{Bunhiacôpski}}{\geq} \left(\frac{a}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}}$$

(1)

2. *Cho* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ *và* $x,\ y,\ z > 0$. *Áp dụng BĐT Bunhiacôpski cho bộ ba số:* $\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}, \dfrac{b}{\sqrt{y}}, \dfrac{c}{\sqrt{z}}\right)$; $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ *ta được:*

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z) \overset{\text{Bunhiacôpski}}{\geq} \left(\frac{a}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}+\frac{c}{\sqrt{z}}.\sqrt{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}}$$ **(2)**

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.6 Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$, với $a,\ b,\ c > 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.17 Chứng minh:

① $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\geq 1$, với $a,\ b,\ c>0$

② $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq \dfrac{3}{2}$, với $a,\ b,\ c>0$

③ $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$

④ $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+c)^2}\geq \dfrac{9}{4(a+b+c)}$, với $a,\ b,\ c>0$

⑤ $\dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2}\geq 1$, với $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c=3$.

1.18 Với $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

① $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c$

② $\dfrac{a^3}{b+c-a}+\dfrac{b^3}{c+a-b}+\dfrac{c^3}{a+b-c}\geq a^2+b^2+c^2$

1.19 Với $a,\ b,\ c\geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

① $\dfrac{a}{a+2bc}+\dfrac{b}{b+2ac}+\dfrac{c}{c+2ab}\geq 1$

② $\dfrac{a}{2a+bc}+\dfrac{b}{2b+ac}+\dfrac{c}{2c+ab}\leq 1$

Dạng 4. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT C.B.S

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$	Cho $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$
① $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$	❶ $(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$
② $\lvert ax+by\rvert \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$	❷ $\lvert ax+by+cz\rvert \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$
③ $ax+by \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\ge 0$	❸ $ax+by+cz \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ *Dấu "=" xảy ra khi* $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}\ge 0$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.7 Chứng minh rằng nếu $x^2+y^2=1$ thì $\lvert 3x+4y\rvert \le 5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.20 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|3x+4y|\le 5$

② Nếu $x^2+2y^2=8$ thì $|2x+3y|\le 2\sqrt{17}$

③ Nếu $x^2+4y^2=1$ thì $|x-y|\le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

④ Nếu $36x^2+16y^2=9$ thì $|y-2x|\le \dfrac{5}{4}$

1.21 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① Nếu $x\in[1;\,3]$ thì $A=6\sqrt{x-1}+8\sqrt{3-x}\le 10\sqrt{2}$

② Nếu $x\in[1;\,5]$ thì $B=3\sqrt{x-1}+4\sqrt{5-x}\le 10$

③ Nếu $x\in[-2;\,1]$ thì $C=\sqrt{1-x}+\sqrt{2+x}\le \sqrt{6}$

④ Nếu $x\in[4;\,13]$ thì $D=2\sqrt{x-4}+\sqrt{13-x}\le 3\sqrt{5}$

1.22 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|x+2y|\le \sqrt{5}$

② Nếu $3x+4y=1$ thì $x^2+y^2\ge \dfrac{1}{25}$

③ Nếu $4x-3y=15$ thì $x^2+y^2\ge 9$

Dạng 5. Chứng minh BĐT dựa vào tọa độ vectơ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. $\vec{a}=(x;y)\Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

2. $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

3. $AB+BC\ge AC$, *dấu "=" xảy ra khi B nằm giữa A và* **C.**

4. $|\vec{u}|-|\vec{v}|\le|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u}, \vec{v}$ *cùng hướng*

5. $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *cùng hướng*

6. $|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}|.|\vec{v}|$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.8 CMR: $\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\ge 2\sqrt{a^2+b^2}$, với $a, b, c\in\mathbb{R}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.23 Chứng minh bất đẳng thức sau:

① $\sqrt{a^2+4b^2+6a+9}+\sqrt{a^2+4b^2-2a-12b+10}\geq 5$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$

② $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}\geq\sqrt{b^2+cb+c^2}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$

③ $\sqrt{(a-b)^2+c^2}+\sqrt{(a+b)^2+c^2}\geq 2\sqrt{a^2+c^2}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$

④ $-1\leq\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}<1$, với $x\in\mathbb{R}$

⑤ $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$, với $a>c>0,\ b>c$

Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. $-|x| \le x \le |x|$, *với mọi số thực x*

2. $|x| \ge 0; |x| \ge x; |x| \ge -x$, *với mọi số thực x*

3. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ *với* $a \ge 0$

4. $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ *hoặc* $x \ge a$ *với* $a \ge 0$

5. *Định lí:* $\forall a,\ b$ *ta có:* $\big||a| - |b|\big| \le |a+b| \le |a| + |b|$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.9 Với các số $a,\ b,\ c$ tùy ý. Chứng minh rằng:

① $|a \pm b| \ge |a| - |b|$ ② $|a - b| \le |a| + |b|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.24 Với các số $a,\ b,\ c$ tùy ý. Chứng minh rằng:

① $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$ ② $|a-b|+|b-c| \ge |a-c|$

③ $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} \le \dfrac{|b|}{1+|b|}$ ④ $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$

1.25 Chứng minh rằng:

① $|a| < 2|a-b|$ với $|a| > 2|b|$ ② Nếu $x \ge y \ge 0$ thì $\dfrac{x}{x+1} \ge \dfrac{y}{y+1}$

1.26 Chứng minh rằng: $x+|x| \ge 0$ với mọi x $\in$ R.

Áp dụng: Chứng minh rằng $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ xác định với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.27 Chứng minh rằng:

① Nếu $|a| < 1$, $|b-1| < 10$, $|a-c| < 10$ thì $|ab-c| < 20$.

② Nếu $|a| < 1$, $|b| < 1$ thì $|a+b| < |1+ab|$.

Dạng 7. Sử dụng phương pháp làm trội

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Phương pháp:

Để chứng minh $A < B$, ta làm trội A thành C ($A \le C$), trong đó C là dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn, sau đó chứng minh $C \le B$ (biểu thức C đóng vai trò trung gian để so sánh A và B).

- *Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ là cố gắng biểu diễn mỗi nhân tử a_k của S_n dưới dạng hiệu 2 số hạng liên tiếp nhau $a_k = m_k - m_{k+1}$. Khi đó:*

$$S_n = \left(m_1 - m_2\right) + \left(m_2 - m_3\right) + \left(m_n - m_{n+1}\right) = m_1 - m_{n+1}$$

- *Phương pháp chung để tính tích hữu hạn $P_n = a_1.a_2.a_3.\ldots a_n$ là cố gắng biểu diễn mỗi nhân tử a_k của P_n dưới dạng thương 2 số hạng liên tiếp nhau $a_k = \dfrac{m_k}{m_{k+1}}$. Khi đó:*

$$P_n = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_3} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n+1}} = \frac{m_1}{m_{n+1}}$$

2. Ví dụ:

① CMR: $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} < 1$ *với* $n \in \mathbb{N}^*$ *(1)*

Giải

Ta có :

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Do đó VT (1)= $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$ *với* $n\in\mathbb{N}^*$

Vậy $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1$ *với* $n\in\mathbb{N}^*$

② *CMR:* $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\geq\frac{4}{3}$ *(1) với* $n\in\mathbb{N}^*$

Giải

Ta có : $1+\frac{1}{k^2+2k}=\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+1}{k+2}$

$\Rightarrow\quad 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}$

$1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}$

....

$1+\frac{1}{n^2+2n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}$

Do đó, VT (1):

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{2n+2}{n+2}=2-\frac{2}{n+2}\geq\frac{4}{3}$$

Vậy $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)\geq\frac{4}{3}$ *với* $n\in\mathbb{N}^*$

B. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.28 Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

① $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}<1$

② $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$

③ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$

1.29 Cho $k>0$, chứng minh: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Áp dụng: CM: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

1.30 Cho $k>0$, chứng minh $\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Áp dụng: Chứng minh: $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^3}<2$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

Dạng 8. Ứng dụng BĐT để giải PT, HPT, BPT

- ***Loại 1: Tổng hai số không âm:***

$$\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}.$$

- ***Loại 2: Phương pháp đối lập:***
  - ✓ *Giải phương trình f(x) = g(x) (*)*
  - ✓ *Nếu chứng minh được* $\begin{cases} f(x)\geq M \\ g(x)\leq M \end{cases}$ *thì* $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=M \\ g(x)=M \end{cases}$

- ***Loại 3: Sử dụng tính chất:***
  - ✓ *Giải phương trình* $f\left(x\right)+g\left(x\right)=M+N$ *(*)*
  - ✓ *Nếu chứng minh được* $\begin{cases} f(x)\leq M \\ g(x)\leq N \end{cases}$ *thì* $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=M \\ g(x)=N \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

<u>**VD 1.10**</u> Giải phương trình sau: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=x^2-10x+27$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VD 1.11 Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x+2$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.31 Giải các phương trình sau:

① $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{-3x^2+3x+1}$.

② $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

③ $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+4$

④ $\sqrt{2x-1}+\sqrt{19-2x}=\dfrac{6}{-x^2+10x-24}$

⑤ $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=1-x^2+2x$.

⑥ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

⑦ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{2x^2+4x+3}=2-2x-x^2$

⑧ $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=\sqrt{24x^2-2x-x^2}$

Bài tập trắc nghiệm chủ đề 1: Bất đẳng thức

TN1.1 Nếu $a > b$ và $c > d$. thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac > bd$. **B.** $a - c > b - d$.

C. $a - d > b - c$. **D.** $-ac > -bd$.

TN1.2 Nếu $m > 0$, $n < 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $m > -n$. **B.** $n - m < 0$. **C.** $-m > -n$. **D.** $m - n < 0$.

TN1.3 Nếu a, b và c là các số bất kì và $a > b$ thì bất đẳng nào sau đây đúng?

A. $ac > bc$. **B.** $a^2 < b^2$.

C. $a + c > b + c$. **D.** $c - a > c - b$.

TN1.4 Nếu $a > b$ và $c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. **B.** $a - c > b - d$.

C. $ac > bd$. **D.** $a + c > b + d$.

TN1.5 Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a?

A. $6a > 3a$. **B.** $3a > 6a$.

C. $6 - 3a > 3 - 6a$. **D.** $6 + a > 3 + a$.

TN1.6 Nếu a, b, c là các số bất kì và $a < b$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $3a + 2c < 3b + 2c$. **B.** $a^2 < b^2$.

C. $ac > bc$. **D.** $ac < bc$.

TN1.7 Nếu $a > b > 0$, $c > d > 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $ac > bc$. **B.** $a - c > b - d$.

C. $a^2 > b^2$. **D.** $ac > bd$.

TN1.8 Nếu $a > b > 0$, $c > d > 0$. thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a + c > b + d$. **B.** $ac > bd$.

C. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. **D.** $\frac{a}{b} > \frac{d}{c}$.

TN1.9 Sắp xếp ba số $\sqrt{6}+\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$ và $\sqrt{3}+\sqrt{16}$ theo thứ tự từ bé đến lớn thì thứ tự đúng là

A. $\sqrt{19}, \sqrt{3}+\sqrt{16}, \sqrt{6}+\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{16}, \sqrt{19}, \sqrt{6}+\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{19}, \sqrt{6}+\sqrt{13}, \sqrt{3}+\sqrt{16}$. **D.** $\sqrt{6}+\sqrt{13}, \sqrt{3}+\sqrt{16}, \sqrt{19}$.

TN1.10 Nếu $a+2c>b+2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a>-3b$. **B.** $a^2>b^2$.

C. $2a>2b$. **D.** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

TN1.11 Nếu $2a>2b$ và $-3b<-3c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a<c$. **B.** $a>c$.

C. $-3a>-3c$. **D.** $a^2>c^2$.

TN1.12 Một tam giác có độ dài các cạnh là $1, 2, x$ trong đó x là số nguyên. Khi đó, x bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

TN1.13 Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây có thể nhận giá trị âm?

A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1.

C. a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

TN1.14 Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây luôn luôn dương.

A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1.

C. a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

TN1.15 Trong các số $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $2+\sqrt{3}$, 4

A. số nhỏ nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $2+\sqrt{3}$

B. số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là 4.

C. số nhỏ nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$.

D. số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$.

TN1.16 Cho hai số thực a,b sao cho $a>b$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a^4>b^4$.
B. $-2a+1<-2b+1$.
C. $b-a<0$.
D. $a-2>b-2$.

TN1.17 Nếu $0<a<1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\frac{1}{a}>\sqrt{a}$.
B. $a>\frac{1}{a}$.
C. $a>\sqrt{a}$.
D. $a^3>a^2$.

TN1.18 Cho a,b,c,d là các số thực trong đó $a,c\neq 0$. Nghiệm của phương trình $ax+b=0$ nhỏ hơn nghiệm của phương trình $cx+d=0$ khi và chỉ khi

A. $\frac{b}{a}<\frac{c}{d}$.
B. $\frac{b}{a}>\frac{c}{d}$.
C. $\frac{b}{d}>\frac{a}{c}$.
D. $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$.

TN1.19 Nếu $a+b<a$ và $b-a>b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab>0$.
B. $b<a$.
C. $a<b<0$.
D. $a>0$ và $b<0$.

TN1.20 Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây **không đúng** ?

A. $a^2<ab+ac$.
B. $ab+bc>b^2$
C. $b^2+c^2<a^2+2bc$.
D. $b^2+c^2>a^2+2bc$.

TN1.21 Cho a là số thực bất kì, $P=\frac{2a}{a^2+1}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi a?

A. $P>-1$.
B. $P>1$.
C. $P<-1$.
D. $P\leq 1$.

TN1.22 Cho $Q=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ với a,b,c là ba số thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $Q\geq 0$ chỉ đúng khi a,b,c là những số dương.
B. $Q\geq 0$ chỉ đúng khi a,b,c là những số không âm.
C. $Q>0$. với a,b,c là những số bất kì.
D. $Q\geq 0$ với a,b,c là những số bất kì.

TN1.23 Số nguyên a lớn nhất sao cho $a^{200} < 3^{300}$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

TN1.24 Cho hai số thực a, b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a+b| = |a| + |b|$ **B.** $|a+b| \le |a| + |b|$

C. $|a+b| < |a| + |b|$ **D.** $|a+b| > |a| + |b|$

TN1.25 Cho hai số thực a, b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|-ab| < |a|.|b|$. **B.** $\left|\frac{a}{b}\right| > \frac{|a|}{|-b|}$ với $b \ne 0$.

C. Nếu $|a| < |b|$ thì $a^2 < b^2$. **D.** $|a-b| > |a| - |b|$.

TN1.26 Cho hai số thực a, b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a-b| \le |a| + |b|$. **B.** $|a-b| = |a| + |b|$.

C. $|a-b| = |a| - |b|$. **D.** $|a-b| > |a| - |b|$.

TN1.27 Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực x?

A. $|x| > x$. **B.** $|x| > -x$. **C.** $|x|^2 > x^2$. **D.** $|x| \ge x$.

TN1.28 Nếu a, b là những số thực và $|a| \le |b|$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a^2 \le b^2$. **B.** $\frac{1}{|a|} \le \frac{1}{|b|}$ với $ab \ne 0$.

C. $-b \le a \le b$. **D.** $a \le b$.

TN1.29 Cho $a > 0$. Nếu $x < a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $|x| < a$. **B.** $-x \le |x|$. **C.** $|x| < |a|$. **D.** $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{a}$.

TN1.30 Nếu $|x| < a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $x < -a$. **B.** $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$. **C.** $-|x| < -a$. **D.** $x < a$.

TN1.31 Cho $a \geq 1, b \geq 1$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng** ?

A. $a \geq 2\sqrt{a-1}$.

B. $ab \geq 2a\sqrt{b-1}$.

C. $ab < 2b\sqrt{a-1}$.

D. $2\sqrt{b-1} \leq b$.

TN1.32 Điền dấu $(>, <, \geq, \leq)$ thích hợp vào ô trống để được một bất đẳng thức đúng

A. Nếu a, b dương thì $\dfrac{ab}{a+b} \square \dfrac{a+b}{4}$.

B. Với a, b bất kỳ $2\left(a^2 - ab + b^2\right) \square\ a^2 + b^2$.

C. Nếu a, b, c dương thì $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \square\ 1$.

TN1.33 Cho a, b là các số thực. Xét tính đúng–sai của các mệnh đề sau:

A. $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq \dfrac{a^2+b^2}{2}$. $\square$

B. $a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab$. $\square$

C. $a^2 + b^2 + 9 > 3(a+b) + ab$. $\square$

TN1.34 Cho a, b, c, d là các số dương. Hãy điền dấu $(>, <, \geq, \leq)$ thích hợp vào ô trống

A. Nếu $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{a+b}{a} \square \dfrac{c+d}{c}$.

B. Nếu $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{a+b}{b} \square \dfrac{c+d}{d}$.

C. $a + b + c \square \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

D. $2\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \square\ 2ab + a + b$.

TN1.35 Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Hãy xác định tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

A. $ab + bc + ca \geq 0$. $\square$

B. $ab + bc + ca \geq -\dfrac{1}{2}$. $\square$

C. $ab + bc + ca < 1$. $\square$

D. $ab + bc + ca \leq 1$. $\square$

Chủ đề 2 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Tóm tắt lí thuyết

Khái niệm GTLN, GTNN của hàm số (biểu thức):

Xét hàm số $y = f(x)$ *với tập xác định D:*

- *M là GTLN của* $f(x)$ *trên D* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

  Kí hiệu: $\max[f(x)] = M$ *khi* $x = x_0$.

- *m là GTNN của* $f(x)$ *trên D* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

  Kí hiệu: $\min[f(x)] = m$ *khi* $x = x_0$.

- ***Chú ý***: *- Biểu thức có thể không có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.*
  - Biểu thức có thể có cả hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Phương pháp giải toán

Dạng 1. Dùng tam thức bậc hai

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- $P = m + [f(x)]^2 \ge m \Rightarrow \min P = m \Leftrightarrow f(x) = 0$
- $P = M - [f(x)]^2 \le M \Rightarrow \max P = M \Leftrightarrow f(x) = 0$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.12 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$P = a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b - 12$$

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.32 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $A = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 9$

② $B = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (x-y+4)^2$

③ $C = x^2y^2 + x^2 - 6xy + 4x - 3$

④ $D = x^2 + 15y^2 + xy + 8x + y + 2017$

⑤ $E = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$

⑥ $F = x^2y^2 + 2x^2 + 24xy + 16x + 191$

⑦ $G = x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 2x + 12y + 6z + 24$

⑧ $H = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$.

⑨ $I = a^2 + b^2 + ab - 3a - 3b + 2014$

1.33 Cho $a,\ b,\ c$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2$

② $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$

Dạng 2. Dùng BĐT Cauchy

✪✪✪

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Hệ quả:

- *Nếu* $x,\ y>0$ *có* $S=x+y$ *không đổi thì* $P=xy$ *lớn nhất khi* $x=y$.
- *Nếu* $x,\ y>0$ *có* $P=xy$ *không đổi thì* $S=x+y$ *nhỏ nhất khi* $x=y$.

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.13 Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

① $G=(x-3)(7-x)$, với $3\le x\le 7$

② $H=(2x-1)(3-x)$, với $0{,}5\le x\le 3$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VD 1.14 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $K=\dfrac{(x+2017)^2}{x}$, với $x>0$ ② $L=\dfrac{(4+x)(2+x)}{x}$, với $x>0$

③ $P=x^2+\dfrac{2}{x^3}$, với $x>0$ ④ $Q=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-2}$, với $x>2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VD 1.15 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

① $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$ ② $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{x+8}$

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.34 Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

① $A=3x^2\left(8-x^2\right)$ với $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$

② $B=x(2-x)$ với $0\le x\le 2$

③ $C=(2x-1)(3-x)$ với $0,5\le x\le 3$

④ $D=x\left(3-\sqrt{3}x\right)$ với $0\le x\le \sqrt{3}$

⑤ $E=4x(8-5x)$ với $0\le x\le 8/5$

⑥ $F=4(x-1)(8-5x)$ với $1\le x\le 8/5$

1.35 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

① $A=x+\dfrac{4}{x}$, với $x>0$

② $B=\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{36}{x+2}$, với $x>-2$

③ $C=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$, với $x>1$

④ $D=x+\dfrac{2}{3x-1}$, với $x>\dfrac{1}{3}$

⑤ $E=2x+\dfrac{3}{x}$, với $x>0$

⑥ $F=x+\dfrac{1}{x-1}$, với $x>1$

⑦ $G=\dfrac{(x+2)(8+x)}{x}$, với $x>0$

⑧ $H=\dfrac{4x^2+9}{2x}$, với $x>0$

⑨ $I=\dfrac{9x^2-21x+25}{3x}$, với $x>0$

⑩ $J=\dfrac{x^2+2x+4}{x}$, với $x>0$

1.36 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

① $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$

② $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$

③ $y=2\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$

④ $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}$

⑤ $y=4\sqrt{x+3}+5\sqrt{4-x}$

⑥ $y=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{6-x}$

1.37 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},\ \text{với } a,\ b,\ c>0$$

Dạng 3. Dùng BĐT C.B.S

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

✓ *Nếu* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$ *là hằng số thì:*

$$\min(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = \frac{c^2}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$$

✓ *Nếu* $x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = c^2$ *là hằng số thì:*

$$\max(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = |c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} \geq 0$$

$$\max(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = -|c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} \leq 0$$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.16 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

① $P = 2x + y$, biết $x^2 + y^2 = 5$

② $P = 4x + 2y$, biết $2x^2 + 3y^2 = 6$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.38 Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

① $P = 3x + 4y$, biết $x^2 + y^2 = 1$

② $P = 4\sqrt{3x+2} + \sqrt{9-x}$

③ $P = 2x + 7y$, biết $3x^2 + 8y^2 = 1$

④ $P = 2x + y$, biết $2x^2 + 5y^2 = 8$

⑤ $P = x + 3y$, biết $4x^2 + 3y^2 = 7$

1.39 Hai số dương x, y thỏa mãn $3x + 2y = 6xy$. Tìm GTNN của tổng $x + y$.

Dạng 4. Dùng BĐT chứa dấu giá trị tuyệt đối

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sử dụng các bất đẳng thức sau:

① $P = m + |\mathrm{f(x)}|^2 \geq m \Rightarrow \min P = m \Leftrightarrow f(x) = 0$

② $P = M - |\mathrm{f(x)}|^2 \leq M \Rightarrow \max P = M \Leftrightarrow f(x) = 0$

③ $|a| + |b| \geq |a - b|$. *Dấu "=" xảy ra* $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

④ $|a + b| \leq |a| + |b|$. *Dấu "=" xảy ra* $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

⑤ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$. *Dấu "=" xảy ra* $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ c \leq 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.17 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

① $P = 5 + |x - 2016|$ ② $P = |x - 2016| + |x - 2017|$

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.40 Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

① $P = |x + 1| + |2x + 5| + |3x - 18|$ ② $Q = |x + 2| + |x + 1| + |2x - 5|$

③ $Q = |x - 1| + |y - 2| + |z - 3|$ với $|x| + |y| + |z| = 2014$

Dạng 5. Dùng tọa độ vectơ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. $\vec{a}=(x;y)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

2. $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

3. $AB+BC\ge AC$, *dấu "=" xảy ra khi B nằm giữa A và* **C.**

4. $|\vec{u}|-|\vec{v}|\le|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u},\vec{v}$ *cùng hướng*

5. $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|$, *dấu "=" xảy ra khi* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ *cùng hướng*

6. $|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}|.|\vec{v}|$

B. BÀI TẬP MẪU

VD 1.18 Tìm GTNN: $P=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

1.41 Tìm GTLN, GTNN:

① Tìm GTNN: $P=\sqrt{x^2-2ax+2a^2}+\sqrt{x^2-2bx+2b^2}$, $a<0,b>0$

② Tìm GTNN: $P=\sqrt{a^2-6a+13}+\sqrt{a^2+2a+2}$

③ Tìm GTLN: $P=\sqrt{x^2+10x+26}+\sqrt{x^2+4x+4}$

④ Tìm GTNN: $P=\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-2x+2}$

Bài tập trắc nghiệm chủ đề 2: GTLN-GTNN

TN1.36 Cho $f\left(x\right)=x-x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$.

B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$.

D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

TN1.37 Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.

B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.

D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

TN1.38 Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ với $x.y$ lớn nhất

A. $a=\frac{1}{4}$.

B. $a=\frac{1}{2}$

C. $a=-\frac{1}{2}$

D. $a=1$.

TN1.39 Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$.

B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.

C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$.

D. không có giá trị lớn nhất.

TN1.40 Cho $a-b=2$. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị nhỏ nhất là -1. **B.** có giá trị lớn nhất là -1.

C. có giá trị nhỏ nhất khi $a=b$. **D.** không có giá trị nhỏ nhất.

TN1.41 Cho $x^2+y^2=1$, gọi $S=x+y$. Khi đó ta có

A. $S\le-\sqrt{2}$. **B.** $S\ge\sqrt{2}$.

C. $-\sqrt{2}\le S\le\sqrt{2}$. **D.** $-1\le S\le1$.

TN1.42 Cho x,y là hai số thực thay đổi sao cho $x+y=2$. Gọi $m=x^2+y^2$. Khi đó ta có:

A. giá trị nhỏ nhất của m là 2. **B.** giá trị nhỏ nhất của m là 4.

C. giá trị lớn nhất của m là 2. **D.** giá trị lớn nhất của m là 4.

TN1.43 Với mỗi $x>2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

A. $\frac{2}{x}$. **B.** $\frac{2}{x+1}$. **C.** $\frac{2}{x-1}$. **D.** $\frac{x}{2}$.

TN1.44 Giá trị nhỏ nhất của biểu thức x^2+3x với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{27}{4}$ **D.** $-\frac{81}{8}$

TN1.45 Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2+3|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{9}{4}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{2}$.

TN1.46 Giá trị nhỏ nhất củabiểu thức $\mathrm{x}^2-6|\mathrm{x}|$ với $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ là:

A. -9. **B.** -6. **C.** 0. **D.** 3.

TN1.47 Cho biểu thức $P=-a+\sqrt{a}$ với $a\ge0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. GTLN của P là $\frac{1}{4}$. **B.** GTLN của P là $\frac{1}{4}$.

C. GTLN của P là $\frac{1}{2}$. **D.** P đạt GTLN tại $a=\frac{1}{4}$.

TN1.48 Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2-5x+9}$ bằng

A. $\dfrac{11}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{11}$. **C.** $\dfrac{11}{8}$. **D.** $\dfrac{8}{11}$.

TN1.49 Cho biểu thức $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

TN1.50 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ với $x>0$ là

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

TN1.51 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$ với $x>0$ là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

TN1.52 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$ là

A. 2. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 3.

TN1.53 Cho $x\geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

TN1.54 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ với $x>0$ là

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

TN1.55 Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ với $x>0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{2}$.

TN1.56 Điền số thích hợp vào chỗ chấm để được mệnh đề đúng

A. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ với $1\le x\le 3$ là…. …………..

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^2-5x+1$ là ……………

BÀI TẬP TỔNG HỢP PHẦN 1

1.42 Chứng minh rằng: $x^4-\sqrt{x^5}+x-\sqrt{x}+1>0, \forall x\ge 0$.

HD đặt $t=\sqrt{x}$.

1.43 Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}\ge 6$.

1.44 Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2\ge 2$ b) $a^4+b^4\ge 2$ c) $a^8+b^8\ge 2$

1.45 Cho $a>0,\ b>0$. Chứng minh $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

1.46 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $5(x-1)<x^5-1<5x^4(x-1)$, nếu $x-1>0$.

② $x^5+y^5-x^4y-xy^4\ge 0$, biết $x+y\ge 0$

③ $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$, biết $a,\ b,\ c>-\dfrac{1}{4},\ a+b+c=1$.

1.47 Chứng minh rằng nếu $a>b$ và $ab>0$ thì $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

1.48 Chứng minh rằng $a^2+ab+b^2\ge 0$ với mọi số thực $a,\ b$.

1.49 Chứng minh rằng:

① $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{2}\le\dfrac{a^3+b^3}{2}$, nếu $a\ge 0$ và $b\ge 0$.

② $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3}{3}\le\dfrac{a^6+b^6}{6}$, nếu $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

1.50 Chứng minh rằng, nếu $x\ge y\ge 0$ thì $\dfrac{x}{x+1}\ge\dfrac{y}{y+1}$

1.51 Chứng minh rằng:

① Nếu $a,\ b$ là hai số cùng dấu thì $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$

② Nếu $a,\ b$ là hai số trái dấu thì $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\leq -2$

1.52 Chứng minh rằng nếu $a,\ b,\ c>0$ thì: $\dfrac{a^4}{b}+\dfrac{b^4}{c}+\dfrac{c^4}{a}\geq 3abc$.

1.53 Chứng minh rằng nếu $a,\ b,\ c>0$ thì: $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

1.54 CMR nếu $a,\ b,\ c,\ d$ không âm thì: $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4\geq abcd$.

1.55 Chứng minh rằng nếu $a,\ b$ không âm thì: $\dfrac{a+b}{1+a+b}\leq\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$.

1.56 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, với $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$.

② $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$.

1.57 Chứng minh các bất đẳng thức sau:

① $\dfrac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}}\geq 4$, với $a\in\mathbb{R}$.

② $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$, với $a\in\mathbb{R}$.

1.58 So sánh: $\sqrt{a+2}+\sqrt{a+4}$ và $\sqrt{a}+\sqrt{a+6}$, với $a\geq 0$.

1.59 Cho $a,\ b,\ c\geq 0$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

1.60 Cho $a,\ b,\ c\in(0;\ 1)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai: $a(1-b)>\dfrac{1}{4},\ b(1-c)>\dfrac{1}{4},\ c(1-a)>\dfrac{1}{4}$.

1.61 Giả sử a, b, c là ba số dương sao cho: $ax+b(1-x)>cx(1-x)$ với mọi giá trị của x. Chứng minh rằng khi đó, với mọi giá trị của x ta cũng có:

$$\text{ax}+c(1-x)>bx(1-x) \text{ và } bx+c(1-x)>\text{ax}(1-x)$$

1.62 Cho các số thực $x, y, z>0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$16xyz(x+y+z)\le 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}$$

1.63 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+b)(1+a)}\ge\frac{3}{4}$$

1.64 Cho $a, b, c>0$ và $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right)\ge\frac{729}{512}$$

1.65 Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng: $\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}$

1.66 Cho a, b, c, p, q là 5 số dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb}\ge\frac{3}{p+q}$$

1.67 Cho a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

1.68 Áp dụng BĐT Cô-si để tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

① $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x}\ (\forall x>0)$ ② $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x}\ (\forall x>1)$

③ $y=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{x+1}\ (\forall x>-1)$ ④ $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{2x-1}\ \left(\forall x>\dfrac{1}{2}\right)$

⑤ $y=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{5}{x}\ (\forall : 0<x<1)$ ⑥ $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}\ (\forall x>0)$

1.69 Áp dụng BĐT Cô-si để tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

① $y=(x+3)(5-x)$ $(-3\le x\le 5)$

② $y=(x(6-x)$ $(0\le x\le 6)$

③ $y=(x+3)(5-2x)$ $(-3\le x\le \frac{5}{2})$

④ $y=(2x+5)(5-x)$ $(-5/2\le x\le 5)$

⑤ $y=(6x+3)(5-2x)$ $(-1/2\le x\le 5/2)$

⑥ $y=x^2\sqrt{9-x^2}$ $(-3\le x\le 3)$

1.70 Giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình sau:

① $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$ *ĐS:* $x=1$

② $|4x-1|+2|2x-1|=1$ *ĐS:* $\frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2}$

③ $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=2$ *ĐS:* $x\ge 3$

④ $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$ *ĐS:* $x=1\vee x=7$

⑤ $2x^4+(1-2x)^4=\frac{1}{27}$ *ĐS:* $x=1/3$

⑥ $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$ *ĐS:* $x=1/2$

⑦ $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\le 2$ *ĐS:* $x=1$

⑧ $|3x+1|\le|2x-1|+|x+2|$ *ĐS:* $x\in\mathbb{R}$

⑨ $|2x+3|\ge|3x+5|-|x+2|$ *ĐS:* $x\in\mathbb{R}$

⑩ $\begin{cases}\sqrt{xy}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{x}\\ 2\sqrt{xy-x}+\sqrt{x}=1\end{cases}$ *ĐS:* $(1;\ 1)$

⑪ $\begin{cases}\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-x}=2\\ x^2+y^2-x-y=2\end{cases}$

ĐS: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),(0;-1),(-1;0)$

1.71 Cho $a,\ b>0$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

1.72 Cho $a\ge 3$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=a+\dfrac{1}{a}$.

1.73 Cho $a\ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=a+\dfrac{1}{a^2}$.

1.74 Cho $a,\ b>0$ và $a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=ab+\dfrac{1}{ab}$.

1.75 Cho $a,\ b>0$. Tìm GTNN của biểu thức: $S=\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$.

1.76 Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c\le\dfrac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

1.77 Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c\le\dfrac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$$

1.78 Cho $a,\ b,\ c0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm GTNN của: $S=a+b+c+\dfrac{1}{abc}$

1.79 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

1.80 Cho $a,\ b,\ c$ khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$$

1.81 Cho 3 số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}$.

1.82 Cho hai số thực a và b thỏa điều kiện $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=a^8+b^8$.

1.83 Cho x, y là hai số thay đổi và thỏa mãn điều kiện $0\le x\le 3$, $0\le y\le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=(3-x)(4-y)(2x+3y)$.

1.84 Cho 3 số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

1.85 Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T=\dfrac{4a}{b+c-a}+\dfrac{9b}{c+a-b}+\dfrac{16c}{a+b-c}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN 1

TN1.57 Cho $a > b > 0$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^3 + b^3 > (a+b)(a-b)^2$. **B.** $(a+b)^2 > 4ab$.

C. $a(a+2b) > b(b+2a)$. **D.** Cả 3 đáp án trên.

TN1.58 Cho 2 số a và b. Câu nào sau đây **sai**?

A. $4(1-a)^2 \geq 2 - 4a^2$. **B.** $\dfrac{|a-b|}{1+|a-b|} < \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$.

C. $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$. **D.** $4ab(a-b)^2 \leq (a^2 - b^2)^2$.

TN1.59 Cho a, b, c với $a \leq b$ và $a \leq c$. Câu nào sau đây đúng?

A. $a^2 \leq bc$. **B.** $2a^2 - b^2 \leq c^2$.

C. $2a - b \leq c$. **D.** Cả 3 đáp án trên.

TN1.60 Cho a, b, c, d với $a > b > 0$ và $c > d > 0$. Bất đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $a + c > b + d$. **B.** $a - c > b - d$.

C. $ac > bd$. **D.** $a^2 + c^2 > b^2 + d^2$.

TN1.61 Cho 3 số a, b, c không âm. Bất đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $(a+b-c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$. **B.** $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{ab}$.

C. $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$. **D.** $(a+b)(ab+1) \geq 4ab$.

TN1.62 Xét các mệnh đề sau đây:

I. $a^3 - b^3 \leq \dfrac{3}{2}(a-b)(a^2+b^2)$.

II. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

III. $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

Mệnh đề nào đúng?

A. I và II. **B.** II và III. **C.** I và III. **D.** I, II và III.

TN1.63 Bất đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} \le 2$.   **B.** $\dfrac{\sqrt{a^6+1}}{a^6+5} \ge \dfrac{1}{4}$.

C. $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab+1} \le \dfrac{1}{2}$.   **D.** Cả 3 đáp án trên.

TN1.64 Cho $a,\ b,\ c$ là 3 cạnh của tam giác. Xét các bất đẳng thức sau đây:

I. $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$

II. $a^2+b^2+c^2 > 2(ab+bc+ca).$

III. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2 > a^3+b^3+c^3$.

Bất đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ I.   **B.** Chỉ II.   **C.** Chỉ III.   **D.** I và III.

TN1.65 Cho $a,\ b,\ c$ là 3 số không âm. Xét bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{ab}+1\right) \ge 4\sqrt{ab}$.   **B.** $a^3+b^3 \le (a+b)ab$.

C. $a^2+b^2+c^2 \le ab+bc+ca$.   **D.** Cả A và **C.**

TN1.66 Câu **10.** Câu nào sau đây đúng với mọi số x và y ?

A. $4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 \le \left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^2$.   **B.** $x^4-y^4 \ge 2\left(x^2-y^2\right)xy$.

C. $x+\dfrac{1}{y} \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.   **D.** Cả A và **B.**

TN1.67 Cho $a,\ b,\ c$ dương. Bất đẳng thức nào đúng?

A. $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b} \ge 8$.   **B.** $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b} \ge 6$.

C. $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b} \ge 9$.   **D.** Cả A và **C.**

TN1.68 Cho $a,\ b,\ c$ dương. Câu nào sau đây **sai** ?

A. $a^3+b^3\ge ab(a+b)$. **B.** $(a+b)(b+c)(c+a)\le 8abc$.

C. $a^2+b^2\ge \frac{1}{2}(a+b)^2$. **D.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$.

TN1.69 Cho $a,\ b,\ c$ dương. Bất đẳng thức nào đúng?

A. $\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}+\frac{c^2+1}{c}\ge 6$. **B.** $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 9$.

C. $\left(\frac{1}{b}+a\right)\left(\frac{1}{c}+b\right)\left(\frac{1}{a}+c\right)\ge 8$. **D.** Cả A và C.

TN1.70 Cho $x^2+y^2=1$. Câu nào sau đây **sai** ?

A. $|12x+5y|\le 13$. **B.** $|12x+5y|\le 17$.

C. $|12x+5y|\le 169$. **D.** $|12x+5y|\le 289$.

TN1.71 Cho bốn số $a,\ b,\ x,\ y$ thỏa mãn $x^2+y^2=2,\ a=3x,\ b=3y$. Tìm bất đẳng thức đúng.

A. $|ax+by|\le 3$. **B.** $|ax+by|\le 9$.

C. $|a(x+y)+b(x-y)|\le 3\sqrt{6}$. **D.** $|a(x+y)+b(x-y)|\le 54$.

TN1.72 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-2x^2+15x-25$ trên $\left[\frac{5}{2};5\right]$.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{25}{8}$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{4}$.

TN1.73 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{2}{x-1}$ $(x>1)$.

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}+1$.

TN1.74 Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^8-32x^4$ trên $[0;\ 2]$.

A. 64. **B.** 0. **C.** 32. **D.** $\sqrt[4]{8}$.

TN1.75 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a+\frac{16}{a}$ với $a>0$.

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

TN1.76 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{7-x}+\sqrt{x+2}$ với $-2\le x\le 7$.

A. 18 và 9. **B.** 18 và 3.

C. 9 và $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$ và 3.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM PHẦN 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	D	D	A	B	C	A	C

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	D	B	D	A	A	D	A	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	D	C	B	C	A	D	A	B	D

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C					D	D	A	D	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	A	B	B	C	A	A	D	C	D

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	B	A	D	C		B	C	C	B

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
A	C	D	D	A	D	B	B	D	A

71	72	73	74	75	76				
C	B	D	A	B	D				

TN1.32 A. $\ge$; B. $\ge$; C. $\ge$.
TN1.33 A. sai; B. đúng; C. đúng.
TN1.34 A. $<$; B. $>$; C. $\ge$; D. $\le$.
TN1.35 A. sai; B. đúng; C. sai; D. đúng.
TN1.56 $2\sqrt{2}$ khi $x=2$; $-\frac{17}{8}$ khi $x=\frac{5}{4}$